

**İNFINİTESİMAL KONFORMAL DÖNÜŞÜMLER
HAKKINDA**

Lokman BİLEN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Aydın GEZER
2011
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNFINİTESİMAL KONFORMAL DÖNÜŞÜMLER HAKKINDA

Lokman BİLEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2011

Her hakkı saklıdır



**T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TEZ ONAY FORMU

İNFINİTESİMAL KONFORMAL DÖNÜŞÜMLER HAKKINDA

Doç. Dr. Aydın Gezer danışmanlığında, Lokman Bilen tarafından hazırlanan bu çalışma 06/082011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak ~~oybirliği/oy çokluğu~~ (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Arif SALİMOV

İmza :

Üye : Doç. Dr. Aydın GEZER

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN

İmza :

(imza)

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNFINİTESİMAL KONFORMAL DÖNÜŞÜMLER HAKKINDA

Lokman BİLEN

Atatürk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın GEZER

(M, g) Riemannian manifoldu üzerindeki X vektör alanının tanjant demete tam lifti ${}^C X$ in Cheeger-Gromoll metriği g_{CG} ' ye göre infinitesimal fibre-preserving konformal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart araştırılmıştır.

2011, 32 sayfa

Anahtar Kelimeler: Cheger-Gromoll metriği, İnfinitesimal konformal dönüşüm, İnfinitesimal homothetic dönüşüm, Riemannian manifold.

ABSTRACT

Master Thesis

ON INFINITESIMAL CONFORMAL TRANSFORMATIONS

Lokman BİLEN

Atatürk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Dr. Aydın GEZER

The purpose of this thesis is to investigate the necessary and sufficient conditions the complete lift ${}^C X$ to $T(M)$ of a vector field X on the Riemannian manifold (M, g) to be an infinitesimal fibre-preserving conformal transformation with respect to the Chegeer Gromoll metric g_{CG} .

2009, 32 pages

Keywords: Chegeer-Gromoll metric, Infinitesimal conformal transformation, Infinitesimal homothetic transformation, Riemannian manifold.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Çalışmalarında her türlü desteği sağlayan, hocam Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER’e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında vermiş oldukları destek ve teşvikten dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lokman BİLEN

Ağustos 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1.GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar.....	3
2.2. Tensör Alanları.....	5
2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon.....	7
2.4. Lie Türevlemesi.....	10
2.5. Riemannian Metriği-Riemannian Manifoldu.....	12
2.6. İnfinitesimal Konformal Dönüşümler.....	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	15
3.1. Tanjant Demet.....	15
3.2. Fonksiyonun Vertical Lifti.....	17
3.3. Vektör Alanının Vertikal Lifti.....	17
3.4. γ Operatörü.....	18
3.5. Fonksiyonun Tam Lifti.....	18
3.6. Vektör Alanının Tam Lifti.....	19
3.7. Fonksiyonların ve Vektör Alanlarının Yatay Liftleri.....	19
3.8. Sasaki Metriği.....	21
3.9.Cheeger-Gromoll Metriği.....	23
3.10.Adapte Olmuş Çatıda Temel Formüller.....	25
4. ARAŞTIRMA ve BULGULAR.....	28
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	31
KAYNAKLAR.....	32
ÖZGEÇMİŞ.....	33

SİMGELER DİZİNİ

C	Tam Lift
g_{CG}	Cheeger-Gromoll metriği
H	Yatay Lift
L_X	 X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
R_{ijb}^a	M manifoldunun eğrilik tensörünün bileşenleri
s_g	Sasaki metriği
$T(M_n)$	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$T_p(M_n)$	$p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzay
T_p^*	$p \in M_n$ noktasındaki kovektör uzayı
$T_q^p(m)$	$m \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı
V	Dikey Lift
$[X, Y]$	X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
Γ_{ij}^h	Cristoffel Sembolü

1. GİRİŞ

Tanjant demetlerin geometrisi, 1958 yılında Japon geometrici Sasaki tarafından yayınlanan temel makaleye kadar gider. Sasaki bu çalışmasında M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde alınan Riemannian metrik g 'yi kullanarak M_n 'nin tanjant demeti $T(M_n)$ üzerinde bir metrik kurmuştur. Bu günlerde bu metrik Sasaki metriği olarak tanımlanır.

Talantova and Shirokov (1975) çalışmasında, tanjant demet ile dual cebir üzerinde inşa edilmiş holomorf manifoldlar arasında bir bağlantı elde edilmiş ve bu bağlantı, lift konusunda milad kabul edilebilecek yeni bir yaklaşım ortaya çıkarmıştır. Bu yaklaşımın sonucu olarak synectic lift denilen liftlerin incelenmesine başlanmıştır. Benzer liftler yarım tanjant demette yapılmıştır (Vishnevskii 1983). Yüksek mertebeli tanjant demetlerde lift konusu plyural cebir ile bağlantılı olarak Morimoto (1968) and Vishnevskii *et al.* (1985) çalışmalarında incelenmiştir.

Gezer (2009) synectic lift metriğine göre tanjant demette infinitesimal fibre-preserving konformal dönüşümleri araştırmıştır. Tanjant demette farklı liftlere göre (örneğin Sasaki metriği ve I+II metriğine göre) infinitesimal konformal dönüşümler Yamauchi (1995) tarafından incelenmiştir.

Tanjant demet üzerinde sözde g-natural metriklerin geniş sınıfına ait tüm metrikler başlangıçta Kowalski and Sekizawa (1988) tarafından sınıflanmıştır ve sonra Abbasi ve Sarih (2005) tarafından tam olarak karakterize edilmiştir. Sasaki metriği bu g-natural metrikler için verilecek ilk örnektir. Diğer iyi bilinen g-natural metrik ise Cheeger and Gromoll (1972)'un makalesinden esinlenerek Musso and Tricerri (1988) tarafından birkaç yıl önce tanımlanan Cheeger-Gromoll metriği g_{CG} dir. g_{CG} metriğinin Levi-Civata konneksiyonu ve onun eğrilik tensörü Sekizawa (1991) tarafından hesaplanmıştır. Daha sonra Gudmundsson and Kappos (2002) tarafından Sekizawa'nın

hesaplamalarından bazı düzeltmeler yapılarak Sasaki metriği ve Cheeger-Gromoll metriği ile ilgili bir inceleme makalesi yayınlamışlardır.

Sunulan bu tezde ikinci ve üçüncü bölümlerde çalışmamızın daha iyi anlaşılması için diferensiyellenebilir manifold, tanjant demet ve bu demetteki özel diferensiyel geometrik objeler ve liftler hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise (M_n, g) Riemannian manifoldu üzerindeki X vektör alanının tanjant demete tam lifti cX 'in Cheeger-Gromoll metriği g_{CG} 'ye göre infinitesimal fibre-preserving konformal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart araştırılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifolddar

Tanım 2.1.1: M , Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\varphi: U \rightarrow V$$

homeomorfizmine M de n -boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık kümesine de φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve harita (U, φ) şeklinde gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Buradaki $x^1, \dots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2: Eğer M Hausdorff uzayının n -boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad (A\text{-indisler kümesi})$$

ise, M ye n -boyutlu topolojik manifold veya sadece n -boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.3: M , Hausdorff uzay ve k ise $0 \leq k$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in A, U_\alpha \subset M\}$ lokal koordinatlar ailesine M üzerinde C^k sınıfından n -boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi M ' yi örter, yani M , n -boyutlu topolojik manifolddur.
2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne koordinatların dönüşümü $(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j), i, j=1, \dots, n)$ denir. Burada u_β^i , (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları ve u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır. $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ olması halinde, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2 şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jacobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4: $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Haritaların C^k uzlaşması bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı C^k atlaslar kümesini denk atlasların ayrık denklik sınıflarına ayırır.

Tanım 2.1.5: M Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k -yapı denir.

C^k -yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir. M üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k -yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, M üzerindeki her bir C^k -yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0 -yapıya topolojik yapı, C^k , $(1 \leq k)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6: M , sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, M üzerinde n -boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ -yapısı verilmişse M uzayına n -boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir.

2.2 Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p(M_n)$, her $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun her $p \in M_n$ noktasına $T_p(M_n)$ uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir.

Tanım 2.2.2: Her $p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $\omega_p \in T_p^*$ (T_p^* , $p \in M_n$ noktasındaki kovektör uzayıdır) kovektörünü karşılık getiren $\omega: p \rightarrow \omega_p$ dönüşümüne M_n üzerinde kovektör alanı adı verilir.

C^∞ sınıfından bir manifold M_n olmak üzere her $m \in M_n$ noktasındaki her bir (p, q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.3: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p, q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p=1, q=0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p=0, q=1$ olursa kovektör alanı elde edilir. Eğer $p=q=0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise, her $x \in U$ için $df|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

$T, (p,q)$ tipli tensör alanı olsun. Kovektör alanları $\theta_1, \dots, \theta_p$ ve vektör alanları $X_1, \dots, X_q$ olmak üzere

$$T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)(m) = T_m(\theta_1(m), \dots, \theta_p(m), X_1(m), \dots, X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özellikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q})$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan $(0,1)$ tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her C^∞ sınıfından $\theta_1, \dots, \theta_p$ kovektör alanları ve her C^∞ sınıfından $X_1, \dots, X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma: u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değıştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 2.3.1: M_n manifoldu üzerinde vektör alanlarının modülü $\mathfrak{F}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y): \mathfrak{F}_0^1(M_n) \times \mathfrak{F}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{F}_0^1(M_n)$$

dönüşümü

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_Z (fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X: \mathfrak{F}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{F}_0^1(M_n)$$

dönüşümüne de X vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

Lokal koordinatlarda $x \in U \subset M_n$ olmak üzere $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n)$ olsun.

$\nabla_X = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_i$ olmak üzere;

$$\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n) \quad (2.1)$$

yazılır. Diğer taraftan $x \in U'$ olacak şekilde $\Psi(x) = (x^{1'}, \dots, x^{n'})$ koordinat komşuluğunu alalım. Burada;

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_{i'}, \nabla_{i'} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) = \Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \quad (2.2)$$

olur. $\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = A_i^{i'} \frac{\partial}{\partial x^i}$ olduğundan ve kovaryant türevin özelliklerinden dolayı

$$\nabla_{A_i^{i'} \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) = A_i^{i'} \nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (2.3)$$

yazılır. Ayrıca

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = A_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

olduğundan bu (2.3) denkleminde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_{i'} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} A_j^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} + A_i^{i'} A_j^j \Gamma_{ij}^k A_k^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \right) \end{aligned}$$

bulunur. (2.3) eşitliğinden

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = A_k^{k'} A_i^{i'} A_j^j \Gamma_{ij}^k + A_k^{k'} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \quad (2.4)$$

yazılır. Bu kurala göre dönüşen n^3 sayıdaki Γ_{ij}^k sayılarına afin konneksiyon katsayıları denir.

Bazen afin konneksiyon yerine bu katsayılar kullanılır.

$$\begin{aligned} \nabla_x Y &= \nabla_{x^i \partial_i} (y^j \partial_j) = x^i \nabla_i (y^j \partial_j) \\ &= x^i \partial_i y^k \partial_k + x^i y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \\ &= x^i (\partial_i y^k + \Gamma_{ij}^k y^j) \partial_k \end{aligned}$$

şeklinde lokal koordinatlarda yazarız. Buradan

$$\nabla_i y^k = \partial_i y^k + \Gamma_{ij}^k y^j \quad (2.5)$$

olur. (2.5) denklemini du^i ile çarpılırsa

$$\nabla_i y^k du^i = dy^k + \Gamma_{ij}^k du^i y^j \quad (2.6)$$

olarak yazılır. Buradan $\delta y^k = \nabla_i y^k . du^i$ ve $w_j^k = \Gamma_{ij}^k du^i$ ile gösterilirse,

$$\delta y^k = dy^k + w_j^k y^j \quad (2.7)$$

olur. (2.7) denklemine du yönünde kovaryant türev denir. Bu kovaryant türev vektör alanını öteler. Eğer $\delta y^k = 0$ ise vektör alanına paralel vektör alanı denir.

$f = W_k y^k$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $df = 0$ ise W_k vektör alanı paralel olur.

Bunu kullanarak f 'nin türevi alınır

$$\begin{aligned} df &= \delta W_k y^k + W_k \delta y^k \\ 0 &= \delta W_k y^k + W_k (dy^k + w_j^k y^j) \\ &= \delta W_k y^k + (-dW_k y^k + W_k w_j^k y^j) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\delta W_k = dW_k + W_j w_k^j$$

olarak bulunur. Böylece

$$\nabla_i W_k = \partial_i W_k - \Gamma_{ik}^j W_j \quad (2.8)$$

olarak yazılır (2.5) ve (2.8) eşitlikleri yardımıyla tensörlerin kovaryant türevi

$$\nabla_k t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \partial_k t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} + \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{km}^{i_\lambda} t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, m, \dots, i_p} - \sum_{\mu=1}^q \Gamma_{kj_\mu}^m t_{j_1, \dots, m, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \quad (2.9)$$

denkleminde verilir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.4. Lie Türevlemesi

M_n üzerindeki (U, φ) koordinat sisteminde bir başka $Y = Y^i \partial_i$ vektör alanını ve $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} X(f) &= X^i \partial_i f, \quad Y(f) = Y^i \partial_i f \\ XY(f) &= X(Y^i \partial_i f) = X^i (\partial_i Y^j \partial_j f + Y^j \partial_{ji}^2 f) \\ YX(f) &= Y(X^i \partial_i f) = Y^j (\partial_j X^i \partial_i f + X^i \partial_{ij}^2 f) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$XY(f) - YX(f) = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j f$$

yazılır. Böylece biz

$$XY - YX = [X, Y]$$

biçiminde tanımlanan yeni bir vektör alanı tanımlamış olduk. Bu vektör alanının ∂_i doğal çatısı cinsinden ifadesi

$$[X, Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j \quad (2.10)$$

biçiminde olur.

Tanım 2.4.1: (2.10) eşitliği ile tanımlanan $[X, Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi denir.

Özel olarak $\partial_i = \delta_i^k \partial_k$, $\partial_j = \delta_j^k \partial_k$ vektör alanları alınırsa (2.10) formülünden

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

olduğu görülür. (2.10) formülünün yardımı ile Lie parantezinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir:

1. $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$,
2. $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$,
3. $[X, Y] = -[Y, X]$,
4. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Tanım 2.4.2: M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde X vektör alanı olmak üzere X vektör alanı için aşağıdaki şartları sağlayan L_X operatörüne Lie türevi denir. (Kobayashi and Nomizu 1963).

i. $L_X(K \otimes K') = L_X K \otimes K' + K \otimes L_X K', \forall K, K' \in \mathfrak{S}(M_n)$

ii. $L_X f = Xf, f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$

iii. $L_X df = dL_X f$

iv. $L_X Y = [X, Y]$

Burada $[X, Y]$ Lie parantezidir. $L_X Y$ 'nin lokal koordinatlardaki ifadesi;

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

biçiminde yazılır.

Şimdi keyfi bir kovektör alanı için Lie türev formülünü bulalım. Önce $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ kovektör alanını göz önüne alalım. $\forall Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $\omega(Y) \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ olduğu açıktır. L_X türevinin özelliklerine göre

$$L_X(\omega(Y)) = (L_X \omega)Y + \omega(L_X Y)$$

ve buradan da

$$(L_X \omega)Y = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) \quad (2.11)$$

yazılır.

Eğer, $Y = \partial_j$ alırsak (2.11) eşitliğinin U komşuluğundaki lokal koordinatlarla ifadesi

$$L_X \omega_j = X^k \partial_k \omega_j + \omega_k \partial_j X^k \quad (2.12)$$

biçiminde olur.

Şimdi keyfi (p, q) tipli t tensör alanına bakalım. $t \in \mathfrak{S}_q^p(M_n)$ için

$$t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \in \mathfrak{S}_0^0(M_n), \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{S}_0^1(M_n),$$

$$\forall \omega^1, \dots, \omega^p \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$$

olduğu açıktır. Bu takdirde L_X 'in özelliklerine göre

$$L_X \left(t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \right) = (L_X t)(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^q t(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \\
& + \sum_{j=1}^q t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, L_X \omega^j, \dots, \omega^p)
\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}
(L_X t)(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) &= X \left(t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^q t(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \\
&\quad - \sum_{j=1}^q t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, L_X \omega^j, \dots, \omega^p)
\end{aligned}$$

bulunur. L_X türevi $dx^i(\partial_j) = \partial_j^i$ için uygulanırsa,

$$0 = L_X \delta_j^i = L_X (dx^i(\partial_j)) = (L_X dx^i) \partial_j + dx^i(L_X \partial_j)$$

elde edilir. Buradan da Lie parantezinin özellikleri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
(L_X dx^i) \partial_j &= -dx^i[X, \partial_j] = -dx^i[X^k \partial_k, \partial_j] = dx^i[\partial_j, X^k \partial_k] \\
&= dx^i \partial_j X^k \partial_k = \partial_j X^k \delta_k^i = \partial_j X^i
\end{aligned}$$

ya da $(L_X dx^i) = (\partial_j X^i) dx^j$ bulunur. Bu değer ve $(L_X \partial_i) = -\partial_i X^k \partial_k$ olduğu kullanılırsa,

$$L_X t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = X^k \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^q (\partial_{j_\lambda} X^k) t_{j_1 \dots k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^p (\partial_k X^{i_\mu}) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots k \dots i_p} \quad (2.13)$$

eşitliği elde edilir. Burada $L_X t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ile $(L_X t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ gösterilmiştir. Özel olarak $p = 1$, $q = 0$ ve $p = 0$, $q = 1$ olduğunda (2.13) eşitliğinden (2.10) ve (2.12) eşitlikleri elde edilir.

2.5. Riemannian Metriği —Riemannian Manifoldu

Tanım 2.5.1:

i. $g(X, Y) = g(Y, X), \forall X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$

ii. $g(X, X) \geq 0, \forall X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ ve $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartlarını sağlayan (0,2) tipli g tensör alanına Riemannian metriği denir. g Riemannian metriğine sahip M_n manifolduna Riemannian manifoldu denir.

M_n 'de $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ lokal koordinat sistemi verilmiş olsun. Bu lokal koordinatlara göre, g 'nin g_{ij} bileşenleri

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad i, j = 1, \dots, n$$

ile verilir g_{ij} 'ye g 'nin kovaryant bileşenleri denir. g 'nin g^{ij} , kontravaryant bileşenleri

$$g^{ij} = g(dx^i, dx^j) \quad i, j = 1, \dots, n$$

ile tanımlanır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Tanım 2.5.2: M_n bir Riemannian manifoldu ve ∇ , M_n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer ;

1) ∇ , C^∞ sınıfındandır.

2) M_n 'nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

dir.

3) M_n 'nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\forall P \in A$ için,

$$X_p g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z)|_p + g(Y, \nabla_X Z)|_p$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ konneksiyonuna M_n üstünde bir Riemannian konneksiyon yada Levi-Civita konneksiyonu ve ∇_X 'e de X 'e göre Riemannian anlamında kovaryant türev operatörü denir.

$\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulmasız tek bir $\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}_g$ konneksiyonu vardır. Bu

konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir ve

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{kr} (\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ri} - \partial_r g_{ij})$$

ile gösterilir.

2.6. İnfinitesimal Konformal Dönüşümler

Tanım 2.6.1: M_n , g metriğine sahip Riemannian manifold ve $X \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ olsun. Eğer $L_X g = 0$ ise X vektör alanına infinitesimal izometri (Killing vektör alanı) denir. g_{ij} ler g metriğinin ve X^a lar da X vektör alanının bileşenleri olmak üzere koordinatlarla

$$\begin{aligned} L_X g_{ij} &= X^a \partial_a g_{ij} + (\partial_i X^a) g_{aj} + (\partial_j X^a) g_{ia} \\ &= X^a \nabla_a g_{ij} + g_{aj} \nabla_i X^a + g_{ia} \nabla_j X^a = \nabla_j X_i + \nabla_i X_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

şartını sağlayan X vektör alanına infinitesimal izometri denir.

Tanım 2.6.2: (M_n, g) Riemannian manifold ve V , M_n üzerinde bir vektör alanı olsun. V ile üretilen M_n 'nin lokal dönüşümlerinin lokal bir parametrelili grubu $\{\phi_t\}$ yi düşünelim. Her bir ϕ_t , M_n 'nin bir lokal konformal dönüşümü olursa, V vektör alanı infinitesimal konformal dönüşüm olarak adlandırılır. Bilindiği gibi V vektör alanı infinitesimal konformal dönüşüm veya konformal vektör alanıdır ancak ve ancak M_n üzerinde bir skaler ρ fonksiyonu vardır ki, bu $L_V g = 2\rho g$ denklemini sağlar. Buradaki L_V, V 'ye göre Lie türevlemesini tanımlar. Özellikle ρ skaler fonksiyonu sabit olduğunda V vektör alanı infinitesimal homothetic dönüşüm olur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

Tanım 3.1.1: M_n , C^∞ sınıfından n - boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun P noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \quad (3.1)$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$ 'nin herhangi bir $\tilde{P} \in T_p(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tamamlayan $\pi: T(M_n) \rightarrow M_n$ demet izdüşümü $\tilde{P} \rightarrow P$ karşılık getirir. Yani $\pi(\tilde{P}) = P$ olur. $\pi^{-1}(P) = \tilde{P} \in T_p(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının P noktasındaki fibre denir. Doğal olarak burada $T(M_n)$ kesiti bulunur. M_n manifoldunun keyfi P noktasındaki $f(P)$, $T_p(M_n)$ 'nin sıfır vektörüdür. Bu f kesitine veya $f(M_n)$ 'nin görüntüsüne sıfır kesit denir. $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n temel uzayı ile aynıdır ve bu nedenle M_n manifoldunun kendisi $f(M_n)$ 'de diferensiyellenebilir imbedding olmuş (içine daldırılmış) altmanifolddur.

(x^h) , U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olmak üzere M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi için $\pi^{-1}: U \subset M_n \rightarrow U \times R^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir bir homeomorfizm olur. Burada R^n, R üzerindeki n - boyutlu vektör uzayıdır. $\tilde{P} \in T_p(M_n) (P \in U)$ noktası (P, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\} \left(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h} \right)$ doğal bazına $\tilde{P}$ nin $(y^h) = (x^{\bar{h}})$, $\bar{h} = n+1, \dots, 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $P = \pi(\tilde{P})$ 'nin koordinatları (x^h) $h = 1, \dots, n$ ile gösterilirse $\tilde{P}$ noktası uygun $(x^h, x^{\bar{h}}) \rightarrow \tilde{P} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur.

Biz $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\bar{h}})$ lokal koordinatlar sistemini elde ederiz. Buradan $(x^h, x^{\bar{h}})$ ya, (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ 'da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $P = \pi(\tilde{P})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ ise $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğu $\tilde{P}$ noktasını ihtiva eder. $\pi^{-1}(U')$ göre $\tilde{P}$ 'nin indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, y^{h'})$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^h(x^h), \\ y^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h, \end{cases} \quad (3.2)$$

olarak verilir.

$x^{h'}(x^h), P$ noktasındaki $x^1, x^2, \dots, x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}'} = y^h, x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterirsek (3.2) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}(x^p) \quad (3.3)$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobiye

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^j} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h \partial x^i} & \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

matrisi ile verilir (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^h = x^h(x^{h'}) \\ y^h = \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \quad (3.5)$$

veya

$$x^p = x^p(x^{p'}) \quad (3.6)$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jakobiye

$$\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{h'} \partial x^{i'}} y^{i'} & \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

matrisi ile verilir. (3.4) ve (3.7) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir. M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfından (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesinin $\mathfrak{S}_s^r(M_n)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini ise

$$\mathfrak{S}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{S}_s^r(M_n)$$

ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini ise sırasıyla $\mathfrak{S}_s^r(T(M_n))$ ve $\mathfrak{S}(T(M_n))$ olarak göstereceğiz.

3.2. Fonksiyonun Vertikal (dikey) Lifti :

f, M_n 'de bir fonksiyon olsun. $T(M_n)$ tanjant demette ${}^V f$ fonksiyonuna bakalım. $f: M_n \rightarrow R$ ve $\pi: T(M_n) \rightarrow M$ olmak üzere ${}^V f = f \circ \pi$, ${}^V f: T(M_n) \rightarrow R$ fonksiyonuna f fonksiyonunun dikey lifti denir.

$$\tilde{P} \in \pi^{-1}(U) \tilde{P} = (x^i, y^i) = (x^i, x^{\bar{i}})$$

koordinatlarına sahiptir.

$${}^V f(\tilde{P}) = {}^V f(x, y) = f \circ \pi(\tilde{P}) = f(P) = f(x)$$

olduğundan ${}^V f(\tilde{P})$ değeri fibre boyunca sabittir denir ve $P = \pi^{-1}(\tilde{P}) \in M_n$ noktasındaki $f(P)$ değerine eşit olur. (Yano and Ishihara 1973).

3.3. Vektör Alanının Vertikal (dikey) Lifti :

$\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(T(M_n))$ alalım. $\forall f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ için $\tilde{X}^V f = 0$ ise buradaki $\tilde{X}$ 'e dikey vektör alanı denir. $\tilde{X}$ 'nin lokal koordinatlarda bileşenleri $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{smallmatrix}\right)$ olsun.

$$\tilde{X}^V f = \tilde{X}^i \partial_i f + \tilde{X}^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} f = 0$$

buradan da

$$\tilde{X}^i = 0 \quad \tilde{X}^{\bar{i}} \neq 0$$

bulunur.

X, M_n 'de bir vektör alanı olsun. $T(M_n)$ 'de, $\iota\omega = \omega_i dx^i$ olmak üzere ${}^V X(\iota\omega) = {}^V(\omega(X))$ ile ${}^V X$ bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına M_n 'den $T(M_n)$ 'ye X vektör alanının dikey lifti denir. Şimdi ${}^V X$ dikey liftinin bileşenlerini bulalım.

$$\begin{aligned} {}^V X(\iota\omega) &= {}^V(\omega(X)) \\ \tilde{X}^j(\partial_j \omega_i) + \tilde{X}^j \omega_j &= \omega_i X^i \\ \tilde{X}^j \omega_j &= \omega_i X^i \end{aligned}$$

buradan da

$$\tilde{X}^j = X^j$$

olur.

$${}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^j \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.4. γ operatörü :

Şimdide $S \in \mathfrak{S}_{q+1}^p(M_n)$ tensörünü alalım. Bu tensörü koordinatlarla yazarsak

$$S = S_{l, s_1, \dots, s_q}^{i_1, \dots, i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^l \otimes dx^{s_1} \otimes \dots \otimes dx^{s_q}$$

şeklinde olur. X vektör alanını $x^i \partial_i$ şeklinde yazarak γ operatörünü tanımlayabiliriz.

$$\gamma_X S = X^l S_{l, s_1, \dots, s_q}^{i_1, \dots, i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^l \otimes \dots \otimes dx^{s_q} \quad (3.9)$$

$$\gamma S = y^l S_{l, s_1, \dots, s_q}^{i_1, \dots, i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^l \otimes \dots \otimes dx^{s_q} \quad (3.10)$$

Buradan da $\gamma_X S = {}^V(S_X)$ yazılabilir. (3.9) ve (3.10)'dan $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olmak üzere lokal koordinatlarda;

$$\gamma_X F = \begin{pmatrix} 0 \\ x^i F_i^h \end{pmatrix} \quad \gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ y^i F_i^h \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinde olur (Yano and Ishihara 1973).

3.5. Fonksiyonun Tam Lifti:

$f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ olmak üzere $T(M_n)$ de $\iota(df) = y^s \partial_s f = \partial f = {}^c f$ buradaki ${}^c f$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tanjant demette tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

3.6. Vektör Alanının Tam Lifti:

$X \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ olsun. ${}^c X^C f = {}^c (Xf)$ ile tanımlanan ${}^c X$ 'e, X vektör alanının tam lifti denir. Şimdi ${}^c X = \begin{pmatrix} {}^c X^i \\ {}^c X^{\bar{i}} \end{pmatrix}$ bileşenlerini bulalım.

$$\begin{aligned} {}^c X^i \partial_i^c f + {}^c X^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}}^c f &= y^s \partial_s (X^i \partial_i f) \\ {}^c X^i \partial_i (y^s \partial_s f) + {}^c X^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} (y^s \partial_s f) &= y^s (\partial_s X^i) \partial_i f + y^s X^i \partial_s \partial_i f \\ {}^c X^i &= X^i, \quad {}^c X^{\bar{i}} = y^s \partial_s X^i \end{aligned}$$

buradan da

$${}^c X = \begin{pmatrix} X^i \\ y^s \partial_s X^i \end{pmatrix}$$

olur.

3.7. Fonksiyon ve Vektör Alanının Yatay Liftleri:

$f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ fonksiyonunu alalım. ∇, M_n de bir afin konneksiyon ise f fonksiyonunun gradientini ∇f şeklinde yazabiliriz. Ayrıca (3.11) de tanımlanan γ operatörü için

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f) = y^s \partial_s f$$

eşitliği vardır. $f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ fonksiyonunun yatay lifti

$${}^H f = {}^c f - \gamma(\nabla f)$$

şeklinde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

$${}^c f = y^s \partial_s f \text{ eşitliğinden}$$

$${}^H f = {}^c f - \gamma(\nabla f)$$

$${}^H f = y^s \partial_s f - y^s \partial_s f$$

$${}^H f = 0$$

olur. Benzer bir yolla $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ yatay liftini bulabiliriz. X in yatay liftini

$${}^H X = {}^C X - \gamma(\nabla X)$$

şeklinde tanımlayacağız. $T(M_n)$ de $\nabla_Y X = \gamma(\nabla X)$ eşitliği vardır. X in ve ∇ nın M_n deki lokal koordinatları sırasıyla X^h ve Γ_{ji}^h dir. ${}^C X$ ve $\gamma(\nabla X)$ in $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlarda koordinatları

$$\gamma(\nabla X) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad {}^C X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

şeklindedir. Burada $\nabla_s X^h, X^h$ in kovaryant türevidir ve

$$\nabla_s X^h = \partial_s X^h + \Gamma_{si}^h X^i$$

şeklindedir.

Şimdi X vektör alanının yatay liftini bulalım.

$$\begin{aligned} {}^H X &= \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix} \\ {}^H X &= \begin{pmatrix} {}^H X^h \\ {}^H X^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h - y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h - y^s \partial_s X^h - y^s \Gamma_{sm}^h X^m \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{sm}^h X^m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

bulunur. X vektör alanının yatay lifti bir projectable (izdüşümsel) vektör alanıdır.

$P \in T(M_n)$ noktasında ${}^H X$ 'in değeri yalnızca $P \in \pi(\tilde{P}) \in M_n$ noktasında X vektör alanının değeri verilerek tanımlanabilir. (3.13) den, herhangi bir $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ vektör alanının ${}^H X$ yatay lifti

$$\delta y^h = dy^h + \tilde{T}_{ji}^h dx^j y^i$$

eşitliği ile tanımlanan $T(M_n)$ de D dağılımına sahiptir. Buradaki $\tilde{T}_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h$ koordinatları $\forall x; y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$ şeklinde tanımlanan $\tilde{\nabla}$ nın koordinatlarıdır. D dağılımı yatay dağılım olarak adlandırılır. Eğer $T(M_n)$ deki $\tilde{X}$ vektör alanı bir D dağılıma sahip ise X vektör alanına yatay vektör alanı diyebiliriz (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.7.1: $\left(\tilde{X}^h\right)_{\tilde{X}^{\bar{h}}}$ koordinatlarına sahip bir $\tilde{X} \in \mathfrak{Z}_0^1(T(M_n))$ vektör alanının yatay vektör alanı olması için gerek ve yeter şart

$$\tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{I}_{ji}^h \tilde{X}^j y^i = 0$$

olmasıdır (Yano and Ishihara 1973).

3.8. Sasaki Metriği :

Tanjant demet üzerinde tanımlanan Sasaki metriği 1958’de Japon geometrici Sasaki tarafından tanımlanmıştır. Bu başlık altında bu metriğin Levi-Civita konneksiyonlarını ve Riemannian eğrilik tensörlerini vereceğiz.

Tanım 3.8.1: (M_n, g) bir Riemannian manifold olsun. M_n manifoldu üzerinde tanımlanan tanjant demet üzerindeki Sasaki metriği aşağıdaki üç denklemle tanımlıdır. $\forall X, Y \in C^\infty T(M_n)$ olmak üzere

$$i.) \quad \tilde{g}({}^H X, {}^H Y) = g(X, Y)$$

$$ii.) \quad \tilde{g}({}^V X, {}^H Y) = 0$$

$$iii.) \quad \tilde{g}({}^V X, {}^V Y) = g(X, Y)$$

Sasaki metriği açıkçası g-natural metrikleri sınıfındandır.

Önerme 3.8.2: (M_n, g) bir Riemannian manifold ve $\tilde{\nabla}$, Sasaki metriğine sahip tanjant demetin Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$\forall X, Y \in C^\infty T(M_n)$ için

$$i) \quad (\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^H Y) = {}^H(\nabla_X Y) - \frac{1}{2} {}^V(R(X, Y)u)$$

$$ii) \quad (\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^V Y) = {}^V(\nabla_X Y) + \frac{1}{2} {}^H(R(u, Y)X)$$

$$iii) \quad (\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^H Y) = \frac{1}{2} {}^H(R(u, X)Y)$$

$$iv) \quad (\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^V Y) = 0$$

(Sekizawa 1991; Gudmundsson and Kappos 2002).

İspat:

1. $\forall \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{S}_0^1 T(M_n)$ için Kozsul formülü;

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{X}(\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z})) + \tilde{Y}(\tilde{g}(\tilde{Z}, \tilde{X})) - \tilde{Z}(\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})) - \tilde{g}(\tilde{X}, [\tilde{Y}, \tilde{Z}]) \\ + \tilde{g}(\tilde{Y}, [\tilde{Z}, \tilde{X}]) + \tilde{g}(\tilde{Z}, [\tilde{X}, \tilde{Y}])$$

şeklindedir. $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ yerine sırasıyla ${}^V X, {}^V Y, {}^V Z$ yazdığımızda

$$\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^V Y = 0$$

olduğu görülür.

2. Tanjant demette bir vektör alanının vertikal ve horizontal liftlerinin Lie çarpımını kullanarak Kozsul formülünden,

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^V Y, {}^H Z) = -\tilde{g}({}^V(R(Z, X)u), {}^V Y) \\ = -g(R(u, Y)Z, X) \\ = g(R(u, Y)X, Z) \\ = g({}^H(R(u, Y)X), {}^H Z)$$

Vertikal bölüm olarakta;

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^V Y, {}^V Z) = {}^H X(\tilde{g}({}^V Y, {}^V Z)) + \tilde{g}({}^V Z, {}^V(\nabla_X Y)) - \tilde{g}({}^V Y, {}^V(\nabla_X Z)) \\ = X(g(Y, Z)) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Y, \nabla_X Z) \\ = 2g({}^V(\nabla_X Y), {}^V Z)$$

3. Yukarıdakilere benzer hesaplamalar yapılarak horizontal bölüm;

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^H Y, {}^H Z) = \tilde{g}({}^V X, {}^V(R(Y, Z)u)) \\ = g(X, R(Y, Z)u) \\ = g(R(u, X)Y, Z)$$

geri kalan kısım ise

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^H Y, {}^V Z) = {}^H Y(\tilde{g}({}^V Z, {}^V X)) - \tilde{g}({}^V Z, {}^V(\nabla_Y X)) - \tilde{g}({}^V X, {}^V(\nabla_Y Z)) \\ = Y(g(Z, X)) - g(Z, \nabla_Y X) - g(X, \nabla_Y Z) \\ = 0$$

4. Tanjant demette bir vektör alanının vertikal ve horizontal liftlerinin Lie

çarpımını kullanarak Kozsul formülünden

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\nu_X} \nu_Y, {}^H Z) &= -{}^H Z(\tilde{g}(\nu_X, \nu_Y)) + \tilde{g}(\nu_Y, \nu(\nabla_Z X)) + \tilde{g}(\nu_X, \nu(\nabla_Y Z)) \\ &= -Z(g(X, Y)) + g(Y, \nabla_Z X) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\nu_X} \nu_Y, \nu_Z) &= \nu_X(\tilde{g}(\nu_Y, \nu_Z)) + \nu_Y(\tilde{g}(\nu_Z, \nu_X)) - \nu_Z(\tilde{g}(\nu_X, \nu_Y)) \\ &= \nu_X(g(Y, Z)) + \nu_Y(g(Z, X)) - \nu_Z(g(X, Y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Önerme 3.8.3: (M_n, g) bir Riemannian manifold ve $\tilde{R}$, Sasaki metriğine sahip tanjant demetin Riemannian eğrilik tensörü olsun, $\forall X, Y, Z \in T_p(M_n)$ için;

- i) $\tilde{R}(\nu_X, \nu_Y) \nu_Z = 0$
- ii) $\tilde{R}(\nu_X, \nu_Y) {}^H Z = {}^H(R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(u, X)(R(u, Y)Z) - \frac{1}{4}R(u, Y)(R(u, X)Z)$
- iii) $\tilde{R}({}^H X, \nu_Y) \nu_Z = -{}^H\left(\frac{1}{2}R(Y, Z)X + \frac{1}{4}R(u, Y)(R(u, Z)X)\right)$
- iv) $\tilde{R}({}^H X, \nu_Y) {}^H Z = \nu\left(\frac{1}{4}R(R(u, Y)Z, X)u + \frac{1}{2}R(X, Z)Y\right) + \frac{1}{2}{}^H((\nabla_X R)(u, Y)Z)$
- v) $\tilde{R}({}^H X, {}^H Y) \nu_Z = \nu\left(R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(R(u, Z)Y, X)u - \frac{1}{4}R(R(u, Z)X, Y)u\right) + \frac{1}{2}{}^H((\nabla_X R)(u, Z)Y - (\nabla_Y R)(u, Z)X)$
- vi) $\tilde{R}({}^H X, {}^H Y) {}^H Z = \frac{1}{2}\nu((\nabla_Z R)(X, Y)u) + {}^H(R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(u, R(Z, Y)u)X + \frac{1}{4}R(u, R(X, Z)u)Y + \frac{1}{2}R(u, R(X, Y)u)Z)$

(Sekizawa 1991; Gudmundsson and Kappos 2002).

3.9. Cheeger-Gromoll Metriği :

Cheeger-Gromoll (1972) non-negatif eğrilikli tam manifoldları çalıştılar ve kullanışlı olan Riemannian metriklerinin kurulumunu önerdiler. Bu metriğin ifadesi ilk defa Musso ve Tricerri (1988) tarafından verilmiştir.

Tanım 3.9.1: (M_n, g) bir Riemannian manifold olsun. Tanjant demet üzerinde Cheeger-Gromoll metriği $\tilde{g}$, $\forall X, Y \in C^\infty T(M_n)$ olmak üzere aşağıdaki gibi verilir.

- i) $\tilde{g}({}^H X, {}^H Y) = g(X, Y)$
- ii) $\tilde{g}({}^H X, {}^V Y) = 0$
- iii) $\tilde{g}({}^V X, {}^V Y) = \frac{1}{1+r^2}(g(X, Y) + g(X, u)g(Y, u))$

Açıktır ki Cheeger-Gromoll metriği $\tilde{g}$ doğal metrik sınıfındadır (Musso and Tricerri 1988; Sekizawa 1991; Gudmundsson and Kappos 2002).

Önerme 3.9.2: (M_n, g) , bir Riemannian manifold ve $T(M_n)$ ' de Cheeger-Gromoll metriğine sahip tanjant demet olsun, Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ aşağıdaki şartları sağlar. $\forall X, Y \in C^\infty T(M_n)$ olmak üzere;

- i) $(\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^H Y) = {}^H(\nabla_X Y) - \frac{1}{2} {}^V(R(X, Y)u)$
- ii) $(\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^V Y) = \frac{1}{2\alpha} {}^H(R(u, Y)X) + {}^V(\nabla_X Y)$
- iii) $(\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^H Y) = \frac{1}{2\alpha} {}^H(R(u, X)Y)$
- iv) $(\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^V Y) = -\frac{1}{\alpha}(\tilde{g}({}^V X, U) {}^V Y + \tilde{g}({}^V Y, U) {}^V X) + \frac{1+\alpha}{\alpha} \tilde{g}({}^V X, {}^V Y)U - \frac{1}{\alpha} \tilde{g}({}^V X, U) \tilde{g}({}^V Y, U)U$

(Sekizawa 1991; Gudmundsson and Kappos 2002).

Önerme 3.9.3: (M_n, g) bir Riemannian manifold ve $(T(M_n), \tilde{g})$ Cheeger-Gromoll metriğine sahip tanjant demet olsun. $\tilde{R}$ Cheeger-Gromoll metriğinin eğrilik tensörleri olmak üzere aşağıdaki formüller sağlanır.

- i) $\tilde{R}({}^H X, {}^H Y) {}^H Z = {}^H(R(X, Y)Z) - \frac{1}{4\alpha}(R(u, R(Y, Z)u)X - R(u, R(X, Z)u)Y - 2R({}^H(u, R(X, Y)u)Z) + \frac{1}{2} {}^V((\nabla_Z R)(X, Y)u)$
- ii) $\tilde{R}({}^H X, {}^H Y) {}^V Z = {}^V(R(X, Y)Z)$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\alpha} {}^H((\nabla_X R)(u, Z)Y - (\nabla_Y R)(u, Z)X) \\
& - \frac{1}{4\alpha} {}^V(R(X, R(u, Z)Y)u - R(Y, R(u, Z)X)u) \\
& - 4\tilde{g}({}^V Z, U) {}^V(R(X, Y)u) + \frac{1+\alpha}{\alpha} \tilde{g}({}^V((R(X, Y)u), {}^V Z)U \\
\text{iii)} \quad \tilde{R}({}^H X, {}^V Y) {}^H Z &= \frac{1}{2\alpha} {}^H((\nabla_X R)(u, Y)Z) + \frac{1}{2} {}^V(R(X, Z)Y) \\
& - \frac{1}{4\alpha} {}^V((R(X, R(u, Y)Z)u) - \frac{2}{\alpha} g(Y, u) {}^V(R(X, Z)u) \\
& + \frac{1+\alpha}{2\alpha} \tilde{g}({}^V((R(X, Z)u), {}^V Y)U \\
\text{iv)} \quad \tilde{R}({}^H X, {}^V Y) {}^V Z &= -\frac{1}{2\alpha} {}^H(R(Y, Z)X) - \frac{1}{4\alpha^2} {}^H(R(u, Y)R(u, Z)X) \\
& + \frac{1}{2\alpha^2} {}^H(g(Y, u)(R(u, Z)X) - g(Z, u) {}^H(R(u, Y)X)) \\
\text{v)} \quad \tilde{R}({}^V X, {}^V Y) {}^H Z &= \frac{1}{\alpha} {}^H(R(X, Y)Z) \\
& + \frac{1}{4\alpha^2} {}^H(R(u, X)R(u, Y)Z - R(u, Y)R(u, X)Z) \\
& + \frac{1}{\alpha^2} {}^H(g(Y, u) {}^H(R(u, X)Z) - g(X, u)(R(u, Y)Z) \\
\text{vi)} \quad \tilde{R}({}^V X, {}^V Y) {}^V Z &= \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2} (\tilde{g}({}^V Y, {}^V Z) {}^V X - \tilde{g}({}^V X, {}^V Z) {}^V Y) \\
& + \frac{\alpha+2}{\alpha^2} (\tilde{g}({}^V X, {}^V Z)g(Y, u)U - \tilde{g}({}^V Y, {}^V Z)g(X, u)U) \\
& + \frac{\alpha+2}{\alpha^2} (g(X, u)g(Z, u) {}^V Y - g(Y, u)g(Z, u) {}^V X)
\end{aligned}$$

(Kowalski and Sekizawa 1988; Gudmundsson and Kappos 2002).

3.10. Adapte Olmuş Çatıda Temel Formüller:

M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verildiğinde bizim hesaplarımız için kullanışlı olan $T(M_n)$ 'nin $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda indirgenen bir çatı alanı tanımlayabiliriz.

Her bir $U \subset M$ lokal kart'ında $X_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $j=1, \dots, n$ aldığımızda (3.8) ve (3.13) den doğal çatıya göre lokal ifadeleri

$$\begin{aligned} {}^H X_{(j)} &= \delta_j^h \partial_h + (-\Gamma_{sj}^h x^s) \partial_{\bar{h}} \\ {}^V X_{(j)} &= \delta_j^h \partial_{\bar{h}} \end{aligned}$$

şeklinde olan vektör alanları elde edebiliriz. Buradaki δ_j^h Kronecker deltasıdır. Elde ettiğimiz bu $2n$ vektör alanları lineer bağımsızdırlar ve sırasıyla $T(M_n)$ 'nin vertikal dağılımını ve ∇ nın horizontal dağılımını üretirler. $\{ {}^H X_{(j)}, {}^V X_{(j)} \}$ kümesi adapte olmuş çatı olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned} E_j &= {}^H X_{(j)}, \\ E_{\bar{j}} &= {}^V X_{(j)}, \end{aligned}$$

olarak aldığımızda biz adapte olmuş çatıyı $\{E_\lambda\} = \{E_j, E_{\bar{j}}\}$. $\{dx^h, \delta y^h\}$ şeklinde yazabiliriz. $\{dx^h, \delta y^h\}$ ise $\{E_i, E_{\bar{i}}\}$ nin dual bazıdır. Burada $\delta y^h = dy^h + y^b \Gamma_{ba}^h dx^a$ şeklindedir. Biz bazı hesaplar yaparak aşağıdaki lemma'yı yazabiliriz.

Lemma 3.10.1: $T(M_n)$ ' nin adapte olunmuş çatısının Lie parantezi aşağıdaki eşitlikleri sağlar. Bu eşitlikler;

$$\left\{ \begin{array}{l} [E_j, E_i] = y^b R_{ijb}^a E_{\bar{a}} \\ [E_j, E_{\bar{i}}] = \Gamma_{ji}^a E_{\bar{a}} \\ [E_{\bar{j}}, E_{\bar{i}}] = 0 \end{array} \right.$$

şeklindedir. Burada R_{ijb}^a , M_n manifoldunun eğrilik tensörünün bileşenlerini tanımlar (Dombrowski 1962).

(3.8), (3.9), (3.13)'ü kullanarak adapte olunmuş çatıya göre

$$\begin{aligned} {}^H X &= \begin{pmatrix} X^j \delta_j^h \\ -X^j \Gamma_{sj}^h y^s \end{pmatrix} = X^j \begin{pmatrix} \delta_j^h \\ -\Gamma_{sj}^h y^s \end{pmatrix} = X^j E_j \\ {}^V X &= \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^j \delta_j^h \end{pmatrix} = X^j \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^h \end{pmatrix} = X^j E_{\bar{j}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} {}^c X &= \begin{pmatrix} X^j \delta_j^h \\ y^s \partial_s X^j \end{pmatrix} \\ &= X^j \begin{pmatrix} \delta_j^h \\ -\Gamma_{sj}^h y^s \end{pmatrix} + y^m \nabla_m X^j \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^h \end{pmatrix} = X^j E_j + y^m \nabla_m X^j E_{\bar{j}} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$\{E_h, E_{\bar{h}}\}$ adapte olunmuş çatıya göre $(v^h, v^{\bar{h}})$ bileşenlerine sahip tanjant demet üzerindeki vektör alanı $\tilde{X}$ olsun. Eğer v^h yalnızca $\{x^h\}$ değerlerine bağlı ise o zaman tanjant demet üzerindeki $\tilde{X}$ 'ya fibre-preserving vektör alanı denir.

Sonuç olarak tanjant demet üzerindeki her fibre-preserving vektör alanı, $\tilde{X}$, M_n manifoldu üzerindeki bir $X = v^h \frac{\partial}{\partial x^h}$ vektör alanına indirgenir. Örneğin cX , vX , ve HX tanjant demet üzerindeki birer fibre-preserving vektör alanıdır. Fibre-preserving vektör alanı $\tilde{X}$ 'ya göre Lie türevlemesi $L_{\tilde{X}}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki lemma'yı ifade edebiliriz.

Lemma 3.10.2: $\tilde{X} = v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$ ye göre adapte olunmuş çatı ve onun dual bazlarının Lie türevlemeleri aşağıdaki gibi verilir.

1. $L_{\tilde{X}} E_h = -\partial_h v^a E_a + \{y^b v^c R_{hcb}^a - v^{\bar{b}} \Gamma_{bh}^a - E_h(v^{\bar{a}})\} E_{\bar{a}}$
2. $L_{\tilde{X}} E_{\bar{h}} = \{v^b \Gamma_{bh}^a - E_{\bar{h}}(v^{\bar{a}})\} E_{\bar{a}}$
3. $L_{\tilde{X}} dx^h = \partial_m v^h dx^m$
4. $L_{\tilde{X}} \delta y^h = -\{y^b v^c R_{mcb}^h - v^{\bar{b}} \Gamma_{bm}^h - E_m(v^{\bar{h}})\} dx^m$
 $- \{v^b \Gamma_{bm}^h - E_{\bar{m}}(v^{\bar{h}})\} \delta y^m$

(Yamauchi 1995; Hasegawa and Yamauchi 2003).

4. ARAŞTIRMA ve BULGULAR

g Riemannian metriğinin ifadesi $g = g_{ij}dx^i dx^j$ şeklinde ise Cheeger-Gromoll metriği g_{CG} 'nin adapte olunmuş lokal çatıdaki ifadesi;

$$g_{CG} = g_{ij}dx^i dx^j + h_{ij}\delta y^i \delta y^j$$

biçimindedir. Buradaki h_{ij} , $\pi^{-1}(U)$ da $h_{ij} = \frac{1}{1+r^2}(g_{ij} + y^s y^t g_{is} g_{tj})$ şeklinde tanımlıdır (Salimov and Kazimova 2009).

$G_1 = g_{ij}dx^i dx^j$ ve $G_2 = h_{ij}\delta y^i \delta y^j$ olarak işaretlersek Cheeger-Gromoll metriğini

$$g_{CG} = G_1 + G_2$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Teoremin ispatında kullanılmak amacıyla ilk olarak aşağıdaki lemmayı ifade edebiliriz.

Lemma 4.1: Fibre-preserving vektör alanı $\tilde{X}$ 'ya göre $L_{\tilde{X}}G_1$ ve $L_{\tilde{X}}G_2$ Lie türevlemeleri;

$$1. L_{\tilde{X}}G_1 = (L_X g_{ij})dx^i dx^j$$

$$2. L_{\tilde{X}}G_2 = -2h_{mj}\{y^b v^c R_{icb}^m - v^{\bar{b}} \Gamma_{bi}^m - E_i(v^{\bar{m}})\}dx^i \delta y^j \\ + \left\{ L_X h_{ij} - 2h_{mj} \nabla_i v^m + 2h_{mj} E_i(v^{\bar{m}}) + \frac{1}{1+r^2} v^{\bar{m}} y^s (-2g_{ms} h_{ij} + \right. \\ \left. g_{ms} g_{is} + g_{sj} g_{im}) \right\} \delta y^i \delta y^j$$

şeklindeir. Burada $L_X g_{ij}$ ve $L_{\tilde{X}} g_{ij}$ Lie türevinin bileşenlerini tanımlar ve aynı zamanda $\nabla_i v^m$, X 'in kovaryant türevinin bileşenleridir.

İspat: Bu lemma'nın ispatı Yamauchi (1995)'nin öneri 2.3 ünün ispatının benzeridir.

Teorem 4.2: M_n manifoldu üzerindeki bir X vektör alanının $T(M_n)$ ye tam lifti olan ${}^c X$ 'in Cheeger-Gromoll metriği g_{CG} 'ye göre infinitesimal fibre-preserving konformal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart X 'in M_n manifoldu üzerinde g Riemannian metriğine göre infinitesimal homothetik dönüşüm olmasıdır.

İspat: (M_n, g) Riemannian manifoldu üzerindeki Cheeger-Gromoll metriği g_{CG} 'ye sahip tanjant $T(M_n)$ olsun. Eğer $\tilde{X}$, $(T(M_n), g_{CG})$ üzerinde bir infinitesimal fibre-preserving konformal dönüşüm ise

$$L_{\tilde{X}}g_{CG} = 2\Omega g_{CG} \quad (4.1)$$

Lemma (4.1) vasıtasıyla biz

$$\begin{aligned} & (L_X g_{ij}) dx^i dx^j - 2h_{mj} \{y^b v^c R_{icb}^m - v^{\bar{b}} \Gamma_{mi}^{\bar{m}} - E_i(v^{\bar{m}})\} dx^i \delta y^j \\ & + [L_X h_{ij} - 2h_{mj} \nabla_i v^m + 2h_{mj} E_{\bar{i}}(v^{\bar{m}}) \\ & + \frac{1}{1+r^2} v^{\bar{m}} y^s (-2g_{ms} h_{ij} + g_{mj} g_{is} + g_{sj} g_{im})] \delta y^i \delta y^j \\ & = 2\Omega g_{ij} dx^i dx^j + 2\Omega h_{ij} \delta y^i \delta y^j \end{aligned}$$

sahip oluruz.

Yukarıdaki karşılaştırdığımızda biz;

$$\begin{aligned} L_X g_{ij} &= 2\Omega g_{ij} \\ y^b v^c R_{icb}^m - v^{\bar{b}} \Gamma_{bi}^{\bar{m}} - E_i(v^{\bar{m}}) &= 0 \\ L_X h_{ij} - 2h_{mj} \nabla_i v^m + 2h_{mj} E_{\bar{i}}(v^{\bar{m}}) \\ &+ \frac{1}{1+r^2} v^{\bar{m}} y^s (-2g_{ms} h_{ij} + g_{mj} g_{is} + g_{sj} g_{im}) = 2\Omega h_{ij} \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz.

$X = v^h d_h$ olmak üzere $\tilde{X} = \begin{pmatrix} v^i \\ v^{\bar{i}} \end{pmatrix} = {}^c X = \begin{pmatrix} v^i \\ y^s \nabla_s v^i \end{pmatrix}$ alırsak

$$L_X g_{ij} = 2\Omega g_{ij} \quad (4.2)$$

$$y^b (v^c R_{icb}^m - \nabla_i \nabla_b v^m) = 0 \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) formülünden;

$$\nabla_i \nabla_b v_j = v^b R_{icbj} \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) den ve Riemannian eğrilik tensörünün özelliklerini kullanarak

$$\nabla_i \nabla_b v_j + \nabla_i \nabla_j v_b = 0 \quad (4.5)$$

olur. Biz biliyoruz ki $L_X g_{ij} = \nabla_i v_j + \nabla_j v_i$ dir. (4.2) denkleminde

$$\nabla_i v_j + \nabla_j v_i = 2\Omega g_{ij} \quad (4.6)$$

yazabiliriz. (4.6) denkleminin her iki tarafını ∇_k ya göre kovaryant türevini alırsak

$$\nabla_k(\nabla_i v_j) + \nabla_k(\nabla_j v_i) = 2(\nabla_k \Omega)g_{ij} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.5) ve (4.7) den $\nabla_k \Omega = 0$ olur. Buradan Ω skaler sabit olduğu görülür.

Sonuç olarak $L_X g_{ij} = 2\Omega g_{ij}$ eşitliğinde Ω skaler sabit olması durumunda dönüşüm infinitesimal homothetik dönüşüm olmuş olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

M_n manifoldu üzerindeki bir X vektör alanının $T(M_n)$ ' ye tam lifti olan cX 'in Cheeger-Gromoll metriği g_{CG} 'ye göre infinitesimal fibre-preserving konformal dönüşüm olması için gerek ve yeter şartın X 'in M_n manifoldu üzerindeki g Riemannian metriğine göre infinitesimal homothetic dönüşüm olduğu ispatlandı.

KAYNAKLAR:

- Abbassi M. T. K., Note on the classification theorems of g -natural metrics on the tangent bundle of a Riemannian manifold (M, g) , *Comment. Math. Univ. Carolin.* 2004; 45; 4; 591-596.
- Abbassi M. T. K. and Sari M., On some hereditary properties of Riemannian g -natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds. *Differential Geom. Appl.* 2005; 22; 1; 19-47.
- Abbassi M. T. K. and Sari M., On natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds, *Arch. Math.* 2005; 41; 71-92.
- Abbassi M. T. K. and Sari M., Killing vector fields on tangent bundles with Cheeger-Gromoll metric, *Tsukuba J. Math.*, 27 (2003), 295-306.
- Cheeger J. and Gromoll D., On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, *Ann. of Math.* 96 (1972), 413-443.
- Dombrowski P., On the Geometry of the Tangent Bundle, *J. Reine Angew. Math.*, 210 (1962), 73-88.
- Gudmundsson S. and Kappos E., On the Geometry of the Tangent Bundles, *Expo. Math.*, 20 (2002), 1-41.
- Gezer A. On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 119 (2009) no. 3, 345-350
- Hasegawa I. and Yamauchi K., Infinitesimal conformal transformations on tangent bundles with the lift metric I+II, *Scientiae Mathematicae Japonicae* 57(1) (2003), 129-137, e7, 437-445.
- Kolar I., Michor P. W. and Slovák J., *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- Kowalski O. and Sekizawa M., Natural transformation of Riemannian metrics on manifolds to metrics on tangent bundles-a classification-, *Bull. Tokyo Gakugei Univ.* 40(4) (1988), 1-29.
- Musso E. and Tricerri F., Riemannian Metrics on Tangent Bundles, *Ann. Mat. Pura. Appl.* (4) 150 (1988), 1-19.
- Salimov A. and Kazimova S., Geodesics of the Cheeger-Gromoll metric, *Turk. J. Math.* 33 (2009), no. 1, 99-105
- Sasaki S., On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.*, 10(1958), 338-358.
- Sekizawa M., Curvatures of Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric, *Tokyo J. Math.*, 14 (1991), 407-417.
- Yamauchi K., On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the metric I+III over Riemannian manifold. *Ann Rep. Asahikawa. Med. Coll.* Vol.16(1995), 1-6.
- Yano K. and Ishihara S., *Tangent and Cotangent bundles*, Marcel Dekker, 1973.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Erzurum da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Lise öğrenimini Ilıca Yavuz Selim Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 1999 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi K. Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2004 yılında mezun oldu. Mezun olduktan sonra çeşitli dershanelerde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2009 yılında Iğdır Üniversitesi, Iğdır Meslek Yüksekokulunda öğretim görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.