



**PARABOLİK BİR PROBLEMDE
NEUMANN SINIR KONTROLÜ**

S. Şule ŞENER

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Prof. Dr. Murat SUBAŞI**

2016

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

PARABOLİK BİR PROBLEMDE NEUMANN SINIR KONTROLÜ

S. Şule ŞENER

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**

**ERZURUM
2016**

Her hakkı saklıdır



**T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

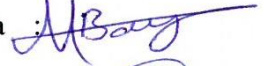


TEZ ONAY FORMU

PARABOLİK BİR PROBLEMDE NEUMANN SINIR KONTROLÜ

Prof. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, S. Şule ŞENER tarafından hazırlanan bu çalışma 07/04/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu** (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

İmza : 

Üye : Prof. Dr. Murat SUBAŞI

İmza : 

Üye : Doç. Dr. Aydın SEÇER

İmza : 

Üye : Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT

İmza : 

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu **05.../05.../2016** tarih ve **19.../...24**..... nolu kararı ile onaylanmıştır.


Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

PARABOLİK BİR PROBLEMDE NEUMANN SINIR KONTROLÜ

S. Şule ŞENER

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

Bu tezde, bir boyutlu parabolik bir sistemde çözümün final anında istenilen konuma yakın olabilmesi için sağ sınır şartının kontrolü incelenmiştir. Parabolik sistemin çözümü ifade edildikten sonra, optimal kontrol probleminin çözümü ele alınmıştır. Bu çözümün varlığı ve tekliği ispatlanarak nasıl elde edilebileceği tartışılmıştır. Bunun için amaç fonksiyonelinin türevlenebilmesi üzerine ekstra şartlar konulmuştur. Bu şartlar altında optimal çözüme yakınsayan minimalleştirici dizi kurularak bu dizinin yakınsama hızına ait sonuçlar elde edilmiştir. Probleme ait sonuçlar nümerik örnekler üzerinde tartışılmıştır.

2016, 61 sayfa

Anahtar Kelimeler: ikinci mertebeden parabolik denklemler, optimal kontrol problemleri, düzgünleştirme, iyi tanımlı problemler

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

NEUMANN BOUNDARY CONTROL IN A PARABOLIC PROBLEM

S. Şule ŞENER

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Applied Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this thesis, for a one dimensional parabolic system the right boundary condition has been controlled in order to the solution of the system be near desired location at final time. After stating the solution of parabolic system, the solution of optimal control problem has been investigated. By proving the existence and uniqueness of this solution, its obtainability has been discussed. To do this extra conditions have been put on the differentiability of cost functional. Under these conditions, by constructing minimizing sequence converging to optimal solution the results have been obtained about the rate of convergence of this sequence. The obtained results have been discussed on numerical examples.

2016, 61 pages

Keywords: Second-order parabolic equations, optimal control problems, regularization, well-posedness problems

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada fikirleriyle bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Murat SUBAŞI'na en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Tez İzleme Komitesine, çalışmalarım esnasında desteklerinden ötürü Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Doktora öğrenimim süresince gerçekleştirdiğim çalışmaları burs vererek maddi açıdan destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) da teşekkürlerimi sunarım.

S. Şule ŞENER

Nisan, 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	21
4.1. Parabolik Denklem için Optimal Kontrol Problemi	21
4.1.1. Optimal kontrol probleminin konulması	21
4.1.2. Bir boyutlu parabolik denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği.....	23
4.1.3. Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği.....	27
4.1.4. Fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi ve minimalleştirici dizinin kurulması.....	41
4.1.5. Minimalleştirici dizinin yakınsaması	49
4.2. $\alpha = 0$ için Problemin İyi Tanımlı Olmadığını Gösteren Nümerik Örnekler	52
5. SONUÇ	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	61

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	Her
$Q = (0, l) \times (0, T]$	$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge
$\Omega = (0, l)$	$\mathbb{R}$ de bir açık aralık
$L_2(0, l)$	$(0, l)$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	Ω bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^1(0, l)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$H^1(\Omega)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$H_0^1(0, l)$	$H^1(0, l)$ uzayının alt uzayı olup $(0, l)$ aralığının sınırlarında sıfıra dönüşebilen fonksiyonların uzayı
$H_0^1(\Omega)$	$H^1(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup Ω aralığının sınırlarında sıfıra dönüşebilen fonksiyonların uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Parabolik problemin görsel ifadesi	22
Şekil 4.2. $T = 1$ için iki çok farklı fonksiyon yaklaşık aynı fonksiyonel değeri verir	56
Şekil 4.3. $T = 4$ için iki çok farklı fonksiyon yaklaşık aynı fonksiyonel değeri verir	57



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. $L_2\Omega$ de bazı N değerleri ve hata normları.....	53
--	----



1. GİRİŞ

Parabolik denklemler için optimal kontrol problemleri çeşitli uygulamalı alanlardaki öneminden dolayı oldukça yaygındır. Bu konuyla ilgili günümüze kadar değişik bilim adamları tarafından çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Literatürde, parabolik denklemlere ait ters problemler ve optimal kontrol problemleri farklı yönleriyle ele alınmıştır. Kontrolün sınırlarda, katsayıda ve denklemin başlangıç şartlarında olması durumları birçok yazar tarafından ayrıntılı olarak çalışılmıştır.

Dhamo ve Tröltzsch (2009) çalışmasında

$$By(t) = y_x(1, t) \quad \beta = 1, \text{ Neumann}$$

$$By(t) = y_x(1, t) + \alpha(1, t) \quad 0 < \beta = \alpha, \text{ Robin}$$

$$By(t) = y(1, t) \quad \beta = 1, \text{ Dirichlet}$$

sınır şartları için,

$$y_t(x, t) = y_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T]$$

$$y_x(0, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$By_t = \beta u, \quad t \in [0, T]$$

$$y(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

problemini ele alıp,

$$\min J(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (y(x, T) - y_d(x))^2 dx$$

fonksiyoneli minimaleştirerek u fonksiyonunu kontrol etmiştir.

Raymond (2010) çalışmasında

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = f, \quad (x, t) \in Q$$

$$z(x, 0) = z_0, \quad x \in \Omega$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} = u, \quad t \in \Gamma$$

problemini inceleyerek,

$$J(z, u) = \frac{1}{2} \int_Q (z - z_d)^2 dQ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [z(T) - z_d(T)]^2 d\Omega + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma$$

u fonksiyonunu $J(z, u)$ fonksiyoneli ile minimize ederek kontrol etmiştir.

Tröltzsch (2010) çalışmasında ise

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0, \quad (x, t) \in Q := \Omega \times (0, T)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} + \alpha y = \beta u, \quad t \in \Gamma \times (0, T)$$

probleminde aşağıdaki fonksiyoneli kullanarak

$$\min J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [y(x, T) - y_{\Omega}(x)]^2 d\Omega + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} |u(x, t)|^2 ds(x) dt$$

u fonksiyonunu kontrol etmiştir.

Altmüller ve Grüne (2010) çalışmasında

$$y_t(x, t) = y_{xx}(x, t) + \mu y(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in (0, 1)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y_x(1, t) = v(t), \quad t \in (0, \infty)$$

problemi için μ nün farklı değerleri için

$$l(y, v) = \frac{1}{2} \|y(\cdot, nT)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|(v(nT))\|_{L_2(\Omega)}^2$$

amaç fonksiyoneli ile $v(t)$ sınır şartını kontrol etmişlerdir.

Phan (2011) çalışmasında

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in Q$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} = w(x, t), \quad t \in \Gamma$$

problemini ele almış,

$$J(u, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u(x, T) - \bar{u}(x)]^2 d\Omega + \frac{\alpha}{2} \langle v_w, w \rangle_{\Gamma}$$

fonksiyoneliyle w fonksiyonunu kontrol etmiştir.

Dhamo ve Tröltzsch (2011) çalışmasında amaç fonksiyoneli

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [y(x, T) - y_d(x)]^2 dx$$

şeklinde seçerek

$$y_1(x, t) = y_{xx}(x, t) \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)$$

$$y(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$y_x(0, t) = 0, \quad y_x(l, t) = u(t), \quad t \in (0, T)$$

problemi için u fonksiyonunu kontrol ettiği bir optimal kontrol problemi düşünmüş ve amaç fonksiyonelinin seçimleri hakkında bilgi vermiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk olarak giriş bölümünde literatür bilgisi verildikten sonra ikinci bölümde, bu tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan L_p uzayları ve Sobolev uzayları verilerek, bunun yanı sıra bir sonraki bölümde kullanacağımız teoremler ve lemmalar ile bazı kavramların tanımları verilmiştir.

3. bölümde genel anlamda parabolik başlangıç sınır değer probleminde sınır şartlarının final anındaki optimal kontrol problemi tanıtılmış. Bu problemin çözümünün varlığını ve tekliğini ifade eden bir teorem verilmiş ve bu teoremin ispatı yapılmıştır.

4. bölümde, bir parabolik denklem için bir optimal kontrol problemi tanıtılmış ve öncelikle parabolik denklemin zayıf çözümünün varlığı ve tekliği ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra optimal çözümün varlığı ve tekliğinin ispatı incelenmiştir. Probleme karşılık gelen eşlenik problem elde edilmiş ve bu problem aracılığıyla amaç fonksiyonelinin Frechet türevi belirlenmiştir. Gradyen metodu ile Frechet türevini kullanan bir minimalleştirici dizi kurulmuştur. Problemin kararlılığı, yani $k \rightarrow \infty$ iken $\{g_k\}$ minimalleştirici dizisi için, $J_\alpha(\{g_k\}) \rightarrow J_\alpha(g_*)$ olmasının $\|g_k - g_*\|_{H^1(0,T)} \rightarrow 0$ olmasını gerektirdiği ispat edilmiştir. Bunun için ise $J_\alpha(g)$ fonksiyonelinin güçlü konveks olduğunu ispat edilmiştir. Bu bölümde son olarak, problemin iyi tanımlı olmadığı durumları içeren nümerik örnekler oluşturulmuştur.

5. bölümde ise bu çalışmanın daha önceki yapılan çalışmalardan farklılığı ortaya koyulmuş ve tezin önemi vurgulanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, sonraki bölümler için temel teşkil eden teorem ve lammalar ile birlikte bazı kavramların ve uzayların tanımlarına yer verilmiştir.

Tanım 2.1 (Yakınsaklık): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X kümesinde bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine X kümesinde yakınsak ve x elemanına da dizinin limiti denir.

Tanım 2.2 (Cauchy Dizisi): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X kümesinde bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcutsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi adı verilir.

Tanım 2.3 (Tam Metrik Uzay): (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer bu uzaydaki her Cauchy dizisi bir $x \in X$ limitine yakınsıyorsa (X, d) uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.4 (Lineer Uzay): X kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri olmak üzere, her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

L1. $x + y = y + x$

L2. $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

L4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

L5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

L6. $\alpha x = x \Rightarrow \alpha = 1$

L7. $x + u = x$ olacak şekilde $u \in X$ vardır

L8. $x + y = u$ olacak şekilde $y \in X$ vardır

şartlarını sağlıyorsa X kümesine reel sayılar kümesi üzerinde bir lineer uzay denir.

Tanım 2.5 (Normlu Uzay): X bir lineer uzay olmak üzere $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\text{N1. } \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{N2. } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\text{N3. } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona x üzerinde norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu lineer uzay denir.

Tanım 2.6 (Banach Uzay): $X = (X, \|\cdot\|)$, normlu lineer uzay olsun. X uzayı $d(x, y) = \|x - y\|$ metriğine göre tam uzay ise bu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 2.7 (Kapalı Küme): X kümesinde her yakınsak dizinin yakınsadığı nokta bu kümeye ait ise X kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.8 (Konveks Küme): $X \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. Eğer her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$$

şartı sağlanıyorsa X kümesine konveks küme adı verilir.

Tanım 2.9 (Konveks Fonksiyon): $X, \mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona X kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Ayrıca $\lambda \in (0, 1)$ ve $x_1 \neq x_2$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

eşitsizliği geçerli ise f fonksiyonu kesin konveks olur.

Tanım 2.10 (Güçlü Konveks Fonksiyon): $X, \mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ olmak üzere

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \chi \lambda(1 - \lambda) \|x_1 - x_2\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\chi > 0$ sabiti varsa bu fonksiyona χ sabiti ile güçlü konveks fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.11 (Dönüşüm): X ve Y boştan farklı iki küme olmak üzere f, X kümesinden Y kümesine bir bağıntı olsun. Eğer f bağıntısı X kümesinin her elemanını Y kümesinden yalnız bir eleman ile eşliyorsa bu bağıntıya X kümesinden Y kümesine bir dönüşüm denir.

Tanım 2.12 (Süreklilik): $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $d_X(x, x_0) < \delta$ iken $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ pozitif sayısı mevcutsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyona X kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.13 (Operatör): Lineer uzayda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.14 (Lineer Operatör): X ve Y, F cismi üzerinde birer lineer uzay olsun. $T: X \rightarrow Y$ operatörü, her $\lambda, \mu \in F$ ve $x, y \in X$ için

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüme lineer operatör denir.

Tanım 2.15 (Fonksiyonel): $F \subset \mathbb{R}$ veya $F \subset \mathbb{C}$ olmak üzere X, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. $J: X \rightarrow F$ operatörüne fonksiyonel adı verilir.

Tanım 2.16: (x_n) bir reel sayı dizisi olsun.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup\{x_k : k \geq n\}]$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\inf\{x_k : k \geq n\}]$$

olur. Başka bir gösterim

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

şeklindedir. $\sup\{x_k : k \geq n\} = \infty$ veya $\inf\{x_k : k \geq n\} = -\infty$ ise $\limsup x_n = \infty$ veya $\liminf x_n = -\infty$ diyebiliriz.

Tanımdan $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$ diyebiliriz, üstelik (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$ olmasıdır.

Tanım 2.17 (Aşağıdan Yarı Süreklilik): $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ ve her $x_n \rightarrow x_0$ dizisi için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

ise f fonksiyonuna x_0 noktasında aşağıdan yarı sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.18 (Koersiv Bilineer Form): $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

şartını sağlıyorsa koersiv olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle herhangi $M > 0$ sayısı için $\|x\| \geq R$ iken $f(x) \geq M$ olacak şekilde $R > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna koersiv adı verilir.

H , Hilbert uzayı olmak üzere her $x \in H$ için

$$a(x, x) \geq c\|x\|^2$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti varsa $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ bilineer formuna koersiv adı verilir. Burada $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$ şeklindedir.

Tanım 2.19 (Gradyen – Frechet Türevi): W kümesinde tanımlanan $J(w)$ fonksiyoneli için,

$$\Delta J(w) = J(w + \Delta w) - J(w) = \langle J'(w), \Delta w \rangle_W + o(\|\Delta w\|_W^2)$$

şartı sağlanırsa bu fonksiyonele $w \in W$ elemanında Frechet anlamında diferensiyellenen fonksiyonel, $J'(w)$ elemanına ise $J(w)$ fonksiyonelinin gradyeni veya Frechet türevi denir.

Teorem 2.1 (Vasilyev, 1981): U, B –Banach uzayının konveks alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_* = \{u \in U: J(u) = J_* = \inf_U J(u)\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde her $u_* \in U_*$ ve her $u \in U$ için $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle_B \geq 0$ şartı sağlanır.

Lemma 2.1 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada norm, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanmaktadır.

Lemma 2.2 (ε -Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a, b sayıları ve her $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.20 (Hilbert Uzayı): $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu uzay $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ metriğine göre tam ise Hilbert uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.21 (Zayıf Yakınsaklık): $(x_n), H$ Hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y \in H$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

ise (x_n) dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.22 (Zayıf Kapalı Küme): X kümesinde her zayıf yakınsak dizinin zayıf limiti bu kümeye ait ise X kümesine zayıf kapalı küme denir.

Tanım 2.23: $L_2(0, l), (0, l)$ aralığında ölçülebilir ve karesiyle integrallenebilir fonksiyonları içeren bir Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{L_2(0, l)} = \int_0^l u(x)v(x)dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0, l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(0, l)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.24: $L_2(\Omega), \Omega = (0, l) \times (0, T]$ bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonları içeren Hilbert uzayıdır.

Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} u(x, t) v(x, t) dx dt,$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(\Omega)}}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.25: $H^1(0, l)$, Hilbert uzayı olup kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayına ait olan fonksiyonları içeren Sobolev uzayıdır.

Sobolev uzayları, genelleştirilmiş türevleri L_p uzayından olan Banach uzaylarıdır.

$H_0^1(0, l), H^1(0, l)$ uzayının alt uzayı olup $(0, l)$ aralığının sınırlarında sıfıra dönüşebilen fonksiyonları içermektedir. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(0, l)} = \int_0^l \left(u(x) v(x) + \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|u\|_{H_0^1(0, l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_0^1(0, l)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.26: $H^1(\Omega)$, Sobolev uzayı olup, kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayıdır.

Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \iint_{\Omega} \left(u(x, t) v(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) dx dt,$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)}}$$

Tanım 2.27: v kümesinde

$$J(v) \rightarrow \min$$

problemini ele alalım. Eğer bir $\{v_n\} \in V$ dizisi $\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \inf_{v \in V} J(v)$ şartını sağlıyorsa $\{v_n\}$ dizisine problem için minimalleştirici dizi denir.

Tanım 2.28: Bir fiziksel olayın matematiksel modelinin çözümü var, çözüm tek ve çözüm başlangıç şartlarına sürekli bağımlı ise problem iyi tanımlı olarak adlandırılır. İyi tanımlı olma şartlarını sağlamayan bir probleme iyi tanımlı olmayan problem denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

$Q = (0, l) \times (0, T)$ bölgesinde verilmiş

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = h & (x, t) \in Q \\ u(x, 0) = u_0 & x \in \Omega = (0, l) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = g(t) & t \in (0, T) \end{cases}$$

problemi ile yönetilen

$$J_\alpha(g) = \int_0^l [u(x, T; g) - y(x)]^2 dx + \alpha \int_0^T g^2(t) dt$$

fonksiyoneli için

$$J_\alpha(g^*) = \inf_{g \in G_{ad}} J_\alpha(g)$$

problemi genel anlamda parabolik başlangıç sınır değer probleminde sınır şartlarının final anında optimal kontrolü olarak adlandırılır. Burada G_{ad} kümesi $G_{ad} \subset L_2(0, T)$ şeklinde kapalı ve konveks bir kümedir.

$$g \rightarrow u(x, T; g) - u(x, T; 0)$$

dönüşümü lineer olduğundan $J_\alpha(g)$ fonksiyoneli

$$J_\alpha(g) = \int_0^l [u(x, T; g) - u(x, T; 0) + u(x, T; 0) - y(x)]^2 dx + \alpha \int_0^T g^2(t) dt$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Bu fonksiyonel

$$\pi(g, g) = \int_0^l [u(x, T; g) - u(x, T; 0)][u(x, T; g) - u(x, T; 0)]dx \\ + \alpha \int_0^T g^2(t)dt$$

$$Lg = \int_0^l [u(x, T; g) - u(x, T; 0)][y(x) - u(x, T; 0)]dx$$

ve

$$b = \int_0^l [y(x) - u(x, T; 0)]^2 dx$$

için kısaca aşağıdaki gibi yazılır:

$$J_\alpha(g) = \pi(g, g) - 2Lg + b$$

Genel anlamda optimal kontrol problemleri incelenirken bir takım durumlar ele alınır. Bunlar,

1. Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmesi
2. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart elde edilmesi
3. Optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için uygun hesaplama metotları kullanılması şeklindedir.

Optimal kontrol problemlerinde çözümün varlığı ve tekliği (Lions 1971) çalışmasında verilen şu teoremin şartlarının sağlandığı ispatlanarak elde edilir.

Teorem 3.1: G bir reel Hilbert uzayı ve G_{ad} , G uzayının kapalı ve konveks bir alt uzayı olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

a) $\pi(h, g)$, G uzayında koersiv, sürekli, simetrik, bilineer bir fonksiyoneldir.

b) Lg, G uzayında sürekli, lineer bir fonksiyoneldir.

Bu durumda

$$J_\alpha(g) = \pi(g, g) - 2Lg + b \quad (3.1)$$

fonksiyoneli için G_{ad} aday kontroller kümesinde

$$J_\alpha(h) = \inf_{g \in G_{ad}} J_\alpha(g) \quad (3.2)$$

probleminin bir tek $h \in G_{ad}$ çözümü vardır.

İspat : $g_k \in G_{ad}$, $J_\alpha(g)$ fonksiyoneli için bir minimalleştirici dizi olsun. Yani bu dizi

$$J_\alpha(g_k) \rightarrow \inf_{g \in G_{ad}} J_\alpha(g) = J_\alpha(g_*) \quad (3.3)$$

özelliğinde olsun. π koersiv ve L sürekli olduğundan

$$|\pi(g, g)| \geq c\|g\|^2 \quad (c > 0) \quad (3.4)$$

ve

$$|Lg| \leq c_1\|g\| \quad (c_1 > 0) \quad (3.5)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan

$$J_\alpha(g) = \pi(g, g) - 2Lg + b \geq c\|g\| - c_1\|g\| \quad (3.6)$$

olduğu görülür. (3.3) ve (3.6) ifadelerinden $\|g_k\| \leq \text{sabit}$ olduğu sonucu çıkar. Bu durumda $\{g_k\}$ dizisinin $w \in G$ elemanına zayıf yakınsayan bir $\{g_{km}\}$ alt dizisi vardır. G_{ad} kümesi kapalı ve konveks olduğundan zayıf kapalıdır. O halde

$$w \in G_{ad} \quad (3.7)$$

şeklindedir. π aşağıdan zayıf yarı sürekli (konveks ve sürekli) ve L zayıf sürekli (konveks ve sürekli) olduğundan bunların birleşiminden oluşan J fonksiyoneli de aşağıdan zayıf yarı sürekli. Yani

$$J_\alpha(w) \leq \liminf J_\alpha(g_{km}) \quad (3.8)$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca (3.3) ve (3.8) eşitsizliklerinden de

$$J_\alpha(w) \leq \lim_{km \rightarrow \infty} \inf_{g_{km} \in G_{ad}} J_\alpha(g_{km}) \leq \inf_{g \in G_{ad}} J_\alpha(g) = J_\alpha(g_*) \quad (3.9)$$

olduğu görülür. Böylece optimal çözümün $g_* = w$ olduğu ispatlanır.

Bu çözümün ait olduğu kümeyi $G_* = \left\{ g \in G_{ad} : J_\alpha(g_*) = \inf_{g \in G_{ad}} J_\alpha(g) \right\}$ ile gösterelim.

Şimdi çözümün tekliğini inceleyelim.

Lg fonksiyoneli konveks ve $\pi(g, g)$ fonksiyoneli de kesin konveks olduğundan $J_\alpha(g)$ fonksiyoneli de kesin konvekstir. Yani

$$J_\alpha(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2) < \beta J_\alpha(g_1) + (1 - \beta) J_\alpha(g_2)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $\beta = \frac{1}{2}$ olarak seçilirse

$$J_{\alpha}\left(\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2\right) < \frac{1}{2}J_{\alpha}(g_1) + \frac{1}{2}J_{\alpha}(g_2)$$

yazılır. g_1 ve g_2 fonksiyonları $J_{\alpha}(g_1) = J_{\alpha}(g_2) = \inf_{g \in G_{ad}} J_{\alpha}(g)$ eşitliğini sağlayan iki eleman olsun. Buradan

$$J_{\alpha}\left(\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2\right) < \frac{1}{2}J_{\alpha}(g_1) + \frac{1}{2}J_{\alpha}(g_2) = \inf_{g \in G_{ad}} J_{\alpha}(g)$$

eşitsizliği $\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2$ elemanının fonksiyoneli minimumundan daha düşük bir değere götürdüğü çelişmesine sebep olur. O halde hem g_1 hem de g_2 minimum eleman olamaz. Yani minimum eleman tekdir.

Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart elde edilirken probleme karşılık gelen Lagrange fonksiyoneli

$$\begin{aligned} L(u, g, \eta) = & \int_0^l [u(x, T; g) - y(x)]^2 dx + \alpha \int_0^T g^2(t) dt \\ & + \int_0^T \int_0^l \eta \left[\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - h(x, t) \right] dx dt \end{aligned}$$

şeklinde yazıldıktan sonra bu fonksiyonelin u değişkenine göre birinci varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^l [2u(x, T; g) - 2y(x) + \eta(x, T)] \delta u(x, T) dx - \int_0^T \int_0^l (\eta_t + k\Delta \eta) \delta u dx dt \\ & + \int_0^T k\eta_x(l, t) \delta u(l, t) dt - \int_0^T k\eta_x(0, t) \delta u(0, t) dt \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada η fonksiyonu Lagrange çarpanıdır. $\delta L = 0$ stasyonerlik şartından

$$\eta_t + k\Delta\eta = 0$$

$$\eta(x, T) = -2[u(x, T; g) - y(x)]$$

$$\eta_x(0, t) = 0, \quad \eta_x(l, t) = 0$$

eşlenik problemi bulunur. Bu eşlenik problemin η çözümü kullanılarak, $J_\alpha(g)$ fonksiyonelinin g fonksiyonuna karşılık gelen değişimi

$$\begin{aligned} |\Delta J_\alpha(g)| &= \int_0^T k\Delta g(t)\eta(l, t)dt + \int_0^l \Delta u^2(x, T)dx \\ &\quad + 2\alpha \int_0^T g(t)\Delta g(t)dt + \alpha \int_0^T \Delta g^2(t)dt \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Frechet türevin tanımı

$$|\Delta J_\alpha(g)| = \langle J'_\alpha(g), \Delta g \rangle_{L_2(0, T)} + o(\|\Delta g\|_{L_2(0, T)}^2)$$

olduğuna göre amaç fonksiyonelinin Frechet türevi

$$J'_\alpha(g) = k\eta(l, t) + 2\alpha g$$

şeklinde belirlenir. Böylece bir g_* elemanının optimal çözüm olabilmesi için gerek ve yeter şart her $g \in G_{ad}$ için

$$\langle k\eta_*(l, t) + 2\alpha g_*, g - g_* \rangle_{L_2(0, T)} \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada $\eta_*(l, t)$, g_* elemana karşılık gelen eşlenik problemin çözümüdür (Vasilyev 1981).

Optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için genellikle gradyen metodu kullanılarak optimal çözüme yakınsayan bir minimalleştirici dizi kurulur.

Bu metoda göre g_k elemanına karşılık gelen Frechet türevi $J'_\alpha(g_k)$ olmak üzere g_0 başlangıç elemanı seçilerek

$$g_{k+1} = g_k - \beta_k J'_\alpha(g_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

kuralı ile minimalleştirici dizi oluşturulur. Şimdi bu $\{g_{k+1}\}$ dizisinin minimalleştirici dizi olduğunu ispatlayalım.

Frechet türevin tanımından

$$J_\alpha(g_{k+1}) - J_\alpha(g_k) = \langle J'_\alpha(g_k), g_{k+1} - g_k \rangle_{L_2(0,T)} + o(\|g_{k+1} - g_k\|_{L_2(0,T)}^2)$$

yazılabilir. Minimalleştirici dizinin tanımı gereği

$$g_{k+1} - g_k = -\beta_k J'_\alpha(g_k)$$

olur. Bu ifade yukardaki türevin tanımında yerine konulursa

$$J_\alpha(g_{k+1}) - J_\alpha(g_k) = \langle J'_\alpha(g_k), -\beta_k J'_\alpha(g_k) \rangle_{L_2(0,T)} + o(\|-\beta_k J'_\alpha(g_k)\|_{L_2(0,T)}^2)$$

veya

$$J_\alpha(g_{k+1}) - J_\alpha(g_k) = -\beta_k \|J'_\alpha(g_k)\|_{L_2(0,T)}^2 + o(\beta_k)$$

elde edilir. O halde

$$J_\alpha(g_{k+1}) - J_\alpha(g_k) = \beta_k \left[-\|J'_\alpha(g_k)\|_{L_2(0,T)}^2 + \frac{o(\beta_k)}{\beta_k} \right]$$

olup, yeteri kadar küçük β_k sayıları için

$$J_\alpha(g_{k+1}) - J_\alpha(g_k) < 0$$

olacağı görülür. Bu ifade $\{g_{k+1}\}$ dizisinin minimalleştirici dizi olduğunu gösterir.

Minimalleştirici dizideki β_k parametresinin seçimi (İskenderov *et al.* 2002) çalışmasında verilen metotlardan biri ile yapılabilir.

Minimalleştirici dizi bu kural ile kurulduktan sonra fonksiyonelin verilen kümede güçlü konveks olduğu gösterilerek, bu dizinin optimal çözüme aşağıdaki eşitsizliğe göre yakınsadığı ispatlanır;

$$\|g_k - g_*\|_{L_2(0,T)}^2 < \frac{2}{\alpha} (J_\alpha(g_k) - J_\alpha(g_*)).$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde çalışmalarımızda elde ettiğimiz çözüm ve sonuçlara yer verilmiştir.

4.1. Parabolik Denklem için Optimal Kontrol Problemi

İlk olarak parabolik bir denklem için bir optimal kontrol problemi tanımlanmış ve bu problemin çözümü incelenmiştir.

4.1.1. Optimal kontrol probleminin konulması

Bu tezde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t), \quad (x, t) \in Q = (0, l) \times (0, T) \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega = (0, l) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = g(t), \quad t \in (0, T) \quad (4.3)$$

parabolik başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada $k > 0$ ile

$$u_0(x) \in H^1(\Omega), \quad h(x, t) \in L_2(Q), \quad g(t) \in H^1(0, T)$$

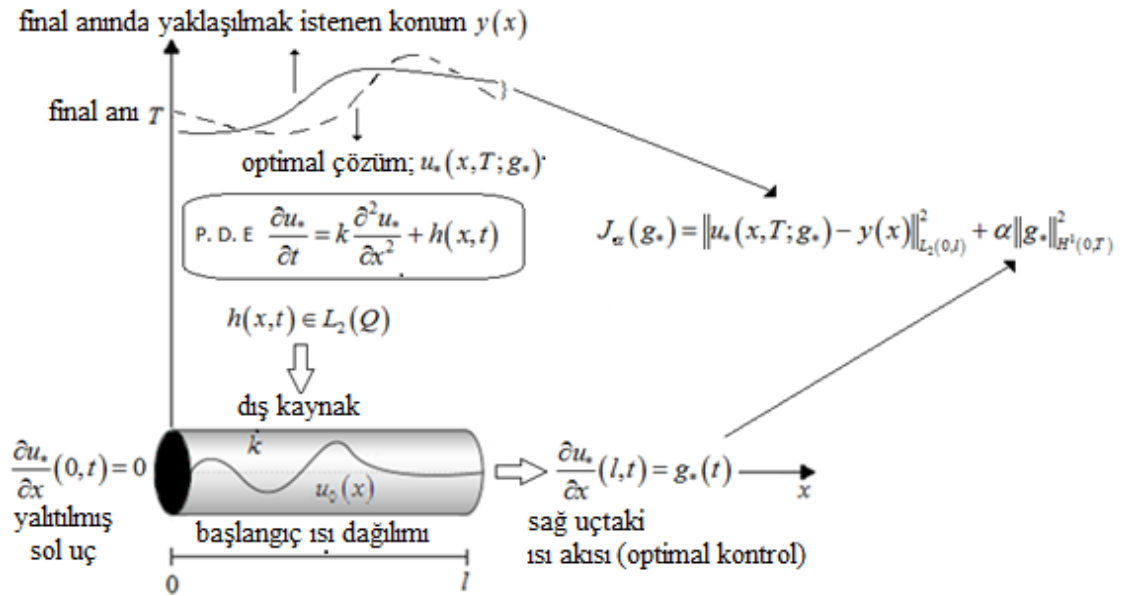
şartlarının sağlandığını kabul edelim. Amacımız, $y(x) \in L_2(0, l)$ fonksiyonu $t = T$ final anında (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün yaklaşmasını istediğimiz hedef fonksiyonu olmak üzere,

$$J_\alpha(g) = \|u(x, T; g) - y(x)\|_{L_2(0, l)}^2 + \alpha \|g\|_{H^1(0, T)}^2 \quad (4.4)$$

fonksiyoneli kullanarak $J_{\alpha^*} = \inf J_{\alpha}(g) = J_{\alpha}(g_*)$ probleminin çözümü olan g fonksiyonunu bulmaktır.

Problemde $\alpha = 0$ olduğunda iyi tanımlılık sağlanmamaktadır. Bunun manası fonksiyoneli minimum yapabilen değişik normlara sahip g fonksiyonunun bulunabileceğidir. Burada $\alpha > 0$ ise $\|u(x, T; g) - y(x)\|_{L_2(0, l)}^2$ ile $\|g\|_{H^1(0, T)}^2$ arasında denge kuran ve çözümün tekliğini garanti eden düzgünleştirme parametresidir. Fonksiyonelde $\alpha = 0$ alındığında problemin kötü tanımlanmış olduğu nümerik örneklerle gösterilmiştir (Vasilyev 1988).

İfade edilen parabolik problemi aşağıdaki şekilde görselleştirebiliriz:



Şekil 4.1. Parabolik problemin görsel ifadesi

(4.1)-(4.3) denklemleri ısı iletim denklemi olarak ele alınır. Burada k ısı yayılım sabiti, h süreksiz ısı kaynağının yoğunluğu, u_0 başlangıç anındaki ısı dağılım fonksiyonudur. Sağ uçtaki ısı akısı $g(t)$ fonksiyonu olup, sol uç ise yalıtılmıştır. $u(x, t; g)$ fonksiyonu, $g(t)$ fonksiyonuna karşılık gelen (4.1)-(4.3) probleminin çözümüdür. Ele aldığımız

optimal kontrol probleminde, α değerleri kullanılarak $y(x)$ ile T final anındaki u ısı dağılım fonksiyonu arasındaki mesafe ve $g(t)$ ısı akısı fonksiyonun büyüklüğü kontrol edilmiştir. Bunu sağlayan optimal değerler g_* ve J_* ile gösterilmiştir.

Bu çalışmada önceki çalışmalardan farklı olarak sürekli fonksiyonlar olan kontroller seçilmiştir. Kontrol fonksiyonlarının uzayı olarak kapalı ve konveks $G_{ad} \subset H^1(0, T)$ kümesi alınmıştır. Kontrollerin kümesinin bu şekilde seçimi ise fonksiyonele, kontrolün $H^1(0, T)$ uzayındaki normunun eklenmesine sebep olmuştur. Materyal ve Yöntem bölümünde gösterdiğimiz gibi kontrolün L_2 uzayından seçildiği durumda Frechet türevi sadece eşlenik denklemin çözümünü içerir. $H^1(0, T)$ uzayından seçildiğinde ise Frechet türevi sadece eşlenik denklemin çözümünü değil, aynı zamanda ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümünü de içerir. Bu durum daha fazla şartın sağlanma zorunluluğunu ortaya çıkarır.

4.1.2. Bir boyutlu parabolik denklem için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Bu bölümde (4.1)-(4.3) probleminin zayıf çözümünün var ve tek olduğu ispat edilmiştir. Öncelikle verilen parabolik problemin zayıf çözümün tanımını yapalım.

Tanım 4.1.2.1: (4.1)-(4.3) probleminin çözümü deyince her $v \in H^1(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} v(x) dx + \int_0^l k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_0^l h(x, t) v(x) dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (4.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

eşitliğini sağlayan $u \in H^{2,1}(Q)$ fonksiyonu anlaşılacaktır. Bu çözüme zayıf veya genelleştirilmiş çözüm de denilmektedir. Bu çözümün var olabilmesi için

$$u_0(x) \in H^1(\Omega), \quad h(x, t) \in L_2(Q), \quad g(t) \in H^1(0, T) \quad (4.6)$$

şartlarının sağlanması gerekir.

Teorem 4.1.2.2: $u_0(x) \in H^1(\Omega)$, $h(x, t) \in L_2(Q)$ ve $g(t) \in H^1(0, T)$ için (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin tek bir $u \in H^{2,1}(Q)$ çözümü vardır ve h, u_0 ve g fonksiyonları için

$$\|u\|_{H^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_1(\|h\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g\|_{H^1(0,T)}^2) \quad (4.7)$$

eşitsizliği geçerlidir (Lions 1972).

İspat: Teoremin ispatı Feado-Galerkin metodu ile yapılır. (4.1)-(4.3) probleminin çözümü, $u_2 = \frac{x^2}{2l}g(t)$ seçilerek ve $u = u_1 + u_2$ formunda düşünülerek ele alınır. Homojen sınır şartlı parabolik problem u_1 için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + h(x, t) + \frac{k}{l}g(t) - \frac{x^2}{2l}g'(t) \quad (4.8)$$

$$u_1(x, 0) = u_0(x) - \frac{x^2}{2l}g(0) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (4.10)$$

Bu (4.8)-(4.10) denklem sistemi çözüldükten sonra bu çözüme u_2 eklenerek (4.1)-(4.3) denklem sisteminin çözümü elde edilir. (4.8)-(4.10) Neumann probleminin zayıf çözümü aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial u_1}{\partial t} v(x) dx + \int_0^l k \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx &= \int_0^l h(x, t) v(x) dx \\ + \frac{k}{l} \int_0^l g(t) v(x) dx - \int_0^l \frac{x^2}{2l} g'(t) v(x) dx & \\ u_1(x, 0) &= u_0(x) - \frac{x^2}{2l} g(0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bu zayıf çözümün hesaplanmasında Feado-Galerkin metodunu kullanılır. Bu metoda göre $u_1 \in H^{1,0}(Q)$ fonksiyonuna

$$u_1^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x) \quad (4.12)$$

fonksiyonlarıyla yaklaşılr. Yaklaşık $u_1^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x)$ fonksiyonu kullanılarak (4.8)-(4.10) problemi çözülebilir (Ladyzhenskaya 1985). Burada $\varphi_k(x)$ fonksiyonları $H^1(\Omega)$ uzayında ortagonal fonksiyonlardır. Sınır şartları ile uyumlu olarak bu fonksiyonlar aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}}, \cos \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \dots, \cos \frac{(n-1)\pi}{l} x, \dots \right\}$$

Eğer (4.11) eşitliğinde $r = 1, 2, \dots, N$ için $u_1 \cong \sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x)$ ve $v(x) = \varphi_r(x)$ alınarak yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} M \frac{dC}{dt} + AC &= H \\ C(0) &= C_0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

Burada

$$C = \begin{bmatrix} C_1^N(t) \\ C_2^N(t) \\ \vdots \\ C_N^N(t) \end{bmatrix}$$

bilinmeyenler matrisi,

$$C_0 = \begin{bmatrix} \int_0^l \left[u_0(x) - \frac{x^2}{2l} g(0) \right] \varphi_1(x) dx \\ \int_0^l \left[u_0(x) - \frac{x^2}{2l} g(0) \right] \varphi_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^l \left[u_0(x) - \frac{x^2}{2l} g(0) \right] \varphi_N(x) dx \end{bmatrix}$$

başlangıç matrisi,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{(n-1)\pi}{l}\right)^2 \end{bmatrix}$$

katsayı matrisleri ve

$$H = \begin{bmatrix} \int_0^l h(x, t) \varphi_1(x) dx + \int_0^l \frac{k}{l} g(t) \varphi_1(x) dx - \int_0^l \frac{x^2}{2l} g'(t) \varphi_1(x) dx \\ \int_0^l h(x, t) \varphi_2(x) dx + \int_0^l \frac{k}{l} g(t) \varphi_2(x) dx - \int_0^l \frac{x^2}{2l} g'(t) \varphi_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^l h(x, t) \varphi_N(x) dx + \int_0^l \frac{k}{l} g(t) \varphi_N(x) dx - \int_0^l \frac{x^2}{2l} g'(t) \varphi_N(x) dx \end{bmatrix}$$

sağ taraf matrisidir.

M ve A köşegen olduğu için (4.13) sisteminde her denklem bir adi diferansiyel denklem verir. Bu yüzden $c_k(t)$ fonksiyonlarını tam olarak bulunabilir ve (4.13) eşitliği çözülebilir. Böylece u_1^N çözüm fonksiyonu elde edilir. Son olarak bu çözüme u_2 eklenerek yaklaşık u çözümü elde edilir.

4.1.3. Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Bu bölümde (4.1)-(4.3) problemi için

$$J_\alpha(g) = \int_0^l [u(x, T; g) - y(x)]^2 dx + \alpha \int_0^T (g^2(t) + g'(t)^2) dt$$

amaç fonksiyoneli minimum yapan bir $g(t)$ fonksiyonunun varlığı ve tekliği materyal ve yöntemde kullanılan tekniklerin bu fonksiyonel için de geçerli olduğu ispatlanarak elde edilmiştir.

Aday kontrollerinin kapalı ve konveks $G_{ad} \subset H^1(0, T)$ alt kümesini tanımlayalım. Optimal çözüm için varlık ve teklik teoremini vermeden önce, $J_\alpha(g)$ amaç fonksiyoneli yeniden düzenleyelim. Amaç fonksiyoneli

$$\begin{aligned} J_\alpha(g) = & \int_0^l [u(x, T; g) - u(x, T; 0) + u(x, T; 0) - y(x)]^2 dx \\ & + \alpha \int_0^T (g^2(t) + g'(t)^2) dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \pi(g, g) = & \int_0^l [u(x, T; g) - u(x, T; 0)][u(x, T; g) - u(x, T; 0)] dx \\ & + \alpha \int_0^T [g^2(t) + (g'(t))^2] dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$Lg = \int_0^l [u(x, T; g) - u(x, T; 0)][y(x) - u(x, T; 0)] dx \quad (4.16)$$

$$b = \int_0^l [y(x) - u(x, T; 0)]^2 dx \quad (4.17)$$

İçin $J_\alpha(g)$ amaç fonksiyoneli kısaca

$$J_\alpha(g) = \pi(g, g) - 2Lg + b \quad (4.18)$$

biçiminde yazılır.

(4.15) ve (4.16) ile tanımlanan fonksiyoneller aşağıdaki özellikleri sağlar;

Lemma 4.1.3.1: (4.15) eşitliğindeki $\pi(g, g)$ bilineerdir.

İspat: $g \rightarrow u[g] - u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan her $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ve $g_1, g_2, g \in H^1(0, T)$ için

$$\begin{aligned} \pi(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2, g) &= \int_0^l [u(x, T; \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) - u(x, T; 0)][u(x, T; g) - u(x, T; 0)] dx \\ &\quad + \alpha \int_0^T [(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2)g + (\beta_1 g_1' + \beta_2 g_2')g'] dt \\ &= \beta_1 \int_0^l [u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)][u(x, T; g) - u(x, T; 0)] dx \\ &\quad + \beta_2 \int_0^l [u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)][u(x, T; g) - u(x, T; 0)] dx \\ &\quad + \beta_1 \alpha \int_0^T (g_1 g + g_1' g') dt + \beta_2 \alpha \int_0^T (g_2 g + g_2' g') dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\pi(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2, g) = \beta_1 \pi(g_1, g) + \beta_2 \pi(g_2, g) \quad (4.19)$$

elde edilir. Bu eşitlik $\pi(g, g)$ fonksiyonelinin bilineer olduğunu gösterir.

Lemma 4.1.3.2: (4.15) eşitliğindeki $\pi(g, g)$ koersivdir.

İspat: $g(t) \in H^1(0, T)$ artışı için $\Delta u(x, t) = u(x, t; g) - u(x, t; 0)$ fark fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümüdür:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2}, t \in (0, T), \quad x \in (0, l) \quad (4.20)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l) \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial t}(0, t) = 0, \frac{\partial \Delta u}{\partial t}(l, t) = g(t), t \in (0, T) \quad (4.22)$$

O halde her $\alpha > 0$ için ve $g \in H^1(0, T)$ için

$$\begin{aligned} |\pi(g, g)| &= \int_0^l (\Delta u(x, T))^2 dx + \alpha \|g\|_{H^1(0, T)}^2 \\ &= \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \alpha \|g\|_{H^1(0, T)}^2 \geq \alpha \|g\|_{H^1(0, T)}^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $\pi(g, g)$ fonksiyonelinin koersiv olduğunu gösterir.

Lemma 4.1.3.3: (4.15) eşitliğindeki $\pi(g, g)$ süreklidir.

İspat: $\pi(g, g)$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu göstermek için öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim

Lemma 4.1.3.4: (4.20)-(4.22) probleminin $\Delta u(x, t) = u(x, t; g) - u(x, t; 0)$ çözümü her $t \in [0, T]$ için

$$\|\Delta u(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_2 \left(\|g\|_{H^1(0, T)}^2 \right) \quad (4.24)$$

eşitsizliğini sağlar.

Lemma 4.1.3.1 kullanılarak, her $g_1, g_2 \in H^1(0, T)$ için

$$\begin{aligned}
|\pi(g_1, g_2)| &= \int_0^l [u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)][u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)] dx \\
&\quad + \alpha \int_0^T (g_1 g_2 + g_1' g_2') dt \\
&\leq \|u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)\|_{L_2(0, l)} \|u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)\|_{L_2(0, l)} \\
&\quad + \alpha \|g_1\|_{H^1(0, T)} \|g_2\|_{H^1(0, T)} \\
&= \|\Delta u(x, T; g_1)\|_{L_2(0, l)} \|\Delta u(x, T; g_2)\|_{L_2(0, l)} + \alpha \|g_1\|_{H^1(0, T)} \|g_2\|_{H^1(0, T)} \\
&\leq c_2 \|g_1\|_{H^1(0, T)} \|g_2\|_{H^1(0, T)} + \alpha \|g_1\|_{H^1(0, T)} \|g_2\|_{H^1(0, T)} \\
&\leq c_3 \|g_1\|_{H^1(0, T)} \|g_2\|_{H^1(0, T)}
\end{aligned}$$

yazılır ve $c_3 = \max\{c_2, \alpha\}$ olmak üzere

$$|\pi(g_1, g_2)| \leq c_3 \|g_1\|_{H^1(0, T)} \|g_2\|_{H^1(0, T)}$$

bulunur. Bu eşitsizlik $\pi(g, g)$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterir.

Lemma 4.1.3.5: (4.15) eşitliğindeki $\pi(g, g)$ kesin konvektir.

İspat: Her $\beta \in (0, 1)$ ve $g_1 \neq g_2$ için

$$\pi(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2, \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) < \beta \pi(g_1, g_1) + (1 - \beta) \pi(g_2, g_2)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Öncelikle

$$\begin{aligned}
& \pi(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2, \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) \\
&= \int_0^l [u(x, T; \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) - u(x, T; 0)][u(x, T; \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) \\
&\quad - u(x, T; 0)]dx \\
&\quad + \alpha \int_0^T [(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2)^2 + (\beta g_1' + (1 - \beta)g_2')^2]dt \\
&= \int_0^l [u(x, T; \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) - u(x, T; 0)]^2 dx \\
&\quad + \alpha \int_0^T [(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2)^2 + (\beta g_1' + (1 - \beta)g_2')^2]dt
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan π fonksiyonelinin bilineer olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \pi(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2, \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) \\
&= \int_0^l [\beta(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)) + (1 - \beta)(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0))]^2 dx \\
&\quad + \alpha \int_0^T [(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2)^2 + (\beta g_1' + (1 - \beta)g_2')^2]dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu son ifadede öncelikle

$$\int_0^l [\beta(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)) + (1 - \beta)(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0))]^2 dx$$

integralinde

$$\begin{aligned} & \left[\beta(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)) + (1 - \beta)(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)) \right]^2 \\ & \leq \beta[u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)]^2 + (1 - \beta)[u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)]^2 \end{aligned}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{aligned} & \beta(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0))^2 + (1 - \beta)(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0))^2 \\ & \quad - \beta^2(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0))^2 - (1 - \beta)^2(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0))^2 \\ & \quad - 2\beta(1 - \beta)(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0))(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)) \geq 0 \end{aligned}$$

şartının sağlandığını gösterelim. Bu eşitsizlik düzenlenerek

$$\begin{aligned} & (\beta - \beta^2)(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0))^2 + (\beta - \beta^2)(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0))^2 - 2\beta(1 \\ & \quad - \beta)(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0))(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)) \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf $(\beta - \beta^2) > 0$ sayısına bölünürse

$$\begin{aligned} & (u(x, T; g_1) - u(x, T; 0))^2 - 2(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0))(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)) \\ & \quad + (u(x, T; g_2) - u(x, T; 0))^2 \geq 0 \end{aligned}$$

veya buna denk olarak

$$\left[(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)) - (u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)) \right]^2 \geq 0$$

bulunur. Böylece $g_1 \neq g_2$ için

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 [\beta(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)) + (1 - \beta)(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0))]^2 dx \\
& \leq \int_0^1 \{\beta[u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)]^2 + (1 - \beta)[u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)]^2\} dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aynı şekilde

$$\int_0^T (\beta g_1 + (1 - \beta)g_2)^2 dt$$

integralinde

$$(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2)^2 < \beta g_1^2 + (1 - \beta)g_2^2$$

olduğunu gösterelim. O halde

$$\beta g_1^2 + (1 - \beta)g_2^2 - \beta^2 g_1^2 - (1 - \beta)^2 g_2^2 - 2\beta(1 - \beta)g_1 g_2 > 0$$

şartının sağlandığını gösterelim. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$(\beta - \beta^2)g_1^2 + (\beta - \beta^2)g_2^2 - 2\beta(1 - \beta)g_1 g_2 > 0$$

yazılır. Her iki taraf $(\beta - \beta^2) > 0$ sayısına bölünürse

$$g_1^2 + g_2^2 - 2g_1 g_2 > 0$$

veya buna denk olarak

$$(g_1 - g_2)^2 > 0$$

bulunur.

Böylece $g_1 \neq g_2$ için

$$\int_0^T (\beta g_1 + (1 - \beta)g_2)^2 dt < \int_0^T [\beta g_1^2 + (1 - \beta)g_2^2] dt$$

eşitsizliği sağlanır.

Aynı şekilde

$$\int_0^T (\beta g'_1 + (1 - \beta)g'_2)^2 dt$$

integralinde

$$(\beta g'_1 + (1 - \beta)g'_2)^2 < \beta (g'_1)^2 + (1 - \beta)(g'_2)^2$$

olduğunu gösterelim. Bu eşitsizliği göstermek için

$$\beta (g'_1)^2 + (1 - \beta)(g'_2)^2 - \beta^2 (g'_1)^2 - (1 - \beta)^2 (g'_2)^2 - 2\beta(1 - \beta)g'_1 g'_2 > 0$$

şartının sağlandığı gösterilmelidir. Bu eşitsizlik düzenlenerek

$$(\beta - \beta^2)(g'_1)^2 + (\beta - \beta^2)(g'_2)^2 - 2\beta(1 - \beta)g'_1 g'_2 > 0$$

elde edilir. Her iki taraf $(\beta - \beta^2) > 0$ sayısına bölünürse

$$(g_1')^2 + (g_2')^2 - 2g_1'g_2' > 0$$

veya buna denk olarak

$$(g_1' - g_2')^2 > 0$$

olduğu görülür. Böylece $g_1' \neq g_2'$ için

$$\int_0^T (\beta g_1' + (1 - \beta)g_2')^2 dt < \int_0^T [\beta (g_1')^2 + (1 - \beta)(g_2')^2] dt$$

eşitsizliği sağlanır.

Elde edilen son üç eşitsizlik π fonksiyoneline yerine konulursa

$$\begin{aligned} & \pi(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2, \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) \\ &= \int_0^l [\beta(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)) + (1 - \beta)(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0))]^2 dx \\ & \quad + \alpha \int_0^T [(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2)^2 + (\beta g_1' + (1 - \beta)g_2')^2] dt \\ &< \int_0^1 [\beta u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)]^2 + (1 - \beta)[u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)]^2 dx \\ & \quad + \alpha \int_0^T [\beta g_1^2 + (1 - \beta)g_2^2] + [\beta (g_1')^2 + (1 - \beta)(g_2')^2] dt \\ &= \beta \int_0^1 [u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)]^2 dx + \alpha \int_0^T [g_1^2 + (g_1')^2] dt \end{aligned}$$

$$(1 - \beta) \int_0^1 [u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)]^2 dx + \alpha \int_0^T [g_2^2 + (g_2')^2] dt$$

bulunur. Buradan

$$\pi(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2, \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) < \beta \pi(g_1, g_1) + (1 - \beta)\pi(g_2, g_2)$$

yazılır. O halde $\pi(g, g)$ fonksiyoneli kesin konveks olur.

Lemma 4.1.3.6: (4.15) eşitliğindeki $\pi(g, g)$ simetriktir.

İspat: Her $g_1, g_2 \in H^1(0, T)$ için

$$\begin{aligned} \pi(g_1, g_2) &= \int_0^l [u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)][u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)] dx \\ &\quad + \alpha \int_0^T (g_1 g_2 + g_1' g_2') dt \\ &= \int_0^l [u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)][u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)] dx \\ &\quad + \int_0^T (g_1 g_2 + g_1' g_2') dt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\pi(g_1, g_2) = \pi(g_2, g_1)$$

bulunur. Bu eşitlik $\pi(g, g)$ fonksiyonelinin simetrik olduğunu gösterir.

Lemma 4.1.3.7: (4.16) eşitliğindeki Lg fonksiyoneli lineerdir.

İspat: $g \rightarrow u[g] - u[0]$ dönüşümünün lineer olduğu kullanılarak, her $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ve $g_1, g_2 \in H^1(0, T)$ için

$$\begin{aligned}
& L(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) \\
&= \int_0^l [u(x, T; \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) - u(x, T; 0)][y(x) - u(x, T; 0)] dx \\
&= \beta_1 \int_0^l [u(x, T; g_1 + \beta_2 g_2) - u(x, T; 0)][y(x) - u(x, T; 0)] dx \\
&\quad + \beta_2 \int_0^l [u(x, T; g_2 + \beta_1 g_1) - u(x, T; 0)][y(x) - u(x, T; 0)] dx \\
&= \beta_1 Lg_1 + \beta_2 Lg_2
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade Lg fonksiyonelinin lineer olduğunu gösterir.

Lemma 4.1.3.8: (4.16) eşitliğindeki Lg fonksiyoneli süreklidir.

İspat: Lg fonksiyoneline Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulanarak, $\Delta u(x, t) = u(x, t; g) - u(x, t; 0)$ olmak üzere

$$|Lg| \leq \|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)} \|y(x) - u(x, T; 0)\|_{L_2(0, l)}$$

$$\|y(x) - u(x, T; 0)\|_{L_2(0, l)} \leq c_4$$

$$|Lg| \leq c_4 \|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)}$$

bulunur ve (4.24) göz önüne alınırsa

$$|Lg| \leq c_5 \|g\|_{H^1(0, T)} \quad (c_5 = \sqrt{c_2} c_4) \quad (4.25)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik Lg fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterir.

Lemma 4.1.3.9: (4.16) eşitliğindeki Lg fonksiyoneli konvektir.

İspat: Tüm $g_1, g_2 \in H^1(0, T)$ ve $\beta \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned}
 & L(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2) \\
 &= \int_0^l [u(x, T; \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) - u(x, T; 0)][y(x) - u(x, T; 0)]dx \\
 &= \beta \int_0^l [u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)][y(x) - u(x, T; 0)]dx \\
 &\quad + (1 - \beta) \int_0^l [u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)][y(x) - u(x, T; 0)]dx
 \end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$L(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2) = \beta L(g_1) + (1 - \beta)L(g_2)$$

elde edilir. Bu eşitlik Lg fonksiyonelinin konveks olduğunu gösterir.

Şimdi materyal ve yöntem kısmında verilen varlık ve teklik teoreminin tezde seçilen optimal kontrol problemi için de geçerli olduğunu ispatlayabiliriz.

Teorem 4.1.3.10: $\pi(g, g)$ koersiv, bilineer, sürekli ve simetrik form ve Lg lineer, sürekli bir fonksiyonel olsun. Bu durumda (4.18) ile verilen fonksiyonel için

$$J_\alpha(g_*) = \inf_{g \in G_{ad}} J_\alpha(g) \quad (4.26)$$

olacak şekilde bir tek $g_* \in G_{ad}$ elemanı vardır (Lions 1971).

İspat: $\{g_k\} \in G_{ad}$, $J_\alpha(g)$ için minimalleştirici dizi olsun. Yani $k \rightarrow \infty$ için

$$J_\alpha(g_k) = \inf_{g \in G_{ad}} J_\alpha(g) \quad (4.27)$$

sağlansın. (4.23) ile (4.25) birlikte düşünüldüğünde

$$J_\alpha(g) \geq \alpha \|g\|_{H^1(0,T)}^2 - 2c_5 \|g\|_{H^1(0,T)} \quad (4.28)$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.27) ifadesinde (4.28) göz önüne alınarak

$$\|g_k\|_{H^1(0,T)} \leq c_6 \quad (4.29)$$

olduğu sonucuna varılır. Bu durumda $\{g_k\}$ dizisinin $g_* \in H^1(0,T)$ elemanına yakınsayan zayıf yakınsak $\{g_{k_m}\}$ alt dizisi vardır. G_{ad} kümesi kapalı ve konveks olduğundan zayıf kapalıdır. O halde

$$g_* \in G_{ad} \quad (4.30)$$

şeklindedir.

Ayrıca $g \rightarrow \pi(g, g)$ aşağıdan zayıf yarı sürekli ve $g \rightarrow Lg$ zayıf sürekli olduğundan $g \rightarrow J_\alpha(g)$ dönüşümü aşağıdan zayıf yarı süreklidir. Bu durumda aşağıdan zayıf yarı sürekliliğin tanımına göre

$$J_\alpha(g_*) \leq \liminf J_\alpha(g_{k_m})$$

eşitsizliği yazılır. (4.27) eşitliği ile birlikte

$$J_\alpha(g_*) \leq \inf_{g \in G_{ad}} J_\alpha(g)$$

ve (4.30) ifadesinden

$$J_{\alpha}(g_*) = \inf_{g \in G_{ad}} J_{\alpha}(g)$$

olduğu görülür.

Böylece (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün varlığı elde edilmiştir. Tekliği için $J_{\alpha}(g)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğunu gösterelim. Her $g_1 \neq g_2 \in H^1(0, T)$ ve $\beta \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned} J_{\alpha}(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2) &= \pi(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2, \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) - 2L((1 - \beta)g_2) + b \\ &< \beta \pi(g_1, g_1) + (1 - \beta)\pi(g_2, g_2) - 2(\beta Lg_1 + (1 - \beta)Lg_2) + b \\ &< \beta[\pi(g_1, g_1) - 2Lg_1 + b] + (1 - \beta)[\pi(g_2, g_2) - 2Lg_2 + b] \end{aligned}$$

olup, buradan

$$J_{\alpha}(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2) < \beta J_{\alpha}(g_1) + (1 - \beta)J_{\alpha}(g_2)$$

yazılır. Bu durumda $J_{\alpha}(g)$ kesin konvektir.

Şimdi g_1 ve g_2

$$J_{\alpha}(g_1) = J_{\alpha}(g_2) = \inf_{g \in G_{ad}} J_{\alpha}(g)$$

eşitliğini sağlayan iki eleman olsun. G_{ad} kümesi konveks olduğundan

$$\frac{1}{2}(g_1 + g_2) \in G_{ad}$$

ve $g_1 \neq g_2$ için $J_{\alpha}(g)$ kesin konveks olduğundan

$$J_{\alpha}\left(\frac{1}{2}(g_1 + g_2)\right) < \frac{1}{2}J_{\alpha}(g_1) + \frac{1}{2}J_{\alpha}(g_2) = \inf_{g \in G_{ad}} J_{\alpha}(g)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $g_1 = g_2$ olmalıdır. Yani minimum eleman tektir. Teorem 4.1.3.10 ispatlanmış olur.

4.1.4. Fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi ve minimalleştirici dizinin kurulması

Bu bölümde $J_\alpha(g)$ fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiştir. Bu amaçla parabolik problemin eşlenik sınır değer problemi elde edilmiştir. Eşlenik sınır değer problemini elde etmek için Lagrange fonksiyoneli

$$L(u, g, \eta) = \int_0^l [u(x, T; g) - y(x)]^2 dx + \alpha \int_0^T g^2(t) dt + \alpha \int_0^T (g'(t))^2 dt \quad (4.31)$$

$$+ \int_0^T \int_0^l \eta \left[\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(x, t) \right] dx dt$$

şeklinde tanımlanır. $u(x, T; g)$ çözümüne $\delta u(x, 0) = 0$, $\delta u_x(0, t) = 0$ ve $\delta u_x(l, t) = 0$ olacak şekilde δu artırımını verelim. O halde

$$L(u + \varepsilon \delta u, g, \eta) - L(u, g, \eta) = \int_0^l [(u + \varepsilon \delta u)(x, T; g) - y(x)]^2 dx$$

$$+ \alpha \int_0^T g^2(t) dt + \alpha \int_0^T (g'(t))^2 dt$$

$$+ \int_0^T \int_0^l \eta [(u + \varepsilon \delta u)_t - k(u + \varepsilon \delta u)_{xx} - h(x, t)] dx dt$$

$$- \int_0^l [u(x, T; g) - y(x)]^2 dx - \alpha \int_0^T g^2(t) dt$$

$$- \alpha \int_0^T (g'(t))^2 dt - \int_0^T \int_0^l \eta [u_t - k u_{xx} - h(x, t)] dx dt$$

yazılır. Bu ifadeye iki kare farkı uygulanırsa

$$L(u + \varepsilon \delta u, g, \eta) - L(u, g, \eta) = \int_0^l [2u(x, T; g) - 2y(x)] \varepsilon \delta u(x, T) dx \\ + \int_0^T \int_0^l \eta [\delta u_t - k \delta u_{xx}] dx dt$$

bulunur.

Lagrange fonksiyonelinin birinci varyasyonu

$$\delta L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(u + \varepsilon \delta u, g, \eta) - L(u, g, \eta)}{\varepsilon}$$

olup,

$$\delta L = \int_0^l [2u(x, T; g) - 2y(x)] \delta u(x, T) dx \\ + \int_0^T \int_0^l \eta [\delta u_t - k \delta u_{xx}] dx dt \quad (4.32)$$

yazılır.

(4.32) ifadesinde son integralde bazı düzenlemeler yapalım. Kısmi integrasyon kullanılarak

$$\int_0^T \int_0^l \eta \delta u_t dx dt = \int_0^l \left\{ \eta \delta u \Big|_0^T - \int_0^T \eta_t \delta u dt \right\} dx \\ = \int_0^l \{ \eta(x, T) \delta u(x, T) - \eta(x, 0) \delta u(x, 0) \} dx - \int_0^T \int_0^l \eta_t \delta u dx dt$$

bulunur. Burada $\delta u(x, 0) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\int_0^T \int_0^l \eta \delta u_t dx dt = \int_0^l \eta(x, T) \delta u(x, T) dx - \int_0^T \int_0^l \eta_t \delta u dx dt \quad (4.33)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.32) ifadesindeki diğer integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l k \delta u_{xx} \eta dx dt &= \int_0^T \left\{ k \eta \delta u_x \Big|_0^l - \int_0^l k \eta_x \delta u_x dx \right\} dt \\ &= \int_0^T \{ k \eta(l, t) \delta u_x(l, t) - k \eta(0, t) \delta u_x(0, t) \} dt - \int_0^T \int_0^l k \delta u_x \eta_x dx dt \end{aligned}$$

yazılır. Ardından bir kez daha kısmi integrasyon uygulanır, $\delta u_x(0, t) = 0$ ve $\delta u_x(l, t) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l k \delta u_{xx} \eta dx dt &= \int_0^T \left\{ k \eta_x \delta u \Big|_0^l - \int_0^l k \eta_{xx} \delta u dx \right\} dt \\ &= - \int_0^T \{ k \eta_x(l, t) \delta u(l, t) - k \eta_x(0, t) \delta u(0, t) \} dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^l k \eta_{xx} \delta u dx dt \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir.

Şimdi (4.32) ifadesinde (4.33) ve (4.34) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_0^l [2u(x, T; g) - 2y(x)] \delta u(x, T) dx + \int_0^l \eta(x, T) \delta u(x, T) dx - \int_0^T \int_0^l \eta_t \delta u dx dt \\ &\quad + \int_0^T k \eta_x(l, t) \delta u(l, t) dt - \int_0^T k \eta_x(0, t) \delta u(0, t) dt + \int_0^T \int_0^l k \eta_{xx} \delta u dx dt \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^l [2u(x, T; g) - 2y(x) + \eta(x, T)] \delta u(x, T) dx - \int_0^T \int_0^l (\eta_t + k\eta_{xx}) \delta u dx dt \\ & + \int_0^T k\eta_x(l, t) \delta u(l, t) dt - \int_0^T k\eta_x(0, t) \delta u(0, t) dt \end{aligned}$$

bulunur. $\delta L = 0$ stasyonerlik şartından

$$\eta_t + k\eta_{xx} = 0 \quad (4.35)$$

$$\eta(x, T) = -2[u(x, T; g) - y(x)] \quad (4.36)$$

$$\eta_x(0, t) = 0, \quad \eta_x(l, t) = 0 \quad (4.37)$$

eşlenik sınır değer problemi elde edilir.

Şimdi $J_\alpha(g)$ amaç fonksiyonelinin türevini elde edelim. Bunun için ilk olarak (4.20) denklemi η ile çarpılır ve Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^T \int_0^l (\Delta u_t - k\Delta u_{xx}) \eta dx dt = 0$$

yazılır. Yukarıdaki her iki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^l \left\{ \eta \Delta u \Big|_0^T - \int_0^T \eta_t \Delta u dt \right\} dx - \int_0^T \left\{ k\eta \Delta u_x \Big|_0^l - \int_0^l k\eta_x \Delta u_x dx \right\} dt = 0$$

olup,

$$\begin{aligned} & \int_0^l \eta(x, T) \Delta u(x, T) dx - \int_0^l \eta(x, 0) \Delta u(x, 0) dx - \int_0^T \int_0^l \eta_t \Delta u dx dt \\ & - k \int_0^T \eta(l, t) \Delta u(l, t) dt + k \int_0^T \eta(0, t) \Delta u(0, t) dt + \int_0^T \int_0^l k \eta_x \Delta u_x dx dt = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\Delta u(x, 0) = 0, \Delta u_x(0, t) = 0$ ve $\Delta u_x(l, t) = \Delta g(t)$ şartları kullanılarak, son integral ifadesine tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^l \eta(x, T) \Delta u(x, T) dx - \int_0^T \int_0^l \eta_t \Delta u dx dt - k \int_0^T \eta(l, t) \Delta g dt \\ & + \int_0^T \left\{ k \eta_x \Delta u \Big|_0^l - \int_0^l k \eta_{xx} \Delta u dx \right\} dt = 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & \int_0^l \eta(x, T) \Delta u(x, T) dx - k \int_0^T \eta(l, t) \Delta g dt \\ & - \int_0^T \int_0^l (\eta_t + k \eta_{xx}) \Delta u dx dt = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.36) şartı kullanılarak

$$\int_0^l 2[u(x, T; g) - y(x)] \Delta u(x, T) dt = - \int_0^T k \eta(l, t) \Delta g dt \quad (4.38)$$

yazılır. g elemanına Δg artımı verilirse $J_\alpha(g)$ fonksiyonelindeki değişim

$$\Delta J_\alpha(g) = J_\alpha(g + \Delta g) - J_\alpha(g)$$

şeklinde olacaktır. O halde

$$\begin{aligned}
|\Delta J_\alpha(g)| &= \int_0^l \{[u(x, T; g + \Delta g) - y(x)]^2 - [u(x, T; g) - y(x)]^2\} dx \\
&\quad + 2\alpha \int_0^T g(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T \Delta g^2(t) dt \\
&\quad + 2\alpha \int_0^T g'(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T (\Delta g'(t))^2 dt
\end{aligned}$$

olur. İki kare farkı uygulanarak, $\Delta u(x, T) = u(x, T; g + \Delta g) - u(x, T; g)$ olarak düşünülürse

$$\begin{aligned}
\Delta J_\alpha(g) &= 2 \int_0^l [u(x, T; g) - y(x)] \Delta u(x, T) dt + \int_0^l \Delta u^2(x, T) dt \\
&\quad + 2\alpha \int_0^T g(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T \Delta g^2(t) dt \\
&\quad + 2\alpha \int_0^T g'(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T (\Delta g'(t))^2 dt
\end{aligned}$$

yazılır. Bu denklemde (4.38) ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|\Delta J_\alpha(g)| &= \int_0^T k \Delta g(t) \eta(l, t) dt + \int_0^l \Delta u^2(x, T) dx \\
&\quad + 2\alpha \int_0^T g(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T \Delta g^2(t) dt \\
&\quad + 2\alpha \int_0^T g'(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T (\Delta g'(t))^2 dt
\end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir.

ξ , fonksiyonu

$$\begin{aligned}\xi'' - \xi &= k\eta(l, t) \\ \xi'(0) &= \xi'(T) = 0\end{aligned}\tag{4.40}$$

probleminin çözümü olsun.

Buna göre (4.39) ifadesini düzenlemeye devam edelim.

$$\begin{aligned}|\Delta J_\alpha(g)| &= \int_0^T \xi'' \Delta g(t) dt + \int_0^T \xi \Delta g(t) dt + \int_0^l \Delta u^2(x, T) dx \\ &\quad + 2\alpha \int_0^T g(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T \Delta g^2(t) dt \\ &\quad + 2\alpha \int_0^T g'(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T (\Delta g'(t))^2 dt\end{aligned}$$

olup, kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}|\Delta J_\alpha(g)| &= \int_0^T \xi' \Delta g'(t) dt + \int_0^T \xi \Delta g(t) dt + \int_0^l \Delta u^2(x, T) dx \\ &\quad + 2\alpha \int_0^T g(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T \Delta g^2(t) dt \\ &\quad + 2\alpha \int_0^T g'(t) \Delta g(t) dt + \alpha \int_0^T (\Delta g'(t))^2 dt\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
|\Delta J_\alpha(g)| &= \int_0^T (\xi + 2\alpha g(t))\Delta g(t)dt + \int_0^T (\xi' + 2\alpha g'(t))\Delta g'(t)dt \\
&+ \int_0^l \Delta u^2(x,T)dx + \alpha \left[\int_0^T \Delta g^2(t)dt + \int_0^T (\Delta g'(t))^2 dt \right]
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Frechet türevin tanımının

$$|\Delta J_\alpha(g)| = \langle J'_\alpha(g), \Delta g \rangle_{H^1(0,T)} + o(\|\Delta g\|_{H^1(0,T)}^2) \quad (4.41)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre amaç fonksiyoneli için Frechet türevi

$$J'_\alpha(g) = \xi + 2\alpha g \quad (4.42)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece bir g_* elemanının optimal çözüm olabilmesi için gerek ve yeter şart ξ_* bu elemana karşılık gelen çözüm olmak üzere her $g \in G_{ad}$ için

$$\langle \xi_* + 2\alpha g_*, g - g_* \rangle_{H_1(0,T)} \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanması şeklinde ifade edilir (Vasilyev 1981).

Şimdi Gradyen metodunu kullanarak optimal çözüme yakınsayan bir minimalleştirici dizi kuralım. g_k elemanına karşılık gelen Frechet türevi $J'_\alpha(g_k)$ ile gösterilir ve g_0 başlangıç elemanı seçilerek

$$g_{k+1} = g_k - \beta_k J'_\alpha(g_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.43)$$

kuralı ile minimalleştirici dizi oluşturulur. Burada β_k aşağıdaki eşitsizliği sağlayan yeterince küçük bir sayıdır:

$$J_\alpha(g_{k+1}) - J_\alpha(g_k) = \beta_k \left[-\|J'_\alpha(g_k)\|^2 + \frac{o(\beta_k)}{\beta_k} \right] < 0 \quad (4.44)$$

β_k parametresinin seçimi (İskenderov *et al.* 2002) çalışmasında verilen metotlardan biri yapılabilir. Amaç fonksiyoneli aşağıdan zayıf yarı sürekli olduğundan

$$J_{\alpha^*} \leq J_\alpha(g) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J_\alpha(g_k) = J_{\alpha^*}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Bu iterasyonu durdurmak için aşağıdaki durdurma kriterlerinden biri seçilebilir:

$$\|g_{k+1} - g_k\| < \varepsilon_1, |J_\alpha(g_{k+1}) - J_\alpha(g_k)| < \varepsilon_2, \|J'_\alpha(g_k)\| < \varepsilon_3 \quad (4.45)$$

4.1.5. Minimalleştirici dizinin yakınsaması

Bu bölümde ise $\alpha > 0$ iken minimalleştirici $\{g_k(t)\}$ dizisi için, $J_\alpha(\{g_k\}) \rightarrow J_\alpha(g_*)$ olmasının $k \rightarrow \infty$ için $\|g_k - g_*\|_{H^1(0,T)} \rightarrow 0$ olmasını gerektirdiği ispat edilmiştir. Yani minimalleştirici dizinin optimal çözüme yakınsadığı gösterilmiştir. Bunun için $J_\alpha(g)$ fonksiyonelinin güçlü konveks olduğu kanıtlanmıştır.

Teorem 4.1.5.1: $J_\alpha(g)$ fonksiyoneli güçlü konvekstir.

İspat: İlk önce $\|g\|_{H^1(0,T)}^2$ fonksiyonelinin güçlü konveks olduğunu gösterelim. Her bir $g_1, g_2 \in G_{ad}$ ve $\beta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
\|\beta g_1 + (1 - \beta)g_2\|_{H^1(0,T)}^2 &= \int_0^T [(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2)^2 + (\beta g_1' + (1 - \beta)g_2')^2] dt \\
&= \int_0^T (\beta g_1^2 + (1 - \beta)g_2^2 - \beta(1 - \beta)(g_1 - g_2)^2) dt \\
&\quad + \int_0^T (\beta (g_1')^2 + (1 - \beta)(g_2')^2 - \beta(1 - \beta)(g_1' - g_2')^2) dt \\
&= \beta \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + (1 - \beta) \|g_2\|_{H^1(0,T)}^2 \\
&\quad - \beta(1 - \beta) \|g_1 - g_2\|_{H^1(0,T)}^2
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece $\|g\|_{H(0,T)}^2$ fonksiyoneli güçlü konvektir. $\pi(g, g)$ fonksiyoneliinde yukarıdaki eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\pi(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2, \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) \\
&= \int_0^l [\beta(u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)) + (1 - \beta)(u(x, T; g_2) - u(x, T; 0))]^2 dx \\
&\quad + \alpha\beta \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \alpha(1 - \beta) \|g_2\|_{H^1(0,T)}^2 - \alpha\beta(1 - \beta) \|g_1 - g_2\|_{H^1(0,T)}^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\pi(g, g)$ kesin konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
&\pi(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2, \beta g_1 + (1 - \beta)g_2) \\
&\leq \beta \int_0^l [u(x, T; g_1) - u(x, T; 0)]^2 dx + (1 - \beta) \int_0^l [u(x, T; g_2) - u(x, T; 0)]^2 dx \\
&\quad + \alpha\beta \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \alpha(1 - \beta) \|g_2\|_{H^1(0,T)}^2 - \alpha\beta(1 - \beta) \|g_1 - g_2\|_{H^1(0,T)}^2 \\
&\leq \beta \pi(g_1, g_1) + (1 - \beta) \pi(g_2, g_2) - \alpha\beta(1 - \beta) \|g_1 - g_2\|_{H^1(0,T)}^2
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\pi(g, g)$ fonksiyoneli güçlü konvektir. Bu durumda $J_\alpha(g)$ fonksiyoneli için

$$J_\alpha(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2) \leq \beta\pi(g_1, g_1) + (1 - \beta)\pi(g_2, g_2) - \alpha\beta(1 - \beta)\|g_1 - g_2\|_{H^1(0,T)}^2 \\ - 2(\beta Lg_1 + (1 - \beta)Lg_2) + b$$

yazılır. Buradan

$$J_\alpha(\beta g_1 + (1 - \beta)g_2) \\ \leq \beta J_\alpha(g_1) + (1 - \beta)J_\alpha(g_2) - \alpha\beta(1 - \beta)\|g_1 - g_2\|_{H^1(0,T)}^2 \quad (4.46)$$

olur. Dolayısıyla $J_\alpha(g)$, güçlü konvektir.

Teorem 4.1.5.2: Güçlü konveks olan $J_\alpha(g)$ fonksiyoneli için g_* elemanına yakınsayan bir minimalleştirici dizi mevcuttur ve bu dizi

$$\|g_k - g_*\|_{H^1(0,T)}^2 < \frac{2}{\alpha}(J_\alpha(g_k) - J_\alpha(g_*))$$

eşitsizliği sağlar.

İspat: Bu ispat fonksiyonelin güçlü konveks olması kullanılarak yapılır. (4.46) ifadesinde $\beta = \frac{1}{2}$ alırsak

$$J_\alpha\left(\frac{1}{2}g_k + \frac{1}{2}g_*\right) \leq \frac{1}{2}J_\alpha(g_k) + \frac{1}{2}J_\alpha(g_*) - \alpha\frac{1}{4}\|g_k - g_*\|_{H^1(0,T)}^2$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$J_\alpha(g_*) \leq J_\alpha\left(\frac{1}{2}g_k + \frac{1}{2}g_*\right)$$

olduğundan

$$J_\alpha(g_*) \leq \frac{1}{2}J_\alpha(g_k) + \frac{1}{2}J_\alpha(g_*) - \alpha \frac{1}{4} \|g_k - g_*\|_{H^1(0,T)}^2$$

yazılır.

Buradan

$$\|g_k - g_*\|_{H^1(0,T)}^2 \leq \frac{2}{\alpha} (J_\alpha(g_k) - J_\alpha(g_*))$$

bulunur.

4.2. $\alpha = 0$ için Problemin İyi Tanımlı Olmadığını Gösteren Nümerik Örnekler

Bu bölümde nümerik bir örnek üzerinde, fonksiyonelde $\alpha = 0$ alındığında problemin iyi tanımlanmamış olduğu gösterilmiştir.

Örnek 4.1: $(x, t) \in Q = (0, l) \times (0, T]$ bölgesinde $k = 1, l = 1, T = 1$ seçimi ile aşağıdaki optimal kontrol problemini ele alalım.

$$u_t = u_{xx}$$

$$+ \begin{cases} -x^3 \sin t - 2x^2 \sin t - 6x \cos t - 4 \cos t & 0 \leq x < \frac{1}{2}, 0 \leq t \leq 1 \\ -x^3 \sin t - x^2 \sin t - x \sin t \\ + \frac{1}{4} \sin t - 6x \cos t - 2 \cos t & \frac{1}{2} < x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.47)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x^3 + x^2 + x - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.48)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = g(t) \quad (4.49)$$

probleminde

$$J_\alpha(g) = \int_0^1 \left[u(x, 1; g) - \begin{cases} \cos(1) (x^3 + 2x^2) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \cos(1) \left(x^3 + x^2 + x - \frac{1}{4} \right) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \right]^2 dx + \alpha \|g\|_{H^1(0,l)}^2 \quad (4.50)$$

amaç fonksiyoneli minimum yapacak olan g fonksiyonunu kontrol edelim. Yani

$$J_{\alpha^*} = J_\alpha(g_*) = \inf J_\alpha(g) \quad (4.51)$$

eşitliğini sağlayacak olan g_* fonksiyonunu belirleyelim.

Feado-Galerkin metodu ile N sayısına bağlı olarak (4.47)-(4.49) problemi için yaklaşık çözümler elde edilir. Bazı N değerleri için çözümlerin hataları Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1. $L_2(\Omega)$ de bazı N değerleri ve hata normları

N	$\ u - u_{app}^n\ _{L_2(\Omega)}$
10	0.0000826
20	0.0000133
30	0.5×10^{-5}
40	0.23×10^{-5}
50	0.13×10^{-5}

İlk olarak $\alpha = 0$ için

$$J(g) = \int_0^1 \left[u(x, 1; g) - \begin{cases} \cos(1)(x^3 + 2x^2) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \cos(1)\left(x^3 + x^2 + x - \frac{1}{4}\right) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \right]^2 dx \quad (4.52)$$

amaç fonksiyoneli düşünelim.

Bu fonksiyoneli minimum yapan değer $J_* = 0$ olduğu aşıkardır. Fonksiyonel bu değeri $g_* = 6 \cos(t)$ için alır. $N = 10$ alınarak Feado-Galerkin metodu ile elde edilen yaklaşık çözüm için minimum değer $J_* = 0.27 \times 10^{-8}$ olarak elde edilir.

$g_0 = \cos t$ başlangıç elemanı ile başlanır ve $\beta = 0.2$ değeri için $g_{k+1} = g_k - \beta_k J'(g_k)$, $k = 0, 1, \dots$ kuralıyla minimalleştirici dizi oluşturulursa 101. iterasyondan sonra

$$\begin{aligned} g_{101} = & \cos t + 4.186083 + 0.140257 \cos(3.141592t) - 0.030318 \cos(6.283185t) \\ & + 0.010470 \cos(9.424777t) - 0.004550 \cos(12.566370t) \\ & + 0.002299 \cos(15.707963t) - 0.001294 \cos(18.849555t) \\ & + 0.000791 \cos(21.991148t) - 0.000514 \cos(25.132741t) \\ & + 0.000351 \cos(28.274333t) \end{aligned}$$

optimal control fonksiyonu elde edilir.

g_{101} elemanı için fonksiyonelin değeri $J(g_{101}) = 0.020786097$ şeklindedir. Fakat bu fonksiyonele bu değerleri aldırın g fonksiyonları arasındaki farkın normu $\|g_{101} - g_*\|_{H^1(0,1)} = 2.354540$ olur. Bu çözümlerin grafiği Şekil 4.2 de verilmiştir.

Başka bir başlangıç elemanı $g_0 = 1$ ile başlanılır ve $\beta = 0.2$ değeri için $g_{k+1} = g_k - \beta_k J'(g_k)$, $k = 0, 1, \dots$ kuralıyla minimalleştirici dizi oluşturulursa 101. iterasyondan sonra

$$\begin{aligned}
g_{101} = & 5.023377 + 0.171417 \cos(3.141592t) - 0.037049 \cos(6.283185t) \\
& + 0.012793 \cos(9.424777t) - 0.005558 \cos(12.566370t) \\
& + 0.002807 \cos(15.707963t) - 0.001580 \cos(18.849555t) \\
& + 0.000965 \cos(21.991148t) - 0.000627 \cos(25.132741t) \\
& + 0.000428 \cos(28.274333t)
\end{aligned}$$

elemanı elde edilir.

Bu g_{101} elemanı için fonksiyonelin değeri $J(g_{101}) = 0.029751947$ şeklindedir. Fakat bu durumda $\|g_{101} - g_*\|_{H^1(0,1)} = 2.81784707$ olur.

T final zamanı artarken optimal çözüm ve optimal değere yaklaşan diğer bir çözüm arasındaki fark artar. Eğer aynı problem $T = 4$ için ele alınırsa amaç fonksiyoneli

$$J(g) = \int_0^1 \left[u(x, 4; g) - \begin{cases} \cos(4)(x^3 + 2x^2) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \cos(4)\left(x^3 + x^2 + x - \frac{1}{4}\right) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \right]^2 dx \quad (4.53)$$

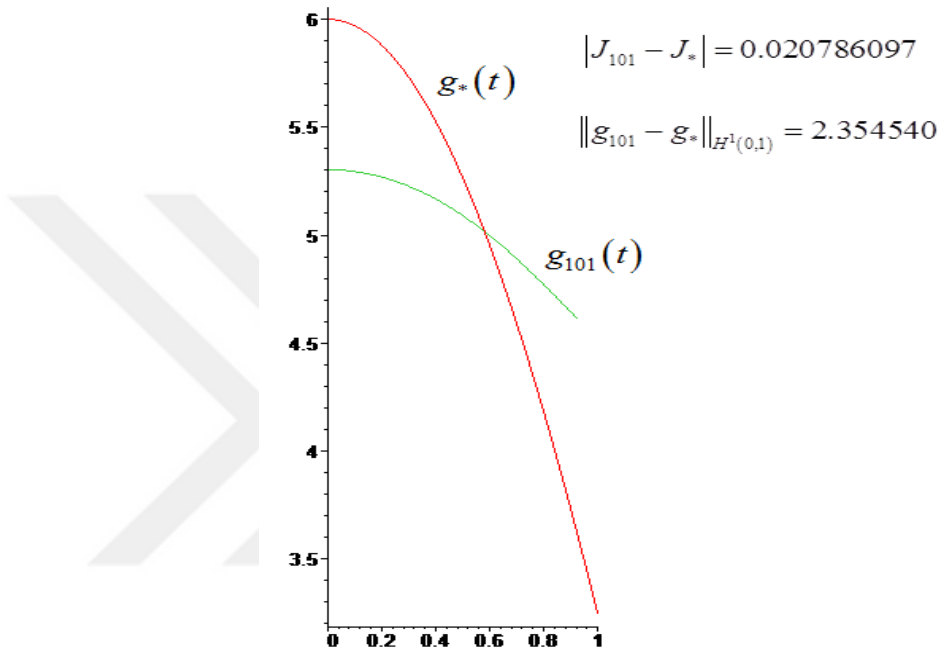
olarak değişir.

Feado-Galerkin metodu ile $N = 10$ için elde edilen yaklaşık çözüme karşılık minimum değer $J_* = 0.4 \times 10^{-8}$ olarak elde edilir. Tekrar başlangıç elemanı $g_0 = cost$ alınıp $\beta = 0.2$ değeri için $g_{k+1} = g_k - \beta_k J'(g_k)$, $k = 0, 1, \dots$ kuralıyla minimalleştirici dizi oluşturulursa 101. iterasyondan

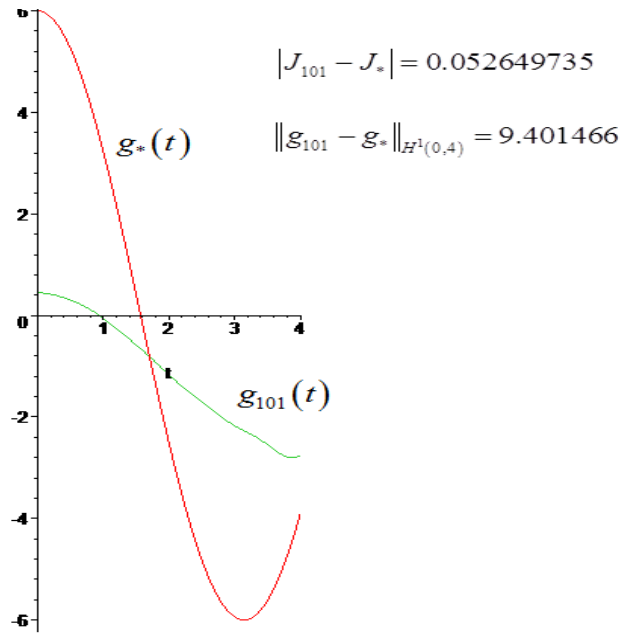
$$\begin{aligned}
g_{101} = & cost - 0.948142 + 0.560110 \cos(0.785398t) \\
& - 0.256643 \cos(1.570796t) + 0.132016 \cos(2.356194t) \\
& - 0.076579 \cos(3.141592t) + 0.0483633 \cos(3.926990t) \\
& - 0.032417 \cos(4.712388t) + 0.022690 \cos(5.497787t) \\
& - 0.016412 \cos(6.283185t) + 0.012183 \cos(7.068583t)
\end{aligned}$$

elemanı bulunur.

g_{101} elemanı için fonksiyonelin değeri $J(g_{101}) = 0.052649735$ şeklindedir. O zaman $\|g_{101} - g_*\|_{H^1(0,1)} = 9.401466$ olarak bulunur. Bu g_{101} ile g_* fonksiyonlarının grafiği Şekil 4.3 de verilmiştir.



Şekil 4.2. $T = 1$ için iki çok farklı fonksiyon yaklaşık aynı fonksiyonel değeri verir



Şekil 4.3. $T = 4$ için iki çok farklı fonksiyon yaklaşık aynı fonksiyonel değeri verir

Bu örnekler problemin $\alpha = 0$ için nümerik olarak iyi tanımlanmadığını gösterir.

5. SONUÇ

Parabolik sistemler için optimal kontrol problemleri daha önce Dharmo ve Tröltzsch, Raymond, Rröltzsch, Altmüller ve Grüne, Phan, Dham ve diğer bilim adamlarının çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda kontroller karesel integrallenebilen fonksiyonların uzayından seçilmiştir. Bu tez çalışmasında ise parabolik bir sistemde sağ sınır şartı sürekli fonksiyonların uzayından seçilerek oluşturulan optimal kontrol problemi literatürdeki diğer çalışmalardan oldukça farklı bir şekilde konulmuştur. Kontrol fonksiyonu $H^1(0, T)$ uzayına aittir ve aday kontrollerin kümesi bu uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olarak alınmıştır. Bu seçim amaç fonksiyoneline kontrolün $H^1(0, T)$ normunun eklenmesini doğurmuştur. Bu durumda fonksiyonelinin Frechet türevi sadece bir eşlenik problemi değil aynı zamanda ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemin çözümünü de içerir. Dolayısıyla fonksiyonelin diferansiyellenebilme şartı ekstra koşullar ortaya çıkarmıştır. Ayrıca bu çalışmada optimal kontrol probleminin iyi tanımlı olmama şartı da nümerik örneklerle açıklanmıştır.

Bu tezden elde edilen bulgular aşağıdaki makalede yayınlanmıştır.

Sener, S. S. and Subasi M., 2015. On a Neumann Boundary Control in a Parabolic System , Boundary Value Problems 2015, 2015:166

KAYNAKLAR

- Altmüller, N., Grüne L., 2010, A Comparative Stability Analysis of Neumann and Dirichlet Boundary MPC for the Heat Equation, Lars Grüne was supported by the European Union under the 7th Framework Programme FP7–PEOPLE–2010–ITN, Grant agreement nr. 264735–SADCO
- Dhamo, V., 2012, Optimal boundary control of quasilinear elliptic partial differential equations: theory and numerical analysis, von der Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Berlin zur Erlangung des akademischen Grades
- Dhamo, V., Tröltzsch, F., 2009, Some aspects of reachability for parabolic boundary control problems with control constraints, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, D-10623 Berlin, Str. des 17. Juni 136, Germany
- Elharfi, A., 2011, Output-Feedback Stabilization and Control Optimization For Parabolic Equations With Neumann Boundary Control, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2011, No. 146, pp. 1–10
- Hasanoğlu, A., 2007, Simultaneous determination of the source terms in a linear parabolic problem from the final overdetermination: Weak solution approach, J. Math. Anal. Appl. 330, 766–779,
- İskenderov, A. D., Tagiyev, R. Q., Yagubov, Q.Y., 2002, Optimalleştirme Usulleri, Çarşıoğlu, Bakü
- Ladyzhenskaya, O.A., 1985, Boundary value problems in mathematical physics, Springer-Verlag, New York
- Levaggi, L., 2005, Variable structure control for parabolic evolution equations, 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference
- Levaggi, .L., 2005, Variable structure control for parabolic evolution equations, Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12-15.
- Lions, J.L., 1971, Optimal control of systems governed by partial differential equations, Springer-Verlag, New York
- Lions, J.L., Magenes, E., 1972, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol II, Springer-Verlag, Berlin
- Phan, T-X., 2011, Boundary Element Methods for Boundary Control Problems, 2011 Verlag der Technischen Universität Graz
- Qian, L. Tian, L., 2007, Boundary Control of an Unstable Heat Equation, International Journal of Nonlinear Science, Vol.3, No.1, pp.68-73.
- Raymond, P-J., 2010, Optimal Control of Partial Differential Equations, Universite Paul Sabatier
- Sadek, I. S., 2011, Bokhari, M.A., Optimal boundary control of heat conduction problems on an infinite time domain by control parameterization, Journal of the Franklin Institute 348, 1656–1667.
- Vasilev, F.P., 1988, Numerical Methods for Solving Extremal Problems, p. 550. Nauka, Moscow, Russia

Vasilyev, F.P., 1981. Ekstremal problemlerin Çözüm Metotları. Nauka, Moskova.
(Rusça)



ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Erzurum’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum’da tamamladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başlayarak 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2011 yılında mezun olup Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde doktora eğitimine başladı.

