KOTANJANT DEMET İZDÜŞÜMÜ İLE TANIMLI YARI TENSÖR DEMETTE YATAY LİFTLER

Merve Gamze MAVİYILDIZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. Furkan YILDIRIM
2021

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KOTANJANT DEMET İZDÜŞÜMÜ İLE TANIMLI YARI TENSÖR DEMETTE YATAY LİFTLER

(Horizontal Lifts in a Semi-Tensor Bundle Defined by Projection of the Cotangent Bundle)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve Gamze MAVİYILDIZ

Danışman: Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

Erzurum

Şubat, 2021

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Merve Gamze MAVİYILDIZ tarafından hazırlanan "Kotanjant Demet İzdüşümü ile Tanımlı Yarı Tensör Demette Yatay Liftler" başlıklı çalışması 08 / 02 / 2021 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Geometri Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Kürşat AKBULUT Atatürk Üniversitesi	………..................
Danışman:	Doç. Dr. Furkan YILDIRIM Atatürk Üniversitesi	………..................
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI Erzurum Teknik Üniversitesi	………..................

Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …… sayılı kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Doç. Dr. Furkan YILDIRIM danışmanlığında sunulan "Kotanjant Demet İzdüşümü ile Tanımlı Yarı Tensör Demette Yatay Liftler" başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	**Tezin Benzerlik Oranı (%)**	**Maksimum Oran (%)**
Giriş	*3*	**30**
Kuramsal Temeller	*11*	**30**
Materyal ve Yöntem	5	**35**
Bulgular	*15*	**20**
Tartışma	*0*	**20**
Tezin Geneli	*10*	**25**

Not: *Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının* ***%5'den*** *büyük olmaması gerekir.*

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	**Tez Danışmanı**
Merve Gamze MAVİYILDIZ	Doç. Dr. Furkan YILDIRIM
8.2.2021	**8.2.2021**
İmza:	İmza:

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında bana yardımcı olan, bilgi ve deneyimi ile beni aydınlatan danışmanım, Sayın Doç. Dr. Furkan YILDIRIM’ a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenim hayatımın zorlu aşamalarında bana her yönden yardımcı olan, üzerimdeki emeğini yadsıyamayacağım hocam Sayın Prof. Dr. Kürşat AKBULUT’ a lisansüstü öğrenimim boyunca sınıfının kapısını bana daima açık tutan hocam Sayın Prof. Dr. Nejmi CENGİZ’ e ve tüm eğitim öğretim hayatım boyunca desteğini hiç esirgemeyen, yanımda olmaktan vazgeçmeyen başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Merve Gamze MAVİYILDIZ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOTANJANT DEMET İZDÜŞÜMÜ İLE TANIMLI YARI TENSÖR DEMETTE YATAY LİFTLER

Merve Gamze MAVİYILDIZ

Danışman: Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

Amaç: Bu yüksek lisans tezinde, M manifoldu üzerinde tanımlı T*M kotanjant demetin izdüşümü kullanılarak, (p,q) tipli tM yarı-tensör demet tanımlanmıştır. Bu çalışmanın amacı (p,q) tipli tM yarı-tensör demetinin özel sınıfındaki vektör alanlarının yatay liftlerini incelemektir. Ayrıca yine bu tezde amaçlanan; T*M kotanjant demet izdüşümü kullanılarak, (p,q) tipli tM yarı-tensör demette bir kesit üzerinde (1,0) tipli tensör alanlarının bazı liftlerinin ve bu liftler arasındaki geometrik ilişkilerin incelenmesidir.

Yöntem: Tez ile ilgili olarak, kuramsal temel, genel metotlar ve araştırma teknikleri olarak aşağıdakiler kullanılacaktır:

1. Kotanjant ve yarı-tensör demet geometrisi (Kuramsal temel-Kotanjant ve yarı-tensör demetler ve bu demetlerdeki liftler ile çeşitli operatörler)
2. Klasik tensör analizi (indislerin yani lokal koordinatların kullanımı)
3. Kovaryant diferensiyelleme formalizmi (global inceleme tekniği).

Bulgular: Bu tezde, T*M kotanjant demet izdüşümüyle tanımlanan, (p,q) tipli tM yarı-tensör demete; (1,0) tipli tensör alanlarının yatay liftleri verilmiştir. Ayrıca, (p,q) tipli tM yarı-tensör demetinin bu özel sınıfındaki bir kesit üzerinde (1,0) tipli tensör alanlarının bazı liftleri ve bu liftler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Sonuç: Diferensiyel geometride yarı-tensör demet teorisi önemli bir yere sahip olup bu demetlerle çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır. Dolayısıyla elde edilecek yeni lift problemleri ile gelecekte çok sayıda çalışmalar yapılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Vektör alanları, tam lift, yatay lift, kesit, temel 1-form, yarı-tensör demet, kotanjant demet.

Şubat 2021, 64 sayfa

ABSTRACT

MASTER THESIS

HORIZONTAL LIFTS IN A SEMI-TENSOR BUNDLE DEFINED BY PROJECTION OF THE COTANGENT BUNDLE

Merve Gamze MAVİYILDIZ

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Furkan YILDIRIM

Purpose: In this thesis, using projection of the cotangent bundle T*M over a manifold M, we define a semi-tensor bundle tM of type (p,q). The aim of the study is to investigate horizontal lifts of vector fields in special class of semi-tensor bundle tM of type (p,q). Furthermore, we investigate some lifts of tensor fields of type (1,0) on a cross-section in the semi-tensor (pullback) bundle tM of tensor bundle TM of type (p,q) by using projection (submersion) of the cotangent bundle T*M and we find some geometric relations for them.
Method: In relation to the master thesis, the following will be used as theoretical basis, general methods and research techniques:

1. Cotangent and semi-tensor bundle geometry (Theoretical basis-Cotangent and semi-tensor bundles and lifts in these bundles and various operators)
2. Classical tensor analysis (the use of indices, ie. local coordinates)
3. Covariant differentiation formalism (global review technique).

Findings: In this thesis; horizontal lifts of tensor fields of type (1,0) to semi-tensor (pullback) bundle tM of tensor bundle TM of type (p,q) by using projection (submersion) of the cotangent bundle T*M and their properties are studied. some lifts of tensor fields of type (1,0) on a cross-section in the semi-tensor (pullback) bundle tM of tensor bundle TM of type (p,q) by using projection (submersion) of the cotangent bundle T*M were also presented.

Results: Semi-tensor bundle theory in differential geometry has an important place, and many studies have been carried out with these bundles. Therefore, with the new lift problems to be obtained, many studies will be made in the future.

Keywords: Vector field, complete lift, horizontal lift, cross-section, basic 1-form, semi-tensor bundle, cotangent bundle.

February 2021, 64 pages

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

T_{km}^{i}	Afin Deformasyon (Gerilme) Tensörü
S_{ij}^{h}	Burulma Tensörü
∇	Burulmasız Afin Konneksiyon
$t(B_m)$	B_m Üzerindeki Yarı-tanjant Demet
Γ_{ij}^{h}	Cristoffel Sembolü
ω	Dejenere Simplektik Yapı
^{vv}	Dikey Lift
R_{ijk}^{h}	Eğrilik Tensörü
γ	Gama Operatörü
$\widetilde{F}$	İzdüşümlü Afinor Alanları
$\widetilde{X}$	İzdüşümlü Vektör Alanları
$T(M_n)$	M_n Üzerindeki Tanjant Demet
$T^{*}(M_n)$	M_n Üzerindeki Kotanjant Demet
$T_q^p(M_n)$	M_n Manifoldu üzerinde (p,q) tipli Tensör Demet
g	Pseudo-Riemannian Metriği
$\overset{C}{\otimes}$	Pür Çarpım
p	$t^{*}(B_m)$ 'nin Temel 1-formu
π	Tabii İzdüşüm
^{cc}	Tam Lift
W_n	Weyl Uzayı
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
^{HH}	Yatay Lift

GİRİŞ

Diferansiyel geometri, eğri ve yüzeylerin Matematiksel Analiz metotlarının (Diferensiyel, İntegral) kullanılarak incelenmesiyle ortaya çıkan geometrinin popüler bir alt dalıdır.

XVII. yüzyılda Descartes ve Fermat tarafından keşfedilen koordinat metodu bu tür incelemelerde önemli bir rol oynamaktadır. XVIII. yüzyılda Leibniz ve Euler'in eğri ve yüzeyler üzerindeki teorik çalışmaları ile diferansiyel geometride önemli sonuçlar elde edilmiştir.

XIX. yüzyıl Diferensiyel Geometrinin gelişmesinde en önemli dönemdir. Gauss'un 1827 de yapmış olduğu "Yüzey Eğrileri Hakkında Genel İncelemeler" adlı çalışmasında, yüzeylerin dahili geometri problemlerini geliştirmiştir.

Bu çalışmaları takiben 1851 yılında Riemannian tarafından, Mekanik ve Relativite teorisinde önemli uygulama alanları olan "Riemannian Geometrisi" tanımlanmıştır. Bununla birlikte, 1872 yılında Shopus Lie diferansiyel geometriye "Grup Teorisi" bakış açısını kazandırmış ve bu bakış açısı ile yine diferansiyel geometrinin gelişmesinde önemli bir role sahip olan "Lie Grubu" teorisi ortaya çıkmıştır.

Diferansiyel geometrik objelerin tanjant demete genişleme (lift) problemleri diferansiyel geometrinin güncel ve verimli konularından birisidir. Bu bağlamda Lift (genişleme) kavramı genişleme anlamında ilk olarak Sasaki (1962) çalışmasında kullanılmıştır.

Riemannian manifoldunda tanjant demetlerin Diferansiyel Geometrisi ilk kez 1958'de Sasaki tarafından incelenmiştir. Tanjant demetteki geometrilerin gelişmesine Dombrowski 1962'de önemli katkıda bulunmuştur. Yano ve Ledger (1965), tanjant demeti simetrik uzaylarda tanımlayıp bununla ilgili çalışmalar yapmışlardır. Daha sonra Kandatu, 1966 yılında lineer olmayan konnesiyona sahip bir manifoldda tanjant demeti tanımlamıştır.

Tanjant demette liftler ile ilgili yapılan ilk çalışma tensör alanlarının ve konneksiyonların dikey ve tam liftleri olup Kobayashi ve Yano (1966) tarafından yapılmıştır. Ama lift kavramı genişleme anlamında daha önce Sasaki'nin 1958 yılındaki çalışmalarında "devam" adı altında çalışılmıştır.

1967 yılında Yano ve Ishihara “tanjant demette konneksiyonların ve tensör alanlarının yatay liftleri” ile ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır. Ayrıca “Tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların liftleri” ile ilgili çalışmalar 1970 yılında Morimoto tarafından yapılmıştır.

Yano ve Petterson, 1967 yılındaki çalışmalarında lift konusunu kotanjant demette incelemiştir. Yano ve Ishihara, 1973 yılındaki çalışmalarında ise hem tanjant demet hemde kotanjant demete dikey, tam, yatay ve diagonal liftlerle ilgili elde edilmiş önemli sonuçlara yer vermiştir.

Bu çalışmaları referans alan (Yano ve Ishara, 1968) çalışmasında ise her iki demette yatay (horizontal), dikey (vertical) ve tam (complete) liftlerle ilgili dikkate değer teorik sonuçlar elde edilmiştir.

Benzer lift problemleri yarı-tensör demette de araştırılmıştır. Bu kapsamda ilk olarak (Duc. 1979) tarafından yarı-tanjant demet tanımlanmış ve bu demette yatay ve dikey lift problemleri (Vishnevskii 1983, 2002) çalışmalarında incelenmiştir. Bununla birlikte, Vishnevskii, Shirokov ve Shurygin 1985 çalışmasında, yarı-tanjant demete izdüşümlü lineer konneksiyonlar ve bu konneksiyon ile tanımlanan eğrilik ve burulma tensörleri araştırılmıştır.

Son zamanlarda yarı-demet teorisi konusunda birçok çalışma (Yıldırım 2010, 2015, 2017, Yıldırım ve Salimov 2014) yapılmıştır. Bu kapsamda yer alan (Yıldırım, 2013,2018) çalışmalarında, yarı-kotanjant demet tanımlanmış ve bu demette vektör ve afinor alanlarının tam ve yatay liftleri araştırılmıştır.

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada ise, M manifoldu üzerinde tanımlı T*M kotanjant demetin izdüşümü ile tanımlanan (p,q) tipli yarı-tensör demet tanımlanmış ve yine bu demette vektör alanlarının bazı yatay lift problemleri incelenmiştir. Ayrıca yine bu tezde T*M kotanjant demet izdüşümü kullanılarak elde edilen (p,q) tipli tM yarı-tensör demette bir kesit üzerinde (1,0) tipli tensör alanlarının bazı liftleri ve bu liftler arasındaki geometrik ilişkiler araştırılmıştır.

KURAMSAL TEMELLER

Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: M bir Hausdorff uzay olmak üzere $\forall x \in M$ için $\mathbb{R}^n$ deki açık bir kümeye homeomorf olacak şekilde x noktasının açık bir U komşuluğu var ise M Hausdorff uzayına topolojik manifold denir.

Bu tanımda ifade edilen homeomorfizma

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

olarak ifade edilir ise (U,φ) ikilisine M 'de n boyutlu koordinat sistemi veya harita adı verilir (Şahin,2012). U'ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. $x \in U$ için

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$$

yazılır. Burada $x^1,...,x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2: M Hausdorff uzay ve k ise $0 \le k$ şartını sağlayan bir tam sayı olmak üzere

1. Lokal haritaların U_α bölgesi M 'i örter, yani M, n-boyutlu topolojik manifold olur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır.(Bu şart bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı olarak da adlandırılır.)

şartlarını sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset M\}$ lokal haritalar ailesine M üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas denir.

Tanım 2.1.2'nin 2. şartında ifade edilen $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right), i, j = 1,..., n\right)$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Öyleyse kabul edelim ki $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, C^k sınıfından bir dönüşümdür. 2. şart, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobi matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması anlamına gelmektedir(Salimov,Mağden 2008).

Tanım 2.1.3: *M*, sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olmak üzere *M* üzerinde *n*-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmiş ise *M* uzayına C^∞ sınıfından *n*-boyutlu diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold adı verilir ve M_n şeklinde gösterilir(Salimov,Mağden 2008).

Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: V, $n-$boyutlu reel vektör uzayı, V^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in V, j = 1,...,n$ vektör ve $\overset{i}{\xi} \in V^*, i = 1,...,m$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = \phi\left(x_1,...,x_n,\overset{1}{\xi},...,\overset{m}{\xi} \right)$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her değişkene göre lineerlik şartını sağlıyor ise;

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (veya V^*)

$$\phi\left(\vec{x}_1,...,\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y},...,\overset{m}{\xi} \right) = \lambda_1\phi\left(\vec{x}_1,...,\vec{x},...,\overset{m}{\xi} \right) + \lambda_2\phi\left(\vec{x}_1,...,\vec{y},...,\overset{m}{\xi} \right)$$

bu fonksiyona multilineer fonksiyon adı verilir. Bu fonksiyona karşılık gelen

$$\phi : \underbrace{V \times ... \times V}_{n \tan e} \times \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{m \tan e} \to \mathbb{R}$$

operatörüne V uzayında *m.* mertebeden kontravaryant, *n.* mertebeden kovaryant tensör denir ve bu şekildeki tüm tensörlerin uzayı $\Im_n^m(V)$ şeklinde gösterilir. $m \geq 0, n \geq 0$ olmak üzere *s* = *m*+*n* sayısına ise tensörün valentliği, (m,n) sembolüne ise tensörün tipi denir. (m,0) tipli tensöre kontravaryant tensörler, (0,n) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler adı verilir.

$\Im_2^0(V)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı $S_2(V)$ olmak üzere keyfi bir $g \in S_2(V)$ tensörü için

$$g\left(\vec{x},\vec{y}\right)=0,\forall\vec{y}\in V \tag{2.1}$$

şartında $\vec{x}=0$ oluyor ise g tensörüne regüler tensör adı verilir.

$g\left(\vec{x},\vec{y}\right)=0$, koordinatlarla

$$g_{ij}x^i y^j=0$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlik her y^j için sağlandığından

$$g_{ij}x^i=0\,,\quad j=1,...,n$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin $x^i=0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij})\neq 0$$

olmalıdır. Burada (g_{ij}), g tensörüne karşılık gelen matristir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.2.2: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold, T_pM ise manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olmak üzere $\forall p\in M_n$ noktasına T_pM uzayında bir X_p tanjant vektörü karşılık getiren X vektör değerli dönüşümüne vektör alanı denir.

Böylece M manifoldu üzerinde bir vektör alanı

$$X:M\rightarrow\bigcup_{p\in M}T_pM$$

şeklinde diferansiyellenebilir bir dönüşümdür (Şahin,2012).

f, M_n manifoldunda bir dönüşüm ise Xf 'de M_n manifoldunda

$$Xf:M\rightarrow\mathbb{R}$$

$$(Xf)(p)=X_pf$$

biçiminde tanımlanan bir dönüşümdür. $U\subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X=\xi^i\partial_i$$

şeklinde yazılır. ξ^i 'ler U 'daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani

$$\xi^i=\xi^i\left(x^i,...,x^n\right),\quad i=1,...,n$$

olur.

Vektör alanlarına benzer olarak, dual vektör alanlarıda tanımlanabilir. Ama öncelikle dual uzay tanımını verelim:

Tanım 2.2.3: V bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $L:V \to F$ dönüşümü verilsin. $\forall x, y \in V$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ için

$$L(\alpha_1 x + \alpha_2 y) = \alpha_1 L(x) + \alpha_2 L(y)$$

ise L dönüşümüne lineer fonksiyonel denir. Yani bir V vektör uzayının elemanlarına skalerler karşılık getiren lineer dönüşüme lineer fonksiyonel denir. L_1, L_2 iki lineer fonksiyonel dönüşüm olmak üzere

$$(L_1 + L_2)(x) = L_1(x) + L_2(x)$$

$$(\alpha_1 L)(x) = \alpha_1 L(x)$$

şartları sağlanıyorsa V vektör uzayına dual (kovektör) uzay denir (Şahin 2012).

Tanım 2.2.4: M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olmak üzere $T_p M$ vektör uzayına dual olan uzayı $T_p^*(M)$ ile gösterelim. $\omega_p \in T_p^*(M)$ elemanı $\omega_p : T_p M \to \mathbb{R}$ lineer dönüşümüdür. $T_p M$ vektör uzayının bir $E_{1p},...,E_{np}$ bazı verilmişse, bu durumda $T_p^*(M)$ uzayının $\omega_{ip}(E_{jp}) = \delta_i^j$ şartını sağlayan bir tek $\omega_{1p},...,\omega_{np}$ bazı vardır. Böylece

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_p(E_{ip})\omega_{pi}$$

dir. $T_p^*(M)$ uzayının elemanlarına dual vektör denir. Eğer $x_1,...,x_n$ manifoldun yerel koordinat fonksiyonları ise $\left\{dx^1,...,dx^n\right\}$ kümeside $\left\{\frac{\partial}{x_1},...,\frac{\partial}{x_n}\right\}$ bazına karşılık gelendoğal dual bazdır. M manifoldunun her bir p noktasına bir dual vektör karşılık getiren dönüşüme dual vektör alanı veya 1-form denir (Şahin,2012).

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere her $m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $\Im_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.5: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olsun. $\Im_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olmak üzere M_n manifoldunun $\forall m \in M_n$ noktasına $\Im_q^p(m)$ tensör uzayında bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı adı verilir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p=1,\ q=0$ ise $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p=q=0$ ise $\forall m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir ve $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde *f* fonksiyonu C^∞ sınıfından ise her $x \in U$ için $df\big|_x \in \Im_1^0(x)$ olur. Böylece *f* fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir *m* noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise *T* tensör alanına simetrik tensör alanı, eğer herhangi bir *m* noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise *T* tensör alanına antisimetrik tensör alanı adı verilir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ $(0,1)$ tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)(m)=T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m),X_1(m),...,X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre *T* tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1...j_q}^{i_1...i_p}=T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q},\partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin (Levi-Civita) Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon tanımlanması eğrinin noktalarına uygulanan vektörler arasında bağlantı oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin keyfi bir noktasındaki v^i vektörü *t* parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtakiyle uygun olursa, bu vektöre verilen konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmıştır denir. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilir ise, paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Vektörlerin paralel kaydırılması durumunda lineer bağımlılık korunuyor ise verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun γ eğrisinin farklı noktalarına uygulanan vektörler arasında uygunluğunu gösteren şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılma koşulunu bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasındaki $\underset{m}{a}^i, m=1,...,n$ lokal bazını alalım ve varsayalım ki $\underset{m}{a}^{i}(t)$ 'nin lineer bağımlılığı, baz vektörlerin verilen eğri boyunca paralel kaydırılma kuralını göstermiş olsun. Herhangi bir $v^{i} = \lambda^{m} \underset{m}{a}^{i}$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^{m} katsayılarının sabit olmasıdır. Buradan yola çıkarak

$$dv^{i} = \lambda^{m} d \underset{m}{a}^{i} \tag{2.2}$$

eşitliği yazılabilir. $v^{i} = \lambda^{m} \underset{m}{a}^{i}$ ‘den

$$\lambda^{m} = \overset{m}{a}_{i} v^{i} \tag{2.3}$$

ifadesi elde edilir. Buradaki $\underset{m}{a}^{i}$ baz vektörü olduğu için buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{m}{a}_{i}$ ile gösterilir. Dolayısı ile $\underset{m}{a}^{i} \overset{s}{a}_{i} = \delta^{s}_{m}$ olduğu görülür. (2.3) eşitliği (2.2) da yerine yazılırsa

$$dv^{i} + \omega^{i}_{m} v^{m} = 0 \tag{2.4}$$

bulunur. (2.4) denkleminde ω^{m}_{i},

$$\omega^{m}_{i} = -\overset{s}{a}_{i} \, d \underset{s}{a}^{m} \tag{2.5}$$

şeklindedir. (2.4) koşulu v^{i} vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması koşuludur. (2.5) şeklinde tanımlanan ω^{m}_{i} objelerine konneksiyon formları adı verilir.

Teorem 2.3.1: 1. Konneksiyon formları $\left\{\underset{m}{a}^{i}\right\}, m = 1, \ldots, n$ bazının seçilişinden bağımsızdırlar.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi halinde tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmezler.

Tanım 2.3.1: ω_{i} kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^{i} vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalır ise, ω_{i} kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyonuna göre paralel kaydırılmıştır denir.

Buradan yola çıkarak

$$d\left(v^{i} \omega_{i}\right) = dv^{i} \omega_{i} + v^{i} d\omega_{i} = 0 \tag{2.6}$$

elde edilir. v^{i} vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_m^i v^m \tag{2.7}$$

bulunur. (2.7) eşitliği (2.6) ifadesinde yerine yazılır ise

$$\left(d\omega_i - \omega_i^m \omega_m\right) v^i = 0$$

elde edilir. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^m \omega_m = 0 \tag{2.8}$$

şeklinde olur. Vektörün ve kovektörün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması koşulunu kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün de paralel kaydırılma şartını bulabiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

şeklinde gösterelim. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılma koşulları dahilinde diferensiyeli

$$dZ = dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} d\underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

$$+ \dots + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots d\overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.9}$$

$$= \left(dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \omega_{j_1}^{s} t_{sj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \omega_{j_q}^{s} t_{j_1 \dots s}^{i_1 \dots i_p} + \omega_s^{i_1} t_{sj_2 \dots j_q}^{si_2 \dots i_p} + \omega_s^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s} \right) \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

olarak elde edilir. Bu ifadede

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \omega_{j_1}^{s} t_{sj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \omega_{j_q}^{s} t_{j_1 \dots s}^{i_1 \dots i_p} + \omega_s^{i_1} t_{j_1 \dots j_q}^{si_2 \dots i_p} + \omega_s^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s} \tag{2.10}$$

olarak alınırsa

$$dZ = \delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.11}$$

bulunur. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O zaman dZ multilineer fonksiyonuna belirli bir tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün tipiyle aynıdır. Koordinatları ise (2.10) da verilmiştir. $\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörüne $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün mutlak diferensiyeli adı verilir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0 \;,\; \delta\omega_i = 0$$

şeklindedir. Dolayısıyla keyfi tipli bir tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = 0$$

ile verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta_i^j\right) = 0$$

dır.

(2.10) eşitliğinden tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1. $\delta\left(t_1 \mp t_2\right) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,

2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,

3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$ - tensör çarpımını gösterir.

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

Afin konneksiyonlu uzaylar

Tanım 2.3.1.1: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun her bir eğrisi boyunca afin konneksiyonu verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay adı verilir.

Afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyel

$$\delta v^i = (\ \partial_k v^i + \Gamma^{\,i}_{ks} v^s\ )\, du^k \tag{2.12}$$

şeklinde olur. (2.12) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatları olur. Bu tensöre, verilen v^i tensörünün kovaryant türevi adı verilir ve

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{ks}^{\,i} v^s \tag{2.13}$$

ile gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür.

Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma_{kj}^{\,s} \omega_s \tag{2.14}$$

ile gösterilir ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür.

(p,q) tipli $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = (\partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma_{ks}^{\,i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{kj_\mu}^{\,s} t_{j_1 \dots s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) du^k \tag{2.15}$$

şeklinde olur. (2.15) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre, verilen $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün kovaryant türevi adı verilir ve

$$\nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma_{ks}^{\,i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{kj_\mu}^{\,s} t_{j_1 \dots s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \tag{2.16}$$

şeklinde gösterilir. Tensörün kovaryant türevi tanımından, (p,q) tipli tensörün kovaryant türevi (p,q+1) tipli bir tensör olduğu görülür. Yani kovaryant türev, uygulanan tensörün kovaryantlık mertebesini bir artırır.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikleri yazabiliriz:

1. $\nabla_k (\underset{1}{t}{}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mp \underset{2}{t}{}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = \nabla_k \underset{1}{t}{}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mp \nabla_k \underset{2}{t}{}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$

2. $\nabla_k (\lambda t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = (\partial_k \lambda) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mp \lambda \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad \lambda \in F(M_n)$

3. $\nabla_k (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes g_{s_1 \dots s_q}^{l_1 \dots l_p}) = \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes g_{s_1 \dots s_q}^{l_1 \dots l_p} + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes \nabla_k g_{s_1 \dots s_q}^{l_1 \dots l_p}$

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

Afin (lineer) konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 2.3.1.2: M_n bir manifold ve manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M_n)$ olmak üzere $X, Y, Z \in \chi(M_n)$ ve $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için

$$\nabla : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to \chi(M_n)$$

$$\left(X,Y\right)\to\nabla\left(X,Y\right)=\nabla_X Y$$

ile tanımlı ve

(i) $\nabla_{X+Y}Z=\nabla_X Z+\nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X\left(Y+Z\right)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$

(iii) $\nabla_{fX}Y=f\nabla_X Y$

(iv) $\nabla_X\left(fY\right)=X\left[f\right]Y+f\nabla_X Y$

şartlarını sağlayan ∇ fonksiyonuna afin veya lineer konneksiyon adı verilir. Burada

$$\nabla:\chi\left(M_n\right)\to\chi\left(M_n\right)$$

Fonksiyonuna da X vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Şahin 2012).

Bu tanımdan görülmektedir ki bir afin konneksiyon M_n üzerindeki bir vektör alanını yine bir vektör alanına götürür.

Burulma ve eğrilik tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f=f\left(u^1,...,u^n\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonun tam diferensiyeli

$$df=\partial_i f du^i$$

koordinatların dönüşümü durumunda invaryant kalır ve *df* fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i=\partial_i f \tag{2.17}$$

şeklindedir. Bu kovektöre *f* fonksiyonunun gradienti, *f* 'ye ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu adı verilir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j}V_{i]}=0 \tag{2.18}$$

olmasıdır (Yano and Ako 1968).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^{m} V_m \tag{2.19}$$

şeklindedir. (2.19) denkleminde *j* ve *i* indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.18) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S_{ij}^{m} V_m \tag{2.20}$$

yazılır. Burada

$$S_{ij}^{m} = \Gamma_{[ij]}^{m} \tag{2.21}$$

olarak verilmiştir. (2.20) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev (0,2) tipli tensör olduğundan S_{ij}^{m} bileşenleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensörün bileşenlerini ifade eder. Bu tensöre A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi *X*, *Y* vektör alanları için burulma tensörünün invariyant formda tanımı:

Tanım 2.3.2.1: M_n manifoldu üzerinde ∇ lineer konneksiyon ve $\chi(M_n)$ vektör alanlarının kümesi olmak üzere

$$S : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to \chi(M_n)$$

$$(X,Y) \to T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

şeklinde tanımlı S tensör alanına ∇ lineer koneksiyonunun torsiyon (burulma) tensörü denir. Buradan anlaşılacağı üzere S, (2,1) tipli tensör alanıdır. $S = 0$ olması halinde ∇ lineer koneksiyonu burulmasız denir (Şahin 2012; Kobayashi and Nomizu 1963).

Burada $[X,Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi olup M_n bir diferansiyellenebilir manifold, $\forall f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $\chi(M_n)$ vektör alanlarının kümesi olmak üzere

$$[,] : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to \chi(M_n)$$

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde ifade edilir (Şahin 2012).

Keyfi v^i vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^{i} v^m$ kovaryant türevi (1,1) tipli tensör ifade eder. Bu tensörün kovaryant türevi

$$\nabla_r \nabla_s v^i = \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^{i} \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i$$

$$= \partial_r(\partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k) + \Gamma^i_{rm}(\partial_s v^m + \Gamma^m_{sk} v^k) - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i$$

$$= \partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma^i_{sk} v^k + \Gamma^i_{sk} \partial_r v^k + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i$$

şeklindedir. Bu eşitlikte *r*, *s* indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]} v^i = R_{rsk}{}^i v^k - 2S^k_{rs} \nabla_k v^i \tag{2.22}$$

denklemi bulunur. (2.22) denkleminde

$$R_{rsk}{}^i = \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk} \tag{2.23}$$

$$= 2(\partial_{[r} \Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|} \Gamma^m_{s]k})$$

olarak alınmıştır. (2.22) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi (1,3) tipli bir tensördür. Bu tensöre A_n uzayının Eğrilik tensörü ya da Riemannian- Christoffel tensörü adı verilir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda tanımı ise;

Tanım 2.3.2.2: M_n manifoldu üzerinde ∇ lineer konneksiyon ve $\chi(M_n)$ vektör alanlarının kümesi olmak üzere

$$R : \chi(M_n) \times \chi(M_n) \times \chi(M_n) \to \chi(M_n)$$

$$(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlı R tensör alanlarına ∇ lineer koneksiyonunun eğrilik tensörü denir.Buradan anlaşılacağı üzere R , (3,1) tipli tensör alanıdır. $R = 0$ olması halinde ise M manifoldu için düzlemseldir (flat) denir (Şahin 2012; Kobayashi and Nomizu 1963).

Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların difeomorfizmini inceleyelim. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme, aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de elde edilebilir. Bu duruma, konneksiyonların birinden diğerine geçmeye, konneksiyonların dönüştürülmesi ya da paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi şeklinde bakılabilir. Aynı manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar dahil etmek mümkündür. M_n manifoldu üzerinde Γ^k_{ij} ve $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ konneksiyon katsayılarına sahip ∇ ve $\overline{\nabla}$

konneksiyonları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^i_{km} v^m, \quad \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}^i_{km} v^m$$

şeklinde olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T^i_{km} v^m \tag{2.24}$$

elde edilir. Burada

$$T^i_{km} = \overline{\Gamma}^i_{km} - \Gamma^i_{km} \tag{2.25}$$

şeklindedir. (2.24) eşitliği ile verilen T^i_{km}, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon (gerilme) tensörü adı verilir.

Teorem 2.3.3.1: T^i_{km}, (1,2) tipli tensör ve Γ^i_{km} ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.25) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}^i_{km}$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.25) eşitliğinden

$$\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij}$$

yazılır. Γ^k_{ij} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \left(\overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} - T^{k'}_{i'j'}\right) + A^k_{k'} A^{k'}_{ij} \tag{2.26}$$

elde edilir. Burada T^k_{ij} tensör olduğundan

$$T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j T^{k'}_{i'j'} \tag{2.27}$$

biçiminde yazabiliriz. (2.27) eşitliği (2.26) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} + A^k_{k'} A^{k'}_{ij}$$

olduğu görülür. Bu ise, $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ katsayılarının, konneksiyonların dönüştürülmesi kuralına göre dönüştüğünü ifade eder. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur denir.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim:

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaleri için

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}}{1+\lambda} \tag{2.28}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.28) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k} - \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}) \tag{2.29}$$

şeklinde yazılabilir. (2.29) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan Teorem 2.3.2'e göre Γ_{ij}^{k} afin konneksiyon olur. Yani iki farklı konneksiyon kullanılarak yeni bir konneksiyon bulunmuş olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}}{2} \tag{2.30}$$

bulunur. $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon adı verilir.

Sonuç 2. Γ_{ij}^{k} afin konneksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde, $\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k}\right)$$

olduğundan

$$\widetilde{\Gamma}_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} + 2S_{ij}^{k}, \quad \widetilde{\Gamma}_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \tag{2.31}$$

yazılır. Teorem 2.3.2'den dolayı $\widetilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\widetilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ ve Γ_{ji}^{k} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

MATERYAL ve YÖNTEM

Kotanjant Demet

C^{∞} sınıfından diferensiyellenebilir bir M_n manifoldu ve bu manifoldun P noktasındaki kotanjant uzayı $T_P^*(M_n)$ olmak üzere

$$T^*(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P^*(M_n) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan $T^*(M_n)$ kümesine kotanjant demet adı verilir (Yano and Ishihara 1973).

$T^*(M_n)$ 'nin keyfi bir $\widetilde{P} \in T_P^*(M_n)$ noktası için M_n üzerindeki $T^*(M_n)$ tabii demet yapısını oluşturan $\pi : T^*(M_n) \to M_n$, $\pi(\widetilde{P}) = P$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(P) = \widetilde{P} \in T_P^*(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının P noktasındaki fibresi denir (Yano and Ishihara 1973).

$f : M_n \to T^*(M_n)$ diferensiyellenebilir dönüşümüyle tanımlanan f kesitini ele alalım: $\pi \circ f = id\big|_{M_n}$. M_n manifoldunun herhangi bir P noktasındaki $f(P)$ görüntüsünü, $T_P^*(M_n)$ 'nin sıfır vektörüne taşıyan f kesitine sıfır kesit adı verilir. $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n baz uzayıyla aynıdır ve bu sebeple M_n manifoldunun kendisi $T^*(M_n)$ 'de diferensiyellenebilir imbedding olmuş altmanifolddur (Yano and Ishihara 1973).

(x^h), U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olup M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. R^n 'de, R üzerindeki n-boyutlu vektör uzayı olsun. $\widetilde{P} \in T_P^*(M_n)$ $(P \in U)$ noktası (P, p) sıralı çiftiyle gösterildiği için ve $p \in R^n$ kovektörünün bileşenleri $T_P^*(M_n)$ kotanjant uzayında dx^h doğal kobazına göre $\widetilde{P}$ 'nin $p_i = x^{\bar{h}}$ $(\bar{h} = n+1, ..., 2n)$ kartezyen koordinatları olduğundan $\pi^{-1}(U) \subset T^*(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direkt çarpımına difeomorfizm olacaktır (Yano and Ishihara 1973).

U komşuluğunda $P = \pi(\widetilde{P})$ 'nin koordinatları x^h $(h = 1, ..., n)$ ile ifade edilirse ve $(x^h, p_i) \leftrightarrow \widetilde{P} \in \pi^{-1}(U)$ olduğu göz önüne alınırsa, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde (x^h, p_i)

lokal koordinatlar sistemi elde edilir ve $\left(x^h, p_i\right)$ 'ye, $\left(x^h\right)$ 'dan indirgenmiş $\pi^{-1}(U)$ 'daki koordinatlar adı verilir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldunun $P=\pi\left(\widetilde{P}\right)$ noktasını kapsayan diğer bir koordinat komşuluğu $\left\{U', x^{h'}\right\}$ olmak üzere, $\pi^{-1}\left(U'\right)$ koordinat komşuluğu da $\widetilde{P}$ noktasını kapsar.

$\pi^{-1}\left(U'\right)$ koordinat komşuluğuna göre $\widetilde{P}$ noktasının indirgenmiş koordinatları $\left(x^h, p_i\right)$ şeklinde gösterilir (Yano and Ishihara 1973). Buradaki dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x), \\ p_{i'} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} p_i \end{cases} \tag{3.2}$$

biçimindedir. Burada, $x^{h'}(x)$; $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ -sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = p_h$, $x^{\bar{h}'} = p_{h'}$ ile gösterilir ise (3.2) dönüşümü

$$x^{H'} = x^{H'}\left(x^H\right), \; H = 1, ..., n, n+1, ..., 2n \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır. (3.2) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H'}}{\partial x^H}\right) = \begin{pmatrix} A_i^{h'} & 0 \\ A_i^{i'} A_{i'h'}^{h} p_h & A_{h'}^{i} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

ile tanımlıdır. Burada

$$A_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \; A_{i'h'}^{h} = \frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{i'} \partial x^{h'}}, \; A_i^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^i}$$

eşitlikleri geçerlidir. (3.2) dönüşümünün tersi ise

$$\begin{cases} x^{h} = x^{h}(x'), \\ p_{h} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} p_{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

ya da

$$x^H = x^H\left(x^{H'}\right) \tag{3.6}$$

ile gösterilir. (3.5) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H}}{\partial x^{H'}}\right) = \begin{pmatrix} A_{h'}^{i} & 0 \\ A_{i'}^{i} A_{ih}^{h'} p_{h'} & A_i^{h'} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

ile ifade edilir. (3.4) ve (3.7) matrisleri $T^*(M_n)$ kotanjant demetinin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir (Yano and Ishihara 1973).

M_n üzerindeki C^∞ -sınıfından (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(M_n)$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im_s^r(M_n)$$

ile ifade edilir. Benzer olarak $T^*(M_n)$ kotanjant demetindeki uygun kümeler sırasıyla $\Im_s^r(T^*(M_n))$ ve $\Im(T^*(M_n))$ ile gösterilir.

$p = p_i dx^i$ 1-formuna, $T^*(M_n)$ kotanjant demetindeki temel 1-form adı verilir. $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda dp dış diferensiyeli $dp = dp_i \wedge dx^i$ şeklindeki 2-formu belirtir. Bu sebeple

$$dp = \xi = \frac{1}{2}\xi_{CB} dx^C \wedge dx^B$$

yazılırsa

$$\xi = (\xi_{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ -\delta_j^i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. (3.8) matrisi regüler olduğundan $\xi^{BA}\xi_{CB} = \delta_C^A$ olacak şekilde ξ^{BA} ters matrisi vardır. ξ^{BA} matrisi

$$(\xi^{BA}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^h \\ \delta_h^i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

biçimindedir (Yano and Ishihara 1973).

Fonksiyonun dikey lifti

M_n üzerinde $f : M_n \to R$ fonksiyonu tanımlanmış ve $\pi : T^*(M_n) \to M_n$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere

$${}^v f = f \circ \pi \tag{3.10}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun $T^*(M_n)$ kotanjant demete dikey lifti adı verilir. $\widetilde{P} \in T_P^*(M_n)$ olmak üzere

$$ {}^{v}f\left(\widetilde{P}\right)=f\left(P\right) $$

bulunur (Yano and Ishihara 1973).

Kovektör alanının dikey lifti

$\omega\in\Im_1^0(M_n)$ üzerindeki $\widetilde{\omega}^A=\widetilde{\omega}_B\xi^{BA}$ lokal bileşenlerine sahip ve koordinatlarla ifadesi $\omega=\omega_i dx^i$ şeklindeki 1-form olup ω 1-formunun dikey lifti olan ${}^{v}\omega$ vektör alanı $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{v}\omega=\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix} \tag{3.11} $$

ile gösterlir (Yano and Ishihara 1973).

Vektör alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $X\in\Im_0^1\left(M_n\right)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinde X vektör alanının tam lifti olan ${}^{c}X\in\Im_0^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{c}X=\begin{pmatrix} X^h \\ -p_i\left(\partial_h X^i\right) \end{pmatrix} \tag{3.12} $$

ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

Afinor alanının tam lifti

M_n üzerinde $F\in\Im_1^1\left(M_n\right)$ afinor alanı verilmiş olsun. $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinde F afinor alanının tam lifti olan ${}^{c}F\in\Im_1^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{c}F=\begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ p_s(\partial_i F_h^s-\partial_h F_i^s) & F_h^i \end{pmatrix} \tag{3.13} $$

ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

$\gamma-$ **operatörü**

M_n üzerinde tanımlı bir X vektör alanı olmak üzere $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demeti üzerindeki γX fonksiyonu

$$\gamma X = p_s X^s \tag{3.14}$$

ile ifade edilir.

M_n üzerinde tanımlı bir F afinor alanı olmak üzere $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinde $\gamma F \in \Im_0^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ p_s F_i^s \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

$T \in \Im_2^1\left(M_n\right)$ olmak üzere, $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinde $\gamma T \in \Im_1^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_s T_{j\,i}^s & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

Vektör alanının yatay lifti

M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ simetrik afin konneksiyonu verilmiş olsun. Herhangi bir $X \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ için

$${}^H X = {}^C X + \gamma(\nabla X) \tag{3.17}$$

ile tanımlanan ${}^H X \in \Im_0^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ vektör alanına, X vektör alanının yatay lifti adı verilir. Burada X^s 'in $\nabla_i X^s$ kovaryant türevi

$$(\nabla_i X^s) = \partial_i X^s + X^j \Gamma_{j\,i}^{\,s}$$

şeklinde yazılır (Yano and Ishihara 1973).

X 'in ${}^H X$ yatay lifti, $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^i \\ X^j \Gamma_{ji} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

ile gösterilir. Burada

$$\Gamma_{ji} = p_s \Gamma_{j\,i}^{\,s} \tag{3.19}$$

biçimindedir.

Afinor alanının yatay lifti

$F \in \Im_1^1(M_n)$ 'in $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demeti üzerindeki ${}^H F$ yatay lifti

$$ {}^H F = {}^C F + \gamma[\nabla F] \tag{3.20} $$

ile ifade edilir. Burada $[\nabla F]$, keyfi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanları için

$$ [\nabla F](X,Y) = -\nabla_X(FY) + \nabla_Y(FX) \tag{3.21} $$

eşitliği ile tanımlı (1,2) tipli bir tensör alanıdır. F 'in ${}^H F$ yatay lifti, $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^H F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_{is} F_h^s + \Gamma_{hs} F_i^s & F_h^i \end{pmatrix} \tag{3.22} $$

ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

Tensör Demet

M_n, C^∞ sınıfından $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve $T_q^p(X)$, M_n manifoldunun X noktasındaki (p,q) tipli tensör uzay olmak üzere

$$ T_q^p(M_n) = \bigcup_{X \in M_n} T_q^p(X) $$

ile tanımlanan $T_q^p(M_n)$ kümesine tensör demet adı verilir

M_n manifoldu üzerinde $\pi : T_q^p(M_n) \to M_n$ tabii izdüşümü verilsin. M_n manifoldunun bir X noktasının U koordinat komşuluğundaki lokal koordinatları x^j, $j = 1,...,n$ olarak verilir. $X \in M_n$ noktasına karşılık gelen $T_q^p(M_n)$ demetinin elemanı olan $\tilde{X} \in \pi^{-1}(U)$ noktasının lokal ifadesi

$$ (x^j, t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = (x^j, x^{\bar{j}}),\ x^{\bar{j}} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p},\ \bar{j} = n+1,...,n+n^{p+q} $$

şeklindedir. Burada $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, t tensörünün ∂_j tabii çatısına göre bileşenleridir. $T_q^p(M_n)$ nin $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olarak $(x^j, x^{\bar{j}})$ ifadesini yazabiliriz.

M_n üzerindeki koordinat dönüşümü $x^{j'} = x^{j'}(x^j)$ şeklinde olduğundan $T_q^p(M_n)$ demetinde karşılık gelen koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{j'} = x^{j'}(x^j), \\ x^{\bar{j}'} = t^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = A^{i'_1}_{i_1} \dots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \dots A^{j_q}_{j'_q} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = A^{(i')}_{(i)} A^{(j)}_{(j')} x^{\bar{j}}, \end{cases} \tag{3.23}$$

şeklinde olur. Burada $A^{(i')}_{(i)} A^{(j)}_{(j')} = A^{i'_1}_{i_1} \dots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \dots A^{j_q}_{j'_q}$, $A^{i'_1}_{i_1} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $A^{j_1}_{j'_1} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$ olarak alınmıştır. $J = (j, \bar{j})$, $J = 1, \dots, n + n^{p+q}$, $t^{(i)}_{(k)} = t^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q}$ olmak üzere, (3.23) denkleminin Jacobian matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{J'}}{\partial x^J} \right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} & \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\bar{j}}} \\ \dfrac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^j} & \dfrac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^{\bar{j}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{j'}_j & 0 \\ t^{(i)}_{(k)} \partial_j (A^{(i')}_{(i)} A^{(k)}_{(j')}) & A^{(i')}_{(i)} A^{(j)}_{(j')} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

ile verilir.

M_n manifoldu üzerinde C^∞ sınıfından reel değerli fonksiyonların halkası $F(M_n)$ olmak üzere, C^∞ sınıfından (p,q) tipli tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülü $\Im_q^p(M_n)$ ile gösterilir.

Eğer $\alpha \in \Im_p^q(M_n)$ ise kontraksiyonla $T_q^p(M_n)$ uzayında fonksiyon $\imath\alpha$ ile ifade edilir. Öyle ki, $U(x^i) \subset M_n$ koordinat komşuluğunda α nın lokal ifadesi

$$\alpha = \alpha^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_q} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$$

şeklinde ise $\imath\alpha$ nın $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğundaki $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlara göre lokal ifadesi

$$\imath\alpha = \alpha^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

biçiminde olur.

Tensör alanların tensör demete dikey lifti ve $\gamma -$ operatörü

Yardımcı teorem

$\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_q^p(M_n)$ olsun. Her $\alpha \in T_p^q(M_n)$ için $\tilde{X}(\imath\alpha) = \tilde{Y}(\imath\alpha)$ ise $\tilde{X} = \tilde{Y}$ olur.

İspat: Eğer $\tilde{Z}(\imath\alpha) = (\tilde{X} - \tilde{Y})(\imath\alpha)$ olarak alınırsa $\tilde{Z} = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\tilde{Z}$ nın $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre $\tilde{Z}^j$ bileşenleri

$$\tilde{Z}(\iota\alpha) = \tilde{Z}^j \partial_j (\alpha^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}) + \tilde{Z}^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}} (\alpha^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q})$$
$$= \tilde{Z}^j t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \partial_j \alpha^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} + \tilde{Z}^{\bar{j}} \alpha^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = 0$$

denklemini sağlar. $\alpha \in \Im^q_p(M_n)$ keyfi olarak alındığından dolayı, homojen lineer denklem sisteminden

$$\tilde{Z}^j t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = 0, \; \tilde{Z}^{\bar{j}} = 0$$

(3.25)

olur. (3.25) nin ilk denkleminde eğer $T^p_q(M_n)$ tensör demetinin tüm noktalarında $t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ nin tüm bileşenleri sıfır değilse $\tilde{Z}$ bileşenleri sürekli olmasından dolayı M_n baz manifoldu üzerinde $\tilde{Z}^j = 0$ olur. Böylece $\pi^{-1}(U)$ un tüm noktalarında $\tilde{Z}^j = 0$ yazılır. (3.25) denkleminin ikincisi de dikkate alındığında $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $\tilde{Z} = 0$ bulunur. Böylece $T^p_q(M_n)$ tensör demetinde $\tilde{Z} = 0$ yazılır.

$A \in \Im^p_q(M_n)$ olsun. $\alpha \in \Im^q_p(M_n)$ olmak üzere

$${}^V A(\iota\alpha) = \alpha(A) \circ \pi = {}^V(\alpha(A)) \tag{3.26}$$

eşitliğini sağlayan ${}^V A \in \Im^1_0(T^p_q(M_n))$ vektör alanına A vektör alanının $T^p_q(M_n)$ tensör demette dikey lifti adı verilir (Ledger and Yano 1967). Burada ${}^V(\alpha(A))$ ifadesi $\alpha(A) \in F(M_n)$ fonksiyonunun dikey liftidir. Diğer taraftan $f \in F(M_n)$ keyfi fonksiyonun ${}^V f = f \circ \pi$ dikey lifti $\pi^{-1}(P) = T^p_q(P)$ fibresi boyunca sabittir.

${}^V A = {}^V A^k \partial_k + {}^V A^{\bar{k}} \partial_{\bar{k}}$ olarak yazılırsa, $x^{\bar{k}} = t^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}$ olmak üzere (3.26) ‘den

$${}^V A^k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \partial_k \alpha^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} + {}^V A^{\bar{k}} \alpha^{k_1\ldots k_q}_{l_1\ldots l_p} = \alpha^{k_1\ldots k_q}_{l_1\ldots l_p} A^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}$$

sonucu bulunur. 3.3.1.1. Yardımcı Teoremin ispatında kullanılan benzer yöntemle $T^p_q(M_n)$ nin $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre ${}^V A$ dikey liftinin bileşenleri

$${}^V A = \begin{pmatrix} {}^V A^j \\ {}^V A^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

şeklindedir.

$\varphi \in \Im^1_1(M_n)$ tensör alanının lokal koordinatlarla ifadesi

$$\varphi = \varphi_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$

şeklinde verilmiş olsun. $T_q^p(M_n)$ tensör demette $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre $\gamma\varphi$ vektör alanı

$$\begin{cases} \gamma\varphi = (\sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots m\ldots i_p} \varphi_m^{i_\lambda}) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}, \quad (p \geq 1,\ q \geq 0) \\ \tilde{\gamma}\varphi = (\sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1\ldots m\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} \varphi_{j_\mu}^{m}) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}},\ (p \geq 0,\ q \geq 1) \end{cases} \tag{3.28}$$

olarak tanımlanır (Cengiz and Salimov 2002).

(3.24) ifadesinden, $\gamma\varphi$, $T_q^p(M_n)$ tensör demette dikey vektör alanıdır. Biz $\gamma\varphi$ yi $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ afinorun $T_q^p(M_n)$ tensör demette dikey-vektör lifti olarak isimlendireceğiz. $\gamma\varphi$ dikey-vektör liftinin lokal koordinatlarla ifadesi

$$\gamma\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots m\ldots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma}\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1\ldots m\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} \varphi_{j_\mu}^{m} \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

şeklinde bulunur.

Türevlerin tam liftleri

M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm tensör modüllerinin direkt toplamını $\Im(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im_q^p(M_n)$ biçiminde gösterelim. Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$D : \Im(M_n) \to \Im(M_n)$$

dönüşümüne M_n manifoldu üzerinde türev operatörü adı verilir.

a) $D(aS + bT) = aDS + bDT,\ \forall S, T \in \Im_q^p(M_n),\ a, b \in R$,

b) D tensör alanının tipini korur.

c) $D(T_1 \otimes T_2) = (DT_1) \otimes T_2 + T \otimes (DT_2),\ \forall T_1, T_2 \in \Im(M_n)$,

d) $D(cT) = c(DT)$, $c -$ kontraksiyon.

Tensör türevinin tanımından, M_n üzerindeki $(1,1)$ tipli $I=(\delta_j^i)$ birim tensör alanı için

$$DI=0 \tag{3.30}$$

dır.

M_n manifoldunda D operatörü için

$$Pf=Df,\ f\in\Im(M_n) \tag{3.31}$$

olacak şekilde bir P vektör alanı mevcuttur.

Eğer M_n manifoldunun herhangi bir U koordinat komşuluğunda

$$D(\partial_i)=Q_i^h\partial_h \tag{3.32}$$

şeklinde alınırsa (3.27) den ve $dx^i(\partial_j)=\delta_j^i$ olmasından dolayı

$$D(dx^h)=-Q_i^h dx^i \tag{3.33}$$

sonucu elde edilir.

$\Im_p^q(M_n)$ modülünün α elemanı $\alpha=\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}\partial_{j_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{j_q}\otimes dx^{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{i_p}$ biçiminde ifade edilmiş olsun. (3.32) ve (3.33) denklemlerinden $D\alpha$ nın bileşenleri

$$D\alpha:(p^m\partial_m\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}+\sum_{\mu=1}^{q}\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots m\ldots j_q}Q_m^{j_\mu}-\sum_{\lambda=1}^{p}\alpha_{i_1\ldots m\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}Q_{i_\lambda}^m) \tag{3.34}$$

olarak bulunur. Burada p^m, (3.31) ile verilen $P\in\Im_0^1(M_n)$ vektör alanının bileşenleri olur. (p^h,Q_i^h) çiftine ise U koordinat komşuluğunda D türevinin bileşenleri denir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldu üzerinde türev operatörü D olmak üzere $\alpha\in\Im_p^q(M_n)$ için 3.2.1.1. Yardımcı Teorem'e göre

$${}^C D(\iota\alpha)=\iota(D\alpha) \tag{3.35}$$

olacak şekilde bir tek ${}^C D\in\Im_0^1(T_q^p(M_n)$ vektör alanı vardır. ${}^C D$ vektör alanına $T_q^p(M_n)$ tensör demetinde D nin tam lifti adı verilir (Ledger and Yano 1967).

(3.34), (3.35) ve 3.3.1.1. Yardımcı Teorem'den ${}^C D$ vektör alanının $(x^j,x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre bileşenleri:

$$
{}^{C}D = \begin{pmatrix} p^{j} \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} \alpha^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots m \ldots j_q} Q^{m}_{j_\mu} - \sum\limits_{\lambda=1}^{p} \alpha^{i_1 \ldots m \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} Q^{i_\lambda}_{m} \end{pmatrix}. \tag{3.36}
$$

şeklinde olur.

M_n manifoldu üzerinde D_1 ve D_2 türevleri verilmiş olsun. (3.36) den

$$
\left[{}^{C}D_1, {}^{C}D_2\right] = {}^{C}\left[D_1, D_2\right]
$$

bulunur (Cengiz and Salimov 2001).

Lie türevinin tam lifti

$V \in \Im^{1}_{0}(M_n)$ olsun. $T^{p}_{q}(M_n)$ tensör demette V vektör alanının ${}^{C}V$ tam liftinin bileşenleri

$$
{}^{C}V = \begin{pmatrix} {}^{C}V^{j} \\ {}^{C}V^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{j} \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{i_1 \ldots m \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \partial_m V^{i_\lambda} - \sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots m \ldots j_q} \partial_{j_\mu} V^{m} \end{pmatrix} \tag{3.37}
$$

şeklinde verilmiştir (Salimov 1994).

L_V, V vektör alanına göre Lie türevi olsun. L_V,

$$
L_V f = Vf, \ \forall f \in F(M_n)
$$

$$
L_V W = \left[V, W\right], \ \forall V, W \in \Im^{1}_{0}(M_n)
$$

eşitliklerini sağlar. Burada $\left[V, W\right]$, V ve W vektör alanlarının Lie parantezidir. $\left[V, W\right]^{h} = V^{i}\partial_i W^{h} - W^{i}\partial_i V^{h}$ olduğu göz önüne alınarak Lie türevi koordinatlarla

$$
L_V = \left(V^{h}, -\partial_i V^{h}\right) \tag{3.38}
$$

biçiminde yazılabilir.

L_V nin tam lifti ise (3.35), (3.36) ve (3.38) dan

$$
{}^{C}(L_V) = {}^{C}V
$$

Olarak elde edilir (Cengiz and Salimov 2001).

Kovaryant türevin tam lifti

M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu ve V vektör alanına göre ∇_V kovaryant türevi tanımlanmış olsun. ∇_V

$$\nabla_V f = Vf$$

$$\nabla_{fV+gW} X = f\nabla_V X + g\nabla_W X,\ \forall f, g \in F(M_n),\ \forall V, W, X \in \Im_0^1(M_n)$$

şartlarını sağlayan bir tensör türevidir. ∇_V kovaryant türevi M_n manifoldu üzerinde

$$\nabla_V = (V^h, V^j \Gamma_{ji}^h) \tag{3.39}$$

şeklinde bileşenlerine sahiptir. (3.36) ve (3.39) kullanılarak ${}^C(\nabla_V)$ tam liftinin bileşenleri

$${}^C(\nabla_V) = \begin{pmatrix} V^j \\ \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} V^j \Gamma_{j j_\mu}^m - \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} V^j \Gamma_{jm}^{i_\lambda} \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

olur.

Şimdi M_n manifoldu üzerinde yeni bir $\breve{\nabla}$ afin konneksiyonun

$$\breve{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - S(X,Y) = \nabla_X Y - (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])$$

$$= \nabla_Y X + [X,Y] \tag{3.41}$$

denklemiyle verildiğini kabul edelim. Burada $S(X,Y)$, ∇ afin konneksiyonun burulma tensörüdür. (3.41) dan

$$\breve{\Gamma}_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h$$

elde edilir. Burada $\breve{\Gamma}_{ji}^h$, $\breve{\nabla}$ yeni afin konneksiyonun bileşenleridir.

(3.29), (3.37) ve (3.40) ifadelerinden

$${}^C V - {}^C(\nabla_V) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} (\partial_m V^{i_\lambda} + \Gamma_{jm}^{i_\lambda} V^j) - \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} (\partial_{j_\mu} V^m + \Gamma_{j j_\mu}^m V^j) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} (\partial_m V^{i_\lambda} + \breve{\Gamma}_{mj}^{i_\lambda} V^j) - \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} (\partial_{j_\mu} V^m + \breve{\Gamma}_{j_\mu j}^m V^j) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} (\breve{\nabla}_m V^j) - \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} (\breve{\nabla}_{j_\mu} V^m) \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(\breve{\nabla} V) - \tilde{\gamma}(\breve{\nabla} V)$$

elde edilir. Böylece

$$^{C}(\nabla_V) = {}^{C}V - \gamma(\breve{\nabla} V) + \tilde{\gamma}(\breve{\nabla} V) \tag{3.42}$$

olur. (3.42) denkleminde eğer $\breve{\nabla} V = 0$ olur ise

$$^{C}(\nabla_V) = {}^{C}V = {}^{C}(L_V)$$

bulunur.

∇ simetrik afin konneksiyonu verilmiş olsun. Bu takdirde $\breve{\nabla} V = \nabla V$ dir. (3.42) dan

$$^{C}(\nabla_V) = {}^{C}V - \gamma(\nabla V) + \tilde{\gamma}(\nabla V)$$

$$= \begin{pmatrix} V^j \\ V^s (\sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{sj_\mu}^{m} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} - \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma_{sm}^{i_\lambda} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p}) \end{pmatrix}$$

$$= {}^{H}V \tag{3.43}$$

eşitliği bulunur. Burada ^{H}V , $T_q^p(M_n)$ tensör demette V vektör alanının yatay liftidir (Salimov 1994).

ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Kotanjant Demet İzdüşümü ile Tanımlı Yarı Tensör Demet

M_n, C^∞ sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $\left(T^*(M_n),\pi_1,M_n\right)$ ise M_n üzerinde kotanjant demet olsun. x^α lar M_n deki baz koordinatları, $x^{\bar{\alpha}}=p_\alpha$ lar ise $T^*(M_n)$ kotanjant demetindeki fibre koordinatları olmak üzere $(x^i)=\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right)$ notasyonu kullanılmaktadır. Burada $i,j,...$ indisleri 1 den $2n$ e; $\overline{\alpha},\overline{\beta},...$ indisleri 1 den n e; $\alpha,\beta,...$ indisleri ise $n+1$ den $2n$ e kadar değer alır.

$\left(T_q^p(M_n),\tilde{\pi},M_n\right)$, M_n üzerinde bir tensör demet (Gezer & Salimov 2008; Ledger & Yano 1967; Salimov 2013) ve $T^*(M_n)$ ise $\pi_1:T^*(M_n)\to M_n$ izdüşümüyle (submersion) ile tanımlı kotanjant demet olsun (Yano & Ishihara 1973).

$\left(T_q^p(M_n),\tilde{\pi},M_n\right)$ tensör demetinin $T^*(M_n)$ kotanjant demeti üzerindeki $\left(t_q^p(M_n),\pi_2,T^*(M_n)\right)$ yarı-tensör demeti (induced veya pull-back):

$$t_q^p(M_n)=\left\{(\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right),x^{\bar{\bar{\alpha}}})\in T^*(M_n)\times\left(T_q^p\right)_x(M_n):\pi_1\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right)=\tilde{\pi}\left(x^\alpha,x^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)=\left(x^\alpha\right)\right\}\subset T^*(M_n)\times\left(T_q^p\right)_x(M_n)$$

ile tanımlıdır. Burada $\pi_2(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha,x^{\bar{\bar{\alpha}}})=\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right)$ ile $\pi_2:t_q^p(M_n)\to T^*(M_n)$ izdüşümü tanımlı olup $\left(T_q^p\right)_x(M_n)\left(x=\pi_1\left(\tilde{x}\right),\tilde{x}=\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right)\in T^*(M_n)\right)$ ise M_n nin bir x noktasındaki tensör uzayıdır. Ayrıca $x^{\bar{\bar{\alpha}}}=t_{\alpha_1\ldots\alpha_q}^{\beta_1\ldots\beta_p}$ $\left(\bar{\bar{\alpha}},\bar{\bar{\beta}},...=2n+1,...,2n+n^{p+q}\right)$ lar $T_q^p(M_n)$ tensör demetinin fibre koordinatlarıdır (pull-back demeti bkz: (Husemoller 1994; Lawson & Michelsohn 1989; Salimov & Kadıoğlu 2000; Steenrod 1951; Yıldırım 2015; Yıldırım & Salimov 2014). Ayrıca pull-back demetlerinin genelleşmiş hali Pontryagin demetleri olarak bilinir (Pontryagin 1947).

$(x^{i'})=(x^{\bar{\alpha}'},x^{\alpha'},x^{\bar{\bar{\alpha}}'})$, $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetindeki bir diğer lokal adapte olmuş koordinat sistemi olmak üzere

$$\begin{cases} x^{\overline{\alpha}'} = \dfrac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}\, p_{\beta}, \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^{\beta}\right), \\ x^{\overline{\overline{\alpha}}'} = t^{\beta_1'\ldots\beta_p'}_{\alpha_1'\ldots\alpha_q'} = A^{\beta_1'\ldots\beta_p'}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} A^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1'\ldots\alpha_q'} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} = A^{(\beta')}_{(\alpha)} A^{(\beta)}_{(\alpha')} x^{\overline{\overline{\beta}}}, \end{cases} \tag{4.1}$$

dönüşümü tanımlıdır (Yıldırım 2018b).

(4.1) dönüşümünün jakobiyeni

$$\overline{A} = \left(A^{I'}_{J}\right) = \begin{pmatrix} A^{\beta'}_{\alpha} & p_{\sigma} A^{\beta'}_{\beta} A^{\sigma}_{\beta'\alpha'} & 0 \\ 0 & A^{\alpha'}_{\beta} & 0 \\ 0 & t^{(\alpha)}_{(\sigma)} \partial_{\beta} A^{(\beta')}_{(\alpha)} A^{(\sigma)}_{(\alpha')} & A^{(\beta')}_{(\alpha)} A^{(\beta)}_{(\alpha')} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

şeklindeki bileşenlerine sahiptir. Burada $I = (\overline{\alpha}, \alpha, \overline{\overline{\alpha}})$, $J = (\overline{\beta}, \beta, \overline{\overline{\beta}})$, $I, J, \ldots = 1, \ldots, 2n + n^{p+q}$,

$t^{(\alpha)}_{(\sigma)} = t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\sigma_1\ldots\sigma_q}$, $A^{\alpha'}_{\beta} = \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}$, $A^{\beta}_{\alpha'} = \dfrac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}$, $A^{\sigma}_{\beta'\alpha'} = \dfrac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}}$ ile tanımlıdır(Yıldırım 2018b).

(4.2) de belirtilen matris için

$$Det(A^{\beta'}_{\alpha}) \neq 0,\ Det(A^{\alpha'}_{\beta}) \neq 0,\ Det(A^{(\beta')}_{(\alpha)} A^{(\beta)}_{(\alpha')}) \neq 0$$

olduğundan $Det\overline{A} \neq 0$ dır.

Ayrıca $\dim t^{p}_{q}(M_n) = 2n + n^{p+q}$ olmaktadır.

$\begin{array}{ccc} t^{p}_{q}(M_n) & \xrightarrow{\pi_2} & T^{*}(M_n) \\ {}^{id}\downarrow & & \downarrow{}^{\pi_1} \\ t^{p}_{q}(M_n) & \xrightarrow[\pi]{} & M_n \end{array}$	$\begin{array}{ccc} T^{*}(M_n) \times \left(T^{p}_{q}\right)_X (M_n) & \xrightarrow{\pi_2} & T^{*}(M_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^{*}(M_n) \times \left(T^{p}_{q}\right)_X (M_n) & \xrightarrow[\pi]{} & M_n \end{array}$	$\begin{array}{ccc} (x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}, x^{\overline{\overline{\alpha}}}) & \xrightarrow{\pi_2} & \left(x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}, x^{\overline{\overline{\alpha}}}) & \xrightarrow[\pi]{} & \left(x^{\alpha}\right) \end{array}$

$F(T^*(M_n))$ ve $F(M_n)$, $T^*(M_n)$ ve M_n üzerindeki $C^{\infty}-$sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere, $T^*(M_n)$ ve M_n üzerindeki (p,q) tipli tüm tensör alanlarının $F(T^*(M_n))$ ve $F(M_n)$ üzerindeki modülü sırasıyla $\Im^{p}_{q}(T^*(M_n))$ ve $\Im^{p}_{q}(M_n)$ ile gösterilir (Yıldırım 2018b).

Tensör alanlarının dikey liftleri ve $\gamma -$ operatörü

$A \in \Im_q^p(T^*(M_n))$ olmak üzere ${}^{vv}A$ vektör alanı

$$ {}^{vv}A = \begin{pmatrix} {}^{vv}A^{\bar{\alpha}} \\ {}^{vv}A^{\alpha} \\ {}^{vv}A^{\bar{\bar{\alpha}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \end{pmatrix}, \tag{4.3} $$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. (4.2) ve (4.3)'den ${}^{vv}A' = \bar{A}\left({}^{vv}A\right)$ olduğu gösterilebilir. ${}^{vv}A \in \Im_0^1(t_q^p(M_n))$ vektör alanı $A \in \Im_q^p(T^*(M_n))$ nın $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetine dikey lifti denir.

$\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere $\pi^{-1}(U)$ daki $\gamma\varphi$ vektör alanı $t_q^p(M_n)$ üzerindeki $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$ \begin{cases} \gamma\varphi = \left(\sum_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p} \varphi_{\varepsilon}^{\alpha_\lambda} \right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{\bar{\beta}}}}, & (p \geq 1, q \geq 0) \\ \tilde{\gamma}\varphi = \left(\sum_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \varphi_{\beta_\mu}^{\varepsilon} \right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{\bar{\beta}}}}, & (p \geq 0, q \geq 1) \end{cases} \tag{4.4} $$

bileşenlerine sahiptir. (4.2) den $\gamma\varphi$ ve $\tilde{\gamma}\varphi$ vektör alanlarının her bir $\pi^{-1}(U) \subset t_q^p(M_n)$ da dikey vektör alanları tanımlar. $\gamma\varphi$ (veya $\tilde{\gamma}\varphi$), $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ tensör alanının $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetine dikey-vektör lifti olarak adlandırılır (Yıldırım 2018b).

Keyfi $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ için, (4.2) ve (4.4) 'den, $(\gamma\varphi)' = \bar{A}(\gamma\varphi)$ olduğu gösterilebilir. Burada $\gamma\varphi$ vektör alanı

$$ \gamma\varphi = (\gamma\varphi)^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p} \varphi_{\varepsilon}^{\alpha_\lambda} \end{pmatrix} \tag{4.5} $$

ile tanımlıdır. $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere $\tilde{\gamma}\varphi$

$$\tilde{\gamma}\varphi=\left(\tilde{\gamma}\varphi\right)^{I}=\begin{pmatrix}0\\0\\\sum_{\mu=1}^{q}t_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\varphi_{\beta_\mu}^{\varepsilon}\end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

bileşenlerine sahiptir. (4.2) kullanılarak $\left(\tilde{\gamma}\varphi\right)'=\overline{A}\left(\tilde{\gamma}\varphi\right)$ olduğu gösterilebilir.

Keyfi $\varphi\in\Im_1^1(T^*(M_n))$ için, $\gamma\varphi$ vektör alanı $(x^{\overline{\beta}},x^{\beta},x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$\gamma\varphi=\begin{pmatrix}-p_\sigma F_\beta^\sigma\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

bileşenlerine sahiptir. (4.2) kullanılarak $(\gamma\varphi)'=\overline{A}(\gamma\varphi)$ olduğu gösterilebilir (Yıldırım 2018b).

Vektör alanlarının tam lifti

$X\in\Im_0^1(T^*(M_n))$, $X=X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ olmak üzere X vektör alanının kotanjant demete ${}^{c}X$ tam lifti

$${}^{c}X=X^{\alpha}\partial_{\alpha}-p_{\beta}(\partial_{\alpha}X^{\beta})\partial_{\overline{\alpha}}$$

ile tanımlıdır (Yano & Ishihara 1973).

Keyfi $X\in\Im_0^1(T^*(M_n))$ için, ${}^{cc}X$ vektör alanı $(x^{\overline{\beta}},x^{\beta},x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$${}^{cc}X=\begin{pmatrix}{}^{cc}X^{\overline{\beta}}\\{}^{cc}X^{\beta}\\{}^{cc}X^{\overline{\overline{\beta}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})\\X^{\beta}\\\sum_{\lambda=1}^{p}t_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda}-\sum_{\mu=1}^{q}t_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon}\end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

bileşenlerine sahiptir. (4.2)’den ${}^{cc}X'=\overline{A}({}^{cc}X)$ olduğu gösterilebilir. ${}^{cc}X$ vektör alanına ${}^{c}X\in\Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanının $t_q^p(M_n)$ e tam lifti denir (Yıldırım 2018b).

Vektör alanlarının yatay lifti

Keyfi $X \in \Im_0^1(T^*(M_n))$, $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ için ${}^{HH}X \in \Im_0^1(t_q^p(M_n))$ vektör alanı $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$
{}^{HH}X = \begin{pmatrix} X^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta} \\ X^{\beta} \\ X^{l}\left(\sum_{\mu=1}^{q}\Gamma_{l\beta_\mu}^{\varepsilon} t_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} - \sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma_{l\varepsilon}^{\alpha_\lambda} t_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}\right) \end{pmatrix}, \tag{4.9}
$$

bileşenlerine sahiptir. (4.2)'den ${}^{HH}X' = \overline{A}\left({}^{HH}X\right)$ olduğu gösterilebilir. ${}^{HH}X$ vektör alanına X vektör alanının $t_q^p(M_n)$ e yatay lifti denir. Burada

$$
\Gamma_{\alpha\beta} = p_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha\beta}^{\varepsilon}
$$

ile tanımlıdır (Yıldırım 2018b).

$\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demeti üzerindeki $\tilde{\gamma}\varphi \in \Im_0^1(t_q^p(M_n))$ vektör alanı $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$
\tilde{\gamma}\varphi = \left(\tilde{\gamma}\varphi\right)^{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\varphi_{\beta_\mu}^{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{4.10}
$$

bileşenlerine sahiptir. (4.2) kullanılarak $\left(\tilde{\gamma}\varphi\right)' = \overline{A}\left(\tilde{\gamma}\varphi\right)$ olduğu gösterilebilir. Burada $\varphi_{\beta_\mu}^{\varepsilon}$ ile φ nin lokal bileşenleri gösterilmiştir.

Teorem 4.1.3.1. $X \in \Im_0^1(T^*(M_n))$ olmak üzere

$$
{}^{cc}X - {}^{HH}X = \gamma(\hat{\nabla}X) - \tilde{\gamma}(\hat{\nabla}X) + \gamma(\nabla X),
$$

eşitliği bulunmaktadır. Burada $\hat{\nabla}$ simetrik afin konneksiyonu $\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\theta}=\Gamma^{\alpha}_{\theta\beta}$ ile tanımlıdır (Yıldırım 2018b).

İspat. (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) ve (4.9)'dan

$$
{}^{cc}X-{}^{HH}X=\begin{pmatrix} -p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon}) \\ X^{\beta} \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda}-\sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} p_{\varepsilon}X^{\alpha}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \\ X^{\beta} \\ X^{l}(\sum\limits_{\mu=1}^{q}\Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}-\sum\limits_{\lambda=1}^{p}\Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}) \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} -p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})-p_{\varepsilon}X^{\alpha}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \\ 0 \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda}+\Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon}X^{l})-\sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}(\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon}+\Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu}X^{l}) \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda}+\Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon}X^{l}\right) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}\left(\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon}+\Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu}X^{l}\right) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -p_{\varepsilon}\left(\partial_{\beta}X^{\varepsilon}+X^{\alpha}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\underbrace{(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda}+\hat{\Gamma}^{\alpha_\lambda}_{\varepsilon l}X^{l})}_{\hat{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{X}^{\alpha_\lambda}} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}\underbrace{(\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon}+\hat{\Gamma}^{\varepsilon}_{\beta_\mu l}X^{l})}_{\hat{\nabla}_{\beta_\mu}\widetilde{X}^{\varepsilon}} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -p_{\varepsilon}\left(\underbrace{\partial_{\beta}X^{\varepsilon}+X^{\alpha}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}}_{\nabla_{\beta}X^{\varepsilon}}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\left(\hat{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{X}^{\alpha_\lambda}\right) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}\left(\hat{\nabla}_{\beta_\mu}\widetilde{X}^{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -p_{\varepsilon}\left(\nabla_{\beta}X^{\varepsilon}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\gamma(\hat{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{X}^{\alpha_\lambda})-\tilde{\gamma}\left(\hat{\nabla}_{\beta_\mu}\widetilde{X}^{\varepsilon}\right)+\gamma\left(\nabla_{\beta}X^{\varepsilon}\right)=\gamma(\hat{\nabla}X)-\tilde{\gamma}(\hat{\nabla}X)+\gamma(\nabla X),
$$

bulunur (Yıldırım 2018b).

Yarı-tensör demette kesitler

$\xi \in \Im_q^p(M_n)$, M_n manifoldu üzerinde bir (p,q) tipli tensör alanı olmak üzere, $x \to \xi_x$ dönüşümü ($\xi_x ; x \in T^*(M_n)$ noktasındaki ξ değerini belirtir) yarı-tensör demetin β_ξ kesitini tanımlar. $\sigma_\xi : M_n \to T_q^p(M_n)$ ile $\left(T_q^p(M_n), \tilde{\pi}, M_n\right)$ tensör demetinin kesiti tanımlanmak üzere $\tilde{\pi} \circ \sigma_\xi = I_{(M_n)}$ eşitliği elde edilir. $\left(t_q^p(M_n), \pi_2, T^*(M_n)\right)$ yarı-tensör demetinin $\beta_\xi : T^*(M_n) \to t_q^p(M_n)$ kesiti:

$$\beta_\xi\left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha\right) = \left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, \sigma_\xi \circ \pi_1\left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha\right)\right) = \left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, \sigma_\xi\left(x^\alpha\right)\right) = \left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, \xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\left(x^\beta\right)\right)$$

ile tanımlıdır (Isham 1999; Husemoller 1994; Lawson & Michelsohn 1989; Yano & Ishihara 1973).

ξ tensör alanı $\xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\left(x^\beta\right)$ bileşenlerine sahip olmak üzere $x^B = (x^{\bar{\beta}}, x^\beta, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $\beta_\xi\left(T^*(M_n)\right)$ kesiti

$$\begin{cases} x^{\bar{\beta}} = p_\beta = \theta_\beta\left(x^\alpha\right), \\ x^\beta = x^\beta, \\ x^{\bar{\bar{\beta}}} = \xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\left(x^\alpha\right), \end{cases} \tag{4.11}$$

ile tanımlıdır (Yıldırım 2018b). $x^{\bar{\alpha}} = p_\alpha$ lar değişkenler olarak alınırsa, $x^{\bar{\alpha}} = p_\alpha$ ların (4.11)'a göre diferensiyeli alınarak bileşenleri

$$B_{(\bar{\theta})} = \frac{\partial x^B}{\partial x^{\bar{\theta}}} = \partial_{\bar{\theta}} x^B = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{\theta}} \theta_\beta \\ \partial_{\bar{\theta}} x^\beta \\ \partial_{\bar{\theta}} \xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \end{pmatrix},$$

şeklinde olan $B_{(\bar{\theta})}$, $(\bar{\theta} = 1, \ldots, n)$ vektör alanları elde edilir.

Buradaki $B_{(\bar{\theta})}$ vektör alanları $\beta_\xi\left(T^*(M_n)\right)$ kesitine teğettir. $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\bar{\beta}}, x^\beta, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $B_{(\bar{\theta})}$ nin bileşenleri,

$$B_{(\overline{\theta})} : \left(B^{B}_{(\overline{\theta})} \right) = \begin{pmatrix} \delta^{\theta}_{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

biçimindedir. Burada

$$\delta^{\theta}_{\beta} = A^{\theta}_{\beta} = \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x^{\beta}}$$

eşitliği elde edilmektedir.

$\omega \in \Im^{0}_{1}\left(M_n\right)$, $\omega = \omega_{\beta} dx^{\beta}$ olmak üzere $B\omega$ vektör alanının $t^{p}_{q}(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$B\omega : \left(B^{B}_{(\overline{\theta})} \omega_{\theta} \right) = \begin{pmatrix} \omega_{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

ile tanımlıdır (Yıldırım 2018b).

$$\begin{cases} x^{\overline{\beta}} = p_{\beta} = sabit, \\ x^{\overline{\overline{\beta}}} = \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \left(x^{\alpha} \right) = sabit, \\ x^{\beta} = x^{\beta}, \end{cases}$$

olmak üzere; x^{θ} ları değişkenler olarak kabul edersek (4.11)'a göre x^{θ} ların diferensiyeli alınarak bileşenleri

$$C_{(\theta)} = \frac{\partial x^{B}}{\partial x^{\theta}} = \partial_{\theta} x^{B} = \begin{pmatrix} \partial_{\theta} \theta_{\beta} \\ \partial_{\theta} x^{\beta} \\ \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix},$$

şeklinde olan $C_{(\theta)}$, $(\theta = n+1, \ldots, 2n)$ vektör alanları elde edilir. Burada $C_{(\theta)}$ vektör alanları $\beta_{\xi}\left(T^{*}(M_n)\right)$ kesitine teğettir. $t^{p}_{q}(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $C_{(\theta)}$ nın bileşenleri,

$$C_{(\theta)} : \left(C^{B}_{(\theta)} \right) = \begin{pmatrix} \partial_{\theta} \theta_{\beta} \\ \delta^{\beta}_{\theta} \\ \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix},$$

biçimindedir. Burada

$$\delta^{\beta}_{\theta} = A^{\beta}_{\theta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\theta}}$$

eşitliği geçerlidir.

$X \in \Im^{1}_{0}\left(T^{*}(M_n)\right)$ olmak üzere CX vektör alanının $t^{p}_{q}(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$CX : \left(C^{B}_{(\theta)} X^{\theta} \right) = \begin{pmatrix} X^{\theta} \partial_{\theta} \theta_{\beta} \\ X^{\beta} \\ X^{\theta} \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

ile tanımlıdır (Yıldırım 2018b).

$$\begin{cases} x^{\overline{\beta}} = p_{\beta} = sabit, \\ x^{\beta} = x^{\beta} = sabit, \\ x^{\overline{\overline{\beta}}} = \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\left(x^{\alpha}\right), \end{cases}$$

olmak üzere, $t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$ lar değişkenler olarak kabul edilip $x^{\overline{\overline{\beta}}} = t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$ e göre diferensiyeli alındığında bileşenleri

$$E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)} : \left(E^{B}_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)} \right) = \partial_{\overline{\overline{\theta}}} x^{B} = \begin{pmatrix} \partial_{\overline{\overline{\theta}}} \theta_{\beta} \\ \partial_{\overline{\overline{\theta}}} x^{\beta} \\ \partial_{\overline{\overline{\theta}}} t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta^{\theta_1}_{\beta_1} \ldots \delta^{\theta_q}_{\beta_q} \delta^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots \delta^{\alpha_p}_{\gamma_p} \end{pmatrix}$$

şeklinde olan $E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}$ $(\overline{\theta} = 2n+1, \ldots, 2n + n^{p+q})$ vektör alanları elde edilir. $E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}$ vektör alanları $T^{p}_{q}(M_n)$ tensör demetinin fibresine teğet olup burada δ, Kronecker sembolüdür:

$$\delta^{\theta_1}_{\beta_1} = \frac{\partial x^{\theta_1}}{\partial x^{\beta_1}} .$$

ξ, M_n üzerinde (p,q) tipli

$$\xi = \xi^{\gamma_1 \dots \gamma_p}_{\theta_1 \dots \theta_q} dx^{\theta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\theta_q} \otimes \partial_{\gamma_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\gamma_p}$$

ile tanımlı bir tensör alanı olmak üzere $T^p_q(M_n)$ tensör demetinin fibresine teğet olan $E\xi$ vektör alanı

$$E\xi : \left(E^B_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)} \xi^{\gamma_1 \dots \gamma_p}_{\theta_1 \dots \theta_q} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

ile tanımlıdır (Yıldırım 2018b).

Teorem 4.1.4.1. $\psi, \omega \in \Im^0_1(M_n)$ olmak üzere

$$\left[B\psi, B\omega \right] = 0$$

eşitliği geçerlidir. (Yıldırım 2018b).

İspat. Keyfi $\psi, \omega \in \Im^0_1(M_n)$ kovektör alanları için $\left(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}} \right)$ koordinatlarına göre $t^p_q(M_n)$ üzerinde tanımlı $\left[B\psi, B\omega \right]$ 'nin bileşenleri $\begin{pmatrix} \left[B\psi, B\omega \right]^{\overline{\beta}} \\ \left[B\psi, B\omega \right]^{\beta} \\ \left[B\psi, B\omega \right]^{\overline{\overline{\beta}}} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left[B\psi, B\omega \right]^J &= \psi^I \partial_I \omega^J - \omega^I \partial_I \psi^J \\ &= \psi^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} \omega^J + \psi^{\alpha} \partial_{\alpha} \omega^J + \psi^{\overline{\overline{\alpha}}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} \omega^J - \omega^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} \psi^J - \omega^{\alpha} \partial_{\alpha} \psi^J - \omega^{\overline{\overline{\alpha}}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} \psi^J \\ &= \psi_{\alpha} \partial_{\overline{\alpha}} \omega^J - \omega_{\alpha} \partial_{\overline{\alpha}} \psi^J \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada (4.12) ifadesi kullanılarak, $J = \overline{\beta}$ için

$$\left[B\psi, B\omega \right]^{\overline{\beta}} = \psi_{\alpha} \partial_{\overline{\alpha}} \omega^{\overline{\beta}} - \omega_{\alpha} \partial_{\overline{\alpha}} \psi^{\overline{\beta}}$$

$$= \psi_\alpha \partial_{\bar\alpha} \omega_\beta - \omega_\alpha \partial_{\bar\alpha} \psi_\beta$$

$$= 0$$

$J = \beta$ için

$$\left[B\psi, B\omega\right]^\beta = \psi_\alpha \partial_{\bar\alpha} \omega^\beta - \omega_\alpha \partial_{\bar\alpha} \psi^\beta$$

$$= 0$$

$J = \overline{\overline{\beta}}$ için

$$\left[B\psi, B\omega\right]^{\overline{\overline{\beta}}} = \psi_\alpha \partial_{\bar\alpha} \omega^{\overline{\overline{\beta}}} - \omega_\alpha \partial_{\bar\alpha} \psi^{\overline{\overline{\beta}}}$$

$$= 0$$

bulunur. Böylece $\left[B\psi, B\omega\right] = 0$ eşitliği ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.4.2. X, $T^*(M_n)$ üzerinde bir vektör alanı olmak üzere, $\beta_\xi(T^*(M_n))$ kesiti boyunca

$$^{cc}X = -B(L_x\theta) + CX + E(-L_X\xi),$$

eşitliği geçerlidir. Burada θ ya göre X in Lie türevlemesi $L_x\theta$ ile, X e göre ξ nin Lie türevlemesi ise $L_x\xi$ ile gösterilmiştir (Yıldırım 2018b).

İspat. (4.8), (4.12), (4.13) ve (4.14) ifadeleri kullanılarak,

$$-B(L_X\theta) + CX + E(L_X\xi) = -\begin{pmatrix} X^\theta \partial_\theta \theta_\beta + \theta_\theta \partial_\beta X^\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X^\theta \partial_\theta \theta_\beta \\ X^\beta \\ X^\theta \partial_\theta \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -X^\theta \partial_\theta \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} - \sum_{\lambda=1}^{p} \partial_{\beta_\mu} X^\beta \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta \ldots \beta_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \partial_\beta X^{\alpha_\lambda} \xi^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} -\theta_{\theta}(\partial_{\beta} X^{\theta}) \\ X^{\beta} \\ -\sum_{\lambda=1}^{p} \partial_{\beta_{\mu}} X^{\beta} \xi_{\beta_1 \ldots \beta \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_P} + \sum_{\lambda=1}^{p} \partial_{\beta} X^{\alpha_{\lambda}} \xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_P} \end{pmatrix}
$$

$$
= {}^{cc}X
$$

bulunur.

$C_{(\overline{\overline{\beta}})} = E_{(\overline{\overline{\beta}})}$ eşitliği var olup $\beta_{\xi}(T^*(M_n))$ kesiti boyunca adapte olunmuş çatı $\left\{B_{(\overline{\beta})}, C_{(\beta)}, C_{(\overline{\overline{\beta}})}\right\}$ üçlüsü ile gösterilecektir. $\beta_{\xi}(T^*(M_n))$ kesiti boyunca adapte olunmuş $\left\{B_{(\overline{\beta})}, C_{(\beta)}, C_{(\overline{\overline{\beta}})}\right\}$ çatısının belirtmiş olduğu matris

$$
\left(\widetilde{A}\right) = \left(\widetilde{A}_B^A\right) = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha}^{\beta} & \partial_{\beta}\theta_{\alpha} & 0 \\ 0 & \delta_{\beta}^{\alpha} & 0 \\ 0 & \partial_{\beta}\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{\sigma_1 \ldots \sigma_p} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \delta_{\alpha_q}^{\beta_q} \delta_{\gamma_1}^{\sigma_1} \ldots \delta_{\gamma_p}^{\sigma_p} \end{pmatrix}, \tag{4.15}
$$

şeklinde olup, burada $\widetilde{A}$ matrisi singüler değildir. Regüler (tersinir) olan $\widetilde{A}$ matrisinin $(\widetilde{A})^{-1}$ ters matrisi

$$
\left(\widetilde{A}\right)^{-1} = \left(\widetilde{A}_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_{\beta}^{\theta} & -\partial_{\theta}\theta_{\beta} & 0 \\ 0 & \delta_{\theta}^{\beta} & 0 \\ 0 & -\partial_{\theta}\xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\sigma_1 \ldots \sigma_p} & \delta_{\beta_1}^{\theta_1} \ldots \delta_{\beta_q}^{\theta_q} \delta_{\gamma_1}^{\sigma_1} \ldots \delta_{\gamma_q}^{\sigma_p} \end{pmatrix} \tag{4.16}
$$

bileşenlerine sahiptir. Dolayısıyla burada

$$
\widetilde{A}(\widetilde{A})^{-1} = (\widetilde{A}_B^A)(\widetilde{A}_C^B)^{-1} = \delta_C^A = \tilde{I}
$$

eşitliği geçerli olup $A = \left(\overline{\alpha}, \alpha, \overline{\overline{\alpha}}\right)$, $B = \left(\overline{\beta}, \beta, \overline{\overline{\beta}}\right)$, $C = \left(\overline{\theta}, \theta, \overline{\overline{\theta}}\right)$ ile tanımlıdır (Yıldırım 2018b).

İspat. (4.15) ve (4.16) ifadeleri kullanılarak,

$$
\widetilde{A}\left(\widetilde{A}\right)^{-1} = (\widetilde{A}_B^A)\left(\widetilde{A}_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha}^{\beta} & \partial_{\beta}\theta_{\alpha} & 0 \\ 0 & \delta_{\beta}^{\alpha} & 0 \\ 0 & \partial_{\beta}\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{\sigma_1 \ldots \sigma_p} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \delta_{\alpha_q}^{\beta_q} \delta_{\gamma_1}^{\sigma_1} \ldots \delta_{\gamma_p}^{\sigma_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\beta}^{\theta} & -\partial_{\theta}\theta_{\beta} & 0 \\ 0 & \delta_{\theta}^{\beta} & 0 \\ 0 & -\partial_{\theta}\xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\sigma_1 \ldots \sigma_p} & \delta_{\beta_1}^{\theta_1} \ldots \delta_{\beta_q}^{\theta_q} \delta_{\gamma_1}^{\sigma_1} \ldots \delta_{\gamma_q}^{\sigma_p} \end{pmatrix}
$$

$$=\begin{pmatrix} \delta_\alpha^\theta & \partial_\theta\theta_\alpha-\partial_\theta\theta_\alpha & 0 \\ 0 & \delta_\theta^\alpha & 0 \\ 0 & \partial_\theta\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p}-\partial_\theta\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p} & \delta_{\alpha_1}^{\theta_1}\ldots\delta_{\alpha_q}^{\theta_q} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \delta_\alpha^\theta & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\theta^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\alpha^\theta \end{pmatrix}=\delta_C^A=\tilde{I}\,.$$

eşitliği bulunur.

Teorem 4.1.4.2'den, M_n üzerinde $X\in\Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanının ${}^{cc}X$ tam liftinin $\beta_\xi\left(T^*(M_n)\right)$ kesiti boyunca $\left\{B_{(\bar\beta)},C_{(\beta)},C_{(\bar{\bar\beta})}\right\}$ adapte olunmuş çatısına göre bileşenleri

$${}^{cc}X:\begin{pmatrix} L_X\theta \\ X \\ -L_X\xi \end{pmatrix},$$

ile tanımlanır.

Keyfi $A\in\Im_q^p(T^*(M_n))$ tensör alanı için (4.3) ve (4.15) ifadeleri dikkate alınırsa ${}^{vv}A'=\widetilde{A}({}^{vv}A)$ olduğu görülür. Burada ${}^{vv}A\in\Im_0^1(t_q^p(M_n))$ vektör alanı, $\left\{B_{(\bar\beta)},C_{(\beta)},C_{(\bar{\bar\beta})}\right\}$ adapte olmuş çatısında $\beta_\xi\left(T^*(M_n)\right)$ kesiti boyunca,

$${}^{vv}A=\begin{pmatrix} {}^{vv}A^{\bar\alpha} \\ {}^{vv}A^{\alpha} \\ {}^{vv}A^{\bar{\bar\alpha}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir (Yıldırım 2018b).

$B\omega$, CX ve $E\xi$; $T^*(M_n)$ deki $\beta_\xi\left(T^*(M_n)\right)$ kesiti boyunca $\left\{B_{(\bar\beta)},C_{(\beta)},C_{(\bar{\bar\beta})}\right\}$ adapte olunmuş çatısına göre sırasıyla

$$B\omega=\begin{pmatrix} \omega_\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; CX=\begin{pmatrix} 0 \\ X^\alpha \\ 0 \end{pmatrix},\; E\xi=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada ξ; (p,q) tipli bir tensör alanıdır (Yıldırım 2018b).

Keyfi $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ için $\overline{\gamma\varphi}$ vektör alanı $(x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}, x^{\overline{\overline{\alpha}}})$ koordinatlarına göre

$$\overline{\gamma\varphi} = \left(\overline{\gamma\varphi}\right)^I = \begin{pmatrix} -p_\sigma \varphi_\alpha^\sigma \\ 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p} \varphi_\varepsilon^{\alpha_\lambda} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada $(\overline{\gamma\varphi})' = \overline{A}(\overline{\gamma\varphi})$ olduğu (4.2) yardımıyla kolaylıkla ispatlanabilir. Burada $\varphi_\varepsilon^{\alpha_\lambda}$ ler φ afinor alanının lokal koordinatlarıdır.

$t_q^p(M_n)$ yarı tensör demetinde $f \in \Im_0^0(M_n)$ fonksiyonunun ${}^{vv}f$ dikey lifti (Yıldırım 2017b):

$${}^{vv}f = {}^{v}f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi \tag{4.18}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 4.1.4.3. $T^*(M_n)$ üzerinde tanımlı X vektör alanı ile $f \in \Im_0^0(M_n)$ için

$${}^{HH}X \, {}^{vv}f = {}^{vv}(Xf)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $X \in \Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanı olmak üzere (4.3), (4.9) ve (4.18) ifadeleri kullanılarak

$${}^{HH}X \, {}^{vv}f = {}^{HH}X^I \partial_I({}^{vv}f)$$

$$\begin{aligned} {}^{HH}X \, {}^{vv}f &= {}^{HH}X^{\overline{\alpha}} \underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}({}^{vv}f)}_{0} + {}^{HH}X^{\alpha} \partial_\alpha({}^{vv}f) + {}^{HH}X^{\overline{\overline{\alpha}}} \underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}({}^{vv}f)}_{0} \\ &= X^\alpha \partial_\alpha \left({}^{vv}f\right) \\ &= {}^{vv}(Xf) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1.4.4. $X \in \Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanı olmak üzere Lie çarpımı kullanılarak keyfi $A \in \Im_q^p(M_n)$ tensör alanı için

$$[{}^{HH}X, {}^{vv}A] = {}^{vv}\left(\nabla_X A\right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Keyfi $X \in \Im_0^1(T^*(M_n))$ ve $A \in \Im_q^p(M_n)$ için $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t_q^p(M_n)$ üzerinde tanımlı $[{}^{HH}X, {}^{vv}A]^J$ vektör alanının bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{HH}X, {}^{vv}A]^{\overline{\beta}} \\ [{}^{HH}X, {}^{vv}A]^{\beta} \\ [{}^{HH}X, {}^{vv}A]^{\overline{\overline{\beta}}} \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.3) ve (4.9) 'dan

$$[{}^{HH}X, {}^{vv}A]^J = ({}^{HH}X)^I \partial_I ({}^{vv}A)^J - ({}^{vv}A)^I \partial_I ({}^{HH}X)^J$$

$$= \left({}^{HH}X\right)^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} ({}^{vv}A)^J + \left({}^{HH}X\right)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{vv}A)^J + \left({}^{HH}X\right)^{\overline{\overline{\alpha}}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} ({}^{vv}A)^J$$

$$- \underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\alpha}}}_{0} \partial_{\overline{\alpha}} ({}^{HH}X)^J - \underbrace{({}^{vv}A)^{\alpha}}_{0} \partial_{\alpha} ({}^{HH}X)^J - ({}^{vv}A)^{\overline{\overline{\alpha}}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} ({}^{HH}X)^J$$

$$= \left({}^{HH}X\right)^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} ({}^{vv}A)^J + \left({}^{HH}X\right)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{vv}A)^J$$

$$+ \left({}^{HH}X\right)^{\overline{\overline{\alpha}}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} ({}^{vv}A)^J - ({}^{vv}A)^{\overline{\overline{\alpha}}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} ({}^{HH}X)^J$$

elde edilir. Burada (4.3) ve (4.9) kullanılarak, $J = \overline{\beta}$ için

$$[{}^{HH}X, {}^{vv}A]^{\overline{\beta}} = \left({}^{HH}X\right)^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} \underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\beta}}}_{0} + \left({}^{HH}X\right)^{\alpha} \partial_{\alpha} \underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\beta}}}_{0}$$

$$+ \left({}^{HH}X\right)^{\overline{\overline{\alpha}}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} \underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\beta}}}_{0} - \underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\overline{\alpha}}}}_{A^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} \underbrace{({}^{HH}X)^{\overline{\beta}}}_{p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}}$$

$$= -A^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}} p_{\varepsilon}}_{0} X^{\beta} \Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}$$

$$= 0$$

bulunur. $J = \beta$ için

$$[{}^{HH}X, {}^{vv}A]^{\beta} = \left({}^{HH}X\right)^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} \underbrace{({}^{vv}A)^{\beta}}_{0} + \left({}^{HH}X\right)^{\alpha} \partial_{\alpha} \underbrace{({}^{vv}A)^{\beta}}_{0}$$

$$+ \left({}^{HH}X\right)^{\overline{\overline{\alpha}}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} \underbrace{({}^{vv}A)^{\beta}}_{0} - \underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\overline{\alpha}}}}_{A^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} \underbrace{({}^{HH}X)^{\beta}}_{X^b}$$

$$= A^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}} X^{\beta}}_{0}$$

$$= 0$$

bulunur. $J=\overline{\overline{\beta}}$ için

$$[{}^{HH}X,{}^{vv}A]^{\overline{\overline{\beta}}}=\left({}^{HH}X\right)^{\overline{\alpha}}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}\underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\beta}}}_{A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}}}_{0}+\left({}^{HH}X\right)^{\alpha}\partial_{\alpha}\underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\beta}}}_{A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}}$$

$$+\left({}^{HH}X\right)^{\overline{\overline{\alpha}}}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}\underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\beta}}}_{A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}}}_{0}-\underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\overline{\alpha}}}}_{A^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_q}}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}({}^{HH}X)^{\overline{\overline{\beta}}}$$

$$=\left({}^{HH}X\right)^{\alpha}\partial_{\alpha}\underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\overline{\beta}}}}_{A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}}-\underbrace{({}^{vv}A)^{\overline{\overline{\alpha}}}}_{A^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_q}}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}({}^{HH}X)^{\overline{\overline{\beta}}}$$

$$=X^{\alpha}\partial_{\alpha}A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}-X^{\alpha}A^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_q}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}}_{A^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_p}\,A^{\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\beta_1\ldots\beta_q}}\sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}$$

$$+X^{\alpha}A^{\beta_1\ldots\beta_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_q}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}}_{A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_p}\,A^{\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}}\sum_{\mu=1}^{q}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu}$$

$$=X^{\alpha}\partial_{\alpha}A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}+X^{\alpha}A^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}-X^{\alpha}A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}\sum_{\mu=1}^{q}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu}$$

$$=X^{\alpha}(\partial_{\alpha}A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}+\sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}A^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}-\sum_{\mu=1}^{q}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu}A^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q})$$

$$=(\nabla_X A)^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$$

bulunur. $(x^{\overline{\beta}},x^{\beta},x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^p_q(M_n)$ yarı tensör demeti üzerindeki $\nabla_X A$ nın ${}^{vv}\left(\nabla_X A\right)$ dikey lifti

$${}^{vv}\left(\nabla_X A\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\(\nabla_X A)^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahip olup $[{}^{HH}X,{}^{vv}A]={}^{vv}\left(\nabla_X A\right)$ gösterilmiş olur.

∇ nın eğrilik tensörü $R\in\Im_3^1(M_n)$ ile gösterilmek üzere $R(X,Y)\in\Im_1^1(M_n)$, $(1,1)$ tipli tensör alanı $X,Y,Z\in\Im_0^1(M_n)$ için

$$R(X,Y)Z=\left[\nabla_X,\nabla_Y\right]Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

ile tanımlıdır.

(4.9)'dan Teorem 4.1.4.5 elde edilir.

Teorem 4.1.4.5. $X,Y\in\Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanları olmak üzere Lie çarpımı kullanılarak

$$[{}^{HH}X,{}^{HH}Y]={}^{HH}[X,Y]+(\tilde{\gamma}-\gamma)R(X,Y)$$

eşitliği elde edilir.

İspat. Keyfi $X,Y\in\Im_0^1(T^*(M_n))$ için $(x^{\overline{\beta}},x^{\beta},x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t_q^p(M_n)$ üzerinde tanımlı $[{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^J$ vektör alanının bileşenleri $\begin{pmatrix}[{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^{\overline{\beta}}\\ [{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^{\beta}\\ [{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^{\overline{\overline{\beta}}}\end{pmatrix}$ olmak üzere (4.9)'dan

$$[{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^J=({}^{HH}X)^I\partial_I({}^{HH}Y)^J-({}^{HH}Y)^I\partial_I({}^{HH}X)^J$$

yazılır. Burada (4.9) kullanılarak $J=\overline{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
[{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^{\overline{\beta}} &= ({}^{HH}X)^I\partial_I({}^{HH}Y)^{\overline{\beta}}-({}^{HH}Y)^I\partial_I({}^{HH}X)^{\overline{\beta}}\\
&= p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\overline{\alpha}}\,{}^{HH}Y^{\overline{\overline{\beta}}}+X^\alpha\partial_\alpha\,{}^{HH}Y^{\overline{\overline{\beta}}}-\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}\,{}^{HH}Y^{\overline{\overline{\beta}}}\\
&\quad -p_\varepsilon Y^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\overline{\alpha}}\,{}^{HH}X^{\overline{\overline{\beta}}}-Y^\alpha\partial_\alpha\,{}^{HH}X^{\overline{\overline{\beta}}}+\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}Y^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}\,{}^{HH}X^{\overline{\overline{\beta}}}\\
&= p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}p_\varepsilon}_{\delta_\varepsilon^\alpha}Y^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}+X^\alpha\partial_\alpha\left(p_\varepsilon Y^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}\right)-\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}p_\varepsilon}_{0}Y^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}\\
&\quad -p_\varepsilon Y^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}p_\varepsilon}_{\delta_\varepsilon^\alpha}X^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}-Y^\alpha\partial_\alpha\left(p_\varepsilon X^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}\right)\\
&\quad +\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}Y^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}p_\varepsilon}_{0}X^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}\\
&= p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}Y^\theta\Gamma_{\theta}{}^{\alpha}{}_{\beta}+X^\alpha\partial_\alpha(p_\varepsilon Y^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta})\\
&\quad -p_\varepsilon Y^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}X^\theta\Gamma_{\theta}{}^{\alpha}{}_{\beta}-Y^\alpha\partial_\alpha(p_\varepsilon X^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta})\\
&= p_\varepsilon X^\alpha Y^\theta\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\sigma}\Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\beta}+p_\varepsilon X^\alpha Y^\theta\partial_\alpha\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}+p_\varepsilon X^\alpha(\partial_\alpha Y^\alpha)\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}\\
&\quad -p_\varepsilon X^\alpha Y^\theta\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\sigma}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}-p_\varepsilon Y^\alpha X^\theta\partial_\alpha\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}-p_\varepsilon Y^\alpha(\partial_\alpha X^\alpha)\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}\\
&= [p_\varepsilon\underbrace{(X^\alpha(\partial_\alpha Y^\alpha)-Y^\alpha(\partial_\alpha X^\alpha))}_{[X,Y]^\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}]
\end{aligned}$$

$$+p_\varepsilon[\underbrace{X^\alpha Y^\theta(\partial_\alpha\Gamma_\theta{}^\varepsilon{}_\beta-\partial_\theta\Gamma_\alpha{}^\varepsilon{}_\beta+\Gamma_\alpha{}^\varepsilon{}_\sigma\Gamma_\theta{}^\sigma{}_\beta-\Gamma_\theta{}^\varepsilon{}_\sigma\Gamma_\alpha{}^\sigma{}_\beta)}_{(R(X,Y))^\varepsilon_\beta}]$$

$$=p_\varepsilon[X,Y]^\alpha\Gamma_\alpha{}^\varepsilon{}_\beta+p_\varepsilon(R(X,Y))^\varepsilon_\beta$$

bulunur. $J=\beta$ için

$$[{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^\beta=({}^{HH}X)^I\partial_I({}^{HH}Y)^\beta-({}^{HH}Y)^I\partial_I({}^{HH}X)^\beta$$

$$=\underbrace{({}^{HH}X)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}\underbrace{({}^{HH}Y)^\beta}_{Y^\beta}}_{0}+({}^{HH}X)^\alpha\partial_\alpha({}^{HH}Y)^\beta+\underbrace{({}^{HH}X)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}\underbrace{({}^{HH}Y)^\beta}_{Y^\beta}}_{0}$$

$$-\underbrace{({}^{HH}Y)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}\underbrace{({}^{HH}X)^\beta}_{X^\beta}}_{0}-({}^{HH}Y)^\alpha\partial_\alpha({}^{HH}X)^\beta-\underbrace{({}^{HH}Y)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}\underbrace{({}^{HH}X)^\beta}_{X^\beta}}_{0}$$

$$=({}^{HH}X)^\alpha\partial_\alpha({}^{HH}Y)^\beta-({}^{HH}Y)^\alpha\partial_\alpha({}^{HH}X)^\beta$$

$$=X^\alpha\partial_\alpha Y^\beta-Y^\alpha\partial_\alpha X^\beta$$

$$=[X,Y]^\beta$$

bulunur. $J=\bar{\bar\beta}$ için

$$[{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^{\bar{\bar\beta}}={}^{HH}X^I\partial_I({}^{HH}Y)^{\bar{\bar\beta}}-{}^{HH}Y^I\partial_I({}^{HH}X)^{\bar{\bar\beta}}$$

$$={}^{HH}X^{\bar\alpha}\underbrace{\partial_{\bar\alpha}{}^{HH}Y^{\bar{\bar\beta}}}_{0}+{}^{HH}X^\alpha\partial_\alpha{}^{HH}Y^{\bar{\bar\beta}}+{}^{HH}X^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}{}^{HH}Y^{\bar{\bar\beta}}$$

$$-{}^{HH}Y^{\bar\alpha}\underbrace{\partial_{\bar\alpha}{}^{HH}X^{\bar{\bar\beta}}}_{0}-{}^{HH}Y^\alpha\partial_\alpha{}^{HH}X^{\bar{\bar\beta}}-{}^{HH}Y^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}{}^{HH}X^{\bar{\bar\beta}}$$

$$=X^\alpha\partial_\alpha{}^{HH}Y^{\bar{\bar\beta}}-\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_\varepsilon{}^\alpha{}_{\beta_\lambda}X^{\beta_\lambda}\partial_{\bar{\bar\alpha}}{}^{HH}Y^{\bar{\bar\beta}}+\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^\sigma{}_\alpha\partial_{\bar{\bar\alpha}}{}^{HH}Y^{\bar{\bar\beta}}$$

$$-Y^\alpha\partial_\alpha{}^{HH}X^{\bar{\bar\beta}}+\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_\varepsilon{}^\alpha{}_{\beta_\lambda}Y^{\beta_\lambda}\partial_{\bar{\bar\alpha}}{}^{HH}X^{\bar{\bar\beta}}-\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}Y^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^\sigma{}_\alpha\partial_{\bar{\bar\alpha}}{}^{HH}X^{\bar{\bar\beta}}$$

$$=X^\alpha\partial_\alpha\left(\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}Y^\alpha\Gamma_\alpha{}^\sigma{}_{\beta_\mu}\right)-X^\alpha\partial_\alpha\left(\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_\varepsilon{}^{\beta_\lambda}{}_\alpha Y^\alpha\right)+\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_\varepsilon{}^\alpha{}_{\beta_\lambda}X^{\beta_\lambda}\underbrace{\partial_{\bar{\bar\alpha}}\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}}_{\delta^\varepsilon_\alpha}\Gamma_\varepsilon{}^{\beta_\lambda}{}_\alpha Y^\alpha$$

$$+\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^\sigma{}_\alpha\underbrace{\partial_{\bar{\bar\alpha}}\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}}_{\delta^\alpha_\sigma}Y^\alpha\Gamma_\alpha{}^\sigma{}_{\beta_\mu}-Y^\alpha\partial_\alpha\left(\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^\alpha\Gamma_\alpha{}^\sigma{}_{\beta_\mu}\right)$$

$$+Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}X^{\alpha}\right)-\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta_\lambda}Y^{\beta_\lambda}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}}_{\delta^{\varepsilon}_{\alpha}}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}X^{\alpha}$$

$$-\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}Y^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}}_{\delta^{\alpha}_{\sigma}}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu}$$

$$=-X^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}Y^{\alpha}\right)+\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}X^{\beta_\lambda}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}Y^{\theta}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta_\lambda}{}_{\theta}$$

$$+X^{\alpha}\partial_{\alpha}(\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}Y^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu})+\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^{\sigma}{}_{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\alpha}{}_{\beta_\mu}$$

$$+Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}X^{\alpha}\right)-\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}Y^{\beta_\lambda}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta_\lambda}X^{\theta}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta_\lambda}{}_{\theta}$$

$$-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}(\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu})-\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}Y^{\beta_\mu}\Gamma_{\beta_\mu}{}^{\sigma}{}_{\alpha}X^{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\alpha}{}_{\beta_\mu}$$

$$=-\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}X^{\alpha}\left(\partial_{\alpha}Y^{\alpha}\right)-\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}X^{\alpha}Y^{\theta}\partial_{\alpha}\Gamma_{\theta}{}^{\beta_\lambda}{}_{\varepsilon}$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}X^{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta_\lambda}{}_{\gamma}\Gamma_{\theta}{}^{\gamma}{}_{\varepsilon}+\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\alpha})\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\alpha}Y^{\theta}\partial_{\alpha}\Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu}+\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\gamma}\Gamma_{\theta}{}^{\gamma}{}_{\beta_\mu}$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}Y^{\alpha}\left(\partial_{\alpha}X^{\alpha}\right)+\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}X^{\alpha}Y^{\theta}\partial_{\theta}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta_\lambda}{}_{\varepsilon}$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}X^{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\beta_\lambda}{}_{\gamma}\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\varepsilon}-\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}Y^{\alpha}(\partial_{\alpha}X^{\alpha})\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu}$$

$$-\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}Y^{\alpha}X^{\theta}\partial_{\alpha}\Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu}-\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}X^{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\gamma}\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta_\mu}$$

$$=-\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta_\lambda}{}_{\alpha}\underbrace{\left(X^{\alpha}\left(\partial_{\alpha}Y^{\alpha}\right)-Y^{\alpha}\left(\partial_{\alpha}X^{\alpha}\right)\right)}_{[X,Y]^{\alpha}}+[\sum_{\mu=1}^{q}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}\underbrace{(X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\alpha})-Y^{\alpha}(\partial_{\alpha}X^{\alpha}))}_{[X,Y]^{\alpha}}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta_\mu}]$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{p}t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\underbrace{X^{\alpha}Y^{\theta}\left(\partial_{\alpha}\Gamma_{\theta}{}^{\beta_\lambda}{}_{\varepsilon}-\partial_{\theta}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta_\lambda}{}_{\varepsilon}+\Gamma_{\alpha}{}^{\beta_\lambda}{}_{\gamma}\Gamma_{\theta}{}^{\gamma}{}_{\varepsilon}-\Gamma_{\theta}{}^{\beta_\lambda}{}_{\gamma}\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\varepsilon}\right)}_{(R(X,Y))^{\beta_\lambda}_{\varepsilon}}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} \underbrace{X^\alpha Y^\theta (\partial_\alpha \Gamma_\theta{}^\sigma{}_{\beta_\mu} - \partial_\theta \Gamma_\alpha{}^\sigma{}_{\beta_\mu} + \Gamma_\alpha{}^\sigma{}_\gamma \Gamma_\theta{}^\gamma{}_{\beta_\mu} - \Gamma_\theta{}^\sigma{}_\gamma \Gamma_\alpha{}^\gamma{}_{\beta_\mu})}_{(R(X,Y))^\varepsilon_{\beta_\mu}}$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} \Gamma_\varepsilon{}^{\beta_\lambda}{}_\alpha [X,Y]^\alpha + \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} [X,Y]^\alpha \Gamma_\alpha{}^\sigma{}_{\beta_\mu}$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} (R(X,Y))^{\beta_\lambda}_\varepsilon + \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} (R(X,Y))^\sigma_{\beta_\mu}$$

$$= [X,Y]^\alpha \left(-\sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} \Gamma_\varepsilon{}^{\beta_\lambda}{}_\alpha + \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} \Gamma_\alpha{}^\sigma{}_{\beta_\mu} \right)$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} (R(X,Y))^{\beta_\lambda}_\varepsilon + \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} (R(X,Y))^\sigma_{\beta_\mu}$$

bulunur. (4.9), (4.10) ve (4.17) ifadeleri kullanılarak $(x^{\bar{\beta}}, x^\beta, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^p_q(M_n)$ yarı tensör demeti üzerindeki ${}^{HH}[X,Y] + (\tilde{\gamma} - \gamma) R(X,Y)$ vektör alanı

$${}^{HH}[X,Y] + (\tilde{\gamma} - \gamma) R(X,Y) = {}^{HH}[X,Y] + \tilde{\gamma} R(X,Y) - \gamma R(X,Y)$$

$$= \begin{pmatrix} p_\varepsilon [X,Y]^\alpha \Gamma_\alpha{}^\varepsilon{}_\beta \\ [X,Y]^\beta \\ [X,Y]^\alpha \left(\sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} \Gamma_\alpha{}^\sigma{}_{\beta_\mu} - \sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} \Gamma_\varepsilon{}^{\beta_\lambda}{}_\alpha \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} (R(X,Y))^\sigma_{\beta_\mu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p_\varepsilon (R(X,Y))^\varepsilon_\beta \\ 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} (R(X,Y))^{\beta_\lambda}_\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_\varepsilon [X,Y]^\alpha \Gamma_\alpha{}^\varepsilon{}_\beta \\ [X,Y]^\beta \\ [X,Y]^\alpha \left(\sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} \Gamma_\alpha{}^\sigma{}_{\beta_\mu} - \sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} \Gamma_\varepsilon{}^{\beta_\lambda}{}_\alpha \right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p_\varepsilon (R(X,Y))^\varepsilon_\beta \\ 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} (R(X,Y))^{\beta_\lambda}_\varepsilon - \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} (R(X,Y))^\sigma_{\beta_\mu} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_\varepsilon [X,Y]^\alpha \Gamma_\alpha{}^\varepsilon{}_\beta + p_\varepsilon (R(X,Y))^\varepsilon_\beta \\ [X,Y]^\beta \\ [X,Y]^\alpha \left(\sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} \Gamma_\alpha{}^\sigma{}_{\beta_\mu} - \sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} \Gamma_\varepsilon{}^{\beta_\lambda}{}_\alpha \right) - \sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} (R(X,Y))^{\beta_\lambda}_\varepsilon + \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q} (R(X,Y))^\sigma_{\beta_\mu} \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir. Böylece Teorem 4.1.4.5 ispatlanmış olur.

SONUÇ

(1) Yüksek Lisans tezi olarak sunulan bu çalışmada ilk olarak, M manifoldu üzerinde tanımlı T*M kotanjant demetin izdüşümü kullanılarak, (p,q) tipli tM yarı-tensör demeti tanımlandı ve bu yarı-tensör demetinin özel sınıfındaki vektör alanlarının yatay liftleri incelendi.

(2) Kotanjant demet izdüşümüyle tanımlanan yarı tensör demette alınan keyfi bir vektör alanı için

$$^{HH}X\,^{vv}f = {}^{vv}(Xf)$$

olduğu ispatlandı.

(3) Kotanjant demet izdüşümüyle tanımlanan yarı tensör demette alınan bir vektör alanı için Lie parantezi kullanılarak keyfi $A \in \Im_q^p(M_n)$ tensör alanı için

$$[^{HH}X, {}^{vv}A] = {}^{vv}\left(\nabla_X A\right)$$

olduğu doğrulandı.

(4) Kotanjant demet izdüşümüyle tanımlanan yarı tensör demette alınan iki keyfi vektör alanı için Lie parantezi kullanılarak

$$[^{HH}X, {}^{HH}Y] = {}^{HH}[X,Y] + \left(\tilde{\gamma} - \gamma\right)R(X,Y)$$

eşitliği elde edildi.

(5) T*M kotanjant demet izdüşümü kullanılarak elde edilen (p,q) tipli tM yarı-tensör demette bir kesit üzerinde (1,0) tipli tensör alanlarının bazı liftleri ve bu liftler arasındaki geometrik ilişkiler incelendi.

KAYNAKLAR

Bishop, R.L. and Goldberg S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, p.19-135, New York.

Cengiz, N and Salimov A., 2002. Complete lifts of derivations to tensor bundles. Bol. Soc. Mat. Mexicana, 8, no. 3, 75-82.

Fattaev H., 2009. The Lifts of Vector Fields to the Semi-tensor Bundle of the Type (2, 0). Journal of Qafqaz University, 25, no. 1, 136-140.

Gezer A. and Salimov A.A., 2008. Almost complex structures on the tensor bundles. Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci. 33, no. 2, 283–296.

Husemoller, D., 1994. Fibre Bundles. Springer, New York.

Isham, C.J.,1999. Modern differential geometry for physicist. World Scientific.

Kobayashi, S. and Nomizu K., 1963. Foundations of differential geometry. Vol. I, Interscience Publishers, New York-London.

Lawson, H.B. and Michelsohn, M.L., 1989. Spin Geometry. Princeton University Press., Princeton.

Ledger A.J. and Yano, K., 1967. Almost complex structure on tensor bundles. J. Dif. Geom., 1, 355-368.

Pontryagin, L.S. 1947., Characteristic cycles on differentiable manifolds. Rec. Math. Mat. Sbornik., 2, 233-284.

Salimov, A.A., 2013. Tensor Operators and their Applications. Nova Science Publ., New York.

Salimov, A.A. and Kadıoğlu E., 2000. Lifts of Derivations to the Semitangent Bundle. Turk J. Math, 24, 259-266. Ata Uni.

Salimov, A.A. ve Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi.

Steenrod, N., 1951. The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press., Princeton.

Şahin, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel Akademik Yayıncılık.

Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor fields. Kodai Math. Sem. Rep., 20, 414-436.

Yano, K. and Ishihara, S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker, Inc. New York.

Yıldırım, F. and Salimov, A., 2014. Semi-cotangent bundle and problems of lifts. Turk J. Math, 38, 325-339.

Yıldırım , F., Asl, M.B. and Jabrailzade, F., 2017. Vector and affinor fields on cross-sections in the semi-cotangent bundle. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, no. 2, 305-315.

Yıldırım , F., 2018. Horizontal lift in the semi-tensor bundle. Konuralp Journal of Mathematics, no. 2, 338-344

Yıldırım , F., 2018. On Semi-Tensor Bundle. International Electronic Journal Of Geometry, no.1, 93–99.

Yıldırım , F., 2018. Some notes on (2,0) semi-tensor bundle. Konuralp Journal of Mathematics, no.2, 246-252

Yıldırım , F., 2017. Note on the cross-section in the semi-tensor bundle. New Trends in Mathematical Sciences, no. 2, 212-221

Yıldırım, F., 2015. On a special class of semi-cotangent bundle. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, no.1, 25-38.

Yıldırım, F., 2017. A pull-Back bundle of tensor bundles defined by projection of the tangent bundle. Ordu University Journal of Science and Technology, 7 (2), 353-366.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Merve Gamze MAVİYILDIZ
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Gaziemir Nevvar Salih İşgören Anadolu Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümü
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	İyi