



**LİNEER DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEM
SİSTEMLERİNİN $\mathcal{H}_\infty$ KONTROLÜ**

Hasan GÜNDÜZ

Doktora Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Doç. Dr. Mesut KARABACAK

2023

(Her hakkı saklıdır)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**LİNEER DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN $\mathcal{H}_\infty$
KONTROLÜ**

($\mathcal{H}_\infty$ Control of Linear Differential-Algebraic Equations(DAEs) Systems)

DOKTORA TEZİ

Hasan GÜNDÜZ

Danışman: Doç. Dr. Mesut KARABACAK

Erzurum
Ağustos, 2023

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Hasan GÜNDÜZ tarafından hazırlanan "Lineer Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin $\mathcal{H}_\infty$ Kontrolü" başlıklı çalışması 21/08/2023 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalında doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Ercan ÇELİK <i>Kyrgyz-Turkish Manas University</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Danışman:	Doç. Dr. Mesut KARABACAK <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Sıdika Şule ŞENER KILIÇ <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Bilal NİŞANCI <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY <i>Kafkas Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır

Enstitü Yönetim Kurulunun
.../.../.... tarih ve sayılı
kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN

Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Doktora Tezi olarak Doç. Dr. Mesut KARABACAK danışmanlığında ve sunulan "Lineer Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin $\mathcal{H}_\infty$ Kontrolü" başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	12	30
Kuramsal Temeller	18	30
Materyal ve Metot	1	35
Araştırma Bulguları	1	20
Tartışma ve Sonuç	0	20
Tezin Geneli	12	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Hasan GÜNDÜZ	Doç. Dr. Mesut KARABACAK
25.7.2023	25.7.2023
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engellenme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunulan bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışma süresince akademik bilgi ve tecrübelerinin yanı sıra moral ve motivasyon açısından her zaman sabır ve güler yüzle bana destek olan değerli hocalarım Prof. Dr. Ercan ÇELİK ve Doç. Dr. Mesut KARABACAK'a sonsuz teşekkürler.

Tezin hazırlanma sürecini hızlandırmak için gerekli olan itici güç ve mental desteği sağlayan değerli meslektaşım Dr. Güven KAYA'ya ve değerli fikirlerinden yararlandığım Prof. Dr. Köksal ERENTÜRK ve Doç. Dr. İsrail OKUMUŞ'a teşekkür ederim.

ve gülüşleriyle dünyayı daha güzel bir hale getiren çocuklarım Erdem ve Ömer Asafa...

Hasan GÜNDÜZ

ÖZET

DOKTORA TEZİ

LİNEER DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN $\mathcal{H}_\infty$ KONTROLÜ

Hasan GÜNDÜZ

Danışman: Doç. Dr. Mesut KARABACAK

Bu tezde diferansiyel-cebirsal denklem sistemlerinin transfer fonksiyonlarının $\mathcal{H}_\infty$ -normu incelenmiştir. Bu tez beş bölüm olarak düzenlenmiştir. İlk bölümde, kontrol teorisine giriş yapılmış, kontrolün temel elemanları tanıtılmış, kontrol teorisinin tarihsel gelişimi dönemsel bazda detaylı olarak ele alınmış ve $\mathcal{H}_\infty$ kontrole ilişkin literatür taramasına yer verilmiştir. İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler anlatılmış, ayrıca çalışmanın teknik altyapısını oluşturan daha ileri düzeydeki kavramlar ve terminoloji sunulmuş ve bunlara ilişkin detaylı açıklama ve örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde, transfer fonksiyonlarının $\mathcal{H}_\infty$ -normlarının hesaplanmasında kullanılan, bisection ve genişletilmiş dengelenmiş singüler pertürbasyon metotları anlatılmış, bu metotlara ilişkin algortimalar MATLAB komutları ile birlikte verilmiştir. Ayrıca genişletilmiş dengelenmiş singüler pertürbasyon metodunu oluşturan, balanced truncation yaklaşımı ve singüler pertürbasyon metodu ayrı başlıklar altında detaylı olarak anlatılmıştır. Dördüncü bölümde kontrol teorisinin farklı alanlarından seçilen sayısal örnekler her iki metotla da çözülmüş ve bulunan $\mathcal{H}_\infty$ -norm değerleri karşılaştırılarak hata payları hesaplanmıştır. Son bölümde ise elde edilen bulgular ve sonuçlar tartışılmıştır.

Amaç: Bu çalışmada diferansiyel-cebirsal denklem sistemlerinin transfer fonksiyonlarının $\mathcal{H}_\infty$ -normunun hesaplanması amaçlanmıştır.

Yöntem: Bu çalışmada bisection ve genişletilmiş dengelenmiş singüler pertürbasyon metotları kullanılmış ve yüksek boyutlu sistemlerin daha düşük boyutlu sistemlere dönüştürülmesinde (model indirgeme) balanced truncation yaklaşımından yararlanılmıştır.

Bulgular: Bu metotlar $D = 0$ için, diferansiyel-cebirsal denklem sistemlerine uygulanmıştır.

Sonuç: Bu metotlarla bulunan $\mathcal{H}_\infty$ -norm değerleri arasındaki hata payının yeterince küçük ve duyarlılığının tatmin edici bir düzeyde olduğu gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: $\mathcal{H}_\infty$ Kontrol, Diferansiyel-cebirsal denklem sistemleri, Bisection metodu, Singüler pertürbasyon metodu, Balanced truncation yaklaşımı, Model indirgeme.

Ağustos 2023, 69 sayfa

ABSTRACT

DOCTORAL DISSERTATION

$\mathcal{H}_\infty$ CONTROL OF LINEAR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS(DAEs) SYSTEMS

Hasan GÜNDÜZ

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mesut KARABACAK

In this dissertation, $\mathcal{H}_\infty$ -norm of transfer functions of systems of differential-algebraic equations(DAEs) is investigated. This dissertation is organized into five chapters. In the first chapter, theory and basic elements of control are introduced, its historical development is handled on a periodic basis in detail and literature review about $\mathcal{H}_\infty$ control is included. In the second chapter, the fundamental definitions and theorems which will be used in the next chapters are told, moreover advanced concepts and terminology, which create the technical infrastructure of the work, are proposed and detailed explanations and examples are given. In the third chapter, bisection and extended balanced singular perturbation methods, which are used to evaluate the $\mathcal{H}_\infty$ -norm of transfer functions of systems of differential-algebraic equations(DAEs), are told, the algorithms about the methods are given with their MATLAB commands. Moreover, balanced truncation approach and singular perturbation method, that make up extended balanced singular perturbation method, are told in detail under separate titles. In fourth chapter, the numerical examples, selected from various fields of control theory, are solved with the both methods, too and the error tolerance is calculated by comparing the found norm values. In the final chapter, obtained findings and conclusions are discussed.

Purpose: This research aimed to calculate the $\mathcal{H}_\infty$ -norm of transfer functions of systems of differential-algebraic equations(DAEs).

Method: In this study, bisection and extended balanced singular perturbation methods are used and utilized from balanced truncation approach to reduce the higher dimensional systems to lower dimensional models(model order reduction).

Findings: This method has been applied to systems of differential-algebraic equations(DAEs) for the case $D = 0$.

Results: It is observed that the error tolerance between $\mathcal{H}_\infty$ -norm values obtained via the methods, is sufficiently small and its sensitivity is in a satisfied level.

Keywords: $\mathcal{H}_\infty$ Control, Systems of differential-algebraic equations(DAEs), Bisection method, Singular perturbation method, Balanced truncation approach, Model order reduction.

August 2023, 69 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI	ii
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ	x
GİRİŞ	1
Bir Kontrol Sisteminin Temel Elemanları	4
Kontrol Teorisinin Tarihsel Gelişimi	5
H_{∞} Kontrol Teorisi	9
KURAMSAL TEMELLER	11
MATERYAL VE METOT	39
Bisection Metodu	39
Balanced Truncation Yaklaşımı ve Model İndirgeme	40
Singüler Pertürbasyon Metodu	41
Genişletilmiş Dengelenmiş Singüler Pertürbasyon Metodu ve Hata Analizi	42
ARAŞTIRMA BULGULARI	44
TARTIŞMA VE SONUÇ	52
KAYNAKLAR	53
ÖZ GEÇMİŞ	58

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Genişletilmiş Dengelenmiş Singüler Pertürbasyon Metodunun Algoritması	43
Tablo 2. Örnek 4.1'e İlişkin Sayısal Değerler	45
Tablo 3. Örnek 4.2'ye İlişkin Sayısal Değerler	46



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Açık döngü kontrol sistemleri	2
Şekil 2. Kapalı döngü kontrol sistemleri.....	3
Şekil 3. Antik Mısır ve Yunanlılar tarafından kullanılan su saati örnekleri	6
Şekil 4. Basit sarkaç.....	16
Şekil 5. Zaman-frekans bazlı ölçümlerin karşılaştırılması.....	21
Şekil 6. Blok diyagram	24
Şekil 7. Kütle-yay-amortisör sistemleri	26
Şekil 8. RLC devresi.....	27
Şekil 9. Kütle –yay sistemleri	32
Şekil 10. Lyapunov fonksiyonlarının geometrik yorumu.	33
Şekil 11. Bir L-1011 hava taşıtı ve hareket eksenleri.....	44
Şekil 12. Örnek 4.3’te verilen dinamik sistemin Hankel singüler değerleri	50

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^{m \times n}(\mathbb{R}^{m,n}), \mathbb{C}^{m \times n}(\mathbb{C}^{m,n})$	$m \times n$ boyutlarında reel, kompleks değerli matris uzayı
A^T	A matrisinin transpozu
A^*	A matrisinin adjointi (eşlenik transpozu)
A^{-1}	A matrisinin tersi
$\tilde{A}$	Mertebesi indirgenmiş A matrisi
$trace(A)$	A matrisinin izi
$det(A), A $	A matrisinin determinanı
$diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$	$n \times n$ boyutlarında köşegen A matrisi
$\lambda_j(A)$	A matrisinin j . özdeğeri
$\sigma_j(A)$	A matrisinin j . tekil(singüler) değeri
$\bar{\sigma}(A), \sigma_{max}(A)$	A matrisinin en büyük tekil(singüler) değeri
σH_j	j . Hankel tekil(singüler) değer
$H_{2n \times 2n}$	$2n \times 2n$ tipinde Hamilton matrisi
I_n	$n \times n$ tipinde birim matris
0_n	$n \times n$ tipinde 0(sıfır) matrisi
$\mathcal{C}^1$	1. mertebenden türevleri sürekli olan fonksiyonlar sınıfı
Λf	f fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$\mathcal{H}_\infty, H_\infty$	$\mathcal{H}$ - sonsuz(infinity) uzayı
$\mathbb{C}^+$	$\mathbb{C}$ - artı(plus) uzayı
$\ \cdot\ _\infty$	$\mathcal{H}$ - sonsuz(infinity) normu
$V(x, t)$	Lyapunov fonksiyonu
∇f	f fonksiyonunun Gradient vektörü
μ	Singüler pertürbasyon parametresi
$G(s)$	Transfer fonksiyonu(matrisi)
(A, B, C, D)	A, B, C, D realizasyonu
$\mathcal{C}(A, B)$	(A, B, C, D) sisteminin kontrol matrisi
$\mathcal{O}(A, C)$	(A, B, C, D) sisteminin gözlem matrisi
W_c	Kontrol Grammian matrisi
W_o	Gözlem Grammian matrisi
L_c	Kontrol Grammian matrisinin Cholesky faktörü
L_o	Gözlem Grammian matrisinin Cholesky faktörü

GİRİŞ

Bir ortamın ideal sıcaklığı veya nemi ne olmalıdır? Ulaşımında bir noktadan diğer bir noktaya en emniyetli ve/veya en ekonomik şekilde nasıl gidilebilir? Kaliteli bir ürün nasıl üretilir gibi sorular endüstriyel alanın temel problemlerindendir. Buna benzer veya daha karmaşık konularda istenilen sonucu elde etmek için gerekli işlemler ve hesaplamalar yapılır. Ancak bu hesaplamalar ve işlemler her zaman istenilen sonucu verir mi? Veya istenilen sonuç en az hata payıyla nasıl elde edilebilir? Kontrol sistemleri tam da bu aşamada devreye girer ve "sistemi istenildiği gibi hareket edebilecek hale getirmek" anlamına gelen kontrol işlemi, yapılan herhangi bir işte istenilen sonucun minimum hata payıyla elde edilmesini sağlar. Bir başka deyişle kontrolün amacı, bir veya daha fazla değişkenin veya parametrenin ölçülmesi ve istenen değerde tutulmasıdır.

Kontrol sistemleri, teknolojinin gelişmesiyle beraber, başta uzay araçları sistemleri, füze güdüm sistemleri, ulaşım ve güç sistemleri, robotik sistemler ve daha birçok benzeri sistemin yanı sıra modern üretim ve endüstriyel işlemlerin üretim sonrası aşamalarında (depolama, satış stratejileri vs) da ihtiyaç duyulması açısından hayati bir önem taşır. Üretim aşamalarına; makine tezgahlarının numerik kontrolü, uzay endüstrisinde kullanılan oto pilot sistemlerinin dizaynı, otomobil sanayiinde araba ve kamyon tasarımları gibi örnekler verilebilir. Üretim sonrası aşamalarına ise depolama için gerekli ortamın basınç, sıcaklık, nem gibi etkenlerinin kontrol altında tutulması gibi temel işlemler, ideal depolama süresinin ve optimum kâr-zarar marjlarının hesaplanması örnek olarak verilebilir.

Kontrol teorisi; dinamik sistemlerde en uygun performans elde edilmesi, algılanan değerlerin sabit ve tekrarlanabilir tutulması, verimliliğin artırılarak kaynak tüketiminin azaltılması, tekrara dayanan manuel işlemlerde ağır iş yükünün hafifletilmesi ve benzeri birçok konuda kolaylık sağlar. Ayrıca, kontrol mekanizmaları, uyarılar vererek sistemi güvenlik sınırları içerisinde stabil tutmak amacıyla kullanıldığından dolayı, aşırı hassasiyet gerektiren sistemleri kontrol olmaksızın tasarlamak mümkün değildir. Bu tip uygulamalarda kontrol salt bir araç değil, sistemin başlıca elemanlarından biridir. Bu kritik öneminden dolayı bu alandaki gelişmeler ve yenilikler bilim adamları ve mühendisler tarafından yakından takip edilmektedir.

Kontrol edilecek bir sistemde genellikle 3 temel eleman bulunur. Bunlar;

- **Bileşenler:** Giriş ve çıkışların oluşturduğu değişken değerler.
- **Özellikler:** Sistemin yapısı ve çalışma parametreleri.

- **Bağıntı:** Sistem ile özellikler arasındaki ilişkileri temsil eden matematiksel ifadeler.

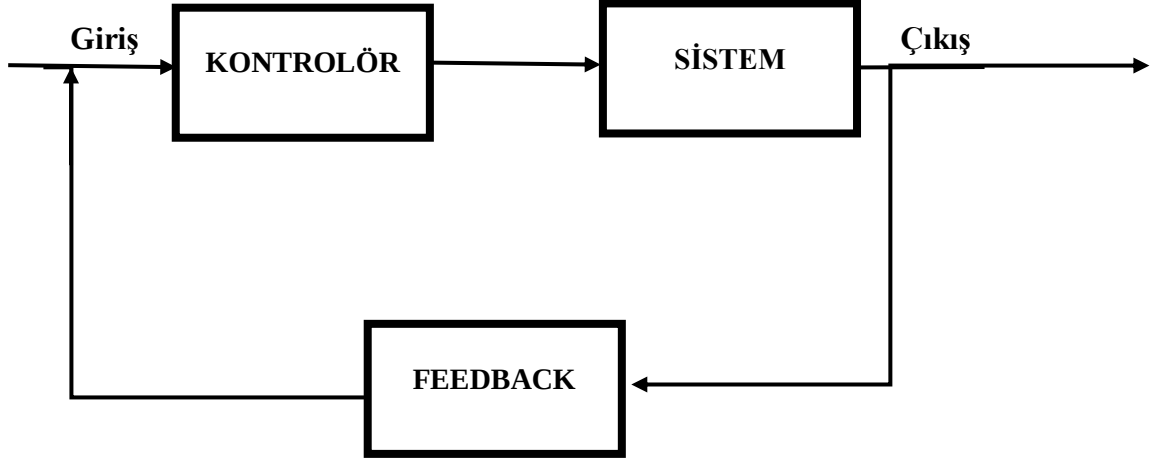
Kontrol sistemleri temel olarak iki gruba ayrılır.

Açık Döngü Kontrol Sistemleri: Açık döngü kontrol sistemlerinde, kontrolör Şekil 1’de görüldüğü gibi sistemin girişinde bulunur ve sisteme seri bağlıdır. Girişlerin belli sınırlar içerisinde olmasını denetleyerek, sistemin giriş ve parametrelerini istenen düzeyde tutmakla sorumludur. Bu tip kontrollerde çıkışların kontrol eylemi üzerinde hiçbir etkisi yoktur, dolayısıyla ölçülmesine ihtiyaç duyulmaz. Giriş ve çıkışlar arasındaki fark ölçülmediğinden dolayı sistemin güvenilirliği kalibrasyonun kalitesine bağlıdır. Bozucu etkilerin var olması durumunda sistem istenilen sonucu veremeyebileceğinden dolayı bu tip işlemlerde açık döngü kontrol sistemi tercih edilmez. Basit durumlarda kontrolör, sistemin özelliklerine bağlı olarak; güçlendirici, mekanik bağlantı, filtre veya başka bir eleman olabilir. Daha karmaşık durumlarda ise kontrolör mikroişlemci veya benzeri bir eleman olabilir. Zaman bazlı kontrol sistemlerinin hepsi açık döngü kontrol sistemleridir. Bu tip sistemlere örnek olarak, çamaşır makinesi ve trafik ışıkları verilebilir.



Şekil 1. Açık döngü kontrol sistemleri

Kapalı Döngü Kontrol Sistemleri: Bir diğer adı feedback (geri besleme, geri bildirim) kontrol sistemleridir. Bu tip sistemlerde referans değeri ve çıkış arasındaki fark kontrol aracı olarak kullanılır. Feedback mekanizması Şekil 2’de görüldüğü gibi sisteme paralel bağlanır. Bir kapalı döngü kontrol sisteminin çalışma prensibi; hata sinyalinin kontrolöre gönderilmesi suretiyle, hatanın azaltılarak sistem çıkışlarının istenilen değere getirilmesi şeklindedir. Burada hata sinyali; giriş sinyali ile feedback sinyali arasındaki fark olarak ifade edilir. Feedback sinyali, çıkış sinyalinin kendisi olabileceği gibi çıkış sinyali cinsinden bir fonksiyon veya bu fonksiyonun türevi ve/veya integrali şeklinde de olabilir. Sistemin uygulamalara nasıl cevap vereceğini belirlemek amacıyla modellemeye ihtiyaç duyulur. Kapalı döngü kontrol sistemleri sadece mühendislikte değil birçok disiplinde uygulama alanına sahiptir. Örneğin insan vücudu çok ileri düzeyde bir feedback kontrol sistemine sahiptir. Vücut ısısı ve kan basıncının sabit tutulması birer fizyolojik feedback kontrolüdür. Otomobillerde boşta hız kontrolü ve oda termostatları kapalı döngü kontrol sistemlerine verilebilecek diğer örneklerdir.



Şekil 2. Kapalı döngü kontrol sistemleri

Açık döngü ve kapalı döngü kontrol sistemlerinin birbirine göre üstünlükleri ve dezavantajları vardır. Örneğin geri besleme mekanizmasına sahip olduğundan, bozucu etkilerin olduğu ve aşırı hassasiyet gerektiren durumlarda kapalı döngü sistemler tercih edilir. Ancak maliyetinin fazla olması kapalı döngü bir sistem için dezavantaj oluştururken açık döngü bir sistemin hem inşa edilmesi kolay hem de ekonomik olması nedeniyle (zaman ve/veya maliyet açısından bakıldığında) tercih edilmesi daha mantıklıdır. Kararlılık gerektirmeyen işlemlerde, açık döngü sistemler tercih edilir. Çünkü açık döngü sistemlerde kararlılık asıl problem değildir.

Kullanılan metodolojiye göre değerlendirildiğinde başlıca kontrol çeşitleri aşağıdaki gibi verilebilir.

- **Klasik Kontrol:** Bu sistemler adi diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Bu denklemler lineer transfer fonksiyonlarına dönüştürülür ve analiz edilir. Bu dönüşümlere örnek olarak; Laplace Dönüşümü, Fourier Dönüşümü ve Z-Dönüşümü örnek olarak verilebilir. Bu sistemler genellikle "tek girişli tek çıkışlı" (SISO: Single Input Single Output) sistemlerde kullanılır. Sadece lineer sistemler için geçerli olsa da, lineer olmayan ancak uygun bir nokta civarında lineer hale getirilebilen sistemlerde de yaklaşık transfer fonksiyonları belirlenebilir.
- **Modern Kontrol:** Modern kontrolde, yüksek mertebeden diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklemlere dönüştürülür. Bu denklemler vektör metoduna benzer şekilde çözülür. Denklemlerin bu şekilde çözülmesi, yüksek mertebeden diferansiyel denklemler çözülürken karşılaşılan zorlukların kolaylıkla aşılmasında yardımcı olur. Çoklu değişkenlerden kaynaklanan non-lineerlik modern metodolojiyle çözülür. Durum uzay vektörü, öz değerler ve öz vektörler bunlara örnek olarak verilebilir.

Giriş, çıkış ve sistemin diğer değişkenleri; durum değişkenleri olarak tanımlanır. Bu kontrol, "çok girişli çok çıkışlı" (MIMO: Multi Input Multi Output) sistemlerde kullanılır.

- **Robust (Gülbüz) Kontrol:** Robust kontrol teorisinde, gerçek sistemle matematiksel modeli arasında her zaman bir belirsizlik etmeni olduğu varsayılır. Böylece bu belirsizlik etmenleri ya da hata faktörleri (çevre, dahili belirsizlikler, gürültü ve düzensizlikler) kontrol sisteminin tasarlanması sürecinde sisteme dahil edilir. Ancak bu tutarsızlık etmeninin ve hata faktörünün gerçek değeri bilinmediğinden, tahmini bir değer ataması yapılır ve sisteme dahil edilerek analizi gerçekleştirilir. Robust kontrol, stabilite ve performans açısından güçlüdür. Bu analiz süresince uygulanan en etkili yöntem $\mathcal{H}_\infty$ kontrolüdür.
- **Optimal Kontrol:** Optimal kontrolde; problem, maliyet fonksiyonunu minimize etmek amacıyla; sürecin, fiziksel kısıtlamaların ve performans kısıtlamalarının matematiksel modeli olarak ifade edilir. Mühendisliğin yanı sıra iktisat alanında da sıklıkla kullanılan bir metottur.
- **Uyarlanabilir (Adaptif) Kontrol:** Uyarlanabilir kontrolde, kontrolörler; parametreleri bazı mekanizmalar tarafından çevrimiçi güncellenebilecek şekilde yapılır ve bu sayede performansın artırılması amaçlanır. Bu kontrolde, normal feedback sürecine ilaveten parametre ayarlaması yapan bir ilmek bulunur. Kararlılık bu kontrolde temel sorundur.
- **Oyun Teorisi:** Oyun Teorisinde, her sistem, dış etmenlere karşı kendi maliyet fonksiyonunu en aza indirmek zorundadır. Bu özelliğinden dolayı, bu teori bir çatışma ve işbirliği çalışmasıdır. Oyun teorisi, robust ve optimal kontrol teorileriyle ilişkilidir.

Bir Kontrol Sisteminin Temel Elemanları

- **Sinyal:** Bir sistemin davranışı veya bir fiziksel olgunun niteliği hakkında bilgi taşıyan fonksiyonlara denir. Başlıca analog(sürekli) ve dijital(ayrık) olmak üzere ikiye ayrılır.
- **Kontrollü Değişken:** Ölçülebilir veya kontrol edilebilir nicelik veya koşullara denir.
- **İşlenmiş Değişken:** Kontrollü bir değişkenin değerini etkilemek amacıyla bir kontrolör tarafından değiştirilen nicelik veya koşullara denir.
- **Kontrol:** Bir sistemin kontrollü değişkeninin ölçülmesi ve işlenen değer; ölçülen değer ile istenen değer arasındaki sapmaları düzeltmek veya kısıtlamak amacıyla

sisteme uygulanmasına denir. Daha basit bir tanımla, "sistemin istenilen şekilde hareket edebilecek hale getirilmesi" olarak tanımlanabilir.

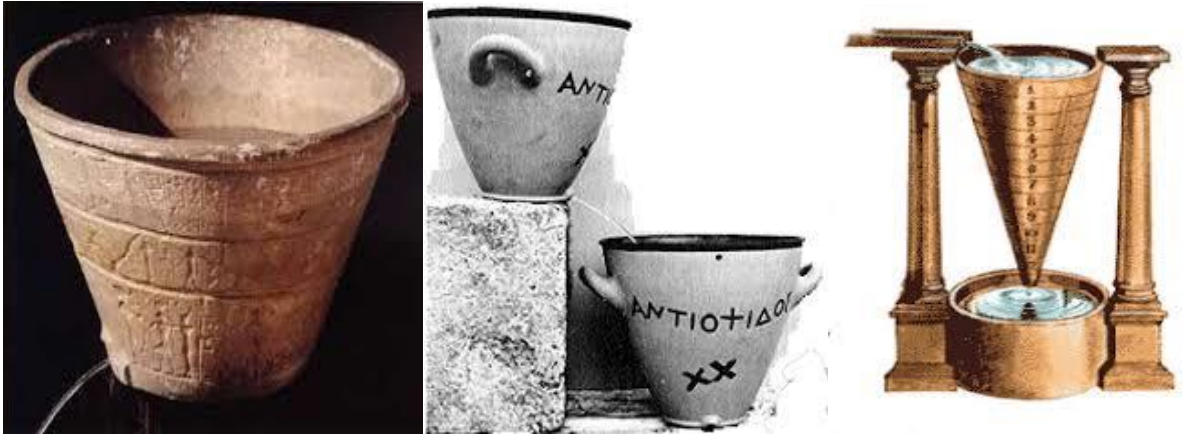
- **Tesis:** Belli bir iş/işlemin yapılması amacıyla bir araya getirilmiş, koordine çalışan donanım veya makine parçalarına denir. Bir diğer deyişle "kontrol edilebilen herhangi bir fiziksel objeye (mekanik bir alet, bir ısıtıcı, bir kimyasal reaktör veya bir uzay aracı...)" denir.
- **Süreç:** İlerleyerek devam eden, sistematik bir şekilde belli bir sonuca yönelik yapılan hareketler serisine denir. Veya kısaca "kontrol edilebilen her harekete" süreç denir.
- **Sistem:** Belli bir amaca yönelik, birlikte hareket eden bileşenlerin kombinasyonuna denir. Bir diğer deyişle giriş sinyallerini çıkış sinyallerine dönüştüren yapılardır. Sistemler genellikle bir operatör veya transfer fonksiyonu yardımıyla ifade edilir.

Giriş ile orantılı olarak çıkış verme özelliğine sahip sistemlere lineer sistemler denir. Gerçek hayattaki sistemlerin büyük çoğunluğu lineer olmayan sistemlerdir ancak belli çalışma aralığı üzerinde lineer sistem modellerine yakınlaştırılabilirler.

- **Bozucu etki:** Bir sistemin çıkış değerine olumsuz etki yapma eğilimde olan sinyallere denir. Sistem içerisinde üretilen bozucu etkilere iç bozucu etki, dış etkenler tarafından üretilen bozucu etkilere de dış bozucu etki denir. Bozucu etkiler giriş olarak işlenir.
- **Feedback (Geri Bildirim- Geri Besleme) Kontrol:** Bir sistemde, referans değerleri ve çıkış arasında, bozucu etkilerden kaynaklanan farkı azaltma işlemine feedback kontrol denir. Tahmin edilebilir bozucu etkiler sistemin kendi işleyişi içinde telafi edilebildiğinden dolayı feedback kontrol daha çok tahmin edilemeyen bozucu etkiler için kullanılır.

Kontrol Teorisinin Tarihsel Gelişimi:

Bilinen ilk kontrol mekanizmaları Şekil 3'te verilen su saatleridir. Su saatlerinin ilk olarak ne zaman ve kim tarafından icat edildiği bilinmemesine rağmen ilk örneğine M.Ö. 1500'lü yıllarda Firavun I. Amenhotep'in mezarında rastlanmıştır. Daha sonra, M.Ö. 325 yıllarında Vitruvius ve Ktesibos tarafından tasarlandığı bilinen ve clepsydra (su hırsız) olarak adlandırılan bu mekanizmalar, Yunanlılar tarafından, meclislerde ve mahkemelerde konuşma sürelerini ayarlamak amacıyla kullanılmıştır.



Şekil 3. Antik Mısır ve Yunanlılar tarafından kullanılan su saati örnekleri

Kontrol teorisinin tarihsel gelişimi dört ana periyoda ayrılır.

- **Erken Dönem:** 1900'e kadar
- **Klasik Öncesi Dönem:** 1900-1940 arası
- **Klasik Dönem:** 1935-1960 arası
- **Modern Kontrol:** 1955 ve sonrası

Erken Dönem (...-1900): Erken dönem kontrol sistemlerinin yakın tarihteki en bilinen örneği Watt'ın buharlı motorudur. İlk olarak 1789'un başında kullanılmaya başlanan bu motorların kontrol açısından bazı dezavantajları vardı. Buharlı motorlar, orantılı kontrol sağladığından, yani motorun dönme hızının mutlak kontrolü sadece bir işletim koşulu için (çok küçük bir devir aralığı için) kontrol edilebildiğinden dolayı dikkatli ve sürekli bir bakım gerektiriyordu. Bu dezavantajından dolayı bu motorlar kontrolörden ziyade yavaşlatıcı (moderator) olarak yorumlanmıştır. 1870'lere kadar Watt'ın prensipleri kullanılarak dünya çapında yüzlerce regülatör (governor) patenti alınmıştır.

Bu dönemin bilim dünyasında bir hayli etki uyandıran bir diğer gelişmesi; Maxwell'in 1868'de yayınladığı, "On Governors" adlı ünlü makalesidir. Bu makalede, çeşitli regülatör mekanizmaları için lineer diferansiyel denklemlerin nasıl türetilceği tanımlanmıştır. O dönemlerde bir dinamik sistemin kararlılığının, karakteristik denkleminin köklerinin konumu ile tanımlandığı ve kompleks köklerin reel kısımlarının pozitif olması durumunda sistemin kararsız olduğu matematikçiler ve fizikçiler tarafından biliniyordu. Asıl problem denklemin köklerini bulmadan, kompleks köklerin reel kısımlarının konumunu tayin etmektir. Maxwell, 2., 3. ve 4. mertebeden sistemlerin kararlılığı için gerekli ve yeterli koşulların, sistemi çözmeden sadece katsayılar incelenerek bulunabileceğini göstermiştir. Günümüzde hala geçerliliğini koruyan ve muazzam olarak anılan bu çalışmaları ilk yayınlandığı yıllarda hak ettiği ilgiyi görememiştir.

1876'da, Vyshnegradski, Maxwell'den bağımsız olarak buharlı motorlar için kararlılık kriterini geliştirdi.

Cauchy ve Sturm'un çalışmalarından yola çıkarak, elde ettiği bulguları 1877'de "Stability of Motion" adlı tezinde yayınlayan Routh, Maxwell'in bu konudaki çalışmalarını daha da ileri bir seviyeye taşıyarak, bugün "Routh-Hurwitz Kararlılık Kriteri" olarak bildiğimiz prensibi bilim dünyasına kazandırdı. Yine 1895'te İsveçli matematikçi Hurwitz, Hermit'in çalışmalarından elde edilen bazı sonuçları baz alarak aynı kriteri elde etmeyi başardı. Bu nedenle bu kararlılık prensibi Routh-Hurwitz kararlılık kriteri olarak bilinir.

1853'te patent alan, Sickels tarafından dizayn edilen ilk hidrolik motor aynı zamanda ilk açık döngülü (open-loop) sistemdir. 1866'da patent alan, McFarlane tarafından dizayn edilen dümen motoru ilk kapalı döngülü (closed-loop) sistemdir. Bu dönemin bir diğer önemli olayı da, Farcot tarafından tasarlanan, servo-motor (moteur asservi) olarak bilinen kapalı döngü konum kontrol sistemleridir.

Klasik Öncesi Dönem (1900-1940): Bu dönemde kontrol araç ve sistemlerinin, mühendisliğin birçok alanında kullanılmasıyla beraber iki önemli problem ortaya çıktı. Bunlardan ilki; bu alana ilişkin teorik bilgi yetersizliğinden dolayı problemlerin tartışılabileceği ortak bir terminolojinin olmaması, ikincisi ise kolayca uygulanabilen ve analiz edilebilen metotların olmayışydı. O zaman kadar bilinen tek analiz araçları diferansiyel denklem ve Routh-Hurwitz kararlılık testiydi.

1922'de Minorsky, 3-terimli veya PID (Proportional Integral Derivative) kontrol olarak bilinen bir konum kontrol sistemi geliştirdi. Minorsky çalışmalarında bu kontrole ait analizleri çok net ve berrak bir şekilde ifade etmiştir.

1932'de Nyquist, "Regeneration Theory" adlı makalesinde amplifikatörlere ilişkin çalışmalarını yayınladı. Bu makalede "Nyquist Analizi" olarak bildiğimiz yasanın temelleri atıldı. Ayrıca bu çalışma, daha önce beraber çalıştığı Black'in "negatif feedback amplifikatörleri" ve bir sistemdeki negatif feedback'in faydaları hakkında da pratik bilgiler içeriyordu.

1934'te Hazen ve öğrencileri tarafından yüksek performanslı servomekanizmalar tasarlandı ve bu alanda geniş kapsamlı teorik çalışmalar ilk defa Hazen tarafından yapıldı. Hazen'in çalışmaları bir sonraki nesil kontrol sistem uzmanları için bir başlangıç noktası niteliğindeydi.

Klasik Dönem (1935-1960): Klasik dönemde, kontrol teorisi alanındaki çalışmalar farklı ülkelerde birbirinden bağımsız gruplar tarafından kapsamlı bir şekilde yürütülmüştür. Bu

dönemin ilk yıllarındaki önemli gelişmeler Cremer-Leonhard-Mikhailov kriteri ve Bode'un çalışmalarıdır. Bode çalışmalarını 1945'te, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design" adıyla kitaplaştırdı.

Bu dönemde kontrol alanındaki çalışmalar II. Dünya Savaşı'nın etkisiyle savunma ve silah (uçaksavar, radar vb) sistemleri üzerine yoğunlaştırıldı.

MIT'den Brown ve öğrencileri bazı mekanik ve elektrik sistemlerin, blok diagramları kullanarak ifade edilebileceğini gösterdiler. Hall 1943'te Laplace dönüşümünü yardımıyla, blokları transfer fonksiyonu olarak kullanarak, sistemin transfer noktalarının (locus) çizilebileceğini ve buradan kararlılık için Nyquist testinin kullanılabileceğini gösterdi.

1942'de Ziegler ve Nichols, verilen bir kontrol durumunda (PI, PID) optimum performansın elde edilmesi amacıyla belli kontrolör türleri için parametrelerin nasıl seçileceğini gösterdiler.

Savaşın sona ermesiyle klasik kontrol teknikleri oluşturulmaya başlandı. Bu tasarım teknikleri, tek-girişli sistemler içindi; yani sistem, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerle ifade edilebiliyordu ve tek kontrol girişine sahipti.

1951'de Cranfield'de yapılan "Automatic Control" ve 1953'te New York'ta yapılan "Frequency Response Symposium" adlı konferanslar, klasik kontrolden otomatik kontrole geçiş için zemin hazırlayan organizasyonlar oldu. Bu organizasyonları bir dizi benzer çalışmalar takip etti. Bunlardan en önemlisi "Department of Scientific and Industrial Research" tarafından düzenlenen Tustin'in organizasyon komitesine başkanlık ettiği konferanstı. Bu konferansta 33 makale sunuldu ve bunlardan 16'sı gürültü problemi, nonlineerlik ve örnekleme sistemleri hakkındaydı.

Modern Kontrol (1955-...): Havacılık endüstrisinde çalışan mühendisler, Poincaré'nin; "genel diferansiyel denklemlerin, birinci mertebeden diferansiyel denklemler kümesi cinsinden ifade edilmesi" kuramına dayanarak çalışmalar yaptılar. Bu çalışmalar sonucu "durum-uzay yaklaşımı" olarak bilinen yaklaşım doğdu.

Bellman, 1948 ve 1952 yılları arasında, bir füzenin maksimum hasar verebilmesi için konulması gereken en iyi yerin belirlenmesi problemi üzerine yaptığı çalışmalar sonucu, "optimallik ilkesi" ve "dinamik programlamayı" literatüre kazandırdı. 1950'lerin sonlarında optimal kontrole ilişkin çalışmalarında ilkin değişkenler hesabını kullanan Bellman, daha sonraları deterministik optimizasyon problemlerine yöneldi.

1956'da Hamilton'ın geometrik optiğe ilişkin yaklaşımının Pontragyn tarafından geliştirilmesiyle optimal kontrolün temelleri atılmış oldu. Bu yaklaşım "Pontragyn'in Maksimum Prensibi" olarak bilinir.

Bu alandaki çalışmaları takip etmek ve paylaşmak amacıyla 1957'de Paris'te "International Federation of Automatic Control (IFAC)" kuruldu.

Ayrıca, Kalman, Bucy, Rosenbrock ve McFarlane'in 1950-1960'lı yıllarda yaptığı çalışmalar bu dönemin başlıca çalışmaları arasında sayılabilir.

$\mathcal{H}_\infty$ Kontrol Teorisi

Kontrol teorisinde karşılaşılan handikaplardan bir tanesi, farklı türlerde değişkenler ve düzensizliklerle karşılaştığında bile etkili performans gösterebilen sistemler için kontrolörler tasarlamaktır. $\mathcal{H}_\infty$ kontrol teorisi, büyük ölçekli çok değişkenli problemler için ölçülebilir optimizasyon sağlarken aynı zamanda modelleme hatalarını ve bilinmeyen düzensizlikleri azaltmak amacıyla tasarlanmıştır. 1981'de Zames tarafından bilim dünyasına kazandırılan $\mathcal{H}_\infty$ kontrol teorisi, duyarlılık indirgeme problemini bir operatör norm ($\mathcal{H}_\infty$ normu) yardımıyla bir optimizasyon problemi şeklinde formülize edilmesi prensibine dayanır (Burada $\mathcal{H}_\infty$ uzayı; elemanları $\mathbb{C}^+$ 'da tanımlı, bütün sınırlı, analitik, matris değerli fonksiyonların kümesidir). Bu formülasyon yapılırken tamamen frekans bölgesi baz alınmıştır. Zames çalışmalarında $\mathcal{H}_\infty$ normunun, lineer kuadratik Gauss kontrolüne göre daha etkili sonuçlar verdiğini göstermiştir. Bu da, sistemdeki düzensizlikleri minimize ederek, sistemi stabil hale getirebilecek en uygun kontrolörü tasarlamak amacı güden birinin $\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrol dizaynını tercih etmesi sonucu doğurmuştur. $\mathcal{H}_\infty$ normu kapalı döngü (feedback) sistem kontrolörlerinin performans, duyarlılık ve dayanıklılığını nümerik olarak ölçmek için kullanılmaktadır.

Kısa bir süre sonra Doyle, model belirsizliklerini ölçmekte kullanılan robust kararlılık testi için aletler geliştirdi ve bu belirsizliklerin ayarlanmış çıkışlar üzerindeki etkisinin minimize edilmesi için $\mathcal{H}_\infty$ teorisini kullanmayı başardı. Doyle, aynı zamanda 1984'te çok değişkenli bir $\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrol probleminin genel çözümünü, durum-uzay metodunu kullanarak bulan ilk kişidir. Durum-uzay formülasyonları 1980'lerin ortalarında Doyle'un yanı sıra Francis ve Glover tarafından da kullanılmıştır, ancak bu bilim adamları bir dereceye kadar başarı sağlamışlardır.

1980'lerin sonlarında Khargonekar, Petersen, Rotea ve Zhou, çalışmalarında $\mathcal{H}_\infty$ durum- feedback probleminin çözümünü, sabit bir feedback kazanç matrisi cinsinden ifade etmişlerdir ve bu kazanç matrisini bir Riccati denkleminin çözümleri cinsinden bulmak için bir formül elde etmişlerdir. $\mathcal{H}_\infty$ optimal teorisi ve lineer kuadratik oyun teorisi arasında bir ilişki

kurarak, durum-feedback probleminin çözümünü, cebirsel bir Riccati denklemi yardımıyla bulmuşlardır. Ayrıca bir dinamik sistemin transfer fonksiyonunun $\mathcal{H}_\infty$ -normunu sistemin maksimum singüler değeri ile ilişkilendiren, bisection metodu, two step metodu, iki taraflı Jacobi metodu, householder bidiagonalization tekniği, singüler pertürbasyon metodu, genişletilmiş dengelenmiş singüler pertürbasyon metodu gibi metotlar geliştirilmiştir. Bu tezde bisection metodu ve genişletilmiş dengelenmiş singüler pertürbasyon metodu kullanılmıştır.



KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler ve tezin teknik altyapısını oluşturan daha ileri düzeydeki kavramlar ve terminoloji verilmiştir.

Tanım 1. (Diferansiyel Denklem)

Bir veya daha fazla bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon ile bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Genel olarak diferansiyel denklemler;

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

kapalı formunda gösterilir. Burada, x bağımsız, y bağımlı değişkenlerdir, $y^{(n)}$ ise y 'nin x 'e göre n . mertebeden türevidir.

Tanım 2. (Kısmi Diferansiyel Denklem)

İki veya daha fazla bağımsız değişken ile bir veya birden fazla bağımlı değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklem denir. Bir bağımlı ve iki bağımsız değişken içeren bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklindedir.

Tanım 3. (Lineer Diferansiyel Denklem)

$a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ ve $B(x)$ fonksiyonları belli bir I aralığında tanımlı ve sürekli ve $a_0(x) \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = B(x) \quad (2.3)$$

şeklindeki denklemlere n . mertebeden lineer diferansiyel denklem denir. Burada (2.3)'e;

- $\forall i$ için $a_i(x)$ birer sabit sayı ise, sabit katsayılı,
- $\exists i$ için $a_i(x)$ değişken içeren terimler ise değişken katsayılı,
- $B(x) = 0$ ise homojen

lineer diferansiyel denklem adı verilir.

Tanım 4. (Cebirsel Denklem)

m . dereceden bir polinomunun 0'a eşitlenmesiyle elde edilen

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0 \quad (2.4)$$

şeklindeki ifadeye cebirsel denklem denir.

Tanım 5. (Lineer Cebirsel Denklem)

$\forall i$ için $a_i, b \in \mathbb{R}$ ve x_i değişkenler olmak üzere;

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.5)$$

ifadesine lineer cebirsel denklem denir.

Tanım 6. (Lineer Cebirsel Denklem Sistemi)

$\forall i, j$ için $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ ve x_i değişkenler olmak üzere;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.6)$$

ifadesine lineer denklem sistemi denir. Bu sistem, matrislerin çarpımı şeklinde ifade edilirse;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu ifadede;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dersek, denklem sistemi; $Ax = B$ şeklinde yazılır. Burada; A matrisine katsayılar matrisi, B matrisine sistemin ikinci yanı, x matrisine ise bilinmeyen matrisi adı verilir.

Tanım 7. (Metrik Uzay)

M boş olmayan bir küme ve $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall x, y, z \in M$ için,

- **M1.** $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- **M2.** $d(x, y) = d(y, x)$
- **M3.** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

koşullarını sağlayan d fonksiyonuna M üzerinde bir metrik, (d, M) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 8. (Vektör Uzayı)

$\mathbb{F}$ bir cisim ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) ve $\mathbb{V} \neq \emptyset$ olmak üzere, toplama ve bir skaler ile çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

- $u, v \in \mathbb{V}$ için $u + v \in \mathbb{V}$,
- $\alpha \in \mathbb{F}$ ve $u \in \mathbb{V}$ için $\alpha u \in \mathbb{V}$.

$u, v, w \in \mathbb{V}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere;

- **V1.** $u + (v + w) = (u + v) + w$
- **V2.** $u + v = v + u$
- **V3.** $u + \theta = \theta + u = u$ olacak şekilde bir $\theta \in \mathbb{V}$ vardır.
- **V4.** $u + (-u) = \theta$ olacak şekilde bir $-u \in \mathbb{V}$ vardır.
- **V5.** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- **V6.** $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- **V7.** $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
- **V8.** $1u = u1 = u$ olacak şekilde bir $1 \in \mathbb{F}$ vardır.

aksiyomlarını sağlayan $\mathbb{V}$ kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

Tanım 9. (İç Çarpım)

$\mathbb{V}$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $u, v, w \in \mathbb{V}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere;

- **P1:** $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$
- **P2:** $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
- **P3:** $\langle u, u \rangle > 0, u \neq 0$

koşullarını sağlayan $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonuna $\mathbb{V}$ üzerinde bir iç çarpım, $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir.

$x, y \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere x, y vektörlerinin iç çarpımı,

$$\langle x, y \rangle = x^* y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır. Burada x^* , x vektörünün eşlenik transpozudur.

Tanım 10. (Norm)

$\mathbb{V}$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı, $\alpha \in \mathbb{F}$ ve $u, v \in \mathbb{V}$ olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonuna $\mathbb{V}$ üzerinde tanımlı bir norm denir.

- **N1.** $\|u\| \geq 0, \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- **N2.** $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
- **N3.** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$(V, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir.

$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı ve $x \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere,

- $d(x, y) = \|x - y\|$
- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- $\langle x, y \rangle = 0$ ise x ve y ortogonaldır denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca x vektörünün p -normu;

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak;

- $p = 1$ için $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $p = 2$ için $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
- $p = \infty$ için $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

olarak yazılabilir.

$\mathbb{C}^{n,m}$ (kompleks değerli matris uzayı),

$$\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^* B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij} b_{ij} \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n,m} \quad (2.9)$$

iç çarpımı ile tanımlı sonlu boyutlu bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 11. (Tam Uzay)

Bir metrik uzayda her Cauchy dizisinin limiti o uzayın bir elemanı ise, bu uzaya tam uzay denir.

Tanım 12. (Hilbert Uzayı)

Tam iç çarpım uzaylarına Hilbert uzayı denir.

Tanım 13. (Banach Uzayı)

Tam normlu uzaylara Banach uzayı denir.

Tanım 14. (Analitik Fonksiyon)

$S \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere;

- f fonksiyonu bir $z_0 \in S$ noktası civarında türevlenebilir ise f fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir.
- f fonksiyonu $\forall z_0 \in S$ için analitik ise S kümesinde analitiktir denir.

Tanım 15. (Jacobian Matris)

$i = 1, 2, \dots, n$ için $F_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve

$F = (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^T$ olmak üzere; $\forall i$ için F_i fonksiyonlarının 1. mertebeden kısmi türevleri bir $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde mevcut olsun;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

matrisine F fonksiyonunun Jacobian matrisi denir, DF , J_F , $J_F(x)$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial (F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}$

gibi sembollerle gösterilir.

Tanım 16. (Diferansiyel-Cebirsel Denklemler)

$t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_1$ başlangıç değerleri olmak üzere;

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad (2.10)$$

kapalı formunda verilen ifadeye diferansiyel-cebirsel denklem denir.

Diferansiyel-cebirsel denklemini yarı-açık formda,

$$\dot{x} = f(t, u, x) \quad (2.11a)$$

$$0 = g(t, u, x) \quad (2.11b)$$

olarak yazılır. Burada, x diferansiyel değişken, (2.11a) diferansiyel kısım, ve u cebirsel değişken, (2.11b) ise cebirsel kısım olarak adlandırılır.

Tanım 17. (İndeks Kavramı)

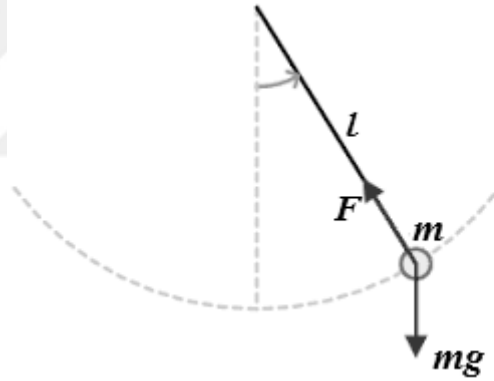
Diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözümleri incelenirken iki anahtar sözcük ile karşılaşılır; çözülebilirlik ve indeks. Literatürde bulunan denklem türlerinin hemen hemen hepsi çözülebilir olduğundan, bu tezde sadece indeks kavramı ve özel olarak türevleme indeksi anlatılacaktır. İncelenen diferansiyel-cebirsel denklemin; fiziksel özelliklerine, matematiksel yapısına ve kullanılan çözüm yöntemi veya yaklaşıma göre; Kröneckers indeks, türevleme

indeksi, tuhaflık indeksi, pertürbasyon indeksi, çözülebilirlik indeksi, geometrik indeks gibi farklı indeks türlerinden bahsedilmesi mümkündür. Verilen tanım ve örneklerde türevleme indeksini kullanacak ve buna kısaca indeks denilecektir.

(2.11) denkleminde $\dot{x}(t)$ fonksiyonunu, $x(t)$ ve t değişkenlerine bağlı sürekli bir fonksiyon olarak ifade edebilmek için alınması gereken minimum türev sayısına denklemin indeksi denir. Bir başka deyişle indeks kavramı, bir diferansiyel-cebirselsel denklemin, bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülmesi için en az kaç defa türev alınması gerektiğini ifade eder.

- Adi diferansiyel denklemler, indeksi “0” olan diferansiyel-cebirselsel denklemlerdir.
- İndeksi 2 veya daha fazla olan diferansiyel-cebirselsel denklemlere, yüksek indeksli diferansiyel-cebirselsel denklem denir. Yüksek indeksli diferansiyel-cebirselsel denklemler aynı zamanda cebirselsel tamamlanmamış olarak da adlandırılır.
- Genel olarak, (2.10) denkleminde $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ non-singüler ise sistem adi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir.

Örnek 2.1 (Basit Sarkaç)



Şekil 4. Basit sarkaç

Yukarıda verilen basit sarkaç için sistem dinamikleri;

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{F}{l}x \\ m\ddot{y} &= mg - \frac{F}{l}y \\ l^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadeler, durum-uzay sistemine dönüştürülürse;

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= \dot{x} \\ x_4 &= \dot{y} \end{aligned} \quad \text{olmak üzere,} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{F}{ml}x_1 \\ \dot{x}_4 &= \frac{g}{l}x_2 \\ 0 &= x_1^2 + x_2^2 - l^2 \end{aligned}$$

diferansiyel-cebirsal denklem sistemi elde edilir. İşlemlerin kolaylığı açısından sistem, birim uzunluk ve birim kütle için ($m = l = 1$) yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -Fx_1 \\ \dot{x}_4 &= -1 - Fx_2 \\ 0 &= x_1^2 + x_2^2 - 1\end{aligned}$$

şekline dönuşür. Sistemin diferansiyel kısmının $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4$ terimlerine göre türevleri alınabilir ancak bu yolla $\dot{F}$ doğrudan elde edilemez. Cebirsal kısmın türevi alınırsa;

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1x_3 + x_2x_4 = 0$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa;

$$\begin{aligned}\dot{x}_1x_3 + x_1\dot{x}_3 + \dot{x}_2x_4 + x_2\dot{x}_4 &= 0 \\ \Rightarrow -x_1^2F - x_2 - x_2^2F + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ \Rightarrow -F - x_2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bir kez daha türev alınırsa;

$$\begin{aligned}-\dot{F} - \dot{x}_2 + 2x_3\dot{x}_3 + 2x_4\dot{x}_4 &= 0 \\ \Rightarrow -\dot{F} - x_4 - 2x_3x_1F - 2x_4(1 + x_2F) &= 0\end{aligned}$$

elde edilir ve (2.12) denklem sistemi adi diferansiyel denkleme dönuşmüş olur. (2.12) diferansiyel- cebirsal denklem sisteminin, adi diferansiyel denkleme dönuştürülmesi için üç defa türev alındığından dolayı bu denklemin indeksi 3 olarak bulunur.

Tanım 18. (Matrisler)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ olmak üzere;}$$

- $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ elemanlarının oluşturduğu diziye A matrisinin esas köşegeni denir.
- A matrisinin esas köşegeninin elemanları toplamına A matrisinin izi denir. $trace(A)$ ile gösterilir. $trace(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ise A matrisine alt üçgen matris denir.

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ise A matrisine üst üçgen matris denir.
- Esas köşegen elemanları hariç diğer elemanlar 0 ise; A matrisine köşegen matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

ile gösterilir.

- $A^T = A$ ise A matrisine simetrik matris denir. $\forall A$ için $A^T A$ ve AA^T simetriktir.
- $A^T = -A$ ise A matrisine ters simetrik matris denir.
- $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $Ax = \lambda x$ eşitliğini sağlayan λ sabitine A matrisinin bir özdeğeri denir. A matrisinin özdeğerlerinin kümesi $\lambda(A)$ ile gösterilir. $\forall A$ için; $\lambda(A^T A) = \lambda(AA^T)$.
- $\lambda_j(A)$, bir A matrisinin j . özdeğeri olmak üzere $\sqrt{\lambda_j(A^T A)}$ sabitine, A matrisinin j . tekil (singüler) değeri denir ve $\sigma_j(A)$ ile gösterilir. A matrisinin tekil değerlerinin kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir. $\sigma_j(A)$ 'lerin en büyüğüne maksimum singüler değer denir, $\sigma_{\max}(A)$ veya $\bar{\sigma}(A)$ ile gösterilir.
- $\det(A) = 0$ ise A matrisine singüler matris denir. Singüler matrislerin tersi yoktur.
- $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ için $\det(A) \neq 0$ ise A matrisine non-singüler veya regüler matris denir. Bir matrisin tersinin olabilmesi için gerek ve yeter koşul non-singüler olmasıdır.
- $Ax = B$ denklem sisteminde $\det(A) \neq 0$ ise sistemin bir tek çözümü vardır. Bu çözüm; $x = A^{-1}B$ şeklinde belirtilir.

Tanım 19. (Blok Matris)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times p}, C \in \mathbb{R}^{r \times n}, D \in \mathbb{R}^{r \times p}$ olmak üzere; $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ şeklindeki matrise

$(m + r) \times (n + p)$ boyutlarında bir blok matris denir.

Tanım 20. (Hamilton Matrisi)

0_n ve I_n sırasıyla $n \times n$ tipinde "sıfır" ve "birim" matrisler olmak üzere; $J_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix}$ ters-simetrik matrisini düşünelim. Bir $H_{2n \times 2n}$ matrisi için HJ simetrik ise yani $(HJ)^T = HJ$ eşitliği sağlanıyor ise H matrisine Hamilton matrisi denir. Hamilton matrisleri

tanım gereği; $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & -H_{11}^T \end{bmatrix}$ şeklinde bir blok yapıya sahiptir, burada H_{12} ve H_{21} simetrik matrislerdir.

Tanım 21. (Benzer Matrisler, Benzerlik Dönüşümü)

$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ olmak üzere, $B = P^{-1}AP$ koşulunu sağlayan bir non-singüler $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrisi varsa A, B 'ye benzer matrisler, $A \mapsto P^{-1}AP$ dönüşümüne de benzerlik dönüşümü denir.

A ve B benzer matrisler olmak üzere;

- $B = P^{-1}AP$ ise $A = PBP^{-1}$
- $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$
- $\lambda(A) = \lambda(B)$
- $t \geq 1$ tamsayısı için $B^t = P^{-1}A^tP$

Tanım 22. (L_2, L_∞ uzayları)

- f, g fonksiyonları bir $[a, b]$ aralığında tanımlı, karesi integrallenebilir ve Lebesgue ölçülebilir ve birer fonksiyon olmak üzere, sonsuz boyutlu $L_2[a, b]$ Hilbert uzayı,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)^* g(t) dt \quad (2.13)$$

iç çarpımı ile tanımlanır.

- Benzer şekilde f, g fonksiyonları birer vektör (veya matris) değerli fonksiyonlar ise iç çarpım,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \text{trace}[f(t)^* g(t)] dt \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır.

- Buradan, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı matris değerli fonksiyonların Hilbert uzayı, $L_2(-\infty, \infty)$ olarak adlandırılır ve

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[f(t)^* g(t)] dt \quad (2.15)$$

iç çarpımı ile tanımlanır.

- $L_2[0, \infty)$: $t < 0$ için fonksiyonların 0 değerini aldığı $L_2(-\infty, \infty)$ 'nin alt uzayıdır.
- $L_2(-\infty, 0]$: $t > 0$ için fonksiyonların 0 değerini aldığı $L_2(-\infty, \infty)$ 'nin alt uzayıdır.
- $j\mathbb{R}$ ekseninde tanımlı ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[F(j\omega)^* F(j\omega)] d\omega < \infty \quad (2.16)$$

koşulunu sağlayan bütün matris değerli, kompleks F fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayına $L_2(j\mathbb{R})$ veya kısaca L_2 uzayı denir. $F, G \in L_2$ için iç çarpım ve norm sırasıyla,

$$\begin{aligned}\langle F, G \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[F(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega \\ \|F\|_2 &= \sqrt{\langle F, F \rangle}\end{aligned}\quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır.

- $j\mathbb{R}$ ekseninde sınırlı, matris değerli F fonksiyonların oluşturduğu,

$$\|F\|_{\infty} = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)] \quad (2.18)$$

normu ile tanımlı Banach uzayına $L_{\infty}(j\mathbb{R})$ veya kısaca L_{∞} uzayı denir.

Tanım 23. (H_2, H_{∞} uzayları)

- $\text{Re}(s) > 0$ için analitik $F(s)$ matris değerli fonksiyonların oluşturduğu uzaya H_2 uzayı denir. H_2 uzayı L_2 uzayının kapalı bir alt uzayıdır. $F \in H_2$ için,

$$\|F\|_2^2 = \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[F(\sigma + j\omega)^* F(\sigma + j\omega)] d\omega \right\} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca;

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[F(j\omega)^* F(j\omega)] d\omega \quad (2.20)$$

olduğu gösterilebilir.

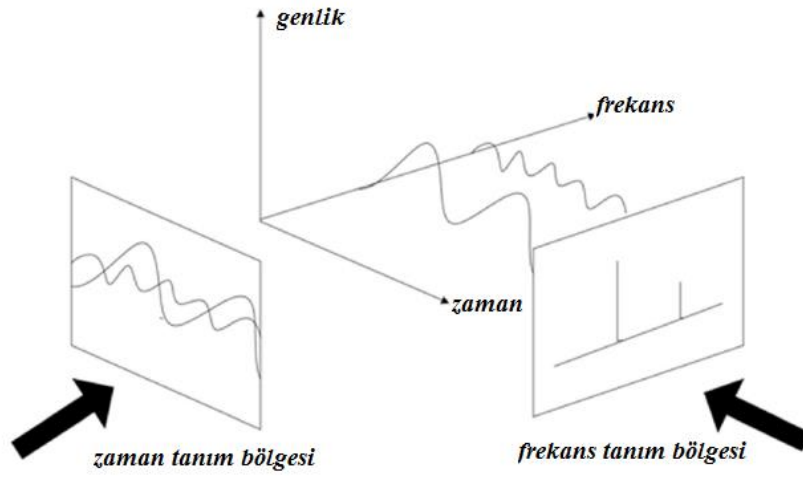
- Açık sağ-yarı düzlemde analitik ve sınırlı F fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya H_{∞} uzayı denir. H_{∞} uzayı L_{∞} uzayının kapalı bir alt uzayıdır ve bir fonksiyonun H_{∞} normu

$$\|F\|_{\infty} = \sup_{\text{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}[F(s)] = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)] \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 24. (Frekans)

Bir olayın, birim zamandaki tekrarlanma sayısına frekans denir, f ile gösterilir. Bir diğer deyişle frekans, sinyalin değişim hızını ifade eder.



Şekil 5. Zaman-frekans bazlı ölçümlerin karşılaştırılması

Tanım 25. (Frekans-Tanım Bölgesi)

Matematiksel fonksiyonların veya sinyallerin zaman bazlı ölçümü yerine frekans bazlı ölçümünün yapıldığı analitik uzayı temsil eder.

Zaman-tanım bölgesi grafiği, bir sinyalin zaman içinde nasıl değiştiğini gösterirken, frekans-tanım bölgesi grafiği, sinyalin ne kadarının, verilen bir frekans bandında olduğunu gösterir. Zaman-tanım bölgesi ile verilen bir fonksiyon veya sinyal çoğunlukla frekans-tanım bölgesinde taşınarak çözülür. Bunun nedeni, zaman-tanım bölgesinde bir diferansiyel denklem ile ifade edilerek verilen problemin, frekans-tanım bölgesine taşındığında bir cebirsel denkleme dönüşmesidir ki bu da problemin çözümünde inanılmaz derecede kolaylık sağlar. Zaman-tanım bölgesi ile verilen bir problemi, frekans-tanım bölgesine taşımak için, problemin yapısına göre birçok dönüşümden yararlanılır. Örneğin, periyodik olmayan sinyaller ve geçici dalgalarda Fourier dönüşümü, elektronik devreler ve kontrol sistemlerinde Laplace dönüşümü, ayrık zamanlı sinyaller ve dijital sinyal işlemlerde Z-dönüşümü, görüntü analizi ve veri sıkıştırmada dalgacık(wavelet) dönüşümü kullanılır. Bu tezde Laplace dönüşümü kullanılmıştır.

Tanım 26. (Zamanda Değişmezlik)

Bir sistemde giriş sinyalleri ve çıkış sinyalleri arasındaki bağıntı zamandan bağımsız ise, bu özelliğe zamanda değişmezlik, bu tür sistemlere de zamanda değişmez veya otonom sistemler ($G(t, x) = G(x)$) denir. Yani,

$G: u(t) \rightarrow y(t)$ sistemi için $u(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$ koşulu sağlanıyor ise G sistemi zamanda değişmezdir.

Örnek 2.2

$y_1(t) = \cos(u(t))$, $y_2(t) = tu(t)$ olmak üzere y_1, y_2 sistemleri $u(t - t_0)$ girişi için incelenirse,

$$y_1\{u(t) \rightarrow u(t - t_0)\} = \cos(u(t - t_0)) = y_1(t - t_0)$$

$y_1\{u(t) \rightarrow u(t - t_0)\} = y_1(t - t_0)$ olduğundan y_1 zamanda değişmez,

$$\begin{aligned} y_2\{u(t) \rightarrow u(t - t_0)\} &= tu(t - t_0) = [tu(t - t_0) - t_0u(t - t_0)] + t_0u(t - t_0) \\ &= y_2(t - t_0) + t_0u(t - t_0) \end{aligned}$$

$y_2\{u(t) \rightarrow u(t - t_0)\} \neq y_2(t - t_0)$ olduğundan y_2 zamanda değişmez değil, olarak bulunur.

Tanım 27. (Laplace Dönüşümü)

Laplace dönüşümü, Pierre-Simon Laplace (1749-1827) tarafından bulunan, reel değerli(zaman-tanım bölgesi) bir fonksiyonu kompleks değerli (frekans-tanım bölgesi) bir fonksiyona dönüştüren bir integral dönüşümüdür. Kompleks frekans-tanım bölgesi, S -bölgesi veya S -düzlemi olarak da bilinir.

$s = \sigma + j\omega$, $\sigma > 0$, $t \geq 0$ olmak üzere, bir $u(t) \in L_2(0, \infty)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü;

$$\hat{u}(s) = (\Lambda u)(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} u(t) dt \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\Lambda \in \mathcal{L}(L_2, H_2)$ sınırlı, lineer bir operatördür. Yani;

- $\Lambda: L_2(0, \infty) \rightarrow H_2$
- $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(L_2, H_2)} = \sup_{u \in L_2} \frac{\|\Lambda u\|_{H_2}}{\|u\|_{L_2}}$

koşullarını sağlar.

$$\boxed{\text{zaman} - \text{tanım bölgesi}(t) \rightarrow \text{frekans} - \text{tanım bölgesi}(s)}$$

$$\boxed{u(t) \in L_2 \rightarrow \boxed{\Lambda} \rightarrow \hat{u}(s) \in H_2}$$

Teorem 1. (Paley-Wiener Teoremi)

- $u \in L_2[0, \infty)$ ise $\Lambda u \in H_2$
- $\hat{u} \in H_2$ ise $\hat{u} = \Lambda u$ koşulunu sağlayan bir $u \in L_2[0, \infty)$ operatörü vardır.

Paley-Wiener teoremine dayanarak Λ operatörünün tersi vardır denilebilir.

Tanım 28. (Ters Laplace Dönüşümü)

Ters Laplace dönüşümü;

$$\Lambda^{-1}: H_2 \rightarrow L_2(0, \infty)$$

$$u(t) = (\Lambda^{-1}\hat{u})(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+j\omega)t} \hat{u}(\sigma + j\omega) d\omega \quad (2.23)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 29. ($\mathcal{H}_\infty$ ($\mathcal{H}_\infty^{n,m}$) Uzayı ve $\mathcal{H}_\infty$ -Normu)

$\mathbb{C}^+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$ kompleks yarı düzleminde, analitik ve sınırlı bütün $\mathbb{C}^{n,m}$ matris değerli fonksiyonların kümesine $\mathcal{H}_\infty$ uzayı denir.

Bir başka deyişle, $\hat{G}: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^{n,m}$ ile tanımlı bir $\hat{G}$ fonksiyonu;

- $\hat{G}(s)$ kompleks sağ-yarı düzlemde analitiktir.
- $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \hat{G}(\sigma + j\omega) = \hat{G}(j\omega)$
- $\sup_{s \in \mathbb{C}^+} \bar{\sigma}(\hat{G}(s)) < \infty$

koşullarını sağlıyor ise $\mathcal{H}_\infty$ uzayının bir elemanıdır denir. Burada, $\mathcal{H}_\infty$,

$$\|\hat{G}\|_\infty = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\hat{G}(s)) \quad (2.24)$$

normuyla tanımlı bir Banach uzayı ve $\bar{\sigma}$ maksimum tekil değerdir.

Verilen bir $\hat{G} \in \mathcal{H}_\infty$ için $\hat{u} \in H_2$ olmak üzere $M_{\hat{G}} \in \mathcal{L}(L_\infty)$ operatörü,

$$(M_{\hat{G}}\hat{u})(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s) \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır. $\hat{G}$ ve $\hat{u}$ fonksiyonları analitik ise $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$ fonksiyonu da analitiktir. Buradan,

- $M_{\hat{G}}: H_2 \rightarrow H_2$
- $\Lambda^{-1}M_{\hat{G}}\Lambda: L_2[0, \infty) \rightarrow L_2[0, \infty)$

şeklinde tanımlı bir fonksiyondur.

Teorem 2. G operatörünün L_2 üzerinde tanımlı, lineer, zamanda değişmez olması için gerek ve yeter koşul, $\Lambda^{-1}M_{\hat{G}}\Lambda$ için,

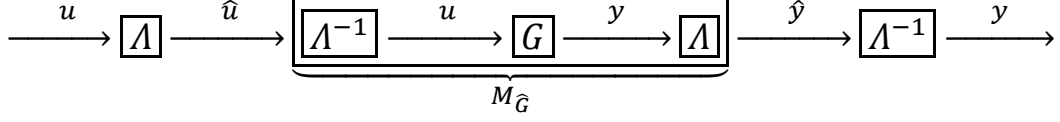
$$(\Lambda G u)(\omega) = \hat{G}(\omega)\hat{u}(\omega) \quad (2.26)$$

koşulunu sağlayan bazı $\hat{G} \in \mathcal{H}_\infty$ operatörlerinin var olmasıdır.

$\mathcal{H}_\infty$, lineer, zamanda değişmez sistemler için transfer fonksiyonları uzayıdır.

$$\begin{array}{l} u(t) \rightarrow \boxed{M_G} \rightarrow y(t) \\ y(t) = G(t)u(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \hat{u}(s) \rightarrow \boxed{M_{\hat{G}}} \rightarrow \hat{y}(s) \\ \hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s) \end{array}$$



Tanım 30. (Transfer Fonksiyonu)

Şekil 4'te blok diyagram ile verilen mekanizmanın sisteminde $u(t)$ girişine ve $y(t)$ çıkışına Laplace dönüşümü uygulanırsa; $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$ bağıntısı elde edilir. Burada; $\hat{G}(s)$ fonksiyonuna transfer fonksiyonu denir.



Şekil 6. Blok diyagram

Teorem 3. $\|G\|_{\mathcal{L}(L_2)} = \|M_{\hat{G}}\|_{\mathcal{L}(H_2)} = \|\hat{G}\|_{\mathcal{H}_\infty}$

Tanım 31. (Kazanç (Sistem Kazancı))

Kazanç, kararlı durumdaki bir sistemde giriş sinyalinin büyüklüğü ile çıkış sinyalinin büyüklüğü arasındaki ilişkiyi gösteren orantılı bir değerdir. Müzik setlerinin ses düğmesi, otomobillerdeki gaz pedalı ve monitörlerdeki parlaklık ayarını sağlayan tuşlar birer kazanç örnekleridir. Bir sistemin kazancı maksimum kazanç ve minimum kazanç arasındaki farka eşittir ve sistemin maksimum kazancı, transfer fonksiyonunun en büyük singüler değeri, minimum kazancı en küçük singüler değeri ile ifade edilir. Bir başka deyişle; bir sistemin kazancı, transfer fonksiyonunun (G) en büyük singüler değeri ile en küçük singüler değeri arasındaki fark anlamına gelir ve $\mathcal{H}_\infty$ ile ilişkilendirilebilir. $\mathcal{H}_\infty$ kontrol için de motivasyon bu noktadan kaynaklanmaktadır. Yani $\sup_u \frac{\|Gu\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}}$ 'yi minimize edilmesi işlemidir ki bu da $\frac{\|\hat{G}\hat{u}\|}{\|\hat{u}\|}$ normunun bulunması demektir. $\mathcal{H}_\infty$ uzayının sonsuz boyutlu olması kontrolör tasarımı zorlaştırır, ki bu da araştırmacıların durum-uzay sistem kontrolörlerine yönelmesine yol açar.

Tanım 32. (Durum-Uzay Sistemleri)

$\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$ birer vektör uzayı, $f, g: [t_0, t_f] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ şeklinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar ve $t \in [t_0, t_f]$, $(t_f \in [0, \infty))$ olmak üzere, bir kontrol sistemi;

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.27a)$$

$$y(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.27b)$$

diferansiyel-cebirselsel denklem sistemi ile ifade edilir. Burada,

$\mathcal{X}$; durum uzayı, $x: [t_0, t_f] \rightarrow \mathcal{X}$; durum vektörü,

$\mathcal{U}$; giriş uzayı, $u: [t_0, t_f] \rightarrow \mathcal{U}$; kontrol vektörü,

$\mathcal{Y}$; çıkış uzayı, $y: [t_0, t_f] \rightarrow \mathcal{Y}$; çıkış vektörü,

(2.27a) diferansiyel denklemi, durum denklemi, (2.27b) cebirselsel denklemi ise gözlemci denklem olarak adlandırılır.

u girişi ve y çıkışı için

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (2.28)$$

n . mertebeden lineer denklemi ile ifade edilen bir sistem düşünelim.

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki denklem sistemini vektör-matris formunda ifade edilirse;

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere; $\dot{x} = Ax + Bu$ formunda yazılır. Ayrıca y çıkışı,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ denilirse, $y = Cx$ halini alır. Bu iki denklemden;

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

diferansiyel-cebirselsel denklem sistemi elde edilir.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ olmak üzere diferansiyel-cebirselsel denklemlerin en genel hali;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.29)$$

şeklinde ifade edilir. Bu formda ifade edilen denklemlere durum-uzay denklem sistemleri denir.

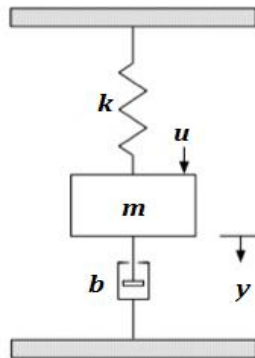
(2.29) sürekli, lineer dinamik sistemine Laplace dönüşümü uygulanıp gerekli işlemler yapılırsa sistemin transfer matrisi (veya fonksiyonu);

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanır ve $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ olarak da gösterilir.

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.31)$$

Örnek 2.3 (Mekanik (kütle-yay-amortisör) sistemler)



Şekil 7. Kütle-yay-amortisör sistemleri

u : kütleye uygulanan dış kuvvet (giriş)

y : yer değiştirme (çıkış)

m : kütle

k : yay sabiti

b : sürtünme direnç katsayısı

olmak üzere; Şekil 7’de verilen mekanik (kütle-yay-amortisör) sisteme Newton’un 2. yasası uygulanırsa sistem,

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \quad (2.32)$$

denklemini ile ifade edilir. Bu denklemi durum-uzay sistemine dönüştürmek için,

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \end{aligned} \quad \text{denilirse,} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

diferansiyel-cebirselsel denklem sistemi elde edilir. Sistem vektör-matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Bir başka deyişle;

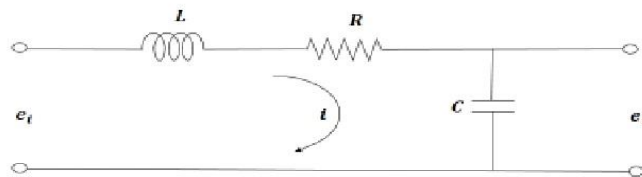
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

katsayı matrisleri olmak üzere, (2.32) sistemi,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

durum-uzay sistemine dönüştürülmüş olur.

Örnek 2.4 (Elektrik (RLC) devresi)



Şekil 8. RLC devresi

e_i : giriş

e_o : çıkış

i : devreden geçen akım

R : rezistör (direnç)

L : indüktör (bobin)

C : kapasitör (kondansatör)

olmak üzere; Şekil 2.5'te verilen bir elektrik (RLC) devresine Kirchoff kanunu uygulanırsa sistem,

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i \quad (2.33)$$

denklemini ile ifade edilir. Bu denklemi durum-uzay sistemine dönüştürmek için,

$$x_1 = y = e_o$$

$$x_2 = \dot{e}_o$$

$$u = e_i$$

denilirse,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u$$

$$y = x_1$$

sistemi elde edilir. Sistem vektör-matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Bir başka deyişle;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = 0$$

katsayı matrisleri olmak üzere, (2.33) sistemi,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

durum-uzay sistemine dönüştürülmüş olur.

Tanım 33. (Realizasyon)

$G(s)$, $r \times m$ boyutlarında bir transfer fonksiyonu olsun, $C(sI - A)^{-1}B + D$ koşulunu sağlayan (A, B, C, D) dörtlüsüne $G(s)$ transfer fonksiyonunun bir durum-uzay realizasyonu denir.

Bir transfer fonksiyonunun birden fazla durum-uzay realizasyonu vardır. Bu realizasyonlardan derecesi en küçük olana minimal realizasyon denir.

Teorem 4. (A, B, C, D) ve $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, $G(s)$ transfer fonksiyonunun aynı dereceye sahip iki farklı realizasyonu olsun. Bu durumda;

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B, \quad \tilde{C} = CT, \quad \tilde{D} = D \quad (2.34)$$

koşulunu sağlayan bir T non-singüler matrisi vardır ve bu matris tektir.

Bu benzerlik dönüşümü blok matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] &\approx \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} T^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \quad (2.35) \end{aligned}$$

Teorem 5. (A, B, C, D) dörtlüsünün, $G(s)$ transfer fonksiyonunun minimal realizasyonu olması için gerek ve yeter koşul (A, B, C, D) 'nin kontrol edilebilir ve gözlenebilir bir sistem olmasıdır.

Tanım 34. (Dengelenmiş Realizasyon)

(A, B, C, D) kararlı (kontrol edilebilir ve gözlenebilir) bir sistem olmak üzere, kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik Grammianlarının diagonal bir Σ matrisine eşit olduğu bir realizasyon vardır. Bu realizasyona, dengelenmiş realizasyon veya içten dengelenmiş realizasyon denir. D matrisi dengeleme işlemleri sırasında hiç bir şekilde değişime uğramadığından dolayı realizasyon (A, B, C) olarak da ifade edilir.

Tanım 35. (Pozitif Tanımlı Matris)

Bütün özdeğerleri pozitif olan simetrik matrislere pozitif tanımlı matrisler denir. Bir matrisin pozitif tanımlı olup olmadığını anlamak için birden fazla yöntem vardır.

$\lambda_i, i = 1, 2, \dots$ için P matrisinin özdeğerleri olmak üzere aşağıdaki ifadeler özdeştir.

- P matrisi pozitif tanımlıdır.
- $\forall \lambda_i > 0$.
- Bütün pivot elemanları pozitifdir.
- Bütün sol üst determinantları pozitifdir.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$ için $x^T P x > 0$. Fizikte bir sistemin enerjisi $x^T P x$ şeklinde ifade edildiğinden bu ifadeye enerji-bazlı tanım da denir.

Tanım 36. (Lineer Matris Eşitsizliği)

$x \in \mathbb{R}^n$, $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $i = 1, 2, \dots, n$ simetrik matrisler olmak üzere;

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.36)$$

şeklindeki ifadeye lineer matris eşitsizliği denir. Burada; x değişken F_i , $i = 1, 2, \dots$ matrisleri simetrik katsayı matrisleridir. Herhangi iki pozitif tanımlı matrisin toplamı da pozitif olduğundan $F(x)$ 'in pozitif tanımlı bir matris olduğu açıkça görülebilmektedir. (2.36) eşitsizliği n tane polinom eşitsizliği şeklinde de ifade edilebilir. $F(x)$ matrisi pozitif tanımlı bir matris olduğundan bütün sol üst determinantları pozitif olmalıdır.

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{bmatrix} F(x)_{11} & F(x)_{12} & \cdots & F(x)_{1n} \\ F(x)_{21} & F(x)_{22} & \cdots & F(x)_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(x)_{n1} & F(x)_{n2} & \cdots & F(x)_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} & F_{0,12} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,12} & \cdots & F_{0,1n} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,1n} \\ F_{0,21} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,21} & F_{0,22} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,22} & \cdots & F_{0,2n} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{0,n1} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,n1} & F_{0,n2} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,n2} & \cdots & F_{0,nn} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde yazılıp sol üst determinantları sırasıyla bulunursa;

$$\det[F(x)_{11}] = F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} > 0 \quad (\text{lineer eşitsizlik})$$

$$\det \begin{bmatrix} F(x)_{11} & F(x)_{12} \\ F(x)_{21} & F(x)_{22} \end{bmatrix} = (F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11})(F_{0,22} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,22})$$

$$- (F_{0,12} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,12})(F_{0,21} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,21}) > 0 \quad (\text{kuadratik eşitsizlik})$$

⋮

$$\det[F(x)] > 0 \quad (n. \text{ dereceden polinom eşitsizliği})$$

Bulunan n tane eşitsizliğin ortak çözümünden sistemin olurlu kümesi elde edilir.

Tanım 37. (Olurlu Küme-Feasible Set)

Bir lineer programlamaya ilişkin eşitsizlik sistemini ve kısıtlamaları sağlayan olası bütün koordinatların kümesine olurlu küme (feasible set) veya olurlu bölge (feasible region) denir.

Tanım 38. (Kararlılık)

Kararlılık, sistem teorisi ve mühendislikte önemli bir yere sahiptir. Dinamik sistem çalışmalarında birçok kararlılık tipi mevcuttur. Denge noktası kararlılığı (equilibrium point), giriş-çıkış kararlılığı, periyodik yörünge kararlılığı vs. Bu bölümde denge noktası kararlılığı

incelenecektir. Denge noktası kararlılığı Lyapunov anlamında kararlılık olarak da bilinir. Lyapunov bu teoriyi ilk olarak 1892'de "The General Problem of Stability of Motion" adlı tezinde işlemiştir. Bu nedenle bu kararlılık, "Lyapunov kararlılığı" adını almıştır. Denklemin bütün çözümleri bir denge noktası civarında başlayıp yine denge noktası civarında kalmaya devam ediyorsa, denge noktası kararlıdır, aksi takdirde kararsızdır denir. Ayrıca sistemin bütün çözümleri denge noktası civarında başlamakla kalmayıp, zaman (t) sonsuza giderken limiti alındığında denge noktasına gidiyorsa, denge noktası asimptotik kararlıdır denir.

Zamana göre sürekli bir

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.37)$$

sistemini ele alalım.

- **Denge Noktası:** $\forall t$ için $f(t, x_e) = 0$ koşulunu sağlayan x_e 'ye denge noktası denir. Sistemin genelliğini kaybetmeden $x_e = 0$ noktası denge noktası olarak kabul edilir. Non-linear sistemlerde (hatta bazı lineer sistemlerde) birden fazla denge noktası olabilir.
- **Kararlılık:** (2.37) sisteminde, $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x(t_0)\| < \delta$ iken $\forall t > t_0$ için $\|x(t)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ varsa, "0" denge noktası Lyapunov kararlıdır (veya Lyapunov lokal kararlı) denir.
- **Asimptotik Kararlılık:** "0" denge noktası; kararlı ve $\|x(t_0)\| < \delta$ iken $\forall t > t_0$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ olacak şekilde bir $\delta(t_0)$ varsa Lyapunov asimptotik kararlıdır denir.
- **Global Asimptotik Kararlılık:** "0" denge noktası, $\forall \delta > 0$ için asimptotik kararlı ise global asimptotik kararlıdır denir.
- **Üstel Kararlılık:** "0" denge noktası; Lyapunov kararlı ve $\forall \|x(t_0)\| < \delta$ ve $M < \infty$, $\alpha > 0$ sabitleri için $\|x(t)\| < e^{-\alpha(t-t_0)} M \|x_0\|$ olacak şekilde bir δ varsa üstel kararlıdır denir. α 'ya üstel yakınsaklık oranı denir.

Yukarıda da belirtildiği gibi denge noktası "0" olarak kabul edilir. Denge noktasının 0'dan farklı olması durumunda bile koordinat değişimi ile denge noktası orijine kaydırılabilir.

Tanım 39. (Lyapunov Fonksiyonları) 1. mertebeden türevi sürekli bir $V(x, t)$ fonksiyonunu ($V(x, t) \in C^1$) düşünelim. Eğer, $\forall x \neq 0$, $\exists r > 0$ ve $\|x\| < r$ için, $V(x, t) > 0$ ve $V(0, t) = 0$ oluyorsa V 'ye lokal pozitif tanımlı fonksiyon denir.

Örnek 2.5

- $V(x) = 1 - \cos x$

- $V(x) = x^2$
- $V(x) = x^T P x$ (P pozitif tanımlı bir matris ise)

fonksiyonları birer lokal pozitif tanımlı fonksiyonlardır.

Teorem 6. $V(x, t) \in C^1$ fonksiyonu lokal pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer;

- $\forall t > 0$ için ve $\forall x \in B_r$ için $\dot{V}(x) \leq 0$ oluyor ise $x_e = 0$ denge noktası kararlıdır.
- $\forall t > 0$ için ve $\forall x \in B_r$ için $\dot{V}(x) < 0$ oluyor ise $x_e = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \nabla V \dot{x} = \nabla V f \quad (2.38)$$

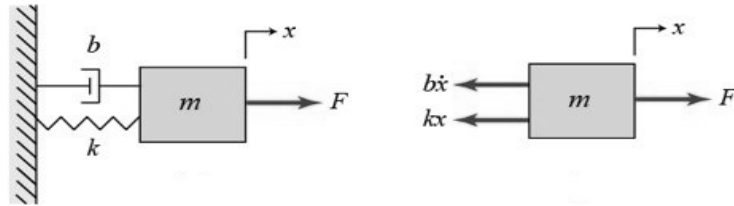
olduğunu hatırlayalım.

Lyapunov fonksiyonları, fiziksel olarak enerji kavramına, geometrik olarak ise sistemin yörüngesi üzerinde ilerlerken $x_e = 0$ denge noktasına kalan uzunluğu ifade eder. Bir sistemin Lyapunov kararlılığı incelenirken, öncelikle Lyapunov aday fonksiyonlarının oluşturulması gerekir. Kısaca ifade edecilecek olursa, üzerinde çalışılan Lyapunov aday fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır,

- $\forall x \neq 0$ için $V(x, t) > 0$,
- $x = 0$ için $V(x, t) = 0$,
- $\dot{V}(x) \leq 0$

Herhangi bir sistem için sonsuz sayıda aday Lyapunov denklemi yazılabilir.

Örnek 2.6 (Kütle-yay sistemleri)



Şekil 9. Kütle –yay sistemleri

F : uygulanan dış kuvvet,

m : kütle,

k : yay sabiti,

b : sönümleme(damping) sabiti

olmak üzere, Şekil 9’da verilen kütle-yay sisteminin x değişkenine bağlı denklemi,

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x \quad (2.39)$$

formundadır. Bu ifadenin, aday Lyapunov denklemi, toplam enerji (kinetik+potansiyel) denklemi olarak, yani;

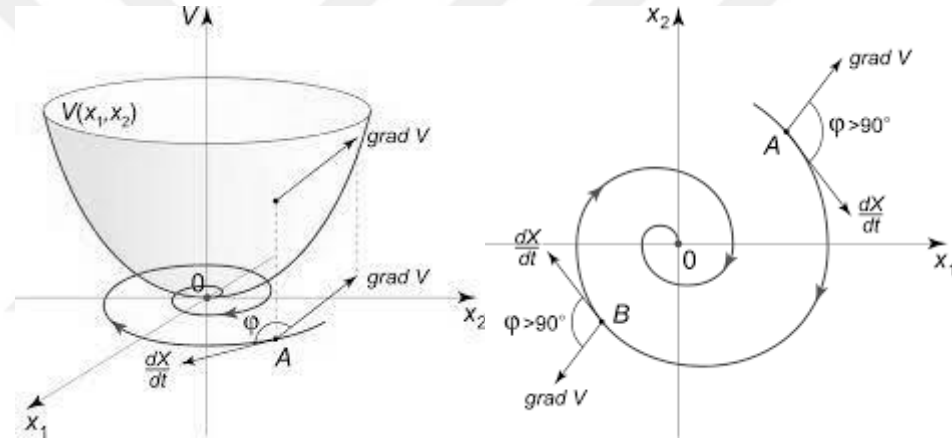
$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

şeklinde karşımıza çıkacaktır. $V(x) > 0$ ve $V(0) = 0$ olduğu açıkça görülmektedir. $\dot{V}(x)$ 'i kontrol edersek;

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = m\dot{x}\left(-\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x\right) + kx\dot{x} = -b\dot{x}^2 - kx\dot{x} + kx\dot{x} = -b\dot{x}^2 \leq 0$$

elde ederiz. Buradan; $V(x)$ 'in (2.39) sistemi için bir Lyapunov denklemi olduğu söylenebilir.

Örnek 2.7 (Lyapunov Fonksiyonlarının Geometrik Yorumu)



Şekil 10. Lyapunov fonksiyonlarının geometrik yorumu.

Şekil 10'da görülen 3-boyutlu fonksiyonun Lyapunov fonksiyonu, daralarak orijine (denge noktası) varan helezonik yapıdaki pozitif değerli bir fonksiyondur. Bu fonksiyon üzerindeki eğri uzunlukları orijine yaklaştıkça azalmaktadır. Bu da fonksiyonun azalan bir fonksiyon yani 1. türevinin negatif olduğu anlamına gelir.

Tanım 40. (Hurwitz Matrisi)

$\forall a_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n, \quad (a_n \neq 0) \quad (2.40)$$

polinomu verilsin. $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde $\mathcal{D}$ bölgesi basit bağlantılı açık bir küme olsun. Eğer (2.40) polinomunun bütün kökleri $\mathcal{D}$ bölgesinde ise bu polinoma $\mathcal{D}$ -kararlı polinom denir. Eğer;

- $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks sol açık yarı düzlemde ise $\mathcal{D}$ -kararlılık yerine Hurwitz kararlılık

- $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde birim disk ise $\mathcal{D}$ -kararlılık yerine Schur kararlılık terimleri kullanılır.

$P(z)$ polinomu için;

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & a_n & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisine, $P(z)$ polinomunun Hurwitz matrisi denir. Bu tanım 1895 yılında Adolf Hurwitz tarafından bulunmuştur.

A kompleks (veya reel) değerli bir kare matris olmak üzere; A matrisinin bütün özdeğerlerinin reel kısmı negatif ise A matrisine kararlı (veya Hurwitz) denir.

Lineer Sistemlerin Kararlılığı:

$\dot{x} = Ax$ şeklindeki bir lineer sistemi düşünelim. Bu sistem için Lyapunov aday fonksiyonu, P pozitif tanımlı bir matris olmak üzere; $V = x^T P x$ şeklinde olacaktır. V fonksiyonunun, Lyapunov olma koşullarından ilk ikisini sağladığı aşıkardır. Şimdi üçüncü yani $\dot{V}(x) \leq 0$ koşulu incelenirse;

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x \quad (2.41)$$

elde edilir. $\dot{V} < 0$ olması için $A^T P + P A < 0$ olması gerekir. Bir başka deyişle, Q pozitif tanımlı bir matris olmak üzere; $A^T P + P A = -Q$ dersek; $x \neq 0$ için, $\dot{V} = -x^T Q x$ olarak da ifade edilebilir. Buradan aşağıdaki teoremleri yazılabilir.

Teorem 7. $\dot{x} = Ax$ sisteminin kararlı olması için gerek ve yeter koşul A 'nın Hurwitz olmasıdır.

Hurwitz kararlılık, kontrol teorisinde önemli bir yere sahiptir. Kontrol matrisinin özdeğerlerinin negatif reel değerli olması negatif geri besleme olduğu anlamına gelir. Bir A matrisinin Hurwitz kararlılığı Lyapunov Teoremi ile ifade edilir.

Teorem 8. (Lyapunov Teoremi)

Bir A matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul;

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ise $A^* P + P A < 0$

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ise $A^T P + PA < 0$

olacak şekilde bir $P > 0$ matrisinin olmasıdır.

Yukarıda verilen eşitsizliklere Lyapunov eşitsizlikleri denir. Lyapunov eşitsizlikleri bir $Q > 0$ matrisi için aşağıda verildiği gibi birer denklem olarak da ifade edilebilir.

- $A^* P + PA = -Q$
- $A^T P + PA = -Q$

eşitliklerine ise Lyapunov denklemleri denir.

Tanım 41. (Kontrol Edilebilirlik)

Kontrol edilebilirlik ilkesi, kararsız sistemlerin geri besleme ve optimal kontrol yardımıyla kararlı hale getirilmesi gibi problemlerde kullanıldığı için, kontrol teorisinde çok önemli bir rol oynar.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{q \times n}, D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ olmak üzere (2.29)'da verilen;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

şeklindeki diferansiyel-cebirselsel denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için kontrol edilebilirlik; x sistem durumlarının verilen bir t_0 başlangıç anından istenen sonlu bir t_f anına sürülmesini mümkün kılan bir u kontrol sinyalinin var olması anlamına gelir.

$$t \in (t_0, t_f) \text{ için } \exists u(t) : \quad x(t_0) \xrightarrow{u(t)} x(t_f)$$

Diğer bir ifadeyle kontrol edilebilirlik, bir sistemin, giriş sinyali kullanılarak kararlı hale getirilip getirilemeyeceğini belirlemeye yarayan bir kriterdir. Bir sistemi kararlı kılacak kontrol sinyalinin tasarlanabilmesi için sistemin mutlaka kontrol edilebilmesi gerekir.

(2.29) sisteminin kontrol elemanları (A, B) ikilisi ile ifade edilir;

- (A, B) ikilisinin kontrol edilebilirlik matrisi;
- (A, B) ikilisinin kontrol edilebilirlik Grammianı ise;

$$W_C(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 9. (A, B) ikilisi için aşağıdaki ifadeler özdeştir.

- (A, B) kontrol edilebilirdir.
- $\text{rank}[\mathcal{C}(A, B)] = n$ 'dir.
- $W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$ matrisi $\forall t > 0$ için non-singülerdir.
- $[A - \lambda I \quad B]$ matrisi, bütün λ özdeğerleri için full-satır rankına sahiptir.

İkinci prosedür Kalman Testi olarak da bilinir. $\mathcal{C}(A, B)$ matrisinin rankı yerine determinantı yardımıyla kontrol edilebilirliği incelenebilir. Yani, $\det[\mathcal{C}(A, B)] \neq 0$ ise sistem kontrol edilebilirdir, aksi takdirde kontrol edilebilir değildir.

Burada; $\mathcal{C}(A, B)$, $W_c(t)$, $[A - \lambda I \quad B]$ sırasıyla $n \times np$, $n \times n$, $n \times (n + p)$, boyutlarında matrislerdir.

Örnek 2.8 $x = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$ $y = [0 \quad 1]x$

dinamik denklemleriyle verilen sistemin kontrol edilebilirliğini incelenirse;

sistem 2-boyutlu olduğundan $n = 2$ 'dir, katsayı matrisleri,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

olup kontrol edilebilirlik matrisi $\mathcal{C}(A, B) = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\text{rank}[\mathcal{C}(A, B)] = 2$

(veya $\det[\mathcal{C}(A, B)] = 1 \neq 0$) elde edilir. Dolayısıyla sistem kontrol edilebilirdir.

Tanım 42. (Gözlenebilirlik)

Gözlenebilirlik ilkesi; bir sistemde verilen herhangi bir u kontrol sinyali için, y sistem çıkışının değişimi incelenerek, x sistem durumunun değişimi hakkında bilgi sahibi olup olunamayacağını ifade eder. Bir diğer ifadeyle gözlenebilirlik; sistem çıkışlarına bakılarak sistemin bütününün davranışlarının tanımlanmasının mümkün olmasıdır. Bir sisteme gözlemci (observer) tasarlanabilmesi için sistemin gözlenebilir olması gerekir.

(2.29) sisteminin gözlem elemanları (A, C) ikilisi ile ifade edilir;

- (A, C) ikilisinin gözlenebilirlik matrisi;

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

- (A, C) ikilisinin gözlenebilirlik Grammian'ı;

$$W_O(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 10. (A, C) ikilisi için aşağıdaki ifadeler özdeştir.

- (A, C) gözlenebilirdir.
- $\text{rank}[\mathcal{O}(A, C)] = n$ 'dir.
- $W_O(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$ matrisi $\forall t > 0$ için non-singülerdir.
- $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ matrisi, bütün λ özdeğerleri için full-sütun rankına sahiptir.

Burada; $\mathcal{O}(A, C)$, $W_O(t)$, $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ sırasıyla $nq \times n$, $n \times n$, $(n + q) \times n$, boyutlarında matrislerdir.

Örnek 2.9 $x = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$

dinamik denklemleriyle verilen sistemin gözlenebilirliğini incelenirse;

sistem 2-boyutlu olduğundan $n = 2$ 'dir, katsayı matrisleri,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

olup gözlenebilirlik matrisi $\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\text{rank}[\mathcal{O}(A, C)] = 1 \neq n$ (veya $\det[\mathcal{O}(A, C)] = 0$) elde edilir. Dolayısıyla sistem gözlenebilir değildir.

Kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik birbirinin dualidir.

Teorem 11. (A, B) ikilisinin kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter koşul (A^T, B^T) ikilisinin gözlenebilir olmasıdır.

Teorem 11 (A, C) ikilisi üzerinden değerlendirilirse benzer şekilde; " (A, C) ikilisinin gözlenebilir olması için gerek ve yeter koşul (A^T, C^T) ikilisinin kontrol edilebilir olmasıdır" sonucu elde edilir.

Tanım 43. (Hankel Singüler Değerler)

W_C, W_O (2.29) sisteminin kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik Grammianları olmak üzere; $W_C W_O$ çarpımının singüler değerlerine (2.29) sisteminin Hankel singüler değerleri denir, $j = 1, 2, \dots$ olmak üzere, σH_j ile gösterilir.

Tanım 44. (Tekil (Singüler) Değer Ayrışımı)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $\text{rank}(A) = r = \min(m, n)$ olmak üzere, A matrisinin $A = U\Sigma V^T$ şeklinde ifade edilmesine A 'nın tekil değer ayrışımı denir. Burada; U ve V sırasıyla $m \times m$ ve $n \times n$ boyutlarında orthogonal matrisler, ($U^T U = I_m$ ve $V^T V = I_n$) ve Σ ise A matrisinin singüler değerlerini içeren yarı-diagonal bir matristir. Matematiksel olarak,

$$A = U\Sigma V^T = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}}_{u(m \times m)} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \sigma_r & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma(m \times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}}_{V^T(n \times n)} \quad (2.42)$$

şeklinde sembolize edilir. Burada; $u_1, u_2, \dots, u_m$, U 'nun ortonormal sütunları, $v_1, v_2, \dots, v_m$, V^T 'nin ortonormal sütunları ve $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ A 'nın $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ şeklinde sıralanmış tekil değerleridir. Bir A matrisinin tekil değerlerinin, $A^T A$ matrisinin özdeğerlerinin kareköklerine eşit olduğunu hatırlayalım.

Tanım 45. (Cholesky Faktörizasyonu)

L bir alt üçgen matris olmak üzere, her pozitif tanımlı, simetrik A matrisi;

$$A = LL^T \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir. Bu açılıma Cholesky faktörizasyonu, L matrisine de A 'nın Cholesky faktörü denir.

Tanım 46. (Singüler Pertürbasyon Modeller)

$\mu > 0$ bir parametre olmak üzere, μ -katsayılı bazı durum bileşen türevleri içeren dinamik sistemlere, singüler pertürbasyon modeller denir,

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \quad (2.44a)$$

$$\mu \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad (2.44b)$$

$$y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du \quad (2.44c)$$

denklem sistemi ile ifade edilir. Verilen sistemde;

x_1 : yavaş değişkenler

x_2 : hızlı değişkenler

(2.44a): yavaş (güçlü) alt sistem

(2.44b): hızlı (zayıf) alt sistem

μ : pertürbasyon parametresi

olarak adlandırılır.

MATERYAL VE METOT

Bisection Metodu

Kontrol teorisinde özdeğerler; sistemin kararlılığını, Hankel singüler değerler ise sistemin her bir durum bileşeninin enerjisini ifade eder. Bisection algoritmasının temeli, sistem kararlılığı ve durum bileşenlerinin enerjisi arasındaki ilişki üzerine kurulmuştur. Yani sistemin transfer matrisinin (3.1)'te verilen sanal eksen üzerindeki Hankel singüler değerlerinin (3.2)'de verilen M_γ Hamilton matrisinin sanal değerli özdeğerleri ile ilişkilendirme sürecidir.

$$\begin{aligned}\gamma_{lb} &= \max\{\sigma_{\max}(D), \sigma_{H_1}\} = \max\{\sigma_{\max}(D), \sqrt{\text{Tr}(W_c W_o)/n}\} \\ \gamma_{ub} &= \sigma_{\max}(D) + 2 \sum_{j=1}^n \sigma_{H_j} = \sigma_{\max}(D) + 2\sqrt{n \text{Tr}(W_c W_o)}\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}M_\gamma &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D & \gamma I \\ \gamma I & -D^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & B^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}D^TC & -\gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^T S^{-1}C & -A^T + C^T DR^{-1}B^T \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.2)$$

(2.29) sisteminde A matrisi kararlı ve $\varepsilon > 0$ hata payı olmak üzere, bisection algoritması aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Adım 1. Algortimayı başlatmak için Hankel singüler değerler yardımıyla alt(γ_{lb}) ve üst(γ_{ub}) sınırları aşağıdaki gibi bul.

$$\begin{aligned}\gamma_{lb} &= \max\{\sigma_{\max}(D), \sigma_{H_1}\} \\ \gamma_{ub} &= \sigma_{\max}(D) + 2 \sum_{j=1}^n \sigma_{H_j}\end{aligned}\quad (3.3)$$

Adım 2. $\gamma = (\gamma_{lb} + \gamma_{ub})/2$ değerini hesapla.

Eğer $2(\gamma_{ub} - \gamma_{lb}) < \varepsilon$ ise sonlandır.

Adım 3. M_γ Hamilton matrisini bul.

M_γ Hamilton matrisinin sanal eksen üzerinde en az bir özdeğeri varsa $\gamma_{lb} = \gamma$ olarak al.

Aksi halde $\gamma_{ub} = \gamma$ olarak al.

Balanced Truncation Yaklaşımı ve Model İndirgeme

Büyük uzay yapıları ve güç sistemlerinin kontrol dizaynları gibi üst düzey kontrol problemlerinde, çok fazla sayıda bileşen ve parametre içeren modellerle karşı karşıya kalındığından dolayı bu çalışmalar aşırı zaman ve efor gerektirir. Bu zorluklar, kontrol teorisyenlerini; söz konusu modelleri uygun boyutlu, düşük mertebeli, pratikte dizayn edilmesi daha kolay olan problemler haline getirmek için bazı işlemler bulma arayışına sokmuştur. Bu işlemlere model indirgeme denir. Model indirgemedede temel düşünce; orijinal modeli, yapısını bozmadan daha küçük boyutlu (çözülmesi daha kolay) bir modele dönüştürmektir. Bir başka deyişle model indirgeme; "öncelikle sisteme uygun bir dengelenmiş realizasyon bulma ve bu realizasyonu, indirgenmiş mertebeli modele uygun olacak şekilde kesme" işlemine dayanır. Bu işlem, balanced truncation yaklaşımı olarak bilinir.

(2.29) sistemi asimptotik kararlı ve minimal bir sistem olmak üzere, balanced truncation yaklaşımının algoritması MATLAB komutlarıyla beraber aşağıda verilmiştir.

Adım 1. W_c kontrol edilebilirlik ve W_o gözlenebilirlik Grammianları, Lyapunov denklemleri yardımıyla,

$$Wc=gram(sys, 'c')$$

$$Wo=gram(sys, 'o')$$

komutları kullanılarak bulunur.

Adım 2. W_c kontrol edilebilirlik ve W_o gözlenebilirlik Grammianlarının Cholesky faktörleri;

$$\begin{aligned} W_c &= L_c L_c^T \\ W_o &= L_o L_o^T \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$Lc=chol(Wc, 'lower')$$

$$Lo=chol(Wo, 'lower')$$

komutları kullanılarak bulunur.

Adım 3. $L_o^T L_c$ çarpımının singüler değer açılımı;

$$L_o^T L_c = U \Sigma V^T \quad (3.5)$$

$$[U, S, V]=svd(Lo' * Lc)$$

komutu kullanılarak bulunur.

Adım 4. $T = L_c V \Sigma^{-1/2}$ dönüşümü yapılır ve dengelenmiş sistemin katsayı matrisleri;

$$\tilde{A} = T^{-1} A T, \quad \tilde{B} = T^{-1} B, \quad \tilde{C} = C T, \quad \tilde{D} = D \quad (3.6)$$

benzerlik dönüşümleri ile elde edilerek, yeni sistemin kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik Grammianları sırasıyla;

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_c &= T^{-1}W_cT^{-T} \\ \widetilde{W}_o &= T^TW_oT\end{aligned}\quad (3.7)$$

olarak bulunur. Burada;

$$\widetilde{W}_c = \widetilde{W}_o = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.8)$$

şeklindedir.

Singüler Pertürbasyon Metodu

Singüler pertürbasyon modellerin analizi, singüler pertürbasyon teorisi ile yapılır. Singüler pertürbasyon teorisi; (2.44) denkleminin çözümlerinin davranışlarını, bir $0 \leq t \leq T$ (veya $0 \leq t < +\infty$) aralığında $\mu \rightarrow 0$ için inceler. (2.44) tipindeki indirgenmiş bir modelin, bir yavaş bir de ihmal edilebilir hızlı bir alt sistemden oluştuğu daha önce ifade edilmişti. Singüler pertürbasyon metodunun temel prensibi; modelin hızlı (yüksek frekanslı) kısımlarının ihmal edilip, yavaş (düşük frekanslı) kısımlarının korunması olduğundan bir baskın mod durumu ile ilişkilendirilebilir. Bir başka deyişle, verilen sistemin çözümlerini $\mu = 0$ durumu için inceleme sürecidir. μ parametresi incelenen sistemin yapısına göre farklı kavramlara karşılık gelebilir. Örneğin; güç sistemlerinde makine reaktansları veya voltaj regülatörlerindeki geçici akımları, endüstriyel kontrolde aktüatörleri, biyokimyasal modellerde enzimleri, nükleer reaktör modellerinde ise hızlı nötronları temsil eder.

Balanced truncation yaklaşımı ile elde edilen indirgenmiş sistem;

$$\tilde{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline -\frac{\tilde{A}}{\tilde{C}} & -\frac{\tilde{B}}{\tilde{D}} \end{array} \right] \quad (3.9)$$

olmak üzere, singüler pertürbasyon metodunun algoritması aşağıda verilmiştir.

$$\textbf{Adım 1. } \tilde{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline -\frac{\tilde{A}}{\tilde{C}} & -\frac{\tilde{B}}{\tilde{D}} \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \text{ dengelenmiş sistemi, yavaş (güçlü) ve}$$

hızlı (zayıf) olmak üzere iki alt sisteme ayrılır. Bu sistemler, $r \ll n$ için

$A_{11}, \Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ olmak üzere güçlü alt sistemin katsayı matrisi A_{11} seçilerek,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C_1 \quad C_2], \quad \tilde{D} = D \quad (3.10)$$

formunda blok matrislere ayrılıp bir μ pertürbasyon parametresi eklenerek aşağıdaki gibi yeniden yazılır.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \mu \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du \end{aligned} \quad (3.11)$$

Adım 2. (3.11) sisteminin zayıf kısmı elimine edilerek ($\mu = 0$),

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ 0 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y &= C_1x_1 + C_2x_2 + Du \end{aligned} \quad (3.12)$$

zayıf değişken

$$x_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1 - A_{22}^{-1}B_2u \quad (3.13)$$

olarak bulunur.

Adım 3. Bulunan zayıf değişken diğer denklemlerde yerine yazılıp sistemin son hali aşağıdaki gibi bulunur.

$$G_f(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ \hline C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} & D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{array} \right] \quad (3.14)$$

Adım 4. $G_f(s)$ 'nin $\mathcal{H}_\infty$ -normu MATLAB'da

```
sys=ss(Af,Bf,Cf,Df)  
ninf = hinfnorm(sys)
```

komutuyla hesaplanır.

Genişletilmiş Dengelenmiş Singüler Pertürbasyon Metodu ve Hata Analizi

Genişletilmiş dengelenmiş singüler pertürbasyon metodu; balanced truncation yaklaşımı ve singüler pertürbasyon metodunun birleşiminden oluşan ve yüksek boyutlu sistemlerde kullanılan karma bir metottur. Yüksek boyutlu bir sistem balanced truncation yaklaşımı ile daha düşük boyutlu bir hale getirilir ve indirgenmiş modelin transfer fonksiyonun $\mathcal{H}_\infty$ -normu singuler pertürbasyon metodu ile bulunur. Genişletilmiş dengelenmiş singüler pertürbasyon metodunun algortiması, ilk dört adımı balanced truncation yaklaşımına, son dört adımı singuler pertürbasyon metoduna karşılık gelmek üzere sekiz adımdan oluşur. Genişletilmiş dengelenmiş singüler pertürbasyon metodunun algortima adımları önceki

bölümlerinde detaylı olarak ele alındığından, bu bölümde çözümlerin hata analizi ile birlikte özet halinde bir **Tablo 1**'de verilmiştir.

Bu metodun modelleme hata transfer fonksiyonu; $E_r = [G(s) - G_f(s)]$ şeklinde tanımlanır. Bu metodun hata analizi yapılırken; "gerçek sonsuz hata sınırı" ve "teorik sonsuz hata sınırı" olmak üzere iki farklı hata terimi ile karşılaşılır.

- Gerçek sonsuz hata sınırı: $\|E_r\|_\infty = \|[G(s) - G_f(s)]\|_\infty$,
- Teorik sonsuz hata sınırı: $2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$

şeklinde tanımlanır. Hata payının tatmin edici düzeyde olması için, $\|E_r\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$ koşulu sağlanmalıdır.

Tablo 1. Genişletilmiş Dengelenmiş Singüler Pertürbasyon Metodunun Algoritması

Genişletilmiş Dengelenmiş Singüler Pertürbasyon Metodu		
	Balanced Truncation Yaklaşımı	Singüler Pertürbasyon Metodu
Adım1.	Orijinal sistemin Grammianlarını bul (W_c, W_o).	Dengelenmiş $\tilde{G}(s)$ sistemini, güçlü ve zayıf olmak üzere iki kısma ayır.
Adım2.	Grammianların Cholesky faktörlerini bul (L_c, L_o).	$\mu = 0$ seçerek zayıf kısmı elimine et ve x_2 zayıf değişkenini bul.
Adım3.	$L_o^T L_c$ çarpımının singüler değer ayrışımını bul.	x_2 değişkenini diğer denklemlerde yerine yazarak sistemin son halini ($G_f(s)$) bul.
Adım4.	$T = L_c V \Sigma^{-1/2}$ dönüşümünü yap ve dengelenmiş $\tilde{G}(s)$ sistemini bul	$G_f(s)$ transfer matrisinin H_∞ -normunu ($\ G_f(s)\ _\infty$) hesapla.
Hata Analizi	Gerçek sonsuz ve teorik sonsuz hata sınırlarını hesapla ve gerçek sonsuz hata sınırı, teorik sonsuz hata sınırından küçük veya eşit olacak şekilde karşılaştır.	

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde kontrol teorisinin çeşitli alanlarından seçilen örnekler bir önceki bölümde anlatılan metotlarla çözülmüştür.

Örnek 4.1 (Bir L-1011 model hava taşıtının lateral(kanat) eksen dinamiği)



Şekil 11. Bir L-1011 hava taşıtı ve hareket eksenleri

Aşağıda katsayı matrisleri verilen bir L-1011 hava taşıtının lateral eksen dinamiğinin transfer matrisinin H_∞ -normunun bulunması için;

$$A = \begin{bmatrix} -2.98 & 0.93 & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.032 \\ 0 \\ 0 \\ -1.6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

katsayı matrisleri (2.29) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2.98 & 0.93 & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.032 \\ 0 \\ 0 \\ -1.6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Bu sisteme bisection metodu uygulanırsa, **Tablo 2**'de verilen değerler elde edilir. Tablodaki ilk sütunda iterasyon numarası verilmiş ve son sütunda M_γ matrisinin, sanal eksen üzerindeki özdeğerlerinin varlığı incelenmiştir. Bu sütun başlıkları sırasıyla **İterasyon** ve **Özdeğer** ile ifade edilmiştir.

Tablo 2. Örnek 4.1'e İlişkin Sayısal Değerler

İterasyon	γ_{lb}	γ_{ub}	γ	Özdeğer
1	4.6808	16.6071	10.6439	yok
2	4.6808	10.6439	7.6624	yok
3	4.6808	7.6624	6.1716	yok
4	4.6808	6.1716	5.4262	yok
5	4.6808	5.4262	5.0535	yok
6	4.6808	5.0535	4.8671	yok
7	4.6808	4.8671	4.7739	yok
8	4.6808	4.7739	4.7273	yok
9	4.6808	4.7273	4.7040	yok
10	4.6808	4.7040	4.6924	yok
11	4.6808	4.6924	4.6866	yok
12	4.6808	4.6866	4.6837	yok
13	4.6808	4.6837	4.6822	yok
14	4.6808	4.6822	4.6815	var
15	4.6815	4.6822	4.6818	yok
16	4.6815	4.6818	4.6816	yok
17	4.6815	4.6816	4.6816	yok

17. iterasyondan sonra $\text{alt}(\gamma_{lb})$ ve $\text{üst}(\gamma_{ub})$ sınırların birbirine çok yakın olmasına rağmen hata payının yeterince küçük olmadığı görülmektedir. Yani iterasyona devam edilmesi gerekmektedir. Öte yandan MATLAB'da otomatik olarak hesaplanan γ değerleri 17'den sonraki bütün iterasyonlarda aynı olacağı için 17. iterasyondan sonrasının hesaplanmasına gerek kalmayacağından işlem burda sonlandırılıp, $\|G(s)\|_{\infty} \approx 4.6816$ sonucu elde edilir.

Örnek 4.2 (Merkezi olmayan birbirine bağlı sistemler)

Aşağıda katsayı matrisleri verilen merkezi olmayan birbirine bağlı bir sistemin transfer matrisinin H_{∞} -normunun bulunması için;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

katsayı matrisleri (2.29) yerine yazılırsa aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Bu sisteme bisection metodunu uygulanırsa, **Tablo 3**'de verilen değerler elde edilir. Tablodaki ilk ve son sütun başlıkları **Tablo 2**'deki ile aynı nedenden dolayı sırasıyla **İterasyon** ve **Özdeğer** ile ifade edilmiştir.

Tablo 3. Örnek 4.2'ye İlişkin Sayısal Değerler

İterasyon	γ_{lb}	γ_{ub}	γ	Özdeğer
1	8.4201	101.0417	54.7309	yok
2	8.4201	54.7309	31.5755	yok
3	8.4201	31.5755	19.9978	var
4	19.9978	31.5755	25.7867	var
5	25.7867	31.5755	28.6811	var
6	28.6811	31.5755	30.1283	yok
7	28.6811	30.1283	29.4047	var
8	29.4047	30.1283	29.7665	yok
9	29.4047	29.7665	29.5856	var
10	29.5856	29.7665	29.6761	var
11	29.6761	29.7665	29.7213	yok
12	29.6761	29.7213	29.6987	yok
13	29.6761	29.6987	29.6874	yok
14	29.6761	29.6874	29.6818	yok
15	29.6761	29.6818	29.6790	yok
16	29.6761	29.6790	29.6776	var
17	29.6776	29.6790	29.6783	var
18	29.6783	29.6790	29.6786	yok
19	29.6783	29.6786	29.6784	yok
20	29.6783	29.6784	29.6784	var

20. iterasyondan sonra $\text{alt}(\gamma_{lb})$ ve $\text{üst}(\gamma_{ub})$ sınırların birbirine çok yakın olmasına rağmen yine **Örnek 4.1**'dekine benzer olarak hata payının yeterince küçük olmadığı görülmektedir. Dolayısıyla **Örnek 4.1**'de olduğu gibi burda da tamamen aynı nedenlerden dolayı prosedür sonlandırılıp $\|G(s)\|_{\infty} \approx 29.6784$ sonucu elde edilir.

Örnek 4.3 (Merkezi olmayan birbirine bağlı sistemler)

Aşağıda katsayı matrisleri verilen merkezi olmayan birbirine bağlı bir sisteme singüler pertürbasyon metodu uygulanırsa;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

olmak üzere, bir önceki bölümde bu sistemin transfer fonksiyonun H_{∞} -normu,

$\|G(s)\|_{\infty} = 29.6784$ olarak bulunmuştu. Balanced truncation yaklaşımı ile mertebe indirmek için algortimanın adımları takip edilerek; sistemin kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik Grammianları, Cholesky faktörleri ve $L_o^T L_c$ çarpımının singüler değer açılımı MATLAB'da,

$$W_c = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.3113 & 0.5000 & 0 & -1.6038 & 0.4811 \\ -0.3113 & 34.7249 & -35.5362 & -0.4906 & 34.8100 & -8.8582 \\ 0.5000 & -35.5362 & 42.8187 & 0 & -40.0360 & 10.2824 \\ 0 & -0.4906 & 0 & 0.5000 & -0.3302 & -0.1509 \\ -1.6038 & 34.8100 & -40.036 & -0.3302 & 44.2532 & -11.1128 \\ 0.4811 & -8.8582 & 10.2824 & -0.1509 & -11.1128 & 2.9987 \end{bmatrix}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} 87.6579 & -31.0487 & -23.9106 & 36.3958 & -13.0754 & -6.0209 \\ -31.0487 & 18.9187 & 11.6125 & -12.0856 & 5.1281 & 2.6437 \\ -23.9106 & 11.6125 & 9.0750 & -10.5097 & 4.1375 & 2.2000 \\ 36.3958 & -12.0856 & -10.5097 & 16.1650 & -5.6553 & -2.7532 \\ -13.0754 & 5.1281 & 4.1375 & -5.6553 & 2.3187 & 1.0562 \\ -6.0209 & 2.6437 & 2.2000 & -2.7532 & 1.0562 & 0.6750 \end{bmatrix}$$

$$L_c = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4403 & 5.8763 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7071 & -5.9944 & 2.5271 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0835 & -0.1980 & 0.6737 & 0 & 0 \\ -2.2681 & 5.7538 & -1.5597 & -0.2356 & 1.8746 & 0 \\ 0.6804 & -1.4565 & 0.4237 & -0.2800 & -0.3171 & 0.2366 \end{bmatrix}$$

$$L_O = \begin{bmatrix} 9.3626 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.3163 & 2.8145 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5538 & 1.1168 & 1.1426 & 0 & 0 & 0 \\ 3.8874 & 0.2864 & -0.7892 & 0.5903 & 0 & 0 \\ -1.3966 & 0.1765 & 0.3271 & -0.0318 & 0.4787 & 0 \\ -0.6431 & 0.1816 & 0.3106 & -0.1020 & 0.0444 & 0.3459 \end{bmatrix}$$

$$L_O^T L_c = \begin{bmatrix} 9.0045 & -11.6021 & -5.3178 & 3.1278 & -2.4141 & -0.1522 \\ -0.7262 & 10.5711 & 2.5673 & 0.1005 & 0.2733 & 0.0430 \\ 0.2773 & -5.3534 & 2.6651 & -0.6957 & 0.5147 & 0.0735 \\ 0.0026 & -0.0834 & -0.1106 & 0.4337 & -0.0272 & -0.0241 \\ -1.0556 & 2.6899 & -0.7279 & -0.1252 & 0.8834 & 0.0105 \\ 0.2354 & -0.5038 & 0.1465 & -0.0969 & -0.1097 & 0.0818 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.8168 & -0.5322 & -0.1839 & 0.1246 & 0.0114 & -0.0119 \\ 0.5223 & -0.5584 & -0.6369 & 0.0988 & -0.0068 & -0.0070 \\ -0.2004 & 0.6222 & -0.6492 & 0.3860 & -0.0389 & -0.0263 \\ -0.0082 & -0.0234 & 0.0191 & -0.0096 & -0.9518 & 0.3049 \\ 0.1384 & -0.1287 & 0.3650 & 0.9042 & 0.0355 & 0.1104 \\ -0.0255 & 0.0290 & -0.0739 & -0.0895 & 0.3018 & 0.9455 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.4131 & -0.6094 & -0.5510 & 0.2393 & 0.3098 & -0.0338 \\ 0.5860 & -0.5116 & -0.0327 & 0.0142 & 0.0653 & -0.0055 \\ 0.2625 & 0.4723 & -0.8269 & -0.0663 & -0.1410 & -0.0058 \\ -0.1239 & -0.3210 & -0.0676 & 0.0294 & -0.9302 & 0.1019 \\ 0.1111 & 0.2000 & 0.0824 & 0.9679 & -0.0612 & -0.0168 \\ 0.0068 & 0.0156 & -0.0154 & 0.0212 & 0.1044 & 0.9940 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 19.2254 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6806 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2240 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7581 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4133 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0712 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan, verilen sisteminin Hankel singüler değerlerinin;

$$\sigma(G) = (19.2254 \quad 6.6806 \quad 3.2240 \quad 0.7581 \quad 0.4133 \quad 0.0712)$$

olduğu açıkça görülebilmektedir. **Adım 4'**ten devam edilerek;

$$T = L_c V \Sigma^{-1/2} = \begin{bmatrix} -0.0666 & -0.1667 & -0.2170 & 0.1943 & 0.3408 & -0.0895 \\ 1.1887 & -1.0593 & -0.0281 & 0.0249 & 0.3844 & -0.0660 \\ -1.0856 & 1.4815 & -1.2716 & -0.0962 & -0.8222 & -0.0206 \\ -0.0472 & -0.1035 & -0.0674 & 0.0365 & -0.9398 & 0.2635 \\ 1.2977 & -0.7147 & 1.4044 & 1.6654 & -0.0043 & -0.0061 \\ -0.3228 & 0.2170 & -0.3834 & -0.2253 & 0.5609 & 0.7293 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -0.1139 & 0.3032 & -0.1793 & -0.1238 & -0.0600 & 0.0158 \\ -0.2941 & -0.2900 & 0.7198 & 0.1681 & 0.2357 & -0.0281 \\ 0.0271 & -0.5608 & -0.5796 & -1.0328 & -0.2514 & 0.0865 \\ 0.0948 & 0.3066 & 1.0322 & -1.8693 & 0.0091 & 0.1389 \\ -0.0222 & -0.1791 & -0.0595 & 0.1382 & -1.3774 & -0.7626 \\ -0.0562 & -0.2046 & -0.2118 & 0.9211 & -1.2014 & -3.7698 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.5096 & -1.1876 & 0.2814 & 0.7819 \\ 0.6344 & -1.3681 & 0.3046 & 1.2281 \\ -1.2063 & -1.5068 & 0.0591 & 0.0910 \\ 0.1128 & 1.6074 & 0.4628 & -0.1543 \\ -0.2150 & 0.0400 & 0.0270 & 1.0440 \\ 0.0454 & -0.4450 & 0.1872 & 0.5491 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1.1887 & -1.0593 & 0.0281 & -0.0249 & 0.3844 & -0.0660 \\ -1.0856 & 1.4815 & -1.2716 & -0.0962 & -0.8222 & -0.0206 \\ 1.2977 & -0.7147 & 1.4044 & 1.6654 & -0.0043 & -0.0061 \\ -0.3228 & 0.2170 & -0.3834 & -0.2253 & 0.5609 & 0.7293 \end{bmatrix} \quad \tilde{D} = 0$$

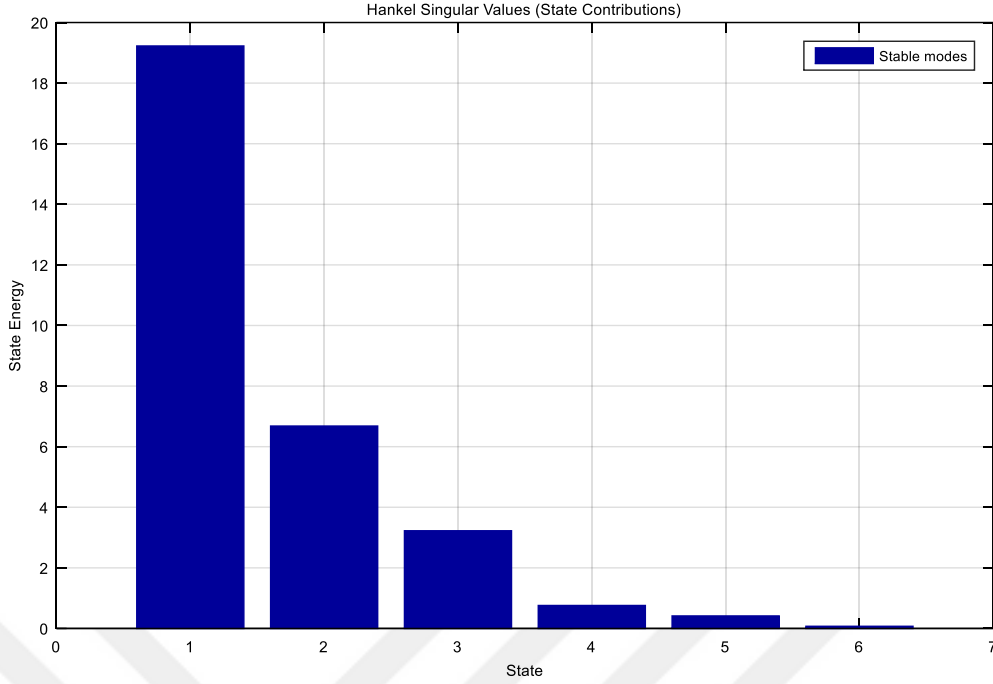
olmak üzere; dengelenmiş $\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & | & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & | & \tilde{D} \end{bmatrix}$ sistemi elde edilir. $\tilde{G}(s)$ sisteminin kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik Grammianları;

$$\tilde{W}_c = T^{-1}W_cT^{-T} = \begin{bmatrix} 19.2254 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6806 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2240 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7581 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4133 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0712 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_o = T^TW_oT = \begin{bmatrix} 19.2254 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6806 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2240 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7581 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4133 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0712 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Yani;

$$\tilde{W}_c = \tilde{W}_o = \text{diag}(19.2254, 6.6806, 3.2240, 0.7581, 0.4133, 0.0712) = \Sigma.$$



Şekil 12. Örnek 4.3'te verilen dinamik sistemin Hankel singüler değerleri

Şekil 12'de açıkça görüldüğü gibi ilk üç Hankel singüler değer, diğer değerlere göre çok büyük olduğundan $r = 3$ seçilip, indirgenmiş sisteme singüler pertürbasyon metodu uygulanırsa;

Adım 1'den hareketle indirgenmiş sistemin katsayı matrisleri blok matris formuna,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1139 & 0.3032 & -0.1793 \\ -0.2941 & -0.2900 & 0.7198 \\ 0.0271 & -0.5608 & -0.5796 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.1238 & -0.0600 & 0.0158 \\ 0.1681 & 0.2357 & -0.0281 \\ -1.0328 & -0.2514 & 0.0865 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.0948 & 0.3066 & 1.0322 \\ -0.0222 & -0.1791 & -0.0595 \\ -0.0562 & -0.2046 & -0.2118 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1.8693 & 0.0091 & 0.1389 \\ 0.1382 & -1.3774 & -0.7626 \\ 0.9211 & -1.2014 & -3.7698 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5096 & -1.1876 & 0.2814 & 0.7819 \\ 0.6344 & -1.3681 & 0.3046 & 1.2281 \\ -1.2063 & -1.5068 & 0.0591 & -0.1543 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.1128 & 1.6074 & 0.4628 & -0.1543 \\ -0.2150 & 0.0400 & 0.0270 & 1.0440 \\ 0.0454 & -0.4450 & 0.1872 & 0.5491 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1887 & -1.0593 & 0.0281 \\ -1.0856 & 1.4815 & -1.2716 \\ 1.2977 & -0.7147 & 1.4044 \\ -0.3228 & 0.2170 & -0.3834 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.0249 & 0.3844 & -0.0660 \\ -0.0962 & -0.8222 & -0.0206 \\ 1.6654 & -0.0043 & -0.0061 \\ -0.2253 & 0.5609 & 0.7293 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$\tilde{D} = 0$ şeklinde ayrılır.

Buradan, sistem güçlü ve zayıf olmak üzere alt sisteme ayrılır ve zayıf kısım elimine edilirse (pertürbasyon parametresi $\mu = 0$) sistem aşağıdaki şekilde yeniden yazılır;

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} -0.1139 & 0.3032 & -0.1793 \\ -0.2941 & -0.2900 & 0.7198 \\ 0.0271 & -0.5608 & -0.5796 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -0.1238 & -0.0600 & 0.0158 \\ 0.1681 & 0.2357 & -0.0281 \\ -1.0328 & -0.2514 & 0.0865 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1.5096 & -1.1876 & 0.2814 & 0.7819 \\ 0.6344 & -1.3681 & 0.3046 & 1.2281 \\ -1.2063 & -1.5068 & 0.0591 & -0.1543 \end{bmatrix} u \\ 0 &= \begin{bmatrix} 0.0948 & 0.3066 & 1.0322 \\ -0.0222 & -0.1791 & -0.0595 \\ -0.0562 & -0.2046 & -0.2118 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -1.8693 & 0.0091 & 0.1389 \\ 0.1382 & -1.3774 & -0.7626 \\ 0.9211 & -1.2014 & -3.7698 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.1128 & 1.6074 & 0.4628 & -0.1543 \\ -0.2150 & 0.0400 & 0.0270 & 1.0440 \\ 0.0454 & -0.4450 & 0.1872 & 0.5491 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1.1887 & -1.0593 & 0.0281 \\ -1.0856 & 1.4815 & -1.2716 \\ 1.2977 & -0.7147 & 1.4044 \\ -0.3228 & 0.2170 & -0.3834 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -0.0249 & 0.3844 & -0.0660 \\ -0.0962 & -0.8222 & -0.0206 \\ 1.6654 & -0.0043 & -0.0061 \\ -0.2253 & 0.5609 & 0.7293 \end{bmatrix} x_2\end{aligned}$$

ve zayıf değişken $x_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1 - A_{22}^{-1}B_2u$ yukarıdaki denklemlerde yerine yazılıp **Adım 3**'teki gerekli elemanter matris işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}A_f &= \begin{bmatrix} -0.1195 & 0.2909 & -0.2447 \\ -0.2884 & -0.2932 & 0.8021 \\ -0.0223 & -0.6970 & -1.1391 \end{bmatrix} & B_f &= \begin{bmatrix} 1.5149 & -1.2983 & 0.2528 & 0.7411 \\ 0.5957 & -1.2062 & 0.3395 & 1.4118 \\ -1.2163 & -2.4142 & -0.1902 & -0.0370 \end{bmatrix} \\ C_f &= \begin{bmatrix} 1.1829 & -1.1146 & -0.0067 \\ -1.0809 & 1.5706 & -1.2957 \\ 1.3823 & -0.4388 & 2.3348 \\ -0.3399 & 0.1274 & -0.4633 \end{bmatrix} & D_f &= \begin{bmatrix} -0.0848 & 0.0039 & -0.0221 & 0.3290 \\ 0.1565 & -0.1487 & -0.0103 & -0.6679 \\ 0.1106 & 1.4404 & 0.4262 & -0.1507 \\ -0.0602 & -0.1013 & 0.0174 & 0.3818 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan orijinal denklemin dengelenmiş, mertebe indirgenmiş son hali;

$$G_f(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] \text{ şekline dönüşür ve } G_f(s)\text{'nin } H_\infty\text{-normu MATLAB'da;}$$

$$\|G_f(s)\|_\infty = 29.6799 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Verilen orijinal sistem ile dengelenmiş-mertebe indirgenmiş sistemin transfer fonksiyonlarının H_∞ -normları arasındaki hata payının hesaplanması için gerçek sonsuz ve teorik sonsuz hata sınırları sırasıyla;

$$\|E_r\|_\infty = \|[G(s) - G_f(s)]\|_\infty = 1.5218$$

$$2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i = 2 \sum_{i=4}^6 \sigma_i = 0.7581 + 0.4133 + 0.0712 = 2.4852 \text{ olarak bulunur.}$$

$\|E_r\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$ koşulu sağlandığından çözümüm hata payının tatmin edici olduğu ve metodun etkili çalıştığı söylenebilir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, bir lineer diferansiyel-cebirsal denklem sisteminin transfer fonksiyonunun H_∞ -normu iki farklı metotla hesaplanmıştır. Bunlardan ilki bisection metodu, ikincisi ise yüksek boyutlu sistemlerin balanced truncation yaklaşımı kullanılarak daha düşük boyutlu sistemlere indirgendikten sonra singüler pertürbasyon metodu ile çözülmesine dayanan, bu iki metodun birleşiminden oluşan hibrit bir metot olan genişletilmiş dengelenmiş singüler pertürbasyon metodudur. Metotlara ilişkin algoritma kodları MATLAB programında yazılmış ve yine bazı hesaplamalar ve grafikler bu programda hazırlanmıştır. Bulunan sonuçlar ve hata payları, her iki metodun da bir lineer diferansiyel-cebirsal denklem sisteminin transfer fonksiyonunun H_∞ -normunu bulmakta etkili olduğu ve hata paylarının belirtilen kriterlere göre tatmin edici düzeyde olduğu gözlemlenmiştir. Kullanılan metotlardan ilki olan bisection metodu örneklerde 17. ve 20. iterasyon adımlarında sonuç vermiştir ve singüler pertürbasyon metodu ile kıyaslandığında H_∞ -norm değerinin MATLAB'da otomatik olarak hesaplanan değerine daha yakın olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Abu Sa', S. A. K., 2010, "Numerical Methods for Solving Differential-Algebraic Equations (Dissertation)", Faculty of Graduate Studies An-Najah National University, Nablus.
- Akın, M., 1997, " $\mathcal{H}_\infty$ -Optimal Kontrol Probleminde Lineer Matris Eşitsizlikleri Yaklaşımı, (Yüksek Lisans Tezi)", İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Aliyev, N., 2018, "Approximation and Minimization of the $\mathcal{H}_\infty$ -Norms of Large-Scale Control Systems", Koç University Graduate School of Sciences and Engineering, Istanbul.
- Antoulas, A. C., Benner, P., Feng, L., 2018, "Model Reduction by Iterative Error System Approximation", Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, Vol. 24, No. 2, 103–118.
- Arzelier, D., 2008, "LMIs in Systems Control State-Space Methods Performance Analysis and Synthesis (Lecture Notes)", LAAS-CNRS.
- Ascher, U. M., Petzold, L. R., 1978, "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations", SIAM.
- Baskın, M., 2015, "LQG/LTR, H-Infinity And Mu Robust Controllers Design for Line of Sight Stabilization (Dissertation)", The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University.
- Benner, P., 2006, "Control Theory", Fakultät für Mathematik Technische Universität Chemnitz, Germany
- Benner, P., Stykel, T., 2015, "Model Order Reduction for Differential-Algebraic Equations: A Survey", Max Planck Institute Magdeburg Preprints.
- Bennett, S., 1996, "A Brief History of Automatic Control", IEEE Control Systems Magazine 16(3), 17-25.
- Boyd, S., Balakrishnan, V., Kabamba, P., 1989, "A Bisection Method for Computing for $\mathcal{H}_\infty$ -Norm of a Transfer Matrix and Related Problems", Mathematics for Control Signal System, 2, 207-291.
- Brennan, K. E., Campbell, S. L., Petzold, L. R., 1989, "Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations", Elsevier Science Publishing Co., New York.
- Broughton, S. A., 2009, "Discrete Forier Analysis and Wavelets-Applications to Signal Image and Processing", John Wiley and Sons Inc.
- Campbell, S. L., 1980, "Singular Systems of Differential Equations", Pitman Advanced Publishing Program.
- Campbell, S. L., Gear, C. W., 1995, "The Index of General Nonlinear DAEs", Numer. Math. 72: 173–196.
- Campbell, S. L., Petzold, L., 2008, "Differential-Algebraic Equations", Scholarpedia, 3(8):2849.
- Celik, E., Bayram, M., Yeloglu, T., 2006, "Solution of Differential-Algebraic Equations(DAEs) by Adomian Decomposition Method", International Journal Pure & Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, No. 1, 93-100.
- Datta, B. N., 2004, "Numerical Methods for Linear Control Systems, (Vol. 1), Academic Press. London", New York.

- Doyle, J. C., 1984, "Advances in Multivariable Control", Lecture Notes in ONR/Honeywell Workshop.
- Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P., Francis, B., 1988, "State-Space Solutions to Standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Control Problems", IEEE American Control Conference, 1691-1696.
- Enns, D. F., 1984, "Model Reduction with Balanced Realization: An Error Bound and a Frequency Weighted Generalization", Proceeding of 23rd IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV, 127-132.
- Faßbender, H, Ikramov, Kh. D., 2005, "Several Observations on Symplectic, Hamiltonian, and Skew-Hamiltonian Matrices", Linear Algebra and its Applications, 400, 15–29.
- Ferguson, L., 2015, "Control Systems as Used by the Ancient World", Embry-Riddle Aeronautical University.
- Fernando, K. V., Nicholson, H., 1982, "Singular Perturbational Model Reductions of Balanced Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-27, NO 2, 466-468.
- Frank, S. A., 2010, "Control Theory Tutorial-Basic Concepts Illustrated by Software Examples", Springer Briefs in Applied Sciences and Technology.
- Gajic, Z., Lelic, M., 2001, "Improvement of System Order Reduction via Balancing Using the Method of Singular Perturbations", Automatica, 37(11), 1859-1865.
- Galimidi, A. R., Barmish, B. R., 1985, "The Constrained Lyapunov Problem and Its Application to Robust Output Feedback Stabilization", IEEE American Control Conference, 433-439.
- Gantmacher, F. R., 1959, "The Theory of Matrices-Volume 1", Chelsea Publishing Company.
- Gantmacher, F. R., 2000, "The Theory of Matrices-Volume 2", AMS Chelsea Publishing Company.
- Gear, C. W., Petzold, L., 1984, "ODE Methods for the Solution of Differential-Algebraic Systems", SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol 21, No. 4, 716-728.
- Gear, C. W., Leimkuhler, B., Gupta, G. K., 1985, "Automatic Integration of Euler-Lagrange Equations with Constraints", Journal of Computational and Applied Mathematics 12&13, 77-90
- Glover, K., 1984, "All Optimal Hankel-Norm Approximation of Linear Multivariable Systems And Their $-L^*$ -Bounds", International Journal of Control, 39, 1115-1193.
- Golub, H. G., van Loan, C. F., 1996, "Matrix Computations-3rd Edition", Johns Hopkins University Press.
- Gunduz, H., Celik, E., 2022, " $\mathcal{H}_\infty$ -Norm Evaluation for a Transfer Matrix via Bisection Algorithm", Thermal Science, Vol 26, Special Issue 2, pp, 745-751.
- Haider, S., Ghafoor, A., Imran, M., Mumtaz, M. F., 2018, "Techniques for Computation of Frequency Limited $\mathcal{H}_\infty$ -Norm", IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science, 114.
- Houlis, P. C., 2008, "A Novel Parametrized Controller Reduction Technique Based on Different Closed-Loop Configurations (PhD Thesis)", Faculty of Engineering, Computing and Mathematics University of Western Australia.
- Imran, M., Ghafoor, A., Sreeram, V., 2014, "A Frequency Weighted Model Order Reduction Technique and Error Bound", Automatica, 50(12), 3304-3309.

- Jiang, B., Wu, Z., Karimi, H. R., 2022, "A distributed dynamic event-triggered mechanism to HMM-based observer design for $\mathcal{H}_\infty$ sliding mode control of Markov jump systems", *Automatica*, 142, 110357.
- Kahan, W., 2013, "A Tutorial Overview of Vector and Matrix Norms (Lecture Notes)", University of California.
- Karabacak, M., 2015, "Kesirli Mertebeli Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Haar Dalgacık Fonksiyonları ile Nümerik Çözümleri(Doktora Tezi)", Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Khargonekar, P. P., Petersen, I. R., Rotea, M. A., 1988, " $\mathcal{H}_\infty$ Optimal Control with State-Feedback", *Transactions on Automatic Control*, IEEE, 33(8), 786-788.
- Khargonekar, P. P., Petersen, I. R., Zhou, K., 1990, "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3), 356-361.
- Kokotovic, P.V., O'Malley Jr, R.E., Sannuti, P., 1976, "Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory—An Overview", *Automatica*, 12(2), 123-132.
- Konuksever, A., 2018, "Kısmi Türevli Denklemler İçin Optimal Kontrol Problemlerine Bir Bakış (Yüksek Lisans Tezi)", Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Hatay.
- Kuo, B. C., 1975, "Automatic Control Systems (3rd Edition)", Prentice-Hall, New Jersey.
- Kuster, G. E., 2012, " $\mathcal{H}_\infty$ -Norm Calculation Via a State Space Formulation (Thesis)", Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, Virginia.
- Kwakernaak, H., Sivan, R., 1972, "Linear Optimal Control Systems", Wiley Interscience.
- Landi, G., Zampini, A., 2018, "Linear Algebra and Analytic Geometry for Physical Science" Springer.
- Liu, Y., Anderson, B., 1989, "Singular Perturbation Approximation of Balanced Systems", *International Journal of Control*, 50, 1379-1405.
- Losse, P., Mehrmann, V., Poppe, L. K., Reis, T., 2007, "Robust Control of Descriptor Systems", Preprint-Reihe des Instituts für Mathematik, Technische Universität, Berlin.
- Losse, P., 2011, "The $\mathcal{H}_\infty$ -Optimal Control Problem for Descriptor Systems (Dissertation)", Technische Universität Chemnitz Fakultät für Mathematik, Berlin.
- Lounsbury, A., 2018, "Singular Value Decomposition (Lecture Notes)", Department of Mathematics Tennessee Technological University.
- Luenberger, D. G., 1979, "Introduction to Dynamic Systems-Theory, Models and Applications", John Wiley&Sons.
- Moore, B., 1981, "Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1), 17-32.
- N'Diaye, M., Hussain, S., Suliman, I. M. A., Toure, L., 2023, "Robust Uncertainty Alleviation by H-Infinity Analysis and Control for Singularly Perturbed Systems with Disturbances", *Journal of Xi'an Shioyu University, Natural Science Edition*, Volume 19 Issue 01, 728-737.
- Ogata, K., 2002, "Modern Control Engineering (4th Edition)", Prentice-Hall, New Jersey.

- Özgökkurt, D., 2011, "Lineer Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Hermite Polinomları Yaklaşımı ile Numerik Çözümü (Yüksek Lisans Tezi)", Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Peet, M., "Cybernetic Systems and Control (Youtube channel)", Department of Mechanical and Aerospace Engineering Arizona State University, https://www.youtube.com/channel/UCc921fMzDNf_U1UT2zL6gpg/null.
- Pernebo, L., Silverman, L., 1989, "Model Reduction via Balanced State-Space Representations", IEEE Transactions on Automatic Control, 27(2), 382-387.
- Petersen, I., 1987. "Disturbance Attenuation and $\mathcal{H}_\infty$ Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation", IEEE Transactions on Automatic Control, 32(5), 427-429.
- Priemer, R., 1991. "Introductory Signal Processing", World Scientific.
- Puroit, H., 2012. "Robust Control Using H-Infinity Technique for Uncertain Systems (Dissertation)", Department of Electrical Engineering Indian Institute of Technology Roorkee.
- Rojas, C., Beitia, J. B., 2018, "Optimal Control Problems for Differential Equations Applied Growth: State of the Art", Applied Mathematics and Nonlinear Sciences, 3(2), 375-402.
- Rubio, J. de J., Lughofer, E., Pieper, J., Cruz, P., Martinez, D. I., Ochoa, G., Islas, M. A., Garcia, E., 2021, "Adapting $\mathcal{H}_\infty$ Controller for the Desired Reference Tracking of the Sphere Position in the Maglov Process", Information Sciences, 569, 669-686.
- Saif, M., Guan, Y., 1992, "Decentralized State Estimation in Large-Scale Interconnected Dynamical Systems", Automatica, 28, 215-219.
- Sontag, E., 1998, "Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems (2nd Edition)", Springer-Verlag, New York.
- Suman, S. K., Kumar, A., 2020, "A Reduction of Large-Scale Dynamical Systems by Extended Balanced Singular Perturbation Approximation", International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences, Vol. 5, No. 5, 939-956.
- Tacks, P., Oomen, T., 2021, "Accurate $\mathcal{H}_\infty$ -Norm Estimation via Finite-Frequency Norms of Local Parametric Models", 2021 American Control Conference (ACC), 321-326.
- Tao, Y., 2021, "Matrix Similarity Transformation (Lecture Notes)", Department of Computer Science and Engineering Chinese University of Hong Kong.
- Taş, R., 2019, "Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Bessel Polinomları ile Numerik Çözümleri (Yüksek Lisans Tezi)", Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Türkoğlu, E., 2007, "Application of Robust Control to a Rotary-Wing Aircraft (Dissertation)" Department of Engineering University of Leicester.
- van Stratten, G., van Willienburg, L. G., 2006, "Control and Optimization, CIGR Handbook of Agricultural Engineering", Vol. VI, 124-138.
- Wang, H-S., Jhu, W-L., Yung, C.-F., Wang, P.-F., 2011, "Numerical Solutions of Differential-Algebraic Equations and Its Applications in Solving TPPC Problems", Journal of Marine Science and Technology, Vol. 19, No. 1, 76-88.
- Wijckmans, P. M. E. J., 1993, "Differential-Algebraic Equations", RANA (Reports on Applied and Numerical Analysis), Vol: 93-02.
- Yeniçerioğlu, A. F., 2005, "Feedback Kontrollü Neutral Delay Denklemler (Doktora Tezi)", Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.

- Yiğiter, M., 2011, "Kısmi Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı ile Numerik Çözümleri (Doktora Tezi)", Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Zames, G., 1981, "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses", IEEE Transactions on Automatic Control, 26(2), 301-320.
- Zhou, K., Doyle, J. C., 1999, "Essentials of Robust Control", Prentice Hall.
- www.electrical4U.com, 2019, "Control Engineering: What is it? (And its History)".



ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler
Adı Soyadı : Hasan GÜNDÜZ
Doğum tarihi :
Doğum Yeri :
Uyruğu :
Adres :
Tel :
E-mail:
Eğitim
Lise :
Lisans :
Yüksek lisans:
Doktora :
Yabancı Dil Bilgisi
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar
Tezden Üretilmiş Yayınlar