



**$CAT(0)$  UZAYLARININ GEOMETRİK  
YAPISI ve BU UZAYLARDA  $n$ . DERECEDE  
KONVEKSDARALTAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN  
SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

**Yücel TEKMANLI**

**Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı  
Prof. Dr. İsa YILDIRIM**

**2019**

**Her hakkı saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**$CAT(0)$  UZAYLARININ GEOMETRİK YAPISI VE BU  
UZAYLARDA  $n$ . DERECEDEN KONVEKS DARALTAN  
DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Yücel TEKMANLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI  
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

**ERZURUM**  
**2019**

Her hakkı saklıdır



T.C.  
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**CAT(0) UZAYLARININ GEOMETRİK YAPISI ve BU UZAYLARDA n.  
DERECEDEN KONVEKS DARALTAN DÖNÜŞÜMLERİÇİN SABİT NOKTA  
TEOREMLERİ**

Prof. Dr. İsa YILDIRIM danışmanlığında, Yücel TEKMANLI tarafından hazırlanan bu çalışma, 05/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği /oy çokluğu** (**.../...**) ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Prof. Dr. Erhan DENİZ

İmza :

Üye : Prof. Dr. İsa YILDIRIM

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 11/07/2019 tarih ve 28/76 nolu kararı ile onaylanmıştır.

**Prof. Dr. Mehmet KARAKAN**  
Enstitü Müdürü

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### **$CAT(0)$ UZAYLARININ GEOMETRİK YAPISI VE BU UZAYLARDA $n$ . DERCEDEN KONVEKS DARALTAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Yücel TEKMANLI

Atatürk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Bu tezde, ilk olarak  $CAT(\kappa)$  ve  $CAT(0)$  uzaylarının bazı geometrik özellikleri tanıtıldı ve  $CAT(0)$  uzaylarındaki sabit nokta teoremleri ile ilgili çalışmalar verildi. Daha sonra Istrătescu'nun 1981 yılında tanımladığı  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm sınıfının sabit noktasının varlığı ispatlandı. Son olarak, genelleştirilmiş Mann iterasyonunun  $CAT(0)$  uzaylarında bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarına  $\Delta$ -yakınsaması ve kuvvetli yakınsaması ile ilgili bazı teoremler ifade ve ispat edildi.

**2019, 74 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Sabit nokta,  $CAT(0)$  uzayları,  $\Delta$ -yakınsama,  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşümler, genelleştirilmiş Mann iterasyonu

## ABSTRACT

MS Thesis

### GEOMETRIC STRUCTURE OF $CAT(0)$ SPACE AND FIXED POINT THEOREMS CONVEX CONTRACTION MAPPINGS OF ORDER $n$ IN SUCH SPACES

Yücel TEKMANLI

Atatürk University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Discipline of Analysis and Function Theory

Supervisor: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

In this thesis, firstly, some geometric properties of  $CAT(\kappa)$  and  $CAT(0)$  spaces are introduced and studies on fixed point theorems in  $CAT(0)$  spaces are given. Later, the existence of the fixed point of the convex contraction mappings of order  $n$ , which Istrătescu defined in 1981 was proved. Finally, some theorems related to the  $\Delta$ -convergence and strong convergence of generalized Mann iteration to the fixed points of these mapping classes in  $CAT(0)$  spaces have been expressed and proved.

**2019, 74 pages**

**Anahtar Kelimeler:** Fixed point,  $CAT(0)$  spaces,  $\Delta$ -convergence, convex contraction of order  $n$ , modified Mann iteration

## **TEŞEKKÜR**

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde bana destek olan, bilgi ve tecrübeleriyle katkıda bulunan değerli tez danışmanım Sayın Prof. Dr. İsa YILDIRIM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım ayrıca her türlü kolaylığı sağlayan benden yardımlarını esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünün değerli öğretim üyelerine teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitimim hayatım boyunca desteklerini hep yanımda hissettiğim annem ve babama teşekkürü bir borç bilirim ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca benden desteğini esirgemeyen eşime en içten duygularıyla teşekkür ederim.

**Yücel TEKMANLI**

**Temmuz, 2019**

## İÇİNDEKİLER

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| ÖZET.....                                                               | i         |
| ABSTRACT.....                                                           | ii        |
| TEŞEKKÜR.....                                                           | iii       |
| SİMGELER DİZİNİ.....                                                    | v         |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....                                                    | vi        |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                                                 | vii       |
| <b>1. GİRİŞ.....</b>                                                    | <b>1</b>  |
| 1.1. Tezin Amacı .....                                                  | 3         |
| <b>2. KURAMSAL TEMELLER.....</b>                                        | <b>4</b>  |
| 2.1. $CAT(\kappa)$ ve $CAT(0)$ Uzayları.....                            | 4         |
| 2.2. $\mathbb{R}$ -tree ve Genelleştirilmiş $CAT(0)$ Uzayları .....     | 15        |
| 2.3. $CAT(0)$ Uzaylarında Sabit Nokta Teorisi .....                     | 17        |
| 2.4. Zayıf Yakınsaklık .....                                            | 41        |
| <b>3. MATERYAL ve YÖNTEM.....</b>                                       | <b>45</b> |
| 3.1. Konveks Daraltan Dönüşümler .....                                  | 45        |
| 3.2. Bazı Önemli Tanım ve Teoremler .....                               | 53        |
| <b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....</b>                                     | <b>56</b> |
| 4.1. $n$ . Dereceden Konveks Daraltan Dönüşümlerin Sabit Noktaları..... | 56        |
| <b>5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....</b>                                     | <b>70</b> |
| KAYNAKLAR .....                                                         | 72        |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                          | 75        |

## SİMGELER DİZİNİ

|                  |                                                                                  |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $\{x_n\}$        | Dizi                                                                             |
| $\bar{\Delta}$   | Karşılaştırma Üçgeni                                                             |
| $\angle_{cc'}$   | $c$ ve $c'$ eğrileri arasındaki açı                                              |
| $\ell_p$         | $p$ boyutlu vektör uzayı                                                         |
| $\bar{A}$        | $A$ kümesinin kapanışı                                                           |
| $(E, \ \cdot\ )$ | Normlu vektör uzayı                                                              |
| $M_\kappa^n$     | $\kappa$ eğrilikli, $n$ boyutlu metrik uzay                                      |
| $[x, y]$         | Jeodezik segment                                                                 |
| $\Delta$         | Üçgen                                                                            |
| $\mathbb{N}$     | Doğal Sayılar kümesi                                                             |
| $\mathbb{R}$     | Reel Sayılar kümesi                                                              |
| $A(\{x_n\})$     | $\{x_n\}$ dizisinin asimptotik merkezi                                           |
| $F(T)$           | $T$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi                                        |
| $L(c[a, b])$     | $c$ eğrisinin uzunluğu                                                           |
| $c[a, b]$        | Eğri                                                                             |
| $conv S$         | $S$ nin konveks örtüsü                                                           |
| $dist(x, K)$     | $x$ elemanının $K$ kümesine olan uzaklığı                                        |
| $r(\{x_n\})$     | $\{x_n\}$ dizisinin asimptotik yarıçapı                                          |
| $rad(S)$         | $X$ uzayına göre $S$ nin normal Chebyshev yarıçapı                               |
| $sep\{x_n\}$     | $\{x_n\}$ dizisinin birbirinden farklı elemanları arasındaki uzaklığın en küçüğü |
| $\partial K$     | $K$ kümesinin sınırı                                                             |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1. Eğrilikli yüzeyler .....                                   | 4  |
| Şekil 2.2. Jeodezik segment .....                                     | 6  |
| Şekil 2.3. $CAT(0)$ eşitsizliği .....                                 | 8  |
| Şekil 2.4. $CAT(0)$ uzayları ve diğer uzaylar arasındaki ilişki ..... | 17 |



## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Çizelge 4.1. $x_1 = 1$ ve $m = 1,2,3$ için yakınsama değerleri .....     | 65 |
| Çizelge 4.2. $x_1 = 1$ ve $m = 10,50,100$ için yakınsama değerleri ..... | 66 |
| Çizelge 4.3. $x_1 = 0$ ve $m = 1,2,3$ için yakınsama değerleri .....     | 67 |
| Çizelge 4.4. $x_1 = 0$ ve $m = 10,50,100$ için yakınsama değerleri ..... | 68 |
| Çizelge 4.5. $x_1 = 0,5$ ve $m = 1,2,3$ için yakınsama değerleri .....   | 69 |



## 1. GİRİŞ

Pozitif olmayan eğri uzaylarındaki çalışmalar, hiperbolik uzayların keşfiyle başlayıp, son yüzyılın başlarında Hadamard'ın ve 1920'lerde Cartan'ın çalışmasıyla ortaya çıkmıştır. Jeodezik metrik uzay için pozitif olmayan eğriliğe sahip olmanın ne anlama geldiği 1950'lerde Busemann ve Alexandrov'un çalışmasında verilmiştir.

Bir  $X$  metrik uzayı, jeodezik bağlantılıysa ve  $X$  deki her jeodezik üçgen, Öklid düzleminde en az onun karşılaştırma üçgeni kadar ince ise bu uzaya  $CAT(0)$  uzayı denir. Burada verilen ve  $CAT(0)$  eşitsizliği olarak da bilinen özellik, Riemann geometrisinde pozitif olmayan eğrilik kavramını içeren ve bunu daha geniş bir çerçevede yansıtabilen bir kavramdır. Burada ki C, A ve T harfleri, Cartan, Alexandrov ve Toponogov'u temsil eder. Tam  $CAT(0)$  uzayları genellikle Hadamard uzayları olarak da adlandırılır.  $CAT(0)$  uzayları son derece güzel bir geometrik yapıya sahiptir.  $CAT(0)$  uzaylarında genişlemeyen dönüşümler, doğal olarak izometri ile ilgili çalışmaları ortaya çıkarmıştır. Bu konudaki ilginin yeniden canlandırılmasında önemli olan, M. Gromov'un 1981'de Paris'teki Collège de France'da verdiği derslerdir. Bu derslerde Gromov, küresel Riemann geometrisinin temel özelliklerini esas olarak çalışmalarını  $CAT(0)$  eşitsizliği üzerinde temellendirerek açıklamıştır.

Kirk, 2002-2003 yıllarında doğrusal olmayan analiz ve Banach uzay teorisinin fikir ve yöntemlerinin çoğunu Gromov'un  $CAT(0)$  uzayları sınıfına taşımıştır. Kirk'in 2002, 2003 ve 2004 yıllarında yaptığı çalışmalar, pozitif olmayan eğri uzaylarındaki sabit nokta teorisi çalışmasına çok büyük bir katkı sağlamıştır. 2009 yılında Nanjaras ve arkadaşları  $CAT(0)$  uzaylarında Suzuki-genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta ve yakınsaklık teoremleri elde etmiştir. 2010 yılında Ali Akbar ve Mohammad Eslamian, tam  $CAT(0)$  uzaylarında çok değerli genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm ve tek değerli quasi-genişlemeyen dönüşüm sınıflarının ortak sabit noktalara sahip olduğunu ispatlamışlardır. 2011 yılında He ve arkadaşları tam  $CAT(\kappa)$  uzaylarında Mann iterasyonu tarafından tanımlanan  $\{x_n\}$  dizisinin genişlemeyen dönüşümlerin sabit

noktalarına  $\Delta$ -yakınsadığını ispatlamışlardır. 2011 yılında Kohlenbach ve Leuştean,  $CAT(0)$  uzaylarında genişlemeyen dönüşümlerin Helpert iterasyonunun sabit noktalarına güçlü yakınsadığını göstermiştir. 2012 yılında Dhompongsa, Kirk'in  $CAT(0)$  uzaylarındaki sabit nokta teoremlerini çok değerli dönüşümler için genelleştirmiştir. 2012 yılında Chang,  $CAT(0)$  uzaylarında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin Krasnoselskii-Mann tipi iterasyonların sabit noktalarına  $\Delta$ -yakınsadığını ispatlamıştır. 2014 yılında Kumam ve arkadaşları,  $CAT(0)$  uzaylarında asimptotik genişlemeyen dönüşümler için modifiye edilmiş  $S$ -iterasyonunun sabit noktalarına yakınsaması ile ilgili teoremleri ispatlamıştır. 2015 yılında Sipara,  $CAT(\kappa)$  uzaylarında  $\kappa > 0$  olduğunda asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin modifiye edilmiş  $S$ -iterasyonunun sabit noktalarına kuvvetli yakınsadığını ispatlamıştır. Khamisi ve Shukri, 2017 yılında  $CAT(0)$  uzaylarında karşılaştırma üçgenini Öklid düzlemi yerine Banach uzaylarında alarak genelleştirilmiş  $CAT(0)$  uzayı tanımını vermişlerdir. 2019 yılında Hussain,  $CAT(0)$  uzaylarında çok değerli üzerine olmayan dönüşümler için Ishikawa iterasyon şemasını oluşturmuş ve tam  $CAT(0)$  uzaylarında bu iterasyon şemasının sabit noktalarına kuvvetli yakınsaması ile ilgili teoremleri ispatlamıştır.

Istrătescu (1981), konveks daraltan dönüşüm sınıflarını tanıtmış, 2. dereceden konveks daraltan dönüşümler ve iki yönlü konveks daraltan dönüşümlerin tek bir sabit noktası olduğunu ispatlamıştır. 2. dereceden konveks daraltan dönüşümler ve iki yönlü konveks daraltan dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili varlık ve yakınsama teoremlerini göstermiştir. Bu dönüşüm sınıfları son yıllarda ilgi görmeye başlamış ve 2011 yılında Alghamdi ve arkadaşları, Banach daralma ilkesini normal olmayan konik metrik uzaylarda konveks daraltan fonksiyonlar sınıfına taşımıştır. 2013 yılında Miandaragh ve arkadaşları, genelleştirilmiş konveks daraltan dönüşümlerin metrik uzaylarda yaklaşık sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır. 2015 yılında Ramezani ortogonal metrik uzaylarda konveks daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği ile ilgili teoremleri ispatlamıştır. 2015 yılında Latif, tam  $\alpha$ -metrik uzaylarda genelleştirilmiş konveks daraltan ve genelleştirilmiş ikinci tip konveks daraltan dönüşüm sınıflarının yaklaşık sabit noktaları ile ilgili teoremleri ispatlamışlardır. 2017 yılında Khan b-metrik uzaylar ve 2-metrik

uzaylarda iki yönlü konveks daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlık ve tekliği ile ilgili teoremleri ispatlamışlardır.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde,  $CAT(0)$  uzaylarının tarihçesi ve bu uzaylarda yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiş ve tezin amacı belirlenmiştir.

İkinci bölümde  $CAT(\kappa)$ ,  $CAT(0)$  uzayları ve bu uzayların geometrik özellikleri tanıtılmıştır. Daha sonra bu uzaylarla bağlantılı olan genelleştirilmiş  $CAT(0)$  uzayları ve  $\mathbb{R}$ -tree uzayları verilmiştir. Ayrıca bu uzaylardaki sabit nokta teoremleri ifade edilmiştir. Bu bölümde son olarak  $CAT(0)$  uzaylarında zayıf yakınsama ( $\Delta$ -yakınsama) kavramı ve bu zayıf yakınsama ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde konveks daraltan dönüşüm sınıflarının tanımları ve bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının varlığı ile ilgili bazı önemli teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde  $CAT(0)$  uzaylarında tanımlanan genelleştirilmiş Mann iterasyon metodunun  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına kuvvetli ve zayıf yakınsaması ( $\Delta$ -yakınsama) ile ilgili teoremler verilip ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde ise çalışmamızda elde edilen bazı sonuçlara yer verilmiştir.

### 1.1. Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı metrik ve konik metrik uzaylarda 2. ve  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm sınıflarının sabit noktasına yaklaşımda kullanılan Picard iterasyonunun yerine farklı iterasyon metotlarının da kullanılabileceğini göstermektir. Bu amaçla metrik ve konik metrik uzaylar yerine  $CAT(0)$  uzayı ve Picard iterasyonu yerine de genelleştirilmiş Mann iterasyonu alınarak verilen herhangi bir  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşümün sabit noktasına bu metodun kuvvetli ve zayıf yakınsadığını ispatlamaktır.

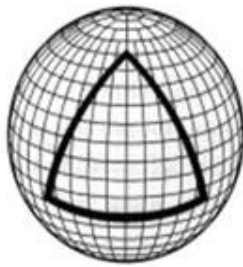
## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. $CAT(\kappa)$ ve $CAT(0)$ Uzayları

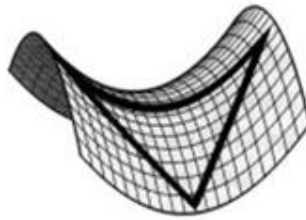
Bu başlık altında öncelikli olarak  $CAT(\kappa)$  ve  $CAT(0)$  uzaylarında geçen bazı temel kavramlara yer verilecektir.

İlk önce eğrilik kavramı ile başlayalım. Bir  $d$  doğrusu ve bu doğru üzerinde olmayan bir  $P$  noktası alalım.  $P$  noktasından geçen ve  $d$  doğrusuna paralel olan tek bir doğru çizilebileceğini söyleyebiliriz. Ancak sezgilerimiz bazen yanıltıcı olabilir. 1854 yılında Alman Matematikçi Bernhard Riemann matematik dünyasını alt üst edecek olan Riemann geometrisi adında yeni bir çalışma ortamını keşfetmiştir.

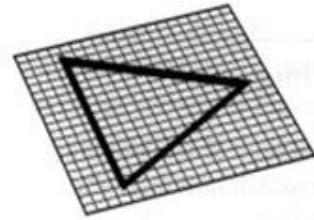
Riemann geometrisindeki temel kavram uzayın eğriliğidir. Bir uzayın eğriliği sıfır ise yüzey düzdür ve bu uzayın elemanları Öklid aksiyomlarını sağlar. Eğer uzay pozitif ya da negatif eğrilğe sahip ise Öklid dışı geometridir ve uzayın elemanları Öklid aksiyomlarını sağlamaz.



Pozitif Eğrilik



Negatif Eğrilik



Sıfır Eğrilik

**Şekil 2.1.** Eğrilikli yüzeyler

Eğriliği anlamamanın en kolay yolu üçgeni incelemektir. Sıfır eğrilikli bir uzayda üçgenin iç açılar toplamı  $180^\circ$ , pozitif eğrilikli uzayda üçgenin iç açıları toplamı  $180^\circ$  den daha büyük ve negatif eğrilikli uzayda (hiperbolik uzay) üçgenin iç açıları toplamı  $180^\circ$  den daha küçüktür.

Günümüzde hiperbolik geometri ve Riemann geometrisi olarak adlandırılan bu iki Öklid-dışı geometride Paralellik Aksiyomu şu şekilde yorumlanır.

- Düz bir yüzeyde bu noktadan geçen ve doğruya paralel olan yalnızca tek bir doğru vardır.
- Küresel bir yüzeyde bu noktadan geçen ve doğruya paralel olan hiçbir doğru yoktur.
- Hiperbolik yüzeyde bu noktadan geçen ve doğruya paralel olan sonsuz sayıda doğru vardır.

Bir  $\kappa$  reel sayısı için,  $M_\kappa^n$  aşağıdaki şekilde ifade edilir:

- 1)  $\kappa = 0$  ise  $M_0^n, \mathbb{R}^n$  Öklid uzayıdır.
- 2)  $\kappa > 0$  ise  $M_\kappa^n, S^n$  küre yüzeyi ve  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$  bu kürenin yarıçapıdır.
- 3)  $\kappa < 0$  ise  $M_\kappa^n, \mathbb{H}^n$  hiperbolik uzayını ve  $\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}$  hiperbolik yarıçapı gösterir.

Genel olarak  $(X, d)$  metrik uzayındaki bir yol  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  birim aralığının sürekli görüntüsü olarak tanımlanır. Eğer  $S \equiv f(I)$  bir yol,

$$(x_i) = (0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1)$$

$[0, 1]$  birim aralığının bir parçalanışı ise uzunluk

$$l(S) = \sup_{(x_i)} \sum_{i=0}^{N-1} d(f(x_i), f(x_{i+1}))$$

olarak tanımlanır. Eğer  $l(S) < \infty$  ise bu yol düzleştirilebilirdir.

$(X, d)$  bir metrik uzay olsun.  $X$  in her iki  $x$  ve  $y$  noktaları arasındaki mesafe, bu iki noktayı birleştiren tüm düzleştirilebilir eğrilerin infimum'u olarak seçilirse,  $(X, d)$  ye uzunluk

uzayı denir. Bu durumda  $d$  uzunluk metriği (iç metrik veya içsel metrik) olarak adlandırılır.

**Tanım 2.1.1:**  $(X, d)$  ve  $(Y, d_1)$  iki metrik uzay olsun.  $T: X \rightarrow Y$  dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani her  $x, y \in X$  için

$$d_1(T(x), T(y)) = d(x, y)$$

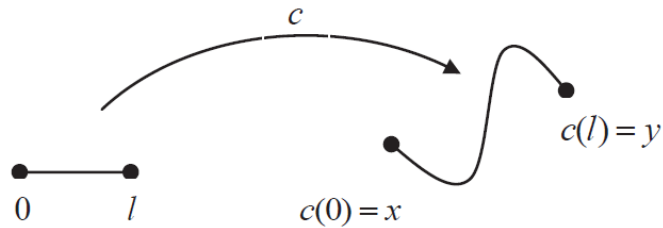
şartı sağlanıyorsa  $T$  dönüşümüne izometri denir.

$T$  dönüşümü izometri ise birebir olduğu tanımdan açıkça görülebilir.

$$T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$$

dir. Eğer  $T$  dönüşümü aynı zamanda örten ise  $T$  ye izometrik izomorfi denir.  $(X, d)$  ve  $(Y, d_1)$  uzayları arasında bir izometrik izomorfi varsa bu uzaylara izometrik uzaylar (veya eş yapılı uzaylar) denir.

**Tanım 2.1.2:**  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $[0, l] \subset \mathbb{R}$ ,  $t, t' \in [0, l]$  ve  $x, y \in X$  olsun.  $c: [0, l] \rightarrow X$ ,  $c(0) = x$ ,  $c(l) = y$  ve  $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$  (veya daha özel olarak  $d(x, y) = l$ ) fonksiyonuna  $x \in X$ 'ten  $y \in X$ 'e bir jeodezik yol (veya daha basit bir ifade ile  $x$ 'ten  $y$ 'ye bir jeodezik) denir. Eğer  $c(0) = x$  ise  $c$  nin  $x$  den oluştuğu söylenir.  $c$  nin  $\alpha$  görüntüsüne uç noktaları  $x$  ve  $y$  olan jeodezik segment denir.



**Şekil 2.2.** Jeodezik segment

**Tanım 2.1.3:**  $X$  bir metrik uzay olsun.  $X$  de bir jeodezik yol (veya daha basit bir ifade ile bir jeodezik)  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bir izometri dönüşümüdür.  $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  jeodezik ışıını ve  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$  jeodezik çizgisi aynı zamanda bir izometri dönüşümüdür.

**Tanım 2.1.4:**  $E$  bir vektör uzay olsun.  $X \subset E$  alt kümesinin

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty: t \in [0, 1]\}$$

şeklinde bir afin segmenti varsa  $X$  kümesine afin olarak konvekstir denir.

**Tanım 2.1.5:**  $E$  bir vektör uzayı,  $C \subset E$  afin olarak konveks bir alt küme ve  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Her  $x, y \in C$  ve her  $t \in [0, 1]$  için;

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$$

oluyorsa  $f$  fonksiyonuna konvekstir denir.

**Tanım 2.1.6:** Bir  $X$  metrik uzayının herhangi iki noktasına karşılık gelen bir jeodezik yol varsa bu uzaya jeodezik uzay denir.

**Tanım 2.1.7:** Sürekli bir  $c$  eğrisi için;

$$\sup\{PL(c, S): S, [a, b] \text{ nin bir parçası}\}$$

değeri varsa eğri düzleştirilebilirdir denir. Bu supremum değeri eğrinin uzunluğu olarak adlandırılır ve  $L(c[a, b])$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.8:**  $X$  bir metrik uzay, her  $x, y \in X$  için

$$d(x, y) = \inf\{L(c[a, b]): c \text{ düzleştirilebilir}, c(a) = x, c(b) = y\}$$

oluyorsa  $X$  uzayına uzunluk uzayı denir eğer her  $x, y \in X$  için  $d(x, y) = L(c[a, b])$  olacak şekilde  $x$  ten  $y$  ye düzeltilebilir bir  $c$  eğrisi varsa  $X$  uzayına tam uzunluk uzayı denir.

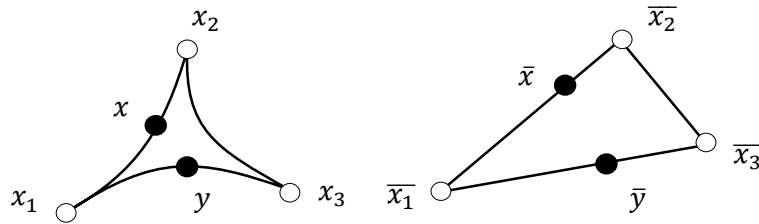
$(X, d)$  jeodezik metrik uzayında bir  $\Delta(x_1, x_2, x_3)$  jeodezik üçgeni üç noktadan oluşur ( $\Delta$  nın köşeleri) ve her iki köşe arasında bir jeodezik segment ( $\Delta$  nın kenarları) vardır.  $(X, d)$ 'de bir  $\Delta(x_1, x_2, x_3)$  üçgeninin karşılaştırma üçgeni  $\bar{\Delta}(x_1, x_2, x_3) = \Delta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  şeklinde  $M_\kappa^2$  uzayındaki bir üçgendir ve  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  için  $d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = d(x_i, x_j)$  dir. Eğer  $\kappa > 0$  için  $D_\kappa, M_\kappa^2$  nın çapını belirtmek üzere  $\Delta(x_1, x_2, x_3)$  üçgeninin çevresinin  $2D_\kappa$  dan daha küçük olduğu varsayılır.

**Tanım 2.1.9:** Bir jeodezik metrik uzayında bütün jeodezik üçgenler aşağıdaki  $CAT(\kappa)$  karşılaştırma aksiyomunu sağlıyorsa bu uzaya  $CAT(\kappa)$  uzayı denir.

$X$  uzayında bir jeodezik üçgen  $\Delta$  ve  $\bar{\Delta} \subset M_\kappa^2$  bir karşılaştırma üçgeni olsun. Eğer her  $x, y \in \Delta$  ve her  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$  karşılaştırma noktaları için

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$$

ifadesi doğruysa  $\Delta$ ,  $CAT(\kappa)$  eşitsizliğini sağlıyor denir.



**Şekil 2.3.**  $CAT(0)$  eşitsizliği

Yukarıdaki  $CAT(\kappa)$  uzayının tanımından hareketle  $\kappa = 0$  olması durumunda aşağıdaki  $CAT(0)$  uzayının tanımı verilebilir.

**Tanım 2.1.10 ( $CAT(0)$  Uzayı):**  $X$  metrik uzayındaki tüm jeodezik üçgenler aşağıdaki karşılaştırma aksiyomunu sağlıyorsa, bu uzaya  $CAT(0)$  uzayı denir.

“  $\Delta$ ,  $X$  de bir jeodezik üçgen ve  $\bar{\Delta}$ ,  $\Delta$  için bir karşılaştırma üçgeni olsun. Bu durumda her  $x, y \in \Delta$  ve her  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$  için

$$d(x, y) \leq d_{E^2}(\bar{x}, \bar{y})$$

oluyorsa,  $\Delta$  ya  $CAT(0)$  eşitsizliğini sağlıyor denir.”

$CAT(0)$  eşitsizliği aşağıdaki gibi eşdeğer ancak daha zayıf bir forma benzetilebilir.

**Önerme 2.1.11:** Bir  $X$  jeodezik metrik uzayın  $CAT(0)$  uzayı olması için gerek ve yeter şart  $X$ 'deki her  $\Delta(p, q, r)$  jeodezik üçgeni ve her  $x \in [q, r]$  elemanı için  $d(p, q) \leq d(\bar{p}, \bar{q})$  sağlanacak şekilde karşılaştırma noktası  $\bar{x} \in [\bar{q}, \bar{r}] \subset \bar{\Delta}(p, q, r) \subset \mathbb{R}^2$  olmasıdır (Bridson and Haefliger 1999).

**Tanım 2.1.12:**  $X$  bir jeodezik metrik uzay olsun.  $X$  deki her noktanın komşuluğunda jeodezik konveks ve  $CAT(\kappa)$  olan boştan farklı bir yuvar varsa bu uzaya lokal  $CAT(\kappa)$  uzayı denir.

Bu tanımdan dolayı  $X$  uzayındaki her nokta pozitif olmayan bazı  $\kappa$  değerleri için bir  $CAT(\kappa)$  komşuluğuna sahipse bu uzaya lokal  $CAT(0)$  uzayı denir.

**Tanım 2.1.13:**  $X$  bir topolojik vektör uzayı olsun. Eğer  $X$  uzayının konveks bir komşuluğu var ise  $X$  kümesine lokal konveks küme denir.

**Tanım 2.1.14:** Bir uzay yol bağlantılı ve her iki nokta arasındaki yol sürekli bir şekilde bir diğerine dönüşebiliyorsa bu uzaya basit bağlantılı uzay denir (Mucuk 2010).

**Tanım 2.1.15:** Bir  $X$  metrik uzayı lokal  $CAT(0)$  uzayı ise bu uzayın eğriliği küçük eşit sıfır olarak söylenir. Bu durumda  $X$  metrik uzayı pozitif olmayan eğriliğe sahiptir denir.

Pozitif olmayan eğriliğe sahip uzayların matematiğin birçok alanında önemli rol oynadığı bilinmektedir (Kleiner *et al.* 2002).

Terminolojiye devam etmek için  $X$  metrik uzayı konveks olmalıdır.  $X$  bir jeodezik uzay ve bütün jeodezikler  $c_1: [0, a_1] \rightarrow X$  ve  $c_2: [0, a_2] \rightarrow X$ ,  $c_1(0) = c_2(0)$  ise her  $t \in [0, 1]$  için;

$$d(c_1(ta_1), c_2(ta_2)) \leq td(c_1(a_1), c_2(a_2))$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer her nokta konveks bir komşuluğa sahip ise  $X$  lokal konveks olarak adlandırılır. Metrik uzay lokal konveks ise  $X$  lokal olarak büzülebilir ve dolayısıyla  $X$  uzayının evrensel bir  $\tilde{X}$  kapanış uzayı vardır. Bu durumda  $X$  bağlantılıdır ve  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  bir lokal izometri dönüşümü vardır.  $\tilde{X}$  uzayı bu izometriye göre tektir.

**Teorem 2.1.16 (Cartan-Hadamard teoremi):**  $X$  bağlantılı bir tam metrik uzay olsun.

- 1)  $X$  deki metrik lokal konveks ise  $\tilde{X}$  üzerinde tanımlanan uzunluk konvektir.
- 2) Eğer  $X$  pozitif olmayan eğriliğe sahip ise  $\tilde{X}$  bir  $CAT(0)$  uzayıdır.

Bu nedenle tam basit bağlantılı bir uzunluk uzayı lokal konveks ve pozitif olmayan eğriliğe sahip ise bir  $CAT(0)$  uzayıdır (Bridson and Haefliger 1999).

Şimdi  $CAT(\kappa)$  uzayının bazı özelliklerinden bahsedeceğiz.

**Önerme 2.1.17:**  $X$  bir  $CAT(\kappa)$  uzayı olsun.

- 1) Her  $x, y \in X$  noktasını birleştiren tek bir jeodezik segment vardır ve bu jeodezik segment uç noktaları ile sürekli olarak değişir.
- 2)  $X$  deki en fazla  $D_\kappa$  uzunluğundaki her lokal jeodezik bir jeodeziktir.
- 3)  $X$  deki  $\frac{D_\kappa}{2}$  den daha küçük yarıçaplı yuvarlar konvektir.
- 4)  $X$  deki  $D_\kappa$  yarıçapından daha küçük yuvarlar daraltandır.
- 5) Yaklaşım orta noktaları orta noktaya yakındır. Özellikle her  $\lambda < D_\kappa$  ve  $\varepsilon > 0$  için  $\delta = \delta(\kappa, \lambda, \varepsilon)$  olacak şekilde eğer  $m$  jeodezik segmentin orta noktası  $[x, y] \subset X$ ,  $d(x, y) \leq \lambda$  ve

$$\max\{d(x, m'), d(y, m')\} \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \delta$$

ise  $d(m, m') < \varepsilon$  dur (Bridson and Haefliger 1999).

**Önerme 2.1.18:** Eğer  $X$   $CAT(0)$  uzayı ise  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlanan uzaklık fonksiyonu konvektir.

Bu herhangi bir jeodezik çiftinin verildiği anlamına gelir.  $c: [0,1] \rightarrow X$  ve  $c': [0,1] \rightarrow X$  yay uzunluğuna orantılı olarak parametrelenen

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1 - t)d(c(0), c'(0)) + td(c(1), c'(1))$$

eşitsizliği her  $t \in [0,1]$  için sağlanır (Bridson and Haefliger 1999).

Şimdi Bridson ve Haefliger tarafından 1999 yılında verilen Teorem 2.1.18'in genelleştirilmiş halini vereceğiz. Bu sonuç aşağıdaki gibi sınırlandırılmış eğriliğe sahip uzaylar için geçerlidir.  $rad(S)$ ,  $X$  uzayına göre  $S$  nin normal Chebyshev yarıçapını belirtmek için kullanılır.

$$rad(S) = \inf\{\rho > 0 : S \subset B(x, \rho), x \in X\}$$

ayrıca  $sn_\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$sn_\kappa = \begin{cases} \sin \frac{\sqrt{\kappa}x}{\sqrt{\kappa}} ; & \kappa > 0 \\ x ; & \kappa = 0 \\ \sinh \frac{\sqrt{-\kappa}x}{\sqrt{-\kappa}} ; & \kappa < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 2.1.19:**  $X$  tam  $CAT(\kappa)$  uzayı ve  $S \subset X$  boş olmayan sınırlı bir alt küme olsun.

Bu durumda  $S \subset B(x, rad(S))$  ve

$$sn_\kappa(rad(S)) \leq \sqrt{2} sn_\kappa\left(\frac{diam(S)}{2}\right)$$

olacak şekilde tek bir  $x \in X$  noktası vardır (Lang and Schroeder 1997).

Özellikle sınırlı  $S$  kümesi, tam  $CAT(0)$  uzayının bir alt kümesi ise;

$$rad(S) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} diam(S)$$

olur (Buyalo 1998).

$CAT(\kappa)$  şartının bir çok formu üçgen geometrisi ile ilgili olsa da dörtgenlerin geometrisini içeren önemli bir formu da vardır.  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  sıralı dörtlüsü  $X$  metrik uzayında bir nokta olsun.  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  noktasının alt karşılaştırma noktası  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) \in M_\kappa^2$  verilsin. Her  $i, j \in \{1, 2\}$  için  $d(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = d(x_i, y_j)$  öyle ki

$$d(\overline{x_1}, \overline{y_1}) \leq d(x_1, y_1) \text{ ve } d(\overline{x_2}, \overline{y_2}) \leq d(x_2, y_2)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Bir  $X$  uzayının  $CAT(\kappa)$  4-nokta şartını sağlaması için her  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in X$  sıralı dörtlüsüne göre

$$d(x_1, y_1) + d(y_1, x_2) + d(x_2, y_2) + d(y_2, x_1) < 2D_\kappa$$

olacak şekilde  $M_\kappa^2$  da bir alt gömme noktasına sahip olması gerekir.

**Önerme 2.1.20:**  $X$  bir tam metrik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- 1)  $X$ ,  $CAT(\kappa)$  uzayıdır.
- 2)  $X$ ,  $CAT(\kappa)$  4-nokta şartını sağlıyor ve her  $x, y \in X$  için  $d(x, y) < 2D_\kappa$  oluyorsa yaklaşık orta noktaya sahiptir (Kirk and Shahzad 2000).

**Tanım 2.1.21:**  $x, y_1$  ve  $y_2$ ,  $CAT(0)$  uzayındaki noktalar olmak üzere, eğer  $y_0$  noktası,  $[y_1, y_2]$  aralığının orta noktası ise bu durumda

$$d(x, y_0)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, y_1)^2 + \frac{1}{2}d(x, y_2)^2 - \frac{1}{4}d(y_1, y_2)^2$$

$CAT(0)$  eşitsizliği (veya (CN) eşitsizliği) sağlanır. (CN) eşitsizliği, Bruhat ve Tits (1972) tarafından verilmiştir. Bir jeodezik uzayın  $CAT(0)$  uzayı olması için gerek ve yeter şart (CN) eşitsizliğini sağlamasıdır (Bridson and Haefliger 1999).

Paralelkenar kuralı, Hilbert uzaylarında birçok önemli sonucu ispatlamak için kullanılmaktadır. Xu (1991) tarafından verilen eşitsizlik ve Schu (1991) nun meşhur lemması, düzgün konveks Banach uzaylarda tanımlı bazı dönüşümlerin sabit noktalarının

iteratif yapısının oluşturulmasında büyük bir rol oynar. Metrik uzaylarda bu tür genişlemelerin uygulanmasındaki zorluklardan birisi Banach uzayının lineer yapısının yaygın kullanımından kaynaklanır. Bruhat ve Tits (1972) paralelkenar kuralı ile  $CAT(0)$  uzaylarında tanımlı (CN) eşitsizliğinin benzerliğini göstermişlerdir. Bu eşitsizlikler lineer olmayan alanlarda sabit noktaların iteratif yapısı için çok etkilidir.

$X_1$  ve  $X_2$  uzaylarının  $CAT(0)$  uzayı olması durumunda  $X_1 \times X_2$  uzayı

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2))^2 = d(x_1, y_1)^2 + d(x_2, y_2)^2$$

metriğiyle beraber bir  $CAT(0)$  uzayıdır.

Ayrıca  $d(x, y_1) = d(x, y_2) = 1$  ve  $d(y_1, y_2) \geq \varepsilon$  ise

$$d(x, y_0) \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

olur. Böylece  $CAT(0)$  uzaylarında alışılmış Öklid metriği vardır. Özellikle  $d(x, y_1) \leq R$ ,  $d(x, y_2) \leq R$  ve  $d(y_1, y_2) \geq r$  olduğunda

$$d(x, y_0) \leq \left(1 - \delta\left(\frac{r}{R}\right)\right)R,$$

ve  $\delta(\varepsilon) = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$  olur (Bridson and Haefliger 1999).

Aşağıda  $CAT(0)$  uzaylarında çok önemli bir kavram olan açının tanımı verilmiştir.

**Tanım 2.1.22:**  $X$  bir metrik uzay  $c: [0, a] \rightarrow X$  ve  $c': [0, a'] \rightarrow X$  iki jeodezik ve  $c(0) = c'(0)$  olsun. Verilen  $t \in (0, a]$  ve  $t' \in (0, a']$  için  $\bar{\Delta}(c(0), c(t), c'(t'))$  karşılaştırma üçgeni ve  $\bar{Z}_{c(0)}(c(t), c'(t'))$  karşılaştırma açısını olsun.  $c$  ve  $c'$  jeodezikleri arasındaki açı

$$\angle_{c, c'} = \limsup_{t, t' \rightarrow 0} \bar{Z}_{c(0)}(c(t), c'(t')) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \sup_{0 < t, t' < \varepsilon} \bar{Z}_{c(0)}(c(t), c'(t')) \right]$$

ve  $\angle_{c, c'} \in [0, \pi]$  olarak tanımlanır.

**Önerme 2.1.23:**  $X$  bir metrik uzay ve  $C$ ,  $X$  in metriği ile tanımlanmış konveks bir alt küme olsun.

- 1) Her  $x \in X$  için  $d(x, P(x)) = \text{dist}(x, C)$  olacak şekilde bir  $P(x) \in C$  noktası vardır.
- 2) Eğer  $x'$ ,  $[x, P(x)]$  jeodezik segmentine aitse  $P(x') = P(x)$  dir.
- 3)  $x \notin C$  ve  $y \in C$  verilsin. Eğer  $y \neq P(x)$  ise  $\angle_{P(x)}(x, y) \geq \frac{\pi}{2}$  dir (Bridson and Haefliger 1999).

## 2.2. $\mathbb{R}$ -tree ve Genelleştirilmiş $CAT(0)$ Uzayları

$\mathbb{R}$ -tree uzayları,  $CAT(0)$  uzaylarının çok özel bir sınıfıdır.  $\mathbb{R}$ -tree uzaylarının birbirine denk birçok tanımı vardır. Biz bunlardan ikisini vereceğiz.

**Tanım 2.2.1:**  $X$  bir metrik uzay olmak üzere her  $x, y \in X$  noktalarını birleştiren bir tek yay (yani jeodezik segment) var ve bu yay  $\mathbb{R}$  uzayında bir aralığa izometrik ise bu uzaya  $\mathbb{R}$ -tree uzayı denir.

**Tanım 2.2.2:**  $X$  bir metrik uzay olsun.

- i. Her  $x, y \in X$  için  $x$  ve  $y$  yi birleştiren tek bir jeodezik segment vardır. Bu jeodezik segment  $[x, y]$  ile gösterilir.
- ii.  $[y, x] \cap [x, z] = \{x\} \Rightarrow [y, x] \cup [x, z] = [y, z]$   
şartları sağlanıyor ise  $X$  metrik uzayına  $\mathbb{R}$ -tree denir. Aşağıda (i) ve (ii) nin bir sonucu verilmiştir.
- iii. Her  $x, y, z \in X$  için  $[y, x] \cap [x, z] = [x, \omega]$  olacak şekilde bir  $\omega \in X$  vardır.

**Teorem 2.2.3:**  $CAT(\kappa)$  uzaylarında aşağıdaki önermeler sağlanır.

- 1) Eğer  $X$  bir  $CAT(\kappa)$  uzayı ise  $\kappa' \geq \kappa$  için  $X$  uzayı bir  $CAT(\kappa')$  uzayıdır.
- 2) Eğer  $X$  bir  $CAT(\kappa')$  uzayı ise  $\kappa' > \kappa$  için bu uzay  $CAT(\kappa)$  uzayıdır.
- 3)  $X$  uzayının her  $\kappa$  değeri için  $CAT(\kappa)$  uzayı olması için gerek ve yeter şart  $X$  uzayının  $\mathbb{R}$ -tree uzayı olmasıdır (Bridson and Haefliger 1999).

(1) in bir sonucu da  $CAT(0)$  uzaylarının  $\kappa < 0$  için otomatik olarak  $CAT(\kappa)$  uzaylarına ve özellikle  $\mathbb{R}$ -tree uzaylarına taşınmasıdır.

Khamsi ve Shukri 2017 yılında  $CAT(0)$  uzaylarının tanımını, karşılaştırma üçgenini Öklid düzleminde değil de daha genel bir Banach uzayında alarak aşağıdaki şekilde genelleştirmişlerdir. Özellikle bunu  $p > 2$  için  $\ell_p$  uzayları için incelemiştir.

**Tanım 2.2.4:**  $(X, d)$  bir jeodezik metrik uzay ve  $(E, \|\cdot\|)$  ise normlu vektör uzay olsun.  $X$  deki her  $\Delta$  jeodezik üçgeni için  $\bar{\Delta}$ ,  $E$  de bir karşılaştırma üçgeni olmak üzere, eğer her  $x, y \in \Delta$  ve her  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$  için

$$d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

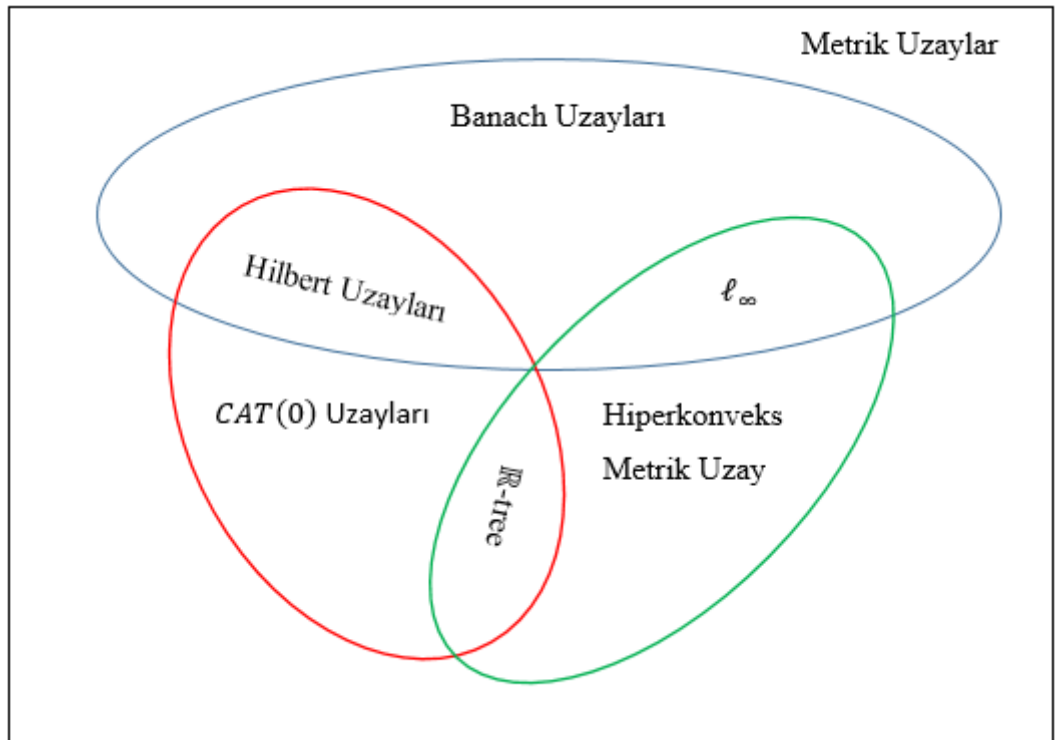
eşitsizliği sağlanıyorsa,  $X$ 'e genelleştirilmiş  $CAT(0)$  uzayı denir.

**Tanım 2.2.5:**  $(X, d)$  bir jeodezik metrik uzay olsun.  $X$  deki her  $\Delta$  jeodezik üçgeni için  $\bar{\Delta}, l_p$  ( $p > 2$ ) uzayında bir karşılaştırma üçgeni olmak üzere, her  $x, y \in \Delta$  ve her  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$  için

$$d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa,  $X$  e  $CAT_p(0)$  ( $p \geq 2$ ) uzayı denir.

Bu bölümde bahsi geçen uzaylar arasındaki ilişki aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.



**Şekil 2.4.**  $CAT(0)$  uzayları ve diğer uzaylar arasındaki ilişki

### 2.3. $CAT(0)$ Uzaylarında Sabit Nokta Teorisi

Bu başlık altında sabit nokta teorisi ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

**Tanım 2.3.1:**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $T: X \rightarrow X$  herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer  $Tx = x$  olacak şekilde bir  $x \in X$  varsa, bu  $x$  noktasına  $T$  dönüşümünün sabit noktası denir.  $T$  dönüşümünün sabit noktalarının kümesi  $F(T)$  veya  $Fix(T)$  ile gösterilir.

**Örnek 2.3.2:**

- i.  $X = [0,1]$  olmak üzere  $T: X \rightarrow X$ ,  $T(x) = \frac{x+1}{2}$  dönüşümünün sabit noktalar kümesi  $F(T) = \{1\}$  dir.
- ii.  $X = \mathbb{R}$  olmak üzere  $T: X \rightarrow X$ ,  $T(x) = x^2 - 2x + 2$  dönüşümünün sabit noktalar kümesi  $F(T) = \{1,2\}$  dir.
- iii.  $X = \mathbb{R}$  olmak üzere  $T: X \rightarrow X$ ,  $T(x) = x^2 + x + 1$  dönüşümünün sabit noktalar kümesi  $F(T) = \emptyset$  dir.

**Tanım 2.3.3:**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Her  $x, y \in X$  için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir  $0 \leq k < 1$  sabit sayısı varsa,  $T$  dönüşümüne daraltan dönüşüm denir.

**Tanım 2.3.4:**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Her  $x, y \in X$  için,

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$$

olacak şekilde bir  $L > 0$  sabit sayısı varsa,  $T$  dönüşümüne Lipschitzian dönüşüm denir. Bu şartı sağlayan en küçük  $L$  sayısına da Lipschitz sabiti denir.

**Tanım 2.3.5:**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Her  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise  $T$  dönüşümüne kesin daraltan dönüşüm denir.

**Tanım 2.3.6:**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Her  $x, y \in X$  için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise  $T$  dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm denir.

Yukarıdaki dönüşümlerin tanımları göz önüne alınarak bu dönüşümler arasında aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$T\text{-daraltan} \Rightarrow T\text{-kesin daraltan} \Rightarrow T\text{-genişlemeyen} \Rightarrow T\text{-Lipschitzian}$$

**Tanım 2.3.7:**  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $K \subseteq X$  boş olmayan alt küme ve  $T: K \rightarrow K$  bir dönüşüm olsun.  $p \in F(T)$  ve her  $x \in K$  için,

$$d(Tx, p) \leq kd(x, p)$$

ise  $T$  dönüşümüne quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Petryshyn and Williamson 1973).

Sabit noktalar kümesi boştan farklı her genişlemeyen dönüşüm bir quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir. Çünkü quasi-genişlemeyen dönüşümler sadece sabit noktalar kümesinde süreklidir. Diğer noktalarda sürekli olmak zorunda değildir.

Sabit nokta kümesinin geometrik ve topolojik özellikleri metrik uzaylarda belirli türdeki genişlemeyen dönüşümler için incelenmiştir. W.A. Kirk (2003),  $CAT(0)$  uzaylarında sabit nokta teorisini geliştirmiş ve sabit nokta kümeleri hakkında aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

**Teorem 2.3.8:**  $X$  kümesi, tam  $CAT(0)$  uzayının boştan farklı kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesi ve  $f: X \rightarrow X$  genişlemeyen bir dönüşüm ise  $f$  dönüşümünün sabit noktalarının kümesi boştan farklı kapalı ve konvektir.

Sabit noktaların var olduğu durumda yukarıdaki teoremden verilen kapalı konveks sabit nokta kümeleri ve  $CAT(0)$  uzayları arasındaki bağıntı daha geniş bir genelleme için bazı yazarlar tarafından araştırılmıştır.

Sabit noktalara ihtiyaç duyduğumuzdan dolayı  $F(f) \neq \emptyset$  alacağız.

**Lemma 2.3.9:** Quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının kümesi her zaman kapalıdır (Chaoha and Phon-on 2006).

**İspat:**  $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$  quasi-genişlemeyen bir dönüşüm ve  $(x_n)$  dizisi  $x \in X$  noktasına yakınsayan bir dizi olsun.  $\varepsilon > 0$  ne  $N \in \mathbb{N}$  olduğunda  $d(x, x_N) < \varepsilon/2$  olur ve bundan dolayı  $d(x, f(x)) \leq d(x, x_N) + d(x_N, f(x)) \leq 2d(x, x_N) < \varepsilon$  olur.  $\varepsilon$  keyfi olduğundan  $d(x, f(x)) = 0$  alınabilir. Bu da  $x \in F(f)$  olduğunu gösterir. Yani  $F(f)$  kapalıdır.

**Lemma 2.3.10:**  $(X, d)$  bir  $CAT(0)$  uzayı,  $x, y, z \in X$  olsun.

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$$

ise  $z \in [x, y]$  olur (Chaoha and Phon-on 2006).

**İspat:**  $\mathbb{R}^2$  de  $\Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  üçgeni,  $\Delta(x, y, z)$  jeodezik üçgeninin bir karşılaştırma üçgeni ve  $w \in [x, y]$  öyle ki  $d(x, w) = d(x, z)$  olsun. Bu varsayımla  $[\bar{x}, \bar{y}]$  segmentinin arasında  $\bar{z}$  noktasını bulunduran düz bir çizgi olduğunu görmek kolaydır. Yani  $\bar{z} \in [\bar{x}, \bar{y}]$  dir. Üstelik  $d(x, w) = d(x, z)$  olduğundan dolayı  $d(\bar{x}, \bar{w}) = d(\bar{x}, \bar{z})$  ve böylece  $\bar{z} = \bar{w}$  olur.  $CAT(0)$  eşitsizliğinden;

$$d(w, z) \leq d(\bar{z}, \bar{w}) = 0$$

olup,  $z = w \in [x, y]$  elde edilir.

**Teorem 2.3.11:**  $(X, d)$   $CAT(0)$  uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi ve  $f: X \rightarrow X$  quasi-genişlemeyen dönüşüm olsun.  $F(f)$  kapalı, konveks ve böylece büzülebilirdir (Chaoha and Phon-on 2006).

**İspat:**  $(X, d)$  bir  $CAT(0)$  uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olduğundan  $(X, d)$  bir  $CAT(0)$  uzayıdır.  $x, y \in F(f)$  ve  $z \in [x, y]$  olsun.  $f$  dönüşümü quasi-genişlemeyen olduğundan dolayı  $d(x, f(z)) \leq d(x, z)$  ve  $d(y, f(z)) \leq d(y, z)$  olur. Dolayısıyla;

$$d(x, y) \leq d(x, f(z)) + d(y, f(z)) \leq d(x, z) + d(y, z) = d(x, y)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten dolayı  $d(x, f(z)) + d(y, f(z)) = d(x, y)$  olur. Buradan  $d(x, z) = d(x, f(z))$  ve  $d(y, z) = d(y, f(z))$  olduğunu görmek zor değildir. Eğer  $d(x, z) < d(x, f(z))$  veya  $d(y, z) < d(y, f(z))$  ise;

$$d(x, y) \leq d(x, f(z)) + d(y, f(z)) < d(x, z) + d(y, z) \leq d(x, y)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Teorem 2.3.11 den dolayı  $f(z) \in [x, y]$  ve böylece  $z = f(z)$  olur çünkü sadece  $z$ ,  $[x, y]$  segmentinin bir elemanı ise  $d(x, z) = d(x, f(z))$  eşitliği sağlanır. Buradan  $[x, y] \subseteq F(f)$  yani  $F(f)$  konveks ve dolayısıyla büzülebilirdir.

**Teorem 2.3.12:**  $(X, d)$   $CAT(0)$  uzayı  $A \subset X$  boş olmayan bir alt küme olsun.  $F(f) = \bar{A}$  olacak şekilde sürekli bir  $f: X \rightarrow X$  dönüşümü vardır (Chaoha and Phon-on 2006).

**İspat:** Her  $x \in X$  için,  $k_x = \frac{d(x, A)}{1+d(x, A)} \in [0, 1]$  olsun. İlk olarak her  $x, y \in X$  için;

$$\begin{aligned}
|k_x - k_y| &= \left| \frac{d(x, A)}{1 + d(x, A)} - \frac{d(y, A)}{1 + d(y, A)} \right| \\
&= \left| 1 - \frac{1}{1 + d(x, A)} - 1 + \frac{1}{1 + d(y, A)} \right| \\
&= \left| \frac{1}{1 + d(y, A)} - \frac{1}{1 + d(x, A)} \right| \\
&= \left| \frac{d(x, A) - d(y, A)}{(1 + d(y, A))(1 + d(x, A))} \right| \\
&\leq |d(x, A) - d(y, A)|
\end{aligned}$$

olur. Şimdi sabit bir  $x_0 \in A$  ve  $f: X \rightarrow X$ ,  $f(x) = (1 - k_x)x \oplus k_x x_0$  dönüşümünü tanımlayalım.  $f$  dönüşümünün sürekli olduğunu göstereceğiz.  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  ve  $\delta = \frac{\varepsilon}{d(x, x_0) + 1} > 0$  alalım.  $y \in B_d(x, \delta)$  için;

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &= d((1 - k_x)x \oplus k_x x_0, (1 - k_y)y \oplus k_y x_0) \\
&\leq d((1 - k_x)x \oplus k_x x_0, (1 - k_y)x \oplus k_y x_0) \\
&\quad + d((1 - k_y)x \oplus k_y x_0, (1 - k_y)y \oplus k_y x_0) \\
&\leq |k_x - k_y|d(x, x_0) + d(x, y) \\
&\leq |d(x, A) - d(y, A)|d(x, x_0) + d(x, y) \\
&\leq d(x, y)(d(x, x_0) + 1) \\
&< \delta(d(x, x_0) + 1) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\Leftrightarrow (1 - k_x)x \oplus k_x x_0 = x \Leftrightarrow k_x = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{d(x, A)}{1 + d(x, A)} = 0 \Leftrightarrow d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}
\end{aligned}$$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece  $F(f) \in \bar{A}$  olur.

**Sonuç 2.3.13:**  $(X, d)$  bir  $CAT(0)$  uzayı  $K \subset X$  boş olmayan kapalı bir alt küme olsun. Sabit noktalarının kümesi  $K$  olan sürekli bir  $f: X \rightarrow X$  dönüşüm kesinlikle vardır (Chaoha and Phon-on, 2006).

**Örnek 2.3.14:**  $K = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$  kümesi  $X = [0, 1]$  in boştan farklı kapalı bir alt kümesi ve  $x_0 = 0$  olsun. Teorem 2.3.12 yi sağlayan dönüşümü her  $x \in X$  için  $f: X \rightarrow X$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+d(x, K)}$  şeklinde tanımlayalım.  $f_0(0) = 0$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için  $f_n: \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \rightarrow \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$  dönüşümü,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + \frac{1}{n} - x}, & \frac{2n+1}{2n(n+1)} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{x}{1 - \frac{1}{n+1} + x}, & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)} \end{cases}$$

şeklinde verilsin.  $f = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n$  dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. Böylece  $F(f_0(0)) = \{0\}$  ve  $F(f_n(0)) = \left\{\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right\}$  olur. Bu da  $F(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F(f_n) = K$  olduğunu gösterir (Chaoha and Phon-on 2006).

Burada bazı genel notasyonlar verilecektir.  $S$  kümesi tam  $CAT(0)$  uzayının bir alt kümesi olsun.  $x, y \in S$  için  $x$  ve  $y$ 'yi birleştiren tek bir  $[x, y] \subset X$  jeodeziği vardır.  $G_1(S)$  ile  $X$ 'teki tüm jeodezik segmentlerinin  $S$ 'nin uç noktaları ile birleştiği gösterilsin. Eğer  $S$  konveks ise  $G_1(S) = S$  dir.  $CAT(0)$  eşitsizliği  $rad(G_1(S)) = rad(S)$  olmasının sağlar.  $n \geq 2$  için  $G_n(S) = G_1(G_{n-1}(S))$  olarak tanımlanır.  $S$  nin konveks örtüsü

$$convS = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(S)$$

olarak tanımlanır ve kapanış kümesi  $\overline{\text{conv}}S$  ile gösterilir. Buradan yola çıkarak her kapalı  $S \subset X$  kümesi için  $\text{rad}(\overline{\text{conv}}S) = \text{rad}(S)$  sonucu elde edilir.

Genişlemeyen dönüşümlerin sabit nokta teoremlerinden biri de F. Browder'in 1968 yılında ispatladığı yarı-kapalılık teoremidir. Bu teorem şu şekilde ifade edilmiştir;  $X$  Banach uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi  $K$  olsun. Eğer  $f: K \rightarrow X$  genişlemeyen bir dönüşüm ise  $I - f$ ,  $K$  da demiclosed dir. Yani eğer  $\{(I - f)(u_j)\}$ ,  $w \in K$  noktasına kuvvetli yakınsak ise  $(I - f)(u) = w$  olur. Bu teoremin önemli bir sonucu da  $\inf\{\|x - f(x)\|: x \in K\} = 0$  ise  $f$  dönüşümü  $K$  kümesinde bir sabit noktaya sahiptir ve  $K$  kümesi sınırlıdır. Zayıf bir topoloji bulunmadığında bu teoremin bir benzeri tam  $CAT(0)$  uzayında bile ifade edilemez. Sonuçlar ancak böyle bir ortamda formüle edilebilir ve gerçekten de doğrudur.

$X$  bir metrik uzay,  $K \subset X$  ve  $f: K \rightarrow K$  bir fonksiyon olsun.  $\varepsilon > 0$  için  $f$  nin  $\varepsilon$  -sabit nokta kümesi

$$F_\varepsilon(f) = \{x \in K: d(x, f(x)) \leq \varepsilon\}$$

olarak tanımlanır.

**Lemma 2.3.15:**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı,  $x, y \in X$  sabit noktalar  $d(x, y) = 2r$  ve  $m$  noktası  $[x, y]$  jeodezik segmentinin orta noktası olsun. Eğer  $d(m', x) \leq r(1 + \varepsilon)$  ve  $d(m', y) \leq r(1 + \varepsilon)$  olacak şekilde bir  $m'$  noktası varsa  $d(m, m') \leq r\sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}$  olur (Bridson and Haefliger 1999).

**Lemma 2.3.16:**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı,  $K \subset X$  sınırlı bir küme olsun.  $f: K \rightarrow K$  genişlemeyen bir dönüşüm ve  $x, y \in F_\varepsilon(f)$  için  $d(x, y) = r$  olduğunu varsayalım.  $m \in [x, y] \cap K$  olsun.  $f(m) \in F_{\phi(\varepsilon)}(f)$  ve  $\phi(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon^2 + 2r\varepsilon}$  olur (Bridson and Haefliger 1999).

**İspat:**  $m$ ,  $[x, y]$  nin bir noktası  $m$  ile  $x$  arası mesafe  $\alpha r$  olsun.  $m \in K$  olduğunu varsayalım. Eğer  $m' = f(m)$  ise

$$\begin{aligned} d(x, m') &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(m)) \\ &\leq d(x, f(x)) + d(x, m) \leq \varepsilon + \alpha r \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde  $d(y, m) \leq \varepsilon + (1 - \alpha)r$  olur.  $\angle_m(m'x)$  ve  $\angle_m(m'y)$  açılarından en az biri  $\pi/2$  den büyük veya eşit olur. Eğer  $\angle_m(m', x) \geq \pi/2$  ise karşılaştırma üçgeni  $\bar{\Delta}(m, m', x)$  ve  $\bar{m}$ ,  $\pi/2$  den büyük veya eşit bir açı olsun. Kosinüs teoremi ile

$$(\varepsilon + \alpha r)^2 \geq d(x, m')^2 \geq (\alpha r)^2 + d(m, m')^2$$

dir. Eğer  $\angle_m(m', y) \geq \pi/2$  ise

$$(\varepsilon + (1 - \alpha)r)^2 \geq d(y, m')^2 \geq ((1 - \alpha)r)^2 + d(m, m')^2$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} d(m, f(m))^2 &= d(m, m')^2 \\ &\leq \max\{\varepsilon^2 + 2\alpha r\varepsilon, \varepsilon^2 + 2(1 - \alpha)r\varepsilon\} \\ &\leq \varepsilon^2 + 2r\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 2.3.17:**  $X$  bir tam  $CAT(0)$  uzayı,  $K \subset X$  kapalı, konveks ve sınırlı bir alt küme olsun. Kabul edelim ki  $f: K \rightarrow K$  genişlmeyen bir dönüşüm için

$$\inf\{d(x, f(x)): x \in K\} = 0$$

dir. Bu durumda  $f$  dönüşümü  $K$  da bir sabit noktaya sahiptir (Kirk and Shahzad 2000).

**İspat:**  $x_0 \in X$  sabit ve

$$r_0 = \inf\{r > 0: \inf\{d(x, f(x)): x \in B(x_0; r) \cap K\} = 0\}$$

olsun. Eğer  $r_0 < 0$  ve  $r_0 = 0$  ise  $x_0 \in K$  için  $f(x_0) = x_0$  olduğu açıktır.  $r_0 > 0$  olduğunu varsayalım.  $d(x_n, f(x_n)) \rightarrow 0$ ,  $d(x_0, x_n) \rightarrow r$  olacak şekilde bir  $\{x_n\} \subset K$  dizisi alalım.  $\{x_n\}$  dizisinin herhangi yakınsak alt dizileri  $f$  nin bir sabit noktasına yakınsayan  $\{u_j\}$  ve  $\{v_j\}$  olarak alınırsa  $d(u_j, v_j) \geq \varepsilon$  olur. Buradan

$$d(x_0, u_j) < r_0 + \frac{1}{j} \text{ ve } d(x_0, v_j) < r_0 + \frac{1}{j}$$

elde edilir.  $m_j$ ,  $[u_j, v_j]$  jeodezik segmentinin orta noktası,  $\bar{m}_j$  noktası  $m_j$  noktasına karşılık gelen nokta ve  $\Delta(\bar{x}_0, \bar{u}_j, \bar{v}_j)$  karşılaştırma üçgeni olsun.  $CAT(0)$  eşitsizliğinden,

$$d(x_0, m_j) \leq d(\bar{x}_0, \bar{m}_j) \leq \sqrt{\left(r_0 + \frac{1}{j}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

olur.  $j$  yeterince büyük alındığında  $d(x_0, m_j) \leq r^* < r_0$  olduğu açıktır. Diğer taraftan Lemma 2.3.16'dan dolayı  $j \rightarrow \infty$  için  $d(m_j, f(m_j)) \rightarrow 0$  olur. Bu ise  $r_0 > 0$  olması ile çelişir.

Aynı ispat aşağıdaki sonucu da verir.

**Teorem 2.3.18:**  $X$  bir tam  $CAT(0)$  uzayı,  $U \subset X$  bağlantılı, sınırlı ve açık bir küme olsun.  $f: \bar{U} \rightarrow X$  genişlemeyen bir dönüşüm ise;

- a)  $f$  nin  $U$  da bir sabit noktası vardır.  
 b)  $\inf\{d(x, f(x)): x \in \partial U\} \leq \inf\{d(x, f(x)): x \in U\}$  dur (Kirk and Shahzad 2000).

**İspat:**  $z \in U$  için,

$$d(z, f(z)) < \xi := \inf\{d(x, f(x)): x \in \partial U\}$$

olduğunu varsayalım. Eğer  $m \in [z, f(z)] \cap U$  ise

$$\begin{aligned} d(m, f(m)) &\leq d(m, f(z)) + d(f(z), f(m)) \\ &\leq d(m, f(z)) + d(z, m) \\ &\leq d(z, f(z)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu  $[z, f(z)]$  segmentinin sadece  $U$  da değil  $\partial U$  da sınırlandığını ispatlar. Eğer  $g: U \rightarrow X$  dönüşümünde  $g(x)$ 'i  $[x, f(x)]$  jeodezik segmentinin orta noktası olarak tanımlarsak  $\{g(x)\}$ ,  $U$ 'da yer alır. Ayrıca Goebel ve Kirk'in 1990 yılında ispatladığı Teorem 3 den dolayı  $d(g^n(z), g^{n+1}(z)) \rightarrow \varepsilon$  olur. Böylece  $\inf\{d(x, f(x)): x \in U\} = 0$  dır. Eğer  $\varepsilon > 0$  iken  $\sqrt{\varepsilon^2 + 2r\varepsilon} \leq \delta < \xi$  olduğunda  $r = \text{diam}(U)$  olur ve eğer  $m \in [u, v] \cap U$  olduğunda  $u, v \in F_\varepsilon(f)$  için  $d(m, f(m)) \leq \delta$  olur. Böylece  $[u, v] \cap \partial U = \emptyset$  olur ve  $m_k$ ,  $U$  nun içindedir.

Yaklaşık sabit nokta özelliğini göz önüne alalım. Metrik uzayın bir alt kümesinin genişlemeyen dönüşümler için yaklaşık sabit nokta özelliği vardır. Eğer herhangi bir genişlemeyen  $f: K \rightarrow K$  dönüşümü verilirse,  $\inf\{d(x, f(x)): x \in K\} = 0$  olur. Bu tanımlamayı karakterize etmek için daha fazla tanıma ihtiyacımız vardır.

**Tanım 2.3.19:**  $X$  bir metrik uzay ve  $\gamma: [0, \infty) \rightarrow X$  eğrisi verilsin. Eğer  $b \geq 0$  olduğunda  $t \geq s \geq 0$  için

$$t - s - b \leq d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq t - s$$

oluyorsa  $\gamma$  eğrisine yönlü eğri denir.  $X$  in bir alt kümesi yönlü bir eğri içermiyorsa  $X$  e yönlendirilmiş sınırlıdır denir.

**Tanım 2.3.20:** Bir  $X$  jeodezik metrik uzay her  $c: [a, b] \rightarrow X$  lokal jeodezik,  $a \neq b$ ,  $\varepsilon > 0$  ve  $c': [a, b + \varepsilon] \rightarrow X$  için  $c'|_{[a, b]} = c$  ise  $c$  jeodezik uzantı özelliğine sahiptir denir.

**Lemma 2.3.21:** Bir  $CAT(0)$  uzayı  $X$  in jeodezik uzantı özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart her sabit olmayan  $c: [a, b] \rightarrow X$  jeodeziği için  $c: \mathbb{R} \rightarrow X$  şeklinde genişletilebilir olmasıdır (Bridson and Haefliger 1999).

Tam bir  $CAT(0)$  uzayı sonlu boyutlu homomorfik bir manifold için her zaman jeodezik uzantı özelliğine sahiptir.

1983 yılında Reich, bir yansımali Banach uzayının yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart uzayın yönlendirilmiş sınırlı olması gerektiğini belirtmiştir. Benzer şekilde 1990 yılında Shafrir, tam hiperbolik metrik uzayın (genişlemeyen dönüşümler için) yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart olarak onun yönlendirilmiş sınırlı olması gerektiğini ispatlamıştır. Bunun sonucu olarak tam  $CAT(0)$  uzayının kapalı, konveks bir alt kümesinin jeodezik uzantı özelliği ile yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart yönlendirilmiş sınırlı olmasıdır.

**Teorem 2.3.22:** Jeodezik uzantı özelliğine sahip tam  $CAT(0)$  uzayının kapalı konveks bir alt kümesinin genişlemeyen dönüşümlere göre yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart jeodezik ışın içermemesidir (Kirk and Shahzad 2000).

**İspat:** Shafrir'in sonucu göz önünde bulundurularak sadece tam  $CAT(0)$  uzayı  $X$  de kapalı konveks bir kümenin jeodezik olarak sınırlanması durumunda yönlendirilmiş

sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.  $K$  nın  $X$  de kapalı konveks bir küme olduğunu ve  $K$  da yönlendirilmiş bir eğrinin  $\gamma$  olduğunu varsayalım.  $K$  nın bir jeodezik ışın içerdiğini göstermeliyiz.

$x_n = \gamma(n), n = 0, 1, 2, 3, \dots$  ve  $\rho > b$  keyfi bir karşılaştırma,  $b, \gamma$  ile ilişkili yön sabiti olsun. Her bir  $n \geq \rho$  için,  $\rho$  mesafesi ile  $x_0$  için  $y_n, [x_0, x_n]$  jeodezik segmentinde bir nokta olsun. Şimdi  $m > n \geq \rho$  olduğunu varsayalım.  $\alpha_{n,m}$  ve  $\mathbb{R}^2$  de bir karşılaştırma açısı  $Z_{\bar{x}_0}(\bar{x}_n, \bar{x}_m)$  olsun. Kosinüs teoremi ile

$$\cos(\alpha_{n,m}) = \frac{d(x_0, x_n)^2 + d(x_0, x_m)^2 - d(x_n, x_m)^2}{2d(x_0, x_n)d(x_0, x_m)}$$

ve

$$\begin{aligned} n - b &\leq d(x_0, x_n) \leq n \\ m - b &\leq d(x_0, x_m) \leq m \\ m - n &\geq d(x_n, x_m) \end{aligned}$$

eşitsizliklerini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_{n,m}) &\geq \frac{(n-b)^2 + (m-b)^2 - (m-n)^2}{2nm} \\ &= \frac{n}{2m} \left[ \frac{(n-b)^2}{n^2} \right] + \frac{m}{2n} \left[ \frac{(m-b)^2}{m^2} \right] - \frac{(m-n)^2}{2mn} \\ &= \frac{n}{2m} + \frac{m}{2n} - \frac{(m-n)^2}{2mn} - \frac{b}{n} - \frac{b}{m} + \frac{b^2}{nm} \\ &= 1 - b \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{b}{nm} \right) \end{aligned}$$

olur. Böylece  $n, m \rightarrow \infty$  için  $\cos(\alpha_{n,m}) \rightarrow 1$  elde edilir. Bundan dolayı  $\alpha_{n,m} \rightarrow 0$  olur. Eğer  $\bar{y}_n, \bar{y}_m$  noktaları  $\Delta(\bar{x}_0, \bar{x}_n, \bar{x}_m)$  karşılaştırma üçgeninde birer nokta ise  $\bar{y}_n, \bar{y}_m$

noktalarına karşılık gelen  $CAT(0)$  eşitsizliği  $d(y_n, y_m) \leq d(\bar{y}_n, \bar{y}_m)$  dir. Aslında  $\{\bar{y}_n\}$  dizisi  $n, m \rightarrow \infty$  için  $\alpha_{n,m} \rightarrow 0$  olmasını sağlar. Böylece  $\{y_n\}$  dizisi Cauchy dizisi olur.  $\rho > b$  rastgele olduğu için  $\{[x_0, x_n]\}$  dizisi başlangıç noktası  $x_0$  olan ışınlara yakınsar.

**Tanım 2.3.23:**  $X$  bir topolojik uzay olsun.  $T: X \rightarrow X$  dönüşümü sürekli ve sabit noktaya sahipse  $T$  dönüşümüne sabit nokta özelliğine sahiptir denir (Agarwal *et al.* 2001).

Ray 1980 yılında, Hilbert uzayının boş olmayan kapalı ve konveks alt kümelerinde tanımlanan genişlemeyen dönüşümlerin sabit nokta özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart onun sınırlı olması gerektiğini ispatlamıştır. Bu bağlamda “Bir tam  $CAT(0)$  uzayının kapalı ve konveks alt kümesinin sabit nokta özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.” tahminini yapmak cazip gelebilir. Bu tahmin doğrudur. Espinola ve Kirk 2006 yılında “ $\mathbb{R}$ -tree uzayın kapalı konveks bir alt kümesinin genişlemeyen dönüşümler üzerinde sabit nokta özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart jeodezik olarak sınırlı olmasıdır.” teoremini ispatlamışlardır. Ray’ın teoremini sağlayan bir  $CAT(0)$  uzayı sınıfının olup olmadığı sorusuna aşağıdaki kavramın tanımıyla olumlu bir cevap verilebilir.

**Tanım 2.3.24 (U şartı):**  $(X, d)$  bir sınırsız jeodezik uzay olsun. Herhangi bir kapalı konveks  $Y \subset X$  kümesi  $X$  kümesinin sınırsız özelliğine sahiptir. Ya  $Y$  kümesi jeodezik olarak sınırsızdır ya da her kapalı konveks sınırsız  $K \subset Y$  kümesi ve  $x \in K$  için  $K$  kümesinin kapalı konveks sınırsız bir  $K_1$  alt kümesi vardır. Öyle ki;

$$dist(x, K_1) := \inf\{d(x, y) : y \in K_1\} \geq 1$$

olur (Espinola and Piatek 2013).

Espinola and Piatek’in önemli sonuçlarından biri de  $(X, d)$  uzayı U şartını sağlayan bir  $CAT(0)$  uzayı ise  $X$  in kapalı konveks bir  $Y$  alt kümesinin genişlemeyen dönüşümler üzerinde sabit nokta özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

Ayrıca Espinola ve Piatek bir yansımali Banach uzayının  $U$  şartını sağladığını göstermişlerdir.

Şimdi  $CAT(0)$  uzayında genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için bir yöntem vereceğiz.  $K$  kümesi  $CAT(0)$  uzayının kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi ve  $f: K \rightarrow K$  bir genişlemeyen dönüşüm olsun.  $x_0 \in K$  sabit ve  $t \in (0,1)$  için  $f_t: K \rightarrow K$  dönüşümü tanımlansın.  $x_0$  noktasının  $[x_0, f(u)]$ 'ya olan uzaklığı  $td(x_0, f(u))$  olsun. Sonra metrik konveksliği ile

$$d(f_t(u), f_t(v)) \leq td(u, v)$$

olur. Yani  $f_t$  dönüşümü daraltandır.  $K$  nin tamlığından dolayı Banach'ın daraltan dönüşüm teoremi tek bir  $x_t$  noktasının olduğunu garanti eder. Öyle ki;

$$x_t \in [x_0, f(x_t)] \text{ ve } d(x_0, x_t) = td(x_0, f(x_t))$$

dir.

**Teorem 2.3.25:**  $K$  kümesi tam bir  $CAT(0)$  uzayının kapalı konveks ve sınırlı alt kümesi,  $f: K \rightarrow K$  genişlemeyen bir dönüşüm,  $x_0 \in K$  sabit bir nokta ve  $x_t \in [x_0, f(x_t)]$  ve  $d(x_0, x_t) = td(x_0, f(x_t))$  olsun. Bu durumda  $\lim_{t \rightarrow 1^-} x_t$ ,  $f$  nin sabit noktasına yakınsar (Kirk and Shahzad 2000).

**İspat:**  $0 < j < l \leq 1$  için  $\mathbb{R}^2$  de  $\Delta(x_0, f(x_j), f(x_l))$  üçgeninin karşılaştırma üçgeni  $\Delta(\bar{x}_0, \bar{f}(x_j), \bar{f}(x_l))$  olsun. Kolaylık sağlamak için  $\bar{x}_0$  başlangıç noktası olsun.  $CAT(0)$  eşitsizliği göz önüne alınırsa;

$$\|\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_l)\| = d(f(x_j), f(x_l)) \leq d(x_j, x_l)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\bar{x}_j - \bar{x}_l\| \\
&= \|j^{-1}\bar{f}(x_l) - l^{-1}\bar{f}(x_j)\|
\end{aligned}$$

olur. Özellikle  $\bar{x}_j = j\bar{f}(x_j)$  ve  $\bar{x}_l = l\bar{f}(x_l)$  dir.  $d = \bar{x}_l - \bar{x}_j$  verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle l^{-1}(\bar{x}_j + d) - j^{-1}\bar{x}_j, l^{-1}(\bar{x}_j + d) - j^{-1}\bar{x}_j \rangle &= \|l^{-1}(\bar{x}_j + d) - j^{-1}\bar{x}_j\|^2 \\
&= \|l^{-1}\bar{x}_l - j^{-1}\bar{x}_j\|^2 \\
&= \|\bar{f}(x_l) - \bar{f}(x_j)\|^2 \\
&\leq \|d\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$(l^{-1} - j^{-1})^2 \|\bar{x}_j\|^2 + (l^{-1})^2 \|d\|^2 + 2\langle (l^{-1} - j^{-1})l^{-1}\bar{x}_j, d \rangle \leq \|d\|^2$$

olup

$$(l^{-1} - j^{-1})^2 \|\bar{x}_j\|^2 + (l^{-2} - 1)\|d\|^2 \leq 2(j^{-1} - l^{-1})l^{-1}\langle \bar{x}_j, d \rangle$$

yazılır. Özellikle  $\langle \bar{x}_j, d \rangle \geq 0$  dır. Burada

$$\|\bar{x}_l\|^2 = \langle \bar{x}_j + d, \bar{x}_j + d \rangle = \|\bar{x}_j\|^2 + \|d\|^2 + 2\langle \bar{x}_j, d \rangle$$

eşitliğinden

$$\|\bar{x}_l\|^2 \geq \|\bar{x}_j\|^2 + \|\bar{x}_j - \bar{x}_l\|^2 \quad (2.1)$$

elde edilir.

Şimdi  $\{k_i\}$  dizisi  $0 < k_1 < k_2 < \dots < 1$  ve  $i \rightarrow \infty$  için  $k_i \rightarrow 1$  olacak şekilde bir dizi olsun. Böylece  $\{\|\bar{x}_{k_i}\|^2\}$  dizisi monoton artan ve sınırlıdır.  $i, j \rightarrow \infty$  için

$$d(x_{k_i}, x_{k_j})^2 \leq \|\bar{x}_{k_i} - \bar{x}_{k_j}\|^2 \leq \|\bar{x}_{k_i}\|^2 - \|\bar{x}_{k_j}\|^2 \rightarrow 0$$

olur. Böylece  $\{k_i\}$  bir  $x^* \in K$  noktasına yakınsar.

$$d(x_{k_i}, f(x_{k_i})) = (1 - k_i)d(x_0, f(x_{k_i}))$$

ve süreklilikten dolayı

$$d(x^*, f(x^*)) = \lim_{k_i \rightarrow 1^-} (1 - k_i)d(x_0, f(x_{k_i})) = 0$$

olur. Böylece  $x^* \in K$  noktası  $f$  dönüşümünün bir sabit noktası olur. Şimdi  $x^*$  noktasının tekliğini göstermek için farklı bir  $p$  sabit noktasının olduğunu kabul edelim. (2.1) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} d(x_0, p)^2 &= \|\bar{p}\|^2 \geq \|\bar{x}_{k_i}\|^2 + \|\bar{x}_{k_i} - \bar{p}\|^2 \\ &\leq \|\bar{x}_{k_i}\|^2 + d(x_{k_i}, p)^2 \\ &= k_i^2 d(x_0, x_{k_i})^2 + d(x_{k_i}, p)^2 \end{aligned}$$

olur.  $k_i \rightarrow 1^-$  için

$$d(x_0, p)^2 \geq d(x_0, x^*)^2 + d(x^*, p)^2$$

olur. Bu  $x^*$  noktasının tek bir sabit nokta olduğunu ispatlar.

Yukarıdaki Teoremin bir sonucu olarak herhangi bir  $x \in K$  için

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x_t = Px \in F(f)$$

dir. Burada  $P$  fonksiyonu  $P: K \rightarrow F(f)$ ,  $x \mapsto Px$  şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur.

$CAT(0)$  uzayının en yakın nokta yansıması olduğundan tam konveks alt kümeleri genişlemeyendir. Dolayısıyla  $P$  genişlemeyendir.

Reich 1980 yılında Teorem 2.3.25 in Hilbert uzayları dışında Banach uzaylarında doğru olduğunu ispatlamıştır.

**Teorem 2.3.26:**  $X$  bir tam  $CAT(0)$  uzayı  $K \subset X$ ,  $\text{int}K \neq \emptyset$  olsun.  $f, g: K \rightarrow K$  daraltan dönüşümler,  $h: [0,1] \times K \rightarrow X$  bir homotopi dönüşümü olduğunu varsayalım. Aşağıdaki şartlar sağlansın;

- a)  $h(0, \cdot) = g$ ,  $h(1, \cdot) = f(\cdot)$ ,
- b)  $k \in (0,1)$  bir sabit  $t \in [0,1]$  için  $h(t, \cdot)$  genişlemeyendir,
- c)  $\varepsilon > 0$  için  $\delta > 0$  olduğunda  $x \in K$  ve  $t, s \in [0,1]$  için

$$|t - s| < \delta \Rightarrow d(h(t, x), h(s, x)) < \varepsilon$$

dur,

- d)  $x \in \partial K$ ,  $t \in [0,1]$  için  $x \neq h(t, x)$ .

$f$ 'nin  $K$ 'da sabit noktasının olması için gerek ve yeter şart  $g$ 'nin  $K$ 'da sabit noktaya sahip olmasıdır (Reich 1980).

**İspat:**  $g$ 'nin sabit noktaya sahip olduğunu varsayalım ve

$$E = \{t \in [0,1] : x = h(t, x), \exists x \in K\}$$

olsun. Bu teoremi ispatlamak için  $E$ 'nin hem açık hem de kapalı olduğunu göstermeliyiz. Eğer  $E$  açık değil ise  $t \in E$  ve  $\{t_n\} \subset [0,1] \setminus E$  olsun. Şimdi  $P: X \rightarrow K$  dönüşümü  $X$  kümesinin elemanlarının en yakın noktaya izdüşümü olmak üzere  $\hat{h}(t, \cdot): X \rightarrow X$ ,  $\hat{h}(t, x) = h(x, P(x))$  dönüşümü tanımlansın.  $\hat{h}(t, \cdot)$  dönüşümü  $k$  sabiti ile birlikte genişlemeyen bir dönüşümdür. Özellikle  $x_n \in X$  için  $x_n = \hat{h}(t_n, x_n)$  dir. Böylece

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= d(h(t_n, P(x)), h(t, P(x))) \\ &\leq d(h(t_n, P(x_n)), h(t, P(x))) + d(h(t_n, P(x)), h(t, P(x))) \\ &\leq kd(x_n, x) + d(h(t_n, P(x)), h(t, P(x))) \end{aligned}$$

olup

$$d(x_n, x_k) \leq (1 - k)^{-1} d(h(t_n, P(x)), h(t, P(x)))$$

olur. (c)'den dolayı  $x_n = h(t_n, P(x)) \rightarrow x$  olmalıdır. Ancak  $\{x_n\}$   $K$ 'da tanımlı ve  $x$ ,  $K$ 'nın içindedir. Bu bir çelişkidir yani  $E$  açıktır. Şimdi  $E$ 'nin kapalı olduğunu gösterelim.  $t_n \in E, t_n \rightarrow t \notin E$  olduğunu varsayalım. Daha önceki kısımda verilen argümanlarla  $K$ 'daki  $\{x_n\}$  dizisinin  $x_n \rightarrow x$  olduğu görülür ve  $x$ ,  $K$ 'da tanımlıdır.

**Tanım 2.3.27:** Sürekli  $f, g: X \rightarrow Y$  fonksiyonları verilsin.

$$F(x, 0) = f(x)$$

$$F(x, 1) = g(x)$$

şartlarını sağlayan sürekli  $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$  fonksiyonuna bir homotopi,  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonlarına da homotopik fonksiyonlar denir (Mucuk 2010).

**Teorem 2.3.28:**  $X$  bir tam  $CAT(0)$  uzayı,  $K \subset X$  kapalı, sınırlı ve konveks bir alt küme,  $\text{int}K \neq \emptyset$  olsun.  $f: K \rightarrow X$  genişlemeyen bir dönüşüm ve  $h: [0,1] \times K \rightarrow K$  bir homotopi dönüşümü olduğunu varsayalım. Eğer;

- a)  $h(0, \cdot)$  in bir sabit noktası vardır,
- b)  $h(1, \cdot) = f(\cdot)$ ,
- c) En az bir  $\varepsilon > 0$  için  $\delta > 0$  olduğunda  $x \in K$  ve  $t, s \in [0,1]$  için

$$|t - s| < \delta \Rightarrow d(h(t, x), h(s, x)) < \varepsilon$$

dur,

- d)  $x \in \partial K$ ,  $t \in [0,1]$  için  $x \neq h(t, x)$ ,

sağlanıyorsa  $f$  dönüşümünün  $K$  kümesinde bir sabit noktası vardır (Kirk and Shahzad 2000).

**İspat:**  $\{t_n\} \subset (0,1)$  ve  $t_n \rightarrow 1$  olarak seçelim. Teorem 2.3.26 dan dolayı  $x_n \in K$  ve  $x_n = h(t_n, x_n)$  olur. Böylece

$$d(x_n, f(x_n)) = d(h(t_n, x_n), h(1, x_n))$$

ve (c)'den  $d(x_n, f(x_n)) = 0$  dır. Dolayısıyla Teorem 2.3.17'nin ispatındaki benzer yöntem kullanılarak istenilen elde edilir.

**Sonuç 2.3.29:** Düzenli değişen argümanlarla birlikte Teorem 2.3.17 ve 2.3.18'i düzgün konveks metrik uzaylar için ispatlamak mümkündür. Fakat Teorem 2.3.22-2.3.26 için

aynı şeyi söylemek mümkün değildir. Özellikle Teorem 2.3.25 ve Teorem 2.3.26'nın düzgün konveks Banach uzayı olup olmadığı bilinmiyor. Bir diğer yandan da belirttiğimiz gibi Teorem 2.3.22 herhangi bir yansılmalı Banach uzayında geçerli, ancak yansılmalı olmayan Banach uzayında geçerli değildir (Kirk and Shahzad 2000).

Şimdi Leray-Schauder sınır koşulunu sağlayan bir teoremi vereceğiz. Bunun için Granas'ın aşağıdaki devam prensibini kullanacağız.

**Teorem 2.3.30:**  $U$  tanım kümesi (yani bağlantılı ve açık küme)  $X$  tam metrik uzayının bir alt kümesi  $f, g: \bar{U} \rightarrow X$  genişlemeyen dönüşümler olsun.  $h: \bar{U} \times [0,1] \rightarrow X$  dönüşümü

- a)  $h(\cdot, 1) = f, h(\cdot, 0) = g$ ,
- b) Her  $x \in \partial U$  ve  $t \in [0,1]$  için  $x \neq h(t, x)$ ,
- c)  $x, y \in \bar{U}$  ve  $t \in [0,1]$  için  $d(h(x, t), h(y, t)) \leq d(x, y)$  olacak şekilde bir  $k < 1$  sayısı vardır,
- d) Her  $x \in \bar{U}$  ve  $t, s \in [0,1]$  için  $d(h(x, t), h(x, s)) \leq \alpha |s - t|$  olacak şekilde bir  $\alpha \geq 0$  sabiti vardır,

şartlarını sağlasın.  $f$  dönüşümünün bir sabit noktası olması için gerek ve yeter şart  $g$  fonksiyonunun sabit noktasının olmasıdır (Granas 1994).

**Lemma 2.3.31:**  $\{z_n\}$ ,  $H$  hilbert uzayının bir alt kümesi ve  $\{r_n\}$  pozitif sayılardan oluşan bir sayı dizisi olsun. Kabul edelim ki;

$$\langle z_n - z_m, r_n z_n - r_m z_m \rangle \leq 0, m = 1, 2, 3, \dots$$

olsun. Eğer  $\{r_n\}$  dizisi kesin azalan,  $\{\|z_n\|\}$  artan ve sınırlı ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  limiti vardır (Crandall and Pazy 1969).

**Teorem 2.3.32:**  $X$  bir tam  $CAT(0)$  uzayı,  $U \subset X$  sınırlı, bağlantılı, açık bir küme,  $f: \bar{U} \rightarrow X$  genişlemeyen bir dönüşüm ve her  $x \in \partial U$  için  $x \notin [p, f(x)]$  olacak şekilde bir  $p \in U$  olsun.  $f$  dönüşümü  $\bar{U}$  kümesinde bir sabit noktaya sahiptir (Kirk 2004).

**İspat:**  $t \in (0,1)$  ve  $u \in U$  için  $f_t(u)$ ,  $[p, (f(u))]$  segmentinin bir noktası ve  $p$  için uzaklık  $td(p, f(u))$  olsun.  $x, y \in U$  için  $\mathbb{R}^2$  de  $\Delta(p, x, y)$  üçgeninin karşılaştırma üçgeni  $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$  olsun.  $f_t(x)$  ve  $f_t(y)$  noktalarının  $\bar{\Delta}$  üçgeninde karşılık gelen karşılaştırma noktaları  $\bar{f}_t(x)$  ve  $\bar{f}_t(y)$  verilsin.  $CAT(0)$  eşitsizliğinden dolayı;

$$d(f_t(x), f_t(y)) \leq \|\bar{f}_t(x) - \bar{f}_t(y)\| = t\|\bar{x} - \bar{y}\| = td(x, y)$$

olur. Böylece  $f_t: U \rightarrow X$  dönüşümü daraltan bir dönüşümdür. Dahası, eğer  $B(p; r) \subset U$  ve yerince küçük bir  $t$  için  $f_t: U \rightarrow B(p; r)$  dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Şimdi  $\lambda \in (0,1)$  alalım. Teorem 2.3.30'u uygularsak  $f_\lambda$  sabit noktaya sahiptir.  $h: \bar{U} \times [0,1] \rightarrow X$ ,  $h(x, t) = f_{\lambda t}(x)$  olacak şekilde homotopy dönüşümünü tanımlayalım.  $h(\cdot, 1) = f_\lambda$  ve  $h(\cdot, 0)$  bir sabit dönüşüm olmak üzere, bazı  $x \in \partial U$  ve  $t \in [0,1]$  için  $h(x, t) = x$  olursa  $f_{\lambda t}(x) = x$  ve  $x \in [p, f(x)]$  elde edilir. Bu mümkün olmadığından Teorem 2.3.30'un (b) şartı sağlanır.  $\lambda$  değeri  $k$  olarak seçilirse (c) şartı da sağlanır. Sonuç olarak her  $t, s \in [0,1]$  için;

$$d(h(x, t), h(x, s)) \leq |s - t|d(p, f(x))$$

ve  $U$  sınırlı olup (d) şartı da sağlanmış olur. Böylece Teorem 2.3.30 dan dolayı  $f_\lambda$ 'nın tek bir sabit noktası olup  $f_t$  de bir tek sabit noktaya sahip olur. Bu nokta  $t \in (0,1)$  için  $x_t$  olsun.

Şimdi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n$  için  $x_t$  ve  $t = 1 - 1/n$  olarak gösterilsin.  $m, n \in \mathbb{N}$  ve  $m, n > 1$  için  $\mathbb{R}^2$  de  $\Delta(p, f(x_m), f(x_n))$  üçgeninin karşılaştırma üçgeni  $\bar{\Delta} = \Delta(0, \bar{f}(x_m), \bar{f}(x_n))$  ve  $x_m, x_n$

noktalarının karşılaştırma noktaları  $\bar{x}_m, \bar{x}_n$  olsun.  $f$  nin genişlemeyen olduğunu ve  $CAT(0)$  eşitsizliğini kullanırsak;

$$\|\bar{f}(x_m) - \bar{f}(x_n)\| = d(f(x_m), f(x_n)) \leq d(x_m, x_n) \leq \|\bar{x}_m - \bar{x}_n\|$$

olur. Sonuç olarak  $r_m = (1 - m)^{-1}$  ve  $r_n = (1 - n)^{-1}$

$$\langle r_n \bar{x}_n - r_m \bar{x}_m, \bar{x}_n - \bar{x}_m \rangle = \langle \bar{f}(x_n) - \bar{f}(x_m), \bar{x}_n - \bar{x}_m \rangle - \|\bar{x}_m - \bar{x}_n\|^2$$

elde edilir.

Böylece  $\{r_n\}$  kesin azalan,  $\{\bar{x}_n\}$  dizisi Lemma 2.3.31 den dolayı yakınsaktır.  $d(x_m, x_n) \leq d(\bar{x}_m, \bar{x}_n)$  olup  $\{x_n\}$  yakınsaktır ve  $f$  nin sabit noktasına yakınsar.

**Sonuç 2.3.33:** Önceki sonuçta yer alan  $U$  nun herhangi bir kompaktlık varsayımı olmaması dikkat çekicidir. Ariza-Ruiz ve arkadaşları 2014 yılında Teorem 2.3.32'nin kompakt aralık ve sürekli dönüşümler için ilginç bir uzantısını ispatlamıştır (Kirk and Shahzad 2000).

Bu bölümde son olarak genelleştirilmiş  $CAT(0)$  uzaylarında sabit nokta teorisi üzerine yapılan çalışmalara değinilecektir.

**Tanım 2.3.34:**  $\tau: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\tau(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n)$  olacak şekilde  $X$  kümesinde sınırlı bir  $\{x_n\}$  dizisi varsa bu dönüşüme  $\tau$ -tip dönüşüm denir.

**Teorem 2.3.35:**  $p \geq 2$  için  $(X, d)$  bir  $CAT_p(0)$  uzayı ve  $C$ ,  $X$  uzayının boş olmayan kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. Ayrıca  $C$  üzerinde bir  $\tau$  tip dönüşümü verilsin. Böylece  $\tau$  nun herhangi bir minimize dizisi yakınsaktır. Bunun limiti olan  $z$ ,  $\tau$  nun tek minimumudur ve her  $x \in C$  için

$$\tau^p(z) + \frac{1}{2^{p-1}} d^p(z, x) \leq \tau^p(x)$$

eşitsizliğini sağlar (Khamsi and Shukri 2017).

**Tanım 2.3.36:**  $(X, d)$  bir metrik uzay  $T: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Her  $x, y \in X$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$d(x, y) \leq kd(T^n(x), T^n(y))$$

olacak şekilde bir  $k > 0$  sayısı varsa  $T$  dönüşümüne düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

**Teorem 2.3.37:**  $p \geq 2$  için  $(X, d)$  bir  $CAT_p(0)$  uzayı olsun. Her  $x, y_1, y_2 \in X$  için

$$d^p(x, \frac{y_1 \oplus y_2}{2}) \leq \frac{1}{2} d^p(x, y_1) + \frac{1}{2} d^p(x, y_2) - \frac{1}{2^p} d^p(y_1, y_2)$$

$(CN_p)$  eşitsizliği sağlanır (Khamsi and Shukri 2017).

Khamsi and Shukri  $CAT_p(0)$  ( $p \geq 2$ ) metrik uzayında  $(CN_p)$  eşitsizliği yardımıyla, düzgün Lipschitzian dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını aşağıdaki teoremle göstermiştir.

**Teorem 2.3.38:**  $C$ , bir tam  $CAT_p(0)$  ( $p \geq 2$ ) uzayının boş olmayan kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun.  $T: C \rightarrow C$ ,

$$\lambda(T) = \sup_{n \geq 1} Lip(T^n) < \left( \frac{1 + \sqrt{8(N(X)/2)^p}}{2} \right)^{1/p}$$

eşitsizliğini sağlayan düzgün Lipschitzian bir dönüşüm olsun. Bu durumda  $T$  dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Shukri 2017).

#### 2.4. Zayıf Yakınsaklık

1976 da Lim güçlü  $\Delta$ -yakınsama olarak adlandırdığı genel metrik uzaylarda bir kavram ifade etmiştir. Bu da  $CAT(0)$  uzayının Lim'in konsepti için doğal bir yapı sağladığını ve böyle bir ortamda  $\Delta$ -yakınsama ile Banach uzaylarında zayıf yakınsamanın birçok özelliğinin aynı olmasını gerektirir. Sonuç olarak Kirk ve Panyank 2008 yılında birçok Banach uzayı kavramının ve zayıf yakınsama içeren birçok sonucun  $CAT(0)$  uzaylarına genişletebileceğini göstermiştir. Bu sonuçlar burada tekrar verilecektir. 1978 yılında Kuczumow'un hemen hemen yakınsama olarak adlandırdığı Banach uzaylarında aynı kavramdan söz ettiğini söyleyebiliriz.

Bu bölüm boyunca  $X$  bir tam  $CAT(0)$  uzayını göstereceğiz.  $\{x_n\}$ ,  $X$  de sınırlı bir dizi ve  $x \in X$  için;

$$r(x, \{x_n\}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n)$$

asimtotik yarıçap  $r(\{x_n\})$  ile gösterilsin,

$$r(\{x_n\}) = \inf\{r(x, \{x_n\}) : x \in X\}$$

ve  $\{x_n\}$  dizisinin asimtotik merkezi  $A(\{x_n\})$

$$A(\{x_n\}) = \{x \in X : r(x, \{x_n\}) = r(\{x_n\})\}$$

olarak tanımlanır.

Bilindiği gibi  $CAT(0)$  uzayında  $A(\{x_n\})$  tek noktadan oluşur.

Şimdi Lim'in  $CAT(0)$  uzayındaki çalışmalarına geri dönüyoruz.

**Tanım 2.4.1:**  $\{x_n\}$ ,  $X$  de bir dizi olsun.  $\{x_n\}$  dizisinin her  $\{u_n\}$  alt dizisi için tek bir asimtotik merkezi var ve bu asimtotik merkez  $x \in X$  olsun.  $\{x_n\}$  dizisinin  $X$  de  $\Delta$ -yakınsak olması için

$$\Delta - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

olmalıdır.

$\{x_n\}$  sınırlı dizisinin her  $\{u_n\}$  dizisi için eğer  $r(\{x_n\}) = r(\{u_n\})$  oluyorsa  $\{x_n\}$  dizisinin regüler olduğu söylenir. Banach uzaylarındaki her sınırlı dizinin regüler bir alt dizisi vardır (Gobel and Kirk 1990). Her regüler dizi  $\Delta$ -yakınsadığından  $X$  deki her sınırlı dizinin  $\Delta$ -yakınsak bir alt diziye sahip olduğu söylenebilir.

$X$  uzayında bir  $\{x_n\}$  dizisi  $x \in X$  e  $\Delta$ -yakınsasın.  $y \in X$  ve  $y \neq x$  için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) < \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y)$$

olur. Böylece  $X$  uzayı Opial özelliğini sağlar.

**Sonuç 2.4.2:**  $X$  uzayının her kapalı, sınırlı ve konveks  $K$  alt kümesi tüm  $\Delta$ -yakınsak dizilerinin  $\Delta$ -limitlerinin içeriyor ise  $X$  uzayı  $\Delta$ -kapalıdır (Dhomponga *et al.* 2007).

Aşağıda bunun bir sonucu verilmiştir (Dhomponga *et al.* 2007).

**Sonuç 2.4.3:** Eğer  $X$ 'deki  $\{x_n\}$  dizisi  $x \in X$ 'e  $\Delta$ -yakınsak ise

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\text{conv}} \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$$

ve  $\overline{\text{conv}}(A) = \bigcap \{B: B \supseteq A, B \text{ kapalı ve konveks}\}$  olur (Kirk and Shahzad 2000).

**Sonuç 2.4.4:**  $K \subset X$  kapalı konveks bir küme ve  $f: K \rightarrow K$  genişlemeyen bir dönüşüm olsun.  $\{x_n\}$  dizisi  $x$  e  $\Delta$ -yakınsak ve  $d(x_n, f(x_n)) \rightarrow 0$  ise  $x \in K$  ve  $f(x) = x$  olur (Kirk and Shahzad 2000).

**İspat:** Burada

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f(x), x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} [d(f(x), f(x_n)) + d(x_n, f(x_n))] = r(x, (x_n))$$

olup asimtotik merkez tek olduğundan  $f(x) = x$  elde edilir.

Teorem 2.3.17 yukarıdaki önermenin bir sonucudur.

$CAT(0)$  uzaylarının Opial özelliğini sağladığını biliyoruz. Artık Banach uzay teorisinde Kadec-Klee özelliği olarak bilinen özelliği vereceğiz. Bir metrik uzayda sınırlı  $\{x_n\}$  dizisi için

$$\text{sep}\{x_n\} := \inf(d(x_n, x_m): n \neq m)$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 2.4.5 (Kadec-Klee Özelliği):**  $p \in X$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun.  $\delta > 0$  için  $d(p, x) \leq 1 - \delta$  olduğunda  $X$  deki her  $\{x_n\}$  dizisi için  $d(p, x_n) \leq 1$  ise  $\text{sep}\{x_n\} > \varepsilon$  ve  $\Delta - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  olur (Kadec 1958).

**İspat:** Kolaylık için  $d(p, x_n) \equiv 1$  alınsın. Bir alt sınıfa geçerek her  $n$  için  $d(x_n, x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  olsun.  $\mathbb{R}^2$ 'de  $\Delta(p, x, x_n)$  üçgeninin karşılaştırma üçgeni  $\Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{x}_n)$  verilsin.  $[p, x]$  segmentine göre  $\{x_n\}$  dizisinin asimtotik merkezi  $x$  ve  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = r(\{x_n\})$  olur.

Her  $n$  için  $[\bar{p}, \bar{x}]$  segmentinin  $\bar{x}_n$  ye en yakın noktası  $\bar{u}_n$  ve  $u_n$  noktası  $[p, x]$  segmentinde bir nokta ise  $d(p, u_n) = d(\bar{p}, \bar{u}_n)$  ve  $d(u_n, x) = d(\bar{u}_n, \bar{x})$  olur.  $\theta_n = \angle_{\bar{p}}(\bar{x}, \bar{x}_n)$  olsun. Yine alt dizilere geçerek  $\{\bar{u}_n\}$  dizisi  $\bar{u} \in [\bar{p}, \bar{x}]$  noktasına,  $\{u_n\}$  dizisi  $u \in [p, x]$  ve  $\theta_n \rightarrow \theta$  noktalarına yakınsasın.  $d(\bar{x}_n, \bar{x}) = d(x_n, x) > \frac{\varepsilon}{2} > 0$  olması  $\theta > 0$  olmasını gerektirir. Eğer  $\delta = 1 - \cos \theta$  alınırsa  $d(p, x) = d(\bar{p}, \bar{x}) \leq \cos \theta$  olur. Diğer yandan  $\angle_{\bar{u}_n}(\bar{p}, \bar{x}_n) = \frac{\pi}{2}$  ve  $d(\bar{p}, \bar{u}_n) = \cos \theta_n$  olduğunda  $d(p, x) > \cos \theta$  elde edilir.

Bu  $d(\bar{p}, \bar{u}) = \cos \theta$  ve  $\cos \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n$  değerlerinin  $\varepsilon$  cinsinden tahmin edilebileceğini gösterir. Bu durumda  $CAT(0)$  eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
 r(\{x_n\}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) \\
 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(\bar{x}, \bar{x}_n) \\
 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(\bar{u}_n, \bar{x}_n) \\
 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(\bar{u}, \bar{x}_n) \\
 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u, x_n)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $r(u, \{x_n\}) \leq r(\{x_n\})$  dir. Asimtotik merkez tektir ve  $u = x$  tir. Bundan dolayı  $\bar{u} = \bar{x}$  olur. Fakat  $d(p, u) = d(\bar{p}, \bar{u}) \leq \cos \theta < 1$  dir. Böylece her iki durumda da  $\delta$  nın pozitif ve  $\varepsilon$  a bağlı olduğundan hareketle  $d(p, u) \leq 1 - \delta$  sonucuna varılır.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Konveks Daraltan Dönüşümler

Istrătescu 1981 yılında konveks daraltan dönüşüm sınıflarını tanıtmış, 2. dereceden konveks daraltan dönüşümler ve iki yönlü konveks daraltan dönüşümlerin tek bir sabit noktası olduğunu ispatlamıştır. 2. dereceden konveks daraltan dönüşümler ve iki yönlü konveks daraltan dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili varlık ve yakınsama teoremlerini göstermiştir. Bu dönüşüm sınıfları son yıllarda ilgi görmeye başlamıştır.

Son yıllarda çok sayıda yazar Banach daralma ilkesinin genellemelerini sunmaktadır. Bu genellemelerden bazıları Schauder sabit nokta teoremini de içerir. Bu bölümde konveks daraltan dönüşümler ve bu dönüşümler için ispatlanmış bazı sabit nokta teoremlerini ele alacağız.

**Tanım 3.1.1:**  $f: X \rightarrow X$  sürekli bir dönüşüm ve  $a + b < 1$  olsun. Her  $x, y \in X$  için,

$$d(f^2(x), f^2(y)) \leq ad(x, y) + bd(f(x), f(y))$$

olacak şekilde  $a, b \in (0,1)$  sayıları varsa  $f$  dönüşümüne 2. dereceden konveks daraltan dönüşüm denir (Istrătescu 1981).

Bu dönüşüm sınıfının daraltan dönüşüm sınıflarını içerdiği açıktır. 2. dereceden konveks daraltan dönüşümün sabit noktaları ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.1.2:** 2. dereceden konveks daraltan dönüşümün tek bir sabit noktası vardır (Istrătescu 1981).

**İspat:** Sabit noktanın tekliği açık olduğu için sadece varlığı ispatlanacaktır.  $x_0 \in X$  herhangi bir nokta olmak üzere  $x_0$  noktasının  $f$  fonksiyonu altındaki görüntüsü ( $f^n(x_0)$ ),  $f^0(x_0) = x_0$  olsun.

$$k = \max\{d(x_0, f(x_0)), d(f(x_0), f^2(x_0))\}$$

alınsın. Herhangi bir  $m$  tamsayısı için,

$$d(f^{2m+1}(x_0), f^{2m}(x_0)) \leq ad(f^{2m}(x_0), f^{2m-1}(x_0)) + bd(f^{2m-1}(x_0), f^{2m-2}(x_0))$$

sağlanır. Bundan yola çıkarak,

$$\begin{aligned} d(f^3(x_0), f^2(x_0)) &\leq ad(f^2(x_0), f(x_0)) + bd(f(x_0), x_0) \\ &\leq k(a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f^4(x_0), f^3(x_0)) &\leq ad(f^3(x_0), f^2(x_0)) + bd(f^2(x_0), f(x_0)) \\ &\leq ak(a + b) + bk \\ &= k(a + b) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(f^5(x_0), f^4(x_0)) &\leq ad(f^4(x_0), f^3(x_0)) + bd(f^3(x_0), f^2(x_0)) \\ &\leq ak(a + b) + bk(a + b) \\ &= k(a + b)^2 \end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse,

$$d(f^{2m+1}(x_0), f^{2m}(x_0)) \leq k(a + b)^m$$

elde edilir.

$$d(f^{2m-1}(x_0), f^{2m}(x_0)) \leq ad(f^{2m-2}(x_0), f^{2m-1}(x_0)) + bd(f^{2m-3}(x_0), f^{2m-2}(x_0))$$

ve

$$d(f^{2m-1}(x_0), f^{2m}(x_0)) \leq k(a+b)^m$$

olur.  $m < n$  için

$$d(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq ad(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) + \dots + bd(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0))$$

olur. Böylece  $(f^n(x_0))$  dizisi  $X$  kümesinde bir Cauchy dizisidir. Eğer  $m = 2l$  ise

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq k(a+b)^l + k(a+b)^l + k(a+b)^{l+1} + k(a+b)^{l+1} + \dots \\ &\leq 2k(a+b)^l \frac{1}{1-a-b} \end{aligned}$$

olur.  $m = 2l - 1$  için de aynı sonucu elde ederiz.  $a + b \in (0,1)$  olduğu için  $(f^n(x_0))$  dizisi  $X$  kümesinde bir Cauchy dizisidir.  $n \rightarrow \infty$  için  $\lim f^n(x_0) = x^*$  olsun.  $f$  fonksiyonu sürekli olduğundan dolayı  $n \rightarrow \infty$  iken  $\lim f^{n+1}(x_0) = f(x^*)$  olur. Bundan dolayı  $f(x^*) = x^*$  olur.

**Tanım 3.1.3:**  $X$  bir tam metrik uzay ve  $f: X \rightarrow X$  sürekli bir dönüşüm olsun. Her  $x, y \in X$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \begin{cases} a_0 d(x, y) + a_1 d(f(x), f(y)) \\ + a_2 d(f^2(x), f^2(y)) + \dots \\ + a_{n-1} d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) \end{cases}$$

olacak şekilde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} > 0$  ve  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} < 1$  sayıları varsa  $f$  dönüşümüne  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm denir (Istrătescu 1981).

$n = 1$  alınırsa dönüşümün daraltan dönüşüm olacağı açıktır. Yukarıdaki Teorem 3.1.2,  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm sınıfı için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir. İspatı benzer şekilde yapılabilir.

**Teorem 3.1.4:** Eğer  $f: X \rightarrow X$ ,  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm ise tek bir sabit noktaya sahiptir (Istrătescu 1981).

**Tanım 3.1.5:**  $f: X \rightarrow X$  sürekli bir dönüşüm ve  $a + b = 1$  olsun. Her  $x, y \in X$  için,

$$d(f^2(x), f^2(y)) < ad(x, y) + bd(f(x), f(y))$$

olacak şekilde  $a, b \in (0,1)$  sayıları varsa  $f$  dönüşümüne 2. dereceden konveks genişlemeyen dönüşüm denir (Istrătescu 1981).

Nemytski 1936 yılında kompakt metrik uzaylarda genişlemeyen dönüşümün bir sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır. Aşağıdaki teorem Nemytski'nin teoreminin bir sonucudur.

**Teorem 3.1.6:**  $X$  bir kompakt metrik uzay ve  $f: X \rightarrow X$ , 2. dereceden konveks daraltan dönüşüm ise  $f$  dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir (Istrătescu 1981).

**Tanım 3.1.7:**  $X$  bir tam metrik uzay  $f: X \rightarrow X$  sürekli bir dönüşüm ve  $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 < 1$  olsun. Her  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  için,

$$\begin{aligned} d(f^2(x), f^2(y)) &\leq a_1 d(x, f(x)) + a_2 d(f(x), f^2(x)) \\ &\quad + b_1 d(y, f(y)) + b_2 d(f(y), f^2(y)) \end{aligned}$$

olacak şekilde  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in (0,1)$  sayıları varsa  $f$  dönüşümüne iki yönlü konveks daraltan dönüşüm denir (Istrătescu 1981).

İki yönlü konveks daraltan dönüşümlerin sabit noktaları için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.1.8:** Her iki yönlü konveks daraltan dönüşümün tek bir sabit noktası vardır (Istrătescu 1981).

**İspat:** Teklik önemsiz olduğu için sadece varlığını ispatlayalım.  $x_0 \in X$  herhangi bir nokta olmak üzere  $x_0$  noktasının  $f$  fonksiyonu altındaki görüntüsü  $(f^n(x_0))_0^\infty$ ,  $f^0(x_0) = x_0$  olsun.

$$k = \max\{d(x_0, f(x_0)), d(f(x_0), f^2(x_0))\}$$

olsun. Herhangi bir  $m$  tamsayısı için,

$$d(f^{2m+1}(x_0), f^{2m}(x_0)) \leq ad(f^{2m}(x_0), f^{2m-1}(x_0)) + bd(f^{2m-1}(x_0), f^{2m-2}(x_0))$$

sağlanır. Bundan yola çıkarak,

$$\begin{aligned} d(f^3(x_0), f^2(x_0)) &\leq ad(f^2(x_0), f(x_0)) + bd(f(x_0), x_0) \\ &\leq k(a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f^4(x_0), f^3(x_0)) &\leq ad(f^3(x_0), f^2(x_0)) + bd(f^2(x_0), f(x_0)) \\ &\leq ak(a + b) + bk \\ &= k(a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(f^5(x_0), f^4(x_0)) &\leq ad(f^4(x_0), f^3(x_0)) + bd(f^3(x_0), f^2(x_0)) \\
&\leq ak(a+b) + bk(a+b) \\
&= k(a+b)^2
\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse,

$$d(f^{2m+1}(x_0), f^{2m}(x_0)) \leq k(a+b)^m$$

elde edilir.

$$d(f^{2m-1}(x_0), f^{2m}(x_0)) \leq ad(f^{2m-2}(x_0), f^{2m-1}(x_0)) + bd(f^{2m-3}(x_0), f^{2m-2}(x_0))$$

ve

$$d(f^{2m-1}(x_0), f^{2m}(x_0)) \leq k(a+b)^m$$

olur.  $m < n$  için

$$d(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq ad(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) + \dots + bd(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0))$$

olur. Böylece  $(f^n(x_0))$  dizisi  $X$  kümesinde bir Cauchy dizisidir. Eğer  $m = 2l$  ise

$$\begin{aligned}
d(f^n(x_0), f^n(x_0)) &\leq k(a+b)^l + k(a+b)^l + k(a+b)^{l+1} + k(a+b)^{l+1} + \dots \\
&\leq 2k(a+b)^l \frac{1}{1-a-b}
\end{aligned}$$

olur.  $m = 2l - 1$  için de aynı sonuç elde edilir.  $a+b \in (0,1)$  olduğu için  $(f^n(x_0))$  dizisi  $X$  kümesinde bir Cauchy dizisidir.  $n \rightarrow \infty$  için  $\lim f^n(x_0) = x^*$  olsun.  $f$  fonksiyonu

sürekli olduğundan dolayı  $n \rightarrow \infty$  iken  $\lim f^{n+1}(x_0) = f(x^*)$  olur. Bundan dolayı  $f(x^*) = x^*$  olur.

**Tanım 3.1.9:**  $X$  bir tam metrik uzay  $f: X \rightarrow X$  sürekli bir dönüşüm ve  $c_0 + c_1 + a_1 + a_2 + b_1 + b_2 < 1$  olsun. Her  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  için,

$$\begin{aligned} d(f^2(x), f^2(y)) \leq & c_0 d(x, y) + c_1 d(f(x), f(y)) + a_1 d(x, f(x)) \\ & + a_2 d(f(x), f^2(x)) + b_1 d(y, f(y)) + b_2 d(f(y), f^2(y)) \end{aligned}$$

olacak şekilde  $c_0, c_1, a_1, a_2, b_1, b_2 \in (0,1)$  sayıları varsa  $f$  dönüşümüne 2. tip konveks dönüşüm denir (Istrătescu, 1981).

Tanım 3.1.8 de verilen dönüşüm sınıfının Tanım 3.1.7 ve Tanım 3.1.1 de verilen dönüşüm sınıflarını içerdiği açıktır.

**Teorem 3.1.11:**  $f: X \rightarrow X$  sürekli, iki yönlü konveks daraltan dönüşüm ve  $g: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun.

- i.  $g$  en az bir sabit noktaya sahiptir. ( $x_g^* \in F(g)$ );
- ii. Herhangi bir  $x \in X$  için  $d(f(x), g(x)) < n_1$  olacak şekilde bir  $n_1 > 0$  sayısı vardır;
- iii. Herhangi bir  $x \in X$  için  $d(f^2(x), g^2(x)) < n_2$  olacak şekilde bir  $n_2 > 0$  sayısı vardır;

şartları sağlansın.  $x_f^* \neq x_g^*$  olduğunda

$$d(x_f^*, x_g^*) \leq (b_1 + b_2)n_1 + (1 + b_2)n_2$$

olur (Mureşan et al. 2015).

**İspat:**  $f$  sürekli iki yönlü konveks daraltan dönüşüm olduğundan  $F(f) = \{x_f^*\}$  dir.  $x_f^* \neq x_g^*$  olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned}
d(x_f^*, x_g^*) &= d(f^2(x_f^*), g^2(x_g^*)) \leq d(f^2(x_f^*), f^2(x_g^*)) + d(f^2(x_g^*), g^2(x_g^*)) \\
&\leq a_1 d(x_f^*, f(x_f^*)) + a_2 d(f(x_f^*), f^2(x_f^*)) + b_1 d(x_g^*, f(x_g^*)) \\
&\quad + b_2 d(f(x_g^*), f^2(x_g^*)) + n_2 \\
&\leq b_1 d(x_g^*, f(x_g^*)) + b_2 d(f(x_g^*), f^2(x_g^*)) + n_2 \\
&\leq b_1 n_1 + b_2 \left( d(f(x_g^*), g(x_g^*)) + d(g(x_g^*), f^2(x_g^*)) \right) + n_2 \\
&\leq b_1 n_1 + b_2 n_1 + b_2 n_2 + n_2
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 3.1.12:**  $f: X \rightarrow X$  sürekli, iki yönlü konveks daraltan dönüşüm ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f_n: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun.

- i. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n^* \in F(f_n)$  vardır.
- ii.  $n \rightarrow \infty$  için  $f_n \rightrightarrows f$  ise  $x_n^* \rightarrow x_f^*$  olur. Burada  $x_f^* \in F(f)$  dir (Mureşan et al. 2015).

**İspat:**  $f$  sürekli iki yönlü konveks daraltan dönüşüm olduğundan  $F(f) = \{x_f^*\}$  dir.  $\{f_n\}$  fonksiyon dizisi  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığından dolayı en az bir  $x \in X$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$d(f_n(x), f(x)) \leq n_{1_n}$$

olacak şekilde bir  $n_{1_n} > 0$  sayısı vardır öyle ki  $n \rightarrow \infty$  için  $n_{1_n} \rightarrow 0$  olur.  $\{f_n^2\}$  fonksiyon dizisi  $f^2$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığından dolayı en az bir  $x \in X$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$d(f_n^2(x), f^2(x)) \leq n_{2_n}$$

olacak şekilde bir  $n_{2_n} > 0$  sayısı vardır öyle ki  $n \rightarrow \infty$  için  $n_{2_n} \rightarrow 0$  olur.

Bir önceki teorem ve süreklilikten dolayı

$$d(x_n^*, x_f^*) = d(f_n^2(x_n^*), f^2(x_f^*)) \leq (b_1 + b_2)n_{1_n} + (1 + b_2)n_{2_n}$$

elde edilir. Her iki tarafın  $n \rightarrow \infty$  için limiti alınırsa  $d(x_n^*, x_f^*) \rightarrow 0$  olur. Bu da  $x_n^* \rightarrow x_f^*$  olması demektir.

### 3.2. Bazı Önemli Tanım ve Teoremler

**Tanım 3.2.1:**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı  $K \subseteq X$  boş olmayan konveks bir alt küme  $f: K \rightarrow K$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in X$  keyfi bir nokta olmak üzere genelleştirilmiş Mann iterasyonu;

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n \oplus \alpha_n f^n(x_n), n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\{\alpha_n\}$ ,  $(0,1)$  aralığında bir dizidir.

**Lemma 3.2.2:**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı, her  $x, y, z \in X$  ve  $t \in [0,1]$  olsun.

$$d((1-t)x + ty, z) \leq (1-t)d(x, z) + td(y, z)$$

eşitsizliği sağlanır (Dhompongsa and Panyank, 2008).

**Lemma 3.2.3:**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı, her  $x, y, z \in X$  ve  $t \in [0,1]$  olsun.

$$d^2((1-t)x + ty, z) \leq (1-t)d^2(x, z) + td^2(y, z) - t(1-t)d^2(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır (Dhompongsa and Panyank 2008).

**Lemma 3.2.4:**  $\{x_n\} \subset X$  bir dizi,  $\{x_n\}$  dizisi  $x \in X$  noktasına  $\Delta$  –yakınsak,  $y \in X$  ve  $x \neq y$  olsun. Bu durumda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) < \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu özellik Banach uzayında Opial şartı olarakta bilinir.

Şimdi  $CAT(0)$  uzayında zayıf yakınsamanın tanımını hatırlayalım.

**Tanım 3.2.5 (Zayıf Yakınsama):**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı,  $K \subset X$  kapalı konveks bir alt küme olsun.  $\{x_n\} \subset K$  sınırlı dizisinin  $q \in K$  noktasına zayıf yakınsaması için gerek ve yeter şart  $\Phi(q) = \inf_{x \in K} \Phi(x)$  olduğunda  $\Phi(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x)$  olmasıdır.

$x_n \rightarrow x$  için gerek ve yeter şart  $A_K\{x_n\} = \{q\}$  olması gerektiğini hatırlayalım.

Nanjaras ve arkadaşları 2010 yılında  $CAT(0)$  uzayında  $\Delta$  –yakınsama ve zayıf yakınsama arasında şu bağlantıyı kurdu.

**Lemma 3.2.6:**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı,  $K \subset X$  kapalı konveks bir alt küme olsun.  $\{x_n\} \subset K$  sınırlı dizi olsun.

- i.  $\Delta - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ise  $x_n \rightarrow x$  olur.
- ii. Eğer (i) sağlanıyorsa  $\{x_n\}$  dizisi regülerdir (Nanjaras *et al.* 2010).

**Lemma 3.2.7:**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı,  $\{x_n\} \subset X$  sınırlı bir dizi,  $A\{x_n\} = x$  ve  $\{u_n\}$  dizisi  $\{x_n\}$  dizisinin bir alt dizisi,  $A\{u_n\} = u$  ve  $d(x_n, u)$  yakınsak ise  $x = u$  olur (Dhompongsa and Panyanak 2008).

**Lemma 3.2.8:**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı,  $K \subset X$  kapalı konveks bir alt küme ve  $\{x_n\} \subset K$  sınırlı dizi ise  $\{x_n\}$  dizisinin asimptotik merkezi  $K$  kümesindedir (Dhompongsa *et al.* 2007).



#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu başlık altında metrik uzayda ve  $CAT(0)$  uzaylarında  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve bu noktaya yakınsama ile ilgili bazı teoremler ve lemmalar verilip ispatlanacaktır.

##### 4.1. $n$ . Dereceden Konveks Daraltan Dönüşümlerin Sabit Noktaları

İlk önce Istratescu'nun 1981 yılında ispatsız olarak verdiği teoremin ispatı verilecektir.

**Teorem 4.1.1:**  $X$  bir metrik uzay ve  $f: X \rightarrow X$ ,  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm olsun. Eğer  $f$  dönüşümünün sabit noktası varsa tektir (Istrătescu 1981).

**İspat:** Bu teoremi ispatlamak için  $f^n$  dönüşümünün tek bir sabit noktasının olduğunu göstermek yeterlidir.  $f^n$  dönüşümünün  $p$  ve  $q$  gibi birbirinden farklı iki sabit noktası olsun.

$$\begin{aligned}
 d(p, q) &= d(f^n(p), f^n(q)) \\
 &\leq a_0 d(p, q) + a_1 d(f(p), f(q)) + a_2 d(f^2(p), f^2(q)) + \dots \\
 &\quad + a_{n-1} d(f^{n-1}(p), f^{n-1}(q)) \\
 &\leq a_0 d(p, q) + a_1 a_0 d(p, q) + a_2 (a_0 d(p, q) + a_1 a_0 d(p, q)) \\
 &\quad + a_3 (a_0 d(p, q) + a_1 a_0 d(p, q) + a_2 (a_0 d(p, q) + a_1 a_0 d(p, q))) + \dots \\
 &\quad + a_{n-1} (a_0 d(p, q) + a_1 a_0 d(p, q) + a_2 (a_0 d(p, q) + a_1 a_0 d(p, q)) \\
 &\quad + a_3 (a_0 d(p, q) + a_1 a_0 d(p, q) + a_2 (a_0 d(p, q) + a_1 a_0 d(p, q))) + \dots )
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq d(p, q) \left( a_o + a_1 a_o + a_2(a_o + a_1 a_o) + a_3(a_o + a_1 a_o + a_2(a_o + a_1 a_o)) \right. \\
&\quad + \dots \\
&\quad + a_{n-1}(a_o + a_1 a_o + a_2(a_o + a_1 a_o) \\
&\quad \left. + a_3(a_o + a_1 a_o + a_2(a_o + a_1 a_o)) + \dots \right) \\
&= a_o d(p, q) \left( 1 + a_1 + a_2(1 + a_1) + a_3(1 + a_1 + a_2(1 + a_1)) + \dots \right. \\
&\quad \left. + a_{n-1}(1 + a_1 + a_2(1 + a_1) + a_3(1 + a_1 + a_2(1 + a_1)) + \dots \right) \\
&= a_o(1 + a_1) d(p, q) (1 + a_2 + a_3(1 + a_2) + \dots \\
&\quad + a_{n-1}(1 + a_2 + a_3(1 + a_2) + \dots)) \\
&= a_o(1 + a_1)(1 + a_2) d(x_n, p) (1 + a_3 + \dots + a_{n-1}(1 + a_3 + \dots)) \\
&= a_o(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_{n-1}) d(p, q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $a_o + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} < 1$  olduğundan dolayı

$$A = a_o(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_{n-1}) < 1$$

olur. Buradan

$$d(p, q) \leq A d(p, q) \Rightarrow (1 - A) d(p, q) \leq 0 \Rightarrow d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Yani  $f^n$  dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

$$F(f^n) = \{p\} \Rightarrow F(f) = \{p\}$$

olacağından  $f$  dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır.

**Lemma 4.1.2:**  $X$  bir tam  $CAT(0)$  uzayı,  $K \subset X$  kapalı konveks bir alt küme ve  $f: K \rightarrow K$   $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm olsun.  $\{x_n\}$  dizisi  $x \in X$  noktasına yakınsak ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), x_n) = 0$  ise  $x \in K$  ve  $f(x) = x$  tir.

**İspat:**  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm tanımından

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), x_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(x_n)) + \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x_n), x_n) \\
&\leq a_0(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_{n-1}) \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) \\
&\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x_n), x_n) \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x_n), x_n) \\
&= r(x, x_n)
\end{aligned}$$

olur. Asimtotik merkezin tekliğinden dolayı  $x \in C$  ve  $f^n(x) = x$  bulunur. Buradan da  $f(x) = x$  olduğu açıktır.

**Lemma 4.1.3:**  $X$  bir tam metrik uzay,  $K \subseteq X$  boş olmayan konveks bir alt küme,  $f: K \rightarrow K$   $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm ve  $F(f) \neq \emptyset$  olsun. (3.1) de tanımlanan genelleştirilmiş Mann iterasyonu için  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$  limiti vardır.

**İspat:**  $f: K \rightarrow K$  dönüşümünün bir sabit noktası  $p \in F(f)$  olsun. Konveks daraltan dönüşüm tanımı ve (3.1) iterasyonu kullanılarak

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, p) &= d((1 - \alpha_n)x_n \oplus \alpha_n f^n(x_n), p) \\
&= (1 - \alpha_n)d(x_n, p) + \alpha_n d(f^n(x_n), p) \\
&= (1 - \alpha_n)d(x_n, p) + \alpha_n d(f^n(x_n), f^n(p)) \\
&\leq (1 - \alpha_n)d(x_n, p) \\
&\quad + \alpha_n (a_0 d(x_n, p) + a_1 d(f(x_n), f(p)) + a_2 d(f^2(x_n), f^2(p)) + \dots \\
&\quad + a_{n-1} d(f^{n-1}(x_n), f^{n-1}(p)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \alpha_n)d(x_n, p) \\
&\quad + \alpha_n \left( a_o d(x_n, p) + a_1 a_o d(x_n, p) + a_2 (a_o d(x_n, p) + a_1 a_o d(x_n, p)) \right. \\
&\quad + a_3 (a_o d(x_n, p) + a_1 a_o d(x_n, p) + a_2 (a_o d(x_n, p) + a_1 a_o d(x_n, p))) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + a_{n-1} (a_o d(x_n, p) + a_1 a_o d(x_n, p) + a_2 (a_o d(x_n, p) + a_1 a_o d(x_n, p)) \\
&\quad + a_3 (a_o d(x_n, p) + a_1 a_o d(x_n, p) + a_2 (a_o d(x_n, p) + a_1 a_o d(x_n, p))) \\
&\quad \left. + \dots \right) \\
&= (1 - \alpha_n)d(x_n, p) \\
&\quad + \alpha_n d(x_n, p) \left( a_o + a_1 a_o + a_2 (a_o + a_1 a_o) \right. \\
&\quad + a_3 (a_o + a_1 a_o + a_2 (a_o + a_1 a_o)) + \dots \\
&\quad + a_{n-1} (a_o + a_1 a_o + a_2 (a_o + a_1 a_o) \\
&\quad \left. + a_3 (a_o + a_1 a_o + a_2 (a_o + a_1 a_o)) + \dots \right) \\
&= (1 - \alpha_n)d(x_n, p) \\
&\quad + \alpha_n a_o d(x_n, p) \left( 1 + a_1 + a_2 (1 + a_1) + a_3 (1 + a_1 + a_2 (1 + a_1)) \right. \\
&\quad + \dots + a_{n-1} (1 + a_1 + a_2 (1 + a_1) + a_3 (1 + a_1 + a_2 (1 + a_1)) + \dots) \\
&= (1 - \alpha_n)d(x_n, p) \\
&\quad + \alpha_n a_o (1 + a_1) d(x_n, p) (1 + a_2 + a_3 (1 + a_2) + \dots \\
&\quad + a_{n-1} (1 + a_2 + a_3 (1 + a_2) + \dots)) \\
&= (1 - \alpha_n)d(x_n, p) \\
&\quad + \alpha_n a_o (1 + a_1) (1 + a_2) d(x_n, p) (1 + a_3 + \dots + a_{n-1} (1 + a_3 + \dots)) \\
&= (1 - \alpha_n)d(x_n, p) \\
&\quad + \alpha_n a_o (1 + a_1) (1 + a_2) (1 + a_3) \dots (1 + a_{n-1}) d(x_n, p)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.  $a_o(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_{n-1}) < 1$  olduğundan

$$d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$$

bulunur. Bu eşitsizlikten  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$  limiti vardır.

**Lemma 4.1.4:**  $X$  bir  $CAT(0)$  uzayı,  $K \subseteq X$  boş olmayan konveks bir alt küme,  $f: K \rightarrow K$   $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm ve  $F(f) \neq \emptyset$  olsun.  $\{x_n\}$  dizisi (3.1) de tanımlanan genelleştirilmiş Mann iterasyonu ve  $0 < b \leq \alpha_n \leq c < 1$  ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), x_n) = 0$  dır.

**İspat:**  $f: K \rightarrow K$  dönüşümünün bir sabit noktası  $p \in F(f)$  olsun. (3.1), Lemma 4.1.3 ve  $f$  dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned}
 d^2(x_{n+1}, p) &= d^2((1 - \alpha_n)x_n \oplus \alpha_n f^n(x_n), p) \\
 &\leq (1 - \alpha_n)d^2(x_n, p) + \alpha_n d^2(f^n(x_n), p) - \alpha_n(1 - \alpha_n)d^2(f^n(x_n), x_n) \\
 &= (1 - \alpha_n)d^2(x_n, p) + \alpha_n d^2(f^n(x_n), f^n(p)) \\
 &\quad - \alpha_n(1 - \alpha_n)d^2(f^n(x_n), x_n) \\
 &\leq (1 - \alpha_n)d^2(x_n, p) \\
 &\quad + \alpha_n[a_0(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_{n-1})]^2 d^2(x_n, p) \\
 &\quad - \alpha_n(1 - \alpha_n)d^2(f^n(x_n), x_n) \\
 &\leq (1 - \alpha_n)d^2(x_n, p) + \alpha_n d^2(x_n, p) - \alpha_n(1 - \alpha_n)d^2(f^n(x_n), x_n) \\
 &= d^2(x_n, p) - \alpha_n(1 - \alpha_n)d^2(f^n(x_n), x_n)
 \end{aligned}$$

olup

$$d^2(x_{n+1}, p) \leq d^2(x_n, p) - \alpha_n(1 - \alpha_n)d^2(f^n(x_n), x_n)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
 d^2(f^n(x_n), x_n) &\leq \frac{1}{\alpha_n(1 - \alpha_n)} [d^2(x_n, p) - d^2(x_{n+1}, p)] \\
 &\leq \frac{1}{b(1 - c)} [d^2(x_n, p) - d^2(x_{n+1}, p)]
 \end{aligned}$$

olduğundan her iki tarafın  $n \rightarrow \infty$  için limiti alınırsa  $d(x_{n+1}, p)$  ve  $d(x_n, p)$  dizileri yakınsak olduğundan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x_n), x_n) = 0$$

bulunur. Tekrar (3.1) kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(x_n, (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n f^n(x_n)) \\ &\leq (1 - \alpha_n)d(x_n, x_n) + \alpha_n d(f^n(x_n), x_n) \end{aligned}$$

yazılır. Her iki tarafın  $n \rightarrow \infty$  için limiti alınırsa  $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$  olur. Üçgen eşitsizliği ve süreklilikten

$$\begin{aligned} d(x_n, f(x_n)) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, f^{n+1}(x_{n+1})) + d(f^{n+1}(x_{n+1}), f^{n+1}(x_n)) \\ &\quad + d(f^{n+1}(x_n), f(x_n)) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, f^{n+1}(x_{n+1})) \\ &\quad + a_0(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_n)d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + d(f^{n+1}(x_n), f(x_n)) \\ &= [1 + a_0(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_n)]d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + d(x_{n+1}, f^{n+1}(x_{n+1})) + d(f^{n+1}(x_n), f(x_n)) \end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın da  $n \rightarrow \infty$  için limiti alınırsa  $d(x_n, f(x_n)) \rightarrow 0$  olur.

**Teorem 4.1.5:**  $X$  tam bir  $CAT(0)$  uzayı,  $C \subset X$  kapalı konveks bir alt küme ve  $f: C \rightarrow C$  konveks daraltan dönüşüm,  $F(f) \neq \emptyset$  ve  $\{x_n\}$  dizisi (3.1) de tanımlanan genelleştirilmiş Mann iterasyonu ve  $0 < b \leq \alpha_n \leq c < 1$  olsun. Böylece  $\{x_n\}$  dizisi  $f$  dönüşümünün sabit noktasına  $\Delta$  –yakınsar.

**İspat:** Lemma 4.1.4 dan dolayı  $d(x_n, f(x_n)) \rightarrow 0$  ve Lemma 4.1.3 den dolayı  $p \in F(f)$  olmak üzere  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$  limiti vardır. Şimdi  $\{x_n\}$  dizisinin bir  $\{u_n\}$  alt dizisi için  $w_w(x_n) = \bigcup A(u_n)$  olsun.  $\{x_n\}$  dizisi sınırlı bir dizi olduğundan ilk önce  $w_w(x_n) \subseteq F(f)$  olduğunu gösterelim.

$u \in w_w(x_n)$  olsun.  $\{x_n\}$  dizisinin öyle bir alt dizisi vardır ki  $A(\{u_n\}) = \{u\}$  olur.  $\{u_n\}$  dizisinin öyle bir alt dizisi vardır ki en az bir  $v \in C$  için  $\Delta - \lim v_n = v$  ve  $v \in F(f)$  dir. Lemma 3.2.8 den dolayı  $d(x_n, v) \rightarrow 0$  olur. Biz  $u = v$  olduğunu iddia ediyoruz. Bunu ispatlamak için  $u \neq v$  olduğunu kabul edelim. Asimtotik merkezin tekliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) &< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, u) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, u) \\ &< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, v) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) \end{aligned}$$

bulunur. Bu bir çelişkidir. Yani kabulümüz yanlış  $u = v \in F(f)$  ve  $w_w(x_n) \subseteq F(f)$  dir. Şimdi  $\{x_n\}$  dizisinin  $f$  dönüşümünün sabit noktasına  $\Delta$ -yakınsadığını göstereceğiz. Bunun için  $w_w(x_n)$  in tek bir noktadan oluştuğunu göstermeliyiz.  $\{x_n\}$  dizisinin öyle bir alt dizisi vardır ki  $A(\{u_n\}) = \{u\}$  dur. Lemma 3.2.7 den dolayı  $\{u_n\}$  dizisinin öyle bir alt dizisi vardır ki en az bir  $v \in C$  için  $\Delta - \lim v_n = v$  ve  $v \in F(f)$  dir.  $A(\{v_n\}) = \{v\}$  ve  $A(\{x_n\}) = \{x\}$  olsun.  $u = v \in F(f)$  olduğunu gösterdik. Şimdi  $x = v$  olduğunu göstereceğiz.  $x \neq v$  olduğunu kabul edelim.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, v) = 0$  ve asimtotik merkezin tekliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) &< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, x) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, v) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani  $x = v \in F(f)$  olup  $w_w(x_n) = \{x\}$  bulunur.

**Teorem 4.1.6:**  $X$  tam bir  $CAT(0)$  uzayı,  $C \subset X$  boş olamayan kapalı konveks bir alt küme,  $f: C \rightarrow C$  n. dereceden konveks daraltan dönüşüm,  $F(f) \neq \emptyset$  ve  $\{x_n\}$  dizisi (3.1) de tanımlanan genelleştirilmiş Mann iterasyounu olsun.  $f$  dönüşümünün  $\{x_n\}$  dizisinin sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart  $d(x, F(f)) = \inf\{d(x, p), p \in F(f)\}$  olarak tanımlandığında  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, F(f)) = 0$  olmasıdır.

**İspat:** Bu ispatı Safeer Hussain Khan ve arkadaşlarının 2011 yılında yaptığı ispata benzer bir şekilde yapacağız.  $\{x_n\}$  dizisinin  $f$  dönüşümünün bir sabit noktasına kuvvetli yakınsadığında  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, F(f)) = 0$  olduğu açıktır. Şimdi  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, F(f)) = 0$  olduğunu kabul edelim. Lemma 4.1.3 den dolayı  $p \in F(f)$  için

$$d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$$

dir. Her  $F(f) = \{p\}$  olduğundan

$$d(x_{n+1}, F(f)) \leq d(x_n, F(f))$$

olup  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(f))$  limiti vardır. Kabulümüzden dolayı  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(f)) = 0$  elde edilir.

Şimdi  $\{x_n\}$  dizisinin  $C$  kümesinde bir Cauchy dizisi olduğunu göstermeliyiz. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(f)) = 0$$

olduğundan

$$d(x_n, F(f)) < \frac{\varepsilon}{4}, \forall n \geq n_0$$

olacak şekilde bir  $n_0$  pozitif sayısı vardır. Özellikle  $\inf\{d(x_{n_0}, p) : p \in F(f)\} < \frac{\varepsilon}{4}$  olur.

$$d(x_{n_0}, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir  $p \in F(f)$  vardır. Her  $n, m > n_0$  için,

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, p) + d(p, x_n) \\ &\leq 2d(x_{n_0}, p) \\ &< 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece  $\{x_n\}$  dizisi tam  $CAT(0)$  uzayının kapalı konveks  $C$  kümesinde bir Cauchy dizisi olduğundan bu kümede bir  $q \in C$  noktasına yakınsar.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(f)) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, q) = 0$  ve  $F(f)$  kapalı olduğundan  $p = q \in F(f)$  elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Araştırma bulgularında ki sonuçları destekleyen aşağıdaki örnek için bulunan değerler MATLAB programı yardımıyla elde edilmiştir.

**Örnek 4.1.7:**  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ ,  $f(x) = \frac{2x^2+1}{4}$  fonksiyonu  $n$ . derereden konveks daraltan bir dönüşüm olsun.

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n \oplus \alpha_n f^n(x_n), n = 0,1,2,3, \dots$$

şeklinde tanımlanan iterasyon metodunun  $\alpha_n = \frac{2n}{3n+1}$  dizisi, bazı  $m$  ve  $x_1$  başlangıç değerleri için  $f$  fonksiyonunun sabit noktasına yakınsadığı aşağıda gösterilmiştir. Burada  $m, f$  fonksiyonunun konvekslik derecesidir.

**Çizelge 4.1.**  $x_1 = 1$  ve  $m = 1,2,3$  için yakınsama değerleri

| $m = 1$ için         | $m = 2$ için         | $m = 3$ için         |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| $x_1 = 1$            | $x_1 = 1$            | $x_1 = 1$            |
| $x_2 = 0,8750000$    | $x_2 = 0,7656250$    | $x_2 = 0,6955566$    |
| $x_3 = 0,7366071$    | $x_3 = 0,5552529$    | $x_3 = 0,4802752$    |
| $x_4 = 0,6074199$    | $x_4 = 0,4211030$    | $x_4 = 0,3722061$    |
| $x_5 = 0,5009950$    | $x_5 = 0,3510991$    | $x_5 = 0,3248733$    |
| $x_6 = 0,4225594$    | $x_6 = 0,3182611$    | $x_6 = 0,3054270$    |
| $x_7 = 0,3699607$    | $x_7 = 0,3036922$    | $x_7 = 0,2977158$    |
| $x_8 = 0,3371719$    | $x_8 = 0,2974238$    | $x_8 = 0,2947249$    |
| $x_9 = 0,3177611$    | $x_9 = 0,2947755$    | $x_9 = 0,2935822$    |
| $x_{10} = 0,3066557$ | $x_{10} = 0,2936697$ | $x_{10} = 0,2931504$ |
| $x_{11} = 0,3004384$ | $x_{11} = 0,2932118$ | $x_{11} = 0,2931504$ |
| $x_{12} = 0,2970046$ | $x_{12} = 0,2930234$ | $x_{12} = 0,2929285$ |
| $x_{13} = 0,2951243$ | $x_{13} = 0,2929462$ | $x_{13} = 0,2929062$ |
| $x_{14} = 0,2941005$ | $x_{14} = 0,2929147$ | $x_{14} = 0,2928980$ |
| $x_{15} = 0,2935451$ | $x_{15} = 0,2929019$ | $x_{15} = 0,2928950$ |
| $x_{16} = 0,2932446$ | $x_{16} = 0,2928967$ | $x_{16} = 0,2928939$ |
| $x_{17} = 0,2930824$ | $x_{17} = 0,2928946$ | $x_{17} = 0,2928934$ |
| $x_{18} = 0,2929949$ | $x_{18} = 0,2928938$ | $x_{18} = 0,2928933$ |
| $x_{19} = 0,2929479$ | $x_{19} = 0,2928934$ | $x_{19} = 0,2928932$ |
| $x_{20} = 0,2929225$ | $x_{20} = 0,2928933$ |                      |
| $x_{21} = 0,2929089$ | $x_{21} = 0,2928933$ |                      |
| $x_{22} = 0,2929016$ | $x_{22} = 0,2928932$ |                      |
| $x_{23} = 0,2928977$ |                      |                      |
| $x_{24} = 0,2928956$ |                      |                      |
| $x_{25} = 0,2928945$ |                      |                      |
| $x_{26} = 0,2928939$ |                      |                      |
| $x_{27} = 0,2928936$ |                      |                      |
| $x_{28} = 0,2928934$ |                      |                      |
| $x_{29} = 0,2928933$ |                      |                      |
| $x_{30} = 0,2928933$ |                      |                      |
| $x_{31} = 0,2928932$ |                      |                      |

**Çizelge 4.2.**  $x_1 = 1$  ve  $m = 10, 50, 100$  için yakınsama değerleri

| $m = 10$ için        | $m = 50$ için        | $m = 100$ için       |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| $x_1 = 1$            | $x_1 = 1$            | $x_1 = 1$            |
| $x_2 = 0,6464581$    | $x_2 = 0,6464466$    | $x_2 = 0,6464466$    |
| $x_3 = 0,4444233$    | $x_3 = 0,4444161$    | $x_3 = 0,4444161$    |
| $x_4 = 0,3535058$    | $x_4 = 0,3535024$    | $x_4 = 0,3535024$    |
| $x_5 = 0,3162060$    | $x_5 = 0,3162044$    | $x_5 = 0,3162044$    |
| $x_6 = 0,3016356$    | $x_6 = 0,3016349$    | $x_6 = 0,3016349$    |
| $x_7 = 0,2961141$    | $x_7 = 0,2961138$    | $x_7 = 0,2961138$    |
| $x_8 = 0,2940645$    | $x_8 = 0,2940644$    | $x_8 = 0,2940644$    |
| $x_9 = 0,2933149$    | $x_9 = 0,2933148$    | $x_9 = 0,2933148$    |
| $x_{10} = 0,2930438$ | $x_{10} = 0,2930438$ | $x_{10} = 0,2930438$ |
| $x_{11} = 0,2929467$ | $x_{11} = 0,2929466$ | $x_{11} = 0,2929466$ |
| $x_{12} = 0,2929121$ | $x_{12} = 0,2929121$ | $x_{12} = 0,2929466$ |
| $x_{13} = 0,2928998$ | $x_{13} = 0,2928998$ | $x_{13} = 0,2928998$ |
| $x_{14} = 0,2928955$ | $x_{14} = 0,2928955$ | $x_{14} = 0,2928955$ |
| $x_{15} = 0,2928940$ | $x_{15} = 0,2928940$ | $x_{15} = 0,2928940$ |
| $x_{16} = 0,2928935$ | $x_{16} = 0,2928935$ | $x_{16} = 0,2928935$ |
| $x_{17} = 0,2928933$ | $x_{17} = 0,2928933$ | $x_{17} = 0,2928933$ |
| $x_{18} = 0,2928933$ | $x_{18} = 0,2928933$ | $x_{18} = 0,2928933$ |
| $x_{19} = 0,2928932$ | $x_{19} = 0,2928932$ | $x_{19} = 0,2928932$ |

**Çizelge 4.3.**  $x_1 = 0$  ve  $m = 1,2,3$  için yakınsama değerleri

| $m = 1$ için         | $m = 2$ için         | $m = 3$ için         |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| $x_1 = 0$            | $x_1 = 0$            | $x_1 = 0$            |
| $x_2 = 0,1250000$    | $x_2 = 0,1406250$    | $x_2 = 0,1447754$    |
| $x_3 = 0,2008929$    | $x_3 = 0,2224226$    | $x_3 = 0,2279361$    |
| $x_4 = 0,2424645$    | $x_4 = 0,2616130$    | $x_4 = 0,2660718$    |
| $x_5 = 0,265190$     | $x_5 = 0,2793223$    | $x_5 = 0,2821881$    |
| $x_6 = 0,277673$     | $x_6 = 0,2870981$    | $x_6 = 0,2887149$    |
| $x_7 = 0,2845436$    | $x_7 = 0,2904482$    | $x_7 = 0,2912882$    |
| $x_8 = 0,2883229$    | $x_8 = 0,2918714$    | $x_8 = 0,2922840$    |
| $x_9 = 0,2903979$    | $x_9 = 0,2924694$    | $x_9 = 0,2926641$    |
| $x_{10} = 0,2915342$ | $x_{10} = 0,2927185$ | $x_{10} = 0,2928077$ |
| $x_{11} = 0,2921548$ | $x_{11} = 0,2928216$ | $x_{11} = 0,2928615$ |
| $x_{12} = 0,2924928$ | $x_{12} = 0,2928639$ | $x_{12} = 0,2928815$ |
| $x_{13} = 0,2926765$ | $x_{13} = 0,2928813$ | $x_{13} = 0,2928889$ |
| $x_{14} = 0,2927761$ | $x_{14} = 0,2928884$ | $x_{14} = 0,2928916$ |
| $x_{15} = 0,2928300$ | $x_{15} = 0,2928913$ | $x_{15} = 0,2928926$ |
| $x_{16} = 0,2928592$ | $x_{16} = 0,2928924$ | $x_{16} = 0,2928930$ |
| $x_{17} = 0,2928749$ | $x_{17} = 0,2928929$ | $x_{17} = 0,2928931$ |
| $x_{18} = 0,2928834$ | $x_{18} = 0,2928931$ | $x_{18} = 0,2928932$ |
| $x_{19} = 0,2928879$ | $x_{19} = 0,2928932$ |                      |
| $x_{20} = 0,2928904$ |                      |                      |
| $x_{21} = 0,2928917$ |                      |                      |
| $x_{22} = 0,2928924$ |                      |                      |
| $x_{23} = 0,2928928$ |                      |                      |
| $x_{24} = 0,2928930$ |                      |                      |
| $x_{25} = 0,2928931$ |                      |                      |
| $x_{26} = 0,2928932$ |                      |                      |

**Çizelge 4.4.**  $x_1 = 0$  ve  $m = 10, 50, 100$  için yakınsama değerleri

| $m = 10$ için        | $m = 50$ için        | $m = 100$ için       |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| $x_1 = 0$            | $x_1 = 0$            | $x_1 = 0$            |
| $x_2 = 0,1464463$    | $x_2 = 0,1464466$    | $x_2 = 0,1464466$    |
| $x_3 = 0,2301300$    | $x_3 = 0,2301304$    | $x_3 = 0,2301304$    |
| $x_4 = 0,2677878$    | $x_4 = 0,2677881$    | $x_4 = 0,2677881$    |
| $x_5 = 0,2832372$    | $x_5 = 0,2832374$    | $x_5 = 0,2832374$    |
| $x_6 = 0,2892722$    | $x_6 = 0,2892723$    | $x_6 = 0,2892723$    |
| $x_7 = 0,2915591$    | $x_7 = 0,2915592$    | $x_7 = 0,2915592$    |
| $x_8 = 0,2924081$    | $x_8 = 0,2924081$    | $x_8 = 0,2924081$    |
| $x_9 = 0,2927186$    | $x_9 = 0,2927186$    | $x_9 = 0,2927186$    |
| $x_{10} = 0,2928308$ | $x_{10} = 0,2928308$ | $x_{10} = 0,2928308$ |
| $x_{11} = 0,2928711$ | $x_{11} = 0,2928711$ | $x_{11} = 0,2928711$ |
| $x_{12} = 0,2928854$ | $x_{12} = 0,2928854$ | $x_{12} = 0,2928854$ |
| $x_{13} = 0,2928905$ | $x_{13} = 0,2928905$ | $x_{13} = 0,2928905$ |
| $x_{14} = 0,2928923$ | $x_{14} = 0,2928923$ | $x_{14} = 0,2928923$ |
| $x_{15} = 0,2928929$ | $x_{15} = 0,2928929$ | $x_{15} = 0,2928929$ |
| $x_{16} = 0,2928931$ | $x_{16} = 0,2928931$ | $x_{16} = 0,2928931$ |
| $x_{17} = 0,2928932$ | $x_{17} = 0,2928932$ | $x_{17} = 0,2928932$ |

Çizelge 4.5.  $x_1 = 0,5$  ve  $m = 1,2,3$  için yakınsama değerleri

| $m = 1$ için         | $m = 2$ için         | $m = 3$ için         |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| $x_1 = 0,5000000$    | $x_1 = 0,5000000$    | $x_1 = 0,5000000$    |
| $x_2 = 0,4375000$    | $x_2 = 0,4101563$    | $x_2 = 0,4006500$    |
| $x_3 = 0,3850446$    | $x_3 = 0,3505333$    | $x_3 = 0,3410620$    |
| $x_4 = 0,3484957$    | $x_4 = 0,3193112$    | $x_4 = 0,3129734$    |
| $x_5 = 0,3252519$    | $x_5 = 0,3045316$    | $x_5 = 0,3009418$    |
| $x_6 = 0,3112785$    | $x_6 = 0,2978978$    | $x_6 = 0,2960403$    |
| $x_7 = 0,3031745$    | $x_7 = 0,2950112$    | $x_7 = 0,2941030$    |
| $x_8 = 0,2985818$    | $x_8 = 0,2937795$    | $x_8 = 0,2933525$    |
| $x_9 = 0,2960178$    | $x_9 = 0,2932611$    | $x_9 = 0,2930660$    |
| $x_{10} = 0,2946006$ | $x_{10} = 0,2930449$ | $x_{10} = 0,2929577$ |
| $x_{11} = 0,2938226$ | $x_{11} = 0,2929554$ | $x_{11} = 0,2929171$ |
| $x_{12} = 0,2933977$ | $x_{12} = 0,2929186$ | $x_{12} = 0,2929021$ |
| $x_{13} = 0,2931664$ | $x_{13} = 0,2929036$ | $x_{13} = 0,2928965$ |
| $x_{14} = 0,2930409$ | $x_{14} = 0,2928974$ | $x_{14} = 0,2928944$ |
| $x_{15} = 0,2929729$ | $x_{15} = 0,2928949$ | $x_{15} = 0,2928937$ |
| $x_{16} = 0,2929361$ | $x_{16} = 0,2928939$ | $x_{16} = 0,2928934$ |
| $x_{17} = 0,2929163$ | $x_{17} = 0,2928935$ | $x_{17} = 0,2928933$ |
| $x_{18} = 0,2929056$ | $x_{18} = 0,2928933$ | $x_{18} = 0,2928932$ |
| $x_{19} = 0,2928999$ | $x_{19} = 0,2928933$ |                      |
| $x_{20} = 0,2928968$ | $x_{20} = 0,2928932$ |                      |
| $x_{21} = 0,2928951$ |                      |                      |
| $x_{22} = 0,2928942$ |                      |                      |
| $x_{23} = 0,2928938$ |                      |                      |
| $x_{24} = 0,2928935$ |                      |                      |
| $x_{25} = 0,2928934$ |                      |                      |
| $x_{26} = 0,2928933$ |                      |                      |
| $x_{27} = 0,2928933$ |                      |                      |
| $x_{28} = 0,2928932$ |                      |                      |

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, literatürde ilk defa  $n$ . dereceden konveks daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için Picard iterasyonu dışında farklı bir iterasyon metodunun da kullanılabileceği ispatlanmış ve  $CAT(0)$  uzaylarında genelleştirilmiş Mann iterasyonunun bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarına  $\Delta$ -yakınsaması ve kuvvetli yakınsaması gösterilmiştir.

Genelleştirilmiş Mann iterasyonu yerine;

$X$  bir  $CAT(0)$  uzayı  $K \subseteq X$  boş olmayan konveks bir alt küme  $f: K \rightarrow K$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in X$  keyfi bir nokta ve  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$   $(0,1)$  aralığında bir dizi olmak üzere;

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n \oplus \alpha_n f^n(y_n) \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n \oplus \beta_n f^n(x_n), n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş Ishikawa iterasyonu veya

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)f^n(x_n) \oplus \alpha_n f^n(y_n) \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n \oplus \beta_n f^n(x_n), n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan modifiye edilmiş S-iterasyonu kullanılarak  $n$ . dereceden konveks daraltan fonksiyonları için benzer sonuçların sağlanıp sağlanmadığı araştırılabilir. Ayrıca kullanılacak farklı iterasyon metotlarının hangisinin daha kullanışlı veya etkili olduğu araştırılıp, nümerik örneklerle desteklenebilir.

$n$ . dereceden konveks daraltan dönüşüm yerine Istratescu'nun 1981 yılında tanımladığı lokal konveks daraltan dönüşüm de kullanılarak aynı sonuçlar yeniden araştırılabilir. Benzer şekilde  $n$ . dereceden iki yönlü konveks daraltan dönüşüm tanımı yapıлып bu sınıf

için de sabit noktanın varlığı, tekliği ve farklı iterasyon metotlarının yakınsaması ile ilgili gerekli araştırmalar yapılabilir.



## KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Meehan, M., O'Regan, D., 2001. Fixed Point Theory and Applications. Cambridge University Press.
- Alexandrov, A.D., 1955. Die innere Geometrie der konvexen Flächen Akademie-Verlag. Berlin, German.
- Alghamdi, M.A., Alnafe, S.H., Radenovic, S., Shahzad, N., 2011. Fixed point theorems for convex contraction mappings on cone metric spaces. Math. Comput. Model. 54, 2020-2026.
- Ariza-Ruiz, D., Li, C., Lopez-Acedo, G., 2014. The Schauder fixed point theorem in geodesic spaces. J. Math. Anal. Appl. 417(1), 345–360.
- Bridson, M., Haefliger, A., 1999. Metric Spaces of Non-positive Curvature. Springer, Berlin/Heidelberg/New York.
- Browder, F.E., 1968. Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in a Banach space. Bull. Am. Math. Soc, 74, 660–665.
- Bruhat, F., Tits, J., 1972. Groupes reductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 41, 5–251, French.
- Buyalo, S.V., 1998. Geodesics in Hadamard Spaces. Algebra I Analiz 10(2), 93–123, Russia.
- Cartan, E., 1951. Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann. 2nd edn. GauthierVillars, Paris, French.
- Crandall, M., Pazy, A., 1969. Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets. J. Funct. Anal. 3, 376–418.
- Dhompongsa, S., Kirk, W.A., Panyanak, B., 2007. Nonexpansive set-valued mappings in metric and Banach spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 8(1), 35–45.
- Dhompongsa, S., Panyanak, B., 2008. On  $\Delta$ -convergence theorems in  $CAT(0)$  spaces. Comput. Math. Appl. 56 2572–2579.
- Dhompongsa, S., Kirk W.A., Sims B., 2006. Fixed points of uniformly lipschitzian mappings. Nonlinear Anal. 65(4), 762–772.
- Dhompongsa, S., Kaewkhao, A., Panyanak, B., 2012. On Kirk's strong convergence theorem for multivalued nonexpansive mappings on  $CAT(0)$  spaces. Nonlinear Anal. 75, 459–468.
- Espinola, R., Kirk, W.A., 2006. Fixed point theorems in R-trees with applications to graph theory. Topol. Appl. 153(7), 1046–1055.
- Espinola, R., Piątek, B., 2013. The fixed point property and unbounded sets in  $CAT(0)$  spaces. J. Math. Anal. Appl. 408(2), 638–654.
- Goebel, K., Kirk, W.A., 1990 Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28 Cambridge University Press, Cambridge.
- Granas, A., 1994. Continuation methods for contractive maps. Topol. Methods Nonlinear Anal. 3(2), 375–379.
- Istrătescu, V.I., 1981. Fixed point theorems for convex contraction mappings and convex nonexpansive mappings. Libertas Mathematica, I.
- Istrătescu, V.I., 1982. Some fixed point theorems for convex contraction mappings and mappings with diameters I. Ann. Mat. Pura Appl., 130 No.4, 89-104.

- Istrătescu, V. I., 1983. Some fixed point theorems for convex contraction mappings and mappings with diameters II. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 134 No.4, 327-362.
- Kadec, M.I., 1958. On weak and norm convergence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 122, 13-16. Russian.
- Khan, S.H., Abbas, M., 2011. Strong and  $\Delta$ -convergence of some iterative schemes in  $CAT(0)$  spaces. *Comput. & Math. Appl.* 61 (1).
- Khan, M.S., Singh, Y.M., Maniu, G., Postolache, M., 2017. On generalized convex contractions of type-2 in b-metric and 2-metric spaces. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10, 2902–2913.
- Kirk, W.A., Panyanak, B., 2008. A concept of convergence in geodesic spaces. *Nonlinear Anal.* 68(12), 3689–3696.
- Kirk, W.A., Panyanak, B., 2007. Best approximation in R-trees. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 28(5–6), 681–690.
- Kirk, W.A., 2004. Fixed point theorems in  $CAT(0)$  spaces and R-trees. *Fixed Point Theory Appl.* 2004(4), 309–316.
- Kirk, W.A., 2003. Geodesic geometry and fixed point theory, in *Seminar of Mathematical Analysis*. pp. 195–225, Malaga/Seville.
- Kirk, W.A., 2004. Geodesic geometry and fixed point theory II. in *International Conference on Fixed Point Theory and Applications Publ.* , pp. 113–142. Yokohama.
- Kohlenbach, U., Leuştean, L., 2012. Addendum to ‘Effective metastability of Halpern iterates in  $CAT(0)$  spaces’. *Adv. Math.* 250, 650–651.
- Kuczumow, T., 1978. An almost convergence and its applications. *Ann. Univ. Mariae Curie Skłodowska Sect. A* 32, 79–88.
- Kumam, P., Saluja, G.S., Nashine, H.K., 2014. Convergence of modified S-iteration process for two asymptotically nonexpansive mappings in the Intermediate sense in  $CAT(0)$  spaces. *Journal of Inequalities and Applications*.
- Lang, U., Schroeder, V., 1997. Jung’s theorem for Alexandrov spaces of curvature bounded above. *Ann. Glob. Anal. Geom.* 15(3), 263–275.
- Latif, A., 2015 Sintunavarat W. and Ninsri A., Approximate fixed point theorems for partial generalized convex contraction mappings in  $\alpha$ -complete metric spaces. *Taiwanese J. Math.* 19, 315–333.
- Lim, T.C., 1976. Remarks on some fixed point theorems. *Proc. Am. Math. Soc.* 60, 179–182.
- Miandaragh, M.A., Postolache, M., Rezapour, S., 2013 Some approximate fixed point results for generalized alpha-contractive mappings. *Sci. Bull. ‘Politeh.’ Univ. Buchar., Ser. A, Appl. Math. Phys.* 75(2), 3-10.
- Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori 2. Basım. Nobel Yayın No:1389, 321,327s, Ankara.
- Nanjaras, B., Panyanak, B., Phuengrattana, W., 2010. Fixed point theorems and convergence theorems for Suzuki-generalized nonexpansive mappings in  $CAT(0)$  spaces. *Nonlinear Anal. Hybrid Systems*, 4.
- Petryshyn, W.V., Williamson, T.E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 43, 459-497.
- Ramezani, M., 2015. Orthogonal metric space and convex contractions. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 6 , 127–132.

- Ray, W.O., 1980. The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space. *Trans. Am. Math. Soc.* 258(2), 531–537.
- Reich, S., Shafrir, I., 1990. Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces. *Nonlinear Anal.* 15(6), 537–558.
- Reich, S., 1980. Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banachspaces. *J. Math. Anal. Appl.* 75(1), 287–292.
- Reich, S., 1983. The almost fixed point property for nonexpansive mappings. *Proc. Am. Math. Soc.* 88(1), 44–46.
- Schu, J., 1991. Weak and Strong Convergence to Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Vol. 43, pp. 153–159, 1991. ociety, Vol. 43, pp. 153–159, Australia.
- Shafrir, I., 1990. The approximate fixed point property in Banach and hyperbolic spaces. *IsraelJ. Math.* 71(2), 211–223.
- Xu, H.K., 1991. Existence and convergence for fixed points of asymptotically nonexpansive type. *Nonlinear Anal.* 16 (1991), 1139–1146.

## ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Erzurum’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Erzurum’da tamamladı. 2009 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. 2016 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde Yüksek lisans öğrenimine başladı. Evli ve bir çocuk babasıdır.

