



**DİFERANSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLERİN
TARIG DÖNÜŞÜMÜ İLE TAM ÇÖZÜMLERİ**

Elanur KÖSE

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mesut KARABACAK
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
2022
(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**DİFERANSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLERİN TARIG DÖNÜŞÜMÜ İLE TAM
ÇÖZÜMLERİ**

(The Exact Solutions of Differential Algebraic Equations With Tarig Transform Method)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elanur KÖSE

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mesut KARABACAK

Erzurum
Ocak 2022

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Elanur KÖSE tarafından hazırlanan “ Diferansiyel Cebirsel Denklemlerin Tarig Dönüşümü İle Tam Çözümleri ” başlıklı çalışması 25/01/2022 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Ercan ÇELİK
Atatürk Üniversitesi

Aslı Islak İmzalıdır

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi. Mesut KARABACAK
Atatürk Üniversitesi

Aslı Islak İmzalıdır

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Rıdvan ŞAHİN
Gümüşhane Üniversitesi

Aslı Islak İmzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN

Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Dr. Öğr. Üyesi Mesut KARABACAK danışmanlığında sunulan “Diferansiyel Cebirsel Denklemlerin Tarig Dönüşümü İle Tam Çözümleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	16	30
Kuramsal Temeller	22	30
Materyal ve Yöntem	20	35
Bulgular	15	20
Tartışma	0	20
Tezin Geneli	23	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Elanur KÖSE	Dr. Öğr. Üyesi. Mesut KARABACAK
31.1.2022	31.1.2022
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ' de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans sürecim boyunca tüm aşamalarda beni destekleyen, yönlendiren ve benden yardımını esirgemeyen danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mesut KARABACAK'a katkılarından dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim. Atatürk Üniversitesi'nde öğretim gördüğüm yüksek lisans sürecim boyunca bana her türlü destek olan aileme, eşime ve kızıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Elanur KÖSE



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLERİN TARIG DÖNÜŞÜMÜ İLE TAM ÇÖZÜMLERİ

Elanur KÖSE

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mesut KARABACAK

Amaç: Bu tezde, Diferansiyel Cebirsel denklemleri çözebilmek için bir yöntem sunulmuştur.

Yöntem: Tarig Dönüşümü tanıtıldı, bu dönüşümün özellikleri ve Tarig dönüşümü için konvolüsyon teoreminin ispatı verildi.

Bulgular: Üç farklı Diferansiyel Cebirsel denklem sistemi ele alınmıştır ve Tarig Dönüşümü yöntemiyle çözümler elde edilmiştir.

Sonuç: Tarig Dönüşümünün Diferansiyel Cebirsel denklemlerin çözümünde etkili bir yöntem olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Cebirsel Denklemler, Tarig Dönüşümü, Konvolüsyon Teoremi, Tam çözümler

Ocak 2022 , 44 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

THE EXACT SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL ALGEBRAIC EQUATIONS WITH TARIG TRANSFORM METHOD

Elanur KÖSE

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mesut KARABACAK

Purpose: In this thesis, a method for solving the differential algebraic equations is presented.

Method: The Tarig transform method as an integral transform is introduced, the properties of this transform and the proof of the convolution theorem for the Tarig transform are given.

Findings: Three different Differential Algebraic equations are considered and solved exactly by the Tarig transform method.

Results: Tarig transform method has been found to be an effective tool for solving the Differential Algebraic equations

Keywords: differential algebraic equations, tarig transform method, exact solutions, convolution theorem.

January 2022, 44 sayfa

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	3
Gamma Fonksiyonu	4
Beta Fonksiyonu	7
Laplace Dönüşümü.....	8
Cebirsel Denklem.....	10
MATERYAL VE YÖNTEM	15
Tarig Dönüşümü Yöntemi	15
Tarig Dönüşümünün Özellikleri	19
1. Tarig Dönüşümünün Lineerliği.....	19
2. Türevlerin Tarig Dönüşümleri	19
3. İntegrallerin Tarig Dönüşümü.....	20
Bazı Fonksiyonların Tarig Dönüşümleri.....	21
Ters Tarig Dönüşümü	22
ARAŞTIRMA BULGULARI	25
Test Problemi 1	25
Test Problemi 2	26
Test Problemi 3	27
SONUÇ VE TARTIŞMA.....	30
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	33

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Bazı Fonksiyonların Tarig Dönüşümleri	21
---	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Gamma fonksiyonunun grafiği	6
Şekil 2. Basit sarkaç	12
Şekil 3. Kuvvetlerin vektörel gösterimi	12



SİMGELER DİZİNİ

ε	Epsilon
δ	Delta
τ	To
Γ	Gamma Fonksiyonu
β	Beta Fonksiyonu
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	f fonksiyonunun Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$	f fonksiyonunun Ters Laplace Dönüşümü
$T[f(t)]$	$f(t)$ nin Tarig Dönüşümü
$T^{-1}[f(t)]$	$f(t)$ nin Ters Tarig Dönüşümü

GİRİŞ

Fen bilimleri, çeşitli mühendislik alanları ve uygulamalı matematik alanlarında sürekli karşımıza çıkan başlangıç-değer problemleri, sınır-değer problemleri, diferansiyel ve integral denklemleri çözmek için integral dönüşümleri kullanılmaktadır. Literatürde Laplace Dönüşümü, Sumudu Dönüşümü, Aboodh Dönüşümü, Elzaki Dönüşümü, Tarig Dönüşümü, Kamal dönüşümü, N-Dönüşümü, ZZ-dönüşümü ve Fourier Dönüşümü gibi birçok integral dönüşüm vardır. Bu integral dönüşümlerinden en çok kullanılanı Laplace dönüşümüdür.

Diferansiyel denklemleri kısaca bir ya da daha fazla fonksiyonun türevlerini içeren denklemler olarak tanımlayabiliriz. Diğer bir ifadeyle diferansiyel denklem bir takım fonksiyonlar ile bunların türevleri arasındaki ilişkiyi temsil etmektedir. Diferansiyel denklemlere cebirsel şartlar eklenince Diferansiyel Cebirsel Denklemler ortaya çıkmıştır. Diferansiyel cebirsel denklemler sınır değer problemleri başlangıç değer problemleri ve birçok diferansiyel denklemin çözümünde karşımıza çıkmaktadır.

Diferansiyel-cebirsel denklemlere ait ilk çalışmaları Gear (1971) yapmıştır. Gear, sürekli sistemlerin simülasyonlarında ve süresiz network analizleri sonucunda bulunan diferansiyel-cebirsel denklemleri inceleyerek sınıflandırmış ve çözümlerini incelemiştir.

Petzold (1982), adi diferansiyel denklemlerin diferansiyel-cebirsel denklemlerden farklı olduğunu ortaya koymuştur.

Gear ve Petzold (1984), diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözülebilirliklerini adi diferansiyel denklemler için geliştirilen nümerik metotlara göre inceleyerek sınıflandırmasını yapmış ve bu denklemlerin çözülemedikleri durumları ortaya çıkarmışlardır.

Brenan, Campbell ve Petzold, kimyasal reaksiyonlar, elektrik akımı simülasyonu gibi durumların matematiksel modellemeleri sonucu oluşan

$$M(t)y' = f(t, y), \quad t \in [a, b]$$

şeklindeki diferansiyel-cebirsel denklemlerin çözümlerini içeren çalışma yapmışlardır. (Brenan, *et al.* 1989).

Hairer, Lubich ve Roche, Runge-Kutta yönteminden yararlanarak diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine çalışmış ve bu denklemlerin çözümünde başlangıç değeri ve sınır değeri olan problemlerde kullanmışlardır (Hairer *et al.* 1989).

Ascher ve Spiter (1994), sıralama (collocation) yöntemiyle sınır değerlerini içeren diferansiyel-cebirselle denklemlerin çözümlerini yapmışlardır.

Müller (2000), diferansiyel-cebirselle denklemler ile modellenen dinamik bir sistemin avantajlarını (pros) ve dezavantajlarını (cons) belirtmiştir.

Ayaz (2004), diferansiyel-cebirselle denklemlerin çözümünde farklı bir nümerik yaklaşımı diferansiyel dönüşüm yöntemiyle belirtmiştir.

Bayram, Çelik ve Yeloğlu Páde serisi ve Chebyshev serileri yaklaşımlarıyla diferansiyel-cebirselle denklemlerin nümerik çözümleri üzerine çalışmalar da bulunmuşlardır. (Çelik and Bayram 2003a, 2003b, 2004; Çelik and Yeloğlu 2006).

Güzel ve Bayram (2006), yüksek indeksli diferansiyel-cebirselle denklemlerinin çözümlerinde Páde serileri yaklaşımını kullanmışlardır.

İbiş (2011), kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirselle denklemler için, Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) Adomian Ayrışım Metodu (ADM), Homotopi Analiz Metodu (HAM), Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) ve Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) gibi yaklaşık çözümleri veren metotların etkinliğini incelemişlerdir.

Bu tezde Tarig dönüşümü yöntemi diferansiyel cebirselle denklemlere uygulanmıştır. Fourier dönüşümüne dayanan Tarig dönüşümünün diferansiyel cebirselle denklemlerin çözümü için etkili bir yöntem olduğu görülmüştür.

Tez beş bölümden oluşmaktadır.

- Birinci bölümde yani giriş bölümünde, Tarig dönüşümü ve diferansiyel cebirselle denklemlerin tarihçesinden bahsedildi.
- İkinci bölümde yani kuramsal temellerde, tezimizde kullandığımız bazı temel kavramların tanımları ve ilgili teoremler verildi.
- Üçüncü bölümde yani Materyal ve yöntem kısmında, Tarig dönüşümü, Tarig dönüşümünün özellikleri verildi.
- Dördüncü bölümde yani Araştırma Bulguları kısmında, üç tane diferansiyel cebirselle denkleme Tarig dönüşümü uygulanarak çözüldü.
- Beşinci bölümde yani Sonuç ve Tartışma kısmında, diferansiyel cebirselle denklemlerinin çözümünde uygulanan Tarig dönüşümünün etkinliği tartışıldı.

KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde Tezde kullanılan temel kavramların tanımları ve ilgili teoremler verilmiştir.

Tanım 1 (Diferansiyel Denklem): Bir ya da birden fazla fonksiyonu ve bunların türevlerini ilişkilendiren denklemlere diferansiyel denklemler denir.

Genel olarak y bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere, diferansiyel denklem

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $y^{(n)}$, y fonksiyonunun x değişkenine göre n ' inci türevidir. (1) denklemi $y^{(n)}$ ye göre çözülebilirse;

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

formu elde edilir. Bu ise (1) ifadesinin açık formda yazılmış şeklidir.

Tanım 2 (Sabit ve Değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem): x bir reel değişken olmak üzere;

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

Şeklinde ifade edilen denklemlere lineer diferansiyel denklem denir.

$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{(n-1)}(x), p_n(x)$ katsayılarının tümü sabit ise denkleme sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem denir.

$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{(n-1)}(x), p_n(x)$ katsayılarından en az biri değişken ise denkleme değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem denir.

Tanım 3 (Limit): $D \subset R$, $f: D \rightarrow R$ bir fonksiyon ve c , D nin yığılma noktası olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x - c| < \delta$ olduğunda $|f(x) - K| < \varepsilon$ olacak şekilde

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa x, c ye yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti K dır denir

ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$$

olarak yazılır.

Bu tanımda

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = K$$

olması $0 < |x - c| < \delta$ eşitliğini sağlayan $\forall x$ için $|f(x) - K| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlaması gerektiği vurgulanmaktadır. Ayrıca $\varepsilon > 0$ ne kadar küçük olursa, ona bağlı olan, δ da o kadar küçük olacaktır (Kadıoğlu, 2005).

Tanım 4 (Süreklilik): $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in D$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $|x - c| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir. Burada $\delta = \delta(\varepsilon, c)$, δ nın hem ε hem de c ye bağlı olarak değişeceğini gösterir. Sürekliliğin bu şekildeki tanımı ε, δ tekniği ile süreklilik tanımı olarak adlandırılır. $c \in D$, D nin yığılma noktası olması durumunda limitin tanımlanacağı bilinmektedir. O halde, $c \in D$, D nin yığılma noktası olması durumunda sürekliliğin tanımını şu şekilde verebiliriz. $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in D$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

oluyorsa f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir. Buna göre: $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun verilen bir $c \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olması için

1. f fonksiyonunun c noktasında tanımlıdır.

2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ mevcuttur.

3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

şartlarını sağlaması gerekir.

Tanım 5 (Gamma Fonksiyonu)

Diferansiyel hesaplarda kullandığımız en temel fonksiyon, Gamma fonksiyonudur. Bu fonksiyon $n!$ hesabındaki n sayısını, tamsayı olmayan sayıları ve karmaşık sayıları da içerecek şekilde genelleştirir. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad z \in \mathbb{R} \quad (3)$$

integral yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonunun en önemli özelliklerinden biri,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (4)$$

eşitliğidir. Bu eşitlik yardımıyla

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z) \quad (5)$$

eşitliğiyle gösterilir. (4) eşitliğinden görüleceği gibi $\Gamma(1) = 1$ olup $z = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(z+1) = z. \Gamma(z) = z. (z-1)! = z!$$

şeklinde genelleştirilebilir (Podlubny 1999).

$z > 0$ için (3) denklemi ile verilen gamma fonksiyonu yakınsaktır. Böylece $a > 0$ ve $\forall [a, b]$ sonlu aralığında $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ integrali düzgün yakınsaktır. O halde gamma fonksiyonunun diğer özellikleri aşağıdaki gibidir:

$\Gamma[z]$ fonksiyonunun tanımlandığı bölge $\{z: z > 0\}$ dır.

$\Gamma[z]$ fonksiyonu $z > 0$ olduğu durumlarda süreklidir.

$\Gamma[z]$ için verilen integral, her sonlu $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan $\Gamma[z]$ nin türevide elde edilebilir.

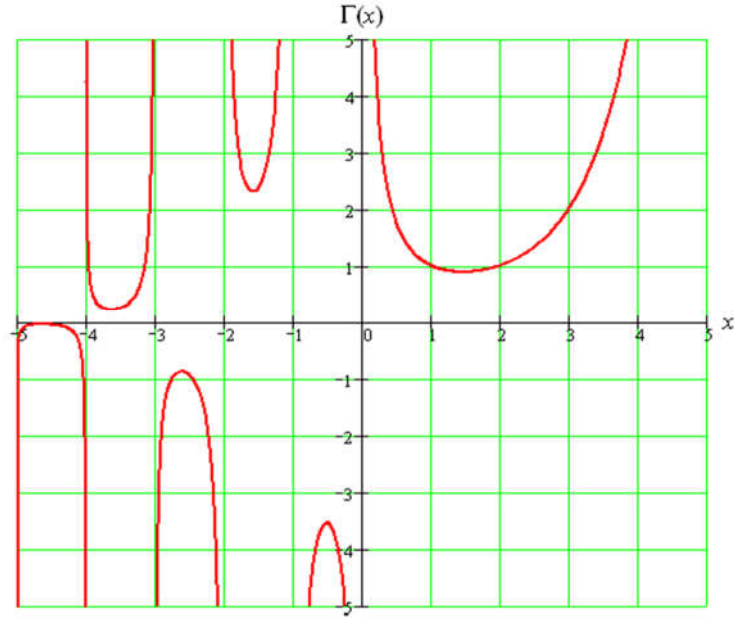
Ayrıca $\Gamma[z]$ nin diğer tamsayıli mertebeden türevleri de benzer şekillerde hesaplanabilir.

Örneğin,

$$\Gamma'[z] = \int_0^{\infty} t^{z-1} \ln(t) e^{-t} dt, \Gamma''[z] = \int_0^{\infty} t^{z-1} [\ln(t)]^2 e^{-t} dt, \dots$$

şeklinde yazılır (Podlubny 1999).

Tanım 6 (Genelleştirilmiş Gamma Fonksiyonu): Gamma fonksiyonunun tanım kümesi tüm reel eksendir.



Şekil 1. Gamma fonksiyonunun grafiği

(4) eşitliğinden faydalanılarak $1 \leq z \leq 2$ ve $\forall z \in R$ için $\Gamma(z)$ elde edilebilir. Negatif z değerleri için düşünüldüğünde, $-1 < z < 0$ için $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ de $0 < z + 1 < 1$ olacağından $\Gamma(z + 1)$ değeri bilindiğinden $z \in (-1, 0)$ için $\Gamma(z)$ ler bulunabilir. Genel olarak $-n < z < -n + 1$ ise $0 < z + n < 1$ olup,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z(z + 1)(z + 2) \dots (z + n - 1)} \quad (6)$$

eşitliğinden gamma fonksiyonunun değerleri hesaplanabilir. Gamma fonksiyonun tanım kümesi tüm Reel eksen olduğundan, gamma fonksiyonunun sıfır ve negatif tamsayı değerleri sonsuzdur. Böylece,

$$\Gamma(z) > \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt > \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{e^z}$$

olup,

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) > \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^z} \rightarrow \infty$$

olur. Faktöriyel özelliğinden,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z - 1)\Gamma(z - 1) \rightarrow \infty$$

olur.

Gamma fonksiyonunun limit gösterimi $Re(z) > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)} \quad (7)$$

şeklindedir.

Tanım 7 (Beta Fonksiyonu)

$Re(z) > 0$ ve $Re(w) > 0$ olmak üzere $\tau = \frac{t}{n}$ olmak üzere

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{w-1} d\tau \quad (8)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir.

Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1 - \tau)^{w-1} d\tau$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada $h_{z,w}(t)$ fonksiyonunun t^{z-1} ile t^{w-1} in konvülasyonu olduğu ve $h_{z,w}(1) = \beta(z, w)$ eşitliğinin olduğu görülmektedir.

$H_{z,w}(s)$, $h_{z,w}(t)$ fonksiyonunun Laplace fonksiyonu olmak üzere,

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} t^{z+w-1}$$

eşitliği ters laplace dönüşümüyle de elde edilir. Bu durumda $t = 1$ için,

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

olur. Buradan da $\beta(z, w) = \beta(w, z)$ olduğu görülür (Podlubny, 1999).

Tanım 8: f , $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer tüm $x > x_0$ ler için

$$|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$$

olacak şekilde, x_0, M ve α pozitif sabitleri mevcut ise, f fonksiyonuna α üstel mertebededir denir.

Eğer f fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyon ise $|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$ şartı geometrik olarak f fonksiyonunun $[x_0, \infty)$ aralığında $y = M e^{\alpha x}$ üstel fonksiyonuna göre daha yavaş artışın olduğunu belirtir.

Örneğin $f(x) = x$, $g(x) = e^{-x}$ ve $h(x) = 2\cos x$ fonksiyonları $x > 0$ için $a = 1$ üstel mertebededir. Çünkü bu fonksiyonlar için sırasıyla $|x| \leq e^x$, $|e^{-x}| \leq e^x$ ve $|2\cos x| \leq 2e^x$ dir.

Örneğin $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu ise $[0, \infty)$ – aralığında üstel mertebeden değildir. Çünkü bu fonksiyon $x > x_0 > 0$ için e^x den daha hızlı artar.

Tanım 9 (Laplace Dönüşümü)

f , $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ integrali mevcut (veya yakınsak) ise, s nin bir fonksiyon olan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (9)$$

ifadesine f fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) \text{ veya } \mathcal{L}\{f\} = F$$

şeklinde gösterilir . (9) da s reel veya kompleks bir değişkendir. Burada s nin reel olduğunu varsayarsak (9) daki integral has olmayan integraldir. Bilindiği gibi, eğer

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-sx} f(x) dx$$

limiti mevcut ise (9) daki has olmayan integral mevcuttur (veya yakınsaktır) denir. $F(s)$ nin tanım cümlesi şüphesiz (9) daki integralin mevcut olduğu s değerlerinden ibarettir.

Örneğin $f(x) = 2$ ve $(x \geq 0)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

Tanımdan;

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-sx} 2 dx = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-sx} dx = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{e^{-sx}}{s} \Big|_0^A = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right]$$

yazılabilir. Dikkat edelim ki $s > 0$ için $-sA < 0$ olup $A \rightarrow \infty$ iken $e^{-sA} \rightarrow 0$ dır.

$s \leq 0$ için $-sA \geq 0$ olup $A \rightarrow \infty$ iken $e^{-sA} \rightarrow \infty$ dır. Buradan $2 \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right]$ $s > 0$ için mevcuttur. Ve $\frac{2}{s}$ ye eşittir. Yani $\mathcal{L}\{1\} = \frac{2}{s}$ ($s > 0$) dır.

Örnek olarak $f(x) = e^{3x}$, $(x \geq 0)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{L}\{e^{3x}\} = \int_0^\infty e^{-sx} e^{3x} dx = \int_0^\infty e^{-(s-3)x} dx = \frac{1}{s-3}, \quad s > 3$$

Teorem 1 (Laplace dönüşümünün varlığı): $f(x)$ fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $x > x_0$ için α – üstel mertebeden bir fonksiyon olmak üzere $s > \alpha$ değeri için $\mathcal{L}\{f(x)\}$ mevcuttur.

İspat: $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ integralinin $s > \alpha$ değeri için yakınsak olduğu gösterilecektir. Bu yüzden verilen integrali

$$\int_0^{x_0} e^{-sx} f(x) dx + \int_{x_0}^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (2)$$

şekilde iki ayrı integral toplamı halinde yazalım. $f(x)$ ve $e^{-sx} f(x)$ fonksiyonları tespit edilmiş herhangi bir s değeri için $[0, x_0]$ aralığında parçalı sürekli olduğundan dolayı, (10) daki birinci integral mevcuttur yani yakınsaktır. (10) daki ikinci integralin yakınsak olduğunu belirtmek için, has olmayan integraller için karşılaştırma kuralını kullanacağız.

f , α - üstel mertebeden olduğundan $x > x_0$ için

$$|f(x)| \leq M e^{ax}$$

Ve dolayısıyla tüm $x > x_0$ lar için

$$|e^{-sx} f(x)| = e^{-sx} |f(x)| \leq M e^{-(s-a)x}$$

Yazılabilir. Öte yandan $s > \alpha$ için

$$\int_0^\infty M e^{-(s-a)x} dx = M \int_0^\infty e^{-(s-a)x} dx = \frac{M e^{-(s-a)x_0}}{s - \alpha} < \infty$$

Dır. $x \geq x_0$ için $|e^{-sx} f(x)| \leq M e^{-(s-a)x}$ olduğundan ve daha büyük bir fonksiyonun has olmayan integrali $s > \alpha$ için yakınsaktır. Böylece (10) daki her iki integral mevcut olduğundan, $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{f(x)\}$ mevcuttur. (Adi Diferensiyel Denklemler, Prof. Dr. Mehmet Çağlıyan ve d. 2016)

Tanım 10 (Ters Laplace Dönüşümü): Bir $F(s)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$$

olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu mevcut ise, f' ye F 'nin Ters Laplace Dönüşümü denir. F nin Ters Laplace Dönüşümü

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \text{ veya } f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

biçiminde gösterilir.

Bir F fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü tek olmayabilir. Yani $\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\}$ iken $f(x) \neq g(x)$ olabilir. Örneğin

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \quad (s > -3)$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü

$$f(x) = e^{-3x} \text{ ve } g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 1 \\ e^{-3x} & , \quad x \neq 1 \end{cases}$$

fonksiyonlarıdır. Ters Laplace dönüşümünün tek olması için hangi koşulların sağlanması aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 2 (Ters Laplace dönüşümünün tekliği): f ve g , $[0, \infty)$ – aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden iki fonksiyon olsun. Eğer tüm $s > s_0$ lar için $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$ olacak şekilde bir s_0 sabiti mevcutsa, bu takdirde sonlu sayıda süreksizlik noktaları hariç tüm $x > 0$ lar için $f(x) = g(x)$ dir (Çağlıyan 2008).

Tanım 11 (Cebirsel Denklem)

m . dereceden bir

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m \quad (11)$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0 \quad (12)$$

şeklindeki denklemlere cebirsel denklem denir. Pozitif m tam sayısına $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i ye denklemin kökü denir.

Tanım 12 (Lineer Cebirsel Denklem): $c_i, b \in \mathbb{R}$ ve x_i ler de değişkenler olmak üzere

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = b \quad (13)$$

şeklindeki denklemlere lineer cebirsel denklem adı verilir.

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (14)$$

Denklem sistemine lineer cebirsel denklem sistemi adı verilir. Burada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine sistemin katsayılar matrisi ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ ile } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

matrislerine sırası ile sistemin ikinci yanı ve bilinmeyenler matrisi denir.

$$[A:B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} \quad (16)$$

matrisine sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Yukarıdaki lineer denklem sisteminin matris gösterimi $Ax = B$ şeklindedir. Bir lineer denklem sisteminde sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır ve sütun işlemleri sistemin çözümünü değiştirmez. Yani

- Keyfi seçilen iki denklemin yeri değiştirilirse,
- Keyfi seçilen iki denklemin iki tarafı da sıfırdan farklı bir skalerle çarpılırsa,
- Keyfi seçilen iki denklemin iki tarafı da herhangi bir skalerle çarpılıp başka bir denklemle taraf tarafa toplanırsa sistemin çözümleri aynı kalır.

Bir lineer denklem sisteminde $[A:B]$ genişletilmiş katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözümler bulunabilir. Bu metotla sistemi çözmeye Gauss-Jordan yok etme metodu ve katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözmeye de Gauss-Jordan indirgeme metodu adı verilir. (Karabacak, 2015)

Tanım 13 : A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler (regüler) matris, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler (regüler olmayan) matris denir.

Tanım 14 : A , $n \times n$ tipinde bir regüler matris ($|A| \neq 0$) ise $Ax = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B$$

eşitliğinden elde edilir.

Tanım 15: Diferansiyel-cebirselsel denklem sistemi başlangıç değeri ile birlikte

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (17)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

formundadır. Burada $F \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ dir. Diferansiyel-cebirsal denklem açık olarak

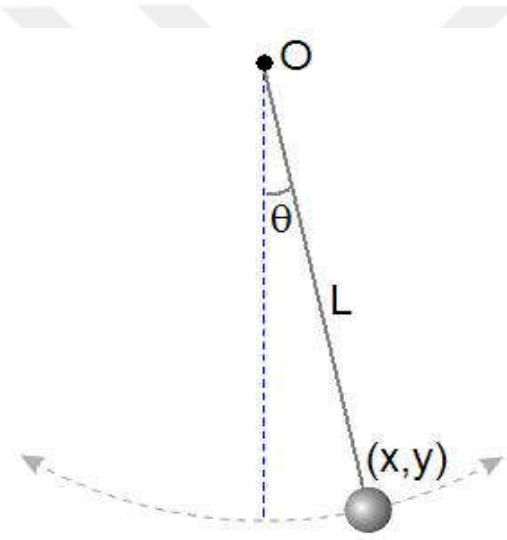
$$F(y', y, x, t) = 0$$

$$G(x, y, t) = 0$$

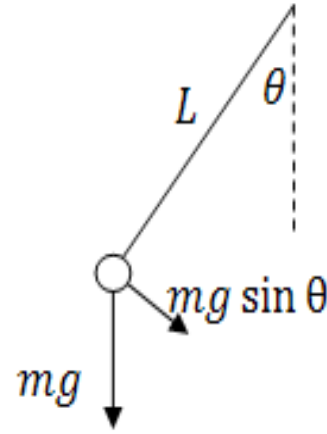
şeklinde yazılabilir. Burada y diferansiyel değişkenin ve x de cebirsel değişkenin vektörleridir. Eğer (17) sistemi n tane denkleme sahipse p tanesi diferansiyel değişken ise $(n - p)$ tanesi cebirsel değişkendir.

Klasik olarak bir Diferansiyel Cebirsel denklem modeline örnek olarak basit sarkacın hareketi gösterilebilir.

Örneğin,



Şekil 2. Basit sarkaç



Şekil 3. Kuvvetlerin vektörel gösterimi

Sarkacın boyu L , Yerçekimi ivmesi g , çubuğun kuvveti λ ve (x, y) sarkacın topunun koordinatları olmak üzere aşağıdaki Diferansiyel-Cebirsel denklem modeli elde edilir.

$$x'' = \lambda x$$

$$y'' = \lambda y - g$$

$$x^2 + y^2 - L^2 = 0$$

Burada son denklem cebirsel denklemdir.

Tanım 16 (Kapalı Diferansiyel-Cebirsel Denklem):

$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$ ve $\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}$ Jakobiyeen matrisi singüler matris olmak üzere, bir diferansiyel-cebirsal denklem

$$F(x, u(x), \dot{u}(x)) = 0 \quad (18)$$

ve

$$F(x, u(x), \dot{u}(x)) = \begin{pmatrix} F_1(x, u(x), \dot{u}(x)) \\ F_2(x, u(x), \dot{u}(x)) \\ \vdots \\ F_n(x, u(x), \dot{u}(x)) \end{pmatrix} \quad (19)$$

şeklinde de tanımlanabilir.

(18) denkleminde genel non-lineer kapalı diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklem denir. Diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklem yarı açık formda

$$\dot{u} = F(x, u, y) \quad (20)$$

$$0 = G(x, u, y) \quad (21)$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse y değişkeninin türevi yukarıda bulunmamaktadır. Böyle bir y değişkeni cebirselleştirilmiş değişken, u değişkeni ise diferansiyel değişken olarak adlandırılır. (21) denkleminde ise cebirselleştirilmiş denklem denir.

Teorem 3 (Diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemlerin çözülebilirliği): $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ de bir açık alt aralık $\Omega, \mathbb{R}^{2m+1}$ de bağlantılı bir alt küme ve $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\phi(t, c): \mathbb{I} \rightarrow \tilde{\Omega}$ ($\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^r$) fonksiyonu için

- i. Her $c \in \tilde{\Omega}$ için $\phi(t, c), \mathbb{I}$ aralıklarında tanımlıdır.
- ii. $(t, c) \in \mathbb{I} \times \tilde{\Omega}$ $(t, \phi(t, c), \phi'(t, c)) \in \Omega$ dir.
- iii. Eğer $\psi(t), (t, \psi(t), \psi'(t)) \in \Omega$ olacak şekilde herhangi bir çözüm ise bazı $c \in \tilde{\Omega}$ için $\psi(t) = \phi(t, c)$ dir.

Şartlarını sağlayan $r -$ boyutlu bir $\phi(t, c)$ çözüm ailesi varsa $F(t, y, y') = 0$ diferansiyel-cebirselleştirilmiş denkleminin $\mathbb{I}$ ($\mathbb{I} \subset \Omega$) alt aralıklarında çözülebilir (Brenan *et.al.* 1989).

Bu teoremden (t, c) nin bir fonksiyonu olan ϕ nin grafiği $(r + 1)$ boyutlu bir manifolddur. Teoremden de anlaşıldığı üzere bir diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklem için lokal olarak $r -$ boyutlu bir çözüm ailesi söz konusudur. Herhangi bir $t_0 \in \mathbb{I}$ başlangıç değeri formu $\phi(t_0, c)$ şeklinde $r -$ boyutlu bir manifolddur ve r, t_0 dan bağımsızdır. Çözümler bu manifoldda başlangıç değerinin sürekli bir fonksiyonudur veya bir sabite eşdeğerdir.

Örnek 1:

$$\begin{aligned}u'(x) + u(x) - v(x) &= -\cos x \\u(x) + v(x) &= e^{-x} + \sin x\end{aligned}$$

şeklindeki denklem sistemi bir diferansiyel-cebirsal denklemdir.



MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Tarig Dönüşümünü, bu dönüşümün özelliklerini ve Tarig dönüşümü için konvolüsyon teoreminin ispatı verildi.

Tarig Dönüşümü Yöntemi

$f(t)$, her $t \geq 0$ için tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonunun Tarig dönüşümü $T[f(t), u]$ fonksiyonudur. A kümesi aşağıdaki gibi tanımlanmak üzere

$$A = \{ f(t): \exists M, k_1, k_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{k_j}}, t \in (-1)^j X[0, \infty) \}$$

her $f(t) \in A$ için Tarig dönüşümü

$$T[f(t), u] = F(u) = \frac{1}{u} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{t}{u^2}} dt \quad (u \neq 0) \quad (22)$$

şeklinde tanımlanır. Denklemden verilen integralin tanımlı olması şartıyla, (22)'deki $f(t)$ fonksiyonu, $T[f(t)]$ dönüşümü ile gösterilir

(22) 'deki uygun bir dönüşüm sonucunda

$$T[f(t)] = \int_0^\infty f(ut) e^{-\frac{t}{u}} dt \quad (u \neq 0) \quad (23)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Örneğin $f(t) = e^{at}$ olsun, burada $t \geq 0$, ve a bir sabittir, bu durumda bu fonksiyonun Tarig dönüşümü

$$\begin{aligned} T[e^{at}] &= \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{at} e^{-\frac{t}{u^2}} dt = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{u^2}-a)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^b e^{-(\frac{1}{u^2}-a)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \left(\frac{1}{-(\frac{1}{u^2}-a)} e^{-(\frac{1}{u^2}-a)t} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{u}{-1 + au^2} e^{-(\frac{1}{u^2}-a)t} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{u}{-1 + au^2} e^{-(\frac{1}{u^2}-a)b} + \frac{u}{1 - au^2} \right) \\ &= \frac{u}{1 - au^2} \end{aligned}$$

$$T[e^{at}] = \frac{u}{1 - au^2}$$

şeklindedir.

1. $f(t) = 1$ için Tarig dönüşümü:

$$\begin{aligned} T[f(t)] &= T[1] = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u^2}} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^b e^{-\left(\frac{t}{u^2}\right)} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-ue^{-\frac{t}{u^2}} \right) \Big|_0^b \\ &= -u(0 - 1) \\ &= u \end{aligned}$$

2. $f(t) = t^n$ için Tarig dönüşümü:

Bu bölümde $f(t) = t, f(t) = t^2$ değerlerini bulup sonrasında ise tümevarım ile $f(t) = t^n$ için genelleme yapacağız.

$f(t) = t$ olmak üzere

$$T[t] = \frac{1}{u} \int_0^\infty te^{-\frac{t}{u^2}} dt$$

integralini kısmi integral yardımıyla bulalım.

$$t = u \quad e^{-\frac{t}{u^2}} dt = dv$$

ve

$$dt = du \quad -u^2 e^{-\frac{t}{u^2}} = v$$

olur.

$$\begin{aligned} T[f(t)] &= T[t] = \frac{1}{u} \int_0^\infty te^{-\frac{t}{u^2}} dt = \frac{1}{u} \left(-u^2 e^{-\frac{t}{u^2}} t \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-u^2 e^{-\frac{t}{u^2}}) dt \right) \\ &= \frac{1}{u} \left(0 + u^2 \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u^2}} dt \right) \\ &= u \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u^2}} dt \\ &= -u^3 e^{-\frac{t}{u^2}} \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

$$= -u^3(0 - 1)$$

$$= u^3$$

Eğer $f(t) = t^2$ alınırsa;

$$T[f(t)] = T[t^2] = \frac{1}{u} \int_0^\infty t^2 e^{-\frac{t}{u^2}} dt$$

integralini kısmi integral yardımıyla bulalım.

$$t^2 = u \quad e^{-\frac{t}{u^2}} dt = dv$$

ve

$$2t dt = du \quad -u^2 e^{-\frac{t}{u^2}} = v$$

olur.

$$\begin{aligned} T[f(t)] = T[t^2] &= \frac{1}{u} \int_0^\infty t^2 e^{-\frac{t}{u^2}} dt = \frac{1}{u} \left(-u^2 e^{-\frac{t}{u^2}} t^2 \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-u^2 e^{-\frac{t}{u^2}}) 2t dt \right) \\ &= \frac{1}{u} \left(0 + 2u^2 \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u^2}} t dt \right) \\ &= \frac{1}{u} \left(2u^2 \int_0^\infty t e^{-\frac{t}{u^2}} dt \right) \\ &= 2u \int_0^\infty t e^{-\frac{t}{u^2}} dt \end{aligned}$$

tekrar kısmi integral uygulanırsa

$$t = u_1 \quad e^{-\frac{t}{u^2}} dt = dv_1$$

ve

$$dt = du_1 \quad -u^2 e^{-\frac{t}{u^2}} = v_1$$

olur.

$$\begin{aligned} &= 2u \left(-u^2 e^{-\frac{t}{u^2}} t \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-u^2 e^{-\frac{t}{u^2}}) dt \right) \\ &= 2u \left(0 + u^2 \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u^2}} dt \right) \\ &= 2u^3 \left(-u^2 e^{-\frac{t}{u^2}} \Big|_0^\infty \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2u^5(0 - 1) \\
&= 2u^5
\end{aligned}$$

Bu sonuçları genelleyerek $f(t) = t^n$ için Tarig dönüşümü

$$T[f(t)] = T[t^n] = n! u^{2n+1} = \Gamma(n+1)u^{2n+1} \quad (2)$$

olarak bulunur.

3. $f(t) = \sin at$ ve $f(t) = \cos at$ fonksiyonları için Tarig dönüşümü:

- $f(t) = \sin(at)$ olsun, o zaman

$$T[f(t)] = T[\sin(at)] = \frac{1}{u} \int_0^\infty \sin(at) e^{-\frac{t}{u^2}} dt$$

işleminin sonucu

$$T[\sin(at)] = \frac{au^3}{1 + a^2u^4} \quad (25)$$

şeklinde bulunur.

- $f(t) = \cos(at)$ olsun, o zaman

$$T[f(t)] = T[\cos(at)] = \frac{1}{u} \int_0^\infty \cos(at) e^{-\frac{t}{u^2}} dt$$

işleminin sonucu

$$T[\cos(at)] = \frac{u}{1 + a^2u^4} \quad (26)$$

şeklinde bulunur.

4. $f(t) = te^{at}$ fonksiyonu için Tarig dönüşümü:

$$T[f(t)] = T[te^{at}] = \frac{1}{u} \int_0^\infty te^{at} e^{-\frac{t}{u^2}} dt$$

işleminin sonucu

$$T[te^{at}] = \frac{u^3}{(1 - au^2)^2} \quad (27)$$

şeklinde bulunur.

Tarig Dönüşümünün Özellikleri

1. Tarig Dönüşümünün Lineerliği

Tarig dönüşümü doğrusaldır (lineerdir), yani a ve b herhangi bir sabit ve $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyon olsun.

$$T[af(t) + bg(t)] = aT[f(t)] + bT[g(t)]$$

dir.

2. Türevlerin Tarig Dönüşümleri

$T[f(t)] = F(u)$ olsun. O zaman

$$i. T[f'(t)] = \frac{F(u)}{u^2} - \frac{1}{u}f(0) \quad (28)$$

$$ii. T[f''(t)] = \frac{F(u)}{u^4} - \frac{1}{u^3}f(0) - \frac{1}{u}f'(0) \quad (29)$$

$\vdots$

$$iii. T[f^{(n)}(t)] = \frac{F(u)}{u^{2n}} - \sum_{i=1}^n u^{2(i-n)-1} f^{(i-1)}(0) \quad (30)$$

İspat i :

$$T[f(t)] = \frac{1}{u} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{t}{u^2}} dt \quad \text{olduğundan}$$

$$T[f'(t)] = \frac{1}{u} \int_0^\infty f'(t) e^{-\frac{t}{u^2}} dt \quad \text{dir.}$$

$$T[f'(t)] = \frac{1}{u} \left\{ -f(0) + \frac{1}{u} T[f(t)] \right\}$$

$$T[f'(t)] = \frac{F(u)}{u^2} - \frac{1}{u}f(0)$$

İspat ii :

$f'(t) = G(t)$ olsun. i 'nin ispatına bakılarak

$$T[G'(t)] = \frac{T[G(t)]}{u^2} - \frac{1}{u}G(0)$$

yazılabilir. Böylece

$$T[f''(t)] = \frac{T[f'(t)]}{u^2} - \frac{1}{u}f'(0)$$

$$T[f''(t)] = \frac{1}{u^2} \left\{ \frac{F(u)}{u^2} - \frac{1}{u} f(0) \right\} - \frac{1}{u} f'(0)$$

$$T[f''(t)] = \frac{F(u)}{u^4} - \frac{1}{u^3} f(0) - \frac{1}{u} f'(0)$$

şeklinde yazılır.

1. $T[f(t)] = F(u)$ olsun. Bu durumda

$$a) T[t f(t)] = \frac{1}{2} \left[u^3 \frac{d}{du} F(u) + u^2 F(u) \right] \quad (28)$$

$$b) T[t f'(t)] = \frac{u^3}{2} \frac{d}{du} \left[\frac{F(u)}{u^2} - \frac{1}{u} f(0) \right] + \frac{u^2}{2} \left[\frac{F(u)}{u^2} - \frac{1}{u} f(0) \right] \quad (29)$$

$$c) T[t f''(t)] = \frac{u^3}{2} \frac{d}{du} \left[\frac{F(u)}{u^4} - \frac{1}{u^3} f(0) - \frac{1}{u} f'(0) \right] + \frac{u^2}{2} \left[\frac{F(u)}{u^4} - \frac{1}{u^3} f(0) - \frac{1}{u} f'(0) \right] \quad (30)$$

(Tarig M. Elzaki and Salih M. Elzaki 2011)

$$d) T[t^2 f(t)] = \frac{u^6}{4} \frac{d^2}{du^2} F(u) + \frac{5u^5}{4} \frac{d}{du} F(u) + \frac{3u^4}{4} F(u)$$

$$\text{İspat: d) } \frac{d}{du} T[t f(t)] = \frac{d}{du} \left[\frac{1}{2} \left[u^3 \frac{d}{du} F(u) + u^2 F(u) \right] \right] = \frac{d}{du} \left[\frac{1}{u} \int_0^\infty t f(t) e^{-\frac{t}{u^2}} dt \right]$$

$$= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{u^2} + \frac{2t}{u^4} \right) t f(t) e^{-\frac{t}{u^2}} dt$$

$$= \frac{2}{u^4} \int_0^\infty t^2 f(t) e^{-\frac{t}{u^2}} dt - \frac{1}{u^2} \int_0^\infty t f(t) e^{-\frac{t}{u^2}} dt$$

⋮

$$T[t^2 f(t)] = \frac{u^6}{4} \frac{d^2}{du^2} F(u) + \frac{5u^5}{4} \frac{d}{du} F(u) + \frac{3u^4}{4} F(u)$$

$t^2 f'(t)$ ve $t^2 f''(t)$ 'nin tarig dönüşümleri benzer şekilde yapılabilir.

3. İntegrallerin Tarig Dönüşümü

$T[f(t)] = F(u)$ olmak üzere

$$T \left[\int_0^t f(p) dp \right] = u^2 F(u) \quad (34)$$

şeklindedir.

Bazı Fonksiyonların Tarig Dönüşümleri

Tablo 1. Bazı Fonksiyonların Tarig Dönüşümleri

S.No.	$f(t)$	$T[f(t)]$
1	1	u
2	t	u^3
3	e^{at}	$\frac{u}{1-au^2}$
4	t^n	$n! u^{2n+1}$
5	t^a	$\Gamma(a+1) u^{2a+1}$
6	$\sin at$	$\frac{au^3}{1+a^2u^4}$
7	$\cos at$	$\frac{u}{1+a^2u^4}$
8	te^{at}	$\frac{u^3}{(1-au^2)^2}$
9	$e^{at} \sin bt$	$\frac{bu^3}{(1-au^2)^2 + b^2u^4}$
10	$e^{at} \cos bt$	$\frac{u(1-au^2)}{(1-au^2)^2 + b^2u^4}$
11	$t \sin at$	$\frac{2au^5}{(1+a^2u^4)^2}$
12	$t \cos at$	$\frac{u^3(1-a^2u^4)}{(1+a^2u^4)^2}$
13	$(f * g)(t)$	$uM(u) N(u)$
14	$\int_0^t f(p)dp$	$u^2F(u)$

Teorem 3 :

$f(t)$ her sonlu aralık $0 \leq t \leq K$ ve üstel mertebeden β için parçalı sürekli ise $t > K$ olmak üzere Tarig dönüşümü $T[f(t)] = F(u)$ her $u > \beta$ için mevcuttur.

İspat: Her pozitif K sayısı için;

$$T[f(t)] = \int_0^\infty f(ut)e^{-\frac{t}{u}}dt = \int_0^K f(ut)e^{-\frac{t}{u}}dt + \int_K^\infty f(ut)e^{-\frac{t}{u}}dt$$

integrali yazılabilir.

$f(t)$ her sonlu $0 \leq t \leq K$ aralığında parçalı sürekli olduğundan, sağ taraftaki birinci integral tanımlıdır. Ayrıca sağ taraftaki ikinci integral de vardır. $t > K$ için $f(t)$, β üstel mertebeden olup ikinci integralinde var olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \left| \int_K^\infty f(ut)e^{-\frac{t}{u}}dt \right| &\leq \int_K^\infty |f(ut)e^{-\frac{t}{u}}| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}}|f(ut)|dt \leq \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}}M e^{\beta t} dt \\ &= \frac{Mu}{1-\beta}, \beta \neq 1 \end{aligned}$$

(Tarig. M.Elzaki and Salih M.Elzaki, 2011)

Tanım 15 (Ters Tarig Dönüşümü)

Bir $F(u)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$T[f(t)] = F(u)$$

olacak biçimde bir $f(x)$ fonksiyonu var ise, f ye F nin Ters Tarig Dönüşümü denir. F nin Ters Tarig Dönüşümü

$$f = T^{-1}[F] \text{ veya } f(x) = T^{-1}[F(u)] \quad (35)$$

biçiminde gösterilir.

Örneğin, $F(u) = \frac{u}{1-3u^2}$ fonksiyonunun Ters Tarig Dönüşümü

$$T^{-1}\left[\frac{u}{1-3u^2}\right] = e^{3t}$$

şeklindedir.

Teorem 4 :

f bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Tarig dönüşümü $T[f(t)] = G(u)$ ve Laplace dönüşümü ise $L[f(t)] = F(s)$ verilsin. Bu iki dönüşüm arasındaki ilişki

$$G(u) = \frac{F\left(\frac{1}{u^2}\right)}{u} \quad (36)$$

şeklindedir.

İspat :

$$T[f(t)] = \int_0^{\infty} f(ut) e^{-\frac{t}{u}} dt = G(u)$$

$w = ut$ dönüşümü yapılırsa

$$G(u) = \int_0^{\infty} f(w) e^{-\frac{w}{u^2}} \frac{dw}{u} = \frac{F\left(\frac{1}{u^2}\right)}{u}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 5 (Tarig Dönüşümü için Konvolüsyon Teoremi):

f ve g iki fonksiyon olsun. Bu fonksiyonların Laplace dönüşümü altındaki görüntüleri sırasıyla $F(s)$ ve $G(s)$; Tarig dönüşümü altındaki görüntüleri ise sırasıyla $M(u)$ ve $N(u)$ olsun.

$$T[(f * g)(t)] = uM(u) N(u) \quad (37)$$

dir.

İspat :

İlk olarak Laplace dönüşümü için konvolüsyon çarpımını ifade edelim.

$$L\{(f * g)(t)\} = F(s) G(s)$$

Teorem 4 'ten yararlanılarak

$$T[(f * g)(t)] = \frac{1}{u} L[(f * g)(t)]$$

eşitliğini yazabiliriz. Yine teorem 4'den

$$M(u) = \frac{F\left(\frac{1}{u^2}\right)}{u} \quad \text{ve} \quad N(u) = \frac{G\left(\frac{1}{u^2}\right)}{u}$$

ifadelerini yerine yazdığımızda

$$T[(f * g)(t)] = \frac{F\left(\frac{1}{u^2}\right) \times G\left(\frac{1}{u^2}\right)}{u} = uM(u)N(u)$$

şeklinde konvolüsyon çarpımı ifade edilir.(Tarig M. Elzaki and Salih M.Elzaki 2016)



ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde üç tane diferansiyel cebirsel denklem alınıp Tarig Dönüşümü ile çözümleri yapılmıştır.

Test Problemi 1

Aşağıdaki diferansiyel-cebirsel denklemi alalım.

$$x'(t) - t y'(t) + x(t) - (1 + t)y(t) = 0 \quad (38)$$

$$y(t) - \sin t = 0 \quad (39)$$

Başlangıç şartları $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ olsun. Bu denklemin tam çözümlerinin $x(t) = e^{-t} + tsint$, $y(t) = \sin t$ olduğunu tarig dönüşümü yardımıyla gösterelim.

Çözüm:

(39) 'den $y(t) = \sin t$ dir.

$y(t) = \sin t$ ve $y'(t) = \cos t$ eşitliklerini (38) de yerine yazalım.

$$x'(t) - t y'(t) + x(t) - (1 + t)y(t) = 0$$

$$x'(t) - t \cos t + x(t) - (1 + t)\sin t = 0$$

$$x'(t) + x(t) = t \cos t + tsint + \sin t$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına Tarig dönüşümü uygulayalım.

$$T[x'(t) + x(t)] = T[t \cos t + tsint + \sin t]$$

Tarig dönüşümünün lineerlik özelliğinden

$$T[x'(t)] + T[x(t)] = T[t \cos t] + T[tsint] + T[\sin t]$$

$$\frac{X(u)}{u^2} - \frac{x(0)}{u} + X(u) = \frac{u^3(1 - u^4)}{(1 + u^4)^2} + \frac{2u^5}{(1 + u^4)^2} + \frac{u^3}{1 + u^4}$$

$x(0) = 1$ başlangıç değerini eşitlikte yazalım.

$$X(u) \left(\frac{1}{u^2} + 1 \right) - \frac{1}{u} = \frac{2u^5 + 2u^3}{(1 + u^4)^2}$$

$$X(u) \left(\frac{u^2 + 1}{u^2} \right) = \frac{2u^3(u^2 + 1)}{(1 + u^4)^2} + \frac{1}{u}$$

$$X(u) = \frac{2u^5}{(1 + u^4)^2} + \frac{u}{u^2 + 1}$$

Eşitliğin her iki tarafına Ters Tarig dönüşümü uygulanırsa

$$T^{-1}[X(u)] = T^{-1} \left[\frac{2u^5}{(1 + u^4)^2} \right] + T^{-1} \left[\frac{u}{u^2 + 1} \right]$$

dolayısıyla

$$x(t) = tsint + e^{-t}$$

olur.

Test Problemi 2

Aşağıdaki diferansiyel-cebirsels denklemleri alalım.

$$x'(t) + x(t) - y(t) = -\sin t \quad (40)$$

$$x(t) + y(t) = e^{-t} + \sin t \quad (41)$$

Başlangıç şartları $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ şeklinde verilsin. Bu denklemin tam çözümlerinin $x(t) = e^{-t}$ $y(t) = \sin t$ olduğunu Tarig dönüşümü yardımıyla gösterelim.

Çözüm:

Verilen denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$$x'(t) + 2x(t) = e^{-t}$$

Eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına Tarig dönüşümünü uygulayalım.

$$T[x'(t) + 2x(t)] = T[e^{-t}]$$

Tarig dönüşümünün lineerlik özelliğinden

$$T[x'(t)] + 2T[x(t)] = T[e^{-t}]$$

olur.

$$\frac{X(u)}{u^2} - \frac{x(0)}{u} + 2X(u) = \frac{u}{u^2 + 1}$$

$$X(u) \left(\frac{1}{u^2} + 2 \right) - \frac{1}{u} = \frac{u}{u^2 + 1}$$

$$X(u) \left(\frac{2u^2 + 1}{u^2} \right) = \frac{u}{u^2 + 1} + \frac{1}{u}$$

$$X(u) = \frac{u}{u^2 + 1}$$

Eşitliğin her iki tarafına Ters Tarig dönüşümü uygulanırsa

$$T^{-1}[X(u)] = T^{-1} \left[\frac{u}{u^2 + 1} \right]$$

dolayısıyla

$$x(t) = e^{-t}$$

olur. Denklemden yerine yazıldığında ise

$$y(t) = \sin t$$

elde edilir.

Test Problemi 3

Aşağıdaki diferansiyel-cebirsal denklemi alalım.

$$x'(t) - ty'(t) + t^2 z'(t) + x(t) - (1 + t)y(t) + (t^2 + 2t)z(t) = 0 \quad (42)$$

$$y'(t) - tz'(t) - y(t) + (t - 1)z(t) = 0 \quad (43)$$

$$z(t) - \sin t = 0 \quad (44)$$

Başlangıç şartları $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$ şeklinde verilsin. Bu denklemin tam çözümlerinin $x(t) = e^{-t} + te^t$, $y(t) = e^t + t \sin t$, $z(t) = \sin t$ olduğunu Tarig dönüşümü yardımıyla gösterelim.

Çözüm:

(44) den $z(t) = \sin t$ 'dir. Dolayısıyla

$$z'(t) = \cos t \text{ dir.}$$

(43) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$y'(t) - t \cos t - y(t) + (t - 1) \sin t = 0$$

$$y'(t) - y(t) = t \cos t - t \sin t + \sin t$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına Tarig dönüşümünü uygulayalım.

$$T[y'(t) + y(t)] = T[t \cos t - t \sin t + \sin t]$$

Tarig dönüşümünün lineerlik özelliğinden

$$T[y'(t)] + T[y(t)] = T[tcost] - T[tsint] + T[sint]$$

$$\frac{Y(u)}{u^2} - \frac{y(0)}{u} - Y(u) = \frac{u^3(1-u^4)}{(1+u^4)^2} - \frac{2u^5}{(1+u^4)^2} + \frac{u^3}{1+u^4}$$

olur.

$x(0) = 1$ başlangıç değerini eşitlikte yazalım.

$$Y(u) \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) - \frac{1}{u} = \frac{-2u^5 + 2u^3}{(1+u^4)^2}$$

$$Y(u) \left(\frac{1-u^2}{u^2} \right) = \frac{2u^3(1-u^2)}{(1+u^4)^2} + \frac{1}{u}$$

$$Y(u) = \frac{2u^5}{(1+u^4)^2} + \frac{u}{1-u^2}$$

Eşitliğin her iki tarafına Ters Tarig dönüşümü uygulanırsa

$$T^{-1}[Y(u)] = T^{-1} \left[\frac{2u^5}{(1+u^4)^2} \right] + T^{-1} \left[\frac{u}{1-u^2} \right]$$

$$y(t) = tsint + e^t$$

olarak bulunur. Diğer yandan

$$y'(t) = sint + tcost + e^t$$

dır. Bulunan eşitlikler (42)'de yerine yazıldığında

$$x'(t) - t(sint + tcost + e^t) + t^2 cost + x(t) - (1+t)(tsint + e^t) + (t^2 + 2t)sint = 0$$

$$x'(t) + x(t) = 2te^t + e^t$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına Tarig dönüşümü uygulanırsa

$$T[x'(t) + x(t)] = T[2te^t + e^t]$$

olur. Tarig dönüşümünün lineerlik özelliğinden

$$T[x'(t)] + T[x(t)] = 2T[te^t] + T[e^t]$$

$$\frac{X(u)}{u^2} - \frac{x(0)}{u} + X(u) = 2 \frac{u^3}{(1-u^2)^2} + \frac{u}{1-u^2}$$

$$X(u) \left(\frac{1}{u^2} + 1 \right) - \frac{1}{u} = \frac{2u^3}{(1-u^2)^2} + \frac{u}{1-u^2}$$

$$X(u) = \frac{u^3}{(1-u^2)^2} + \frac{u}{1+u^2}$$

elde edilir.

Eşitliğin her iki tarafına Ters Tarig dönüşümü uygulanırsa

$$T^{-1}[X(u)] = T^{-1} \left[\frac{u^3}{(1-u^2)^2} \right] + T^{-1} \left[\frac{u}{1+u^2} \right]$$

$$x(t) = te^{-t} + e^{-t}$$

elde edilir.

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde Diferansiyel Cebirsel denklemler verildi ve sonrasında bu denklemlerin Tarig Dönüşümü yöntemi ile çözümleri yapıldı. Tarig Dönüşümü detaylı bir şekilde anlatıldı. Tarig Dönüşümü Laplace dönüşümü ile ilişkilendirilerek Konvolüsyon Teoremi ispatlandı. Sonrasında ise üç adet test problemi üzerinde bu yöntem uygulandı. İstenilen çözümlere ulaşıldı.

Tarig Dönüşümünün, Diferansiyel Cebirsel denklemlere kolay bir şekilde uygulanabildiği ve Diferansiyel Cebirsel denklemleri çözmek için etkin bir yöntem olduğu görülmüştür.



KAYNAKLAR

- Ascher, U. M. and Spiter, R. J., 1994. Collocation software for boundary value differential-algebraic equations, SIAM, J. Sci. Comput., 15:938–952.
- Ayaz, F., 2004. Applications of differential transform method to differential-algebraic equations, Appl. Math. Comput., 152:649-657.
- Brenan, K.E., Campbell, S.L. and Petzold, L.R., 1989. Numerical Solution of Initial-Value, Problems in Differential-Algebraic Equations, Elsevier, New York
- Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S., 2016, Adi Diferansiyel Denklemler, Dora Yayınları.
- Çelik, E. and Bayram, M., 2003a. Arbitrary order numerical method for solving differential-algebraic equations by Pade' series, Appl. Math. Comput., 137:57–65.
- Çelik, E. and Bayram, M., 2003b. On the numerical solution of differential-algebraic equations by Pade' series, Appl. Math. Comput. 137:151–160.
- Çelik, E. and Bayram, M., 2004. Numerical solution of differential-algebraic equation systems and applications, Appl. Math. Comput, 154:405–413.
- Çelik, E. and Yeloğlu, T., 2006. Chebyshev series approximation for solving differential-algebraic equations (DAEs). International Journal of Computer Mathematics, 83, 651-662.
- Elzaki, T.M., and Elzaki, S.M., 2011. On the Elzaki Transform and Ordinary Differential Equation With Variable Coefficients, Advances in Theoretical and Applied Mathematics. ISSN 0973-4554 Volume 6, Number 1, pp. 13-18.
- Elzaki, T.M., 2011. The New Integral Transform “Elzaki Transform” Global Journal of Pure and Applied Mathematics, ISSN 0973-1768, Number 1, pp. 57-64.
- Gear, C.W. and Petzold, L.R., 1984. ODE Methods for the Solution of Differential-Algebraic Systems, SIAM, J. Numerical Analysis, 21:716–728.
- Gear, C.W., 1971. The Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations, IEEE Trans. Circuit Theory, TC-18, pp. 89-95.
- Güzel, N. and Bayram, M., 2006. On the numerical solution of differential-algebraic equations with index-3, Appl. Math. Comput., 175:1320-1331
- Hairer, E., Lubich, C.H. and Roche, M., 1989. The Numerical Solution of Differential Algebraic Systems by Runge Kutta methods, Lecture Notes in Mathematics, 1409, Springer, Berlin.
- İbiş, B., 2011. Kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümleri. Doktora tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Kadioğlu, E., 2005. Genel Matematik, Erzurum.
- Karabacak, M., 2015. Kesirli Mertebeli Diferansiyel Cebirselsel Denklemlerin Haar Dalgacık Fonksiyonları İle Nümerik Çözümleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Müller, P. C., 2000. Descriptor Systems: Pros and Cons of System Modelling by Differential-Algebraic Equations, Mathematics Computers in Simulation. 53:273-279. 99.
- Petzold, L.R., 1982. Differential-algebraic equations are not ODEs, SIAM, J. Sci. Statist. Comput, 3:367–384.

- Podlubny, I., 1999, Fractional differential equations, Academic Pres, New York.
- Tarig, M. Elzaki and Salih M, Elzaki. 2011. On The Relationship between Laplace Transform and New Integral Transform “Tarig Transform”. Applied Mathematics 36:3230-3233
- Tarig, M. Elzaki and Salih M. Elzaki. 2011. The New Integral Transform “Tarig Transform” properties and applications to differential equations”. Applied Mathematics 38:4239-4242
- Tarig, M. Elzaki and Salih M.Elzaki. 2016. New Integral Transform “Tarig Transform” and System of Integro-Differential Equations. Applied Mathematics 93: 39758-39761.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Elanur KÖSE
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	
Lisans:	
Yüksek	
Lisans:	
Doktora:	
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	