

**YAPI SİSTEMLERİNDE ÖZDEĞER
PROBLEMİ ve ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**

Adem UMUDUM

**Yüksek Lisans Tezi
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yapı Bilim Dalı
Doç. Dr. Ahmet BUDAK
2014
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**YAPI SİSTEMLERİNDE ÖZDEĞER PROBLEMİ ve ÇÖZÜM
YÖNTEMLERİ**

Adem UMUDUM

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
Yapı Bilim Dalı**

**ERZURUM
2014**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU



YAPI SİSTEMLERİNDE ÖZDEĞER PROBLEMİ ve ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Doç. Dr. Ahmet BUDAK danışmanlığında, Adem UMUDUM tarafından hazırlanan bu çalışma 13/11/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı – Yapı Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Sadri ŞEN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ahmet BUDAK

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Oğuz Akın Düzgün

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 20/11/2014 tarih ve 46/1564 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAPI SİSTEMLERİNDE ÖZDEĞER PROBLEMİ ve ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Adem UMUDUM

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yapı Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet BUDAK

Yapıların dinamik yükler etkisindeki davranışları, her bir yapı için karakteristik özelliğe sahip ve dinamik karakteristikler olarak adlandırılan doğal frekans ve modlar kullanılarak belirlenmektedir. Dinamik karakteristikler, deprem analizi sırasında yapıya etkiyecek deprem kuvvetlerinin hesaplanmasında kullanılmaktadırlar. Ayrıca yapının modal davranışına bakılarak rijitlik dağılımı ve burulma düzensizliği olup olmadığı hakkında fikir sahibi olunabilmektedir. Bu nedenlerden dolayı dinamik karakteristiklerin belirlenmesi oldukça önemlidir. Yapıların serbest titreşiminden oluşan doğal frekanslar, öz değer probleminin çözümüyle elde edilir. Öz değer probleminin çözümü için pek çok yöntem kullanılmaktadır. Bu çalışmada kesin ve yaklaşık çözüm yöntemleri açıklanmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Öz değerlere karşılık gelen özvektörler hesaplanmış, modların gerçek değerleri normalleştirme işlemi yapılarak elde edilmiştir.

2014, 182 sayfa

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, Serbest Titreşim, Sturm, Faddeev-Leverrier, Jacobi, Lanczos, QR, Altuzay İterasyonu, Vektör İterasyonu, Rayleigh Oranı ile İterasyon.

ABSTRACT

MS Thesis

EIGENVALUE PROBLEMS IN BUILDING SYSTEMS AND SOLUTION METHODS

Adem UMUDUM

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Civil Engineering
Construction Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet BUDAK

Dynamic behavior of structures, each structure and characteristic features, called dynamic characteristics are determined with the natural frequency and mode. The dynamic characteristics, seismic analysis are used in the calculation of seismic forces. Also the modal behavior of the structure by looking at the distribution of stiffness and torsional irregularity can have an idea about. These reasons it is very important to determination of the dynamic characteristics. The natural frequency of the free vibration of the structure, is obtained by solving the eigenvalue problem. Many methods are used for the solution of eigenvalue problems. In this study is the exact and approximate solution methods are explained and the results obtained are given in comparison. Eigenvectors corresponding to the eigenvalues calculated, the mode to obtain actual values of the normalization process is performed.

2014, 182 pages

Keywords: Eigenvalue, Free Vibration, Sturm, Faddeev-Leverrier, Jacobi, Lanczos, QR, Subspace Iteration, Vector Iteration, Rayleigh's Quotient Iteration.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans programı süresince, engin bilgi ve deneyimlerinden yararlanma fırsatı bulduğum, özellikle tez çalışmam esnasında karşılaştığım güçlüklerde deneyimi ile beni yönlendiren, teşvik edici yönetimi ve olumlu eleştirileriyle yol gösteren, kıymetli zamanını benimle paylaşan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet BUDAK’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve Yüksek Lisans eğitimim süresince bilgi ve deneyimlerini paylaşan tüm hocalarıma da teşekkür ederim.

Ayrıca yaşamım süresince, özverili şekilde beni destekleyen aileme çok minnettarım. Tez çalışmam sırasında gösterdikleri anlayış ve sabırdan dolayı sonsuz teşekkür ederim. İyi ki varsınız...

Adem UMUDUM

Kasım, 2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	11
2.1. Titreşimli Hareket.....	11
2.2. Basit Harmonik Hareket	11
2.3. Ayrık Sistemlerin Dinamiği	20
2.4. Titreşen Sistemler	22
2.4.1. Tek serbestlik dereceli sistemler	23
2.4.2. Tek serbestlik dereceli sistemler için hareket denklemi.....	24
2.4.2.a. Hareket denklemi (Dışarıdan yükleme).....	24
2.4.2.b. Hareket denklemi: mesnetlerin titreşimi (temel sarsıntısı).....	27
2.4.3. Doğrusal tek serbestlik dereceli sistemlerin tepkisi	28
2.4.3.a. Sönümsüz serbest titreşimler	29
2.4.3.b. Sönümlü serbest titreşimler	33
2.4.4. Çok serbestlik dereceli sistemler	36
2.4.4.a. Hareket denklemleri	40
2.4.4.b. Çok serbestlik dereceli sistemlerin sönümsüz serbest titreşimi	44
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	55
3.1. Determinant Hesaplamaya Dayalı Yöntemler.....	56
3.1.1. Karakteristik değer denkleminin determinantını esas alan yöntem:	56
3.1.2. Sturm serileri yöntemi	61
3.2. Denklem Çözümüne Dayalı Yöntemler	67
3.2.1. Krylov yöntemi.....	67
3.2.2. Faddeev–Leverrier yöntemi	72

3.3. Vektör İterasyon Yöntemleri.....	77
3.3.1. Vektör iterasyonu (Kuvvet) yöntemi.....	77
3.3.2. Ters vektör iterasyonu yöntemi.....	86
3.3.3. Kaydırma ile vektör iterasyonu yöntemi	94
3.3.4. Rayleigh oranı ile iterasyon yöntemi.....	102
3.4. Dönüşüm Yöntemleri	106
3.4.1 Genel Jacobi yöntemi	108
3.4.2. Jacobi yöntemi.....	126
3.4.3. Alt uzaylarla iterasyon yöntemi	140
3.4.4. Lanczos yöntemi.....	152
3.4.5. Householder yöntemi	157
3.4.6. QR dönüşüm yöntemi.....	165
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	180
5. SONUÇ	181
KAYNAKLAR	182
ÖZGEÇMİŞ	183

SİMGELER DİZİNİ

A	Genlik
c	Sönüm sabiti
$[C]$	Sönüm matrisi
$[D]$	Dinamik matris
E	Elastisite modülü
f	Frekans
$[f]$	Fleksibilite matrisi
f_D	Viskoz sönümleme kuvveti
f_I	Atalet kuvveti
f_S	Elastik yay kuvveti
$[K]$	Rijitlik matrisi
$[M]$	Kütle matrisi
ω^2	Doğal frekans
I	Atalet momenti
k	Yay sabiti
m	Kütle
T	Periyot
t	Zaman
δ	Logaritmik azalış
ξ	Sönümleme oranı
ϕ	Özvektör
λ	Matris özdeğeri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Tek açıklıklı kiriş sisteminin ilk üç mod şekli.....	2
Şekil 1.2. Modların birkaçının aynı anda meydana gelmesi durumu	3
Şekil 1.3. Bir binanın Amerika-Parkfield depremine dair dokuz mod şekli.....	4
Şekil 1.4. Titreşim algılama sınırları.....	5
Şekil 1.5. Üç boyutlu taşıyıcı sistemde titreşim doğrultuları.....	8
Şekil 2.1. Periyodik ve periyodik olmayan hareket	12
Şekil 2.2. Yapay sessiz zon kullanmak suretiyle gelişigüzel (random) hareketin periyodik hareket olarak temsili. Hareket T_n periyodunda zaman açısından sınırsız şekilde tekrarlanır.....	12
Şekil 2.3. Basit harmonik yerdeğiştirmenin zamana bağlı değişimi.....	13
Şekil 2.4. Faz açısının sinüsoidin pozisyonuna etkisi.....	13
Şekil 2.5. Sıfır faz açılı basit harmonik hareketin dönen vektör ile temsili.....	14
Şekil 2.6. Aynı frekansın sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının toplanması, aynı frekansta bir sinüsoid verir	15
Şekil 2.7. Basit harmonik hareketin dönen vektör ile temsili	16
Şekil 2.8. A_2 uzunluğunda ve birbirine zıt yönde dönen vektörlerin basit harmonik hareket üretmesi	17
Şekil 2.9. Yerdeğiştirme, hız ve ivmenin zamana göre değişimleri	19
Şekil 2.10. Yerdeğiştirme, hız ve ivmenin dönen vektör ile temsili.....	20
Şekil 2.11. Değişik sayıda serbestlik derecesine sahip titreşen sistemler.....	23
Şekil 2.12. Değişik tek serbestlik dereceli sistemler.....	24
Şekil 2.13. Dış dinamik yük p_t 'ye maruz kalan sönümlü TSD sistem.....	24
Şekil 2.14. Elasto-plastik ve elastik sistemler için yay kuvveti ve yer değiştirmenin değişimi	26
Şekil 2.15. (a) Atalet, (b) viskoz ve (c) elastik kuvvetlerin sırayla ivme, hız ve yer değiştirme ile değişimi	26
Şekil 2.16. Zemin sarsmasına maruz kalan sönümlü TDS sistem	28
Şekil 2.17. İlksel yer değiştirme u_0 ve ilksel hız $\dot{u}_0$ ile birlikte sönümsüz serbest titreşim yer değiştirmesinin zamana bağlı değişimi.....	32

Şekil 2.18. Logaritmik azalım ve sönümlleme oranı arasındaki kesin ve yaklaşık ilişki grafiği	36
Şekil 2.19. İlkse yerdeğıştirme u_0 ve ilkse hız $\dot{u}_0$ ile birlikte sönümlü serbest titreşimin zamana bağılı değışimi.....	36
Şekil 2.20. Çok serbestlik dereceli yapı modelleri	38
Şekil 2.21. Kesme tipi çerçeve modeli.....	41
Şekil 2.22. Dinamik yüklemeye maruz çok serbestlik dereceli sistemin mod şekilleri	49
Şekil 2.23. Normalleştirilmiş modlar	51
Şekil 2.24. Yerdeğıştirmelerin modal bileşenlerin toplamı şeklinde temsili	52
Şekil 3.1. Üç katlı kesme çerçeve sistemi.....	57
Şekil 3.2. Üç katlı kesme çerçevesi için determinant değışimi.....	58
Şekil 3.3. Üç katlı çerçeve sistemin mod şekilleri	61
Şekil 3.4. Sturm serileri	65
Şekil 3.5. Sturm serileri polinom fonksiyonları.....	67
Şekil 3.6. Merkezdeki kayma miktarının özdeğerlere mesafesi	96
Şekil 3.7. Kaydırma ile vektör iterasyonu: λ_n yakınsaması için kaydırma noktalarının optimum konumu	97
Şekil 3.8. Kaydırma ile vektör iterasyonu: λ_1 yakınsaması için kaydırma noktalarının optimum konumu	98
Şekil 3.9. Alt uzay kavramı	141
Şekil 3.10. Alt uzay yöntemi yakınsaması.....	143

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. İdealize edilmiş sistemler ve yay sabitleri	21
Çizelge 3.1. Alt matrislerin özdeğerleri	66
Çizelge 3.2. Vektör iterasyonu yöntemi ile özdeğer hesabı	84
Çizelge 3.3. Ters vektör iterasyonu yöntemi ile özdeğer hesabı	94
Çizelge 3.4. Kaydırmalı vektör iterasyonu yöntemi: En küçük özçiftin hesabı	99
Çizelge 3.5. Kaydırmalı vektör iterasyonu yöntemi: En büyük özçiftin hesabı	101
Çizelge 3.6. Rayleigh oranı ile iterasyon: I. Özçift	104
Çizelge 3.7. Rayleigh oranı ile iterasyon: II. Özçift	105
Çizelge 3.8. Rayleigh oranı ile iterasyon: III. Özçift	105
Çizelge 3.9. Alt uzaylarla iterasyon	146

1. GİRİŞ

Yapılara gelen tüm yükler bir zaman dilimi içinde etkir ve yapıda zamana bağlı yer değiştirmelere (deplasman), şekil değiştirmelere (deformasyon) ve gerilmelere neden olurlar. Bunlar dinamik sıfatını alan etki ve tepkilerdir. İkisi arasındaki ilişkiyi yapının şekli (geometrisi), malzemenin davranışı ve kütesinin dağılımı gibi özellikler belirler (Yerlici ve Luş 2007).

Yapı sistemlerinin tasarımında statik etkiler, malzeme mukavemeti gibi faktörlerin yanında bu dinamik etkilerin de dikkate alınması gerekmektedir. Dinamik hesabın amacı ise, zamana bağlı olarak değişim gösteren yüklerin etkisinde kalan taşıyıcı sistemlerde oluşacak olan kuvvetlerin ve yer değiştirmelerin belirlenmesidir.

Dinamik problemleri, statik problemlere göre bazı farklılıklar gösterir:

1. Sisteme etkiyen yük ve sistemin davranışı zamanın bir fonksiyonudur. Bu nedenle, çözümler ancak belli bir zaman için verilebilir.
2. Sistemdeki kütle dağılımından oluşan atalet kuvvetleri sistem davranışına etki eder.
3. Yapıda dinamik hareketlerden dolayı oluşan sönüm, sonuçlara belirli oranda etki eder.

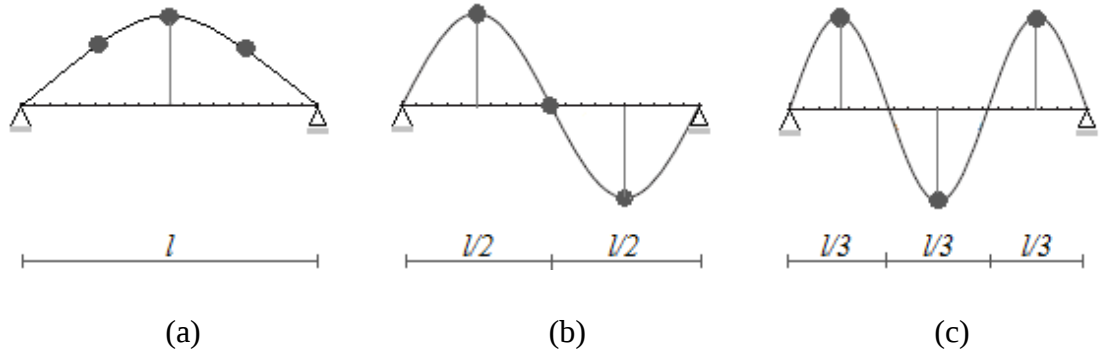
Yapı sistemlerinde (2.) ve (3.) maddede belirtilen atalet ve sönüm kuvvetlerinin ihmal edilebilir mertebede olmaları dinamik problemlerini verilen bir zaman dilimi için bir statik problemine indirgemektedir (Erdik ve Yüzügüllü 1980).

Ancak teknolojik ilerlemeler sonucu artan malzeme mukavemeti ve böyle malzemelerin daha çok kullanımı, taşıyıcı sistemlerde en kesit, kütle ve benzeri tasarım parametrelerinin küçük değerler almasına sebep olmakta, buna karşın yapı taşıyıcı sistem kütleleri dışında mevcut kütleler ise benzer şekilde ve aynı oranda değişmemektedir. Bu durum yapıda esnekliğin artıp deformasyonların büyümesi ile de

atalet kuvvetlerinin diğer kuvvetlere göre öneminin artmasına sebep olmaktadır. Bu nedenlerle modern yapıların tasarımında, yapının dinamik davranışının göz önünde bulundurulması ön plana çıkmaktadır (Leylek 2005).

Bir taşıyıcı sistemin rijitliği arttıkça, doğal periyodu azalır. Aksine, ne kadar esnek ve fazla deformasyon kabiliyetine sahip ise periyodu o nisbette uzundur. Taşıyıcı sistemin boyu ve benzer şekilde bir binanın yüksekliği arttıkça doğal periyodu büyür. Periyot, rijitlikle ters, kütle ile doğru orantılıdır (Tezcan 1970).

Yapıların dinamik yükler etkisindeki davranışları, her bir yapı için karakteristik özelliğe sahip dinamik parametreler kullanılarak belirlenmektedir. Bu parametreler yapının doğal titreşim frekansları ve bunlara tekabül eden doğal titreşim mod'ları (mod şekli) dır. Mod şekilleri yapının her modal frekansta hangi geometrik konumda titreştiğini gösterir. Mod şekilleri aşağıdaki gibi tek açıklıklı kiriş sistemi ele alınarak izah edilebilir:



Şekil 1.1. Tek açıklıklı kiriş sisteminin ilk üç mod şekli

Şekil 1.1.(a) ile gösterilen titreşim şekli sistemin doğal (temel) titreşim şekli olarak bilinir. Burada sistemin bütün kütlesi kirişin üç eşit noktasında konsantre olarak bulunmaktadır. Kiriş sistemi orta noktasından tutulup, herhangi bir deformasyon yaptırılıp aniden bırakılırsa, sistem mekanik titreşime zorlanmış olur. Buradaki bu titreşim şekline 1. mod şekli adı verilir.

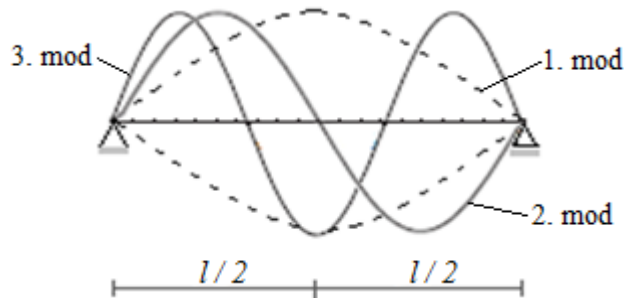
Bu titreşim şeklinin özelliği; doğal periyodun, yani (T)'nin en büyük değerde olduğu ve kesir değerini ifade eden veya gösteren (f) frekansının ise en küçük değerde olduğudur.

Böyle bir kiriş sisteminin titreşim yapabilmesinin mekanik olarak anlamı ise şöyledir; Kirişte kullanılan yapı malzemesinin herhangi bir malzeme olduğu, kütlelerin toplanmış kütleler halinde yan yana durduğu, bu kütleleri birbirine bağlayıcı elemanlar olarak ve kirişin fiziksel karakterini belirleyen esnek yayların bulunduğu varsayılırsa; kirişin mekanik titreşim yapmasından, kirişi idealize eden toplanmış kütlecikler ile esnek yaylar arasındaki potansiyel ve kinetik enerjilerin çok kısa zaman aralıkları ile sürekli değişim yaptığı manası çıkar ve bu iki enerjinin toplamı her an sabit kalır. Enerjinin korunumu prensibi gereği bu değişim sürekli devam eder.

Şekil 1.1 (b) ile gösterildiği şekilde; kiriş sisteminin, (a) ile aynı miktar deformasyon yaptırılıp titreşime zorlanması mümkündür. Bu titreşim şekli 2. mod şekli olarak adlandırılır ve bu titreşim şeklinde sistemin titreşim periyodu daha küçük olur. Buna bağlı frekansı ise biraz daha büyüktür.

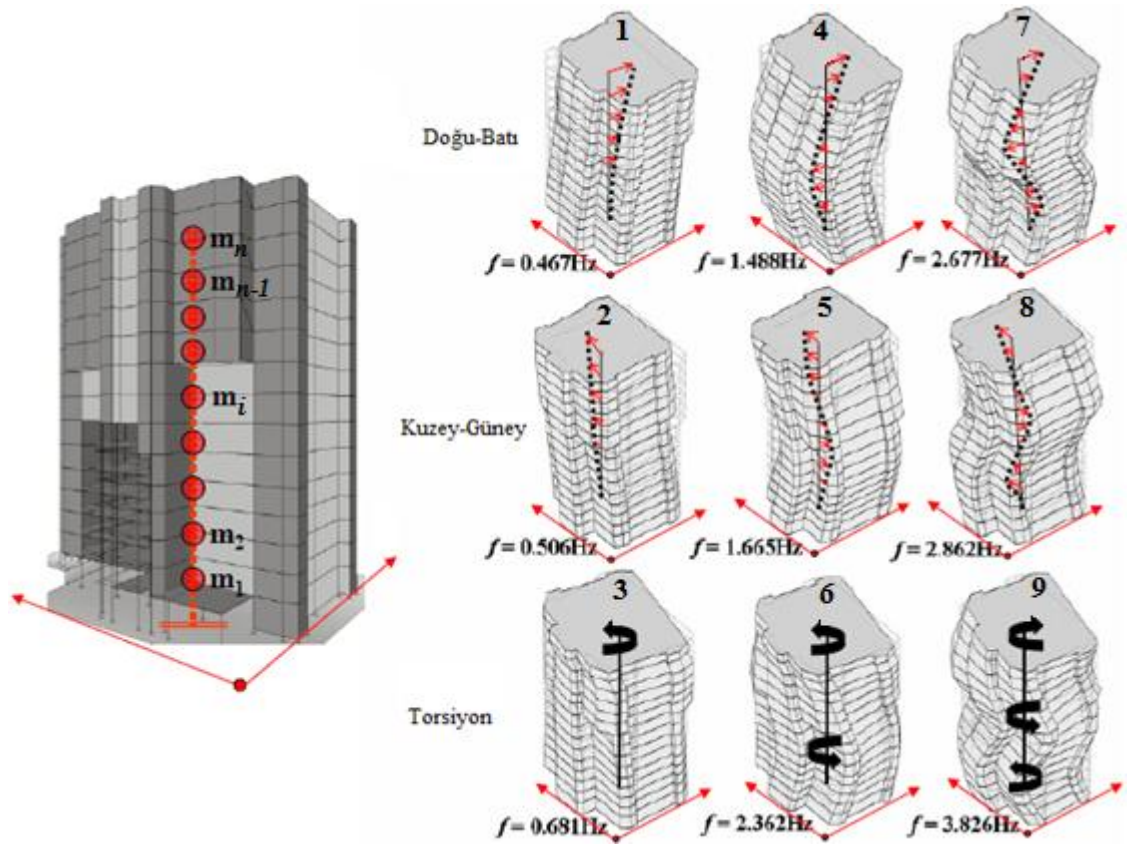
Şekil 1.1 (c)'de gösterilen titreşim şekli için, (b)'de olduğu gibi aynı durum tekrar edilebilir. Bu titreşim şekli de 3. mod şekli olarak adlandırılır.

Bazı taşıyıcı sistemlerde, konstrüksiyonları icabı, titreşim mod'larının birkaçı birden aynı anda meydana gelebilir. Yapıların önemine göre bu mod etkileri birleştirilir (Leylek 2005).



Şekil 1.2. Modların birkaçının aynı anda meydana gelmesi durumu

Şekil 1.3’de bir binanın Amerika-Parkfield (2004) depremine dair ilk dokuz mod şekli ve frekansları gösterilmektedir. Görüldüğü üzere bir yapının elastik davranışı ilk mod periyodu tarafından belirlenmektedir. Kısacası yapının modal davranışına bakılarak yapının bütününe yönelik dinamik davranışı hakkında, rijitlik dağılımı ve burulma düzensizliği olup olmadığı hakkında fikir sahibi olunabilmektedir. Bu nedenlerden ötürü dinamik parametrelerin belirlenmesi oldukça önemlidir.

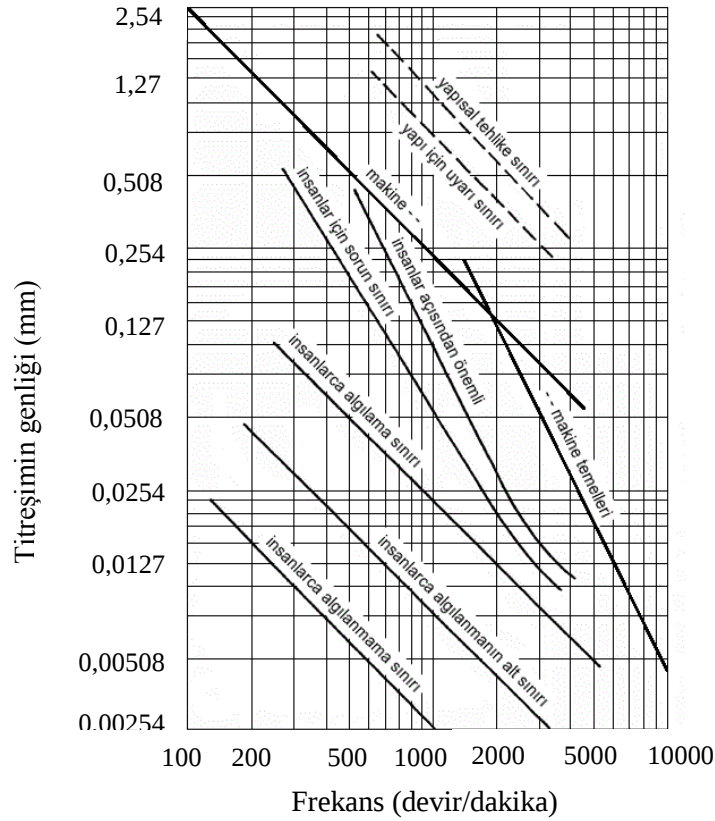


Şekil 1.3. Bir binanın Amerika-Parkfield depremine dair dokuz mod şekli (Beyen 2011)

Özetlemek gerekirse, yapı dinamiğinde şu üç unsur çok önemlidir. Bunlar zamana bağlı kuvvetler, yapının karakteristikleri ve yapının davranışdır.

Rüzgar, deprem, darbe, hidrodinamik kuvvetler, patlama kuvvetleri, trafik, yürüyen insanlar veya endüstriyel binalarda makina ve motorlardan dolayı meydana gelen

titreşim kuvvetleri zamana bağlı kuvvetlerdir. Bu kuvvetlerin en büyük özelliği, kuvvet büyüklüklerinin sabit kalmayıp zamanla değişmesidir (Çelebi ve Erdik 1977).



Şekil 1.4. Titreşim algılama sınırları (Marr 2003)

Belli frekanslarla titreşim genliği arasındaki ilişki için Şekil 1.4' ten yararlanılabilir. Titreşimlerin insanlar tarafından algılanması ve makine-makine temelleri ile yapılara zarar vermesi açısından sınırlar tanımlanmıştır. Titreşimlerin insanlar tarafından algılanması ve ciddi sınırlara erişmesi ile yapı açısından zararlı düzeylere erişmesi için titreşim genliğinin ve frekansının Şekil 1.4' te görüldüğü üzere büyük olması gerekir.

Hesaplar sırasında dikkate alınacak kuvvetler, yapıların tip ve işlevleri ile yakından ilgilidir. Örneğin rüzgar, yüksek yapılar için çok önemli bir yük etkisi olsa da, alçak yapılarda dinamik etkileri ihmal edilebilir. Bir köprü için trafik yükleri önemli olsa da, bir bina için trafikten doğan titreşimler önemsiz kalabilir. Öte yandan depremlerde

oluşan büyük yer sarsıntıları, hemen hemen tüm yapılar için dikkate alınması gereken zorlamalara neden olur. Kuvvetin zamanla değişmesiyle yapı kütesine etkileyen kuvvetler de zamanla değişeceğinden yapının davranışının değişmesine sebebiyet verecektir (Çelebi ve Erdik 1977).

Taşıyıcı sistemin kesitlerinde arka arkaya ve çok sık değişen basınç ve çekme gerilmeleri meydana gelmekte ve yapı elemanları için kullanılan malzemenin bir müddet sonra “yorulması” söz konusu olabilmektedir (Leylek 2005).

Kuvvet etkileri, bir yapıyı farklı biçimlerde harekete zorlayıp, mod hareketlerinden bazılarını veya hepsini değişik büyüklük ve zamanlarda harekete geçirebilir. Örneğin, Şekil 1.1.(a)’dakine benzer şekilde basit bir kirişi orta noktasından aşağı–yukarı itip çeken bir piston, kirişi asıl olarak tek bir mod şeklinde harekete zorlar. Diğer yandan depremlerdeki yer sarsıntıları gibi doğal etkiler, yapının belki de tüm mod şekillerinde birden titreşmesine neden olabilir. Burada her moddaki hareketin genliği ve bu genliğe ulaşılan zaman değişik olur. Ancak çoğu kez bu gibi durumlarda da kütle yer değiştirmelerine en büyük katkı düşük frekanslı mod titreşimlerinden gelir, mod frekansı yükseldikçe de bu katkı hızla azalır. Öyle ki, birinci moddaki titreşimin kütle yerdeğiştirmelerine katkısı %80, ikincinin %10, üçüncünün de %5 dolaylarında iken, diğer tüm modların katkılarının toplamı %5’in altında kalabilir. Yine de bu bir kural değildir ve bazı durumlarda, kuvvet etkileri belirli yüksek frekanslı mod titreşimlerini etkileyip, onların yerdeğiştirmeye olan katkılarını önemli ölçüde arttırabilir. Eğer bir sistemde hareketin önemli kısmına neden olan modlar biliniyorsa, daha önemsiz olan diğer mod hareketleri ihmal edilebilir. İhmal edilecek hareketlerin getireceği kaybın sınırı, analizlerin güvenilirliğini düşüren gerek yapı gerek de yük modellerindeki belirsizliklerin getireceği kaybı aşmadıkça, yapılan ihmalin fazla bir sakıncası olması beklenemez (Yerlici ve Luş 2007).

Yapı karakteristikleri olarak yapının boyutları, malzemesi (seçilecek malzeme cinsleri birbirini tamamlar şekilde, teknik deyimle E-elastisite modülleri çok farklı olmamalıdır) ve zemin durumu kastedilmektedir. Ayrıca yapının konumu da önemlidir. Örneğin,

değişik eksenleri olan bir yapıya etkiyen dinamik yüklerin yönü önemlidir. Simetrik olmayan yapılarda burulmalı titreşim meydana gelebileceği gibi, simetrik bir yapıya, simetri eksenine göre etkimeyen kuvvetlerde burulmalı titreşime sebep olabilir (Çelebi ve Erdik 1977).

Bu nedenlerle rijitlik merkezi ile kütle merkezinin konumunun plan üzerinde birbirlerine yakın olup olmamaları çok büyük önem taşımaktadır. Her iki merkezin birbirinden uzakta olmaları durumunda, bina düşey eksen etrafında etkili olan torsiyon (burulma) titreşimlerinin yanı sıra, ötelenme (translasyon) titreşimlerinin meydana gelme olasılığı vardır. Bu iki titreşim cinsinin periyotları birbirine eşit veya çok yakın olursa, rezonans tehlikesi doğabilir (Leylek 2005).

Rezonans olayı şu şekilde açıklanabilir: Taşıyıcı sistemin statik hesaplar ve statik analiz vasıtasıyla elde edilen iç kuvvetleri (normal kuvvet, kesme kuvveti, eğilme momenti) ani olarak çok büyük değerlere ulaşırlar ve yapı için önceden seçilmiş malzemenin taşıma sınırını bile aşabilirler. Böyle bir durum taşıyıcı sistemin aniden iflası diğer anlamda hasarı demektir.

Dinamik hesap yapılırken, yapılar ve yükler için belirli modeller kullanılır. Yapıya etkiyen kuvvetler ve yapı karakteristikleri biliniyorsa, model için gerekli bilgiler var demektir (Çelebi ve Erdik 1977).

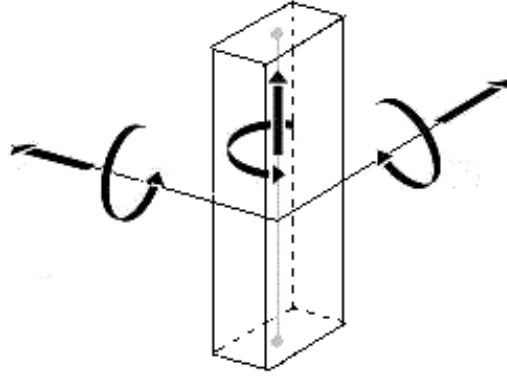
Sonuçların geçerlilik derecesi, kullanılan modellerin gerçeği ne derece yansıtabildiğine bağlıdır. Burada sonucu belirleyen başlıca etkenler; kütlelerin yapı içindeki dağılımı, dış kuvvet ve ötelemelerin özellikleri, elemanların şekil değiştirmeye karşı direnci ve enerji yutarak hareketi söndürmeye çalışan, iç sürtünme ve çatlamlar gibi sönüm mekanizmalarıdır.

Yapı özellikleri çoğu zaman tam olarak belirlenemeyeceğinden, bunları modellerde gerçekçi biçimde yansıtabilmek zor bir iştir. Malzeme davranışlarının veya titreşimi söndüren mekanizmaların, karmaşık yapıları nedeniyle tam olarak öngörülebilmeleri

hemen hemen olanaksızdır. Çoğu zaman yapıya etkiyen rüzgar ve dalga gibi dış yüklerin veya mesnetleri harekete zorlayan deprem gibi olayların ayrıntıları da tam olarak bilinemez. Değinilen özelliklerin ayrıntıları tanımlanabilse bile, bunları modele aktarabilmek için kullanılması gereken matematiksel bağıntılar, hesapları içinden çıkılmaz bir hale de getirebilir. Hesapları kolaylaştırmak amacıyla genellikle modelleri basitleştirme yolları aranır ve görece önemsiz etkiler ihmal edilir (Yerlici ve Luş 2007).

Genel olarak, aşağıdaki gibi yapıyı karakterize eden üç boyutlu taşıyıcı sistemde titreşimlerin, bu üç eksen doğrultusunda doğrusal hareket (translasyon) ve bu üç eksen etrafında rotasyon (dönme) ve torsiyon (burulma) olmak üzere altı şekilde olabilme olasılığı vardır.

Bu altı çeşit titreşim; taşıyıcı sisteme ait titreşimlerin serbestlik derecesi olarak da tanımlanır.



Şekil 1.5. Üç boyutlu taşıyıcı sistemde titreşim doğrultuları

Taşıyıcı sistemde ön görülecek sunî sınırlandırmalar ve tedbirler ile 6 serbestlik derecesinden bazılarının engellenmesi mümkündür. Dolayısıyla, iki boyutlu taşıyıcı sistemlerde yalnızca yatay yöndeki titreşim hesapları ile yetinilmesi mümkün olabilmektedir. Bu tip sınırlandırmalara ‘‘mesnet şartlarının değiştirilmesi uygulaması’’ adı verilir. Örnek olarak; statik hesap yapılırken, mesnetlerin hareketlerinin herhangi bir istikamette bloke edilmesi gibi.

Diğer bir örnek olarak; bina kat hizalarında yatay sabit mesnetler oluşturularak yan ötelenme hareketlerine mani olunması vs. gösterilebilir. Aynı şekilde projelendirme esnasında yapının, rijitlik merkezi ile kütle merkezinin birbirlerine çok yakın olmasına özen gösterilerek torsiyon (burulma) titreşimlerinin etkisinin en az düzeye indirilmesi gösterilebilir.

Ayrıca şu da söylenebilir; etkisinin çok az olmasından dolayı, kolon gibi düşey yöndeki taşıyıcı sistemlerin, düşey yöndeki translasyon (ötelenme) titreşim hareketleri çoğu zaman ve bazı istisnalar (normal kuvvet artışları ile, ikinci mertebe yükleme halinin nazari itibare alınması durumunun doğabileceği gibi) dışında ihmal edilirler. Bunun bir başka sebebi de taşıyıcı çubuk elemanların kesitlerinde daima emniyet rezervlerinin bulunması gösterilir. Sistemler düşey yöndeki dinamik etkiden dolayı meydana gelen ilave gerilmeleri bu çeşit rezervlerden dolayı her zaman karşılayacak durumda bulunurlar.

Normal hallerde ve düzenli yapı proje hesapları esnasında, sistemin içinde bulunduğu düzlem üzerinde yatay doğrultudaki translasyon (ötelenme) titreşimlerinin hesabı ile de yetinilebilir. Deprem veya rüzgar etkisinin yapı planı üzerinde herhangi bir yönde veya diyagonal doğrultuda da etkimesi mümkündür. Böyle durumlarda, tesirlerin düşey ve yatay bileşkelerinin etkileri ayrı ayrı bulunur ve sonuçlar dizayn esnasında kesit gerilme ve donatı hesapları yapılırken süperpoze edilir. Plan üzerinde düzensizliğin bulunması halinde, her eksen yönündeki titreşim hareketi 3 boyutlu sistem dikkate alınarak incelenmektedir.

Yapılar genelde çok serbestlik dereceli olduklarından ve doğal titreşim mod sayısının yapının serbestlik derecesi sayısına eşit olmasından dolayı, doğal titreşim frekansları ve bunlara karşılık gelen doğal titreşim modlarının yapının sönümsüz serbest titreşimlerine karşılık gelen dinamik denge denklemlerinden hesabı ve bütün serbestlik derecelerinin aynı zamanda dikkate alınması bilgisayar kullanımını, hesap ifadeleri ise skaler cebir yerine, matris cebirini gerektirmektedir.

Dinamik hesapların kolaylaştırılması ve neticelerinin kolay interpretasyonu bakımından titreşim hareketinin, sistemin her eksen yönü için ayrı ayrı hesaplanmasına Norm, Standart ve Yönetmeliklerde müsaade edilmektedir. Dolayısıyla gerekli olan doğal periyot ve frekans her yön için ayrı ayrı hesaplanabilmektedir (Leylek 2005).

Ayrıca dinamik hesaplamalardaki bir diğer zorluk, yapı sisteminin elemanlarının sürekli olduğu kabulü ile incelenmesinden kaynaklanmaktadır. Yapının idealizasyonu, sürekli kütlelerin bulunduğu sistemlerden kütle-yay modeli olarak basit mekanik sistemlerle yapılmaktadır. Yapıyı idealize etmekle, titreşim denklemlerinin çözümleri daha basit hale indirgenmektedir.

Tüm bu basitleştirmeler ve kabullerden sonra ilk adım olarak, dinamik çözümleme için hareket denklemleri yazılır ve modelin davranışı belirlenir. Serbest titreşim ve zorlanmış titreşim taşıyıcı sistemin önemli olan iki dinamik davranışdır. Bunlardan ilki sistem üzerine etki eden bir kuvvetin olmadığı durumda ve öngörülen başlangıç koşullarının etkisiyle meydana gelirken, ikincisi sisteme etkiyen dış yüklerden veya mesnet hareketlerinden ortaya çıkar.

Uygulamada yapının serbest titreşiminden dolayı hareketi ile çok az karşılaşılır. Böyle olmakla beraber, serbest titreşim hareketi yardımıyla, yapının doğal frekansı ve mod şekilleri gibi dinamik özelliklerinin belirlenmesi önem taşır. Bu nedenle bu çalışma kapsamında sadece ‘serbest titreşim’ hareketi incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

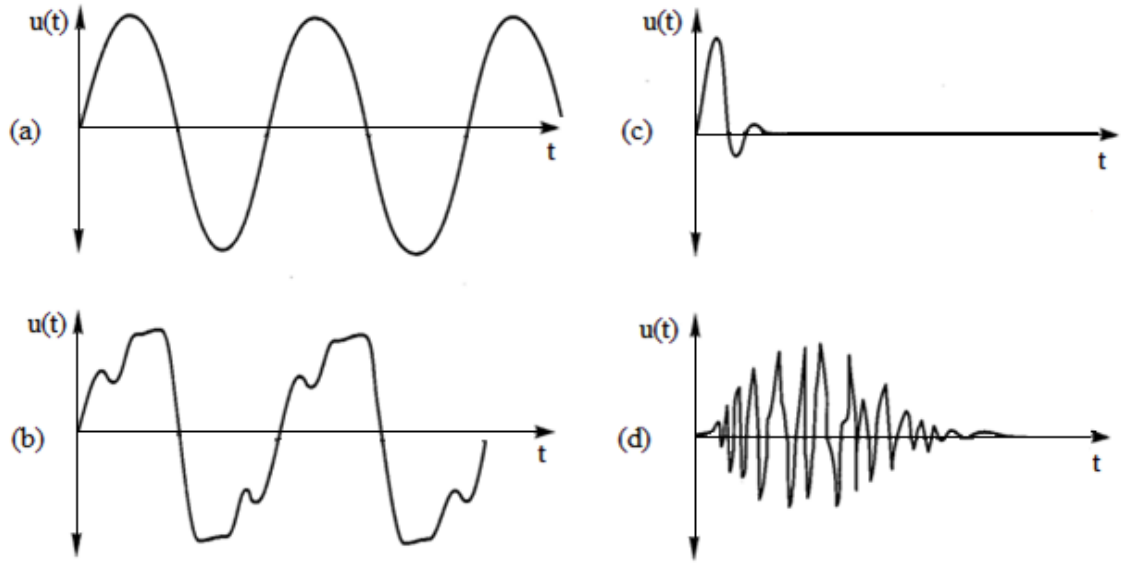
2.1. Titreşimli Hareket

Titreşimli hareket periyodik hareket ve periyodik olmayan hareket olarak iki ana sınıfa ayrılabilir. Periyodik hareketler zaman içinde sabit aralıklarla tekrarlanan hareketlerdir. Bir $u(t)$ hareketi matematiksel olarak, ancak tüm t değerlerinde $u(t + T_n) = u(t)$ olan herhangi bir periyot T_n 'nin bulunduğu durumda periyodiktir. Periyodik hareketin en basit şekli, zaman içinde yerdeğiştirmesinin sinüsoidal olarak değiştiği basit harmonik harekettir. Sabit aralıklarla tekrarlanmayan periyodik olmayan hareketler darbesel (impulsive) yüklerden (örneğin patlamalar ve düşen ağırlıklar) veya uzun süreli gelişigüzel (random) yüklerden (örneğin deprem, trafik) ileri gelebilir. Periyodik ve periyodik olmayan hareketler Şekil 2.1'de gösterilmiştir.

Periyodik hareketlerin bazı şekilleri (örneğin Şekil 2.1.(b)) basit harmonik hareketten çok daha karmaşık görünebilir, fakat matematiksel tekniklerin kullanımıyla, bir dizi basit harmonik hareketin toplamı olarak ifade edilebilirler. Şekil 2.1.(c) ve (d)'deki gibi dengesiz, periyodik olmayan hareketler bile, hiçbir hareketin olmadığı bazı "sessiz" zondan (Şekil 2.2) sonra tekrarlandıkları varsayılarak, periyodik hareket olarak temsil edilebilir. Bu tekniği kullanmak suretiyle, dengesiz bir hareket bile periyodik hareket olarak ifade edilebilir. Bu teknik; süperpozisyon ilkesinin, dengesiz yükleme tepkisinin bir dizi basit harmonik yükün tepkilerinin toplamı olarak ifade edilmesine izin verdiği durumlarda, doğrusal sistemlerin dinamik analizinde kuvvetli bir gereç olmuştur.

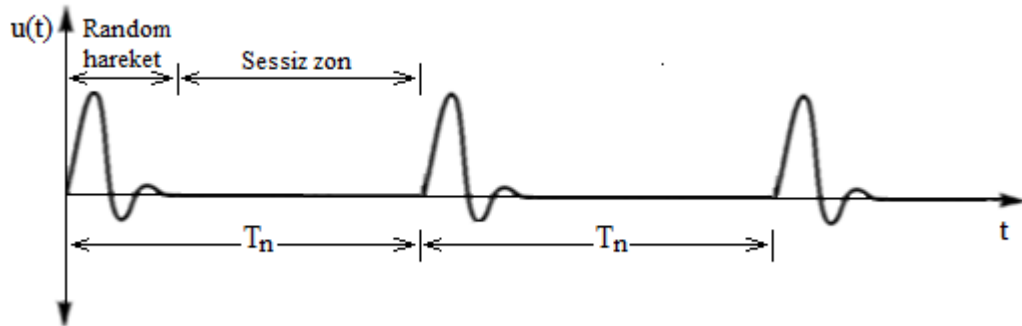
2.2. Basit Harmonik Hareket

Basit harmonik hareket sabit frekanstaki sinüsoidal hareket ile karakterize edilebilir. Basit harmonik hareketin en önemli özellikleri genlik, frekans ve faz şeklindeki üç büyüklük ile ifade edilebilir. Basit harmonik hareket, trigonometrik notasyon veya kompleks notasyon kullanılarak değişik şekillerde tanımlanabilir.



Şekil 2.1. Periyodik ve periyodik olmayan hareket

(a) Basit harmonik hareket; (b) Genel periyodik hareket; (c) Geçici (transient) hareket (darbesel harekete tepki); (d) Gelişigüzel (random) hareket (deprem yer hareketi)



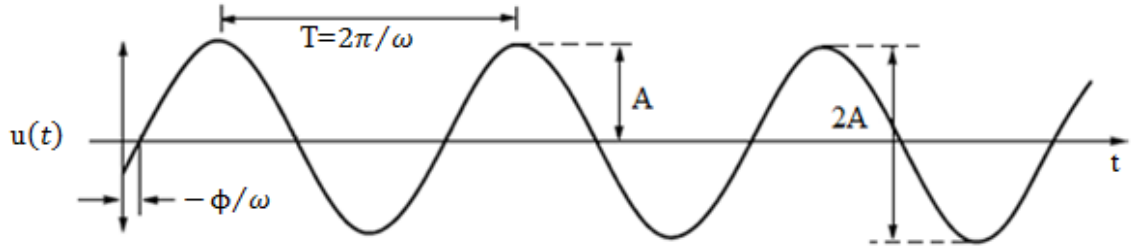
Şekil 2.2. Yapay sessiz zon kullanmak suretiyle gelişigüzel (random) hareketin periyodik hareket olarak temsili. Hareket T_n periyodunda zaman açısından sınırsız şekilde tekrarlanır

Basit harmonik hareket, en basit olarak trigonometrik notasyon kullanılarak yerdeğiştirme $u(t)$ cinsinden ifade edilebilir. Örneğin,

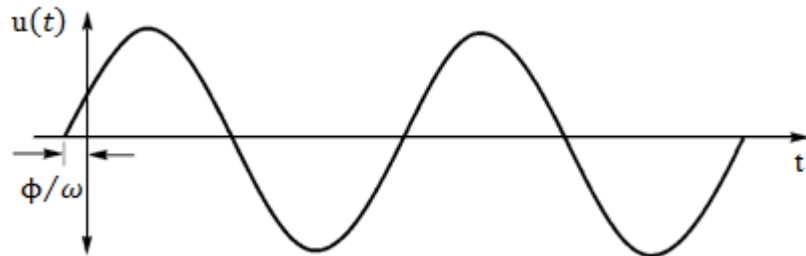
$$u(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2.1)$$

Burada, A : yerdeğiştirme genliği, ω : dairesel frekans ve ϕ : faz açısıdır. Bu basit harmonik hareketin zamana bağlı değişimi Şekil 2.3'deki gibidir. Dairesel frekans, birim zaman başına radyan cinsinden salınım hızını ifade eder.

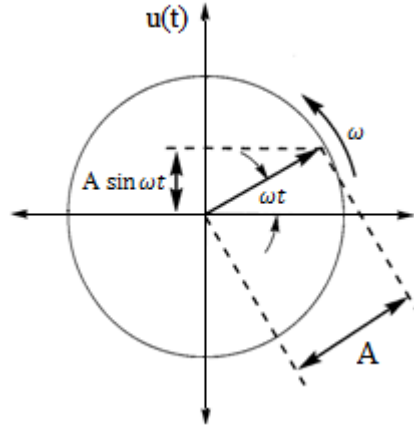
Buradaki 2π radyan değeri hareketin bir devrine karşılık gelir. Faz açısı Şekil 2.4'te gösterildiği gibi, piklerin (ve sıfır noktalarının) normal sinüs fonksiyonundakinden zaman olarak sapma miktarını tanımlar. $\omega t + \phi = 0$ veya aynı bağıntıdan $t = -\phi/\omega$ olduğu zaman, yerdeğiştirme sıfır olur. Pozitif bir faz açısı hareketin sinüs fonksiyonunun önünden gittiğini; negatif olduğunda ise sinüs fonksiyonunun gerisinden geldiğini işaret eder. Dairesel frekans kavramı en kolay olarak Şekil 2.5'de A uzunluğundaki dönen vektörün hareketi gözönüne alındığında anlaşılabilir. Vektörün yatay pozisyonundan itibaren orjin etrafında saatin tersi yönünde ω açısal hızında dönmesi durumunda, yerdeğiştirme $u(t)$ vektörünün düşey bileşeni ile ifade edilebilir:



Şekil 2.3. Basit harmonik yerdeğiştirmenin zamana bağlı değişimi



Şekil 2.4. Faz açısının sinüsoidin pozisyonuna etkisi



Şekil 2.5. Sıfır faz açılı basit harmonik hareketin dönen vektör ile temsili

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad (2.2)$$

Düşey bileşen $\omega t = \pi/2$ 'de maksimum değere ulaşır ve sonra sıfıra doğru ($\omega t = \pi$ 'de) azalır. Daha sonra da $\omega t = 3\pi/2$ 'de negatif maksimum değerine ulaşır. İlk pozisyonuna doğru devam eder ve bu sürecin tümünü tekrar eder.

Dönen vektörün bir tam dönme yapması için geçen zaman, hareketin bir devri için gerekli zamandır. Bu zaman, hareketin titreşimi, T olarak anılır ve dairesel frekans ile ilişkisi aşağıdaki gibidir:

$$T = \frac{\text{Bir dönme için açısal mesafe}}{\text{Açısal hız}} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.3)$$

Salınım frekansının yaygın olan bir diğer ölçüsü de, belirli bir süre içinde oluşan devir sayısı cinsinden ifade edilir. Titreşim periyodu, zamanı devir başına ifade ettiğinden, birim zamandaki devir sayısı titreşim periyodunun tersi olmalıdır. Yani,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.4)$$

Frekans genellikle saniye başına devir veya Hertz (Hz) olarak ifade edilir.

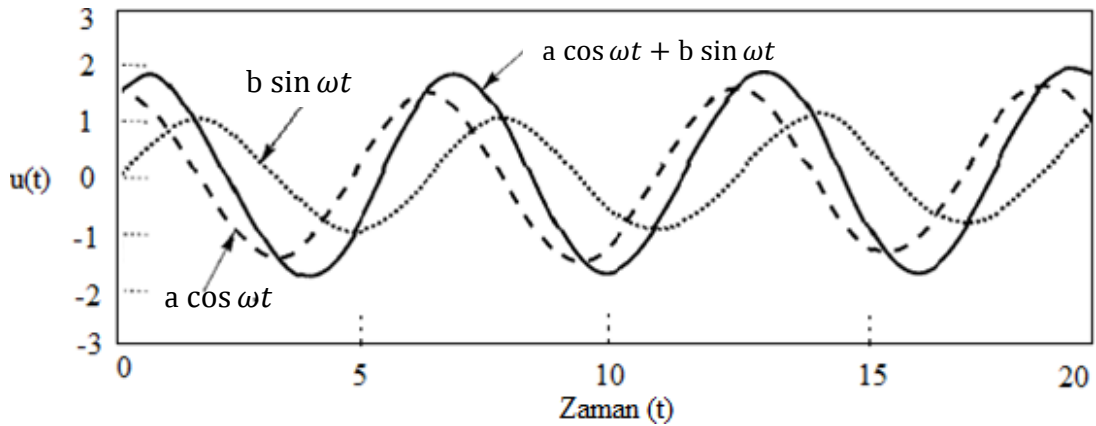
Basit harmonik hareket, bir sinüs fonksiyonu ile kosinüs fonksiyonunun toplamı olarak da ifade edilebilir:

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (2.5)$$

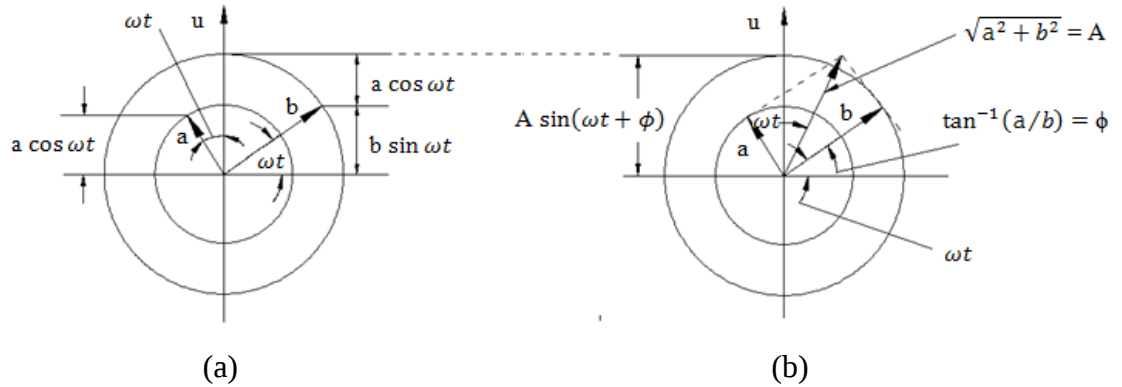
Şekil 2.6’da görüldüğü gibi, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının toplamı da ω dairesel frekansında salınan bir sinüsoiddir. Ancak, sinüsoidin genliği, sinüs ve kosinüs fonksiyonu genliklerinin basit bir toplamı değildir ve pikleri de sinüs ve kosinüs fonksiyonlarınınki ile aynı zamanda oluşmaz. Bu fonksiyonun dönen vektör şeklinde temsili Şekil 2.7’de görülmektedir. $\cos \theta = \sin(\theta + 90^\circ)$ olduğundan a uzunluğundaki dönen vektör b uzunluğundaki vektörün 90° önünde olmalıdır. a ve b vektörlerinin düşey bileşenleri sırasıyla $a \cos(\omega t)$ ve $b \sin(\omega t)$ ’dir. Şekil 2.7.(a)’da gösterildiği gibi, $u(t)$ ’nin toplam değeri $u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ ’dir. Hareket, a ve b vektörlerinin Şekil 2.7.(b)’de gösterilen bileşkesi dikkate alınarak, farklı bir şekilde ifade edilebilir. Bileşkenin uzunluğu $\sqrt{a^2 + b^2}$ olur ve $\phi = \tan^{-1}(a/b)$ açısı kadar b ’nin önünde gider. Bu nedenle, bileşkenin düşey bileşeni,

$$u(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2.6)$$

olur. Burada, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ hareketin genliği ve $\phi = \tan^{-1}(a/b)$ de faz açısıdır.



Şekil 2.6. Aynı frekansın sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının toplanması, aynı frekansta bir sinüsoid verir



Şekil 2.7. Basit harmonik hareketin dönen vektör ile temsili.

(a)'daki düşey sinüs ve kosinüs bileşenlerinin toplamı (b)'deki sinüs ve kosinüs bileşenlerinin bileşkesinin düşey bileşenine eşittir

Basit harmonik hareketin trigonometrik tanımlamaları, kavraması kolay olan fonksiyonları kullanır. Ancak, çoğu dinamik analizlerde trigonometrik notasyonun kullanımı, çok uzun ve meşakkatli denklemleri beraberinde getirir. Hareketler kompleks notasyon kullanılarak tanımlandığında, bu analizler çok daha kolaylaşmaktadır. Kompleks notasyon Euler kuralı kullanılarak trigonometrik notasyondan doğrudan elde edilebilir:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (2.7)$$

Burada, $i = \sqrt{-1}$ ve $e^{i\alpha}$ büyüklüğü bir kompleks sayıdır; gerçek kısım ve imajiner kısım olmak üzere iki kısımdan oluşur ve aşağıdaki gibi yazılabilir:

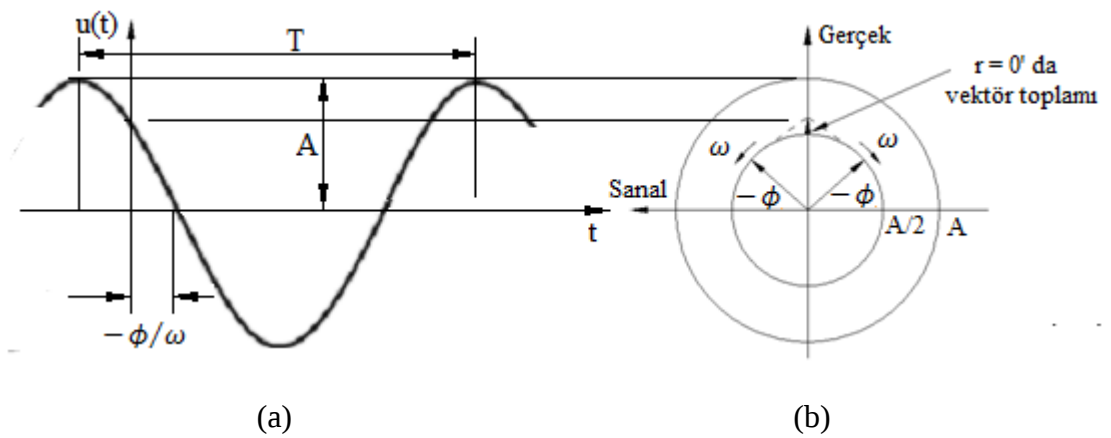
$$\text{Re}(e^{i\alpha}) = \cos \alpha \quad (2.8)$$

$$\text{Im}(e^{i\alpha}) = \sin \alpha \quad (2.9)$$

Euler kuralı kullanılarak, $\cos \alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$ ve $\sin \alpha = -i(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/2$ olduğu gösterilebilir. Bu ifadeleri (2.5) harmonik hareket denkleminde yerine koyarak,

$$u(t) = a \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} - b i \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} = \frac{a - i b}{2} e^{i\omega t} + \frac{a + i b}{2} e^{-i\omega t} \quad (2.10)$$

elde edilir. Yer deşiştirmenin bu şekli bir argand diyagramında dñnen bir çift vektñr olarak dñřñnñlebilir. Argand diyagramı, bir kompleks sayıyı birbirine dik gerçek ve sanal bileşenlerden oluşan bir vektñr olarak grafik şeklinde gñsterir. Gerçek eksen genellikle yatay olacak şekilde çizilse de, şekil 2.8.(a)'daki dñndñrñlmñř Argand diyagramı bu kompleks notasyonun basit harmonik hareketi nasıl tanımladığını anlamaya yardımcı olur. Argand diyagramında $e^{i\omega t}$ terimi, saatin tersi yñnde ω ağısal hızı ile dñnen birim uzunluktaki bir vektñr ile temsil edilir. $e^{-i\omega t} = e^{i(-\omega)t}$ dir ve bu nedenle saat yñnñnde $(-\omega)$ ağısal hızı ile dñnen birim uzunluktaki bir vektñr ile temsil edilir. Bu da saatin tersi yñnde ω ağısal hızı ile dñnmeye eşdeğerdur. Buradan hareketle, (2.10) eşitliğindeki ilk terim, ω ağısal hızı ile saat yñnñnde dñnen ve gerçek kısmı $(a/2)$ ve sanal kısmı da $(-b/2)$ den oluşan bir vektñr ile ve ikinci terimi de, ω ağısal hızı ile saatin tersi yñnde dñnen ve gerçek kısmı aynı fakat sanal kısmı $(b/2)$ olan bir diğer vektñr ile temsil edilebilir. Herbir vektñrñn uzunluğu $\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2} = 0.5 \sqrt{a^2 + b^2}$ dir. şekil 2.8.(a)'da gñsterildiđi gibi, vektñrlerin toplamı gerçektir. şekil 2.8.(b)'de vektñr toplamının $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ genliğinde ve ω dairesel frekansındaki bir basit harmonik hareketi nasıl tanımladığı gñrñlmektedir.



şekil 2.8. $A/2$ uzunluğuunda ve birbirine zıt yñnde dñnen vektñrlerin basit harmonik hareket üretmesi

Titreşimli hareketi tanımlayan tek parametre yer değiştirme değildir. Diğer parametreler çoğu zaman daha fazla ilgi odağı olmaktadır. Ancak; yer değiştirmenin zamana göre değişimi bilinirse, ilgi konusu diğer parametreler de belirlenebilir. Basit harmonik yer değiştirme ifadesinin türevi alınarak hız ve ivme ifadeleri elde edilir:

$$u(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{yerdeğiştirme} \quad (2.11)$$

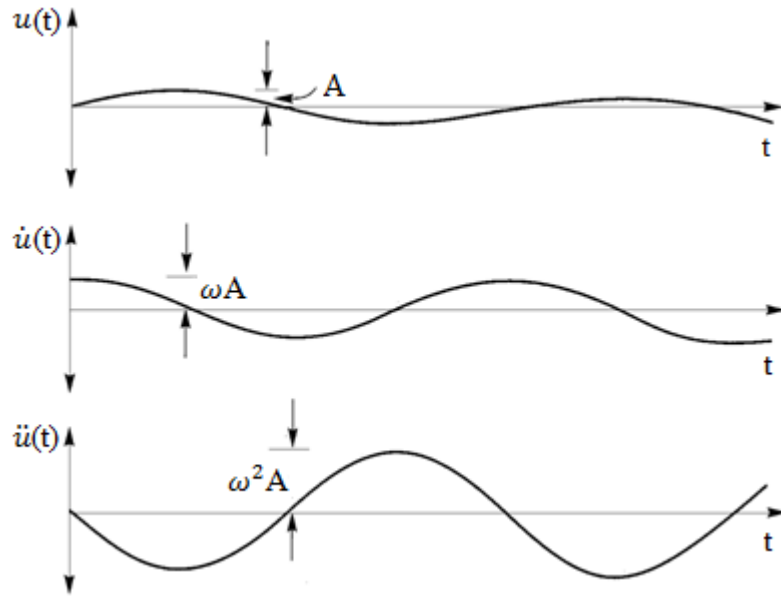
$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{hız} \quad (2.12)$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 u \quad \text{ivme} \quad (2.13)$$

Yer değiştirme genliği A olduğu zaman hız genliğinin ωA ve ivme genliğinin de $\omega^2 A$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu nedenle; bir harmonik hareketin yerdeğiştirme, hız ve ivme genlikleri arasında frekans ile genliklerden herhangi birinin veya sadece iki genliğinin bilinmesi durumunda, diğer büyüklüklerin hepsinin hesaplanabileceği bir ilişki vardır.

(2.10) eşitliği incelendiğinde; genliklerin farklı olmalarının yanında yerdeğiştirme, hız ve ivmenin birinin diğerine göre faz dışında olduğu görülür. (Şekil 2.9) Hızın yerdeğiştirmeye göre $\pi/2$ radyan veya 90° önde ve ivmenin de aynı miktarda hızın önünde olduğu görülebilir.

Şekil 2.9’da ivmenin hıza göre bir çeyrek devir, yer değiştirmeye göre de yarım devir önde gittiği görülmektedir.



Şekil 2.9. Yerdeğiştirme, hız ve ivmenin zamana göre değişimleri

Harmonik hareketlerde yer değiştirme, hız ve ivme arasındaki bu ilişki, hem trigonometrik hem de kompleks notasyonlarda aşağıdaki gibidir:

$$u(t) = A \sin(\omega t)$$

$$u(t) = A e^{i\omega t}$$

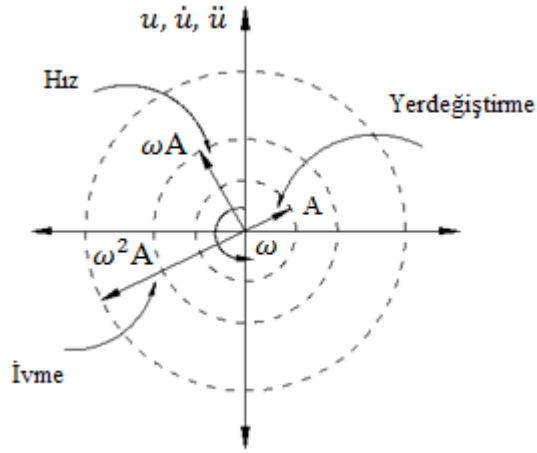
$$\dot{u}(t) = \omega A \cos(\omega t) = \omega A \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$\dot{u}(t) = i \omega A e^{i\omega t}$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t) = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi)$$

$$\ddot{u}(t) = i^2 \omega^2 A e^{i\omega t} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$$

Harmonik yer değiştirmeler, hızlar ve ivmeler arasındaki ilişkiler ω açısal hızında saatin tersi yönde dönen üç vektör şeklinde (Şekil 2.10) düşünülebilir. İvme vektörü hız vektörünün 90° (veya $\pi/2$ radyan) önünde ve yerdeğiştirme vektörünün de 180° (veya π radyan) önündedir.



Şekil 2.10. Yerdeğiştirme, hız ve ivmenin dönen vektör ile temsili

2.3. Ayrık Sistemlerin Dinamiği

Titreşen sistemlerin çoğu, kütle ve yay gibi ayrık elemanlardan oluşur veya en azından bu şekilde idealize edilebilir. Yapı dinamiğinde de yapı, kütsüz yaylarla bağlanan rijit kütleler olarak idealize edilmektedir.

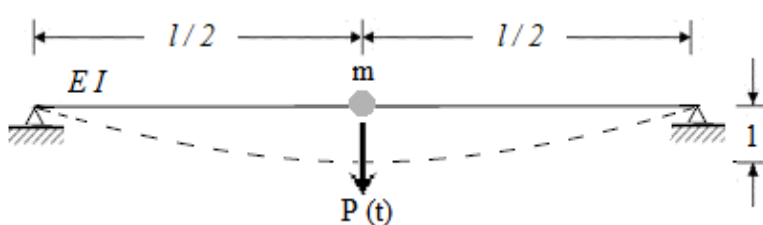
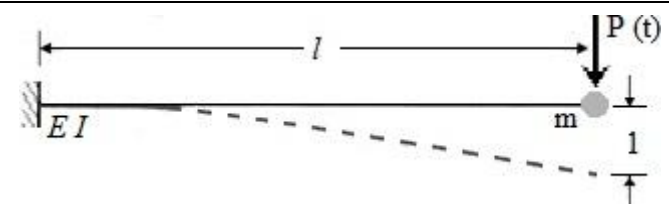
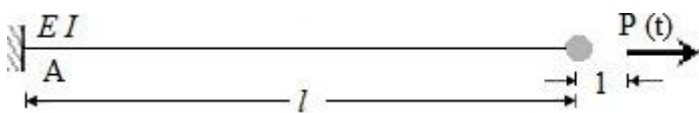
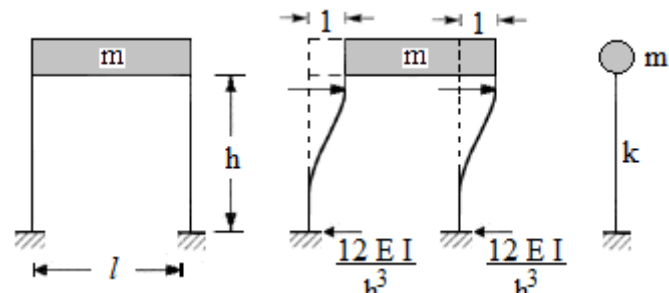
Yapının idealizasyonu için kullanılan titreşim elemanları aşağıda açıklanmaktadır:

Kütle: Ağırlığın yer ivmesine bölünmesiyle elde edilir. Gerçekte yapıda kütlelerin yayılı kütleler şeklinde belli noktalarda bağlandığı kabul edilmektedir. Kütle güçlü yer ivmesiyle ve yapının ivmesiyle ters orantılıdır.

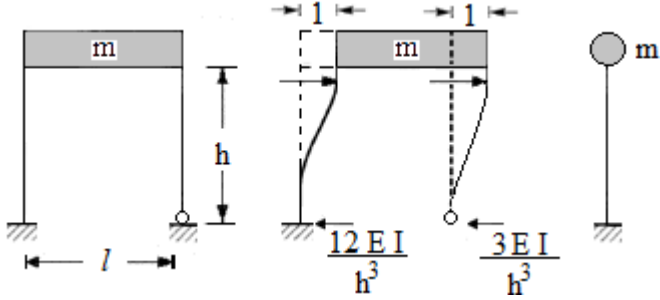
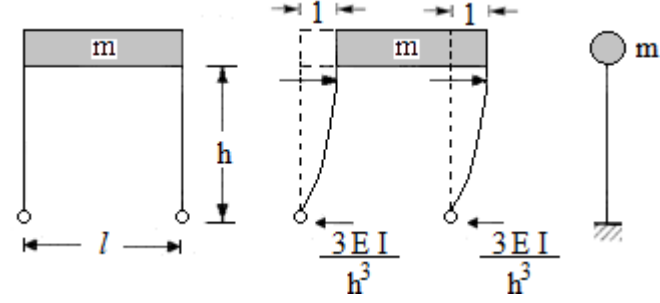
Yay: Sistemdeki potansiyel enerjinin depolandığı ortamdır. Sistemin denge konumundan farklı hareketlerine karşı oluşan geriye getirici kuvvetleri temsil eder. Betonarme yapılarda kolonların yay görevi yaptığı kabul edilmektedir. Yay kuvveti titreşim hareketinin yer değiştirmesiyle ters orantılıdır. Yay sabiti " k " ile gösterilmektedir. Çizelge 2.1'de idealize edilmiş sistemlere karşılık yay sabitleri tablo halinde verilmiştir.

Sönüm Elemanı: Sönüm, enerjinin yutulması olayını ifade etmektedir. Betonarme yapı sisteminde, dolgu duvarlar, yapı elemanlarının bağlantı noktaları ve yapıda oluşan çatlaklar sönüm olayını sağlamaktadırlar. Sönümleyiciler, dinamik sistemlerde iç sürtünmelerden, eşdeğer viskoziteden ve diğer enerji yutucu özelliklerden oluşarak titreşim genliğini azaltıcı yönde etki yaparlar. Sönüm kuvveti yapılarda titreşim hızı ile ters orantılıdır. Sönüm elemanı sabiti “c” ile gösterilmektedir.

Çizelge 2.1. İdealize edilmiş sistemler ve yay sabitleri (Çelebi ve Erdik 1977)

İdealize Edilmiş Sistem ve Yük Durumu	k
	$48 \frac{EI}{l^3}$
	$\frac{3EI}{l^3}$
	$\frac{EA}{l}$
	$\frac{(12 + 12)EI}{h^3}$ $= \frac{24EI}{h^3}$

Çizelge 2.1. (devam)

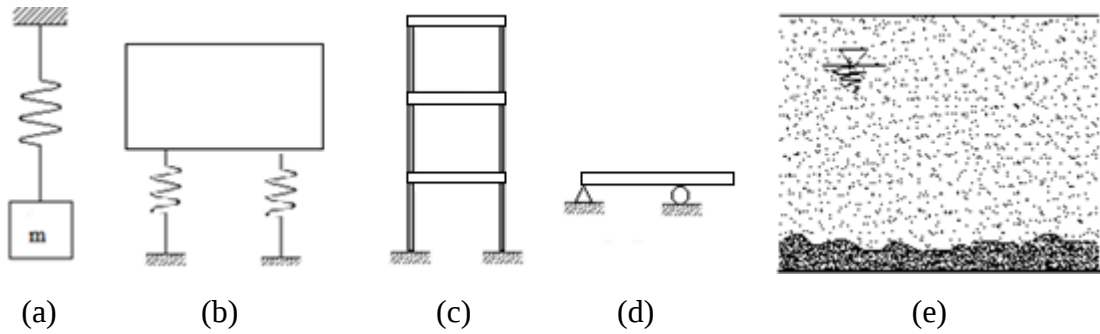
İdealize Edilmiş Sistem ve Yük Durumu	k
	$\frac{(12 + 3)EI}{h^3} = \frac{15 EI}{h^3}$
	$\frac{(3 + 3)EI}{h^3} = \frac{6 EI}{h^3}$

2.4. Titreşen Sistemler

Titreşen sistemler rijit sistemler ve uyumlu sistemler olmak üzere iki ana sınıfa ayrılabilir. Rijit sistem, içerisinde birim deformasyonların gelişmediği sistemlerdir. Bir rijit sistem içindeki tüm noktalar, birbiri ile aynı fazda hareket eder ve rijit cisim hareketinin tanımlanması nispeten basit bir kinematik işlemdir. Uyumlu sistemlerde ise, sistem içindeki farklı noktalar birbirinden farklı (faz dışında) hareket eder. Bir fiziksel sistem, belirli şartlar altında hemen hemen rijit sistem gibi davranabilirken, başka şartlarda uyumlu sistem olarak davranabilir.

Kütleleri sonlu sayıdaki noktalarda yoğunlaşmış olarak ele alınabilen sistemler ayrık sistemler olarak tanımlanmaktadır. Sürekli sistemlerde ise kütle tüm sisteme dağılmıştır. Bir sistemin kütlelerinin pozisyonunu tanımlamak için gerekli bağımsız değişkenlerin sayısı, sistemin dinamik serbestlik derecesinin sayısıdır.

En çok karşılaşılan sistemler Şekil 2.11’de değişik serbestlik dereceleri için verilmiştir. Ayrık sistemler sonlu sayıda serbestlik derecesine sahiptir; sürekli bir sistemin serbestlik derecesi sayısı ise sonsuzdur. Bazı analizlerde sürekli sistemler çok sayıda serbestlik derecesine sahip ayrık sistemler olarak idealize edilirken, bazı analizlerde de ayrık sistemler çok sayıdaki serbestlik derecesine sahip sürekli sistemler olarak idealize edilmektedir (Kayabalı 2003).



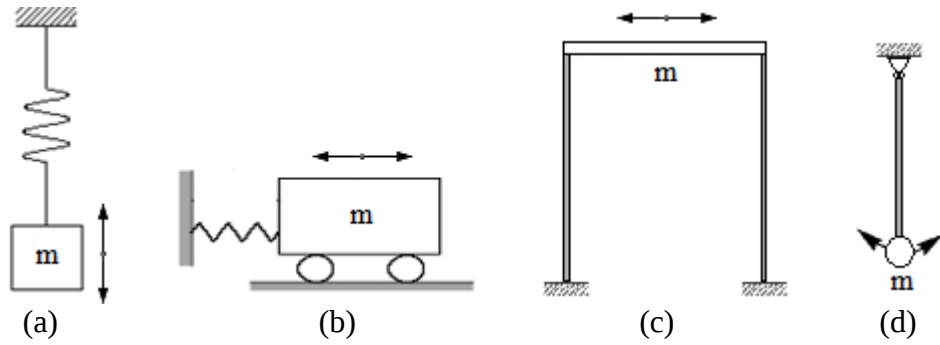
Şekil 2.11. Değişik sayıda serbestlik derecesine sahip titreşen sistemler.

(a) Bir serbestlik dereceli sistem, (b) İki serbestlik dereceli sistem, (c) Üç serbestlik dereceli sistem, (d) Sonsuz serbestlik dereceli sistem, (e) Sonsuz serbestlik dereceli sistem

2.4.1. Tek serbestlik dereceli sistemler

Pozisyonu bir değişken ile tam anlamıyla tanımlanabilen ayrık sistemler tek serbestlik dereceli (TSD) sistem olarak anılmaktadır. Şekil 2.12. (a-c)’de görülen tek serbestlik dereceli sistemlerde olduğu gibi, bu tek dereceli serbestlik doğrusal (translational) yer değiştirmeyi veya Şekil 2.12.(d)’deki sarkaç durumunda olduğu gibi dönmeli (rotational) yer değiştirmeyi temsil edebilir.

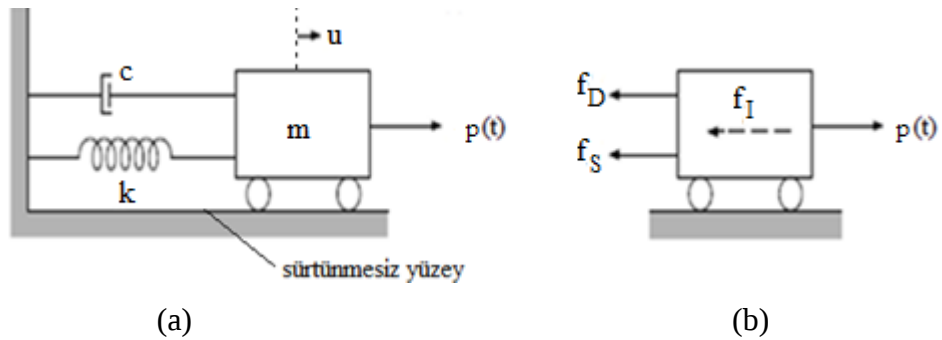
Tipik bir tek serbestlik dereceli (TSD) sistem, Şekil 2.13’te görüldüğü gibi; bir rijit kütle (m), bir rijitlik yayı (k) ve bir viskoz sönümleme katsayılı sönümleyiciden (c) oluşur. Kütle; yaya ve sönümleyiciye paralel bağlanmıştır ve $p(t)$ dış yüküne maruz kalmaktadır. Yay ve sönümleyicinin kütsüz olduğu ve yerdeğiştirme orjininin, statik denge pozisyonu ile aynı olduğu varsayılır.



Şekil 2.12. Değişik tek serbestlik dereceli sistemler

2.4.2. Tek serbestlik dereceli sistemler için hareket denklemi

Tek serbestlik dereceli (TSD) sistemlerin çoğu dışarıdan uygulanan yüklerin etkisi altındadır. Şekil 2.13'teki gibi bir tek serbestlik dereceli (TSD) sistemin dinamik tepkisi bir hareket denklemi tarafından kontrol edilir. Hareket denklemi çok değişik şekillerde elde edilebilir. Burada; basit, kuvvet denge yaklaşımı kullanılacaktır.



Şekil 2.13. Dış dinamik yük $p(t)$ 'ye maruz kalan sönümlü TSD sistem

2.4.2.a. Hareket denklemi (Dışarıdan yükleme)

Bir tek serbestlik dereceli (TSD) sistemin kütlesine dinamik yükleme yapıldığı zaman (Şekil 2.13.(a)), hareket etme eğilimi kütlenin ataleti ile yay ve sönümleyici içinde gelişen kuvvetler tarafından kısıtlanır.

Bu nedenle, pozitif x yönünde etkiyen $p(t)$ dış kuvvetine negatif x yönünde karşı koyan üç kuvvet vardır: atalet kuvveti f_I , viskoz sönümlleme kuvveti f_D ve elastik yay kuvveti f_S (Şekil 2.13.(b)).

Hareket denklemi, bu kuvvetlerin dinamik dengesi cinsinden ifade edilebilirler:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (2.14)$$

Bu kuvvetler kütlenin hareketi cinsinden de ifade edilebilir. Newton'un ikinci yasasına göre, bir kütle üzerine etkiyen atalet kuvveti o kütlenin momentum değişim hızına eşittir. Kütlesi sabit olan sistemde aşağıdaki gibi olur:

$$f_I(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{du(t)}{dt} \right) = m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = m \ddot{u}(t) \quad (2.15)$$

Viskoz bir sönümleyici için, sönümlleme kuvveti kütlenin hızı ile orantılıdır:

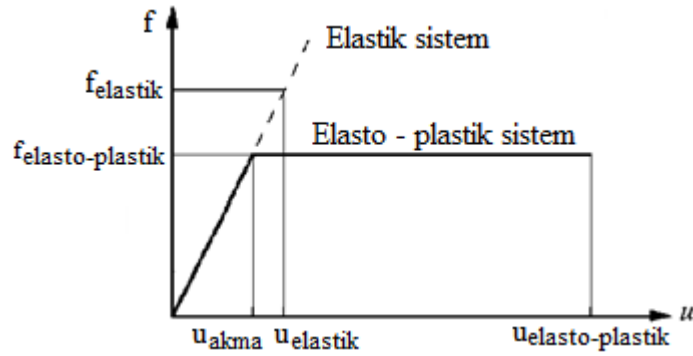
$$f_D(t) = c \frac{du(t)}{dt} = c \dot{u}(t) \quad (2.16)$$

Yay ile sağlanan kuvvet de, yay rijitliği ile yerdeğiştirme miktarının çarpımına eşittir:

$$f_S(t) = k u(t) \quad (2.17)$$

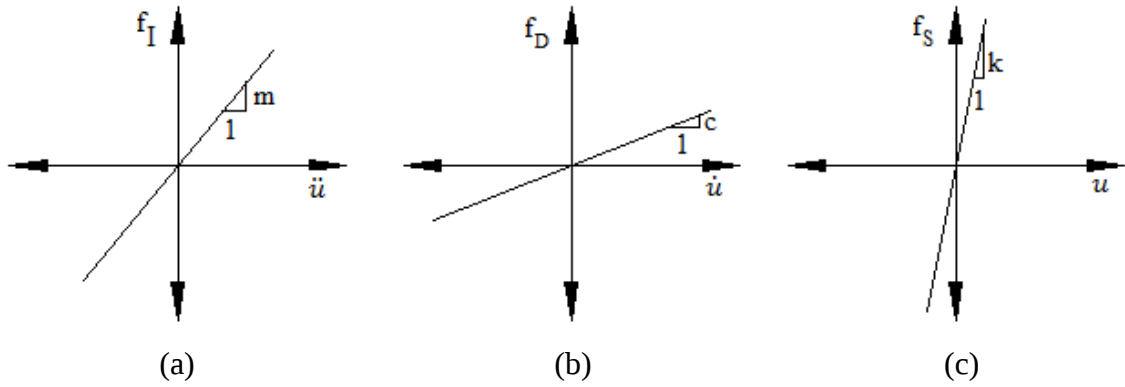
Yay kuvvetini denklem (2.17) ile ifade edebilmek için yapının doğrusal–elastik davranış göstermesi gerekmektedir.

Deprem etkisi altında aynı kütle ve sönüme sahip yapının ideal elasto–plastik olarak vereceği tepki ile elastik olarak vereceği tepkinin değişimi de Şekil 2.14'te sunulmuştur. Görülebileceği gibi başlangıçtaki yükleme koşullarında elastik sistem, doğrusal olmayan elasto–plastik sistemin rijitliğine sahip olmaktadır (Chopra 2001).



Şekil 2.14. Elasto-plastik ve elastik sistemler için yay kuvveti ve yer değıştirmenin değışimi

Tüm kuvvetlerin davranışı Şekil 2.15’de şematik olarak gösterilmiştir. Atalet kuvveti ivme ile orantılıdır ve oransallık sabiti de kütledir. Benzer şekilde viskoz sönümlleme kuvveti ve elastik yay kuvveti de hız ve yer değıştirme ile orantılıdır ve oransallık sabitleri de sırayla sönümlleme ve yay katsayılarıdır.



Şekil 2.15. (a) Atalet, (b) viskoz ve (c) elastik kuvvetlerin sırayla ivme, hız ve yer değıştirme ile değışimi

(2.15) ve (2.16) eşitliklerini (2.14)’de yerlerine koyarak, tek serbestlik dereceli (TSD) sistem için hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = p(t) \quad (2.18)$$

Bu ikinci derece diferansiyel denklem, salınan sistemlerin davranışını tanımlamada yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Hareketin diferansiyel denklemi doğrusaldır (yani; tüm terimlerin sabit katsayısı vardır). Bu doğrusallık, analitik çözümün kolaylıkla elde edilmesini sağlar ve daha önemlisi de, süperpozisyon ilkesinin kullanılmasına izin verir. Katsayılarından biri sabit olmadığı zaman, davranış doğrusal değildir ve çözüm de çok zorlaşır.

2.4.2.b. Hareket denklemi: mesnetlerin titreşimi (zemin sarsıntısı)

Yapılarda dinamik yükleme çoğu zaman dinamik dış yükler yerine sistemin mesnetlerinin titreşiminden ileri gelir. Böyle sistemlerin dinamik tepkisini değerlendirmek için, zemin sarsmasından ileri gelen yükleme için, bir hareket denkleminin geliştirilmesi gereklidir. Şekil 2.16.(a)'da gösterilen sönümlü tek serbestlik dereceli (TSD) sistem ele alındığında: $u_b(t)$ zemin dinamik sarsmasına maruz kaldığı zaman şekil değiştirecek ve belirli t zamanındaki görünümü Şekil 2.16.(b)'deki gibi olacaktır. Kütlenin toplam yerdeğiştirmesi $u_t(t)$, mesnetin yerdeğiştirmesi $u_b(t)$ ve mesnete göre kütlenin göreceli yerdeğiştirmesi $u(t)$ olmak üzere iki kısma ayrılabilir. Atalet kuvveti kütlenin toplam ivmesine bağlı iken, viskoz sönümleme ve elastik yay kuvvetleri de sırayla göreceli hız ve yerdeğiştirmeye bağlı olacaktır. Şekil 2.16.(b)'deki notasyonu kullanarak; hareket denklemi,

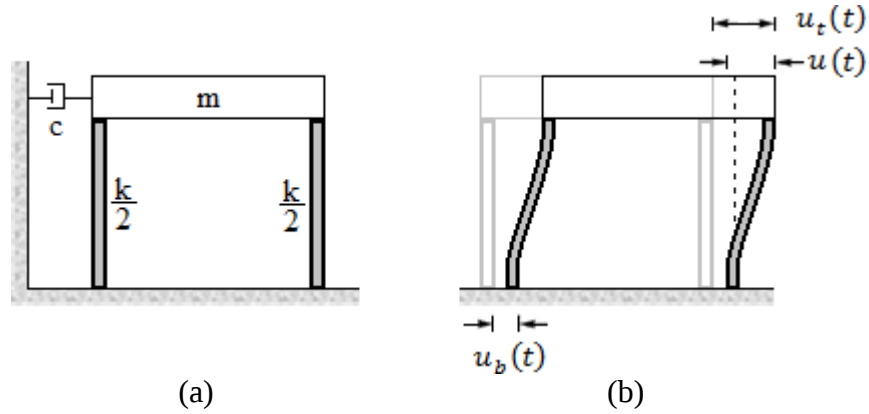
$$m \ddot{u}_t + c \dot{u} + k u = 0 \quad (2.19)$$

veya $\ddot{u}_t(t) = \ddot{u}_b(t) + \ddot{u}(t)$ yerdeğiştirmesini yaparak,

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{u}_b \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir. Başka bir ifadeyle; sistemin zemin sarsmasına tepkisi o sistemin tabanının sabit olduğu ve kütlenin de $p_t = -m \ddot{u}_b(t)$ dış yüklemesine maruz kaldığı durumdaki tepkiye eşdeğerdir.

Bu nedenle, dış yüklemeye maruz kalan bir tek serbestlik dereceli (TSD) sistemin tepkisinde kullanılan herhangi bir çözüm, sistemin zemin sarsmasına tepkisini değerlendirmede kullanılabilir.



Şekil 2.16. Zemin sarsmasına maruz kalan sönümlü TDS sistem

2.4.3. Doğrusal tek serbestlik dereceli sistemlerin tepkisi

Doğrusal bir tek serbestlik dereceli (TSD) sistemin dinamik tepkisini değerlendirmek için, diferansiyel hareket denklemi çözülmelidir. Tek serbestlik dereceli (TSD) sistemlerin dinamik tepkilerinin yaygın olarak hesaplandığı birkaç değişik durum bulunmaktadır. Zorlanmış titreşim, kütlenin belirli bir dış yüklemeye maruz kaldığı durumda gelişir. Yükleme periyodik veya periyodik olmayan şekilde olabilir ve kütleye uygulanan gerçek fiziksel kuvvete yada bilinen bir düzeydeki zemin sarsmasına karşılık gelebilir. Serbest titreşim, dış yükleme veya zemin sarsmasının olmadığı durumda gelişir. Kütlenin belirli bir yerdeğiştirmeden sonra serbest kalmasından ileri gelebilir veya geçici zorlanmış titreşim sona erdikten sonra oluşabilir. Değişik sönüm ve dış yükleme durumlarına göre hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

1. Sönümsüz serbest titreşimler: $c = 0$ $p(t) = 0$
2. Sönümlü serbest titreşimler: $c > 0$ $p(t) = 0$
3. Sönümsüz zorlanmış titreşimler: $c = 0$ $p(t) \neq 0$
4. Sönümlü zorlanmış titreşimler: $c > 0$ $p(t) \neq 0$

2.4.3.a. Sönümsüz serbest titreşimler

Bir tek serbestlik dereceli (TSD) sistem dış yükler etkisi altında salınmadığı zaman serbest titreşime maruz kalır. Sönümleme olmadığı ($c = 0$) zaman hareket denklemi (sönümsüz serbest titreşim için) aşağıdaki gibi olur:

$$m \ddot{u} + k u = 0 \quad (2.21)$$

yada iki tarafı da kütleyle bölmek suretiyle,

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} u = 0 \quad (2.22)$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü:

$$u = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (2.23)$$

olup, burada: C_1 ve C_2 sabitlerinin değeri, sistemin başlangıç şartlarına bağlıdır. $\sqrt{(k/m)}$ büyüklüğü çok önemlidir. Sistemin sönümsüz doğal frekansını temsil eder:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.24)$$

Doğal frekans f_0 ve doğal periyot T_0 aşağıdaki gibi yazılabilir (Kayabalı 2003):

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.25)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.26)$$

Burada tek serbestlik dereceli sistemin titreşiminden faydalanarak doğal periyoda etki eden faktörler şu şekilde açıklanabilir:

Çizelge 2.1’de görülebileceği gibi taşıyıcı elemanın ucunda, düşey ötelenme ve dönme sıfır kabul edilerek, yalnız yatay ötelenmeye müsaade edilirse; m kütlelerinin yatay olarak birim boy ötelenmesi halinde, çubuğun kütleye etkileyeceği kuvvet, $k = 12EI/h^3$ ’tür. Bu değeri, (2.26) denkleminde yerine koyarak, sistemin doğal periyodu için

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{12 \frac{EI}{m h^3}}} \quad (2.27)$$

bulunur. Taşıyıcı elemanın ucunda hem ötelenme, hem dönme olması durumunda, yani elemanın dönme yapabileceği kabul edilirse, birim yatay ötelenme için kütle üzerine etkiyen kuvvet $k = 3EI/h^3$ ’tür. Bu değeri, (2.26) denkleminde yerine koyarak, sistemin doğal periyodu için

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{3 \frac{EI}{m h^3}}} \quad (2.28)$$

elde edilir ki, aynı kütle için (2.27) denkleminde bulunan değer iki katıdır. Bu iki periyodun karşılaştırılmasından şu genel sonuçları çıkarmak mümkündür:

- Bir taşıyıcı sistemin rijitliği arttıkça, doğal periyodu azalır. Aksine, ne kadar esnek ve fazla deformasyon kabiliyetine sahip ise, periyodu o nispette uzundur.
- Bir taşıyıcı sistemin boyu ve benzer şekilde bir binanın yüksekliği arttıkça doğal periyodu büyür.

- Bir taşıyıcı sistemin, doğal periyodu hem taşıyıcı elemanların rijitliğine, hem de kütlesine bağlıdır. Periyot, rijitlikle ters, kütle ile doğru orantılıdır.
- Bir taşıyıcı sistemin doğal periyoduna sadece, titreşim yaptığı doğrultulardaki rijitlikleri değil, titreşim olmayan ötelenme ve dönme doğrultularındaki rijitlikleri de etki eder. Bu sebepten, aynı kütle için, (2.27) ve (2.28) denklemlerinde ayrı iki periyot değeri bulunmuştur (Tezcan 1970).

(2.24) eşitliğini hareket denkleminin çözümündeki [(2.23)' de] yerine koyarak,

$$u = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t \quad (2.29)$$

elde edilir. Bu ifade, serbest titreşimdeki sönümsüz bir sistemin kendi sönümsüz doğal frekansında harmonik olarak salınacağını ifade eder. Başlangıç ($t = 0$) şartlarından ilk yerdeğiştirme u_0 ve ilksel hız $\dot{u}_0$ ile temsil edildiği varsayılarak C_1 ve C_2 hesaplanabilir. O halde,

$$u_0 = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2 \quad (2.30)$$

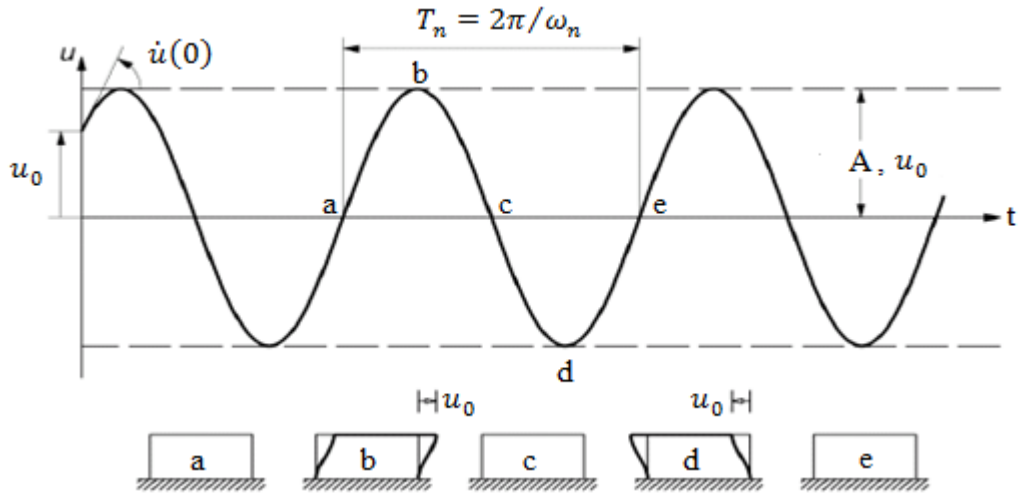
$$\dot{u}_0 = \omega_n C_1 \cos(0) - \omega_n C_2 \sin(0) = \omega_n C_1 \quad (2.31)$$

olur. Bu nedenle, $C_1 = \dot{u}_0 / \omega_n$ ve $C_2 = u_0$ 'dır. Bu durumda bir tek serbestlik dereceli (TSD) sistemin sönümsüz serbest titreşim tepkisinin çözümü aşağıdaki gibi olur:

$$u = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + u_0 \cos \omega_n t \quad (2.32)$$

Böyle bir sistemin tepkisi Şekil 2.17'de gösterilmiştir. Sistemin statik denge konumundan (deforme olmamış, $u = 0$), titreşimli (veya salınımlı) harekete maruz kaldığını gösterir: bu hareket her $2\pi/\omega_n$ saniyede bir tekrarlanmaktadır.

t_1 ve $t_1 + 2\pi/\omega_n$ anlarında kütlenin durumu (deplasman ve hız) aynıdır; $u(t_1) = u(t_1 + 2\pi/\omega_n)$ ve $\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_1 + 2\pi/\omega_n)$ 'dir. Yerdeğiştirme – zaman eğrisindeki a – b – c – d – e noktaları sistemin bir serbest titreşim döngüsünü tanımlamaktadır. ‘a’ statik denge konumundaki kütle, sağa doğru hareket eder ve ‘ u_0 ’ maksimum pozitif yerdeğiştirmesini yaparak ‘b’ konumuna ulaşır. Bu süre sonunda hız sıfırdır ve yerdeğiştirme azalmaya başlar, kütle denge konumu ‘c’ye geri döner. Bu konumdan sonra hız maksimum seviyeye ulaşır: kütle sola doğru hareket eder ve ‘ $-u_0$ ’ maksimum negatif yerdeğiştirmesini yaparak ‘d’ konumuna ulaşır. Yine bu süre sonunda hız sıfırdır ve yer değiştirme azalmaya başlar, kütle denge konumu ‘e’ye geri döner. Titreşim döngüsü bu şekilde tamamlanır.



Şekil 2.17. İlksel yer değiştirme u_0 ve ilksel hız $\dot{u}_0$ ile birlikte sönümsüz serbest titreşim yer değiştirmesinin zamana bağlı değişimi (Chopra 2001)

(2.6) eşitliğine tekrar dönerek, serbest titreşim tepkisi,

$$u = A \sin(\omega_n t + \phi) \quad (2.33)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki genlik A ve faz açısı ϕ 'nin tanımları şu şekildedir:

$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.34)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{u_0 \omega_n}{\dot{u}_0} \quad (2.35)$$

Sönümsüz bir sistemin hareket denkleminin çözümü, sistemin tepkisinin ilksel yer değiştirme ve hıza bağlı olduğunu ifade eder. Genliğin zaman içinde sabit kaldığına dikkat edilmelidir. Sönümsüz sistemde enerji kaybı olmadığından, sonsuza dek salınacaktır.

2.4.3.b. Sönümlü serbest titreşimler

Gerçek sistemlerde enerjinin kaybolması sürtünme, ısı oluşumu, hava direnci veya diğer fiziksel mekanizmalardan ileri gelebilir. Bu nedenle, sönümlü bir tek serbestlik dereceli (TSD) sistemin serbest titreşim tepkisi zamanla azalacaktır. Sönümlü serbest titreşimler için hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0 \quad (2.36)$$

ya da ‘‘m’’ ile bölüp [(2.39) eşitliğinde] $k = m \omega_n^2$ değişikliğini yaparak,

$$\ddot{u} + 2 \frac{c}{2\sqrt{k m}} \omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad (2.37)$$

Kritik sönümleme katsayısı c_{cr} olarak adlandırılan $2\sqrt{k m}$ büyüklüğü, sönümleme oranı ξ ’nin, sönümleme katsayısının kritik sönümleme katsayısına oranı olarak tanımlanmasına izin verir; yani,

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{k m}} = \frac{c}{2m \omega_n} = \frac{c \omega_n}{2k} \quad (2.38)$$

Bu notasyonla, hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad (2.39)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü, sönümleme oranının değerine bağlıdır. $\xi < \%100$ ($c < c_{cr}$) olduğu zaman sistem az sönümlenmelidir. $\xi = \%100$ ($c = c_{cr}$) olduğunda sistem kritik sönümlenmelidir ve $\xi > \%100$ ($c > c_{cr}$) olduğu zaman sistem aşırı sönümlenmelidir. Bu durumların her biri için ayrı çözümler elde edilmelidir. Fakat, pratikte ilgi konusu olan yapılar az sönümlenmelidir.

Sönümlemenin kritik değerin altında olduğu durum için hareket denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$u = e^{-\xi\omega_n t} [C_1 \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) + C_2 \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)] \quad (2.40)$$

$e^{-\xi\omega_n t}$ üssel terimi zamanla küçülür ve sonunda sifıra yaklaşır. Serbest titreşimdeki az sönümlü sistemlerin tepkisinin zaman içinde üssel olarak azalacağını ifade eder. Azalma hızı sönümleme oranına bağlıdır; küçük ξ için tepkinin azalması yavaş olur ve büyük ξ değerlerinde ise azalma daha çabuk olur. Sistemin sönümlü doğal frekansını $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ olarak tanımladıktan sonra çözüm aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$u = e^{-\xi\omega_n t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) \quad (2.41)$$

Sönümlü bir sistemin doğal frekansı sönümsüz bir sisteminkinden daima küçüktür ve artan sönümleme oranı ile birlikte azalır.

C_1 ve C_2 katsayıları sönümsüz durumdaki ile aynı tarzda başlangıç şartlarından belirlenebilir. İlk yerdeğiştirme ve ilksel hız şu şekildedir:

$$u_0 = e^{-\xi \omega_n (0)}(C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0)) = C_2 \quad (2.42)$$

$$\dot{u}_0 = e^{-\xi \omega_n (0)}[\omega_d C_1 \cos \omega_d(0) - \omega_d C_2 \sin \omega_d(0)]$$

$$-\xi \omega_n e^{-\xi \omega_n (0)}[C_1 \sin \omega_d(0) + C_2 \cos \omega_d(0)] = \omega_n C_1 - \xi \omega_n C_2 \quad (2.43)$$

Bu nedenle, $C_1 = (\dot{u}_0 + \xi \omega_n u_0)/\omega_d$ ve $C_2 = u_0$ 'dır. Burada sönümlü serbest titreşimler için çözüm,

$$u = e^{-\xi \omega_n t} \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega_n u_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + u_0 \cos \omega_d t \right) \quad (2.44)$$

şeklinde ifade edilebilir. Az sönümlü bir sistemin serbest titreşim tepkisi Şekil 2.19'da gösterilmiştir. Genliğin zaman içindeki üssel azalımına dikkat edilmelidir. Peş peşe gelen herhangi iki pikin oranı,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \exp \left(2\pi\xi \frac{\omega_n}{\omega_d} \right) \quad (2.45)$$

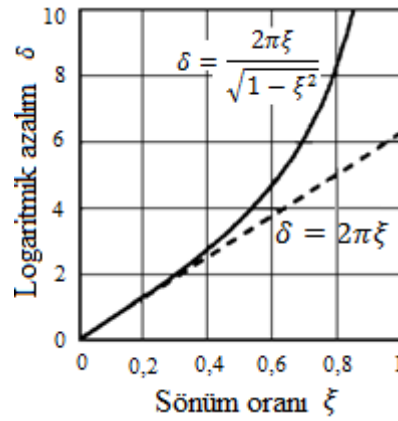
olur. Logaritmik azalım $\delta = \ln(u_n/u_{n+1})$ olarak tanımlanırsa,

$$\delta = 2\pi\xi \frac{\omega_n}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.46)$$

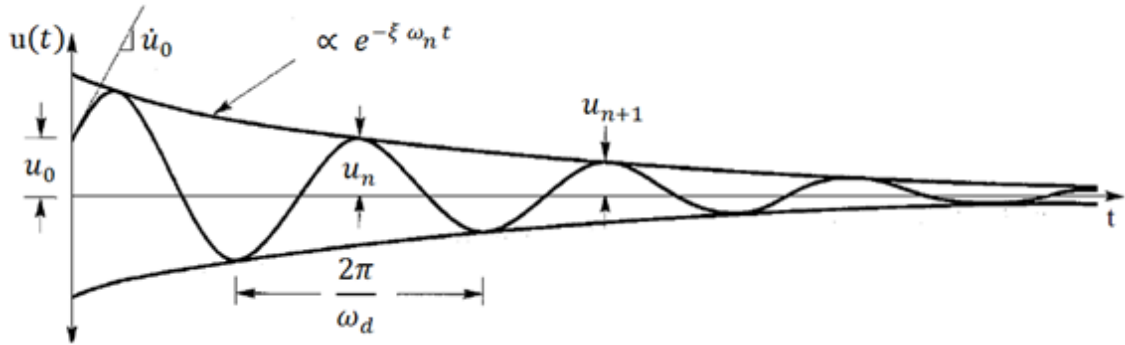
olur. Terimler yeniden düzenlendiğinde sönümleme oranı logaritmik azalımdan belirlenebilir.

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (2.47)$$

δ 'nın küçük değerlerinde $\xi \simeq \delta/2\pi$ 'dir. Bu nedenle, bir tek serbestlik dereceli (TDS) sistemin sönümlleme oranını hesaplamanın kolay bir yolu, bir serbest titreşim deneyi yapmaktır. Bu deneyde logaritmik azalım, sistemin bir u_0 ilksel yerdeğiştirmesiyle yerdeğiştirdiği ve bir $\dot{u}_0$ ilksel hızı ile serbest bırakıldığı zaman ölçülür (Kayabalı 2003).



Şekil 2.18. Logaritmik azalım ve sönümlleme oranı arasındaki kesin ve yaklaşık ilişki grafiği



Şekil 2.19. İlksel yerdeğiştirme u_0 ve ilksel hız $\dot{u}_0$ ile birlikte sönümlü serbest titreşimin zamana bağlı değişimi

2.4.4. Çok serbestlik dereceli sistemler

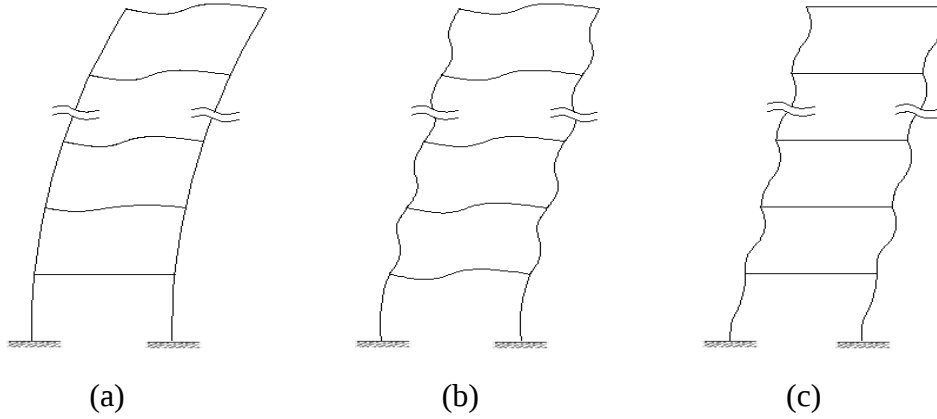
Çok serbestlik dereceli olması ile ifade edilmek istenen husus, sistemin seçilişi ve kuruluşu icabı bir veya birden çok katlardan oluşması ile beraber sistemin eksenleri

doğrultusundaki (translasyon) titreşimleri yanında, rotasyon (dönme) veya torsiyon (burulma) titreşimlerini de aynı zamanda yapabilme olasılığının mümkün olmasıdır (Leylek 2005).

Yapısal sistemlerde kütle ve rijitlik, genelde bütün yapı üzerine dağılmış olarak bulunur. Bu sistemlerin dinamik hareketlerini belirlemek için, sonsuz sayıda koordinata, bir başka deyişle sonsuz sayıda serbestlik derecesine ihtiyaç vardır. Sürekli sistemler olarak adlandırılan bu sistemlerin analitik çözümleri mevcuttur. Fakat bu çözümlerin karmaşık sistemlere uygulanması zordur ve genelde mümkün değildir. Bu sebeple sürekli sistemler, kütlelerin belirli noktalarda toplanmasıyla idealleştirilebilir ve çok serbestlik dereceli sistem olarak ifade edilebilir. Bu yaklaşımın başarısı, sistemdeki kütle ve rijiditenin dağılımı ile beraber yapıya etkiyen dış kuvvetin yani yer hareketinin zaman ve mekandaki değişimi ile de yakından ilgilidir. Yapısal sistemdeki fiziksel zorlamalar ve yer hareketinin nitelikleri sistemin ancak belirli şekillerde davranışına izin veriyorsa, sistemin çok serbestlik dereceli sistem olarak modellendirilmesi, yapı davranışını iyi bir yaklaşıklık ile temsil edebilir (Erdik ve Yüzügüllü 1980).

Yapılarda en yaygın olarak kullanılan taşıyıcı sistemler, kolon ve kirişler ile kirişlere oturan plaklardan oluşan uzay çerçeve sistemlerdir. Uzay çerçeve sistemlerin analizi uzun olduğundan genelde birbirine ortogonal düzlem çerçevelerden teşekkül eden taşıyıcı sistemin çözümünü iki istikamette mevcut düzlem kabulü ile yapmak, statik ve dinamik hesabı oldukça kolaylaştırır.

Şekil 2.20’de gösterilen ve mühendislik yapılarının büyük bir çoğunluğunu kapsayan yapı sistemleri birbirlerine kütleleri ihmal edilebilen yay ve söndürücü elemanlarla (kolonlar) bağlı toplanmış kütleler (kat kütleleri) düzeni şeklinde çok serbestlik dereceli olarak modellendirilebilirler.



Şekil 2.20. Çok serbestlik dereceli yapı modelleri

Belirli yaklaşıklıklarla yatay yükler etkisi altında konsol eğilme kirişi şeklinde davranan ve taşıyıcı sistemi perde duvarlardan oluşan sistemler Şekil 2.20.(a)'da belirtilmiştir. Bu sistemde düşey elemandaki yer değiştirmeler sürekli bir fonksiyon şeklindedir ve bu tip davranış gösteren çerçevelerin sürekli sistem olarak modellendirilmesi daha gerçekçi olur. Şekil 2.20.(b)'de verilen çerçevede ise yatay ve düşey elemanların rijitlikleri birbirine yakın olduğundan, elemanların kat hizalarındaki yatay ötelemeleri ile elemanların düğüm noktalarındaki dönmeleri de sistemin davranışında etkilidir. Bu sebeple çerçeve idealleştirilirken, yatay yöndeki serbestlikler ve dönme serbestliklerinin göz önüne alınması gerekir. Şekil 2.20.(c)'de verilen çerçeve sisteminde katlardaki kiriş ve döşeme rijitlikleri, kolon rijitliklerine göre çok büyük olduğundan sistem kat hizalarında, kirişlerde dönme olmadan sadece yatay öteleme yapar. Her bir kat ötelemesi sadece o kattaki kesme kuvvetine bağlı olmaktadır. Şekil 2.20.(c)'de verilen çerçeve tipinde sadece kat hizalarındaki yatay yer değiştirme serbestliklerini almak, kütleleri kat hizalarında toplanmış kabul etmek ve katlardaki kolon rijitliklerini toplayarak sistemi çok serbestlik dereceli toplu kütleli sistem olarak modellemek mümkündür (Erdik ve Yüzügüllü 1980).

Hesap kolaylığı yönünden ve neticelerin kesin hesap şeklinden hiçbir değer kaybetmeden yapılan kabul şekilleri burada açıklanmıştır.

Şekil 2.20.(c)'de verilen kat hizalarındaki kiriş - döşeme elemanı rijitlikleri kolonlarına göre oldukça büyük olan ve bu sebepten kiriş - döşeme elemanlarının dönme deformasyonu ihmal edilebilen yapının taşıyıcı sistemini oluşturan çerçeveler, kesme tipi çerçeve sistemi olarak isimlendirilir.

Şekil 2.20.(b)'de verilen eğilme tipi çerçeve sistemleri ise normal olarak dinamik yönden en fazla titreşim serbestliği olan sistemlerdir. Bu tip sistemlerin yatay yükler altındaki deformasyonları, teknik deyimle yan ötelenmeleri kesme tipi çerçeve sistemlerine göre ayrıcalık gösterir. Bu durum bilhassa titreşim esnasında da etkisini gösterir.

Yatay kirişlerin uç noktaları aynı zamanda şekil düzlemine dik eksen etrafında dönmelere, teknik deyimle rotasyon (dönme) etkisine de maruz kalırlar. Bundan dolayı her kattaki kolon uçlarına ait kesme kuvvetlerinin birbirinden bağımsız kalacağı düşünülemez. Bununla birlikte bu çeşit sistemlerde 1. Mod titreşim türü yanında 2. Mod ve 3. Mod titreşimlerinin kesit iç kuvvetlerine katkıları da ihmal edilemeyecek büyüklükte olabilmektedir. Modların birleştirilmesi (modal analiz) de bu bakımdan önem kazanmaktadır.

Eğilme tipi çerçeve sistemlerinde, kesme tipi çerçeve sistemlerinde olduğu gibi, kütlelerin idealize edilerek kat hizalarında toplandığı kabul edilerek, bir an için yalnız bir katın hizasında birim ötelemenin mevcut olduğu ve diğer bütün katların sabit kaldığı göz önüne getirilirse, diğer bütün kat hizalarında farklı kesme kuvvetlerinin olduğu görülür. Her kata isabet eden reaksiyon kuvvetleri kolon alt ve üst noktalarında kesme kuvvetlerinin toplamından ileri geldiği düşünülürse, bu reaksiyonlar (+) veya (-) olarak çeşitli ön işaretler ile oluşurlar.

Bu tip taşıyıcı sistemin yatay doğrultudaki titreşimi söz konusu olduğu zaman, dinamik denge denklemlerinin kuruluşunda her kat kesme kuvvetleri elastik yay kuvvetlerini doğrudan belirlediği için çok büyük rol oynarlar. Bundan dolayı da, $[K]$ rijitlik matrisinin yazılımında komple doluluk meydana gelir.

Kesme tipi çerçeve sistemlerinde dinamik denge denklemleri yazılırken, D'Alembert prensibi icabı ve her kat hizasındaki kütleler için olmak üzere; her kata ait denge denklemlerinde yalnızca bir alt ve bir üst katlara ait kolon kesme kuvvetlerinin etkileri mevcuttur. Eğilme tipi çerçeve sistemlerinde ise her katta bulunan kütleler için oluşturulacak dinamik denge denklemlerinde mevcut diğer katlarında etkileri gözönünde tutulur.

Kesme tipi çerçeve sistemlerinin getirdiği kolaylıklardan dolayı ve bir yaklaşım olarak, eğilme tipi çerçeve sistemlerinde,

- a) Normal kuvvetlerden dolayı kolonların yapacakları deformasyonlar ihmal edilebilirse,
- b) Kiriş rijitlikleri (EI), kolon rijitliklerine göre oldukça büyük değere sahip ise,
- c) Statik sistem geometrik olarak ve mesnet şekilleri itibari ile simetrik ise,
- d) Kütle dağılımı bütün katlarda benzer dağılımda ve kat hizalarında toplanmış ise, eğilme tipi çerçeve sistemi, kesme tipi çerçeve sistemi olarak kabul edilebilir (Leylek 2005).

Yapılan bu kabullerden birincisi, sistemin hareketi sırasında katların yatay konumda kaldıklarını belirler. İkinci kabulde, kiriş-döşeme elemanları ile kolonların birleşim noktalarında dönmeye karşı tutulduklarını yani dönme serbestliğinin olmadığı belirtilmektedir. Üçüncü kabulde, burulma etkilerinin kısıtlandığı belirtilmektedir. Dördüncü kabulde ise, kütlelerin yayılı olmasından dolayı sistemin sonsuz serbestlik dereceli olması gerekirken, kütlelerin kat hizalarında toplanmış kabul edilmesinden dolayı sistemin serbestlik derecesi kat hizalarındaki toplanmış kütle sayısına bağlı olarak ifade edilebilir.

2.4.4.a. Hareket denklemleri

Yukarıda yapılan kabullere göre kesme tipi çerçevenin hareket denklemleri örnek bir çerçeve ile elde edilmiştir.

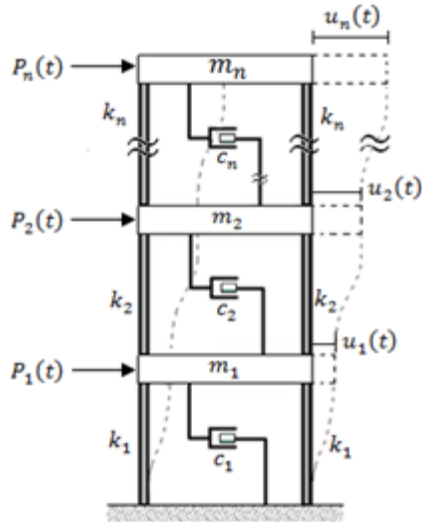
Şekil 2.21'de n katlı tek açıklıklı bir çerçeve görülmektedir. Bu model için hareket denklemleri, sistemin Şekil 2.21.(b)'de verilen serbest cisim diyagramından her bir kütleye etki eden kuvvetlerin dengesinden elde edilir.

Bu da herhangi bir t zamanında her kütleye etki eden atalet, sönüm ve elastik yay kuvvetlerinin dış kuvvet ile dengelenmesidir.

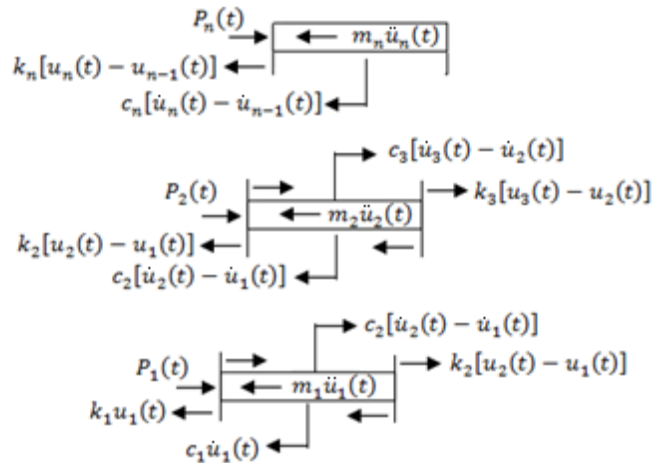
Her kattaki kütle için;

$$F_{I_i} + F_{D_i} + F_{S_i} = P_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.48)$$

genel ifadesi yazılabilir. Yapının doğrusal-elastik davranış sergilemesi durumunda süperpozisyon ilkesi geçerlidir. Böyle durumlarda her katta harekete karşı koyan kuvvetler, tüm katlardaki hareket parametresinin çarpıldığı katsayılar cinsinden ifade edilebilir. (2.48) denklemi her kat kütlesi için açık olarak yazılacak olursa,



(a)



(b)

Şekil 2.21. Kesme tipi çerçeve modeli

$$m_1 \ddot{u}_1(t) + c_1 \dot{u}_1(t) - c_2 (\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) + k_1 u_1(t) - k_2 (u_2(t) - u_1(t)) = P_1(t)$$

$$m_2 \ddot{u}_2(t) + c_2 (\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) - c_3 (\dot{u}_3(t) - \dot{u}_2(t)) + k_2 (u_2(t) - u_1(t))$$

$$-k_3 (u_3(t) - u_2(t)) = P_2(t)$$

$$m_3 \ddot{u}_3(t) + c_3 (\dot{u}_3(t) - \dot{u}_2(t)) + k_3 (u_3(t) - u_2(t)) = P_3(t)$$

$$\vdots$$

$$m_n \ddot{u}_n(t) + c_n (\dot{u}_n(t) - \dot{u}_{n-1}(t)) + k_n (u_n(t) - u_{n-1}(t)) = P_n(t) \quad (2.49)$$

elde edilir.

n serbestlik dereceli sistem için yazılan (2.49) denklem takımı kütle, rijitlik ve sönüm matrislerini teşkil ederek;

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ 0 & m_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & m_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{u}}(t)} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & -c_n \\ 0 & \dots & -c_n & c_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}(t)} + \dots \\ & + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_n \\ 0 & \dots & -k_n & k_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.50) \end{aligned}$$

şeklinde açık formda yazılabilir. Bu denklem kapalı formda;

$$[M]_{n \times n} \{\ddot{\mathbf{u}}(t)\}_{n \times 1} + [C]_{n \times n} \{\dot{\mathbf{u}}(t)\}_{n \times 1} + [K]_{n \times n} \{\mathbf{u}(t)\}_{n \times 1} = \{\mathbf{P}(t)\}_{n \times 1} \quad (2.51)$$

olarak yazılır. Böylece sistemin kütle matrisi $[M]$, sönüm matrisi $[C]$, rijitlik matrisi $[K]$ olarak ifade edilmiş olur. (2.50) ve (2.51) denklemlerindeki kolon matrislerinden; $\{\ddot{u}(t)\}$ kütlelerin serbestlik derecesi doğrultusundaki ivmelerini belirten ivme vektörü, $\{\dot{u}(t)\}$ hız vektörü, $\{u(t)\}$ yerdeğiştirme vektörü ve $\{P(t)\}$ ise kütlelere tatbik edilen kuvvetlerin vektörüdür (Paz 2003).

ÇSD sistemler taban hareketlerine de tepki verirler. Kat hizalarındaki kütlelere etkiyen kuvvetin yerine, çerçevenin temelinden etkiyen yer ivmesine maruz kalması halinde (bu durumda $P(t) = 0$ olmakta) hareket denklemi, bölüm 2.4.2.b'deki TSD duruma uygulanan yöntemin aynısını takip etmek suretiyle kolaylıkla geliştirilebilir (Kayabalı 2003).

Sistemdeki mutlak ötelemeler, bağıl ötelemelerle yer ötelemesinin toplamına eşit olmaktadır.

$$u_{ti}(t) = u_i(t) + u_g(t) \quad (2.52)$$

yada matrissel olarak

$$\{u_t(t)\}_{n \times 1} = \{u_i(t)\}_{n \times 1} + \{I\} u_g(t) \quad (2.53)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik (2.51) denkleminde kullanılarak,

$$[M]_{n \times n} \{\ddot{u}(t)\}_{n \times 1} + [C]_{n \times n} \{\dot{u}(t)\}_{n \times 1} + [K]_{n \times n} \{u(t)\}_{n \times 1} = -[M]_{n \times n} \{I\}_{n \times 1} \ddot{u}_g(t) \quad (2.54)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem ÇSD sistem genel hareket denklemi olup, rijit zemine oturan, yanal hareket derecesine sahip, doğrusal-esnek yapısal sistemler için geçerlidir (Erdik ve Yüzügüllü 1980).

(2.54) eşitliği, n katlı yapının taban hareketine tepkisinin eşdeğer dış yüklerin tepkisine eşit olduğunu ifade eder. Burada i . kata uygulanan yük $P_i = -[M_i]_{n \times n} \ddot{u}_g(t)$ şeklindedir (Kayabalı 2003).

Hareket denklemi sistem fleksibilite (esneklik) matrisi kullanılarak da yazılabilir. Sistem fleksibilite matrisi $[f]$ 'nin elemanları, f_{ij} (j noktasına uygulanan birim kuvvetin aynı doğrultuda i noktasında oluşturacağı ötelemeye eşittir) şeklinde gösterilirse, Maxwell – Betti teoremine göre $[K]$ rijitlik matrisi ile $[f]$ fleksibilite matrisi simetrik olup birbirlerinin tersine eşittir.

$$[f] = [K]^{-1} \quad (2.55)$$

Denklem (2.54)'ün her iki tarafı $[f]$ ile çarpılarak,

$$[f][M]\{\ddot{u}(t)\} + [f][C]\{\dot{u}(t)\} + \{u(t)\} = -[f][M]\{I\} \ddot{u}_g(t) \quad (2.56)$$

denklemini elde edilir.

$$[D] = [K]^{-1} [M] \quad (2.57)$$

matrisi ise dinamik matris olarak tanımlanmaktadır (Erdik ve Yüzügüllü 1980).

2.4.4.b. Çok serbestlik dereceli sistemlerin sönümsüz serbest titreşimi

Sönümsüz serbest titreşimlerde sönümlenme matrisinin tüm terimleri sıfırdır ve bu durumda (2.51) hareket denklemi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (2.58)$$

Herbir kütlenin tepkisinin harmonik olduğu kabul edilirse,

$$\{u(t)\} = \{\phi\} \sin(\omega t + \theta) \quad (2.59)$$

olur. Burada, ϕ : yerdeğiştirme genliğini içeren bir vektör ve θ : yapının her katındaki (veya her serbestlik derecesi için) faz açılarını içeren bir vektördür. (2.59) eşitliğinin iki kere türevini almak suretiyle,

$$\{\ddot{u}(t)\} = -\omega^2 \{\phi\} \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 \{u(t)\} \quad (2.60)$$

elde edilir. Yerdeğiştirme [(2.59) eşitliği] ve ivme [(2.60) eşitliği] bağıntılarının hareket denkleminde [(2.58) eşitliği] yerine konmasıyla,

$$[-\omega^2 [M] \{\phi\} + [K] \{\phi\}] \sin(\omega t + \theta) = \{0\} \quad (2.61)$$

elde edilir. Bu denklemin çözüm yollarından birisi, $[-\omega^2 [M] \{\phi\} + [K] \{\phi\}]$ ifadesinin sıfır olmasıdır. Bu durumda,

$$[K] \{\phi\} = \omega^2 [M] \{\phi\} \quad (2.62)$$

olur. (2.62) eşitliği genelleştirilmiş özdeğer problemi olarak adlandırılır. Bu eşitliğin homojen cebirsel denklem biçiminde yeniden yazılmasıyla,

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{\phi\} = \{0\} \quad (2.63)$$

sistemin frekans denklemi veyahut karakteristik değer (özdeğer) denklemi elde edilir (Kayabalı 2003).

Denklem (2.63), n adet lineer homojen denklemdir ve bu denklemde zamana bağlı yerdeğiştirmelerin genlikleri olan ϕ 'lar n adet bilinmeyi ifade eder. Aynı zamanda ω^2 de bilinmeyen parametredir.

(2.63) denklemi ile verilen lineer homojen denklem takımının sıfır olmayan köklere sahip olabilmesi için, katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir.

$$\det [[K] - \omega^2 [M]] = \{0\} \quad (2.64)$$

Gerçek fiziksel sistemlere karşılık gelen frekans denkleminin bütün kökleri gerçek ve pozitifdir. Serbestlik derecesi sayısı n olan sistem için karakteristik denklemin çözümü n adet ω_i^2 kökünü verir. Bu köklerin karekökleri $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ yapının n adet titreşim modlarının doğal titreşim frekanslarını belirler. Doğal titreşim frekansları aynı zamanda modal frekanslar olarak da adlandırılır (Erdik ve Yüzügüllü 1980).

Bu n adet $(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$ frekans değeri dış yüklerin olmadığı durumda sönümsüz sistemin salınabildiği frekansları temsil etmektedir (Kayabalı 2003).

Denklem (2.59)'deki varsayıma göre ÇSD sistem ancak modları ile belirlenen şekillerde ve frekanslarda basit harmonik titreşim yapabilir. Yani modal titreşimlerde her bir serbestlik derecesindeki ötelemeler herhangi bir zaman değeri için modla orantılıdır ve aralarında faz farkı yoktur. Sistemdeki her bir serbestlik derecesine bir ilk öteleme verilip, bir serbest titreşim deneyi yapıldığında; sistem ancak seçilen ilk ötelemeler, herhangi bir doğal mod şekliyle orantılı olduğu zaman, o moda ait frekansla basit harmonik hareket yapmaya başlayacaktır (Erdik ve Yüzügüllü 1980).

$\lambda = \omega^2$, denklem (2.63)'de yerine koyularak,

$$[[K] - \lambda [M]] \{\phi\} = \{0\} \quad (2.65)$$

elde edilir. Bazen hesaplarda kolaylık sağlaması bakımından M kütlesi yerine $W = M \times g$ ağırlığı kullanılır ve g yerçekimi ivmesi sabit olduğu için, matrisin dışına çıkarılarak (2.63) denklemi

$$[[K] - \lambda [W]]\{\phi\} = \{0\} \quad (2.66)$$

şeklinde yazılabilir. Burada yardımcı notasyon $\lambda = \omega^2/g$ dir (Tezcan 1970).

(2.63) ya da (2.65) denklem takımının çözümü matematikte özdeğer ve özvektör problemi olarak bilinir.

Özdeğer ve özvektörlerin bulunmasında standart matematiksel yöntemlerden yararlanabilmek için (2.63) denklemi ile tanımlanan genel özdeğer probleminin genellikle (2.67) denklemi ile tanımlanan ‘standart tip’ özdeğer problemine dönüştürülmesi gerekir. Bu tamamen matematiksel bir ilişkidir ve standart tip özdeğer problemi:

$$[A]\{X\} = \lambda \{X\} \quad (2.67)$$

biçimindedir. Burada $[A]$ kare dinamik matristir.

(2.67) eşitliği ile verilen standart tip özdeğer problemi, genellikle

$$[A]\{X\} - \lambda \{X\} = 0 \text{ veya } [[A] - \lambda [I]]\{X\} = 0 \quad (2.68)$$

şeklinde gösterilmektedir. (2.67) ve (2.68) eşitliklerinde λ tek bir skaler değer olarak gösterilse de, sistemin serbestlik derecesi sayısı kadar farklı değer almaktadır.

Standart tip özdeğer problemine dönüşümü sağlayan iki yol vardır:

1) (2.63) denklemi $[M]^{-1}$ ile önden çarpılarak:

$$[[M]^{-1} [K] - \omega^2 [M]^{-1} [M]] \{\phi\} = \{0\}$$

elde edilir. Burada $[M]^{-1} [M] = [I]$, birim matristir. Gerekli kısaltmalar yapılarak, (2.68) eşitlikleri ile gösterilen,

$$[[E] - \lambda [I]]\{X\} \quad (2.69)$$

şeklindeki standart tip özdeğer problemine dönüşüm sağlanır. Burada $[E] = [M]^{-1} [K]$ ve $\lambda = \omega^2$ dir.

2) (2.63) denklemi $[K]^{-1}$ ile önden çarpılarak:

$$[[K]^{-1} [K] - \omega^2 [K]^{-1} [M]] \{\phi\} = \{0\}$$

elde edilir. Burada $[K]^{-1} [K] = [I]$, birim matristir. Gerekli kısaltmalar yapılarak, (2.68) eşitlikleri ile gösterilen,

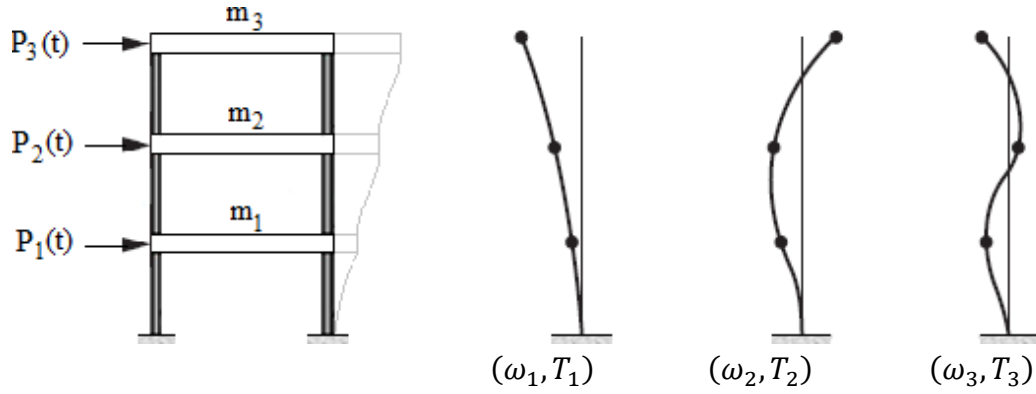
$$[[D] - \lambda [I]]\{X\} = 0 \quad (2.70)$$

şeklindeki standart tip özdeğer problemine dönüşüm sağlanır. Burada $[D] = [K]^{-1} [M]$ ve $\lambda = 1/\omega^2$ dir (Thorby 2008).

Özdeğerlerin ve bunlara karşılık gelen özvektörlerin bulunmasına yarayan birçok matematiksel yöntem vardır. Bu yöntemler yardımıyla bulunan λ değerleri küçükten büyüğe doğru dizilir. En küçük λ değerine tekabül eden ω_1 değerine doğal frekans ve bu frekansa karşılık gelen

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}} \quad (2.71)$$

sistemin en büyük periyoduna da doğal periyot denir.



Şekil 2.22. Dinamik yüklemeye maruz çok serbestlik dereceli sistemin mod şekilleri

(2.68) denklemleri açık olarak yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) X_1 + a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n &= 0 \\ a_{21} X_1 + (a_{22} - \lambda) X_2 + \cdots + a_{2n} X_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda) X_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

elde edilir. Bu homojen denklem takımını sağlayan köklerinin bulunabilmesi için katsayılar determinantının sıfır olması yada;

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad (2.73)$$

şeklinde n . dereceden polinomun sıfır olması gerekir. Bu polinoma matrisin karakteristik denklemi denir. Karakteristik denklemin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ köklerine $[A]$

matrisinin özdeğerleri denir. Her özdeğer λ_i için bir özvektör $\{X\}_i$ vardır. Özvektörler, denklem takımı homojen olduğu için bir katsayı ile çarpılıp bölünse bile, homojen denklemleri sağlarlar. Bu özellikten faydalanarak bir vektörün içindeki terimlerin en büyüğü birim yapılabilir. Bunun için vektörün bütün terimlerini çoğu zaman birinci, bazen de en büyük eleman ile bölmek gerekir.

Özdeğer ve özvektörlerin özellikleri ispatı verilmeden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

a) Özdeğerlerin cebrik toplamı, $[A]$ matrisinin köşegeni üzerindeki terimlerinin cebrik toplamına eşittir.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.74)$$

b) Özdeğerlerin birbirleri ile çarpımı $[A]$ matrisinin determinantına eşittir (Tezcan 1970).

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n = \det [A] \quad (2.75)$$

c) $[A]$ matrisinin özdeğerleri λ_i ($i = 1, \dots, n$) ise A^r ($\equiv A A^{r-1}$; yani $A^2 = A A$, $A^3 = A A^2$, ...)’nin özdeğerleri de λ_i^r ($r = 1, \dots, n$) olur (Gupta 1995).

d) $[A]$ matrisi reel ve simetrik ise, onun bütün özdeğerleri de reeldir.

e) Birbirinden farklı λ_j ve λ_k gibi iki özdeğer için bulunan iki özvektörün çarpımı;

$$\{X\}_j^T \{X\}_k = 0 \quad (2.76)$$

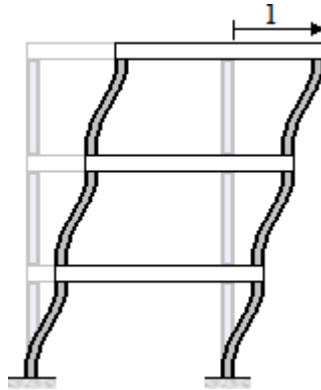
dir. Bu özelliğe ortogonalite şartı denir ve sadece simetrik matrisler için geçerlidir. Farklı iki özvektörün skaler çarpımının sıfır olması bu iki vektörün birbirine dik olmasını gerektirir. Eğer, $j = k$ ise, yani özvektörler aynı ise, bu iki vektörün skaler çarpımı bir (1) eşit olur.

$$\{X\}_j^T \{X\}_k = 1 \quad (2.77)$$

Bu özelliğe normallik şartı denir. Bir özvektörün kendi transpozu ile çarpımı bire (1) eşit değil de, $\sqrt{S}$ gibi bir sayıya eşit çıkıyorsa bu vektörün her terimini $\sqrt{S}$ ye bölerek o vektörü normal hale getirmek mümkündür. Bu işleme normalleştirme denir (Tezcan 1970).

Kısaca özetlenecek olursa; sistemde her doğal frekansa eşlik eden bir titreşim modu vardır. Doğal frekanslarda yer değiştirme vektörü ϕ 'nin genliği belirsizdir. ϕ vektörü, titreşen sistemin her doğal frekansta farklı olan şeklini tanımlar. Bu şekil, çoğu zaman ϕ 'nin elemanlarını bir eleman (çoğu zaman birinci, bazen de en büyük eleman) ile bölmek suretiyle boyutsuzlaştırılır. Sonuçta oluşan vektör mod şeklini tanımlar. n . titreşim modunun mod şekli şöyle olur:

$$\Phi_n^T = [\phi_{1n} \quad \phi_{2n} \quad \cdots \quad \phi_{nn}] = \frac{1}{\phi_{nn}} [\phi_{1n} \quad \phi_{2n} \quad \cdots \quad 1] \quad (2.78)$$



Şekil 2.23. Normalleştirilmiş modlar

Tüm mod şekilleri, $\det [[K] - \omega^2[M]] = \{0\}$ eşitliğini sağlar. Φ_n vektörünün her doğal frekanstaki değerleri titreşim moduna karşılık gelen mod şekillerini tanımlar. Bu nedenle, n adet serbestlik derecesine karşılık gelen n adet titreşim modunun n adet doğal frekansı olacaktır. Her titreşim modu belirli bir doğal frekansta oluşur ve yapının belirli bir mod şeklinde şekil değiştirmesine neden olur. En küçük doğal frekansa karşılık gelen frekansa birinci mod veya temel mod denir; ikinci en küçük moda ikinci

mod denir ve adlandırma bu şekilde devam eder. Mod şekilleri ortogonaldır. Yani; $m \neq n$ için

$$\{\Phi_m\}^T [M] \{\Phi_n\} = 0 \quad (2.79)$$

Denklem (2.63) kullanılarak $[K]\{\Phi_m\} = \omega_m^2 [M] \{\Phi_m\}$ ve dolayısıyla

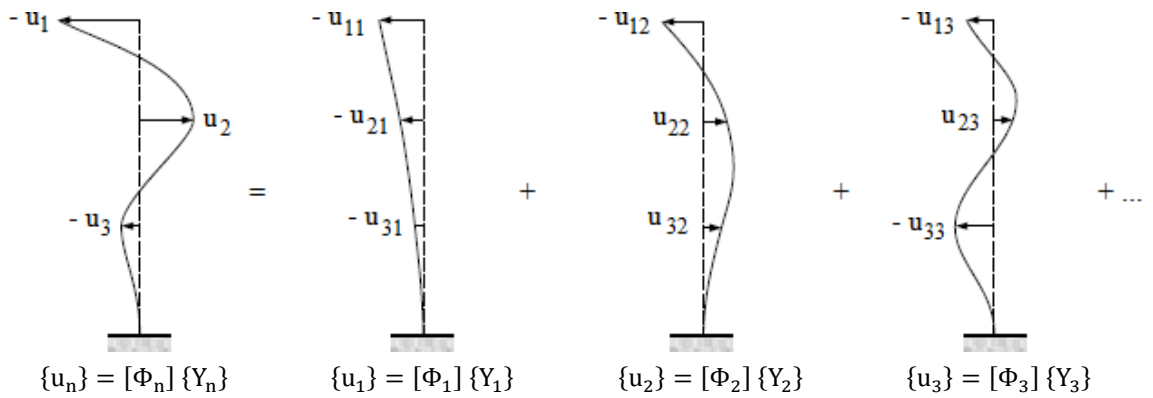
$$\{\Phi_m\}^T [K] \{\Phi_n\} = 0 \quad (2.80)$$

eşitliği yazılabilir. Ortogonallik özelliğinden faydalanılarak sistemdeki herhangi bir yerdeğiştirme şekli, modal vektörler cinsinden ifade edilebilir. Sistem yerdeğiştirme şekli için

$$\{u\} = \{\Phi_1\} Y_1 + \{\Phi_2\} Y_2 + \dots + \{\Phi_n\} Y_n = \sum_{i=1}^n \{\Phi_i\} Y_i \quad (2.81)$$

$$\{u_n\} = [\Phi_n] \{Y_n\} \quad (2.82)$$

elde edilir.



Şekil 2.24. Yerdeğiştirmelerin modal bileşenlerin toplamı şeklinde temsili

(2.82) denkleminin her iki tarafı $\{\Phi_n\}^T [M]$ ile çarpılıp,

$$\{\Phi_n\}^T [M] \{u\} = \{\Phi_n\}^T [M] \{\Phi_1\} Y_1 + \{\Phi_n\}^T [M] \{\Phi_2\} Y_2 + \dots + \{\Phi_n\}^T [M] \{\Phi_n\} Y_n \quad (2.83)$$

$m \neq n$ için $\{\Phi_m\}^T [M] \{\Phi_n\} = 0$ şeklindeki ortogonallik özelliğinden faydalanarak,

$$Y_1 = \frac{\{\Phi_m\}^T [M] \{u\}}{\{\Phi_m\}^T [M] \{\Phi_m\}} \quad (2.84)$$

bulunur (Erdik ve Yüzügüllü 1980).

(2.82) eşitliğini (2.51) eşitliğinde yerine koymak suretiyle ve her terimi de $\{\Phi_n\}^T$ ile ön çarpıma tabi tutarak, n. titreşim modu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[M_n] \{\ddot{Y}_n\} + [C_n] \{\dot{Y}_n\} + [K_n] \{Y_n\} = \{P_n(t)\} \quad (2.85)$$

Burada;

$$K_n = \{\Phi\}_n^T [K] \{\Phi\}_n \quad (2.86)$$

$$M_n = \{\Phi\}_n^T [M] \{\Phi\}_n \quad (2.87)$$

$$C_n = \{\Phi\}_n^T [C] \{\Phi\}_n \quad (2.88)$$

$$P_n(t) = \{\Phi\}_n^T p(t) \quad (2.89)$$

dir. Bu hareket denklemi, sönüm matrisinin ortogonal (yani; $m \neq n$ için $\{\Phi_m\}^T [C] \{\Phi_n\} = 0$) olduğu varsayımına dayanır. Hareket denklemi

$$\ddot{Y}_n(t) + 2 \xi_n \omega_n \dot{Y}_n(t) + \omega_n^2 Y_n(t) = P_n(t)/M_n \quad (2.90)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Temel sarsıntısı durumunda hareket denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\ddot{Y}_n(t) + 2 \xi_n \omega_n \dot{Y}_n(t) + \omega_n^2 Y_n(t) = \left(-\frac{L_n}{M_n} \right) \ddot{u}_b(t) \quad (2.91)$$

Burada, (L_n/M_n) katılım katsayı olarak adlandırılır ve $L_n = \sum_{j=1}^n m_j \phi_{jn}$ dir.

Bu işlem ile n adet eşzamanlı denklem sistemi (hareketin ilk denklemleri), n adet bağımsız denklem sistemine dönüştürülmektedir. Bu bağımsız denklemlerden her biri $Y_n(t)$ için çözülebilir. O halde, modal katkıların üst üste getirilmesiyle toplam yerdeğiştirmeler, denklem (2.81)'deki gibi elde edilir. Yerdeğiştirmelerin bulunmasıyla kuvvetler, gerilmeler ve ilgi konusu diğer parametreler hesaplanabilir. Yer değiştirmeler ayrıca bir grup $f(t)$ eşdeğer yanal kuvvetlerini hesaplamada kullanılabilir. Bu kuvvetler, statik yükler olarak uygulandığında aşağıdaki $u(t)$ yerdeğiştirmelerini oluşturmaktadır.

$$f(t) = [K] \{\Phi_1\} Y_1 + [K] \{\Phi_2\} Y_2 + \dots + [K] \{\Phi_n\} Y_n \quad (2.92)$$

İç kuvvetler, eşdeğer yanal kuvvetlere maruz kalan yapının statik analiziyle hesaplanabilir. Bu iç kuvvetler yapının değişik elemanlarının tasarımında kullanılmaktadır (Kayabalı 2003).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Özdeğer probleminin çözümünde kullanılan yöntemler aşağıdaki gibi kategorilere ayrılabilir:

- Determinant hesaplamaya dayalı yöntemler,
- Matrislerin köşegen veya üçlü – köşegen form gibi daha basit ve işlem kolaylığı sağlayan bir şekle dönüşümünü esas alan yöntemler,
- Özvektörler üzerinde iterasyona dayalı yöntemler,
- Özdeğerler üzerinde iterasyona dayalı yöntemler,
- Yaklaşık çözümler içeren alt uzayların oluşturulmasına dayalı yöntemler.

Uygun bir yöntemin seçimi bir dizi kritere bağlıdır. En önemli kriter ise, sistemin serbestlik derecesidir.

Serbestlik derecesi sayısına (n) göre problemler gruplara ayrılabilir.

Grup I: $0 \leq n \leq 10$

Grup II: $10 \leq n \leq 250$

Grup III: $250 \leq n \leq 2500$

Grup IV: $2500 \leq n \leq 25000$

Grup V: $n > 25000$

Burada, I. gruba ait problemlerde, yarı analitik yöntemlerle doğrudan karakteristik denklem geliştirilebilir.

II. gruba ait problemler, standart bilgisayarlarla çözülebilir ve bu nedenle de nümerik analizden bilinen yöntemler (Jacobi yöntemi, Kuvvet yöntemi ve Householder yöntemi vb) kullanılabilir.

III. gruba ait problemler, bant karakterli $[K]$ ve $[M]$ matrisleri kullanılarak çözülebilir. İndirgeme işlemi kullanan yöntemler, bu tip problemlere uygulanabilir.

Gerçek sistemlerin, aşırı karmaşıklığı ve analizi için gerekli hassasiyet nedeniyle çoğu özdeğer problemi IV. gruba dahil edilir.

Ters iterasyon yöntemi, altuzay yöntemi ve Lanczos yöntemi, kuvvet algoritmasından türetilmiş yöntemlerdir. $[K]$ matrisinin çok seyrek yapıda olması durumunda bu yöntemlerden maksimum şekilde yararlanılır.

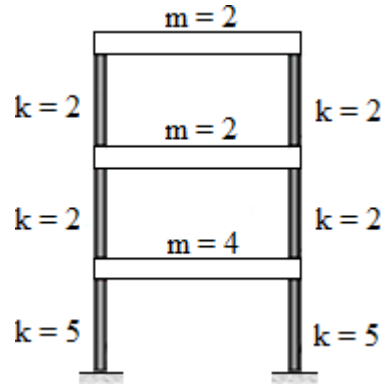
V. gruba ait problemlerde ise, IV. grup problemler ile aynı yöntemler kullanılır (Géradin and Rixen 1997).

3.1. Determinant Hesaplamaya Dayalı Yöntemler

3.1.1. Karakteristik değer denkleminin determinantını esas alan yöntem

Bu yöntemin esası, (2.64) denklemi ile verilen karakteristik değer denkleminin determinantının çözümüdür.

Yöntemin daha iyi anlaşılması açısından bir örnek üzerinde çözümler detaylı bir şekilde açıklanmaktadır. Örnek olarak Şekil 3.1’de gösterilen üç katlı bir çerçeve sistem seçilmiştir.



Şekil 3.1. Üç katlı kesme çerçeve sistemi

Sistemin rijitlik ve kütle matrisi aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$[K] - \omega^2 [M] = \begin{bmatrix} (14 - \omega^2 4) & -4 & 0 \\ -4 & (8 - \omega^2 2) & -4 \\ 0 & -4 & (4 - \omega^2 2) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\det [K] - \omega^2 [M] = (-1)^{(1+1)} (14 - \omega^2 4) \begin{vmatrix} (8 - \omega^2 2) & -4 \\ -4 & (4 - \omega^2 2) \end{vmatrix}$$

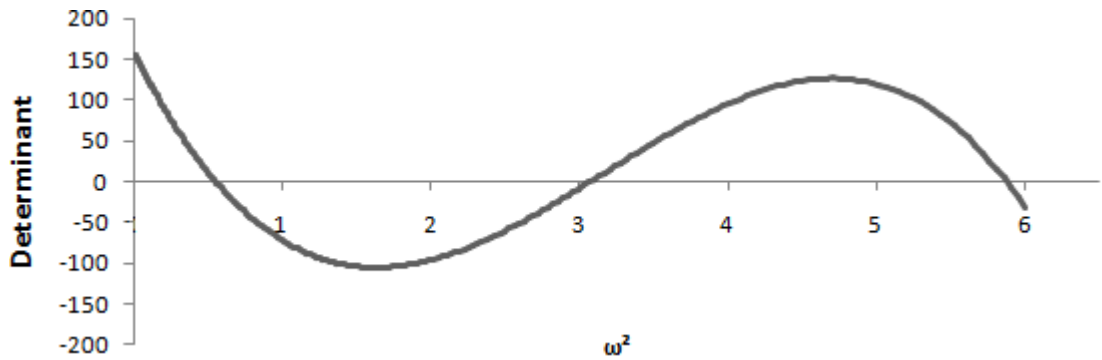
$$+ (-1)^{(1+2)} (-4) \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 0 & (4 - \omega^2 2) \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+3)} (0) \begin{vmatrix} -4 & (8 - \omega^2 2) \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det [K] - \omega^2[M] &= (14 - 4\omega^2)[(8 - 2\omega^2)(4 - 2\omega^2) - (-4)^2] \\ &\quad + (-1)(-4)\{-4(4 - 2\omega^2)\} \end{aligned}$$

$$\det [K] - \omega^2[M] = -16\omega^6 + 152\omega^4 - 368\omega^2 + 160 \quad (3.4)$$

Elde edilen bu determinant eşitliği, ω^2 'nin 3. mertebeden bir denklemdir. Şekil 3.2'de determinant - ω^2 ilişkisi gösterilmektedir. Burada $\omega_1^2 = 0,554280$, $\omega_2^2 = 3,071256$ ve $\omega_3^2 = 5,874806$ değerlerine karşılık determinant sıfır değerini almaktadır. Bu şekildeki bir sistemin 3 (üç) adet doğal frekansının olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 3.2. Üç katlı kesme çerçevesi için determinant değişimi

Bir matrisin öz değerleri elde edildikten sonraki adım her öz değere karşılık gelen özvektörün hesaplanmasıdır.

$\omega_1^2 = 0,554280$ için özvektör:

$$[K] - \omega^2[M] = \begin{bmatrix} 11,78288 & -4 & 0 \\ -4 & 6,89144 & -4 \\ 0 & -4 & 2,89144 \end{bmatrix}$$

Keyfi olarak $x_1 = 1$ seçildikten sonra,

$$1. \text{ satır: } 11,78288 x_1 - 4 x_2 = 0, \quad x_2 = 2,945720$$

$$2. \text{ satır: } -4 x_1 + 6,89144 x_2 - 4 x_3 = 0, \quad x_3 = 4,075091$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,945720 \\ 4,075091 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = [1 \quad 2,945720 \quad 4,075091] \begin{bmatrix} 1 \\ 2,945720 \\ 4,075091 \end{bmatrix} = 26,28363$$

Normalleştirme işlemi:

$$X = \frac{1}{\sqrt{26,28363}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2,945720 \\ 4,075091 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,195055 \\ 0,574578 \\ 0,794867 \end{bmatrix}}_{\Phi_1}$$

$\omega_2^2 = 3,071256$ için özvektör:

$$[K] - \omega^2 [M] = \begin{bmatrix} 1,714975 & -4 & 0 \\ -4 & 1,857488 & -4 \\ 0 & -4 & -2,14251 \end{bmatrix}$$

Keyfi olarak $x_1 = 1$ seçildikten sonra,

$$1. \text{ satır: } 1,714975 x_1 - 4 x_2 = 0, \quad x_2 = 0,428744$$

$$2. \text{ satır: } -4 x_1 + 1,857488 x_2 - 4 x_3 = 0, \quad x_3 = -0,800450$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,428744 \\ -0,800450 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 0,428744 & -0,800450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,428744 \\ -0,800450 \end{bmatrix} = 1,824540$$

Normalleştirme işlemi:

$$X = \frac{1}{\sqrt{1,824540}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,428744 \\ -0,800450 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,740326 \\ 0,317410 \\ -0,592594 \end{bmatrix}}_{\phi_2}$$

$\omega_3^2 = 5,874806$ için özvektör:

$$[K] - \omega^2 [M] = \begin{bmatrix} -9,499230 & -4 & 0 \\ -4 & -3,749610 & -4 \\ 0 & -4 & -7,749610 \end{bmatrix}$$

Keyfi olarak $x_1 = 1$ seçildikten sonra,

$$1. \text{ satır: } -9,499230 x_1 - 4 x_2 = 0, \quad x_2 = -2,374810$$

$$2. \text{ satır: } -4 x_1 - 3,749610 x_2 - 4 x_3 = 0, \quad x_3 = 1,225768$$

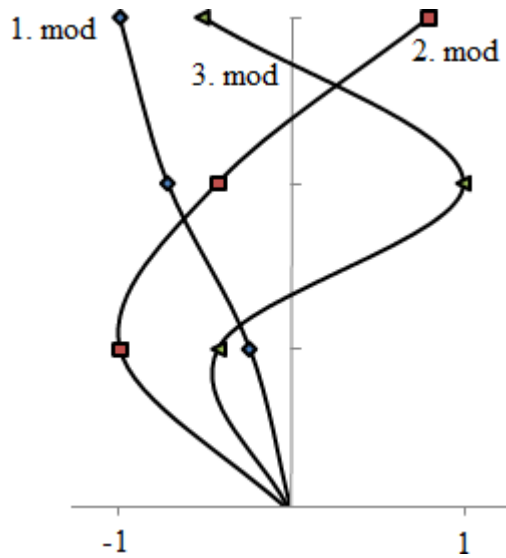
$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2,374810 \\ 1,225768 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & -2,374810 & 1,225768 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2,374810 \\ 1,225768 \end{bmatrix} = 8,142230$$

Normalleştirme işlemi:

$$X = \frac{1}{\sqrt{8,142230}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2,374810 \\ 1,225768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,350452 \\ -0,832256 \\ 0,429573 \end{bmatrix} \underbrace{\quad}_{\phi_3}$$

Şekil 3.3'te üç mod şekli gösterilmiştir. Her kat kesme biçiminde deforme olmaktadır. Birinci modda bütün katlar aynı yönde deforme olmuştur. İkinci modda en üst kat, alttaki katlara göre ters yönde deforme olmuştur. 3. modda ise değişimli olarak farklı yönlerde deformasyon gerçekleşmiştir.



Şekil 3.3. Üç katlı çerçeve sistemin mod şekilleri

3.1.2. Sturm serileri yöntemi

Sturm serileri yöntemi, tüm özdeğerlerin hesaplanmasında kullanılabildiği gibi belirli bir aralıktaki özdeğerlerin bulunmasında da kullanılır. Bu yöntem ile tüm özdeğerlerin yerleri kontrol edilebilir. Belirli bir özdeğerin altındaki özdeğerlerin sayısı yine bu yöntemle belirlenebilir.

$(n \times n)$ boyutundaki üçlü - köşegenel bir $[A]$ matrisinin,

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & & & \\ b_{11} & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & a_{n-1,n-1} & b_{n-1,n-1} \\ & & & b_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

sol üst köşesinden başlamak üzere oluşturulan alt matris dizisi $(f_0, f_1, f_3, \dots, f_n)$ aşağıda gösterildiği gibidir.

$$f_1 = [a_{11}] \quad f_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} \\ b_{11} & a_{22} \end{bmatrix} \quad f_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 \\ b_{11} & a_{22} & b_{22} \\ 0 & b_{22} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.6)$$

$f_r(\lambda)$, r boyutlu köşegenel alt matrisin karakteristik polinomu olmak üzere $[[A] - \lambda [I]]\{\phi\} = 0$ eşitliğinin çözümünden,

$$f_r(\lambda) = |[A] - \lambda [I]| = \det \begin{bmatrix} (a_{11} - \lambda) & b_{11} & & 0 \\ b_{11} & (a_{22} - \lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & b_{r-1,r-1} & (a_{rr} - \lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu determinant tekrarlı işlemler ile genişletilebilir.

$$f_1(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \quad (3.8)$$

$$f_2(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - b_{11}^2 \quad (3.9)$$

$$= (a_{22} - \lambda)f_1(\lambda) - b_{11}^2 f_0(\lambda) \quad (3.10)$$

$$\text{ve } f_0(\lambda) = 1 \quad (3.11)$$

olmaktadır. Kurallı bir şekilde adımlar tekrar edilirse,

$$f_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1,r+1} - \lambda) f_r(\lambda) - b_{rr}^2 f_{r-1}(\lambda) \quad (3.12)$$

sonucuna varılır.

(3.8), (3.11) ve (3.12)'den, $(\lambda \rightarrow -\infty)$ için $f_r(\lambda) > 0$ olduğu açıkça görülmektedir.

Genel bir ifade ile,

$$f_n(\lambda) = (a_{nn} - \lambda) f_{n-1}(\lambda) - b_{n-1,n-1}^2 f_{n-2}(\lambda) \quad (3.13)$$

eşitliği yazılabilir.

(3.7) eşitliğinin kökleri $[A]$ matrisinin özdeğerleri olur. Özdeğerleri bulmaya yarayan bu polinom fonksiyonlarının,

$$f_0(\lambda), f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda), \dots, f_n(\lambda) \quad (3.14)$$

bazı önemli özellikleri vardır. $S(\lambda)$, polinomların köklerinin işaret değişim sayısını göstermek üzere $S(\lambda)$ 'nın özellikleri aşağıdaki gibidir:

- i. $f_n(\lambda)$ polinomunun köklerinin $(\lambda - \text{özdeğerlerin})$ sayısı $S(\lambda)$ 'ya eşittir.
- ii. $f_n(\lambda)$ polinomunun herhangi bir kökü (yani bir $\lambda - \text{özdeğer}$) aşılnca fonksiyon işaret değiştirdinden $S(\lambda)$ değeri de değişir. Şekil 3.4'e bakıldığında $f_3(\lambda)$ 'da açıkça görülmektedir.
- iii. Tek bir kök için $S(\lambda)$ değeri birer birer artar. Katlı köklerde ise aynı oranda artar.
- iv. $f_n(\lambda)$ polinomunun λ_i ile λ_{i+2} arasındaki köklerinin $(\lambda - \text{özdeğerlerinin})$ sayısı $\{S(\lambda_{i+2}) - S(\lambda_i)\}$ 'dir.
- v. $f_i(\lambda) = 0$ olduğu zaman $\text{sign}(P_i(\lambda)) = -\text{sign}(P_{i-1}(\lambda))$ olmaktadır (Petyt 2010).

Burada ikinci özellik şu önemli sonuca dayanır:

$f_r(\lambda_0) = 0$ ise,

$$f_{r+1}(\lambda_0) f_{r-1}(\lambda_0) < 0 \quad (3.15)$$

Bu sonuç (3.12) denkleminin her iki tarafı $f_{r-1}(\lambda_0)$ ile çarpılarak ispatlanabilir.

$$f_{r+1}(\lambda_0) f_{r-1}(\lambda_0) = -b_{rr}^2 f_{r-1}^2(\lambda_0) < 0 \quad (3.16)$$

Bu özellikler Şekil 3.4'e bakılarak daha iyi anlaşılabilir. Burada $n = 3$ alınarak karakteristik polinomlar üzerinde açıklanmıştır.

$f_1(\lambda)$ 'in kökü: v_1

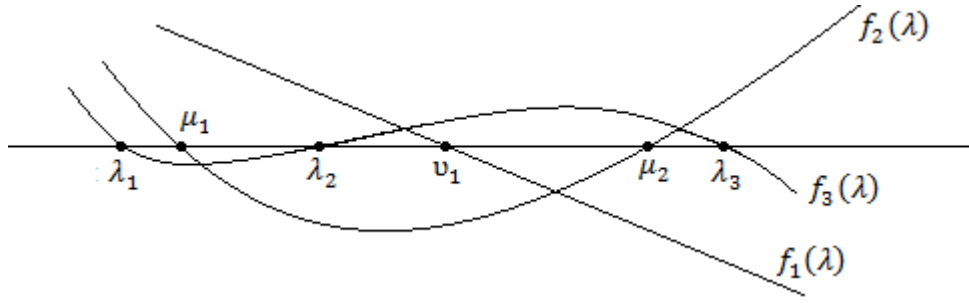
$f_2(\lambda)$ 'in kökleri: μ_1, μ_2

$f_3(\lambda)$ 'ün kökleri: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ olmak üzere,

$f_2(\lambda)$ için $f_2(\pm\infty) = \pm\infty$ ve $f_2(v_1) f_0(v_1) = f_2(v_1) < 0$ 'dir. Burada $f_1(\lambda)$ 'in v_1 karakteristik değeri, şüphesiz polinomun köküne (polinomun değerinin işaret değiştirdiği nokta) eşittir. $f_3(\lambda)$ için ayrıca $f_3(-\infty) = +\infty, f_3(+\infty) = -\infty$ ve

$$f_3(\mu_1) f_1(\mu_1) = -b_2^2 f_1^2(\mu_1) \text{'den dolayı } f_3(\mu_1) < 0$$

$f_3(\mu_2) f_1(\mu_2) = -b_2^2 f_1^2(\mu_2) \text{'den dolayı } f_3(\mu_2) > 0$ olmaktadır (Gérardin and Rixen 1997).



Şekil 3.4. Sturm serileri

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin öz değer probleminin, Sturm serileri yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir. Üçlü-köşegenel matris olarak, (3.3) eşitliğinde gösterilen $[[K] - \omega^2[M]]$ matrisi ele alınmıştır.

$$[K] - \omega^2[M] = \begin{bmatrix} (14 - \omega^2 4) & -4 & 0 \\ -4 & (8 - \omega^2 2) & -4 \\ 0 & -4 & (4 - \omega^2 2) \end{bmatrix}$$

$$[A_1] = [14 - 4 \omega^2]$$

$$f_1(\omega^2) = \det[A_1] = 14 - 4\omega^2$$

$$f_1(\omega^2) = \det[A_1] = 0 \text{ için } \omega^2 = 3,50$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 14 - 4 \omega^2 & -4 \\ -4 & 8 - 2 \omega^2 \end{bmatrix}$$

$f_2(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - b_1^2$ şeklindeki (3.9) eşitliği yardımıyla,

$$f_2(\omega^2) = \det[A_2] = (14 - 4\omega^2)(8 - 2\omega^2) - (-4)^2$$

$$\det[A_2] = f_2(\omega^2) = 8\omega^4 - 60\omega^2 + 96$$

bulunur.

$$f_2(\omega^2) = \det[A_2] = 0 \text{ için } \omega^2 = 2,313859 \text{ ve } 5,186141$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} (14 - \omega^2 4) & -4 & 0 \\ -4 & (8 - \omega^2 2) & -4 \\ 0 & -4 & (4 - \omega^2 2) \end{bmatrix}$$

$f_n(\lambda) = (a_{nn} - \lambda) f_{n-1}(\lambda) - b_{n-1,n-1}^2 f_{n-2}(\lambda)$ şeklindeki (3.13) eşitliği yardımıyla,

$$f_3(\omega^2) = \det[A_3] = (4 - 2\omega^2)(8\omega^4 - 60\omega^2 + 96) - (-4)^2(14 - 4\omega^2)$$

$$\det[A_3] = f_3(\omega^2) = -16\omega^6 + 152\omega^4 - 368\omega^2 + 160 \quad (3.17)$$

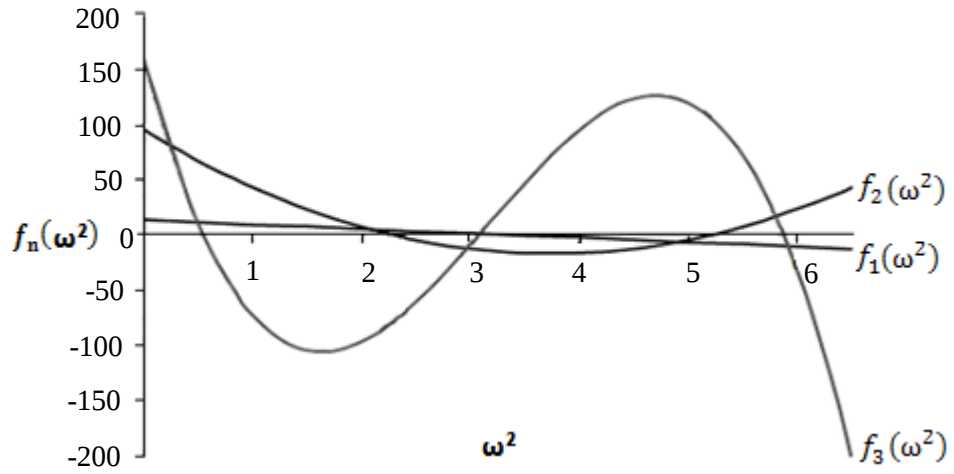
bulunur.

$$f_3(\omega^2) = \det[A_3] = 0 \text{ için } \omega_1^2 = 0,554270, \omega_2^2 = 3,071120 \text{ ve } \omega_3^2 = 5,874610$$

Çizelge 3.1’de alt matrislerin baskın olan özdeğerleri tablo halinde gösterilmiştir. Şekil 3.5’te de $f_n(\omega^2)$ fonksiyonları gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. Alt matrislerin özdeğerleri

		3,50	
	2,313859	5,186141	
0,554270	3,071120	5,874610	



Şekil 3.5. Sturm serileri polinom fonksiyonları

3.2. Denklem Çözümüne Dayalı Yöntemler

3.2.1. Krylov yöntemi

Krylov altuzay yöntemi olarak da adlandırılan yöntem, öz değer problemlerinin çözümünde kullanılan iteratif bir yöntemdir.

En genel anlamda Krylov yöntemi, matris-vektör çarpımları ile $Ax = b$ lineer sistemini çözen bir yöntemdir. Burada, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tekil olmayan katsayı matrisi, x bilinmeyenler vektörü, b 'de sağ taraf vektörüdür. Katsayı matrisi çok büyük olduğunda, Gauss yok etme yöntemi gibi direkt lineer sistem çözücü yöntemler yerine iteratif bir yöntem kullanılması mecburidir. Dahası, bazı problemlerde katsayı matrisi $[A]$ değişmediği halde, farklı sağ taraflar ile $Ax = b_i$ ($i = 1, \dots, n$); lineer sisteminin n defa çözülmesi gerekir. Bunun yerine $AX = B$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ sistemi oluşturulabilir ve çok daha verimli ve hızlı bir şekilde Krylov yöntemi ile bir defada çözülebilir.

Sonuç olarak Krylov yönteminde ki temel fikir, tekil olmayan $(n \times n)$ 'lik $Ax = b$ sisteminin çözümünün n boyutlu Krylov alt uzayında aranmasıdır.

$0 \neq x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ olmak üzere Krylov serisi:

$$\{x, Ax, A^2x, A^3x, \dots\} \quad (3.18)$$

şeklindedir. Oluşturulmak istenen Krylov matrisleri ise aşağıdaki gibidir.

$$K_{n \times j} = (x | Ax | \dots | A^{j-1}x) \quad (3.19)$$

Sonuçta, oluşturulacak (j) boyutundaki Krylov altuzayı şöyledir:

$$K_j(A, x) = \text{span} (x, Ax, A^2x, \dots, A^{j-1}x) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.20)$$

Krylov altuzayına arama uzayı ya da muhtemel çözümler uzayıda denilir (Saad 2003).

Bir Krylov altuzayı oluşturabilmek için bir başlangıç vektörü gerekir. $x \in \mathbb{R}^n$ seçilen bir başlangıç vektörü olsun. Daha yaklaşık sonuçlar elde edebilmek için altuzaya yakın bir x vektörü seçmek gerekir.

Krylov altuzay yönteminde $(j - 1)$ adım sonra, (j) boyutunda $K_j(A, x)$ Krylov altuzayı oluşturulur. j daha büyük olduğu takdirde aranan özvektörleri içeren uzaya yaklaşma şansı da artar.

Pratikte de olduğu gibi $(j \ll n)$ kabul edilerek $K_j(A, x)$ 'ı polinom cinsinden karakterize edilebilir. $K_j(A, x)$ 'nın tüm lineer kombinasyonlarının toplamı

$$a_0 x + a_1 Ax + a_2 A^2x + \dots + a_{j-1} A^{j-1}x \equiv p(A)x \quad (3.21)$$

şeklindedir. Katsayıları $a_0, \dots, a_{j-1}$ olan $(j - 1)$ veya daha düşük dereceli $p(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{j-1} A^{j-1}$ şeklinde polinom oluşturulabilir. (3.21)

eşitliğindeki lineer kombinasyon, görüldüğü üzere $p(A)x$ olarak daha kısa bir şekilde yazılabilir.

j 'den daha düşük dereceli tüm polinomların kümesi P_{j-1} ile gösterilirse,

$$K_j(A, x) = \{ p(A) x \mid p \in P_{j-1} \} \quad (3.22)$$

olur. $K_j(A, x)$, q özvektörü için iyi yaklaşımlar içerir. Bu nedenle $p \in P_{j-1}$ olmak üzere $p(A)x \approx q$ polinomları vardır. $[A]$ basit bir matris ve lineer bağımsız özvektörler $q_1, q_2, \dots, q_n$ ile ilişkili özdeğerler $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise,

$$K_{nxj} = [c_1 q_1 \mid \dots \mid c_n q_n]_{nxn} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{j-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{j-1} \end{pmatrix}_{nxj} \quad (3.23)$$

$$x = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_n q_n \quad (3.24)$$

eşitliğinin bilinmeyen katsayıları $c_1, c_2, \dots, c_n$ olmak üzere herhangi bir p çok terimli için

$$A^T = A \text{ ve } A q_i = \lambda q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.25)$$

$$p(A) q_i = p(\lambda_i) q_i \quad (3.26)$$

olmaktadır. (3.21) eşitliğinden,

$$a_0 x + a_1 \lambda x + a_2 \lambda^2 x + \dots + a_{j-1} \lambda^{j-1} x \equiv p(\lambda) x \quad (3.27)$$

$$p(A) x = c_1 p(\lambda_1) q_1 + c_2 p(\lambda_2) q_2 + \cdots + c_n p(\lambda_n) q_n \quad (3.28)$$

yazılabilir. q_1 aranırken daha iyi bir yaklaşım için $|p(\lambda_1)|$ 'den daha büyük olan $|p(\lambda_2)|, \dots, |p(\lambda_n)|$ değerlerine bakılmalıdır. $|p(\lambda_1)|$ 'in $|p(\lambda_2)|, \dots, |p(\lambda_n)|$ değerlerine göre çok büyük olması durumunda λ_1 , spektrumun geri kalanından kolayca ayırt edilebilir (Meyer 2000).

Karakteristik denklemin katsayıları bulunurken Cayley-Hamilton teoreminden yararlanılmaktadır. Cayley-Hamilton teoremine göre her matris kendi karakteristik denklemini sağlar. Bir $[A]$ matrisinin karakteristik denklemi $p(\lambda) = 0$ ise $p(A) = 0$ dır.

$[A]$ matrisinin karakteristik denklemi ve Cayley - Hamilton teoremine göre yazılan matris eşitliği aşağıdaki gibidir.

$$p(\lambda) = \det[[A] - \lambda [I]] = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (3.29)$$

$$p(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I \quad (3.30)$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = 0 \quad \rightarrow \quad A^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = 0 \quad (3.31)$$

(3.30) eşitliği herhangi bir x vektörü ile çarpıldığında,

$$p(A) x = A^n x + a_1 A^{n-1} x + \cdots + a_n I x = 0 \quad (3.32)$$

$$A^n x + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i x = 0 \quad (3.33)$$

elde edilir. Bu eşitlik bir doğrusal denklem sistemidir. Bu denklem sistemi çözülerek karakteristik denklemin a_i katsayıları bulunur.

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin özdeğer probleminin, Krylov yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

Krylov yönteminde, ilgili matrisin karakteristik denkleminin bulunuşu için çok terimli önce Cayley – Hamilton teoremine göre yazılıp, bulunan eşitlik herhangi bir x vektörü ile çarpıldığında $n = 3$ için (3.33) denkleminde,

$$A^3 x + \sum_{i=0}^2 a_i A^i x = 0 \quad \rightarrow \quad A^3 x + a_0 A^0 x + a_1 A^1 x + a_2 A^2 x = 0 \quad (3.34)$$

şeklinde bir matris denklemi bulunur. Burada $x = [1 \ 0 \ 0]^T$ ve $[A] = [K^{-1}][M]$ seçilmiştir.

$$A = [K^{-1}][M] = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,7 & 0,7 \\ 0,4 & 0,7 & 1,2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0,32 & 0,36 & 0,46 \\ 0,72 & 1,06 & 1,41 \\ 0,92 & 1,41 & 2,01 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0,456 & 0,638 & 0,868 \\ 1,276 & 1,873 & 2,578 \\ 1,736 & 2,578 & 3,583 \end{bmatrix}$$

$$A^0 x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Ax = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix} \quad A^2 x = \begin{bmatrix} 0,32 \\ 0,72 \\ 0,92 \end{bmatrix} \quad A^3 x = \begin{bmatrix} 0,456 \\ 1,276 \\ 1,736 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A^3x + a_0A^0x + a_1A^1x + a_2A^2x = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} 0,456 \\ 1,276 \\ 1,736 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0,32 \\ 0,72 \\ 0,92 \end{bmatrix} = 0 \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 0,456 \\ 1,276 \\ 1,736 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0,4 & 0,32 \\ 0 & 0,4 & 0,72 \\ 0 & 0,4 & 0,92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,10 \\ 0,95 \\ -2,30 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Bulunan katsayılar (3.31) denkleminde yerlerine yazılarak matrisin karakteristik denklemi

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 = \lambda^3 - 2,3 \lambda^2 + 0,95 \lambda - 0,1 = 0 \quad (3.35)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözülmesi ile elde edilen kökler sırasıyla $\lambda_1 = 1,804162$, $\lambda_2 = 0,325614$ ve $\lambda_3 = 0,170224$ şeklindedir.

$[A]$ matrisi olarak $[K^{-1}][M]$ dinamik matrisi kullanıldığından $\lambda = 1/\omega^2$ dir. Buna göre $\omega_1^2 = 0,554274$, $\omega_2^2 = 3,071121$ ve $\omega_3^2 = 5,874612$ olarak hesaplanır.

3.2.2. Faddeev–Leverrier yöntemi

Faddeev - Leverrier yöntemi de Krylov yönteminde olduğu gibi bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde yazıldığında;

$$p(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n] = 0 \quad (3.36)$$

katsayıları bulmaya yarar.

Bu yöntemde özdeğerlerin iki özelliği kullanılır:

a) $[A]$ herhangi bir matris olmak üzere, matrisin izi trA

$$trA = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (3.37)$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü üzere trA , $[A]$ matrisinin özdeğerlerinin toplamına eşittir.

b) $[A]$ matrisinin özdeğerleri λ_i ($i = 1, \dots, n$) ise A^r ($\equiv A A^{r-1}$; yani $A^2 = A A$, $A^3 = A A^2$, ...) 'nin özdeğerleri de λ_i^r ($r = 1, \dots, n$) olur.

(3.36) denkleminin n adet kökü $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1)^n [\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n] \\ &= (-1)^n [(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)] = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Çarpma işlemi ile sağdan genişletilerek a_i katsayıları λ_i cinsinden elde edilebilir.

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda + (\lambda_1 \lambda_2)$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \lambda^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) \lambda - (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) = \lambda^4 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \lambda^3$$

$$+ (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4) \lambda^2$$

$$- (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) \lambda + (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$$

Görüldüğü üzere, λ^n in katsayısı 1, $-\lambda^{n-1}$ in katsayısı tüm λ_i 'lerin toplamı ve λ^{n-2} in katsayısı ise ayrı ayrı λ_i 'lerin çarpımı veya çarpımların toplamıdır.

$$a_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_1\lambda_n + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \dots + \lambda_2\lambda_n + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$a_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \dots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$\vdots$$

(3.39)

(3.37) eşitliği ile $A, A^2, \dots, A^n$ matrislerinin izlerini kullanarak p_i ; ($i = 1, 2, \dots, n$) değerlerini tanımlayabiliriz.

$$p_1 = \text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$p_2 = \text{tr } A^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

$$\vdots$$

$$p_n = \text{tr } A^n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n$$

(3.40)

Burada tanımlanan p_i değerleri ilgili matrisin $(A, A^2, \dots, A^n)$ köşegen elemanlarının toplamıdır. (3.39) ve (3.40) denklemleri a_i katsayılarını elde etmek üzere aşağıdaki gibi birleştirilebilir.

$$a_1 = p_1$$

$$\begin{aligned}
a_1 p_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \\
&= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 + 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1} \lambda_n) \\
&= p_2 + 2 a_2 \\
3a_3 &= a_2 p_1 - a_1 p_2 + p_3 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Bu eşitliklerden a_i katsayılarını:

$$\begin{aligned}
a_1 &= p_1 \\
a_2 &= \frac{1}{2}(a_1 p_1 - p_2) \\
a_3 &= \frac{1}{3}(p_3 - a_1 p_2 + a_2 p_1) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.42}$$

şeklinde elde ederiz. Genel olarak,

$$a_i = \frac{(-1)^{i-1}}{i} (p_i - a_1 p_{i-1} + \cdots + (-1)^{i-1} a_{i-1} p_1); (i = 1, 2, \dots, n) \tag{3.43}$$

biçiminde ifade edilebilirler (Gupta 1995).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin özdeğer probleminin, Faddeev - Leverrier yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

(3.36) denklemi $n = 3$ için

$$p(\lambda) = (-1)^3 [\lambda^3 - a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + (-1)^3 a_3] = -\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

şeklinde yazıldığında; Faddeev–Leverrier yöntemine göre katsayılar, (3.40) ve (3.42) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$A = [K^{-1}][M] = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,7 & 0,7 \\ 0,4 & 0,7 & 1,2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad p_1 = tr A = 2,3$$

$$A^2 = A A = \begin{bmatrix} 0,32 & 0,36 & 0,46 \\ 0,72 & 1,06 & 1,41 \\ 0,92 & 1,41 & 2,01 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad p_2 = tr A^2 = 3,39$$

$$A^3 = A A^2 = \begin{bmatrix} 0,456 & 0,638 & 0,868 \\ 1,276 & 1,873 & 2,578 \\ 1,736 & 2,578 & 3,583 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad p_3 = tr A^3 = 5,912$$

$$a_1 = p_1 = 2,3$$

$$a_2 = \frac{1}{2} (a_1 p_1 - p_2) = \frac{1}{2} (2,3 \times 2,3 - 3,39) = 0,95$$

$$a_3 = \frac{1}{3} (p_3 - a_1 p_2 + a_2 p_1) = \frac{1}{3} [5,912 - (2,3 \times 3,39) + (0,95 \times 2,3)] = 0,1$$

Bulunan bu a_i katsayıları (3.36) denklemine yerlerine yazılarak matrisin karakteristik denklemi

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 2,3 \lambda^2 - 0,95 \lambda + 0,1 = 0 \quad (3.44)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözülmesi ile elde edilen kökler sırasıyla $\lambda_1 = 1,804162$, $\lambda_2 = 0,325614$ ve $\lambda_3 = 0,170224$ şeklindedir.

$[A]$ matrisi olarak $[K^{-1}][M]$ dinamik matrisi kullanıldığından $\lambda = 1/\omega^2$ dir. Buna göre $\omega_1^2 = 0,554274$, $\omega_2^2 = 3,071121$ ve $\omega_3^2 = 5,874612$ olarak hesaplanır.

3.3. Vektör İterasyon Yöntemleri

3.3.1. Vektör iterasyonu (Kuvvet) yöntemi

Kuvvet yöntemi olarak da bilinen vektör iterasyonu yöntemi, mutlak değerce en büyük özdeğer ve ona karşılık gelen özvektörü hesaplamada kullanılmaktadır. Yöntemin bazı sınırlamaları vardır. Yöntemin tam olarak işlemesi için $[A]$ matrisinin aşağıdaki iki özelliğe sahip olduğunun kabul edilmesi gerekmektedir:

1. En büyük modüllü tek bir özdeğer vardır.
2. n tane lineer bağımsız özvektör vardır.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere $[A]$ matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ özdeğerleri, birinci kabule göre,

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3| < \dots < |\lambda_n| \quad (i = 1, \dots, \dots, n) \quad (3.45)$$

olacak şekilde sıralanabilir. Mutlak değerce en büyük olan λ_n özdeğeri, $[A]$ matrisinin baskın özdeğeridir.

İkinci kabule göre,

$$A q_k = \lambda_k q_k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.46)$$

olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ için lineer bağımsız $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ özvektörleri vardır. u başlangıç vektörü, $\mathbb{R}^n$ 'nin sıfırdan farklı bir elemanı olduğu kabul edilerek; $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ vektörlerinin lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$u = c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3 + \dots + c_n q_n \quad (c_n \neq 0) \quad (3.47)$$

Genel bir ifade ile,

$$u = \sum_{i=1}^n c_i q_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.48)$$

şeklinde yazılır. Burada, $u_1 = A u$, $u_2 = A u_1, \dots, u_k = A u_{k-1}$ ve

$$u_k = A^k u \quad (3.49)$$

yazılabilir.

$$u_1 = A u = c_1(A q_1) + c_2(A q_2) + c_3(A q_3) + \dots + c_n(A q_n)$$

$$= c_1(\lambda_1 q_1) + c_2(\lambda_2 q_2) + c_3(\lambda_3 q_3) + \dots + c_n(\lambda_n q_n)$$

$$u_2 = A u_1 = A^2 u$$

$$= c_1 (A^2 q_1) + c_2 (A^2 q_2) + c_3 (A^2 q_3) + \dots + c_n (A^2 q_n)$$

$$= c_1 (\lambda_1^2 q_1) + c_2 (\lambda_2^2 q_2) + c_3 (\lambda_3^2 q_3) + \dots + c_n (\lambda_n^2 q_n)$$

⋮

$$\begin{aligned}
u_k &= A u_{k-1} = A^2 u_{k-2} = \dots = A^k u \\
&= c_1 (A^k q_1) + c_2 (A^k q_2) + c_3 (A^k q_3) + \dots + c_n (A^k q_n) \\
&= c_1 (\lambda_1^k q_1) + c_2 (\lambda_2^k q_2) + c_3 (\lambda_3^k q_3) + \dots + c_n (\lambda_n^k q_n)
\end{aligned}$$

(3.48) ve (3.49) eşitliklerinden

$$u_k = A^k \sum_{i=1}^n c_i q_i = \sum_{i=1}^n c_i A^k q_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k q_i \quad (3.50)$$

elde edilir. Bu eşitlik aşağıdaki forma dönüştürülebilir (Kincaid and Cheney 2002).

$$u_k = \lambda_n^k \left[c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^k q_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n} \right)^k q_2 + \dots + c_{n-1} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right)^k q_{n-1} + c_n q_n \right] \quad (3.51)$$

Yukarıdaki eşitlik de genel bir ifade ile

$$u_k = \lambda_n^k \left[\sum_{i=1}^{n-1} c_i (\lambda_i / \lambda_n)^k q_i + c_n q_n \right] \quad (3.52)$$

Şeklinde yazılabilir. (3.51) eşitliğinin her iki tarafı λ_n^k ile bölünecek olursa,

$$\frac{u_k}{\lambda_n^k} = \frac{1}{\lambda_n^k} A^k u = c_1 \left(\frac{\lambda_1^k}{\lambda_n^k} q_1 \right) + c_2 \left(\frac{\lambda_2^k}{\lambda_n^k} q_2 \right) + c_3 \left(\frac{\lambda_3^k}{\lambda_n^k} q_3 \right) + \dots + c_n q_n \quad (3.53)$$

elde edilir. Bu ifadeden, u vektörünün q_n doğrultusunda bileşeni olduğu müddetçe, yani $c_n \neq 0$ (bunun için u ve q_n vektörleri dik olmamalı - yani u vektörünün q_n doğrultusunda bileşeni olmamalı) oldukça,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{\lambda_n^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^k} A^k u = \lim_{k \rightarrow \infty} c_n q_n \quad (3.54)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{\lambda_n^k} = c_n q_n \Rightarrow \begin{cases} u_k \rightarrow \lambda_n^k c_n q_n \\ u_{k+1} \rightarrow \lambda_n^{k+1} c_n q_n \end{cases} \quad (3.55)$$

bulunur. λ_n en büyük özdeğer olduğundan $1 \leq i \leq n-1$ için $|\lambda_i/\lambda_n| < 1$ olup, k 'nın büyük değerleri için $(\lambda_i/\lambda_n)^k$ katsayılarının sıfıra (0) yaklaştığı ve (3.52) eşitliğinde parantez içindeki vektörün de en büyük özdeğere karşılık gelen özvektöre (q_n) yakınsadığı açıktır.

Aynı şekilde aşağıdaki eşitlikte yazılabilir.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{\lambda_n^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^{k+1}} A^{k+1} u = \lim_{k \rightarrow \infty} c_n q_n \quad (3.56)$$

(3.54) ve (3.56) eşitlikleri, q_n vektörü ile ortogonal olmayan herhangi bir y vektörü ile çarpılır ise,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{\lambda_n^k} y = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^k} A^k u y = \lim_{k \rightarrow \infty} c_n q_n y \quad (3.57)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{\lambda_n^{k+1}} y = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^{k+1}} A^{k+1} u y = \lim_{k \rightarrow \infty} c_n q_n y \quad (3.58)$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^{k+1}} A^{k+1} u y = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^k} A^k u y \neq 0 \quad (3.59)$$

bulunur.

Son olarak (3.59) eşitliğinde bölme işlemi uygulanarak,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^{k+1} u y}{A^k u y} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{k+1}}{\lambda_n^k} = \lambda_n \quad (3.60)$$

sonucuna erişilir. r değeri bir vektörün herhangi bir bileşenini göstermek üzere

$$\lambda_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{[u_{k+1}]_r}{[u_k]_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (3.61)$$

bulunur. Ayrıca (3.52) eşitliğinden aşağıda verilen sonuç da elde edilebilir.

$$\lambda_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y^T u_{k+1}}{y^T u_k} \quad (3.62)$$

Yukarıdaki eşitlikteki $y^T u_{k+1} = y^T A u_k$ sayısı Schwarz sabiti olarak adlandırılır. Yaklaşımın hızı, (3.52) eşitliğinde $(\lambda_i/\lambda_n)^k$ oranının sıfıra gidiş hızına bağlıdır (Ralston and Rabinowitz 2001).

En büyük özdeğere karşılık gelen özvektör bulunduktan sonra en büyük özdeğer ise Rayleigh oranı ile bulunabilir veya

$$u_k = A^k u \simeq \lambda_n^k c_n q_n \quad (3.63)$$

$$u_{k+1} = A^{k+1} u \simeq \lambda_n^{k+1} c_n q_n \quad (3.64)$$

Burada yakınsama hızı λ_{n-1}/λ_n oranına bağlıdır; daha küçük oran daha hızlı bir yakınsamadır.

Mutlak değerce en büyük iki kök, yaklaşık olarak birbirine eşit; yani $|\lambda_n| \approx |\lambda_{n-1}|$ ise yaklaşım yavaş olur. Yaklaşım, ekstrapolasyon yöntemleri ile hızlandırılabilir. $|\lambda_n| = |\lambda_{n-1}|$ halinde yakınsamayabilir. Bazı hallerde vektörün bazı elemanları hızlı yaklaştığı halde bazı elemanları çok yavaş yakınsayabilir.

(3.63) veya (3.64) her iki denklem ile elde edilen vektör büyüklükçe en büyük özdeğere karşılık gelen özvektör ile orantılıdır. k yeteri kadar büyük olduğunda bir elemanın $(k + 1)$. iterasyondaki değeri ile k . iterasyondaki değerinin oranı λ_n 'e yaklaşır.

Bunun yerine, ürün vektörünün, rastgele seçilmiş bir elemanının iki ardışık değerinin oranı kullanmak yerine, aşağıdaki alternatif ifade $(k + 1)$ yinelemeden sonra daha iyi bir özdeğer tahmini elde etmek için kullanılabilir:

$$\rho_{k+1} = \frac{u_{k+1}^T u_{k+1}}{u_{k+1}^T u_k} \quad (3.65)$$

(3.65) eşitliğinin doğruluğu, sırasıyla (3.64) ve (3.63) eşitliklerindeki u_{k+1} ve u_k yerine koyularak ispatlanabilir.

Uygulamada keyfi seçilen özvektörün büyüklüğünden dolayı, her iterasyon sonunda sonuç vektörünü normalize etmek uygundur. Aslında $[A]$ ile herbir çarpma işleminde sonuç vektörü sürekli değişir ve bu değişim hesaplamalarda sayısal sorunlara neden olabilir. Her iterasyon sonrasında ölçekleme yapılması eleman değerlerini makul sınırlar içinde tutar. Ölçekleme en büyük elemanı ayırma yoluyla veya Euclidean normu ile birim normalize edilerek sağlanabilir. Son yöntem kabul edildiğinde, işlem adımları şu şekildedir:

$$\bar{u}_{k+1} = A u_k \quad (3.66)$$

$$\rho_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1}}{\bar{u}_{k+1}^T u_k} \quad (3.67)$$

$$u_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{(\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1})^{1/2}} \quad (3.68)$$

(3.67) eşitliği Rayleigh katsayısı ile bir özdeğer tahminidir ve (3.68) eşitliğindeki $\bar{u}_{k+1}$, normalleşmeyi göstermektedir, Euclidean normu ile birim normalize u_{k+1} vektörü elde edilir (Humar 2002).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin öz değer probleminin, vektör iterasyonu yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

Vektör iterasyonu yöntemi, (3.46) eşitliğine göre standart tip özdeğer problemine uygulanmaktadır. İterasyonda, (2.69) eşitliğinin açıklamasında bahsedildiği şekilde $[M^{-1}][K]$ matrisi kullanıldığında, $\lambda = \omega^2$ eşitliği gereği iterasyon λ ’nın en az baskın değerine, yani en büyük frekans olan ω^2 ’ye yakınsamaktadır. (2.70) eşitliğinin açıklamasında bahsedildiği şekilde $[K^{-1}][M]$ matrisi kullanıldığında da, $\lambda = 1/\omega^2$ eşitliği gereği iterasyon λ ’nın en baskın değerine, yani en küçük frekans olan ω^2 ’ye yakınsamaktadır.

Burada başlangıç vektörü olarak $[1 \ 1 \ 1]^T$ birim vektör kullanılmış, $[A] = [M^{-1}][K]$ matrisi üzerinde (3.66), (3.67) ve (3.68) eşitlikleri ile tanımlanan işlem adımları uygulanmıştır. Elde edilen değerler tablo halinde verilmiştir.

Çizelge 3.2. Vektör iterasyonu yöntemi ile özdeğer hesabı

k	u_k	$\bar{u}_{k+1}^T = A u_k$	$\rho \rightarrow \omega^2$	$u_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{\sqrt{\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1}}}$	ϵ
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	2,5	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	-
2	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$	4,642857	$\begin{bmatrix} 0,868243 \\ -0,496139 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.461538
3	$\begin{bmatrix} 0,868243 \\ -0,496139 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,534990 \\ -3,721042 \\ 0,992278 \end{bmatrix}$	5,559468	$\begin{bmatrix} 0,676227 \\ -0,711818 \\ 0,189818 \end{bmatrix}$	0.164874
4	$\begin{bmatrix} 0,676227 \\ -0,711818 \\ 0,189818 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,078615 \\ -4,579365 \\ 1,803273 \end{bmatrix}$	5,929160	$\begin{bmatrix} 0,530321 \\ -0,788840 \\ 0,310631 \end{bmatrix}$	0.062352
5	$\begin{bmatrix} 0,530321 \\ -0,788840 \\ 0,310631 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,644963 \\ -4,837263 \\ 2,198942 \end{bmatrix}$	5,969653	$\begin{bmatrix} 0,445617 \\ -0,814970 \\ 0,370472 \end{bmatrix}$	0.006783
6	$\begin{bmatrix} 0,445617 \\ -0,814970 \\ 0,370472 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,374629 \\ -4,892058 \\ 2,370884 \end{bmatrix}$	5,941212	$\begin{bmatrix} 0,400288 \\ -0,824648 \\ 0,399657 \end{bmatrix}$	1
7	$\begin{bmatrix} 0,400288 \\ -0,824648 \\ 0,399657 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,225656 \\ -4,898481 \\ 2,448609 \end{bmatrix}$	5,913721	$\begin{bmatrix} 0,376504 \\ -0,828653 \\ 0,414220 \end{bmatrix}$	0.004649
8	$\begin{bmatrix} 0,376504 \\ -0,828653 \\ 0,414220 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,146417 \\ -4,896062 \\ 2,485747 \end{bmatrix}$	5,896173	$\begin{bmatrix} 0,364074 \\ -0,830468 \\ 0,421631 \end{bmatrix}$	0.002976
9	$\begin{bmatrix} 0,364074 \\ -0,830468 \\ 0,421631 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,104728 \\ -4,893283 \\ 2,504198 \end{bmatrix}$	5,886179	$\begin{bmatrix} 0,357582 \\ -0,831341 \\ 0,425449 \end{bmatrix}$	1
10	$\begin{bmatrix} 0,357582 \\ -0,831341 \\ 0,425449 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,082877 \\ -4,891427 \\ 2,513581 \end{bmatrix}$	5,880737	$\begin{bmatrix} 0,354189 \\ -0,831778 \\ 0,427430 \end{bmatrix}$	0.000925
11	$\begin{bmatrix} 0,354189 \\ -0,831778 \\ 0,427430 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,071440 \\ -4,890348 \\ 2,518414 \end{bmatrix}$	5,877833	$\begin{bmatrix} 0,352416 \\ -0,832000 \\ 0,428461 \end{bmatrix}$	0.000494
12	$\begin{bmatrix} 0,352416 \\ -0,832000 \\ 0,428461 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,065457 \\ -4,889754 \\ 2,520922 \end{bmatrix}$	5,876300	$\begin{bmatrix} 0,351490 \\ -0,832115 \\ 0,428998 \end{bmatrix}$	0.000261
13	$\begin{bmatrix} 0,351490 \\ -0,832115 \\ 0,428998 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,062329 \\ -4,889436 \\ 2,522227 \end{bmatrix}$	5,875494	$\begin{bmatrix} 0,351005 \\ -0,832175 \\ 0,429279 \end{bmatrix}$	1
14	$\begin{bmatrix} 0,351005 \\ -0,832175 \\ 0,429279 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,060693 \\ -4,889268 \\ 2,522908 \end{bmatrix}$	5,875071	$\begin{bmatrix} 0,350752 \\ -0,832206 \\ 0,429426 \end{bmatrix}$	7.19×10^{-5}

Çizelge 3.2. (devam)

k	u_k	$\bar{u}_{k+1}^T = A u_k$	$\rho \rightarrow \omega^2$	$u_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{\sqrt{\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1}}}$	ϵ
15	$\begin{bmatrix} 0,350752 \\ -0,832206 \\ 0,429426 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,059838 \\ -4,889179 \\ 2,523263 \end{bmatrix}$	5,874850	$\begin{bmatrix} 0,350620 \\ -0,832222 \\ 0,429503 \end{bmatrix}$	3.77×10^{-5}
16	$\begin{bmatrix} 0,350620 \\ -0,832222 \\ 0,429503 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,059391 \\ -4,889132 \\ 2,523449 \end{bmatrix}$	5,874734	$\begin{bmatrix} 0,350550 \\ -0,832230 \\ 0,429543 \end{bmatrix}$	1.97×10^{-5}
17	$\begin{bmatrix} 0,350550 \\ -0,832230 \\ 0,429543 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,059157 \\ -4,889108 \\ 2,523546 \end{bmatrix}$	5,874674	$\begin{bmatrix} 0,350514 \\ -0,832235 \\ 0,429564 \end{bmatrix}$	1.03×10^{-5}
18	$\begin{bmatrix} 0,350514 \\ -0,832235 \\ 0,429564 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,059035 \\ -4,889095 \\ 2,523597 \end{bmatrix}$	5,874642	$\begin{bmatrix} 0,350495 \\ -0,832237 \\ 0,429575 \end{bmatrix}$	5.39×10^{-6}
19	$\begin{bmatrix} 0,350495 \\ -0,832237 \\ 0,429575 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,058971 \\ -4,889089 \\ 2,523623 \end{bmatrix}$	5,874625	$\begin{bmatrix} 0,350485 \\ -0,832238 \\ 0,429580 \end{bmatrix}$	2.82×10^{-6}
20	$\begin{bmatrix} 0,350485 \\ -0,832238 \\ 0,429580 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,058938 \\ -4,889085 \\ 2,523637 \end{bmatrix}$	5,874617	$\begin{bmatrix} 0,350480 \\ -0,832239 \\ 0,429583 \end{bmatrix}$	1.47×10^{-6}
21	$\begin{bmatrix} 0,350480 \\ -0,832239 \\ 0,429583 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,058920 \\ -4,889083 \\ 2,523645 \end{bmatrix}$	5,874612	$\begin{bmatrix} 0,350478 \\ -0,832239 \\ 0,429585 \end{bmatrix}$	7.70×10^{-7}
22	$\begin{bmatrix} 0,350478 \\ -0,832239 \\ 0,429585 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,058911 \\ -4,889082 \\ 2,523648 \end{bmatrix}$	5,874610	$\begin{bmatrix} 0,350476 \\ -0,832239 \\ 0,429586 \end{bmatrix}$	4.02×10^{-7}
23	$\begin{bmatrix} 0,350476 \\ -0,832239 \\ 0,429586 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,058906 \\ -4,889082 \\ 2,523650 \end{bmatrix}$	5,874609	$\begin{bmatrix} 0,350475 \\ -0,832240 \\ 0,429586 \end{bmatrix}$	2.10×10^{-7}
24	$\begin{bmatrix} 0,350475 \\ -0,832240 \\ 0,429586 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,058904 \\ -4,889081 \\ 2,523651 \end{bmatrix}$	5,874608	$\begin{bmatrix} 0,350475 \\ -0,832240 \\ 0,429586 \end{bmatrix}$	1.10×10^{-7}
25	$\begin{bmatrix} 0,350475 \\ -0,832240 \\ 0,429586 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,058902 \\ -4,889081 \\ 2,523652 \end{bmatrix}$	5,874608	$\begin{bmatrix} \mathbf{0,350475} \\ \mathbf{-0,832240} \\ \mathbf{0,429586} \end{bmatrix}$	5.75×10^{-8}

3.3.2. Ters vektör iterasyonu yöntemi

Tekil olmayan bir $[A]$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ise $[A^{-1}]$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ olur. $[A^{-1}]$ matrisine vektör iterasyonu yöntemi uygulandığında mutlak değerce en küçük özdeğer ve ona karşı gelen özvektör yakınsanır.

Bu iterasyon, ters vektör iterasyonu olarak adlandırılmaktadır. Ters iterasyon, genellikle dinamik matris olarak adlandırılan $[D] = [K^{-1}][M]$ matrisi ile tekrarlı işlem gerektirir. Diğer bütün hususlarda, vektör iterasyonu yöntemine benzemektedir.

Ters vektör iterasyonu algoritması,

$$\bar{u}_{k+1} = D u_k \quad (3.69)$$

$$\rho_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}^T u_k}{\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1}} \quad (3.70)$$

$$u_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{(\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1})^{1/2}} \quad (3.71)$$

şeklinde özetlenebilir.

(3.70) eşitliği (3.67) eşitliğinin tersidir, özdeğerlerin tersini verir. Bu nedenle $\rho_{k+1} = 1/\lambda = \omega^2$ dır.

Sayısal hesaplama açısından, doğrusallaştırılmış bir özdeğer problemi üzerine aşağıdaki gibi ters iterasyon yapmak daha etkilidir.

$$K \bar{u}_{k+1} = x_k \quad (3.72)$$

$$\bar{x}_{k+1} = M \bar{u}_{k+1} \quad (3.73)$$

$$\rho_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}^T x_k}{\bar{u}_{k+1}^T \bar{x}_{k+1}} \quad (3.74)$$

$$x_{k+1} = \frac{\bar{x}_{k+1}}{(\bar{u}_{k+1}^T \bar{x}_{k+1})^{1/2}} = \frac{M \bar{u}_{k+1}}{(\bar{u}_{k+1}^T M \bar{u}_{k+1})^{1/2}} \quad (3.75)$$

İterasyon $x = Mu$ ile başlatılır. Burada u , herhangi bir deneme vektörüdür. (3.72) eşitliği $\bar{u}_{k+1}$ için çözülür. Çözüm ayrıca, mevcut deneme vektörü ile $[D] = [K^{-1}][M]$ matrisinin çarpımına eşittir. (3.74) eşitliği Rayleigh katsayısı ile bir özdeğer tahminidir. (3.75) eşitliğinde deneme vektörünün mevcut değeri normalleştirilir, öyle ki $x_{k+1} = M u_{k+1}$ ve $u_{k+1}^T M u_{k+1} = 1$ dir. k indisi yeterince büyük olduğunda $\rho_{k+1}, \lambda_1 = \omega_1^2$ e ve u_{k+1} 'de ϕ_1 'e yaklaşır. Böylece

$$\omega_1^2 = \rho_{k+1} \quad (3.76)$$

$$\phi_1 = \frac{\bar{u}_{k+1}}{(\bar{u}_{k+1}^T \bar{x}_{k+1})^{1/2}} \quad (3.77)$$

bulunur. Yakınsama, λ 'nın ardışık iki değeri karşılaştırılarak tespit edilebilir.

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} < \varepsilon \quad (3.78)$$

Burada ε , belirlenen tolerans miktarıdır. $\varepsilon = 10^{-2s}$ ise, özdeğer $2s$ basamağa kadar doğru olur, özvektörler ise s basamağa kadar doğru olur.

Açık bir şekilde görülmektedir ki, yukarıda açıklandığı gibi uygulandığında, ters vektör iterasyonu her zaman en az baskın özdeğer ve buna karşı gelen özvektöre yakınsar. En az baskın ikinci özdeğer için, modların süperpozisyonunun gösteriminde olduğu gibi bir deneme vektörünün olması şartıyla yakınsama elde edilebilir, ilk moda katkısı hiç yoktur.

Böyle bir durumda (3.47) eşitliğindeki c_1 katsayısı sıfır olur ve deneme vektörü ilk moda diktir. Hemen, rastgele seçilen deneme vektörünün ilk moda dik olması beklenemez. İlk mod şeklinin belirlenmesi koşuluyla, deneme vektörü değiştirilerek bu ilk mod şekli de kaldırılabilir. Bu tür değişikliğin kullanıldığı işleme Gram-Shmidt Ortogonalizasyonu denir. Bu nedenle, ilk mod şekli için keyfi olarak seçilen deneme vektörü u 'nun kaldırılması istenirse, ilk moddan bağımsız ve $\tilde{u}$ ile gösterilen arındırılmış vektör;

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= u - c_1 q_1 \\ &= u - \left(\frac{q_1^T M u}{q_1^T M q_1} \right) q_1\end{aligned}\quad (3.79)$$

şeklindedir. c_i ($i = 1$), eşitlikte yerine koyulmuştur. (3.79) eşitliği başka bir şekilde de ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \left(I - \frac{q_1 q_1^T M}{q_1^T M q_1} \right) u \\ &= S_1 u\end{aligned}\quad (3.80)$$

Burada S_1 , ilk mod süpürme matrisi,

$$S_1 = I - \frac{q_1 q_1^T M}{q_1^T M q_1}\quad (3.81)$$

ile verilmektedir. Teorik olarak, arındırılmış $\tilde{u}$ vektörü ile iterasyon başlatıldığında, işlemin bir sonraki baskın özdeğere yakınsaması gerekir.

Uygulamada sonlu hesaplamalar gözönünde tutulduğunda, iterasyonlarda sayısal hesaplamalar sırasında küçük hatalar kaçınılmazdır. Deneme vektörü, ilk özvektörün bozulmasına neden olur ve arındırma nedeniyle her bir iterasyon sonunda (3.80) eşitliğindeki işlem tekrarlanmalıdır. İterasyonda $[D] = [K^{-1}][M]$ dinamik matrisi ile tekrarlı çarpma kullanıldığında arındırma, her bir iterasyonda D ile

$$D_2 = D S_1 \quad (3.82)$$

şeklinde uygun bir değişiklik yapılarak sağlanır. İterasyonda D yerine D_2 kullanılır.

Gram-Shmidt işlemi, aslında önceden belirlenmiş olan tüm özvektör veya mod şekilleri ile ilgili deneme vektörü ortogonalleştirilmesinde kullanılır. Bu nedenle arındırılmış vektör üzerindeki iterasyon sonraki en az baskın özdeğere yakınsayacaktır. Ortogonal bir u vektörü üzerinde aşağıdaki işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u - \sum_{j=1}^n c_j q_j \\ &= u - \sum_{j=1}^n \frac{q_j^T M u}{q_j^T M q_j} q_j \\ &= u - \sum_{j=1}^n (\phi_j^T M u) \phi_j \end{aligned} \quad (3.83)$$

elde edilir. Burada ϕ_j , M-ortonormal mod şeklidir. $1, \dots, n$ arasındaki tüm modları süpüren bir S_n matrisi, (3.81) eşitliğine benzer bir şekilde oluşturulabilir.

$$S_n = I - \sum_{j=1}^n \frac{q_j q_j^T M u}{q_j^T M q_j} \quad (3.84)$$

$D_{n+1} = D S_n$ matrisi ters iterasyonda kullanıldığında, işlem λ_{n+1} özdeğeri ve buna karşılık gelen özvektöre yakınsayacaktır.

Süpürme matrisi, elle yapılacak hesaplamalar için daha kullanışlı olan alternatif bir işlemle elde edilebilmektedir. Yöntemi açıklamak için, ϕ_1 ilk modu önceden hesaplanmış bir üç serbestlik dereceli sistem dikkate alındığında, ikinci mod şeklinin elde edilmesi için arındırılmış deneme vektörü, ϕ_1 ile ortogonal olmalıdır.

$$\phi_1^T M \tilde{u} = 0 \quad (3.85)$$

(3.85) matris denkleminin genişletilmesi ile

$$\phi_{11} \sum_{i=1}^3 m_{1i} \tilde{u}_i + \phi_{21} \sum_{i=1}^3 m_{2i} \tilde{u}_i + \phi_{31} \sum_{i=1}^3 m_{3i} \tilde{u}_i = 0 \quad (3.86)$$

elde edilir. $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ ve $\tilde{u}_3$ cinsinden ifade edilebilir.

$$\tilde{u}_1 = -\frac{\sum_{j=1}^3 \phi_{j1} m_{j2}}{\sum_{j=1}^3 \phi_{j1} m_{j1}} \tilde{u}_2 - \frac{\sum_{j=1}^3 \phi_{j1} m_{j3}}{\sum_{j=1}^3 \phi_{j1} m_{j1}} \tilde{u}_3 \quad (3.87)$$

İkinci mod şekli için ilk deneme vektörü,

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

şeklinde ise arındırılmış deneme vektörü, $\tilde{u}_2 = u_2$, $\tilde{u}_3 = u_3$ alınarak (3.87) eşitliğini sağlamak üzere seçilen $\tilde{u}_1$ ile matris formunda

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sum_{j=1}^3 \Phi_{j1} m_{j2}}{\sum_{j=1}^3 \Phi_{j1} m_{j1}} & -\frac{\sum_{j=1}^3 \Phi_{j1} m_{j3}}{\sum_{j=1}^3 \Phi_{j1} m_{j1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

veya

$$\tilde{u} = S_1 u \quad (3.90)$$

şeklinde oluşturulabilir. S_1 , gerekli olan süpürme matrisidir. Burada ikinci modla ilgili bu süpürme matrisinin sıfırlardan oluşan ilk sütunu, deneme vektörünün elemanları üzerinde önemli bir sınırlamadır. Üçüncü modu elde etmek için süpürme matrisinin ikinci sütununun sıfırlardan oluşacağı kolayca gösterilebilir.

Yukarıda açıklanan işlem şu şekilde genelleştirilebilir. Belirlenmiş olan mod şekillerinin sayısı s , kalan mod şekillerinin sayısı γ olmak üzere, $(s + 1)$. modda deneme vektörünün,

$$\Phi_s^T M \tilde{u} = 0 \quad (3.91)$$

eşitliğini sağlaması gerekmektedir. Burada Φ_s^T , belirlenmiş olan ilk s mod şeklinin matrisidir. u 'nun ilk s elemanından oluşan vektör u_s ve kalan r elemanlarından oluşan vektör u_r olmak üzere u 'nun bölündüğü, ayrıca M 'nin ilk s sütununun matrisi M_s ve kalan r sütunlarının matrisi M_r olmak üzere M 'nin bölündüğü düşünülürse, (3.91) eşitliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\underbrace{[\Phi_s^T]}_{(s \times N)} \underbrace{[M_s]}_{(N \times s)} \underbrace{[M_r]}_{(N \times r)} \begin{bmatrix} \tilde{u}_s \\ \tilde{u}_r \end{bmatrix} = 0 \quad (3.92)$$

$$\tilde{u}_s = -[\Phi_s^T M_s]^{-1} [\Phi_s^T M_r] \tilde{u}_r \quad (3.93)$$

Keyfi deneme vektörü,

$$u = \begin{bmatrix} u_s \\ u_r \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

ise arındırılmış deneme vektörü,

$$\{\tilde{u}\} = \begin{bmatrix} 0 & -[\Phi_s^T M_s]^{-1} [\Phi_s^T M_r] \\ (s \times s) & (s \times r) \\ 0 & I \\ (r \times s) & (r \times r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ u_r \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

ile belirlenir. Böylece süpürme matrisi,

$$S_s = \begin{bmatrix} 0 & -[\Phi_s^T M_s]^{-1} [\Phi_s^T M_r] \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

elde edilir. Burada elemanları sıfır olan s adet sütun vardır. İterasyonda kullanılacak olan değiştirilmiş dinamik matris, D ile S_s çarpımı ile elde edilir.

$$D_{s+1} = D S_s \quad (3.97)$$

D_{s+1} ile yürütülen iterasyon $(s + 1)$. özdeğer ve özvektöre yakınsar.

(3.72) üzerinden (3.75) eşitliği ile verilen algoritma kullanıldığında (3.73) eşitliği aşağıdaki gibi değiştirilebilir.

$$\bar{x}_{k+1} = M S_s \bar{u}_{k+1} \quad (3.98)$$

(s + 1) modu için iterasyon $x_1 = M S_s u$ ile başlatılır. Burada u ilk deneme vektörüdür ve (3.73) eşitliği yerine (3.98) eşitliği kullanılır (Humar 2002).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin özdeğer probleminin, ters vektör iterasyonu yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

Burada başlangıç vektörü olarak $x_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ birim vektörü kullanılmış, (3.72), (3.73), (3.74), (3.75), ve (3.77) eşitlikleri ile tanımlanan işlem adımları uygulanmıştır. Elde edilen değerler tablo halinde verilmiştir.

Çizelge 3.3. Ters vektör iterasyonu yöntemi ile özdeğer hesabı

k	x_k	$\bar{u}_{k+1} = K^{-1}x_k$	$\bar{x}_{k+1}$	$\rho \rightarrow \omega^2$	x_{k+1}	ϕ_1	ϵ
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8 \\ 1,8 \\ 2,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,2 \\ 3,6 \\ 4,6 \end{bmatrix}$	0,249745	$\begin{bmatrix} 0,722438 \\ 0,812743 \\ 1,038504 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,180609 \\ 0,406371 \\ 0,519252 \end{bmatrix}$	-
2	$\begin{bmatrix} 0,010492 \\ 0,011803 \\ 0,015082 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,003738 \\ 0,010459 \\ 0,014230 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,014951 \\ 0,020918 \\ 0,028459 \end{bmatrix}$	0,555125	$\begin{bmatrix} 0,573497 \\ 0,802393 \\ 1,091657 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,143374 \\ 0,401197 \\ 0,545829 \end{bmatrix}$	$5,5 \times 10^{-1}$
3	$\begin{bmatrix} 0,573497 \\ 0,802393 \\ 1,091657 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,246755 \\ 0,720267 \\ 0,993182 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,987019 \\ 1,440535 \\ 1,986363 \end{bmatrix}$	0,554302	$\begin{bmatrix} 0,547168 \\ 0,798581 \\ 1,101169 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,136792 \\ 0,399290 \\ 0,550584 \end{bmatrix}$	$1,49 \times 10^{-3}$
4	$\begin{bmatrix} 0,547168 \\ 0,798581 \\ 1,101169 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,244692 \\ 0,719629 \\ 0,994921 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,978767 \\ 1,439258 \\ 1,989842 \end{bmatrix}$	0,554275	$\begin{bmatrix} 0,542508 \\ 0,797748 \\ 1,102924 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,135627 \\ 0,398874 \\ 0,551462 \end{bmatrix}$	$4,79 \times 10^{-5}$
5	$\begin{bmatrix} 0,542508 \\ 0,797748 \\ 1,102924 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,244318 \\ 0,719486 \\ 0,995217 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,977272 \\ 1,438972 \\ 1,990434 \end{bmatrix}$	0,554274	$\begin{bmatrix} 0,541677 \\ 0,797585 \\ 1,103246 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,135419 \\ 0,398792 \\ 0,551623 \end{bmatrix}$	$1,56 \times 10^{-6}$
6	$\begin{bmatrix} 0,541677 \\ 0,797585 \\ 1,103246 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,244251 \\ 0,719458 \\ 0,995270 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,977003 \\ 1,438917 \\ 1,990540 \end{bmatrix}$	0,554274	$\begin{bmatrix} 0,541527 \\ 0,797554 \\ 1,103305 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,135382 \\ 0,398777 \\ 0,551652 \end{bmatrix}$	$5,07 \times 10^{-8}$
7	$\begin{bmatrix} 0,541527 \\ 0,797554 \\ 1,103305 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,244239 \\ 0,719453 \\ 0,995280 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,976955 \\ 1,438907 \\ 1,990559 \end{bmatrix}$	0,554274	$\begin{bmatrix} 0,541501 \\ 0,797549 \\ 1,103315 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,135375 \\ 0,398774 \\ 0,551658 \end{bmatrix}$	$1,65 \times 10^{-9}$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 0,135375 & 0,398774 & 0,551658 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,135375 \\ 0,398774 \\ 0,551658 \end{bmatrix} = 0,481674$$

$$\text{Normalleştirme işlemi: } X = \frac{1}{\sqrt{0,481674}} \begin{bmatrix} 0,135375 \\ 0,398774 \\ 0,551658 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0,195057} \\ \mathbf{0,574580} \\ \mathbf{0,794865} \end{bmatrix}}_{\phi_1}$$

3.3.3. Kaydırma ile vektör iterasyonu yöntemi

Özdeğer spektrumunun “kaydırılması”, iterasyon işleminin yakınsama oranını artırmak ve (λ_1, ϕ_1) haricindeki özçiftlere de yakınsamak için etkili bir yöntemdir.

İterasyonlarda birkaç mod belirlendikten sonra iterasyon tamamen hatalı olabilir ve bulunmuş olan özvektörlerin, deneme vektörlerinin arındırılması gerekir. Kaydırma ile iterasyon işleminde bu zorluk ortadan kaldırılır. Bu nedenle de, tercih edilen bir yöntemdir. Yöntem aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

Şekil 3.6’da özdeğer ekseninde merkezdeki kayma " μ "

$$\lambda = \mu + \delta \quad (3.99)$$

yı verir. Burada δ merkezdeki kaymanın özdeğere olan mesafesidir. (3.99) eşitliği (2.65) eşitliğinde yerine koyularak,

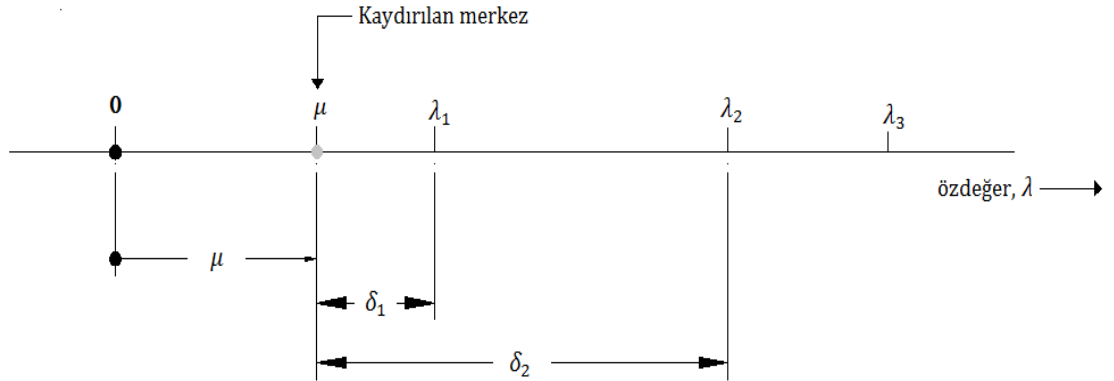
$$(K - \mu M) q = \delta M q \quad (3.100)$$

veya

$$(K - \mu M)^{-1} M q = \frac{1}{\delta} q \quad (3.101)$$

elde edilir. Burada $\hat{D} = (K - \mu M)^{-1} M$ dir.

$\hat{D}$ ile yapılan iterasyon, δ 'nın en küçük değerine karşılık gelen özdeğere yakınsayacaktır.



Şekil 3.6. Merkezdeki kayma miktarının özdeğerlere mesafesi

Bir sonraki en büyük özdeğer aranırken yakınsama hızı, özdeğerlerin oranına bağlıdır; oranın daha küçük olması, daha hızlı yakınsama anlamına gelir. Bu nedenle, istenilen özdeğere yakın bir kayma noktası belirleyerek, daha doğru bir tahminle bu özdeğer ile birlikte buna karşılık gelen özvektör daha az sayıda iterasyon sonunda elde edilebilir.

Bundan dolayı, kayma noktası λ_n ve λ_{n+1} özdeğerleri arasına yerleştirilir ve $(\mu - \lambda_n)$, $(\lambda_{n+1} - \mu)$ 'den daha küçük ise iterasyon λ_n 'ye yakınsayacak ve yakınsama hızı $(\mu - \lambda_n)/(\lambda_{n+1} - \mu)$ oranına bağlı olacaktır. Öte yandan, $(\lambda_{n+1} - \mu)$, $(\mu - \lambda_n)$ 'den küçük ise iterasyon λ_{n+1} 'e yakınsayacak ve yakınsama hızı $(\lambda_{n+1} - \mu)/(\mu - \lambda_n)$ oranına bağlı olacaktır. Özetle kaydırma değeri μ , istenilen özdeğere yakın bir yerde ise hızlı bir yakınsama elde edilir.

Özdeğer kaydırma işlemi, direkt iterasyonla da kullanılabilir. Bu durumda özdeğer eşitliği

$$M^{-1}(K - \mu M)q = \delta q \quad (3.102)$$

şeklini alır. Burada $\hat{E} = M^{-1}(K - \mu M)$ 'dir. $\hat{E}$ ile yapılan iterasyon, δ 'nın en büyük değerine karşılık gelen özdeğere yakınsayacaktır.

λ_1 veya λ_n 'den herhangi birine değil de, başka bir ara frekansa da yakınsama elde edilebilir. Buna göre, λ_n ' ye yakınsama isteniyorsa, çok hızlı yakınsama için kayma noktası Şekil 3.7'de gösterildiği gibi konumlandırılmalıdır. Öyle ki,

$$\lambda_{n-1} - \mu = \mu - \lambda_1 \quad (3.103)$$

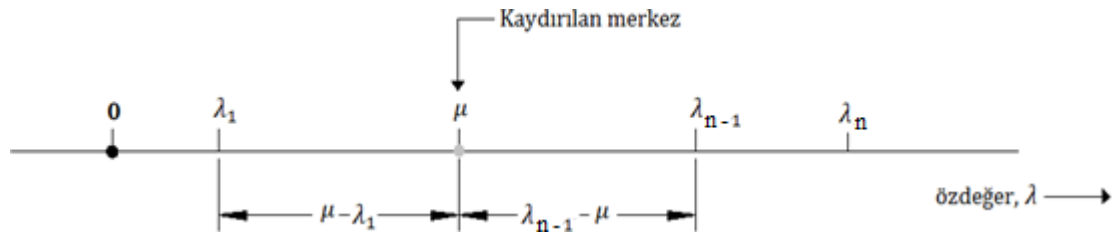
veya

$$\mu = \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_1}{2} \quad (3.104)$$

Bu durumda yakınsama hızı,

$$\frac{\lambda_{n-1} - \mu}{\lambda_n - \mu} = \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_1}{(\lambda_n - \lambda_1) + (\lambda_n - \lambda_{n-1})} \quad (3.105)$$

oranına bağlıdır. Bu eşitlik daha fazla geliştirilemez.



Şekil 3.7. Kaydırma ile vektör iterasyonu: λ_n yakınsaması için kaydırma noktalarının optimum konumu

Benzer bir şekilde, λ_1 ' e yakınsama isteniyorsa, çok hızlı yakınsama için, kayma noktası Şekil 3.8'de gösterildiği gibi konumlandırılmalıdır. Öyle ki,

$$\mu - \lambda_2 = \lambda_n - \mu \quad (3.106)$$

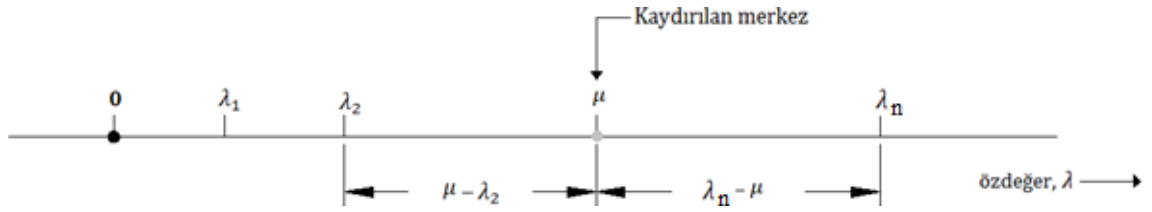
veya

$$\mu = \frac{\lambda_2 + \lambda_n}{2} \quad (3.107)$$

Bu durumda yakınsama hızı,

$$\frac{\mu - \lambda_2}{\mu - \lambda_1} = \frac{\lambda_n - \lambda_2}{(\lambda_n - \lambda_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (3.108)$$

oranına bağlıdır.



Şekil 3.8. Kaydırma ile vektör iterasyonu: λ_1 yakınsaması için kaydırma noktalarının optimum konumu

Direkt iterasyon kullanıldığında, öz değer merkezini kaydırmanın daha az etkili olduğu açıktır: birincisi, yöntem sadece en küçük ve en büyük özçiftleri verebilir, ve ikincisi, yakınsama hızı ters iterasyon ile elde edilenle aynı olamaz. Kaydırma ile iterasyonda belli bir değere en yakın öz değer bulunmak istenirse, merkez bu değere kaydırılır ve kaydırma işlemi hiçbir zorluk teşkil etmez (Humar 2002).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin öz değer probleminin, kaydırmalı vektör iterasyonu yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

Burada başlangıç vektörü olarak $[1 \ 1 \ 1]^T$ birim vektör kullanılmış, $(\mu = 4,4)$ ve $(\mu = 2)$ kaydırma değerleri ile $\hat{E} = M^{-1}(K - \mu M)$ matrisi üzerinde vektör iterasyonu yöntemi uygulanmıştır. Elde edilen değerler tablo halinde verilmiştir.

$\mu = 4,4$ için

$$\hat{E} = M^{-1}(K - \mu M) = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3,6 & -4 & 0 \\ -4 & -0,8 & -4 \\ 0 & -4 & -4,8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,9 & -1 & 0 \\ -2 & -0,4 & -2 \\ 0 & -2 & -2,4 \end{bmatrix}$$

Çizelge 3.4. Kaydırmalı vektör iterasyonu yöntemi: En küçük özçiftin hesabı

k	u_k	$\bar{u}_{k+1}^T = \hat{E} u_k$	$\rho \rightarrow (\omega^2 - \mu)$	ω^2	$u_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{\sqrt{\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1}}}$	ϵ
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,9 \\ -4,4 \\ -4,4 \end{bmatrix}$	-3,956075	0,443925	$\begin{bmatrix} -0,292031 \\ -0,676283 \\ -0,676283 \end{bmatrix}$	-
2	$\begin{bmatrix} -0,292031 \\ -0,676283 \\ -0,676283 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,939111 \\ 2,207142 \\ 2,975646 \end{bmatrix}$	-3,865251	0,534749	$\begin{bmatrix} 0,245710 \\ 0,577480 \\ 0,778552 \end{bmatrix}$	0,16984
3	$\begin{bmatrix} 0,245710 \\ 0,577480 \\ 0,778552 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,798619 \\ -2,279517 \\ -3,023485 \end{bmatrix}$	-3,873084	0,526916	$\begin{bmatrix} -0,206372 \\ -0,589051 \\ -0,781300 \end{bmatrix}$	0,01486
4	$\begin{bmatrix} -0,206372 \\ -0,589051 \\ -0,781300 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,774785 \\ 2,210963 \\ 3,053222 \end{bmatrix}$	-3,849219	0,550781	$\begin{bmatrix} 0,201322 \\ 0,574503 \\ 0,793357 \end{bmatrix}$	0,04333
5	$\begin{bmatrix} 0,201322 \\ 0,574503 \\ 0,793357 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,755693 \\ -2,219161 \\ -3,053063 \end{bmatrix}$	-3,849334	0,550666	$\begin{bmatrix} -0,196321 \\ -0,576513 \\ -0,793152 \end{bmatrix}$	0,00021

Çizelge 3.4. (devam)

k	u_k	$\bar{u}_{k+1}^T = \hat{E} u_k$	$\rho \rightarrow (\omega^2 - \mu)$	ω^2	$u_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{\sqrt{\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1}}}$	ϵ
6	$\begin{bmatrix} -0,196321 \\ -0,576513 \\ -0,793152 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,753202 \\ 2,209551 \\ 3,056592 \end{bmatrix}$	-3,846074	0,553926	$\begin{bmatrix} 0,195837 \\ 0,574497 \\ 0,794733 \end{bmatrix}$	1
7	$\begin{bmatrix} 0,195837 \\ 0,574497 \\ 0,794733 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,750751 \\ -2,210940 \\ -3,056354 \end{bmatrix}$	-3,846191	0,553809	$\begin{bmatrix} -0,195193 \\ -0,574839 \\ -0,794644 \end{bmatrix}$	0,00021
8	$\begin{bmatrix} -0,195193 \\ -0,574839 \\ -0,794644 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,750513 \\ 2,209611 \\ 3,056824 \end{bmatrix}$	-3,845755	0,554245	$\begin{bmatrix} 0,195154 \\ 0,574559 \\ 0,794857 \end{bmatrix}$	0,00079
9	$\begin{bmatrix} 0,195154 \\ 0,574559 \\ 0,794857 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,750197 \\ -2,209844 \\ -3,056774 \end{bmatrix}$	-3,845786	0,554214	$\begin{bmatrix} -0,195070 \\ -0,574614 \\ -0,794837 \end{bmatrix}$	1
10	$\begin{bmatrix} -0,195070 \\ -0,574614 \\ -0,794837 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,750177 \\ 2,209660 \\ 3,056838 \end{bmatrix}$	-3,845727	0,554273	$\begin{bmatrix} 0,195068 \\ 0,574575 \\ 0,794866 \end{bmatrix}$	0,00011
11	$\begin{bmatrix} 0,195068 \\ 0,574575 \\ 0,794866 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,750136 \\ -2,209697 \\ -3,056829 \end{bmatrix}$	-3,845734	0,554266	$\begin{bmatrix} -0,195057 \\ -0,574584 \\ -0,794862 \end{bmatrix}$	$1,16 \times 10^{-5}$
12	$\begin{bmatrix} -0,195057 \\ -0,574584 \\ -0,794862 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,750135 \\ 2,209672 \\ 3,056838 \end{bmatrix}$	-3,845726	0,554274	$\begin{bmatrix} \mathbf{0,195057} \\ \mathbf{0,574579} \\ \mathbf{0,794866} \end{bmatrix}$	$1,46 \times 10^{-5}$

$\mu = 2$ için

$$\hat{E} = M^{-1}(K - \mu M) = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Çizelge 3.5. Kaydırmalı vektör iterasyonu yöntemi: En büyük özçiftin hesabı

k	u_k	$\bar{u}_{k+1}^T = \hat{E} u_k$	$\rho \rightarrow (\omega^2 - \mu)$	ω^2	$u_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{\sqrt{\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1}}}$	ϵ
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$	-2,357143	-0,357143	$\begin{bmatrix} -0,174078 \\ -0,696311 \\ -0,696311 \end{bmatrix}$	-
2	$\begin{bmatrix} -0,174078 \\ -0,696311 \\ -0,696311 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,957427 \\ -0,348155 \\ 1,392621 \end{bmatrix}$	-5,310811	-3,310811	$\begin{bmatrix} 0,554877 \\ -0,201773 \\ 0,807093 \end{bmatrix}$	-0,892
3	$\begin{bmatrix} 0,554877 \\ -0,201773 \\ 0,807093 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,034088 \\ -3,127486 \\ 0,403547 \end{bmatrix}$	7,195761	9,195761	$\begin{bmatrix} 0,311600 \\ -0,942401 \\ 0,121600 \end{bmatrix}$	1,360
4	$\begin{bmatrix} 0,311600 \\ -0,942401 \\ 0,121600 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,409801 \\ -2,751202 \\ 1,884801 \end{bmatrix}$	4,019699	6,019699	$\begin{bmatrix} 0,389378 \\ -0,759863 \\ 0,520569 \end{bmatrix}$	0,527
5	$\begin{bmatrix} 0,389378 \\ -0,759863 \\ 0,520569 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,343930 \\ -3,339621 \\ 1,519727 \end{bmatrix}$	3,963781	5,963781	$\begin{bmatrix} 0,343933 \\ -0,854663 \\ 0,388923 \end{bmatrix}$	0,009
6	$\begin{bmatrix} 0,343933 \\ -0,854663 \\ 0,388923 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,370563 \\ -3,175038 \\ 1,709326 \end{bmatrix}$	3,865458	5,865458	$\begin{bmatrix} 0,355289 \\ -0,823060 \\ 0,443106 \end{bmatrix}$	1
7	$\begin{bmatrix} 0,355289 \\ -0,823060 \\ 0,443106 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,355993 \\ -3,242908 \\ 1,646119 \end{bmatrix}$	3,882420	5,882420	$\begin{bmatrix} 0,349361 \\ -0,835510 \\ 0,424110 \end{bmatrix}$	0,003
8	$\begin{bmatrix} 0,349361 \\ -0,835510 \\ 0,424110 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,359552 \\ -3,217963 \\ 1,671021 \end{bmatrix}$	3,872615	5,872615	$\begin{bmatrix} 0,351082 \\ -0,830986 \\ 0,431514 \end{bmatrix}$	0,002
9	$\begin{bmatrix} 0,351082 \\ -0,830986 \\ 0,431514 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,357609 \\ -3,227163 \\ 1,661972 \end{bmatrix}$	3,875563	5,875563	$\begin{bmatrix} 0,350302 \\ -0,832700 \\ 0,428836 \end{bmatrix}$	1
10	$\begin{bmatrix} 0,350302 \\ -0,832700 \\ 0,428836 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,358152 \\ -3,223674 \\ 1,665399 \end{bmatrix}$	3,874304	5,874304	$\begin{bmatrix} 0,350554 \\ -0,832066 \\ 0,429858 \end{bmatrix}$	2,14 $\times 10^{-4}$
11	$\begin{bmatrix} 0,350554 \\ -0,832066 \\ 0,429858 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,357897 \\ -3,224956 \\ 1,664132 \end{bmatrix}$	3,874734	5,874734	$\begin{bmatrix} 0,350449 \\ -0,832304 \\ 0,429483 \end{bmatrix}$	7,33 $\times 10^{-5}$

Çizelge 3.5. (devam)

k	u_k	$\bar{u}_{k+1}^T = \hat{E} u_k$	$\rho \rightarrow (\omega^2 - \mu)$	ω^2	$u_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{\sqrt{\bar{u}_{k+1}^T \bar{u}_{k+1}}}$	ϵ
12	$\begin{bmatrix} 0,350449 \\ -0,832304 \\ 0,429483 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,357978 \\ -3,224472 \\ 1,664608 \end{bmatrix}$	3,874564	5,874564	$\begin{bmatrix} 0,350485 \\ -0,832216 \\ 0,429625 \end{bmatrix}$	$2,91 \times 10^{-5}$
13	$\begin{bmatrix} 0,350485 \\ -0,832216 \\ 0,429625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,357944 \\ -3,224651 \\ 1,664431 \end{bmatrix}$	3,874625	5,874625	$\begin{bmatrix} 0,350471 \\ -0,832249 \\ 0,429572 \end{bmatrix}$	1
14	$\begin{bmatrix} 0,350471 \\ -0,832249 \\ 0,429572 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,357955 \\ -3,224584 \\ 1,664497 \end{bmatrix}$	3,874601	5,874601	$\begin{bmatrix} \mathbf{0,350471} \\ \mathbf{-0,832249} \\ \mathbf{0,429572} \end{bmatrix}$	$4,00 \times 10^{-6}$

3.3.4. Rayleigh oranı ile iterasyon yöntemi

Kaydırma değeri, istenilen özdeğere yeterince yakın seçilirse, kaydırma ile ters iterasyon yöntemi hızlı bir şekilde yakınsamaktadır. Bununla birlikte, özdeğerler hakkında yeterli tahmin olmaksızın uygun bir kaydırma değeri seçimi zordur. Bu zorluğu gidermek için geliştirilen yöntemlerden birisi de bu yöntemdir.

$$\frac{\bar{u}_{k+1}^T K \bar{u}_{k+1}}{\bar{u}_{k+1}^T M \bar{u}_{k+1}} = \frac{\bar{u}_{k+1}^T M u_k}{\bar{u}_{k+1}^T M \bar{u}_{k+1}} \quad (3.109)$$

(3.109) eşitliği ile hesaplanan Rayleigh oranı, özdeğer tahmininde uygun bir kaydırma değeri sağlar. Bu şekilde elde edilen kaydırma değerinin kullanıldığı yöntem, Rayleigh oranı ile iterasyon yöntemi denir.

Bu işlem u_1 başlangıç iterasyon vektörü ve μ_1 başlangıç kaydırması kabulü ile başlatılır, yakınsayana kadar $k = 1, 2, 3, \dots$ için aşağıdaki işlemler tekrarlanır:

Cebirsel denklemin çözülmesi ile $\bar{u}_{k+1}$ belirlenir:

$$[K - \mu_k M] \bar{u}_{k+1} = M u_k \quad (3.110)$$

veya

$$\bar{u}_{k+1} = (K - \mu_k M)^{-1} M u_k \quad (3.111)$$

Burada $\check{D}_k = (K - \mu_k M)^{-1}$ dir.

Özdeğer tahmini ve bir sonraki iterasyon için kaydırma değeri,

$$\mu_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}^T m u_k}{\bar{u}_{k+1}^T m \bar{u}_{k+1}} + \mu_k \quad (3.112)$$

ile elde edilir. Bu değer ω^2 ye yakınsamaktadır.

Normalleştirilmiş $\bar{u}_{k+1}$:

$$u_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{(\bar{u}_{k+1}^T m \bar{u}_{k+1})^{1/2}} \quad (3.113)$$

İterasyon, u_1 başlangıç vektörü ve μ_1 başlangıç kaydırmasına bağlı olarak belli bir özçifte (λ_n, ϕ_n) yakınsar.

Rayleigh oranı ile iterasyon etkili bir yöntem olsa da, her zaman kullanışlı olmayabilir. Örneğin, u_1 başlangıç vektörü ve $\mu_1 = 0$ başlangıç kaydırması ile (3.112) eşitliği, birinciye göre, ikinci özdeğere daha yakın Rayleigh oranı için bir değer sağlar, sonuçta iterasyon ikinci moda yakınsar. Bu nedenle, en küçük özçift (λ_1, ϕ_1) 'e yakınsama sağlamak için Rayleigh oranı ile iterasyonu yöntemini başka tekniklerle tamamlamak gerekir. Bir olasılık, kaydırma olmaksızın ters iterasyonun kullanılmasıdır (Chopra 2001).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin özdeğer probleminin, Rayleigh oranı ile iterasyon yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

Burada başlangıç vektörü olarak $[1 \ 1 \ 1]^T$ birim vektör kullanılmış, $(\mu = 0,5)$, $(\mu = 7)$ ve $(\mu = 6)$ başlangıç kaydırma değerleri ile $\tilde{D}_k = (K - \mu_k M)^{-1}$ matrisi üzerinde (3.111), (3.112) ve (3.113) eşitlikleri ile tanımlanan işlem adımları uygulanmıştır. Elde edilen değerler aşağıda tablo halinde verilmiştir.

Çizelge 3.6. Rayleigh oranı ile iterasyon: I. Özçift

k	u_k	μ_k	$\bar{u}_{k+1}$	$\mu_{k+1} \rightarrow \omega^2$	u_{k+1}	ϵ
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0,5	$\begin{bmatrix} 6,33 \\ 18 \\ 24,67 \end{bmatrix}$	0,554641	$\begin{bmatrix} 0,140729 \\ 0,399967 \\ 0,548103 \end{bmatrix}$	-
2	$\begin{bmatrix} 0,140729 \\ 0,399967 \\ 0,548103 \end{bmatrix}$	0,554641	$\begin{bmatrix} -368,70 \\ -1086,09 \\ -1502,48 \end{bmatrix}$	0,554274	$\begin{bmatrix} -0,135373 \\ -0,398773 \\ -0,551659 \end{bmatrix}$	0,00066
3	$\begin{bmatrix} -0,135373 \\ -0,398773 \\ -0,551659 \end{bmatrix}$	0,554274	$\begin{bmatrix} 1,79 \times 10^{10} \\ 5,26 \times 10^{10} \\ 7,28 \times 10^{10} \end{bmatrix}$	0,554274	$\begin{bmatrix} 0,135374 \\ 0,398774 \\ 0,551659 \end{bmatrix}$	$1,37 \times 10^{-11}$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 0,135374 & 0,398774 & 0,551659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,135374 \\ 0,398774 \\ 0,551659 \end{bmatrix} = 0,481674$$

$$\text{Normalleştirme işlemi: } X = \frac{1}{\sqrt{0,481674}} \begin{bmatrix} 0,135374 \\ 0,398774 \\ 0,551659 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0,195056} \\ \mathbf{0,574579} \\ \mathbf{0,794866} \end{bmatrix}}_{\phi_1}$$

Çizelge 3.7. Rayleigh oranı ile iterasyon: II. Özçift

k	u_k	μ_k	$\bar{u}_{k+1}$	$\mu_{k+1} \rightarrow \omega^2$	u_{k+1}	ϵ
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} -0,280702 \\ -0,017544 \\ -0,192982 \end{bmatrix}$	3,044164	$\begin{bmatrix} -0,449325 \\ -0,028083 \\ -0,308911 \end{bmatrix}$	-
2	$\begin{bmatrix} -0,449325 \\ -0,028083 \\ -0,308911 \end{bmatrix}$	3,044164	$\begin{bmatrix} -8,724078 \\ -3,527424 \\ 7,052300 \end{bmatrix}$	3,071032	$\begin{bmatrix} -0,421304 \\ -0,170347 \\ 0,340570 \end{bmatrix}$	0,008749
3	$\begin{bmatrix} -0,421304 \\ -0,170347 \\ 0,340570 \end{bmatrix}$	3,071032	$\begin{bmatrix} -4,86x10^3 \\ -2,08x10^3 \\ 3,89x10^3 \end{bmatrix}$	3,071119	$\begin{bmatrix} -0,420686 \\ -0,180424 \\ 0,336889 \end{bmatrix}$	$2,82x10^{-5}$
4	$\begin{bmatrix} -0,420686 \\ -0,180424 \\ 0,336889 \end{bmatrix}$	3,071119	$\begin{bmatrix} -2,58x10^{12} \\ -1,11x10^{12} \\ 2,07x10^{12} \end{bmatrix}$	3,071119	$\begin{bmatrix} -0,420686 \\ -0,180424 \\ 0,336889 \end{bmatrix}$	$5,31x10^{-14}$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 0,420686 & 0,180424 & -0,336889 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,420686 \\ 0,180424 \\ -0,336889 \end{bmatrix} = 0,323024$$

$$\text{Normalleştirme işlemi: } X = \frac{1}{\sqrt{0,323024}} \begin{bmatrix} 0,420686 \\ 0,180424 \\ -0,336889 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0,740186} \\ \mathbf{0,317451} \\ \mathbf{-0,592747} \end{bmatrix}}_{\Phi_2}$$

Çizelge 3.8. Rayleigh oranı ile iterasyon: III. Özçift

k	u_k	μ_k	$\bar{u}_{k+1}$	$\mu_{k+1} \rightarrow \omega^2$	u_{k+1}	ϵ
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1,5 \\ -1 \end{bmatrix}$	5,714286	$\begin{bmatrix} -0,308607 \\ 0,462910 \\ -0,308607 \end{bmatrix}$	-
2	$\begin{bmatrix} -0,308607 \\ 0,462910 \\ -0,308607 \end{bmatrix}$	5,714286	$\begin{bmatrix} -1,402720 \\ 3,414630 \\ -1,755561 \end{bmatrix}$	5,874281	$\begin{bmatrix} -0,229511 \\ 0,558696 \\ -0,287242 \end{bmatrix}$	0,027236
3	$\begin{bmatrix} -0,229511 \\ 0,558696 \\ -0,287242 \end{bmatrix}$	5,874281	$\begin{bmatrix} -7,17x10^2 \\ 1,70x10^3 \\ -8,79x10^2 \end{bmatrix}$	5,874607	$\begin{bmatrix} -0,233876 \\ 0,555361 \\ -0,286667 \end{bmatrix}$	$5,55x10^{-5}$

Çizelge 3.8. (devam)

k	u_k	μ_k	$\bar{u}_{k+1}$	$\mu_{k+1} \rightarrow \omega^2$	u_{k+1}	ϵ
4	$\begin{bmatrix} -0,233876 \\ 0,555361 \\ -0,286667 \end{bmatrix}$	5,874607	$\begin{bmatrix} -6,84 \times 10^{10} \\ 1,63 \times 10^{11} \\ -8,39 \times 10^{10} \end{bmatrix}$	5,874607	$\begin{bmatrix} -0,233875 \\ 0,555362 \\ -0,286667 \end{bmatrix}$	$5,82 \times 10^{-13}$
5	$\begin{bmatrix} -0,233875 \\ 0,555362 \\ -0,286667 \end{bmatrix}$	5,874607	$\begin{bmatrix} -4,73 \times 10^{14} \\ 1,12 \times 10^{15} \\ -5,79 \times 10^{14} \end{bmatrix}$	5,874607	$\begin{bmatrix} -0,233875 \\ 0,555362 \\ -0,286667 \end{bmatrix}$	$1,51 \times 10^{-16}$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 0,233875 & -0,555362 & 0,286667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,233875 \\ -0,555362 \\ 0,286667 \end{bmatrix} = 0,445302$$

$$\text{Normalleştirme işlemi: } X = \frac{1}{\sqrt{0,445302}} \begin{bmatrix} 0,233875 \\ -0,555362 \\ 0,286667 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0,350474} \\ \mathbf{-0,832240} \\ \mathbf{0,429586} \end{bmatrix}}_{\Phi_3}$$

3.4. Dönüşüm Yöntemleri

Dönüşüm yöntemlerinde temel amaç, sistem rijitlik ve kütle matrislerini köşegenel forma getirmektir. Bu yöntemler ile sistemin tüm özdeğer ve özvektörleri bulunabilmektedir. Özvektörler matrisinin,

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (3.114)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (3.115)$$

eşitlikleri ile verilen temel özellikleri aynı kalacak şekilde (3.116) eşitlikleri ile belirtilen

$$\Lambda = \text{köş} (\omega_1^2 \dots \omega_n^2) \quad \Phi = [\Phi_{(1)} \mid \dots \mid \Phi_{(n)}] \quad (3.116)$$

köşegen elemanları özdeğerlerden oluşan Λ spektral matrisi ile her bir kolonu özvektörlere karşılık gelen Φ modal matrisini elde etmek üzere bir dizi dönüşüm uygulanır. $[K]$ ve $[M]$ matrisleri, köşegen, üçlü bant, üçgen matris gibi daha basit formlara dönüştürülürler.

$[K]$ ve $[M]$ matrislerini köşegen forma indirgeyebilmek için ardışık bir şekilde soldan ve sağdan sırasıyla $[P_k^T]$ ve $[P_k]$ ile çarpma işlemi yapılır.

$$\begin{aligned}
 [K^1] &= [K] & [M^1] &= [M] \\
 [K^2] &= [P_1^T][K^1][P_1] & [M^2] &= [P_1^T][M^1][P_1] \\
 [K^3] &= [P_2^T][K^2][P_2] & [M^3] &= [P_2^T][M^2][P_2] \\
 \vdots & & \vdots & \\
 [K^{k+1}] &= [P_k^T][K^k][P_k] & [M^{k+1}] &= [P_k^T][M^k][P_k]
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

Burada üst indisler iterasyon sayısını göstermektedir. Bu dönüşümler sonunda özdeğer spektrumunu aşağıda da gösterildiği üzere değişmemektedir.

$$\begin{aligned}
 \det [K^{k+1} - \lambda I] &= \det [P_k^T [K^k] P_k - \lambda I] \\
 &= \det [P_k^T [K^k] P_k - \lambda P_k^T P_k] \\
 &= \det [P_k] \det [K^k - \lambda I] \det [P_k] \\
 &= \det [K^k - \lambda I]
 \end{aligned}$$

Dönüşümlerle, $k \rightarrow \infty$ için $[K^{k+1}]$ ve $[M^{k+1}]$ matrislerinin köşegen forma geldiği kabulü ile $[K^{k+1}] \rightarrow \Lambda$ ve $[M^{k+1}] \rightarrow I$ yakınsaması sağlanır.

Bu durumda, en son yapılan iterasyon k . iterasyon ise,

$$X = P_1 P_2 \dots P_k \quad (3.118)$$

$$[K^{k+1}] \rightarrow \text{köş} (K_r) \quad [M^{k+1}] \rightarrow \text{köş} (M_r) \quad (3.119)$$

olmaktadır. Burada " r " döngü sayısını göstermektedir. İstenilen hassasiyette yakınsama gerçekleştiği takdirde de özdeğerler ve özvektörler (3.120) ve (3.121) eşitlikleri yardımıyla bulunur (Bathe 1982).

$$\Lambda = \text{köş} \left(K_r^{(k+1)} / M_r^{(k+1)} \right) = \begin{bmatrix} k_{11}^{(k+1)} / m_{11}^{(k+1)} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{nn}^{(k+1)} / m_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3.120)$$

$$\Phi = P_1 P_2 \dots P_k \text{köş} \left(1 / \sqrt{M_r^{(k+1)}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{X_{11}}{\sqrt{m_{11}^{(k+1)}}} & \frac{X_{12}}{\sqrt{m_{22}^{(k+1)}}} & \dots & \frac{X_{1n}}{\sqrt{m_{nn}^{(k+1)}}} \\ \frac{X_{21}}{\sqrt{m_{11}^{(k+1)}}} & \vdots & \dots & \frac{X_{2n}}{\sqrt{m_{nn}^{(k+1)}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{X_{n1}}{\sqrt{m_{11}^{(k+1)}}} & \frac{X_{n2}}{\sqrt{m_{22}^{(k+1)}}} & \dots & \frac{X_{nn}}{\sqrt{m_{nn}^{(k+1)}}} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3.121)$$

3.4.1. Genel Jacobi yöntemi

Genelleştirilmiş özdeğer problemi göz önüne alındığında,

$$[K] [\Phi] = [M] [\Phi] [\Lambda] \quad (3.122)$$

eşitliği bir dizi işlem ile $[\bar{K}]$ ve $[\bar{M}]$ köşegen matris olmak üzere $[\bar{K}] [X] = [\bar{M}] [X] [\Lambda]$ şekline dönüştürülebilir. Bu dönüştürme işlemleri sonunda özdeğerler,

$$[\bar{M}^{-1}] [K] = [\Lambda] \quad (3.123)$$

eşitliği yardımıyla elde edilebilir. Dönüştürme yapılırken (3.126) ile tanımlanan $[P]$ matrisi kullanılmaktadır. (3.122) eşitliğinin her iki tarafı soldan $[P^T]$ ile çarpılarak

$$[P^T] [K] [\Phi] = [P^T] [M] [\Phi] [\Lambda] \quad (3.124)$$

elde edilir. (3.124) eşitliğinde $[\Phi] = [P][X]$ yerine koyulursa,

$$[P^T] [K] [P] [X] = [P^T] [M] [P] [X] [\Lambda] \quad (3.125)$$

(3.122) ve (3.125) eşitliklerinden özdeğerlerin yine aynı kaldığı açıkça görülmektedir. Uygun seçilen bir $[P]$ matrisi sayesinde her bir adımda $[P^T] [K] [P]$ ve $[P^T] [M] [P]$ matrisleri de gittikçe köşegen hale dönüşmektedir.

(7x7) boyutunda simetrik bir $[K]$ matrisi dikkate alınırsa, $[B] = [P]^T [K] [P]$ matrisinde köşegen dışındaki $b_{63} = b_{36}$ elemanı sıfır (0) olmak zorundadır. $[P]$ matrisi, α ve β gibi köşegen dışı elemanları bulunan modifiye edilmiş bir birim matristir.

$$P_{(p,q,\theta)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \alpha & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & \beta & & & & & 1 \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{matrix} \rightarrow p. \\ \\ \\ \\ \\ \rightarrow q. \text{ satır} \end{matrix} \quad (3.126)$$

Dönüştürme sırasında yapılan $[P^T] [K]$ ve $[P^T] [K] [P]$ çarpımları aşağıda detaylı bir şekilde gösterilmiştir. $[P^T] [K] [P]$ çarpımına bakıldığında,

$$b_{36} = b_{63} = k_{66} \beta + k_{33} \alpha + k_{36} (1 + \alpha \beta) \quad (3.127)$$

olduğu anlaşılmaktadır.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} \\ k_{31} + k_{61}\beta & k_{32} + k_{62}\beta & k_{33} + k_{63}\beta & k_{34} + k_{64}\beta & k_{35} + k_{65}\beta & k_{36} + k_{66}\beta & k_{37} + k_{67}\beta \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} \\ k_{31}\alpha + k_{61} & k_{32}\alpha + k_{62} & k_{33}\alpha + k_{63} & k_{34}\alpha + k_{64} & k_{35}\alpha + k_{65} & k_{36}\alpha + k_{66} & k_{37}\alpha + k_{67} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} \end{bmatrix} \quad [P^T] [K]$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} + k_{16}\beta & k_{14} & k_{15} & k_{13}\alpha + k_{16} & k_{17} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} + k_{26}\beta & k_{24} & k_{25} & k_{23}\alpha + k_{26} & k_{27} \\ k_{31} + k_{61}\beta & k_{32} + k_{62}\beta & b_{33} & k_{34} + k_{64}\beta & k_{35} + k_{65}\beta & b_{36} & k_{37} + k_{67}\beta \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} + k_{46}\beta & k_{44} & k_{45} & k_{43}\alpha + k_{46} & k_{47} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} + k_{56}\beta & k_{54} & k_{55} & k_{53}\alpha + k_{56} & k_{57} \\ k_{31}\alpha + k_{61} & k_{32}\alpha + k_{62} & b_{63} & k_{34}\alpha + k_{64} & k_{35}\alpha + k_{65} & b_{66} & k_{37}\alpha + k_{67} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} + k_{76}\beta & k_{74} & k_{75} & k_{73}\alpha + k_{76} & k_{77} \end{bmatrix} \quad [P^T] [K] [P]$$

(3.127) eşitliği geliştirildiğinde,

$$b_{pq} = b_{qp} = k_{qq} \beta + k_{pp} \alpha + k_{pq} (1 + \alpha \beta) \quad (3.128)$$

elde edilmektedir. Rijitlik ve kütle matrislerini köşegen forma getirmek için $[P^T] [K] [P]$ ve $[P^T] [M] [P]$ matrislerinin b_{pq} elemanları sıfır (0) olmalıdır.

$$k_{pp} \alpha + k_{qq} \beta + k_{pq} (1 + \alpha \beta) = 0 \quad (3.129)$$

$$m_{pp} \alpha + m_{qq} \beta + m_{pq} (1 + \alpha \beta) = 0 \quad (3.130)$$

(3.129) ve (3.130) eşitliklerinin sırasıyla m_{pq} ve $-k_{pq}$ sayılarıyla çarpımından elde edilen eşitlikler toplanarak,

$$\alpha \underbrace{(k_{pp} m_{pq} - m_{pp} k_{pq})}_A + \beta \underbrace{(k_{qq} m_{pq} - m_{qq} k_{pq})}_B = 0 \quad (3.131)$$

$$A = k_{pp} m_{pq} - m_{pp} k_{pq} \quad (3.132)$$

$$B = k_{qq} m_{pq} - m_{qq} k_{pq} \quad (3.133)$$

$$\alpha A + \beta B = 0 \quad (3.134)$$

elde edilir. $A \neq 0$, (3.134) eşitliğinden $\alpha = -(B/A) \beta$ bulunur. Bu bağıntı, (3.129) eşitliğinde yerine koyularak,

$$B k_{pq} \beta^2 + [B k_{pp} - A k_{qq}] \beta - A k_{pq} = 0 \quad (3.135)$$

A ve B eşitlikleri kullanılarak (3.135) eşitliğindeki köşeli parantez içindeki kısım şu şekilde yazılabilir:

$$[B k_{pp} - A k_{qq}] = -k_{pq} \underbrace{(k_{pp} m_{qq} - m_{pp} k_{qq})}_r \quad (3.136)$$

$$r = k_{pp} m_{qq} - m_{pp} k_{qq} \quad (3.137)$$

(3.136) eşitliği kullanılarak (3.135) eşitliği daha da sadeleştirilebilir.

$$B \beta^2 + r \beta - A = 0 \quad (3.138)$$

Bu ikinci dereceden denklemin çözümünden bulunan β bağıntısı (3.134) eşitliğinde kullanılarak,

$$\beta = \frac{1}{B} \left(\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2} \right)^2 + A B} \right] \right) \quad (3.139)$$

$$\alpha = -\beta \frac{B}{A} = -\frac{1}{A} \left(\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2} \right)^2 + A B} \right] \right) \quad (3.140)$$

bulunur. Ayrıca (3.139) ve (3.140) eşitliklerindeki parantez içinde kalan ifade kullanılarak,

$$\left(\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2} \right)^2 + A B} \right] \right) \left(\frac{r}{2} \mp \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2} \right)^2 + A B} \right] \right) = -A B \quad (3.141)$$

olduğu gösterilebilir.

α ve β başka bir şekilde de ifade edilebilir;

$$\alpha = \frac{B}{\left(\frac{r}{2} \mp \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 + A B}\right]}\right)} \quad (3.142)$$

$$\beta = -\frac{A}{\left(\frac{r}{2} \mp \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 + A B}\right]}\right)} \quad (3.143)$$

Paydanın sıfır (0) olmasını engellemek amacıyla, paydadaki ifade aşağıda gösterildiği şekilde alındığında, α ve β sayıları,

$$\left(\frac{r}{2} + (\text{sign } r) \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 + A B}\right]}\right) \quad (3.144)$$

$$\alpha = \frac{B}{\left(\frac{r}{2} + (\text{sign } r) \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 + A B}\right]}\right)} \quad (3.145)$$

$$\beta = -\frac{A}{\left(\frac{r}{2} + (\text{sign } r) \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2 + A B}\right]}\right)} \quad (3.146)$$

olmaktadır. Sıfır (0) yapılan eleman k_{pq} ise, değeri değişen diğer elemanlar;

$$b_{pp} = k_{pp} + 2 k_{pq} \beta + k_{qq} \beta^2$$

$$b_{qq} = k_{pp} \alpha^2 + 2 k_{pq} \alpha + k_{qq} \quad (3.147)$$

$$b_{pk} = k_{pk} + k_{qk} \beta$$

$$b_{qk} = k_{pk} \alpha + k_{qk} \quad (k = 1, \dots, n)$$

eşitlikleri ile bulunur (Bhatt 2002).

$$\left| \frac{\Lambda_p^{(r+1)} - \Lambda_p^{(r)}}{\Lambda_p^{(r+1)}} \right| \leq 10^{-s} \quad (p = 1, \dots, n) \quad (3.148)$$

$$\Lambda_p^{(r)} = \frac{k_{pp}^{(k)}}{m_{pp}^{(k)}} \quad \Lambda_p^{(r+1)} = \frac{k_{pp}^{(k+1)}}{m_{pp}^{(k+1)}} \quad (3.149)$$

$$\left| \frac{\left(k_{pq}^{(k+1)} \right)^2}{k_{pp}^{(k+1)} k_{qq}^{(k+1)}} \right| \leq 10^{-2s} \quad (p, q = 1, \dots, n) \quad (3.150)$$

$$\left| \frac{\left(m_{pq}^{(k+1)} \right)^2}{m_{pp}^{(k+1)} m_{qq}^{(k+1)}} \right| \leq 10^{-2s} \quad (p, q = 1, \dots, n) \quad (3.151)$$

"r" döngü sayısını göstermek üzere yukarıda belirtildiği şekilde s basamak hassasiyetle yakınsama sağlandığı takdirde, özdeğer ve özvektörler (3.120) ve (3.121) eşitlikleri yardımıyla hesap edilir (Cheng 2001).

Şekil 3.1'de verilen çerçeve sistemin özdeğer probleminin, genel Jacobi yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

(3.132), (3.133), (3.137), (3.145), (3.146), (3.150) ve (3.151) eşitlikleri ile tanımlanan işlem adımları uygulanmıştır. Elde edilen değerler tablo halinde verilmiştir.

Döngü-1 / İterasyon-1: Rijitlik ve kütle matrislerinin $p = 1, q = 2$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$K = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} = K^1$$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = M^1$$

$$\left| \frac{(k_{12}^{(1)})^2}{k_{11}^{(1)} k_{22}^{(1)}} \right| = \left| \frac{(-4)^2}{(14)(8)} \right| = 0,1429 > 10^{-8} \quad \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{m_{11}^{(1)} m_{22}^{(1)}} = 0$$

$$A = k_{11}m_{12} - m_{11}k_{12} = 16$$

$$B = k_{22}m_{12} - m_{22}k_{12} = 8$$

$$r = k_{11}m_{22} - m_{11}k_{22} = -4$$

$$\alpha = B / \left(\frac{r}{2} + (\text{sign } r) \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2} \right)^2 + A B} \right]} \right) = 8 / \left(\frac{-4}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{-4}{2} \right)^2 + (16 \times 8) \right]} \right) = -0,5931$$

$$\beta = -A / \left(\frac{r}{2} + (\text{sign } r) \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2} \right)^2 + A B} \right]} \right) = -16 / \left(\frac{-4}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{-4}{2} \right)^2 + (16 \times 8) \right]} \right) = 1,1861$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,5931 & 0 \\ 1,1861 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^2 = P_1^T K^1 P_1 = \begin{bmatrix} 15,7663 & 0 & -4,7446 \\ 0 & 17,6688 & -4 \\ -4,7446 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = P_1^T M^1 P_1 = \begin{bmatrix} 6,8139 & 0 & 0 \\ 0 & 3,4069 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Döngü-1 / İterasyon-2: Rijitlik ve kütle matrislerinin $p = 1, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\left| \frac{(k_{13}^{(2)})^2}{k_{11}^{(2)} k_{33}^{(2)}} \right| = \left| \frac{(-4,7446)^2}{(15,7663)(4)} \right| = 0,3569 > 10^{-8} \quad \frac{(m_{13}^{(2)})^2}{m_{11}^{(2)} m_{33}^{(2)}} = 0$$

$$A = k_{11} m_{13} - m_{11} k_{13} = 32,3288$$

$$B = k_{33} m_{13} - m_{33} k_{13} = 9,4891$$

$$r = k_{11} m_{33} - m_{11} k_{33} = 4,2772$$

$$\alpha = 9,4891 / \left(\frac{4,2772}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{4,2772}{2} \right)^2 + (32,3288 \times 9,4891) \right]} \right) = 0,4796$$

$$\beta = -32,3288 / \left(\frac{4,2772}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{4,2772}{2} \right)^2 + (32,3288 \times 9,4891) \right]} \right) = -1,6341$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,4796 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1,6341 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^3 = P_2^T K^2 P_2 = \begin{bmatrix} 41,9541 & 6,5365 & 0 \\ 6,5365 & 17,6688 & -4 \\ 0 & -4 & 3,0758 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = P_2^T M^2 P_2 = \begin{bmatrix} 12,1546 & 0 & 0 \\ 0 & 3,4069 & 0 \\ 0 & 0 & 3,5676 \end{bmatrix}$$

Döngü-1 / İterasyon-3: Rijitlik ve kütle matrislerinin $p = 2, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\left| \frac{(k_{23}^{(3)})^2}{k_{22}^{(3)} k_{33}^{(3)}} \right| = \left| \frac{(-4)^2}{(17,6688)(3,0758)} \right| = 0,2944 > 10^{-8} \quad \frac{(m_{23}^{(3)})^2}{m_{22}^{(3)} m_{33}^{(3)}} = 0$$

$$A = k_{22} m_{23} - m_{22} k_{23} = 13,6277$$

$$B = k_{33} m_{23} - m_{33} k_{23} = 14,2704$$

$$r = k_{22} m_{33} - m_{22} k_{33} = 52,5563$$

$$\alpha = 14,2704 / \left(\frac{52,5563}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{52,5563}{2} \right)^2 + (13,6277 \times 14,2704) \right]} \right) = 0,2547$$

$$\beta = -13,6277 / \left(\frac{52,5563}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{52,5563}{2} \right)^2 + (13,6277 \times 14,2704) \right]} \right) = -0,2432$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,2547 \\ 0 & -0,2432 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^4 = P_3^T K^3 P_3 = \begin{bmatrix} 41,9541 & 6,5365 & 1,6649 \\ 6,5365 & 19,7966 & 0 \\ 1,6649 & 0 & 2,1844 \end{bmatrix}$$

$$M^4 = P_3^T M^3 P_3 = \begin{bmatrix} 12,1546 & 0 & 0 \\ 0 & 3,6180 & 0 \\ 0 & 0 & 3,7886 \end{bmatrix}$$

Dönüşüm işlemi köşegen üstündeki tüm elemanlara uygulandığı için 1. döngü tamamlanmıştır.

$$X = P_1 P_2 P_3 = \begin{bmatrix} 1 & -0,7097 & 0,3286 \\ 1,1861 & 0,8616 & 0,8236 \\ -1,6341 & -0,2432 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \text{köş} \begin{bmatrix} k_{11}^{(4)}/m_{11}^{(4)} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{33}^{(4)}/m_{33}^{(4)} \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3,451716 & & \\ & 5,471715 & \\ & & 0,576569 \end{bmatrix}$$

$$\frac{|\Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1^{(1)}|}{\Lambda_1^{(2)}} = \frac{|3,451716 - (k_{11}^{(1)}/m_{11}^{(1)})|}{3,451716} = \frac{|3,451716 - 3,5|}{3,451716} = 0,0140 > 10^{-4}$$

Döngü-2 / İterasyon-4: Rijitlik ve kütle matrislerinin $p = 1, q = 2$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\left| \frac{(k_{12}^{(4)})^2}{k_{11}^{(4)} k_{22}^{(4)}} \right| = \left| \frac{(6,5365)^2}{(41,9541)(19,7966)} \right| = 0,0514 > 10^{-8} \quad \frac{(m_{12}^{(4)})^2}{m_{11}^{(4)} m_{22}^{(4)}} = 0$$

$$A = k_{11} m_{12} - m_{11} k_{12} = -79,4482$$

$$B = k_{22} m_{12} - m_{22} k_{12} = -23,6490$$

$$r = k_{11} m_{22} - m_{11} k_{22} = -88,8299$$

$$\alpha = -23,6490 / \left(\frac{-88,8299}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{-88,8299}{2} \right)^2 + (-79,4482) \times (-23,6490) \right]} \right) = 0,2221$$

$$\beta = 79,4482 / \left(\frac{-88,8299}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{-88,8299}{2} \right)^2 + (-79,4482) \times (-23,6490) \right]} \right) = -0,7462$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0,2221 & 0 \\ -0,7462 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^5 = P_4^T K^4 P_4 = \begin{bmatrix} 43,2215 & 0 & 1,6649 \\ 0 & 24,7699 & 0,3698 \\ 1,6649 & 0,3698 & 2,1844 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = P_4^T M^4 P_4 = \begin{bmatrix} 14,1689 & 0 & 0 \\ 0 & 4,2176 & 0 \\ 0 & 0 & 3,7886 \end{bmatrix}$$

Döngü-2 / İterasyon-5: Rijitlik ve kütle matrislerinin $p = 1, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\left| \frac{\left(k_{13}^{(5)} \right)^2}{k_{11}^{(5)} k_{33}^{(5)}} \right| = \left| \frac{(1,6649)^2}{(43,2215)(2,1844)} \right| = 0,0294 > 10^{-8} \quad \frac{\left(m_{13}^{(5)} \right)^2}{m_{11}^{(5)} m_{33}^{(5)}} = 0$$

$$A = k_{11} m_{13} - m_{11} k_{13} = -23,5894$$

$$B = k_{33} m_{13} - m_{33} k_{13} = -6,3076$$

$$r = k_{11} m_{33} - m_{11} k_{33} = 132,7994$$

$$\alpha = -6,3076 / \left(\frac{132,7994}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{132,7994}{2} \right)^2 + (-23,5894) \times (-6,3076) \right]} \right) = -0,0471$$

$$\beta = 23,5894 / \left(\frac{132,7994}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{132,7994}{2} \right)^2 + (-23,5894) \times (-6,3076) \right]} \right) = 0,1762$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0471 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,1762 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^6 = P_5^T K^5 P_5 = \begin{bmatrix} 43,8758 & 0,0651 & 0 \\ 0,0651 & 24,7699 & 0,3698 \\ 0 & 0,3698 & 2,1234 \end{bmatrix}$$

$$M^6 = P_5^T M^5 P_5 = \begin{bmatrix} 14,2865 & 0 & 0 \\ 0 & 4,2176 & 0 \\ 0 & 0 & 3,8200 \end{bmatrix}$$

Döngü-2 / İterasyon-6: Rijitlik ve kütle matrislerinin $p = 2, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\left| \frac{\left(k_{23}^{(6)} \right)^2}{k_{22}^{(6)} k_{33}^{(6)}} \right| = \left| \frac{(0,3698)^2}{(24,7699)(2,1234)} \right| = 0,0026 > 10^{-8} \quad \frac{\left(m_{23}^{(6)} \right)^2}{m_{22}^{(6)} m_{33}^{(6)}} = 0$$

$$A = k_{22} m_{23} - m_{22} k_{23} = -1,5596$$

$$B = k_{33} m_{23} - m_{33} k_{23} = -1,4126$$

$$r = k_{22} m_{33} - m_{22} k_{33} = 85,6666$$

$$\alpha = -1,4126 / \left(\frac{85,6666}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{85,6666}{2} \right)^2 + (-1,5596) \times (-1,4126) \right]} \right) = -0,0165$$

$$\beta = 1,5596 / \left(\frac{85,6666}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{85,6666}{2} \right)^2 + (-1,5596) \times (-1,4126) \right]} \right) = 0,0182$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0165 \\ 0 & 0,0182 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^7 = P_6^T K^6 P_6 = \begin{bmatrix} 43,8758 & 0,0651 & -0,0011 \\ 0,0651 & 24,7841 & 0 \\ -0,0011 & 0 & 2,1180 \end{bmatrix}$$

$$M^7 = P_6^T M^6 P_6 = \begin{bmatrix} 14,2865 & 0 & 0 \\ 0 & 4,2189 & 0 \\ 0 & 0 & 3,8212 \end{bmatrix}$$

Dönüşüm işlemi köşegen üstündeki tüm elemanlara uygulandığı için 2. döngü tamamlanmıştır.

$$X = P_1 P_2 \dots P_6 = \begin{bmatrix} 1,5875 & -0,4830 & 0,2646 \\ 0,6883 & 1,1396 & 0,7795 \\ -1,2765 & -0,5868 & 1,0784 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = k\ddot{o}ş \begin{bmatrix} k_{11}^{(7)}/m_{11}^{(7)} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{33}^{(7)}/m_{33}^{(7)} \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3,071144 & & \\ & 5,874582 & \\ & & 0,554274 \end{bmatrix}$$

$$\frac{|\Lambda_1^{(3)} - \Lambda_1^{(2)}|}{\Lambda_1^{(3)}} = \frac{|3,071144 - (k_{11}^{(4)}/m_{11}^{(4)})|}{3,071144} = \frac{|3,071144 - 3,451716|}{3,071144} = 0,1240 > 10^{-4}$$

Döngü-3 / İterasyon-7: Rijitlik ve kütle matrislerinin $p = 1$, $q = 2$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\left| \frac{(k_{12}^{(7)})^2}{k_{11}^{(7)} k_{22}^{(7)}} \right| = \left| \frac{(0,0651)^2}{(43,8758)(24,7841)} \right| = (3,9020 \times 10^{-6}) > 10^{-8} \quad \frac{(m_{12}^{(7)})^2}{m_{11}^{(7)} m_{22}^{(7)}} = 0$$

$$A = k_{11}m_{12} - m_{11}k_{12} = -0,9306$$

$$B = k_{22}m_{12} - m_{22}k_{12} = -0,2748$$

$$r = k_{11}m_{22} - m_{11}k_{22} = -168,9709$$

$$\alpha = -0,2748 / \left(\frac{-168,9709}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{-168,9709}{2} \right)^2 + (-0,9306) \times (-0,2748) \right]} \right) = 0,0016$$

$$\beta = 0,9306 / \left(\frac{-168,9709}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{-168,9709}{2} \right)^2 + (-0,9306) \times (-0,2748) \right]} \right) = -0,0055$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0,0016 & 0 \\ -0,0055 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^8 = P_7^T K^7 P_7 = \begin{bmatrix} 43,8759 & 0 & -0,0011 \\ 0 & 24,7844 & 0 \\ -0,0011 & 0 & 2,1180 \end{bmatrix}$$

$$M^8 = P_7^T M^7 P_7 = \begin{bmatrix} 14,2866 & 0 & 0 \\ 0 & 4,2189 & 0 \\ 0 & 0 & 3,8212 \end{bmatrix}$$

Döngü-3 / İterasyon-8: Rijitlik ve kütle matrislerinin $p = 1$, $q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\left| \frac{\left(k_{13}^{(8)}\right)^2}{k_{11}^{(8)} k_{33}^{(8)}} \right| = \left| \frac{(-0,0011)^2}{(43,8759)(2,1180)} \right| = (1,2407 \times 10^{-8}) > 10^{-8} \quad \frac{\left(m_{13}^{(8)}\right)^2}{m_{11}^{(8)} m_{33}^{(8)}} = 0$$

$$A = k_{11}m_{13} - m_{11}k_{13} = 0,0153$$

$$B = k_{33}m_{13} - m_{33}k_{13} = 0,0041$$

$$r = k_{11}m_{33} - m_{11}k_{33} = 137,3998$$

$$\alpha = 0,0041 / \left(\frac{137,3998}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{137,3998}{2} \right)^2 + (0,0153 \times 0,0041) \right]} \right) = 0,00002986$$

$$\beta = -0,0153 / \left(\frac{137,3998}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{137,3998}{2} \right)^2 + (0,0153 \times 0,0041) \right]} \right) = 0,00011165$$

$$P_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,00002986 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,00011165 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^9 = P_8^T K^8 P_8 = \begin{bmatrix} 43,8759 & 0 & 0 \\ 0 & 24,7844 & -0,00000175 \\ 0 & -0,00000175 & 2,1180 \end{bmatrix}$$

$$M^9 = P_8^T M^8 P_8 = \begin{bmatrix} 14,2866 & 0 & 0 \\ 0 & 4,2189 & 0 \\ 0 & 0 & 3,8212 \end{bmatrix}$$

Döngü-3 / İterasyon-9: Rijitlik ve kütle matrislerinin $p = 2$, $q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\left| \frac{\left(k_{23}^{(9)}\right)^2}{k_{22}^{(9)} k_{33}^{(9)}} \right| = \left| \frac{(-0,00000175)^2}{(24,7844)(2,1180)} \right| = (5,8 \times 10^{-14}) < 10^{-8} \quad \frac{\left(m_{23}^{(9)}\right)^2}{m_{22}^{(9)} m_{33}^{(9)}} = 0$$

$$A = k_{22}m_{23} - m_{22}k_{23} = 7,3678 \times 10^{-6}$$

$$B = k_{33}m_{23} - m_{33}k_{23} = 6,6733 \times 10^{-6}$$

$$r = k_{22}m_{33} - m_{22}k_{33} = 85,7707$$

$$\alpha = (6,6733 \times 10^{-6}) / \left(\frac{85,7707}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{85,7707}{2} \right)^2 + (7,3678 \times 10^{-6}) \times (6,6733 \times 10^{-6}) \right]} \right)$$

$$\alpha = 7,7804 \times 10^{-8}$$

$$\beta = -(7,3678 \times 10^{-6}) / \left(\frac{85,7707}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{85,7707}{2} \right)^2 + (7,3678 \times 10^{-6}) \times (6,6733 \times 10^{-6}) \right]} \right)$$

$$\beta = -8,5902 \times 10^{-8}$$

$$P_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7,7804 \times 10^{-8} \\ 0 & -8,5902 \times 10^{-8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{10} = P_9^T K^9 P_9 = \begin{bmatrix} 43,8759 & 0 & 0 \\ 0 & 24,7844 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1180 \end{bmatrix}$$

$$M^{10} = P_9^T M^9 P_9 = \begin{bmatrix} 14,2866 & 0 & 0 \\ 0 & 4,2189 & 0 \\ 0 & 0 & 3,8212 \end{bmatrix}$$

Dönüşüm işlemi köşegen üstündeki tüm elemanlara uygulandığı için 3. döngü tamamlanmıştır.

$$X = P_1 P_2 \dots P_9 = \begin{bmatrix} 1,5901 & -0,4804 & 0,2646 \\ 0,6820 & 1,1407 & 0,7795 \\ -1,2734 & -0,5888 & 1,0784 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \text{köş} \begin{bmatrix} k_{11}^{(10)}/m_{11}^{(10)} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{33}^{(10)}/m_{33}^{(10)} \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3,071119 & & \\ & 5,874607 & \\ & & 0,554274 \end{bmatrix}$$

$$\frac{|\Lambda_{11}^{(4)} - \Lambda_{11}^{(3)}|}{\Lambda_{11}^{(4)}} = \frac{|3,071119 - (k_{11}^{(7)}/m_{11}^{(7)})|}{3,071119} = \frac{|3,071119 - 3,071144|}{3,071119} = 8,1740 \times 10^{-6} < 10^{-4}$$

Yakınsama şartları gerçekleştiğinden iterasyon sonlandırılmıştır. Görüldüğü üzere $[\Lambda]$ matrisinin köşegenleri sistemin sırayla $\omega_1^2 = 0,554274$, $\omega_2^2 = 3,071119$ ve $\omega_3^2 = 5,874607$ frekanslarından oluşmaktadır, Sistemin özvektörleri ise (3.121) eşitliğinden aşağıdaki gibi hesap edilir.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1,5901}{\sqrt{14,2866}} & \frac{-0,4804}{\sqrt{4,2189}} & \frac{0,2646}{\sqrt{3,8212}} \\ \frac{0,6820}{\sqrt{14,2866}} & \frac{1,1407}{\sqrt{4,2189}} & \frac{0,7795}{\sqrt{3,8212}} \\ \frac{-1,2734}{\sqrt{14,2866}} & \frac{-0,5888}{\sqrt{4,2189}} & \frac{1,0784}{\sqrt{3,8212}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,42069 & -0,23387 & 0,13537 \\ 0,18042 & 0,55536 & 0,39877 \\ -0,33689 & -0,28667 & 0,55166 \end{bmatrix}$$

ϕ_1 için normleştirme işlemi:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 0,135374 & 0,398774 & 0,551659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,135374 \\ 0,398774 \\ 0,551659 \end{bmatrix} = 0,481674$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{0,481674}} \begin{bmatrix} 0,135374 \\ 0,398774 \\ 0,551659 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0,195056} \\ \mathbf{0,574579} \\ \mathbf{0,794866} \end{bmatrix}}_{\phi_1}$$

ϕ_2 için normalleştirme işlemi:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 0,420686 & 0,180424 & -0,336889 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,420686 \\ 0,180424 \\ -0,336889 \end{bmatrix} = 0,323024$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{0,323024}} \begin{bmatrix} 0,420686 \\ 0,180424 \\ -0,336889 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0,740186} \\ \mathbf{0,317451} \\ \mathbf{-0,592747} \end{bmatrix}}_{\phi_2}$$

ϕ_3 için normalleştirme işlemi:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 0,233875 & -0,555362 & 0,286667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,233875 \\ -0,555362 \\ 0,286667 \end{bmatrix} = 0,445302$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{0,445302}} \begin{bmatrix} 0,233875 \\ -0,555362 \\ 0,286667 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0,350474} \\ \mathbf{-0,832240} \\ \mathbf{0,429586} \end{bmatrix}}_{\phi_3}$$

3.4.2. Jacobi yöntemi

Jacobi yöntemi veya dönüşümü, standart tip özdeğer problemlerinin çözümü için geliştirilmiştir. Koordinat dönüşümüne dayanan bir yöntemdir ve simetrik bir matrisin tüm özdeğerleri hesaplanabilmektedir. (2.69) ve (2.70) eşitlikleri ile verilen standart

tip özdeğer problemlerinde tanımlanan $[E]$ ve $[D]$ matrisleri simetrik olmayan matrislerdir ve Jacobi yöntemi uygulanamaz. Ancak uygun bir dönüşüm uygulayarak simetrik matris elde edilebilir. Bu amaçla özvektörlere,

$$\{\phi\} = [U]^{-T} \{\bar{\phi}\} \quad (3.152)$$

dönüşümü uygulanabilir. Burada $[U]$ kare matris, $\{\bar{\phi}\}$ ise dönüştürülmüş özvektördür.

(3.152) eşitliği, (2.63) denkleminde yerine koyularak:

$$\left[[K][U]^{-T} - \omega^2 [M][U]^{-T} \right] \{\bar{\phi}\} = \{0\} \quad (3.153)$$

elde edilir. Daha sonra (3.153) denklemi $[U]^{-T}$ matrisinin transpozunu, yani $[[U]^{-T}]^T = [U]^{-1}$ ile önden çarpılarak:

$$[[U]^{-1}[K][U]^{-T} - \omega^2 [U]^{-1}[M][U]^{-T}] \{\bar{\phi}\} = \{0\} \quad (3.154)$$

elde edilir.

Bu noktada simetrik matrisi elde etmek üzere dönüşüm sağlayan iki yol vardır:

1) $[M] = [U][U]^T$ kabul edilerek, (3.154) denkleminde yerine koyulursa:

$$[[U]^{-1}[K][U]^{-T} - \omega^2 [U]^{-1}[U][U]^T[U]^{-T}] \{\bar{\phi}\} = \{0\} \quad (3.155)$$

Burada $[U]^{-1}[U]$ ve $[U]^T[U]$ çarpımları, $[I]$ birim matrise eşit olduğundan (3.155) denklemi sadeleştirilmiş olarak,

$$[[U]^{-1}[K][U]^{-T} - \omega^2 [I]] \{\bar{\phi}\} = \{0\} \quad (3.156)$$

veya

$$[[\bar{E}] - \lambda [I]]\{\bar{\Phi}\} = 0 \quad (3.157)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[\bar{E}] = [U]^{-1}[K][U]^{-T}$ ve $\lambda = \omega^2$ dir.

2) $[K] = [U][U]^T$ kabul edilerek, (3.154) denkleminde yerine koyulursa:

$$[[U]^{-1}[U][U]^T[U]^{-T} - \omega^2[U]^{-1}[M][U]^{-T}]\{\bar{\Phi}\} = \{0\} \quad (3.158)$$

(3.158) denklemi sadeleştirilmiş olarak,

$$[[\bar{D}] - \lambda [I]]\{\bar{\Phi}\} = 0 \quad (3.159)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[\bar{D}] = [U]^{-1}[M][U]^{-T}$ ve $\lambda = 1/\omega^2$ dir (Thorby 2008).

Bu şekilde elde edilen simetrik matris, Jacobi yöntemi ile (3.117) eşitliklerinde gösterildiği şekilde kademeli olarak ortogonal dönüşümler ile köşegen forma dönüştürülür. Bu amaçla,

$$[K^{k+1}] = [P_k^T][K^k][P_k] \quad ([P_k^T][P_k] = I) \quad (3.160)$$

tekrarlama şartını sağlayan bir dizi matris oluşturulur.

Burada $[P]$ dönüşüm matrisi ortogonal bir matris $([P_k^T][P_k] = I)$ 'tir. Dönüştürülmüş olan $[K^{k+1}]$ matrisi ile $[K]$ matrisinin sadece p . ve q . satır ve sütunları farklıdır.

Bunun bir sonucu olarak $[P]$ dönüşüm matrisi:

$$P = I + (\cos \theta - 1)(e_p e_p^T + e_q e_q^T) + \sin \theta (e_p e_q^T - e_q e_p^T) \quad (3.161)$$

olmak zorundadır.

e_j, j yönünde birim vektör olmak üzere,

$$P e_j = e_j \quad (j \neq p, q) \quad (3.162)$$

$$P e_p = \cos \theta e_p - \sin \theta e_q \quad (3.163)$$

$$P e_q = \sin \theta e_p + \cos \theta e_q \quad (3.164)$$

ortogonal dönüşüm matrisi aşağıdaki formu almaktadır.

$$P_{(p,q,\theta)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos \theta & & & \sin \theta & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & -\sin \theta & & 1 & & & \\ & & & & & & \cos \theta & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{matrix} \rightarrow p. \\ \rightarrow q. \text{ satır} \end{matrix}$$

$\begin{matrix} p. \\ \uparrow \end{matrix}$
 $\begin{matrix} q. \text{ sütun} \\ \uparrow \end{matrix}$

Dönüşüm matrisinde $p_{pp} = p_{qq} = \cos \theta$, $p_{pq} = -p_{qp} = \sin \theta$, $p_{ii} = 1$ ($i \neq p, q$), $p_{ij} = 0$ 'dır.

Bu geometrik anlamda, e_p ve e_q baz vektörlerinin belirlediği düzlemde θ kadar bir dönmeye tekabül etmektedir (Géradin and Rixen 1997).

k_{ij} ögesi üzerine ortogonal dönüşümün etkisi aşağıda açıkça görülmektedir.

$$k_{ij}^{(k+1)} = e_i^T [K^{k+1}] e_j = (P e_i)^T [K] (P e_j) \quad (3.165)$$

Dönüşümün anlaşılır olması açısından (2×2) boyutunda gerçek ve simetrik bir $[K]$ matrisi ele alınmaktadır.

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{pq} \\ k_{qp} & k_{qq} \end{bmatrix}$$

İki boyutlu dönme işlemcisi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$P_k = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

Bu matrisin determinantı bir (1), transpozunu tersine eşit, satır ve sütun vektörleri diktir. Yani birim matristir.

$[K][P_k]$ şeklindeki benzerlik dönüşümünde matrisin sadece p . ve q . sütunları değişir; diğer sütunlar değişmez. Benzerlik dönüşümünü tamamlamak için $[K^{k+1}] = [P_k^{-1}][K][P_k] = [P_k^T][K][P_k]$ çarpımı yapıldığında bu kez $[K][P_k]$ matrisinin sadece p . ve q . satırları değişir.

$[K^{k+1}] = [P_k^T][K^k][P_k]$ benzerlik dönüşümünün açık yazılımı:

$$\begin{aligned} [K^{k+1}] &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{pq} \\ k_{qp} & k_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_{pp}c^2 - k_{qp}cs - k_{pq}cs + k_{qq}s^2 & k_{pp}cs - k_{qp}s^2 + k_{pq}c^2 - k_{qq}cs \\ k_{pp}cs + k_{qp}c^2 - k_{pq}s^2 - k_{qq}cs & k_{pp}s^2 + k_{qp}cs + k_{pq}cs + k_{qq}c^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $[K^{k+1}]$ matrisi, köşegen elemanları özdeğerlerden oluşan bir köşegen matristir.

Benzerlik dönüşümleri sonucunda $[K^{k+1}]$ matrisinin elemanları aşağıda verilen şekilde bulunur.

$$k_{pp}^{(k+1)} = k_{pp} \cos^2 \theta - k_{qp} \cos \theta \sin \theta - k_{pq} \cos \theta \sin \theta + k_{qq} \sin^2 \theta$$

$$k_{qq}^{(k+1)} = k_{pp} \sin^2 \theta + k_{qp} \cos \theta \sin \theta + k_{pq} \cos \theta \sin \theta + k_{qq} \cos^2 \theta$$

$$k_{pq}^{(k+1)} = k_{pp} \cos \theta \sin \theta - k_{qp} \sin^2 \theta + k_{pq} \cos^2 \theta - k_{qq} \cos \theta \sin \theta$$

$$= (k_{pp} - k_{qq}) \cos \theta \sin \theta - k_{qp} \sin^2 \theta + k_{pq} \cos^2 \theta$$

$$k_{qp}^{(k+1)} = k_{pp} \cos \theta \sin \theta + k_{qp} \cos^2 \theta - k_{pq} \sin^2 \theta - k_{qq} \cos \theta \sin \theta$$

$$= (k_{pp} - k_{qq}) \cos \theta \sin \theta + k_{qp} \cos^2 \theta - k_{pq} \sin^2 \theta$$

$[K]$ matrisinin simetrikliği ($k_{pq} = k_{qp}$) gözönüne alınırsa,

$$k_{ij}^{(k+1)} = k_{ij} \quad (i, j \neq p, q)$$

$$k_{ip}^{(k+1)} = k_{pi}^{(k+1)} = k_{ip} \cos \theta - k_{iq} \sin \theta \quad (i \neq p, q)$$

$$k_{iq}^{(k+1)} = k_{qi}^{(k+1)} = k_{ip} \sin \theta + k_{iq} \cos \theta \quad (i \neq p, q)$$

$$k_{pp}^{(k+1)} = k_{pp} \cos^2 \theta - 2 k_{pq} \sin \theta \cos \theta + k_{qq} \sin^2 \theta \quad (3.167)$$

$$k_{qq}^{(k+1)} = k_{pp} \sin^2 \theta + 2 k_{pq} \sin \theta \cos \theta + k_{qq} \cos^2 \theta$$

$$k_{pq}^{(k+1)} = k_{qp}^{(k+1)} = (k_{pp} - k_{qq}) \cos \theta \sin \theta + k_{pq} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

bağıntıları elde edilir.

Her adımda uygulanan ortogonal dönüşüm matrisleri P_i ise son dönüşüm matrisi $[P]$

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots \quad (3.168)$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada $[P]$ matrisinin sütunları $[K]$ matrisinin dönüştürülmüş özvektörleridir.

Köşegen dışı elemanların sıfır $(k_{pq}^{(k+1)} = k_{qp}^{(k+1)} = 0)$ olması gerekliliğinden

$$\begin{bmatrix} k_{pp}^{(k+1)} & k_{pq}^{(k+1)} = 0 \\ k_{qp}^{(k+1)} = 0 & k_{qq}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{pq} \\ k_{qp} & k_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$(k_{pp} - k_{qq}) \cos \theta \sin \theta + k_{pq}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \quad (3.169)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} \quad (3.170)$$

sonucu bulunacaktır. Trigonometrik özdeşliklerden, dönme açısını veren ifade olarak

$$\frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \tan 2\theta = \frac{2k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} \quad (3.171)$$

bağıntısı elde edilir. Pratik olması açısından aşağıdaki gibi notasyon kullanılabilir:

$$\alpha = \cot 2\theta = \frac{k_{qq} - k_{pp}}{2k_{pq}} \quad t = \tan \theta \quad (3.172)$$

şeklinde kısaltma yapılabilir.

$\tan^2 \theta + 2 \tan \theta \cot 2\theta - 1 = 0$ özdeşliği ise,

$$t^2 + 2 \alpha t - 1 = 0 \quad (3.173)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu ikinci dereceden denklemin çözümünden kökler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$t = \frac{1}{(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1})} \quad (3.174)$$

Köşegen dışı elemanların olabildiğince küçük olması için θ açısının olabildiğince sıfıra yakın olması istenir. Bu şartı hızlandırmak için (3.174) eşitliğini:

$$t = \frac{\text{sign}(\alpha)}{(|\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + 1})} \quad (3.175)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$t = \begin{cases} +1, & \alpha > 0 \text{ ise} \\ -1, & \alpha < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.176)$$

olarak alınmalıdır. α değerinin çok büyük olması durumunda (3.174) eşitliği aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$t = \frac{1}{2\alpha} \quad (3.177)$$

Son olarak $c = \cos \theta$ ve $s = \sin \theta$ değerlerinin elde edilişi aşağıdaki gibidir (Kiusalaas 2010).

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \quad (3.178)$$

$$s = t \cdot c \quad (3.179)$$

Burada θ açısı için geçerli olan aralık şu şekildedir:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (3.180)$$

Yöntemde, k adım sonunda aşağıda belirtildiği şekilde s basamak hassasiyetle yakınsama sağlandığı takdirde, $[K^{k+1}] = \Lambda$ ve $\Phi = P_1 P_2 \dots P_k$ matrisleri elde edilir.

$$\frac{|k_{pp}^{(r+1)} - k_{pp}^{(r)}|}{k_{pp}^{(r+1)}} \leq 10^{-s} \quad (p = 1, \dots, n) \quad (3.181)$$

$$\left[\frac{(k_{pq}^{(k+1)})^2}{k_{pp}^{(k+1)} k_{qq}^{(k+1)}} \right] \leq 10^{-2s} \quad (p, q; p < q) \quad (3.182)$$

Jacobi yönteminde yapılması gereken iterasyon sayısı, anlamlı rakamların sayısı ve matris boyutunun karesi ile orantılıdır. Bu özellik nedeniyle yöntem büyük matrisler ($n > 50$) için uygun değildir (Géradin and Rixen 1997).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin özdeğer probleminin, Jacobi yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

(3.157) eşitliğinin açıklamasında bahsedilen $[U]^{-1}[K][U]^{-T}$ matrisi üzerinde (3.152), (3.160), (3.166), (3.168) ve (3.171) eşitlikleri ile tanımlanan işlem adımları uygulanmıştır. Elde edilen değerler aşağıda tablo halinde verilmiştir.

$[U]^{-1}[K][U]^{-T}$ çarpımında yer alan $[U]$ matrisi, $[M] = [U][U]^T$ eşitliğinde de görüldüğü üzere $[M]$ matrisinin çarpanlarından biridir. Bu çarpanlara ayırma işlemi aşağıda açıklanan Cholesky yöntemi ile kolayca yapılabilir.

Cholesky yönteminde simetrik ve pozitif tanımlı bir kare matris, alt üçgensel ve üst üçgensel matris şeklinde çarpanlarına ayrılır (Géradin and Rixen 1997).

$$[U][U]^T = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & \cdots & u_{n1} \\ 0 & u_{22} & u_{32} & \cdots & u_{n2} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{n3} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.183)$$

$[U]$ alt üçgensel matrisinin elemanları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla bulunur.

$$u_{11} = \sqrt{m_{11}} \quad (3.184)$$

$$u_{q1} = \frac{m_{q1}}{u_{11}} \quad (q = 2, \dots, n) \quad (3.185)$$

$$u_{pp} = \sqrt{\left(m_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} u_{pk}^2 \right)} \quad (p = 2, \dots, n) \quad (3.186)$$

$$u_{qp} = \left(m_{qp} - \sum_{k=1}^{p-1} u_{pk} u_{qk} \right) / u_{pp} \quad (p > q) \quad (3.187)$$

$$[M] = [U][U]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1,414214 & 0 \\ 0 & 0 & 1,414214 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1,414214 & 0 \\ 0 & 0 & 1,414214 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^1 = [U]^{-1}[K][U]^{-T} = \begin{bmatrix} 3,5 & -1,414427 & 0 \\ -1,414427 & 4,001208 & -2,000604 \\ 0 & -2,000604 & 2,000604 \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

Döngü-1 / İterasyon-1: $\bar{K}^1$ matrisinin $p = 1, q = 2$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\tan 2\theta = \frac{2 k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} = \frac{2 k_{12}}{k_{22} - k_{11}} = \frac{2 (-1,414427)}{(4,001208 - 3,5)} = -5,644068$$

$$\theta = -39,976382$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,766309 & -0,642472 & 0 \\ 0,642472 & 0,766309 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^2 = P_1^T \bar{K}^1 P_1 = \begin{bmatrix} 2,314148 & 0 & -1,285332 \\ 0 & 5,187060 & -1,533082 \\ -1,285332 & -1,533082 & 2,000604 \end{bmatrix}$$

Döngü-1 / İterasyon-2: $\bar{K}^2$ matrisinin $p = 1, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\tan 2\theta = \frac{2 k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} = \frac{2 k_{13}}{k_{33} - k_{11}} = \frac{2 (-1,285332)}{(2,000604 - 2,314148)} = 8,198740$$

$$\theta = 41,522992$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,748690 & 0 & 0,662921 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,662921 & 0 & 0,748690 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^3 = P_2^T \bar{K}^2 P_2 = \begin{bmatrix} 3,452233 & 1,016311 & 0 \\ 1,016311 & 5,187060 & -1,147803 \\ 0 & -1,147803 & 0,862519 \end{bmatrix}$$

Döngü-1 / İterasyon-3: $\bar{K}^3$ matrisinin $p = 2, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\tan 2\theta = \frac{2 k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} = \frac{2 k_{23}}{k_{33} - k_{22}} = \frac{2 (-1,147803)}{(0,862519 - 5,187060)} = 0,530832$$

$$\theta = 13,980397$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,970378 & 0,241590 \\ 0 & -0,241590 & 0,970378 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^4 = P_3^T \bar{K}^3 P_3 = \begin{bmatrix} 3,452233 & 0,986207 & 0,245531 \\ 0,986207 & 5,472823 & 0 \\ 0,245531 & 0 & 0,576757 \end{bmatrix}$$

Döngü-2 / İterasyon-1: $\bar{K}^4$ matrisinin $p = 1, q = 2$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\tan 2\theta = \frac{2 k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} = \frac{2 k_{12}}{k_{22} - k_{11}} = \frac{2 (0,986207)}{(5,472823 - 3,452233)} = 0,976157$$

$$\theta = 22,154375$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,926171 & 0,377103 & 0 \\ -0,377103 & 0,926171 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^5 = P_4^T \bar{K}^4 P_4 = \begin{bmatrix} 3,050686 & 0 & 0,227403 \\ 0 & 5,874370 & 0,092590 \\ 0,227403 & 0,092590 & 0,576757 \end{bmatrix}$$

Döngü-2 / İterasyon-2: $\bar{K}^5$ matrisinin $p = 1, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\tan 2\theta = \frac{2 k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} = \frac{2 k_{13}}{k_{33} - k_{11}} = \frac{2 (0,227403)}{(0,576757 - 3,050686)} = -0,183840$$

$$\theta = -5,208466$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,995871 & 0 & -0,090780 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,090780 & 0 & 0,995871 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^6 = P_5^T \bar{K}^5 P_5 = \begin{bmatrix} 3,071415 & 0,008405 & 0 \\ 0,008405 & 5,874370 & 0,092208 \\ 0 & 0,092208 & 0,556027 \end{bmatrix}$$

Döngü-2 / İterasyon-3: $\bar{K}^6$ matrisinin $p = 2, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\tan 2\theta = \frac{2 k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} = \frac{2 k_{23}}{k_{33} - k_{22}} = \frac{2 (0,092208)}{(0,556027 - 5,874370)} = -0,034676$$

$$\theta = -0,992982$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,999850 & -0,017330 \\ 0 & 0,017330 & 0,999850 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^7 = P_6^T \bar{K}^6 P_6 = \begin{bmatrix} 3,071415 & 0,008404 & -0,000146 \\ 0,008404 & 5,875969 & 0 \\ -0,000146 & 0 & 0,554429 \end{bmatrix}$$

Döngü-3 / İterasyon-1: $\bar{K}^7$ matrisinin $p = 1, q = 2$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\tan 2\theta = \frac{2 k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} = \frac{2 k_{12}}{k_{22} - k_{11}} = \frac{2 (0,008404)}{(5,875969 - 3,071415)} = 0,005993$$

$$\theta = 0,171689$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,999996 & 0,002997 & 0 \\ -0,002997 & 0,999996 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^8 = P_7^T \bar{K}^7 P_7 = \begin{bmatrix} 3,071390 & 0 & -0,000146 \\ 0 & 5,875994 & -4,4 \times 10^{-7} \\ -0,000146 & -4,4 \times 10^{-7} & 0,554429 \end{bmatrix}$$

Döngü-3 / İterasyon-2: $\bar{K}^8$ matrisinin $p = 1, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\tan 2\theta = \frac{2 k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} = \frac{2 k_{13}}{k_{33} - k_{11}} = \frac{2 (-0,000146)}{(0,554429 - 3,071390)} = 0,000116$$

$$\theta = 0,003316$$

$$P_8 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,000058 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,000058 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^9 = P_8^T \bar{K}^8 P_8 = \begin{bmatrix} 3,071390 & 0 & 0 \\ 0 & 5,875994 & -4,4 \times 10^{-7} \\ 0 & -4,4 \times 10^{-7} & 0,554429 \end{bmatrix}$$

Döngü-3 / İterasyon-3: $\bar{K}^9$ matrisinin $p = 2, q = 3$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$\tan 2\theta = \frac{2 k_{pq}}{k_{qq} - k_{pp}} = \frac{2 k_{23}}{k_{33} - k_{22}} = \frac{2 (-4,4 \times 10^{-7})}{(0,554429 - 5,875994)} = 1,64 \times 10^{-7}$$

$$\theta = 4,7 \times 10^{-6}$$

$$P_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8,2 \times 10^{-8} \\ 0 & -8,2 \times 10^{-8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^{10} = P_9^T \bar{K}^9 P_9 = \begin{bmatrix} 3,071390 & 0 & 0 \\ 0 & 5,875994 & 0 \\ 0 & 0 & 0,554429 \end{bmatrix}$$

Daha da hassas çözüm elde edebilmek için bir kaç döngü daha gerçekleştirilebilir. Ancak burada $[\bar{K}^{10}] \rightarrow \Lambda$ yakınsaması gerçekleştiği için işlem sonlandırılmıştır. $[\bar{K}^{10}]$ matrisinin köşegenleri sistemin sırayla $\omega_1^2 = 0,554429$, $\omega_2^2 = 3,071390$ ve $\omega_3^2 = 5,875994$ frekanslarından oluşmaktadır. Sistemin özvektörleri ise (3.168) eşitliğinden aşağıdaki gibi hesap edilir.

$$P = P_1 P_2 \dots P_9 = \begin{bmatrix} 0,841446 & -0,467585 & 0,270800 \\ 0,254981 & 0,785461 & 0,563946 \\ -0,476395 & -0,405481 & 0,780149 \end{bmatrix}$$

Bulunan bu matris, $\bar{\Phi}$ dönüştürülmüş özvektör matrisine eşittir. (3.152) eşitliğine göre $\{\phi\} = [U]^{-T} \{\bar{\Phi}\}$ olduğundan Φ özvektörler matrisi aşağıdaki gibi hesap edilir.

$$\{\phi\} = [U]^{-T} \{\bar{\Phi}\} = \begin{bmatrix} 0,420723 & -0,233792 & 0,135400 \\ 0,180326 & 0,555489 & 0,398830 \\ -0,336913 & -0,286762 & 0,551732 \end{bmatrix}$$

3.4.3. Alt uzaylarla iterasyon yöntemi

Alt uzaylarla iterasyon yöntemi, büyük sistemlerin küçük modlarının hesaplanmasında etkilidir (Humar 2002). Bu yöntem ile (2.62) eşitliğinde tanımlanan, $[K] \{X\} = \omega^2 [M] \{X\}$ biçimindeki genelleştirilmiş özdeğer problemi için (3.114), (3.115) ve (3.189) eşitlikleri ile verilen özellikleri sağlayan p adet en küçük özdeğer ve özvektör

hesaplanabilmektedir. Burada $K, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sistemin pozitif tanımlı rijitlik ve kütle matrisleridir. Sistemin i . özçiftleri (λ_i, Φ_i) olmak üzere aşağıdaki gibi n tane özçift vardır.

$$[K] \{X\} = [M] \{X\} [\Lambda] \quad (3.189)$$

Burada, $\Lambda = \text{köş} (\omega_1^2 \dots \omega_n^2)$ ve $X = [x_{(1)} \dots x_{(n)}]$ 'dir.

Buna ek olarak, ortogonallik şartları sağlanır.

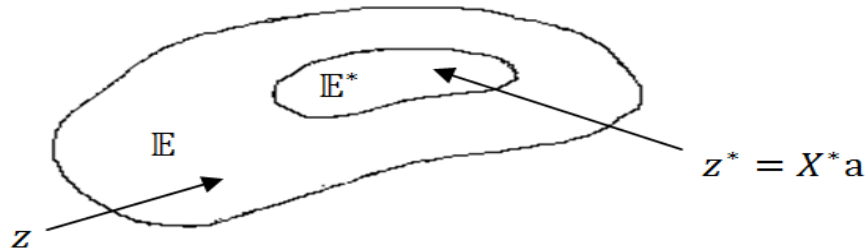
$$X^T M X = I \quad X^T K X = \Lambda \quad (3.190)$$

ve n boyutlu $\mathbb{E}$ uzayı, X matrisini kapsamaktadır. X matrisinden ilk p adet özvektör ayrılırsa,

$$X^* = [x_{(1)} \dots x_{(p)}] \quad (p < n) \quad (3.191)$$

$$X^{*T} M X^* = I^* \quad X^{*T} K X^* = \Lambda^* = \text{köş} (\omega_1^2 \dots \omega_p^2) \quad (3.192)$$

olur. Burada, $\mathbb{E}^* \subset \mathbb{E}$ 'dır. Yani $\mathbb{E}$ uzayı $\mathbb{E}^*$ altuzayını kapsar. ''*'' işareti, p uzunluğunda bir uzaya indirgemeyi gösterir.



Şekil 3.9. Alt uzay kavramı

Altuzay yöntemindeki temel fikir, X^* dahil olduğu ve modların lineer kombinasyonu ile oluşturulan herhangi bir z vektörü oluşumunu incelemektir.

$$z = X^* a \quad (3.193)$$

Bu vektör, $\mathbb{E}^*$ alt uzayını da kapsar ve daha genel anlamda, X^* ve $Z^* = X^* A$ ($[A]_{p \times p}$ ve $\det(A) \neq 0$) ile oluşturulan uzay aynıdır.

İlk p adet özdeğer çözümünde, $\mathbb{E}^*$ içinde bulunan p lineer bağımsız vektörleri ile Z^* dizisi bir kez çözülür: İndirgenmiş özdeğer problemi,

$$K^* y = \omega^2 M^* y \quad (3.194)$$

ile indirgenmiş rijitlik ve kütle matrisleri ise $K^* = Z^{*T} K Z^*$ ve $M^* = Z^{*T} M Z^*$ şeklindedir ve ilk p adet frekans elde edilebilir. Modlar, $X^* = Z^* Y$ olup, burada Y vektörü (3.194) eşitliği ile tanımlanan indirgenmiş özdeğer probleminin özvektörleridir.

Bunu göstermek üzere, lineer bağımsız olduklarından, Z^* vektörü pozitif tanımlı M matrisi ile ortogonal hale getirilebilir:

$$Z^{*T} M Z^* = I^* \quad (3.195)$$

Bundan dolayı, $Z^* = X^* A$ ($A^T = A^{-1}$) ve Z^* üzerinden çözüm için $x = Z^* y$ ifadesi kullanılarak,

$$K Z^* y = \omega^2 M Z^* y \quad (3.196)$$

elde edilebilir. Z^{*T} ile soldan çarparak,

$$K^* y = \omega^2 M^* y \quad (3.197)$$

şeklindeki (3.194) eşitliğine ulaşılır ve indirgenmiş matrisler,

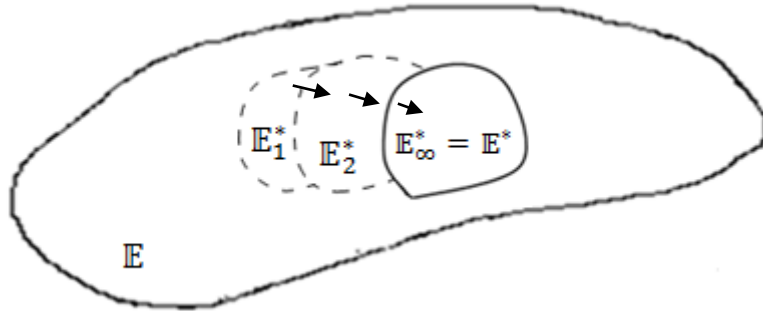
$$K^* = Z^{*T} K Z^* = A^T \Lambda^* A \quad M^* = Z^{*T} M Z^* = A^T A = I^* \quad (3.198)$$

şeklinde bulunur. Bunun için

$$\Lambda^* = (\omega_1^2 \dots \omega_p^2) \quad Y = [y_{(1)} \dots y_{(p)}] \quad (3.199)$$

çözümleri vardır. Böylece, (3.194) eşitliği ile verilen etkileşim probleminin çözümü Z^* alt uzayının içerdiği frekanslara ulaşmayı ve ortogonal $X^* = Z^* Y$ özvektörünün oluşturulmasını sağlar.

Özetle, alt uzaylarla iterasyon yöntemi, ardışık $\mathbb{E}_0^*, \mathbb{E}_1^*, \dots, \mathbb{E}_k^*$ alt uzaylarını kapsayan, $(n \times p)$ boyutlu $Z_0, \dots, Z_k$ matris serisinin ters iterasyon yöntemi ile oluşumunu içerir. Ayrıca ilk p adet modu içeren X^* , $\mathbb{E}_\infty^* = \mathbb{E}^*$ alt uzayına yakınsamalıdır (Géradin and Rixen 1997).



Şekil 3.10. Alt uzay yöntemi yakınsaması

İterasyon adımları şu şekildedir:

Bu işlem X_1 başlangıç iterasyon vektörü ile başlatılır, $\mathbb{E}_k \rightarrow \mathbb{E}_{k+1}$ yakınsaması sağlanana kadar ($k = 1, 2, 3, \dots$) için aşağıdaki işlemler tekrarlanır:

$$[K] [\bar{X}_{k+1}] = [M] [X_k] \quad (3.200)$$

Burada ilk olarak (3.200) eşitliği çözülür ve $[K]$ ile $[M]$ matrislerinin $\mathbb{E}_{k+1}$ uzayındaki izdüşümleri bulunur.

$$[\bar{K}^{k+1}]_{p \times p} = [\bar{X}_{k+1}]^T [K] [\bar{X}_{k+1}] \quad (3.201)$$

$$[\bar{M}^{k+1}]_{p \times p} = [\bar{X}_{k+1}]^T [M] [\bar{X}_{k+1}] \quad (3.202)$$

$\mathbb{E}_{k+1}$ uzayında elde edilen matrislerden oluşan yeni sistemin (3.203) özdeğer problemi uygun bir metod ile (Genel Jacobi vb.) çözülür ve alt uzaydaki sistem için,

$$[K^{k+1}] [Q^{k+1}] = [M^{k+1}] [Q^{k+1}] [\Lambda^{k+1}] \quad (3.203)$$

$[Q^{k+1}]$ ve $[\Lambda^{k+1}]$ elde edilir. Bulunan bu matrislerden bir sonraki iterasyon için yeni matris hesaplanır.

$$[X_{k+1}]_{n \times p} = [\bar{X}_{k+1}]_{n \times p} [Q^{k+1}]_{p \times p} \quad (3.204)$$

$k \rightarrow \infty$ için sistemin özdeğer ve özvektörleri, $[\Lambda^{k+1}] = \Lambda$ ve $[X_{k+1}] = \Phi$ olarak elde edilir.

Alt uzaylarla iterasyon metodunda yakınsama kriteri olarak, vektör iterasyon yöntemlerinde kullanılan

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)}} \leq \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (3.205)$$

ifadesi kullanılmaktadır.

Altuzay iterasyon yönteminde iterasyon vektörlerinin sayısı, minimum $\{2p, p + 8\}$ olarak benimsenmiştir. Yani istenen p adet en küçük özdeğerin bulunması için minimum $\{2p, p + 8\}$ adet özdeğer bulmak gerekir (Bathe 1982).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin özdeğer probleminin, alt uzaylarla iterasyon yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

(3.200), (3.201), (3.202), (3.203) ve (3.204) eşitlikleri ile tanımlanan işlem adımları uygulanmıştır. Elde edilen değerler tablo halinde verilmiştir.

Çizelge 3.9. Alt uzaylarla iterasyon

k	$[\bar{X}_{k+1}]$	$[K^{k+1}]$	$[Q^{k+1}]$	$[\Lambda^{k+1}]$	$[X_{k+1}]$
1	$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,7 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,6 & 0,8 \\ 0,8 & 1,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,1754 \\ -0,7016 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,850781 & \\ & 0,649219 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2597 & 0,2702 \\ -0,0911 & 0,7702 \\ -0,0911 & 0,7702 \end{bmatrix}$
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 1,28 & 1,44 \\ 1,44 & 2,12 \end{bmatrix}$			
2	$\begin{bmatrix} 0,0674 & 0,4161 \\ -0,0237 & 1,1863 \\ -0,0692 & 1,5714 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -0,2748 \\ 0,0199 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,333333 & \\ & 0,555556 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0757 & 0,3976 \\ -1,4 \times 10^{-17} & 1,1928 \\ -0,0379 & 1,5904 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 0,0870 & -0,0702 \\ 0,0702 & 4,6973 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 0,0289 & -0,1614 \\ -0,1614 & 8,4455 \end{bmatrix}$			
3	$\begin{bmatrix} 0,0227 & 0,7157 \\ 0,0038 & 2,1072 \\ -0,0151 & 2,9024 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -0,1251 \\ 0,0003 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,147988 & \\ & 0,554287 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0229 & 0,7128 \\ 0,0043 & 2,1068 \\ -0,0144 & 2,9043 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 0,0080 & -0,0030 \\ -0,0030 & 15,3971 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 0,0026 & -0,0069 \\ -0,0069 & 27,7780 \end{bmatrix}$			
4	$\begin{bmatrix} 0,0072 & 1,2874 \\ 0,0021 & 3,7929 \\ -0,0051 & 5,2451 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0410 \\ 2,7 \times 10^{-6} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,092554 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0072 & 1,2871 \\ 0,0021 & 3,7928 \\ -0,0051 & 5,2453 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 0,0008 & -0,0001 \\ -0,0001 & 50,1190 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 0,0003 & -0,0002 \\ -0,0002 & 90,4228 \end{bmatrix}$			

Çizelge 3.9. (devam)

k	$\bar{X}_{k+1}$	$[K^{k+1}]$	$[Q^{k+1}]$	$[\Lambda^{k+1}]$	$[X_{k+1}]$
5	$\begin{bmatrix} 0,0023 & 2,3224 \\ 0,0008 & 6,8415 \\ -0,0017 & 9,4641 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8,6 \times 10^{-5} & -3,0 \times 10^{-6} \\ -3,0 \times 10^{-6} & 163,1374 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0118 \\ 2,5 \times 10^{-8} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,077010 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0023 & 2,3224 \\ 0,0008 & 6,8415 \\ -0,0017 & 9,4641 \end{bmatrix}$
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 2,8 \times 10^{-5} & -7,0 \times 10^{-6} \\ -7,0 \times 10^{-6} & 294,3262 \end{bmatrix}$			
6	$\begin{bmatrix} 0,0007 & 4,1901 \\ 0,0003 & 12,3429 \\ -0,0006 & 17,0750 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0033 \\ 2,2 \times 10^{-10} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,072731 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0007 & 4,1901 \\ 0,0003 & 12,3429 \\ -0,0006 & 17,0750 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 9,1 \times 10^{-6} & -8,9 \times 10^{-8} \\ -8,9 \times 10^{-8} & 531,0120 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
7	$\begin{bmatrix} 0,0002 & 7,5596 \\ 9,7 \times 10^{-5} & 22,2686 \\ -0,0002 & 30,8060 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0009 \\ 2,0 \times 10^{-12} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,071560 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0002 & 7,5596 \\ 9,7 \times 10^{-5} & 22,2686 \\ -0,0002 & 30,8060 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 9,6 \times 10^{-7} & -2,6 \times 10^{-9} \\ -2,6 \times 10^{-9} & 1728,4437 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
8	$\begin{bmatrix} 7,7 \times 10^{-5} & 13,6388 \\ 3,2 \times 10^{-5} & 40,1761 \\ -6,1 \times 10^{-5} & 55,5791 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0002 \\ 1,8 \times 10^{-14} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,071239 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7,7 \times 10^{-5} & 13,6388 \\ 3,2 \times 10^{-5} & 40,1761 \\ -6,1 \times 10^{-5} & 55,5791 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 1,0 \times 10^{-7} & -7,5 \times 10^{-11} \\ -7,5 \times 10^{-11} & 5626,0827 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 3,3 \times 10^{-8} & -1,7 \times 10^{-10} \\ -1,7 \times 10^{-10} & 10150,3624 \end{bmatrix}$			

Çizelge 3.9. (devam)

k	$\bar{X}_{k+1}$	$[K^{k+1}]$	$[Q^{k+1}]$	$[\Lambda^{k+1}]$	$[X_{k+1}]$
9	$\begin{bmatrix} 2,5 \times 10^{-5} & 24,6065 \\ 1,1 \times 10^{-5} & 72,4841 \\ -2,0 \times 10^{-5} & 100,2736 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,1 \times 10^{-8} & -2,2 \times 10^{-12} \\ -2,2 \times 10^{-12} & 18312,8942 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -6,7 \times 10^{-5} \\ 1,6 \times 10^{-16} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,071152 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,5 \times 10^{-5} & 24,6065 \\ 1,1 \times 10^{-5} & 72,4841 \\ -2,0 \times 10^{-5} & 100,2736 \end{bmatrix}$
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 3,5 \times 10^{-9} & -5,0 \times 10^{-12} \\ -5,0 \times 10^{-12} & 33039,4207 \end{bmatrix}$			
10	$\begin{bmatrix} 8,1 \times 10^{-6} & 44,3942 \\ 3,5 \times 10^{-6} & 130,7730 \\ -6,5 \times 10^{-6} & 180,9098 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -1,8 \times 10^{-5} \\ 1,4 \times 10^{-18} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,071128 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8,1 \times 10^{-6} & 44,3942 \\ 3,5 \times 10^{-6} & 130,7730 \\ -6,5 \times 10^{-6} & 180,9098 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 1,1 \times 10^{-9} & -6,3 \times 10^{-14} \\ -6,3 \times 10^{-14} & 59608,4542 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 3,7 \times 10^{-10} & -1,4 \times 10^{-13} \\ -1,4 \times 10^{-13} & 107543,2846 \end{bmatrix}$			
11	$\begin{bmatrix} 2,6 \times 10^{-6} & 80,0942 \\ 1,1 \times 10^{-6} & 235,9357 \\ -2,1 \times 10^{-6} & 326,3906 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -5,0 \times 10^{-6} \\ 1,2 \times 10^{-20} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,071121 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,6 \times 10^{-6} & 80,0942 \\ 1,1 \times 10^{-6} & 235,9357 \\ -2,1 \times 10^{-6} & 326,3906 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 1,2 \times 10^{-10} & -1,8 \times 10^{-15} \\ -1,8 \times 10^{-15} & 194025,465 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 3,9 \times 10^{-11} & -4,2 \times 10^{-15} \\ -4,2 \times 10^{-15} & 350053,2947 \end{bmatrix}$			
12	$\begin{bmatrix} 8,6 \times 10^{-7} & 144,5030 \\ 3,7 \times 10^{-7} & 425,6661 \\ -6,9 \times 10^{-7} & 588,8614 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -1,4 \times 10^{-6} \\ 1,1 \times 10^{-22} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,071119 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8,6 \times 10^{-7} & 144,5029 \\ 3,7 \times 10^{-7} & 425,6661 \\ -6,9 \times 10^{-7} & 588,8614 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 1,3 \times 10^{-11} & -5,3 \times 10^{-17} \\ -5,2 \times 10^{-17} & 631552,7144 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 4,2 \times 10^{-12} & -1,2 \times 10^{-16} \\ -1,2 \times 10^{-16} & 1139423,16 \end{bmatrix}$			

Çizelge 3.9. (devam)

k	$\bar{X}_{k+1}$	$[K^{k+1}]$	$[Q^{k+1}]$	$[\Lambda^{k+1}]$	$[X_{k+1}]$
13	$\begin{bmatrix} 2,8 \times 10^{-7} & 260,7067 \\ 1,2 \times 10^{-7} & 767,9704 \\ -2,2 \times 10^{-7} & 1062,4011 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,4 \times 10^{-12} & -1,9 \times 10^{-18} \\ -1,3 \times 10^{-18} & 2055703,518 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -3,7 \times 10^{-7} \\ 1,2 \times 10^{-24} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,071119 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,8 \times 10^{-7} & 260,7067 \\ 1,2 \times 10^{-7} & 767,9704 \\ -2,2 \times 10^{-7} & 1062,4011 \end{bmatrix}$
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 4,4 \times 10^{-13} & -4,2 \times 10^{-18} \\ -4,2 \times 10^{-18} & 3708821,361 \end{bmatrix}$			
14	$\begin{bmatrix} 9,1 \times 10^{-8} & 470,3570 \\ 3,9 \times 10^{-8} & 1385,5428 \\ -7,3 \times 10^{-8} & 1916,7433 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -2,0 \times 10^{-7} \\ 3,7 \times 10^{-26} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,071119 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9,1 \times 10^{-8} & 470,3570 \\ 3,9 \times 10^{-8} & 1385,5428 \\ -7,3 \times 10^{-8} & 1916,7433 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 1,4 \times 10^{-13} & -2,2 \times 10^{-19} \\ -1,1 \times 10^{-19} & 6691313,105 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 4,7 \times 10^{-14} & -4,3 \times 10^{-19} \\ -4,3 \times 10^{-19} & 12072210,2 \end{bmatrix}$			
15	$\begin{bmatrix} 3,0 \times 10^{-8} & 848,6000 \\ 1,3 \times 10^{-8} & 2499,7431 \\ -2,4 \times 10^{-8} & 3458,1147 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -7,0 \times 10^{-7} \\ 4,2 \times 10^{-27} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,071119 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,0 \times 10^{-8} & 848,6000 \\ 1,3 \times 10^{-8} & 2499,7430 \\ -2,4 \times 10^{-8} & 3458,1147 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 1,5 \times 10^{-14} & -8,1 \times 10^{-20} \\ 0 & 21780218,15 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 5,0 \times 10^{-15} & -1,6 \times 10^{-19} \\ -1,6 \times 10^{-19} & 39295033,36 \end{bmatrix}$			
16	$\begin{bmatrix} 9,7 \times 10^{-9} & 1531,0116 \\ 4,1 \times 10^{-9} & 4509,9404 \\ -7,8 \times 10^{-9} & 6238,9978 \end{bmatrix}$	$[K^{k+1}]$	$\begin{bmatrix} 1 & -5,5 \times 10^{-6} \\ 1,1 \times 10^{-27} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{3,071119} & \\ & \mathbf{0,554274} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9,7 \times 10^{-9} & 1531,0116 \\ 4,1 \times 10^{-9} & 4509,9404 \\ -7,8 \times 10^{-9} & 6238,9978 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 1,6 \times 10^{-15} & -6,8 \times 10^{-20} \\ -5,4 \times 10^{-20} & 70894590,5 \end{bmatrix}$			
		$[M^{k+1}]$			
		$\begin{bmatrix} 5,3 \times 10^{-16} & -1,3 \times 10^{-19} \\ -1,3 \times 10^{-19} & 127905298,3 \end{bmatrix}$			

$X_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$ başlangıç vektörü ile yapılan iterasyonlar sonunda,

$$[\Lambda^{k+1}] \rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} 3,071119 & \\ & 0,554274 \end{bmatrix}$$

$$[X_{k+1}] \rightarrow \Phi = \left[\begin{array}{c|c} 9,7 \times 10^{-9} & 1531,0116 \\ 4,1 \times 10^{-9} & 4509,9404 \\ -7,8 \times 10^{-9} & 6238,9978 \end{array} \right]$$

elde edilmiştir.

$\omega_1^2 = 0,554274$ için özvektör :

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1531,0116 & 4509,9404 & 6238,9978 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1531,0116 \\ 4509,9404 \\ 6238,9978 \end{bmatrix} = 6,16 \times 10^7$$

Normalleştirme işlemi:

$$X = \frac{1}{\sqrt{(6,16 \times 10^7)}} \begin{bmatrix} 1531,0116 \\ 4509,9404 \\ 6238,9978 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0,195055} \\ \mathbf{0,574579} \\ \mathbf{0,794866} \end{bmatrix}}_{\Phi_1}$$

$\omega_2^2 = 3,071119$ için özvektör:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 9,7 \times 10^{-9} & 4,1 \times 10^{-9} & -7,8 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9,7 \times 10^{-9} \\ 4,1 \times 10^{-9} \\ -7,8 \times 10^{-9} \end{bmatrix} = 1,71438 \times 10^{-16}$$

Normalleştirme işlemi:

$$X = \frac{1}{\sqrt{(1,71438 \times 10^{-16})}} \begin{bmatrix} 9,7 \times 10^{-9} \\ 4,1 \times 10^{-9} \\ -7,8 \times 10^{-9} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0,740209} \\ \mathbf{0,317419} \\ \mathbf{-0,592736} \end{bmatrix}}_{\phi_2}$$

3.4.4. Lanczos yöntemi

Lanczos yöntemi, orjinal matrisin özdeğer ve özvektörleri değişmeyecek bir şekilde çözümü daha basit olan üçlü - köşegen matris forma dönüştürülmesini sağlayan özel bir yöntemdir. Bu yöntemin esası, bir q_1 başlangıç vektörü üzerinde ters iterasyon ile

$$\{q_1, A q_1, A^2 q_1, \dots\} \quad (3.206)$$

şeklinde bir alt uzay oluşturmak ve ortogonal Krylov dizisi meydana getirmektir (Géradin and Rixen 1997).

Lanczos dönüşüm matrisi Q , sütunları ortogonal $q_1, q_2, \dots, q_n$ birim vektörlerinden oluşan bir matris olmak üzere bu dönüşüm

$$Q^T A Q = T \quad (3.207)$$

veya $Q^T Q = I$ olduğundan

$$A Q = Q T \quad (3.208)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $[A]$ simetrik matris ve $[T]$ ise simetrik üçlü – köşegen matristir.

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & & & \\ & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & & & & \\ & & \beta_3 & \alpha_4 & \beta_4 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (3.209)$$

(3.208) eşitliği ile verilen dönüşümün genişletilmiş hali aşağıdaki gibidir.

$$A[q_1|q_2|\dots|q_n] = [q_1|q_2|\dots|q_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & & & \\ & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & & & & \\ & & \beta_3 & \alpha_4 & \beta_4 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$A q_1 = \alpha_1 q_1 + \beta_1 q_2 \quad (3.210)$$

$$A q_2 = \beta_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \beta_2 q_3 \quad (3.211)$$

$$A q_i = \beta_{i-1} q_{i-1} + \alpha_i q_i + \beta_i q_{i+1} \quad (3.212)$$

$$A q_n = \beta_{n-1} q_{n-1} + \alpha_n q_n \quad (3.213)$$

(3.210) eşitliği q_1^T ile çarpıldığında:

$$q_1^T A q_1 = \alpha_1 q_1^T q_1 + \beta_1 q_1^T q_2 \quad (3.214)$$

elde edilir. q_1 ve q_2 ortogonal olduğundan $q_1^T q_2 = 0$ olmaktadır. (3.214) eşitliği daha da basitleşmektedir.

$$q_1^T A q_1 = \alpha_1 \quad (3.215)$$

Dolayısıyla α_1 , rastgele seçilen birim uzunluktaki bir q_1 vektörü ile hesaplamaya başlanarak belirlenebilir. α_1 belirlendikten sonra (3.210) eşitliğinden,

$$\bar{q}_2 = \beta_1 q_2 = A q_1 - \alpha_1 q_1 \quad (3.216)$$

$$\bar{q}_2^T \bar{q}_2 = \beta_1^2 q_2^T q_2 \quad (3.217)$$

elde edilir. q_2 birim uzunlukta bir vektör olduğundan,

$$\bar{q}_2^T \bar{q}_2 = \beta_1^2 \quad (3.218)$$

olur. β_1 belirlendikten sonra,

$$q_2 = \frac{\bar{q}_2}{\beta_1} \quad (3.219)$$

bulunur. (3.211) eşitliği q_2^T ile çarpıldığında:

$$q_2^T A q_2 = \beta_1 q_2^T q_1 + \alpha_2 q_2^T q_2 + \beta_2 q_2^T q_3 \quad (3.220)$$

elde edilir. α_1 ve β_1 bilindiğinden, ortogonallik koşulları ve birim uzunluktaki q_i vektörleri kullanılarak (3.220) eşitliğinden α_2 belirlenebilir.

$$q_2^T A q_2 = \alpha_2 q_2^T q_2 = \alpha_2 \quad (3.221)$$

Benzer bir şekilde devam edilerek, genel eşitlikler aşağıdaki şekilde belirlenebilir.

$$\alpha_i = q_i^T A q_i \quad (3.222)$$

$$A q_i = \beta_{i-1} q_{i-1} + \alpha_i q_i + \beta_i q_{i+1} \quad (3.223)$$

$$\bar{q}_{i+1} = \beta_i q_{i+1} = A q_i - \beta_{i-1} q_{i-1} - \alpha_i q_i \quad (3.224)$$

$$\beta_i^2 = \bar{q}_{i+1}^T \bar{q}_{i+1} \quad (3.225)$$

$$q_{i+1} = \frac{\bar{q}_{i+1}}{\beta_i} \quad (3.226)$$

Buraya kadar açıklanan kısımda standart tip özdeğer problemi dikkate alınarak işlemler yürütülmüştür. Genel özdeğer problemi ele alındığında $[A]$ matrisi, (3.159) eşitliğinin açıklamasında bahsedilen $[U]^{-1}[M][U]^{-T}$ matrisine eşit olmaktadır (Bhatt 2002).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sisteme ait matrislerin, Lanczos yöntemi ile üçlü – köşegenel forma dönüşümü aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

(3.159) eşitliğinin açıklamasında bahsedilen $[U]^{-1}[M][U]^{-T}$ matrisi üzerinde (3.222), (3.224), (3.225) ve (3.226) eşitlikleri ile tanımlanan işlem adımları uygulanmıştır. Elde edilen değerler aşağıda verilmiştir.

$$[K] = [U] [U^T]$$

$$= \begin{bmatrix} 3,741657 & 0 & 0 \\ -1,069045 & 2,618615 & 0 \\ 0 & -1,527525 & 1,290994 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,741657 & -1,069045 & 0 \\ 0 & 2,618615 & -1,527525 \\ 0 & 0 & 1,290994 \end{bmatrix}$$

$$A = [U]^{-1}[M][U]^{-T} = \begin{bmatrix} 0,285708 & 0,116635 & 0,138002 \\ 0,116635 & 0,339284 & 0,401438 \\ 0,138002 & 0,401438 & 1,674968 \end{bmatrix} \quad (3.227)$$

Başlangıç vektörü olarak $q_1^T = [1 \ 0 \ 0]$ seçilmiştir.

$$\alpha_1 = q_1^T A q_1 = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0,285708 & 0,116635 & 0,138002 \\ 0,116635 & 0,339284 & 0,401438 \\ 0,138002 & 0,401438 & 1,674968 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,285708$$

$$\bar{q}_2 = \beta_1 q_2 = A q_1 - \alpha_1 q_1 = \begin{bmatrix} 0,285708 \\ 0,116635 \\ 0,138002 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,285708 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,116635 \\ 0,138002 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1^2 = \bar{q}_2^T \bar{q}_2 = 0,032648 \quad \rightarrow \quad \beta_1 = 0,180689$$

$$q_2 = \frac{\bar{q}_2}{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,645505 \\ 0,763756 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = q_2^T A q_2 = 1,514245$$

$$\bar{q}_3 = \beta_2 q_3 = A q_2 - \beta_1 q_1 - \alpha_2 q_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0,180689 \\ 0,525611 \\ 1,538397 \end{bmatrix} - 0,180689 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1,514245 \begin{bmatrix} 0 \\ 0,645505 \\ 0,763756 \end{bmatrix}$$

$$\bar{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,451842 \\ 0,381884 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2^2 = \bar{q}_3^T \bar{q}_3 = 0,349996 \quad \rightarrow \quad \beta_2 = 0,591605$$

$$q_3 = \frac{\bar{q}_3}{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,763756 \\ 0,645505 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = q_3^T A q_3 = 0,500008$$

[T] , simetrik üçlü - köşegen matrisinin belirlenmesi için gereken işlemler tamamlandı.

$$T = \begin{bmatrix} 0,285708 & 0,180689 & \\ 0,180689 & 1,514245 & 0,591605 \\ & 0,591605 & 0,500008 \end{bmatrix} \quad (3.228)$$

Bulunan bu simetrik üçlü – köşegen [T] matrisinin özdeğerleri QR yöntemi ile kolaylıkla belirlenebilir. Özvektörleri ise en doğru şekilde spektral kaydırma ile ters iterasyon yaparak bulunabilir.

3.4.5. Householder yöntemi

Householder yöntemi, gerçek ve simetrik bir matrisin $(n - 2)$ adımda ortogonal dönüşümle üçlü köşegen forma dönüştürülmesini sağlayan tekrarlı bir dönüşüm yöntemidir. Jacobi yönteminin aksine, sınırlı sayıda dönüşüm vardır.

Elde edilen üçlü - köşegen matrisin özdeğerleri Sturm serileri yöntemiyle veya QR yöntemi vb. kullanılarak hesaplanabilir. Özdeğerler hesaplandıktan sonra özvektörler, spektral kaydırma ile ters iterasyon yaparak bulunabilir.

Oluşturmayı hedeflediğimiz ardışık ortogonal dönüşüm matrisleri $P_1, P_2, \dots, P_r$ ise r . dönüşüm sonucu oluşan matris:

$$S_r = P_r P_{r-1} \dots P_1 S P_1^T \dots P_{r-1}^T P_r^T \quad (3.229)$$

şeklindedir.

$$S_r = \left[\begin{array}{cccccccc} * & * & & & & & & \\ * & * & * & & & & & \\ & * & * & \ddots & & & & \\ & & * & * & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & * & & & \\ & 0 & & & & * & * & * & * \\ & & & & & * & * & * & * \\ & & & & & * & * & * & * \\ & & & & & * & * & * & * \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array}} \right\} r \text{ adet satır} \quad (3.230)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r \text{ adet sütun}}$

Bunu yapmak için aşağıda tanımlandığı gibi hermityan dönüşümler dikkate alınmalıdır.

$$P_r = I_r - 2 u_r u_r^T \quad u_r^T u_r = 1 \quad (3.231)$$

Tanıma göre ortogonal ve simetrikler ve geometrik olarak, başlangıç noktasından geçen ve u_r ile dik olan bir hiperdüzlemde ki yansıma anlamına gelmektedir.

$$u_r^T = \left[\underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}_{r \text{ adet sıfır}} \ \underbrace{x_r \ x_{r+1} \ \cdots \ x_{n-1}}_{n-r \text{ adet terim}} \right] \quad (3.232)$$

şeklindedir. (3.231) bağıntılarından anlaşılacağı üzere,

$$x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \quad (3.233)$$

dir. (Géradin and Rixen 1997)

Householder dönüşümünde aşağıdaki Householder matrisinden yararlanılır.

$$Q = I - \frac{u u^T}{H} \quad (3.234)$$

u herhangi bir vektör olmak üzere

$$H = \frac{1}{2} u^T u = \frac{1}{2} |u|^2 \quad (3.235)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (3.234) ifadesinde bulunan $u u^T$ işlemi tensör cebirinde dış çarpım diye bilinir. n elemanlı iki vektörün dış çarpımları $(n \times n)$ boyutlu bir matris vermektedir. Burada matrisin elemanları $(u u^T)_{ij} = u_i u_j$ dir. Q simetrik olduğundan ($Q^T = Q$),

$$\begin{aligned} Q^T Q &= Q Q = \left(I - \frac{u u^T}{H} \right) \left(I - \frac{u u^T}{H} \right) = I - 2 \frac{u u^T}{H} + \frac{u (u^T u) u^T}{H^2} \\ &= I - 2 \frac{u u^T}{H} + \frac{u (2H) u^T}{H^2} = I \end{aligned} \quad (3.236)$$

yazılabilir. Bu aynı zamanda Q 'nun ortogonal olduğunu gösterir.

x herhangi bir vektör olmak üzere Qx dönüşümü ele alınır.

$$u = x + k e_1 \quad (3.237)$$

seçilmektedir. Burada k ,

$$k = \pm |x| \quad (3.238)$$

ve e_1 vektörü,

$$e_1 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (3.239)$$

şeklinde n elemanlı bir birim vektördür. (3.237) ve (3.238) bağıntılarından

$$u = x \pm |x| e_1 \quad (3.240)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} Q x &= \left(I - \frac{u u^T}{H} \right) x = \left[I - \frac{u (x + k e_1)^T}{H} \right] x \\ &= x - \frac{u (x^T x + k e_1^T x)}{H} = x - \frac{u (k^2 + k x_1)}{H} \end{aligned} \quad (3.241)$$

dir. Ayrıca (3.235) ve (3.237) bağıntılarından

$$\begin{aligned} 2H &= (x + k e_1)^T (x + k e_1) = |x|^2 + k (x^T e_1 + e_1^T x) + k^2 e_1^T e_1 \\ &= k^2 + 2 k x_1 + k^2 = 2 (k^2 + k x_1) \end{aligned} \quad (3.242)$$

bulunur.

Bu tanımlamalarla,

$$Q x = x - u = -k e_1 = [-k \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (3.243)$$

ve (3.238) eşitliğinden,

$$Q x = \pm |x| e_1 \quad (3.244)$$

elde edilir. Bu dönüşüm x vektörünün birinci elemanı dışındaki tüm elemanları sıfır yapmaktadır.

Bu temel dönüşüm işlemi, genişletilerek simetrik bir matrise uygulanabilir. $[A]$ matrisi, $(n \times n)$ boyutlu gerçekte ve simetrik bir matris olmak üzere aşağıdaki gibi dönüşüm uygulanabilir:

$$P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & x^T \\ x & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & x^T \\ Qx & QA' \end{bmatrix} \quad (3.245)$$

Burada x vektörü $[A]$ matrisinin birinci sütununu temsil etmekte ve bunun ilk elemanı dışarıda tutulur, ve $[A]$ 'nin ilk satır ve sütunu dışarıda tutularak $[A']$ matrisi elde edilir. (3.234) ve (3.237) bağıntılarından yararlanarak $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutlu Q matrisi oluşturulur. (3.243) bağıntısından da görüldüğü üzere, bu dönüşüm $[A]$ matrisinin ilk sütununu indirger. Yani $[A]$ matrisinin ilk sütununun ilk iki elemanı dışındaki elemanlar sıfır yapılır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ Qx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ -k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.246)$$

Dönüşüm,

$$A^1 \leftarrow P_1 A P_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & (Qx)^T \\ Qx & QA'Q \end{bmatrix} \quad (3.247)$$

ile ilk satırının yanısıra ilk sütunu da köşegenleştirilir. (4×4) boyutlu bir matris için dönüşüm diyagramı:

1	0	0	0
0	Q		
0			
0			

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	A'		
a_{31}			
a_{41}			

1	0	0	0
0	Q		
0			
0			

 $=$

a_{11}	$-k$	0	0
$-k$	$QA'Q$		
0			
0			

Aynı dönüşüm matrisin alt sağ köşesindeki (3×3) boyutlu kısma uygulanarak $[A]$ matrisinin ikinci satır ve sütunu da indirgenir. Bu dönüşüm $A^2 \leftarrow P_2 A P_2$ şeklinde ifade edilebilir. P_2 matrisi aşağıdaki gibidir.

$$P_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (3.248)$$

Burada I_2 (2×2) boyutunda birim matristir. x , $[A]$ matrisinin ikinci sütununun altındaki $(n - 2)$ adet elemanlar olarak seçilir ve $(n - 2) \times (n - 2)$ boyutundaki Q matrisi oluşturulur.

Bu üçlü köşegen formu

$$P_i = \begin{bmatrix} I_i & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 2) \quad (3.249)$$

elde etmek için toplam $(n - 2)$ adet dönüşüme ihtiyaç vardır. P_i formunu oluşturmak üzere $P_i A P_i$ matris çarpımını yapmak gerekir.

Sonuç olarak, tüm bu işlemler her seferinde boyutu bir küçültülen alt matris için sonuna kadar devam eder. Sonuçta $[A]$ matrisinin alt köşegendışı elemanları, köşegen elemanın bir altındaki dışında sıfırlanır.

Householder dönüşümünü daha kısa tutabilmek ve böylece işlem sayısını en aza indirebilmek için aşağıdaki gibi bir v vektörü tanımlanmıştır.

$$v = \frac{A'u}{H} \quad (3.250)$$

ve

$$A'Q = A' \left(I - \frac{u u^T}{H} \right) = A' - \frac{A' u}{H} u^T = A' - v u^T \quad (3.251)$$

böylece benzerlik dönüşümü ile

$$\begin{aligned} Q A' Q &= \left(I - \frac{u u^T}{H} \right) (A' - v u^T) = A' - v u^T - \frac{u u^T}{H} (A' - v u^T) \\ &= A' - v u^T - \frac{u(u^T A')}{H} + \frac{u(u^T v)u^T}{H} \\ &= A' - v u^T - uv^T + 2g u u^T \end{aligned} \quad (3.252)$$

bağıntısı elde edilir. g skaler katsayısı,

$$g = \frac{u^T v}{2H} \quad (3.253)$$

olarak tanımlanmıştır. Tekrar bir

$$w = v - g u \quad (3.254)$$

tanımlaması yapılarak (3.252) bağıntısı,

$$Q A' Q = A' - w u^T - u w^T \quad (3.255)$$

biçiminde yazılabilir.

Benzerlik dönüşümleri kullanılarak elde edilen bu üçlü köşegen matris ile başlangıçtaki ilk matrisin özdeğerleri yine aynıdır (Kiusalaas 2010).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sisteme ait matrislerin, Householder yöntemi ile üçlü – köşegenel forma dönüşümü aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

(3.159) eşitliğinin açıklamasında bahsedilen $A = [U]^{-1}[M][U]^{-T}$ matrisi üzerinde (3.234), (3.235), (3.238), (3.240), (3.244) ve (3.247) eşitlikleri ile tanımlanan işlem adımları uygulanmıştır. Elde edilen değerler aşağıda verilmiştir.

Lanczos yönteminde hesaplanan, (3.227) eşitliğindeki $A = [U]^{-1}[M][U]^{-T}$ matrisi ele alınmıştır.

$$A = \begin{bmatrix} 0,285708 & 0,116635 & 0,138002 \\ 0,116635 & 0,339284 & 0,401438 \\ 0,138002 & 0,401438 & 1,674968 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,285708 & 0,116635 & 0,138002 \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0,116635 \\ 0,138002 \end{bmatrix}}_x & \underbrace{\begin{bmatrix} 0,339284 & 0,401438 \\ 0,401438 & 1,674968 \end{bmatrix}}_{A'} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0,116635 \\ 0,138002 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0,339284 & 0,401438 \\ 0,401438 & 1,674968 \end{bmatrix}$$

$$k = |x| = 0,180689$$

$$u = x + |x| e_1 = \begin{bmatrix} 0,297324 \\ 0,138002 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2}|u|^2 = 0,053723$$

$$Q = I - \frac{u u^T}{H} = \begin{bmatrix} -0,645505 & -0,763756 \\ -0,763756 & 0,645505 \end{bmatrix}$$

$$A'Q = \begin{bmatrix} -0,525611 & 5,6x10^{-17} \\ -1,538397 & 0,774599 \end{bmatrix}$$

$$QA'Q = \begin{bmatrix} 1,514245 & -0,591605 \\ -0,591605 & 0,500008 \end{bmatrix}$$

$$Qx = -|x| e_1 = -0,180689 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,180689 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} & (Qx)^T \\ Qx & QA'Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,285708 & -0,180689 & 0 \\ -0,180689 & 1,514245 & -0,591605 \\ 0 & -0,591605 & 0,500008 \end{bmatrix} \quad (3.256)$$

3.4.6. QR dönüşüm yöntemi

QR yöntemi, simetrik matrislerin tüm özdeğerlerinin belirlenmesinde kullanılan etkili bir yöntemdir. Simetrik matrisin Lanczos yöntemi, Householder yöntemi vb. ile üçlü - köşegen matris formuna dönüştürülmesinden sonra bu üçlü - köşegen matrise QR yönteminin uygulanması daha etkilidir.

QR yöntemi, esasen iteratif bir yöntemdir. k . iterasyon adımımda $[A^k]$ matrisi, $[A^{k+1}]$ matrisine dönüştürülür. Bu iki aşamada yapılmaktadır. $[A^k]$ matrisi önce bir üst üçgen matris formuna dönüştürülür. $[A^k]$ matrisinin, ortogonal $N_1^T, N_2^T, \dots, N_p^T, \dots, N_{n-1}^T$ matris dizisi ile bir ön çarpımı gerçekleştirilir. Burada N_p matrisi,

$$N_p^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \cos \alpha & \sin \alpha & & \\ & & -\sin \alpha & \cos \alpha & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ p+1 \end{matrix} \quad (3.257)$$

şeklindedir. Uygun seçilmiş bir α ile N_p^T ön çarpımları sonucu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin $a_{p+1,p}$ köşegen altı terimleri sıfıra doğru indirgenir. Ayrıca sıfıra indirilen köşegen altı terimler artık değişmezler.

Kolaylık açısından, $N_{p-1}^T \dots N_2^T N_1^T A_k$ işlemi $[A_{(p)}^k]$ ile gösterilebilir. $[A_{(p)}^k]$ matrisinin (p) satırına kadar olan köşegen altı terimler sıfıra indirilmiştir. $N_p^T A_{(p)}^k$ çarpımı ile elde edilen $a_{p+1,p}$ teriminin sıfıra eşitlenmesi ile

$$-\bar{a}_{pp} \sin \alpha + \bar{a}_{p+1,p} \cos \alpha = 0 \quad (3.258)$$

$$\tan \alpha = \frac{\bar{a}_{p+1,p}}{\hat{a}_{pp}} \quad (3.259)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada a değeri üzerindeki sembol, kullanılmış olan $A_{(p)}^k$ matrisinin bir değeri olduğunu belirtir.

$N_1^T, N_2^T, \dots, N_p^T, \dots, N_{n-1}^T$ kullanılarak dönüşümlerin tam serisi tamamlandıktan sonra,

$$N_{n-1}^T \cdots N_2^T N_1^T A^k = R_k \quad (3.260)$$

veya

$$Q_k^T A^k = R_k \quad (3.261)$$

elde edilir. Burada $[R_k]$ bir üst üçgen matris ve

$$Q_k^T = N_{n-1}^T \cdots N_2^T N_1^T \quad (3.262)$$

$N_1^T, N_2^T, \dots, N_p^T, \dots, N_{n-1}^T$ matrislerinin her biri ortogonal olduğundan, Q_k^T matrisi de ortogonaldır, ve $Q_k^T = Q_k^{-1}$ dir.

$[A^{k+1}]$ için dönüştürme işlemi aşağıdaki ifade kullanılarak,

$$A^{k+1} = R_k Q_k \quad (3.263)$$

tamamlanır ve burada

$$Q_k = N_1, N_2, \dots, N_{n-1} \quad (3.264)$$

eşitliği yazılabilir. (3.261) eşitliği, (3.263) eşitliğinde yerine koyularak,

$$A^{k+1} = Q_k^T A^k Q_k \quad (3.265)$$

elde edilir. Bu eşitlikten açıkça anlaşılmaktadır ki, $[A^k]$ 'den $[A^{k+1}]$ 'e dönüşüm ortogonal olduğundan özdeğerler değişmeden kalmaktadır. (3.260) eşitliğinin sol tarafındaki çarpımın sonucu olan $[R_k]$ matrisi, bir üst üçgen matris olacak şekilde $[A^k]$ 'nin tüm köşegenaltı terimleri yok edilir. Bununla birlikte, k . İterasyon (3.263) eşitliğinde belirtilen matris işlemleri yürütülerek tamamlandığında genellikle hedeflenen köşegen altı terimlerden sıfır olmayan değerler geri gelebilir, ancak büyüklükleri azaltılmış olur. Sonuçta, yeterli sayıda iterasyondan sonra $[A]$ matrisi köşegen haline gelir ve köşegen üzerindeki elemanlar elde edilen ilk üçlü köşegen matrisin özdeğerlerine eşittir. Gerektiğinde üçlü köşegen matrisin özvektörleri,

$$T = Q_1, Q_2, \dots, Q_k I \quad (3.266)$$

eşitliği ile elde edilebilir. Burada $[I]$ birim matris ve $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ ise ortogonal dönüşüm matrisleridir. (k) iterasyondan sonra yakınsadığı kabul edilir. Özvektörlerin hesaplanmasında ters iterasyon yönteminin kullanılması daha etkilidir. Özdeğer ve özvektörlerin hesaplanmasında Householder dönüşümü, QR dönüşümü ve ters iterasyon birlikte kullanıldığı zaman, bu yöntem genellikle HQRI (Householder - QR – Inverse) olarak adlandırılır.

Açıklanan QR yönteminde özdeğerler büyüklük olarak artan sıralamayla elde edilir. En küçük özdeğer λ_1 ilk olarak elde edilir ve konumu da $\bar{a}_{nn}$ dir. İterasyon ile bu elemanda önemli bir değişiklik olmadığı zaman $\bar{a}_{nn}$, λ_1 'i yakınsamaktadır. Eğer istenirse bu aşamada, matris n . satır ve sütunu kaldırılarak indirgenir ve bir sonraki özdeğer λ_2 bulununcaya kadar $(n - 1) \times (n - 1)$ lik matrisle iterasyona devam edilir. Bu süreç devam ettirilerek, $(n - i + 1)$ büyüklüğünde indirgenmiş matris üzerinde iterasyon ile i . özdeğer elde edilir (Humar 2002).

Şekil 3.1’de verilen çerçeve sistemin özdeğer probleminin, QR dönüşüm yöntemi ile hesabı aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

Lanczos yönteminde hesaplanan, (3.228) eşitliğindeki üçlü – köşegen matris üzerinde (3.257), (3.259), (3.260), (3.263) ve (3.264) eşitlikleri ile tanımlanan işlem adımları uygulanmıştır. Elde edilen değerler aşağıda verilmiştir.

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0,285708 & 0,180689 & \\ 0,180689 & 1,514245 & 0,591605 \\ & 0,591605 & 0,500008 \end{bmatrix}$$

Döngü - 1 / İterasyon - 1: Ortogonal N_1 matrisi kullanılarak, $N_1^T A^1$ matrisinin $p=2$, $q=1$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$N_1^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tan \alpha_1 = a_{21}/a_{11} = 0,632425 \quad \alpha_1 = 32,310275 \quad \cos \alpha_1 = 0,845166$$

$$\sin \alpha_1 = 0,534504$$

$$N_1^T = \begin{bmatrix} 0,845166 & 0,534504 & 0 \\ -0,534504 & 0,845166 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_1^T A^1 = \begin{bmatrix} 0,338049 & 0,962082 & 0,316215 \\ 0 & 1,183209 & 0,500004 \\ 0 & 0,591605 & 0,500008 \end{bmatrix}$$

Döngü - 1 / İterasyon - 2: Ortogonal N_2 matrisi kullanılarak $N_2^T N_1^T A^1$ matrisinin $p=3$, $q=2$ elemanı için sıfırlama işlemi

$$N_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\tan \alpha_2 = 0,591605/1,183209 = 0,5 \quad \alpha_2 = 26,565062 \quad \cos \alpha_2 = 0,894427$$

$$\sin \alpha_2 = 0,447214$$

$$N_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,894427 & 0,447214 \\ 0 & -0,447214 & 0,894427 \end{bmatrix}$$

$$N_2^T N_1^T A^1 = \begin{bmatrix} 0,338049 & 0,962082 & 0,316215 \\ 0 & 1,322868 & 0,670828 \\ 0 & 0 & 0,223612 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere $R = N_2^T N_1^T A^1$ matrisi üst üçgen matristir. Bir sonraki adımda RQ çarpımı ile A^2 elde edilmektedir.

$$A^2 = R \underbrace{N_1 N_2}_{Q_1} = \begin{bmatrix} 0,799944 & 0,707078 & 0 \\ 0,707078 & 1,300012 & 0,100002 \\ 0 & 0,100002 & 0,200004 \end{bmatrix}$$

Bu şekilde ilk döngü tamamlanmıştır. $R N_1 N_2$ matrisi ikinci döngü için başlangıç matrisidir. Köşegen dışı elemanlar yeterince küçük oluncaya kadar bu döngüye devam edilecektir.

Döngü - 2:

$$\begin{array}{llll} \tan \alpha_1 = 0,883910 & \alpha_1 = 41,473773 & \cos \alpha_1 = 0,749259 & \sin \alpha_1 = 0,662277 \\ \tan \alpha_2 = 0,197725 & \alpha_2 = 11,184558 & \cos \alpha_2 = 0,981007 & \sin \alpha_2 = 0,193970 \end{array}$$

$$N_2^T N_1^T A^2 = \begin{bmatrix} 1,067647 & 1,390753 & 0,066229 \\ 0 & 0,515555 & 0,112299 \\ 0 & 0 & 0,181672 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,721008 & 0,341440 & 0 \\ 0,341440 & 0,400731 & 0,035239 \\ 0 & 0,035239 & 0,178222 \end{bmatrix}$$

Döngü - 3:

$$\tan \alpha_1 = 0,198396 \quad \alpha_1 = 11,221518 \quad \cos \alpha_1 = 0,980882 \quad \sin \alpha_1 = 0,194603$$

$$\tan \alpha_2 = 0,107888 \quad \alpha_2 = 6,157725 \quad \cos \alpha_2 = 0,994231 \quad \sin \alpha_2 = 0,107266$$

$$N_2^T N_1^T A^3 = \begin{bmatrix} 1,754551 & 0,412896 & 0,006858 \\ 0 & 0,328520 & 0,053483 \\ 0 & 0 & 0,173486 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,801359 & 0,063931 & 0 \\ 0,063931 & 0,326117 & 0,018609 \\ 0 & 0,018609 & 0,172485 \end{bmatrix}$$

Döngü - 4:

$$\tan \alpha_1 = 0,035490 \quad \alpha_1 = 2,032593 \quad \cos \alpha_1 = 0,999371 \quad \sin \alpha_1 = 0,035468$$

$$\tan \alpha_2 = 0,057499 \quad \alpha_2 = 3,290805 \quad \cos \alpha_2 = 0,998351 \quad \sin \alpha_2 = 0,057404$$

$$N_2^T N_1^T A^4 = \begin{bmatrix} 1,802493 & 0,075457 & 0,000660 \\ 0 & 0,324179 & 0,028468 \\ 0 & 0 & 0,171133 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804035 & 0,011498 & 0 \\ 0,011498 & 0,325075 & 0,009824 \\ 0 & 0,009824 & 0,170851 \end{bmatrix}$$

Döngü - 5:

$$\tan \alpha_1 = 0,006373 \quad \alpha_1 = 0,365168 \quad \cos \alpha_1 = 0,999980 \quad \sin \alpha_1 = 0,006373$$

$$\tan \alpha_2 = 0,030227 \quad \alpha_2 = 1,731363 \quad \cos \alpha_2 = 0,999543 \quad \sin \alpha_2 = 0,030213$$

$$N_2^T N_1^T A^5 = \begin{bmatrix} 1,804071 & 0,013570 & 0,000063 \\ 0 & 0,325143 & 0,014981 \\ 0 & 0 & 0,170476 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804122 & 0,002072 & 0 \\ 0,002072 & 0,325441 & 0,005151 \\ 0 & 0,005151 & 0,170398 \end{bmatrix}$$

Döngü - 6:

$$\tan \alpha_1 = 0,001149 \quad \alpha_1 = 0,065811 \quad \cos \alpha_1 = 0,999999 \quad \sin \alpha_1 = 0,001149$$

$$\tan \alpha_2 = 0,015827 \quad \alpha_2 = 0,906734 \quad \cos \alpha_2 = 0,999875 \quad \sin \alpha_2 = 0,015825$$

$$N_2^T N_1^T A^6 = \begin{bmatrix} 1,804123 & 0,002446 & 0,000006 \\ 0 & 0,325479 & 0,007847 \\ 0 & 0 & 0,170295 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0,000374 & 0 \\ 0,000374 & 0,325562 & 0,002695 \\ 0 & 0,002695 & 0,170274 \end{bmatrix}$$

Döngü - 7:

$$\tan \alpha_1 = 0,000207 \quad \alpha_1 = 0,011873 \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 0,000207$$

$$\tan \alpha_2 = 0,008278 \quad \alpha_2 = 0,474264 \quad \cos \alpha_2 = 0,999966 \quad \sin \alpha_2 = 0,008277$$

$$N_2^T N_1^T A^7 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0,000441 & 0,000001 \\ 0 & 0,325573 & 0,004104 \\ 0 & 0 & 0,170246 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0,000067 & 0 \\ 0,000067 & 0,325596 & 0,001409 \\ 0 & 0,001409 & 0,170240 \end{bmatrix}$$

Döngü - 8:

$$\tan \alpha_1 = 0,000037 \quad \alpha_1 = 0,002143 \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 0,000037$$

$$\tan \alpha_2 = 0,004328 \quad \alpha_2 = 0,247976 \quad \cos \alpha_2 = 0,999991 \quad \sin \alpha_2 = 0,004328$$

$$N_2^T N_1^T A^8 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0,000080 & 0 \\ 0 & 0,325599 & 0,002146 \\ 0 & 0 & 0,170232 \end{bmatrix}$$

$$A^9 = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0,000012 & 0 \\ 0,000012 & 0,325605 & 0,000737 \\ 0 & 0,000737 & 0,170231 \end{bmatrix}$$

Döngü - 9:

$$\tan \alpha_1 = 0,000007 \quad \alpha_1 = 0,000387 \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 0,000007$$

$$\tan \alpha_2 = 0,002263 \quad \alpha_2 = 0,129646 \quad \cos \alpha_2 = 0,999997 \quad \sin \alpha_2 = 0,002263$$

$$N_2^T N_1^T A^9 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0,000014 & 0 \\ 0 & 0,325606 & 0,001122 \\ 0 & 0 & 0,170228 \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0,000002 & 0 \\ 0,000002 & 0,325608 & 0,000385 \\ 0 & 0,000385 & 0,170228 \end{bmatrix}$$

Döngü - 10:

$$\tan \alpha_1 = 1,22 \times 10^{-6} \quad \alpha_1 = 6,98 \times 10^{-5} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 1,22 \times 10^{-6}$$

$$\tan \alpha_2 = 0,001183 \quad \alpha_2 = 0,067779 \quad \cos \alpha_2 = 0,999999 \quad \sin \alpha_2 = 0,001183$$

$$N_2^T N_1^T A^{10} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0,000003 & 0 \\ 0 & 0,325608 & 0,000587 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{11} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000201 \\ 0 & 0,000201 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 11:

$$\tan \alpha_1 = 2,20 \times 10^{-7} \quad \alpha_1 = 1,26 \times 10^{-5} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 2,20 \times 10^{-7}$$

$$\tan \alpha_2 = 0,000618 \quad \alpha_2 = 0,035435 \quad \cos \alpha_2 = 0,999999 \quad \sin \alpha_2 = 0,000618$$

$$N_2^T N_1^T A^{11} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000307 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{12} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000105 \\ 0 & 0,000105 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 12:

$$\tan \alpha_1 = 3,96 \times 10^{-8} \quad \alpha_1 = 2,27 \times 10^{-6} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 3,96 \times 10^{-8}$$

$$\tan \alpha_2 = 0,000323 \quad \alpha_2 = 0,018525 \quad \cos \alpha_2 = 0,999999 \quad \sin \alpha_2 = 0,000323$$

$$N_2^T N_1^T A^{12} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000160 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{13} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000055 \\ 0 & 0,000055 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 13:

$$\tan \alpha_1 = 7,16 \times 10^{-9} \quad \alpha_1 = 4,10 \times 10^{-7} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 7,16 \times 10^{-9}$$

$$\tan \alpha_2 = 0,000169 \quad \alpha_2 = 0,009685 \quad \cos \alpha_2 = 0,999999 \quad \sin \alpha_2 = 0,000169$$

$$N_2^T N_1^T A^{13} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000084 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{14} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000029 \\ 0 & 0,000029 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 14:

$$\tan \alpha_1 = 1,29 \times 10^{-9} \quad \alpha_1 = 7,40 \times 10^{-8} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 1,29 \times 10^{-9}$$

$$\tan \alpha_2 = 8,84 \times 10^{-5} \quad \alpha_2 = 0,005063 \quad \cos \alpha_2 = 0,999999 \quad \sin \alpha_2 = 8,84 \times 10^{-5}$$

$$N_2^T N_1^T A^{14} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000044 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{15} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000015 \\ 0 & 0,000015 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 15:

$$\tan \alpha_1 = 2,33 \times 10^{-10} \quad \alpha_1 = 1,34 \times 10^{-8} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 2,33 \times 10^{-10}$$

$$\tan \alpha_2 = 4,62 \times 10^{-5} \quad \alpha_2 = 0,002645 \quad \cos \alpha_2 = 0,999999 \quad \sin \alpha_2 = 4,62 \times 10^{-5}$$

$$N_2^T N_1^T A^{15} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000023 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{16} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000008 \\ 0 & 0,000008 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 16:

$$\tan \alpha_1 = 4,21 \times 10^{-11} \quad \alpha_1 = 2,41 \times 10^{-9} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 4,21 \times 10^{-11}$$

$$\tan \alpha_2 = 2,42 \times 10^{-5} \quad \alpha_2 = 0,001384 \quad \cos \alpha_2 = 1 \quad \sin \alpha_2 = 2,42 \times 10^{-5}$$

$$N_2^T N_1^T A^{16} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000012 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{17} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000004 \\ 0 & 0,000004 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 17:

$$\tan \alpha_1 = 7,60 \times 10^{-12} \quad \alpha_1 = 4,35 \times 10^{-10} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 7,60 \times 10^{-12}$$

$$\tan \alpha_2 = 1,26 \times 10^{-5} \quad \alpha_2 = 7,23 \times 10^{-4} \quad \cos \alpha_2 = 1 \quad \sin \alpha_2 = 1,26 \times 10^{-5}$$

$$N_2^T N_1^T A^{17} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000006 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{18} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000002 \\ 0 & 0,000002 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 18:

$$\tan \alpha_1 = 1,37 \times 10^{-12} \quad \alpha_1 = 7,86 \times 10^{-11} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 1,37 \times 10^{-12}$$

$$\tan \alpha_2 = 6,6 \times 10^{-6} \quad \alpha_2 = 3,78 \times 10^{-4} \quad \cos \alpha_2 = 1 \quad \sin \alpha_2 = 6,6 \times 10^{-6}$$

$$N_2^T N_1^T A^{18} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000003 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{19} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000001 \\ 0 & 0,000001 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 19:

$$\tan \alpha_1 = 2,47 \times 10^{-13} \quad \alpha_1 = 1,42 \times 10^{-11} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 2,47 \times 10^{-13}$$

$$\tan \alpha_2 = 3,45 \times 10^{-6} \quad \alpha_2 = 1,98 \times 10^{-4} \quad \cos \alpha_2 = 1 \quad \sin \alpha_2 = 3,45 \times 10^{-6}$$

$$N_2^T N_1^T A^{19} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000002 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{20} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000001 \\ 0 & 0,000001 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 20:

$$\tan \alpha_1 = 4,47 \times 10^{-14} \quad \alpha_1 = 2,56 \times 10^{-12} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 4,47 \times 10^{-14}$$

$$\tan \alpha_2 = 1,80 \times 10^{-6} \quad \alpha_2 = 1,03 \times 10^{-4} \quad \cos \alpha_2 = 1 \quad \sin \alpha_2 = 1,80 \times 10^{-6}$$

$$N_2^T N_1^T A^{20} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0,000001 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{21} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 21:

$$\tan \alpha_1 = 8,06 \times 10^{-15} \quad \alpha_1 = 4,62 \times 10^{-13} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 8,06 \times 10^{-15}$$

$$\tan \alpha_2 = 9,43 \times 10^{-7} \quad \alpha_2 = 5,40 \times 10^{-5} \quad \cos \alpha_2 = 1 \quad \sin \alpha_2 = 9,43 \times 10^{-7}$$

$$N_2^T N_1^T A^{21} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{22} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

Döngü - 22:

$$\tan \alpha_1 = 1,45 \times 10^{-15} \quad \alpha_1 = 8,34 \times 10^{-14} \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \sin \alpha_1 = 1,45 \times 10^{-15}$$

$$\tan \alpha_2 = 4,93 \times 10^{-7} \quad \alpha_2 = 2,82 \times 10^{-5} \quad \cos \alpha_2 = 1 \quad \sin \alpha_2 = 4,93 \times 10^{-7}$$

$$N_2^T N_1^T A^{22} = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

$$A^{23} = R N_1 N_2 = \begin{bmatrix} 1,804124 & 0 & 0 \\ 0 & 0,325609 & 0 \\ 0 & 0 & 0,170227 \end{bmatrix}$$

22. döngünün sonunda hesaplanan A^{23} matrisinin köşegen elemanları, altı basamak hassasiyetle özdeğerlere yakınsamıştır. Buna göre $\lambda_1 = 1,804124$, $\lambda_2 = 0,325609$, $\lambda_3 = 0,170227$ veya $\lambda = 1/\omega^2$ eşitliğinden $\omega_1^2 = 0,554285$, $\omega_2^2 = 3,071170$, $\omega_3^2 = 5,874506$ elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Dinamik parametreler, yapıların şekil değiştirme ve yer değiştirmeleriyle doğrudan doğruya ilgili olan ve yapının bütününe yönelik rijitlikle ilgili fikir verebilen en önemli karakteristik özelliklerdir.

Yapının bütününde ya da bir elemanında, ilgili rijitliği yeter düzeye yükselterek yer değiştirmeleri sınırlamak ve titreşimleri zarar verecek durumdan uzaklaştırmak veya insanların duyumsayamayacağı düzeylere indirmek gerekmektedir. Bunu sağlamanın en kolay yollarından birisi de hesap aşamasında dinamik parametrelerin gerçeğe en yakın bir şekilde belirlenmesidir.

Bu çalışmada, yapı sistemlerinin dinamik parametrelerinin hesabı için geliştirilmiş yöntemler detaylı bir şekilde incelenmiştir. Çalışma kapsamındaki temel amaç, dinamik yüklere maruz sistemlerin hesabı için gerekli öz değerlerin bulunmasıdır. Belirli bir problemin çözümü için eldeki nümerik yöntemlerin algoritmik özellikleri, avantaj ve dezavantajları ayrıntılı bir şekilde ele alınmış, yöntemlerin daha iyi anlaşılması açısından bir örnek üzerinde her bir yöntem için ayrı ayrı açıklanmıştır.

Hangi yöntemin uygulanacağı özellikle problemin, serbestlik derecesine, rijitlik ve kütle matrislerinin bant genişliğine ve istenen özdeğer-özvektörlerin sayısına bağlıdır. Yöntemlerin elverişliliği elde edilen sonuçların hassasiyetine ve işlem sayısına bağlı olarak değerlendirilmektedir.

$n \leq 250$ için Jacobi, Householder, ters iterasyon yöntemleri ve QR yöntemi kullanılabilir. $250 \leq n \leq 2500$ için de bant karakterli $[K]$ ve $[M]$ matrisleri ile yine aynı yöntemler kullanılabilir. $n \geq 2500$ için en etkili yöntemler, Rayleigh oranı ile iterasyon, alt uzay iterasyonu ve Lanczos yöntemidir.

5. SONUÇ

Çalışma kapsamında her bir yöntem için aynı örnek üzerinde ayrı ayrı yapılan hesaplara bakıldığında elde edilen sonuç şu şekildedir:

Yapı dinamiği problemlerinin çok serbestlik dereceli sistemler olmasından dolayı bütün özçiftlerin bulunması yerine, genellikle en küçük olanların göz önüne alınması yeterli olmaktadır. Bununla birlikte sonucun hassasiyeti ve işlem sayısına bakıldığında Rayleigh oranı ile iterasyon ve alt uzaylarla iterasyon yöntemlerinin diğerlerine göre daha avantajlı olduğu sonucuna varılmıştır.

Ayrıca matrisin bant genişliğine bağlı olarak bant genişliği küçük olan sistemler için determinant hesaplamaya dayalı yöntemler, bant genişliği yüksek olan sistemler için alt uzaylarla iterasyon yöntemi daha avantajlı olmaktadır.

KAYNAKLAR

- Bathe, K.J., 1982. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice - Hall, 1037 s, New Jersey.
- Beyen, K., 2011. Dinamik Karakteristiklerin Yapı Tanı Teknikleriyle Yapıda Tespiti. İMO İstanbul Şubesi Seminer Notu, http://imoistanbul.org/imoarsiv/2011-seminer-notlari/3-kemal_beyen_web.rar (04.08.2014).
- Bhatt, P., 2002. Programming the Dynamic Analysis of Structures. Spon Press, 442 s, New York.
- Cheng, F.Y., 2001. Matrix Analysis of Structural Dynamics. Marcel Dekker Inc., 997 s, USA.
- Chopra, A.K., 2001. Dynamics of Structures. Printice-Hall, 844 s, USA.
- Çelebi, M. ve Erdik M., 1977. (Deprem Mühendisliği Açısından) Yapı Dinamiğine Giriş. Ankara.
- Erdik, M. ve Yüzügüllü Ö., 1980. Deprem Mühendisliği Açısından Yapı Dinamiğine Giriş. Ankara
- Gérardin, M. and Rixen D., 1997. Mechanical Vibrations (Theory and Application to Structural Dynamics). John Wiley and Sons Ltd., 425 s, USA.
- Gupta, S.K., 1995. Numerical Methods for Engineers. New Age International, 407 s, New Delhi.
- Humar, J.L., 2002. Dynamics of Structures. A. A. Balkema Publishers, 967 s, Lisse.
- Kayabalı, K., 2003. Geoteknik Deprem Mühendisliği. Gazi Kitabevi, 708 s, Ankara.
- Kincaid, D. and Cheney W., 2002. Numerical Analysis (Mathematics of Scientific Computing). The American Mathematical Society, 788 s, USA.
- Kiusalaas, J., 2010. Numerical Methods in Engineering with MATLAB. Cambridge University Press, 431 s, New York.
- Leylek, İ.E., 2005. Yapı Dinamiği (Depreme Dayanıklı Yapılar). Çağlayan Kitabevi, 454 s, İstanbul.
- Marr, W.A., 2003. History of Progress: Selected U.S. Papers in Geotechnical Engineering. ASCE Publications, 2326 s, USA.
- Meyer, C.D., 2000. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Society for Industrial and Applied Mathematics, 718 s, Philadelphia.
- Paz, M., 2003. Structural Dynamics (Theory and Computation). Kluwer Academic Publishers, 827 s, USA.
- Petyt, M., 2010. Introduction to Finite Element Vibration Analysis. Cambridge University Press, 500 s, USA.
- Ralston, A. and Rabinowitz P., 2001. A First Course in Numerical Analysis. Dover Publications, 606 s, New York.
- Saad, Y., 2003. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 547 s, USA.
- Tezcan, S., 1970. Çubuk Sistemlerin Elektronik Hesap Makineleri ile Çözümü. Arı Kitabevi Matbaası, 407 s, İstanbul.
- Thorby, D., 2008. Structural Dynamics and Vibration in Practice (An Engineering Handbook). Butterworth-Heinemann, 401 s, USA.
- Yerlici, V. ve Luş H., 2007. Yapı Dinamiğine Giriş. Boğaziçi Yayınevi, 506 s, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Adem UMUDUM, 1985 yılında Erzurum’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum’da tamamladı. 2004 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü’nden 2008 yılında mezun oldu. 2006 yılında Çevre Mühendisliği Bölümü’nde başladığı çift anadal programından 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Çeşitli özel şirketlerde ve kamuda saha mühendisi ve kısım şefi olarak görev yaptı. 2013 yılında askerlik görevini tamamladıktan sonra Yüksek Lisans programına devam etti.