



**KOMPLEKS MERTEBELİ  $(p, q)$ -YILDIZIL VE  $(p, q)$ -  
KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN FEKETE-  
SZEGÖ PROBLEMİ**

**Feyza YATKIN**

**Doktora Tezi**

**Matematik Anabilim Dalı**

**2020**

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.  
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KOMPLEKS MERTEBELİ  $(p, q)$ -YILDIZIL VE  $(p, q)$ -KONVEKS FONKSİYON  
SINIFLARI İÇİN FEKETE-SZEGÖ PROBLEMİ**

(Fekete-Szegö Problem for Classes of  $(p, q)$ -Starlike and  $(p, q)$ -Convex Functions of  
Complex Order)

Feyza YATKIN

DOKTORA TEZİ

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

Erzurum  
Temmuz, 2020

T.C.  
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

---

KOMPLEKS MERTEBELİ  $(p, q)$ -YILDIZIL VE  $(p, q)$ -KONVEKS FONKSİYON  
SINIFLARI İÇİN FEKETE-SZEGÖ PROBLEMİ

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU danışmanlığında, Feyza YATKIN tarafından hazırlanan bu çalışma, 27/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY  
*Dicle Üniversitesi*

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU  
*Atatürk Üniversitesi*

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Muhammet YILDIRIM  
*Atatürk Üniversitesi*

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Halit ORHAN  
*Atatürk Üniversitesi*

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Erhan DENİZ  
*Kafkas Üniversitesi*

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN  
Enstitü Müdürü

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Graduate School of Natural and  
Applied Sciences

T.C.  
**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ**

**ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU**

Doktora Tezi olarak *Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU* danışmanlığında sunulan “Analitik Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin Katsayı Tahminleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

| Tez Bölümleri      | Tezin Benzerlik Oranı (%) | Maksimum Oran (%) |
|--------------------|---------------------------|-------------------|
| Giriş              | 5                         | 30                |
| Kuramsal Temeller  | 13                        | 30                |
| Materyal ve Yöntem | 18                        | 35                |
| Bulgular           | 17                        | 20                |
| Tartışma           | 16                        | 20                |
| Tezin Geneli       | 14                        | 25                |

**Not:** Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Sunulan bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ettiğimizi beyan ederiz.

| Tez Yazarı (Öğrenci) | Tez Danışmanı            |
|----------------------|--------------------------|
| Feyza YATKIN         | Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU |
| 10.8.2020            | 10.8.2020                |
| İmza:                | İmza:                    |

\* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../... tarih ve ..... sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../... tarih ve ..... sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

## TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunulan bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yapılmıştır.

Öncelikle tezin hazırlanması sürecinde her türlü destek ve rehberliğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na minnet ve şükranlarımı arz ederim.

Ayrıca zaman zaman kendisine müracaat edip fikirlerinden istifade ettiğim hocam Sayın Prof. Dr. Halit ORHAN'a teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca 2211-E “Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı” kapsamında vermiş olduğu maddi destek ile rahat çalışma ortamı sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Feyza YATKIN

# ÖZET

## DOKTORA TEZİ

### KOMPLEKS MERTEBELİ $(p, q)$ -YILDIZIL VE $(p, q)$ -KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN FEKETE-SZEGÖ PROBLEMİ

Feyza YATKIN

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

**Amaç:** Yeni bir sınıf olan kompleks mertebeli  $(p, q)$ -yıldızıl ve  $(p, q)$ -konveks fonksiyon sınıfları için Fekete-Szegö Problemini incelemek amaçlanmıştır.

**Yöntem:** Matematiksel araştırmalardaki yöntem tümden gelimdir. Bu amaçla teoremler oluşturularak ispatları yapılmıştır.

**Bulgular:** Kompleks mertebeli  $(p, q)$ -yıldızıl ve  $(p, q)$ -konveks fonksiyon sınıflarında Fekete-Szegö Problemini oluşturan eşitsizlik için sınırlar elde edilmiştir.

**Sonuç:** Fekete-Szegö Problemi için elde ettiğimiz sınırlar literatürde bulunan bazı sonuçları genelleştirmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Fekete-Szegö Eşitsizliği,  $(p, q)$ -Yıldızıl Fonksiyonlar,  $(p, q)$ -Konveks Fonksiyonlar, Kompleks Mertebe.

Haziran 2020, 67 sayfa

## ABSTRACT

### DOCTORAL DISSERTATION

#### FEKETE-SZEGÖ PROBLEM FOR CLASSES OF $(p, q)$ -STARLIKE AND $(p, q)$ -CONVEX FUNCTIONS OF COMPLEX ORDER

Feyza YATKIN

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

**Purpose:** The aim of the study is to examine the Fekete-Szegö Problem for two new classes:  $(p, q)$ -starlike and  $(p, q)$ -convex function of complex order.

**Method:** The method in mathematical research is deductive. For this purpose, the theorems were created and their proofs were made.

**Findings:** The bounds are obtained for the inequality that forms the Fekete-Szegö Problem in function classes  $(p, q)$ -starlike and  $(p, q)$ -convex of complex order.

**Results:** Bounds found within the context of this study for the Fekete-Szegö Problem generalized some results from the literature.

**Keywords:** Fekete-Szegö Inequality,  $(p, q)$ -Starlike Functions,  $(p, q)$ -Convex Functions, Complex Order

June 2020, 67 pages

## İÇİNDEKİLER

|                                                   |      |
|---------------------------------------------------|------|
| KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....                       | i    |
| ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU .....        | ii   |
| TEŞEKKÜR .....                                    | iii  |
| ÖZET .....                                        | iv   |
| ABSTRACT .....                                    | v    |
| İÇİNDEKİLER.....                                  | vi   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                             | vii  |
| SİMGELER DİZİNİ .....                             | viii |
| GİRİŞ.....                                        | 1    |
| KURAMSAL TEMELLER.....                            | 4    |
| Genel Kavramlar .....                             | 4    |
| MATERYAL ve YÖNTEM .....                          | 9    |
| Ünivalent Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları..... | 9    |
| Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar .....            | 14   |
| $(p, q)$ -Analiz .....                            | 18   |
| ARAŞTIRMA BULGULARI .....                         | 22   |
| TARTIŞMA VE SONUÇ.....                            | 50   |
| KAYNAKLAR.....                                    | 55   |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                     | 57   |



## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1. $f$ Ünivalent fonksiyonunun birim diski dönüştürdüğü bölge. .... | 9  |
| Şekil 2. $f < g$ Subordinasyonu.....                                      | 12 |
| Şekil 3. $1 + z < \frac{1+z}{1-z}$ .....                                  | 13 |
| Şekil 4. Sıfıra göre yıldızlı bir bölge .....                             | 14 |
| Şekil 5. Konveks bölge.....                                               | 15 |



## SİMGELER DİZİNİ

|                             |                                                                                                     |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{C}$                | Kompleks sayılar kümesi                                                                             |
| $\mathbb{U}$                | Birim disk                                                                                          |
| $D(z_0, r)$                 | $z_0$ merkezli $r$ yarıçaplı disk                                                                   |
| $\prec$                     | Subordinasyon                                                                                       |
| $f \prec g$                 | $f, g$ ye subordinatedir                                                                            |
| $\mathcal{S}$               | Normalleştirilmiş ünivalent fonksiyonların sınıfı                                                   |
| $\mathcal{A}$               | $\mathbb{U}$ da analitik olan $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların sınıfı |
| $\mathcal{P}$               | Caratheodory sınıfı                                                                                 |
| $\mathcal{V}$               | Schwarz fonksiyonlarının sınıfı                                                                     |
| $\mathcal{S}^*$             | Yıldızıl fonksiyonların sınıfı                                                                      |
| $\mathcal{C}$               | Konveks fonksiyonların sınıfı                                                                       |
| $\mathcal{S}^*(\alpha)$     | $\alpha$ mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı                                                   |
| $\mathcal{C}(\alpha)$       | $\alpha$ mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı                                                    |
| $\mathcal{S}^*(1-b)$        | Kompleks mertebeli yıldızıl fonksiyon sınıfı                                                        |
| $\mathcal{C}(b)$            | Kompleks mertebeli konveks fonksiyon sınıfı                                                         |
| $D_{p,q}f(z)$               | $f$ fonksiyonunun $(p, q)$ -türevi                                                                  |
| $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$ | Kompleks mertebeli $(p, q)$ -yıldızıl fonksiyon sınıfı                                              |
| $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$ | Kompleks mertebeli $(p, q)$ -konveks fonksiyon sınıfı                                               |

## GİRİŞ

Geometrik Fonksiyonlar Teorisi, Kompleks Analiz'in önemli dallarından birisidir. 1851 yılında Riemann tarafından verilen "Riemann Dönüşüm Teoremi" sonrasında bazı geometrik kümeler arasındaki ilişkiyi karakterize edebilmek için özel bazı analitik fonksiyonların kullanılması gündeme gelmiştir. Böylece Kompleks Analiz'de "Geometrik Fonksiyonlar Teorisi" adlı bir alan doğmuştur. 1914 yılında Gronwall tarafından Alan Teoreminin ispatlanmasından sonra 1916 yılında Bieberbach tarafından normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar için yapılan katsayı tahmini ile Geometrik Fonksiyonlar Teorisinin alanı daha da genişlemiştir.

Birim diskte analitik, ünivalent,  $f(0) = 0$  ve  $f'(0) = 1$  şartlarıyla normalize edilmiş ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde Taylor açılımına sahip fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{S}$  olmak üzere Bieberbach, 1916 yılında  $f \in \mathcal{S}$  için

$$n = 2, 3, \dots \text{ için } |a_n| \leq n$$

önemli tahmininde bulunmuştur. Bu, Geometrik Fonksiyonlar Teorisinde ünivalent ve analitik fonksiyonlar için "katsayı tahmini problemi" olarak adlandırılmaktadır. Katsayı tahmin problemi matematikçilerin dikkatini çekmiş ve o tarihten beri yoğun bir şekilde incelenmiştir. Bazen yalın olarak katsayılar için sınırlar belirlenirken bazen de buna imkân bulunamamış ve orijinal fonksiyonun katsayılarından oluşan bir kombinasyon için sınırlar araştırılmıştır.

Bu çalışmalar sırasında birçok farklı sınıflar da bulunmuş ve benzer problemler bu sınıflar için de çalışılmıştır. İşte bu noktada Geometrik Fonksiyonlar Teorisinde yeni bir alan ortaya çıkmıştır: Fekete-Szegö eşitsizliği. Bunu Fekete-Szegö problemi olarak adlandırırız.

Bieberbach 1916'da ünivalent fonksiyonlar için  $|a_3 - a_2^2| \leq 1$  olduğunu göstermiştir. Fekete ve Szegö ise 1933 yılında bunu genelleştirerek  $0 < \mu < 1$  olmak üzere bazı  $\mu$  değerleri için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq 1 + 2e^{-\frac{2\mu}{1-\mu}}$$

eşitsizliğini elde etmişlerdir. Fekete ve Szegö (1933) bu eşitsizliği göstermek için Lowner diferansiyel denklemini kullanmıştır. Bu konuda ilerleyen çalışmalarda Fekete ve Szegö'nün elde ettiği eşitsizliğin bu aralıktaki tüm  $\mu$  ler için geçerli olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Pfluger, Jenkins'in kullandığı genel katsayı teoremi yöntemini kullanarak bu sonucun  $\operatorname{Re}(\mu/(1-\mu)) \geq 0$  şartını sağlayan kompleks  $\mu$  değerleri için

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq 1 + 2 \left| e^{-\frac{2\mu}{1-\mu}} \right|$$

eşitsizliğini göstermiştir (Orhan 2002).

Fekete-Szegö problemi ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarında daha detaylı bir inceleme gerektirmektedir. Örneğin; Keogh ve Merkes, konvekse yakın (close-to-convex) fonksiyonların sınıfı için Fekete-Szegö probleminin çözümünü

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} 3 - 4\mu, & \mu \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{4}{9\mu}, & \frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} \leq \mu \leq 1 \\ 4\mu - 3, & \mu \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde elde etmişlerdir (Keogh and Merkes 1967, Orhan 2002). Literatürde, çeşitli sınıflar altında Fekete-Szegö problemi hakkında çok sayıda çalışma bulunmaktadır.

Şimdi de tezimizde kullandığımız bir diğer kavram olan  $(p, q)$ -analiz ( $(p, q)$ -calculus) hakkında bazı hatırlatmalar yapalım.  $(p, q)$ -analiz bir anlamda  $q$ -analizin genelleştirilmesidir.  $(p, q)$ -analizde  $p = 1$  olması durumunda  $q$ -analiz elde edilebilmektedir.  $q$ -analizin ilk uygulaması 20. yüzyılın başlarında Jackson tarafından yapılmıştır. Sayılar teorisi, özel fonksiyonlar, fizik (Ernst 2001) ve mühendislikte uygulama alanı bulmuştur.  $q$ -analizin Geometrik Fonksiyonlar Teorisindeki ilk uygulamalarına ise 2016 yılında Seoudy ve Aouf un Fekete-Szegő problemi ile ilgili çalışmalarında rastlanmaktadır. Bu konuyla alakalı birçok çalışma da göze çarpmaktadır (Darus and Thomas 1998; Kac and Cheung 2002; Aral et al 2013; Milovanović and Rassias 2014; Uçar 2016; Çetinkaya et al 2018).

Chakrabarti ve Jagannathan tarafından 1991 yılında  $(p, q)$ -tam sayıların sunulduğu çalışma  $(p, q)$ -analiz ile ilgili ilk rastlanılan çalışmalardandır. Aynı zamanda bağımsız olarak Brodime ve arkadaşları, Wachs ve White, Arık ve arkadaşları tarafından da çalışılmıştır. 1991'den beri bu konu birçok fizikçi ve matematikçi tarafından çalışılarak geliştirilmiştir. 1994 yılında Burban ve Klimyk tarafından  $(p, q)$ -türev ve  $(p, q)$ -integral kavramları incelenmiş (Burban and Klimyk 1994) ve 2006 yılında Jagannathan ve Rao tarafından günümüzde

kullanılan haline yakın bir şekilde  $(p, q)$ -türevi tanımlanmıştır (Jagannathan and Rao, 2006). Daha sonra 2013 yılında Sadjang tarafından  $(p, q)$ -türevin tanımı günümüzdeki hali ile verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir (Sadjang, 2013). 2019 yılında Geometrik Fonksiyonlar Teorisi ile ilgili olarak ilk çalışma Srivastava ve arkadaşları tarafından yayınlanmıştır (Srivastava et al, 2019). Belirleyebildiğimiz kadarıyla bu konuda ikinci çalışma 2020 yılında Yatkın ve Kadioğlu tarafından yayınlanmıştır (Yatkın ve Kadioğlu, 2020).

Biz de bu çalışmamızda kompleks mertebeli  $(p, q)$ -yıldızıl ve  $(p, q)$ -konveks fonksiyon sınıfları için Fekete-Szegö problemini inceledik.



## KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışması sırasında kullanılan temel kavramlar hatırlatılacaktır.

### Genel Kavramlar

**Tanım 1. ( $r$ -komşuluğu) :**  $z_0 \in \mathbb{C}$  ve  $r > 0$  bir reel sayı olmak üzere

$$D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

kümesine  $z_0$  noktasının  $r$ -komşuluğu denir. Buna  $z_0$  merkezli,  $r$  yarıçaplı açık disk de denilir.

Orijin merkezli  $r$  yarıçaplı açık diski yazım kolaylığı sağlaması açısından bazen  $D(0, r)$  yerine  $D_r$ ; birim diski de  $\mathbb{U}$  ile göstereceğiz. Yani,  $\mathbb{U} = D(0, 1)$  veya  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  olarak alınacaktır.

**Tanım 2. (İç Nokta) :**  $A \subset \mathbb{C}$ , boş olmayan bir küme olsun.  $z_0 \in A$  noktasının en az bir komşuluğu  $A$  kümesinde kalıyorsa  $z_0$  noktasına  $A$  kümesinin bir iç noktası denir.

**Tanım 3. (Açık Küme) :**  $A$  kümesinin her noktası bir iç nokta ise  $A$  kümesine ( $\mathbb{C}$  de) açık küme denir.

**Tanım 4. (Ayrık Küme) :**  $U$  ve  $V$ ,  $\mathbb{C}$  nin boştan farklı alt kümeleri olsun.  $U$  ve  $V$  nin arakesiti boş ise bu iki kümeye ayrık kümeler denir.

**Tanım 5. (Ayrılmış Küme) :**  $U$  ve  $V$ ,  $\mathbb{C}$  nin boştan farklı alt kümeleri olsun.  $\bar{U}$  ve  $\bar{V}$  sırasıyla  $U$  ve  $V$  kümelerinin kapanışları olsun.  $U$  ve  $V$  ayrık kümeler olmak üzere  $\bar{U} \cap V = \emptyset = U \cap \bar{V}$  oluyorsa  $U$  ve  $V$  ye ayrılmış kümeler adı verilir.

**Tanım 6. (Ayrışım) :**  $A$ ,  $U$  ve  $V$ ,  $\mathbb{C}$  nin boştan farklı alt kümeleri olsun.  $U$  ve  $V$  ayrılmış kümeler ve  $A = U \cup V$  ise  $\{U, V\}$  kümeler ailesine,  $A$  kümesinin bir ayrışımı denir.

**Tanım 7. (Bağlantılı Küme) :**  $A$ ,  $\mathbb{C}$  nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.  $A$  kümesinin hiçbir ayrışımı yoksa  $A$  ya bağlantılı küme adı verilir.

**Tanım 8. (Bölge) :** Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümeye bölge denir.

**Tanım 9. (Kompleks Fonksiyon) :**  $A \subset \mathbb{C}$  boş olmayan bir küme olmak üzere  $A$  kümesindeki her bir  $z$  elemanına  $w$  kompleks sayısı karşılık getiren  $f$  bağıntısına  $A$  dan  $\mathbb{C}$  ye bir fonksiyon denir ve  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ile gösterilir.

$f$  fonksiyonu  $A$  daki her bir elemana belirli bir tek  $w$  kompleks sayısı karşılık getiriyorsa  $f$  fonksiyonuna tek değerli fonksiyon denir.

$f$  fonksiyonu  $A$  daki en az bir elemana birden fazla kompleks sayı karşılık getiriyorsa  $f$  fonksiyonuna çok değerli fonksiyon denir.

**Tanım 10. (Süreklilik) :**  $A \subset \mathbb{C}$  olmak üzere  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu verilsin ve  $z_0 \in A$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  ve  $|z - z_0| < \delta$  eşitsizliğini sağlayan her  $z \in A$  için  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$  sayısı varsa  $f$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında süreklidir denir.

**Tanım 11. (Eğri) :**  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

süreklili fonksiyonuna  $\mathbb{C}$  düzleminde bir eğri denir. Burada  $\gamma(a)$  ve  $\gamma(b)$  noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları adı verilir.  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ise  $\gamma$  ya kapalı eğri denir

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonunun kuralı parametrik olarak  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  ile verilir.

**Tanım 12. (Basit Kapalı Eğri) :**  $U_\gamma$  noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğriye basit eğri denir.

Yani,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  eğrisi  $[a, b]$  (veya  $(a, b]$ ) aralığında bire-bir ise  $\gamma(t)$  eğrisine basit eğri adı verilir. Bir eğri hem basit hem de kapalı olabilir. Böyle eğrilere basit kapalı eğri (veya Jordan eğrisi) denir.

**Tanım 13. (Basit Bağlantılı Bölge) :**  $A \subset \mathbb{C}$  de bir bölge olsun. Eğer  $A$  bölgesindeki her basit kapalı eğrinin içi tamamen  $A$  da kalıyorsa  $A$  bölgesine basit bağlantılı bölge denir.

Geometrik bir yorumla, bir bölgedeki her basit kapalı eğri bölgenin dışına çıkmadan, bölgede bir noktaya büzülebiliyorsa bu bölge basit bağlantılıdır deriz.

**Tanım 14. (Diferansiyellenebilme) :**  $A \subset \mathbb{C}$  olmak üzere  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  bir fonksiyon ve  $z_0$ ,  $A$  nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa  $f$  fonksiyonu  $z_0$  noktasında diferansiyellenebilir (veya türevlenebilirdir) denir. Eğer limit varsa bu limitin değeri  $f'(z_0)$  ile gösterilir ve buna  $f$  fonksiyonunun  $z_0$  noktasındaki türevi adı verilir.

**Tanım 15. (Analitik Fonksiyon):**  $f$  fonksiyonu,  $z_0$  noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse  $f$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında analitiktir denir. Eğer bu  $f$  kompleks fonksiyonu bir  $A \subset \mathbb{C}$  kümesinin her noktasında analitikse

$f$  fonksiyonuna  $A$  kümesinde analitiktir denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

**Tanım 16. (Konform Dönüşüm):**  $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir  $z_0 \in A$  noktasından geçen ve aralarında  $\alpha$  açısı yapan herhangi iki düzgün  $\gamma_1$  ve  $\gamma_2$  eğrilerinin  $f(\gamma_1)$  ve  $f(\gamma_2)$  görüntü eğrileri de  $\omega_0 = f(z_0)$  noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından aynı  $\alpha$  açısı yapıyorlarsa  $f$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında bir konform dönüşümdür denir.

$f$  fonksiyonu bir  $z_0$  noktasında analitik ve  $f'(z_0) \neq 0$  ise  $f$ ,  $z_0$  noktasında bir konform dönüşümdür.

Örneğin,  $f(z) = e^z$  fonksiyonu  $\mathbb{C}$  den  $\mathbb{C}$  ye bir konform dönüşümdür.

**Lemma 1. (Schwarz Lemması):**  $f: \mathbb{U} = \{z: |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  analitik bir fonksiyon,  $z \in \mathbb{U}$  için  $|f(z)| < 1$ ,  $f(0) = 0$  şartları sağlansın. Bu durumda  $z \in U$  için

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{ve} \quad |f'(0)| \leq 1$$

olur. Üstelik  $z_0 \in \mathbb{U}$  ( $z_0 \neq 0$ ) için  $|f(z_0)| \leq |z_0|$  ise  $c$ ,  $|c| = 1$  özelliğinde bir sabit olmak üzere,  $f(z) = cz$  biçimindedir. (Duren 1983)

**Tanım 17. (Kompleks Dizi) :** Tanım kümesi  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  doğal sayılar, değer kümesi  $\mathbb{C}$  kompleks sayılar olan bir fonksiyona kompleks dizi denir.

Buna göre  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(n) = z_n$  fonksiyonu bir dizidir. Genel terimi  $z_n$  olan bir dizi,  $(z_n)$  ile gösterilir.

**Tanım 18. (Yakınsaklık):**  $(z_n)$  kompleks dizisi ve  $z_0$  kompleks sayısı verilsin. Her  $\varepsilon > 0$  için  $n \geq n_0$  iken  $|z_n - z_0| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  sayısı varsa  $n \rightarrow +\infty$  için  $(z_n)$  dizisinin limiti  $z_0$  sayısıdır denir ve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$$

olarak yazılır.

$(z_n)$  kompleks dizisi verilsin.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$  olacak şekilde bir  $z_0$  kompleks sayısı varsa  $(z_n)$  dizisi  $z_0$  sayısına yakınsıyor denir. Bu durumu  $z_n \rightarrow z_0$  şeklinde de ifade edebiliriz.

**Tanım 19. (Kompleks Seri) :**  $(z_n)$ , bir kompleks dizi olmak üzere

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

ifadesine kompleks seri denir ve



$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ile gösterilir.

**Tanım 20. (Kısmi Toplamlar Dizisi) :**  $s_n$  ile kompleks serinin  $n$ . indisli terimi dahil bu terime kadar olan bütün terimlerinin toplamını gösterelim.  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  serisinin terimlerinden

$$s_1 = z_1$$

$$s_2 = z_1 + z_2$$

$$s_3 = z_1 + z_2 + z_3$$

$\vdots$

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

$\vdots$

kısmi toplamlar yazılır. Böylece  $(s_n)$  kompleks dizisi elde edilir. Bu diziye verilen serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Kısmi toplamlar dizisinin genel terimi olan  $s_n$ , verilen serinin  $n$ . kısmi toplamı olarak adlandırılır.

**Tanım 21. (Yakınsak Seri) :**  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , bir kompleks seri ve  $(s_n)$ , bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Eğer  $(s_n)$  dizisi bir  $s$  sayısına yakınsıyor ise  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  serisi de  $s$  sayısına yakınsıyor denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$$

olarak yazılır. Bu  $s$  sayısına serinin toplamı adı verilir. Bir sayıya yakınsayan seriye yakınsak aksi halde ıraksak seri denir. Bir serinin yakınsaklık veya ıraksaklığına o serinin karakteri adı verilir.

**Tanım 22. (Kuvvet Serisi) :**  $z_0$  kompleks sayısı verilsin.  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  kompleks sayılar olmak üzere

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

fonksiyon serisine,  $z_0$  merkezli, bir kuvvet serisi denir. Kuvvet serisini kısaca

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

ile gösteririz.

**Tanım 23. (Taylor Serisi) :**  $f$  fonksiyonu  $z_0$  noktasında analitik olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

serisine  $f$  fonksiyonunun  $z_0$  noktasının bir komşuluğundaki Taylor serisi denir.

**Teorem 1. (Taylor Teoremi) :**  $f$ ,  $B$  bölgesinde analitik bir fonksiyon ve  $D(z_0; r) \subset B$  olsun.  $D(z_0; r)$  diskinde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

olur.

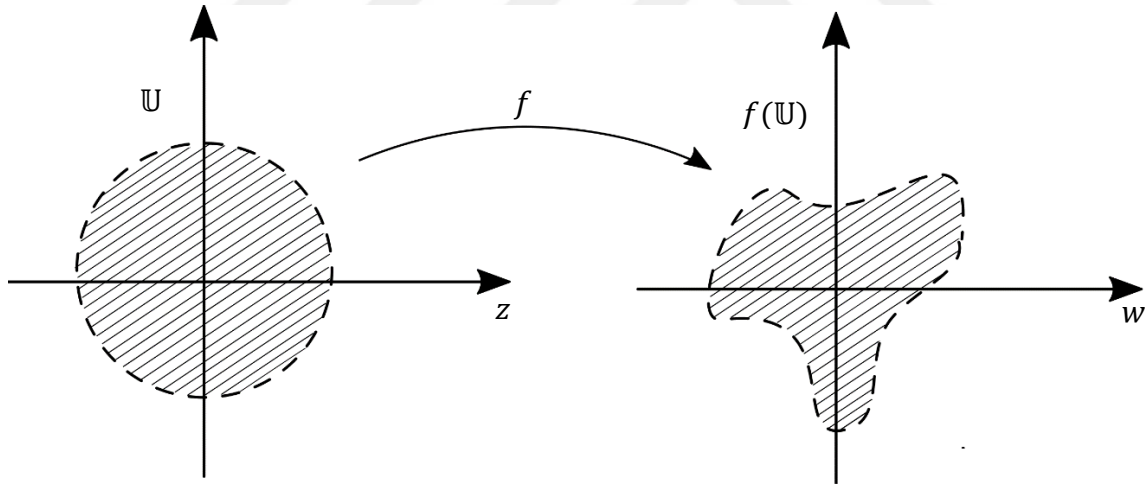
## MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, tez konusu kapsamında yapılan çalışmalara temel teşkil eden kavramlara yer verilecektir.

### Ünivalent Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

**Tanım 24. (Ünivalent Fonksiyon):**  $f$ ,  $A \subset \mathbb{C}$  bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her  $z_1, z_2 \in A$  için  $f(z_1) = f(z_2)$  olması sadece  $z_1 = z_2$  olmasını gerektiriyorsa (veya  $z_1 \neq z_2$  olduğunda  $f(z_1) \neq f(z_2)$  eşitsizliği gerçekleşiyorsa)  $f$  fonksiyonuna  $A$  bölgesinde ünivalent (yalıncat) fonksiyon denir.

$w = f(z)$  ünivalent fonksiyonunu birim diske kısıtlarsak geometrik olarak  $z$  –düzlemindeki  $\mathbb{U}$  diskini, Şekil 1. deki gibi  $w$  –düzlemindeki bir  $f(\mathbb{U})$  kümesine bire-bir örten olarak dönüştürür.



**Şekil 1.**  $f$  ünivalent fonksiyonunun birim diski dönüştürdüğü bölge.

Bir fonksiyon hem analitik hem de ünivalent olabilir. 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılan Riemann Dönüşüm Teoremi, ünivalent analitik fonksiyonlarla ilgili önemli bir özellik ortaya koyar.

**Teorem 2. (Riemann Dönüşüm Teoremi):**  $G$ , kapalı kompleks düzlemde en az iki sınır noktası olan basit bağlantılı bir bölge ve  $z_0 \in G$  sabit bir nokta olsun. Bu durumda  $\mathbb{U}$  birim diskinde  $f(0) = z_0$  ve  $f'(0) > 0$  şartları altında  $f: \mathbb{U} \rightarrow G$  bir tek bire-bir ve örten bir fonksiyon vardır.

Kompleks düzlemdeki iki bölge arasında bire-bir örten ve analitik bir fonksiyon varsa bu iki bölgeye konform olarak denktir deriz. Buna göre Riemann Dönüşüm Teoremi bize kompleks düzlemin basit bağlantılı her has alt kümesinin birim diske konform olarak denk olduğunu söyler.  $G$ , basit bağlantılı bölge olmak üzere  $f: \mathbb{U} \rightarrow G$  dönüşümü için  $f(0)$  in görüntüsünün  $G$  deki belli bir  $z_0$  noktası olması ve  $f'(0)$  in pozitif bir reel sayı olması durumunda ise bu konform dönüşüm tek olarak belirlenir.

Riemann Dönüşüm Teoremi bize sıradan basit bağlantılı bölgelerde çalışmak yerine  $\mathbb{U}$  birim diski üzerinde çalışma kolaylığı sağlar. Çünkü tüm basit bağlantılı bölgeler konform olarak denktir.

$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  olmak üzere  $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$  analitik bir fonksiyon ve  $z = 0$  civarında

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (1)$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir. Böyle  $f$  fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfı  $\mathcal{A}$  ile göstereceğiz. Yani,

$$\mathcal{A} = \left\{ f: f, \mathbb{U} \text{ da analitik ve } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right\}$$

olarak alınacaktır.

**Tanım 25. :**  $f \in \mathcal{A}$  olsun. Eğer

- 1)  $f(0) = 0$
- 2)  $f'(0) = 1$

şartları sağlanıyorsa  $f$  ye normalleştirilmiş fonksiyon denir.

$f$  fonksiyonu hem ünivalent hem de normalleştirilmiş ise  $f$  fonksiyonuna normalleştirilmiş ünivalent fonksiyon adı verilir ve normalleştirilmiş ünivalent fonksiyonların oluşturduğu aile  $\mathcal{S}$  ile gösterilir (Zorn 1986). Yani,

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{A} : f \text{ ünivalent; } f(0) = 0 \text{ ve } f'(0) = 1\}$$

olur. Buradan  $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$  olduğu görülür.

**Tanım 26. ( $\mathcal{P}$  Sınıfı) :**  $\mathbb{U}$  birim diskinde  $\text{Rep}(z) > 0$  ve  $p(0) = 1$  şartlarını sağlayan  $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$  şeklindeki analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya  $\mathcal{P}$  sınıfı denir (Duren 1983).

Birim diskte tanımlanan  $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$  fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon  $\mathbb{U}$  birim diskini sağ yarı düzleme konform olarak dönüştürür. Aynı zamanda  $p(z)$ ,  $\mathcal{P}$  sınıfına ait olup çalışmamızda sıkça kullanacağımız bir fonksiyondur.

$\mathcal{P}$  nin bazı özel alt sınıfları ünivalent fonksiyonların alt sınıfları ile ilişkili olmalarından dolayı geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli role sahiptir.

**Tanım 27. (Schwarz Fonksiyonu) :**  $w$ , birim diskte analitik bir fonksiyon olsun.  $z \in \mathbb{U}$  için  $|w(z)| < 1$  ve  $w(0) = 0$  şartlarını sağlayan  $w$  fonksiyonuna Schwarz fonksiyonu denir ve Schwarz fonksiyonlarının sınıfı  $\mathcal{V}$  ile gösterilir.

Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi, Schwarz Lemması'nın hipotezini sağlayan bir fonksiyona Schwarz fonksiyonu adı verilir.

$\mathcal{P}$  Caretheodory sınıfı ile  $\mathcal{V}$  Schwarz fonksiyonları sınıfı arasında şöyle bir ilişki kurulabilir:  $p \in \mathcal{P}$  olması için gerek ve yeter şart  $w \in \mathcal{V}$  olmak üzere  $p = \frac{1+w}{1-w}$  olmasıdır. Bu ilişki bize  $\mathcal{P}$  sınıfındaki bazı özelliklerin  $\mathcal{V}$  sınıfındaki bazı özelliklerden veya tersine  $\mathcal{V}$  sınıfındaki bazı özelliklerin  $\mathcal{P}$  sınıfındaki bazı özelliklerden elde edilebilmesi imkanını sunmaktadır (Graham and Kohr 2003).

Çalışmamızda başvurduğumuz Fekete-Szegö eşitsizliği ile ilgili iki önemli lemmayı verelim:

**Lemma 2. :**  $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ ,  $\mathbb{U}$  da pozitif reel kısımlı yani  $\mathcal{P}$  sınıfına ait bir fonksiyon ve  $v$ , bir kompleks sayı ise bu durumda

$$|c_2 - v c_1^2| \leq 2 \max\{1; |2v - 1|\}$$

olur. Bu sonuç

$$p(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2} \text{ ve } p(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

olarak verilen fonksiyonlar için kesindir (Seoudy and Aouf 2016, Srivastava et al 2019).

**Lemma 3. :**  $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \in \mathcal{P}$  olsun. Bu durumda

$$|c_2 - v c_1^2| \leq \begin{cases} -4v + 2, & v \leq 0 \\ 2, & 0 \leq v \leq 1 \\ 4v - 2, & v \geq 1 \end{cases}$$

olur.  $v < 0$  ve  $v > 1$  iken eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $p(z)$ 'nin  $(1+z)/(1-z)$  veya bunun bir rotasyonu olmasıdır. Eğer  $0 < v < 1$  ise eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $p(z)$ 'nin  $(1+z^2)/(1-z^2)$  veya bunun bir rotasyonu olmasıdır. Eğer  $v = 0$  ise eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$p(z) = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\frac{1+z}{1-z} + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\frac{1-z}{1+z} \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

veya bunun bir rotasyonu olmasıdır. Eğer  $v = 1$  ise eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart  $p$ 'nin  $v = 0$  durumunda eşitliğin sağlandığı fonksiyonların bir tersi olmasıdır.

Aynı zamanda yukarıdaki üst sınır kesindir ve  $0 < v < 1$  iken

$$|c_2 - vc_1^2| + v|c_1|^2 \leq 2 \quad \left(0 \leq v \leq \frac{1}{2}\right)$$

ve

$$|c_2 - vc_1^2| + (1-v)|c_1|^2 \leq 2 \quad \left(\frac{1}{2} \leq v \leq 1\right).$$

dir (Ma and Minda, 1992).

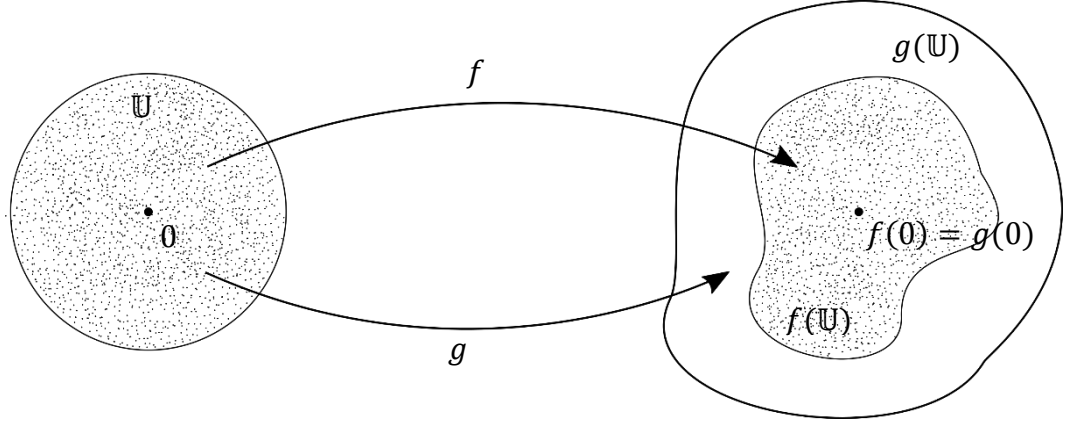
**Tanım 28. (Subordine) :**  $f$  ve  $g$ ,  $\mathcal{A}$  sınıfına ait fonksiyonlar olsun. Eğer  $f(z) = g(w(z))$  ( $z \in \mathbb{U}$ ) olacak şekilde bir  $w(z)$  Schwarz fonksiyonu varsa  $f$ ,  $g$  'ye subordinatedir (subordinate) denir ve bu  $f < g$  (veya  $f(z) < g(z)$ ) şeklinde yazılarak gösterilir. Bu işleme subordinasyon adı verilir.

Bu tanımda  $g$  fonksiyonuna uygun bir kısıtlama getirilerek subordinasyon şu şekilde de tanımlanabilir:

$f$  ve  $g$  fonksiyonları  $\mathbb{U}$  birim diskinde analitik ve  $g(z)$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$  da ünivalent, ayrıca

$$f(0) = g(0) \quad \text{ve} \quad f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U})$$

oluyorsa  $f$ ,  $g$  ye subordinatedir denir. Bu durum geometrik olarak aşağıdaki şekilde görülebilir.



**Şekil 2.**  $f < g$  Subordinasyonu

**Örnek 1.** :  $\mathcal{A}$  sınıfına ait olan  $f(z) = 1 + z$  ve  $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$  fonksiyonlarını göz önüne alalım.  $f$  nin  $g$  ye subordinate olduğunu göstermek için  $f(z) = g(w(z))$  ( $z \in \mathbb{U}$ ) olacak şekilde bir  $w(z)$  Schwarz fonksiyonunun varlığını göstermeliyiz. Bu düşünceyle

$$\begin{aligned} f(z) = g(w(z)) &\Rightarrow 1 + z = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \\ &\Rightarrow w(z) = \frac{z}{z + 2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi  $w(z) = \frac{z}{z+2}$  fonksiyonunun bir Schwarz fonksiyonu olduğunu gösterelim. İlk olarak  $w(z)$  fonksiyonu birim diskte analitiktir. Ayrıca  $w(0) = 0$  ve birim diskte

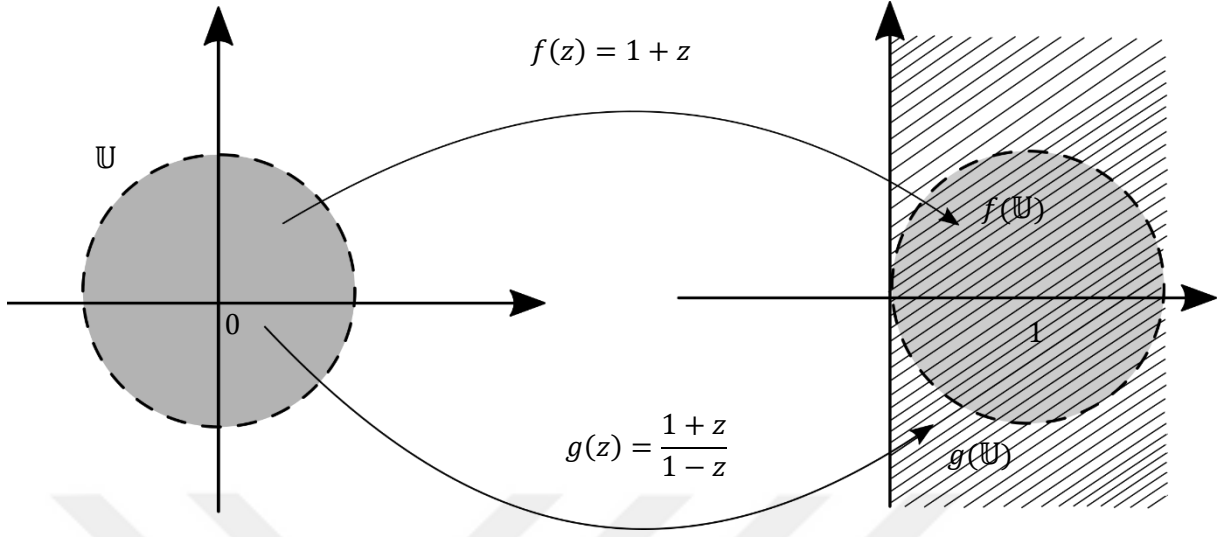
$$\begin{aligned} |w(z)| &= \left| \frac{z}{z+2} \right| \\ &< \frac{1}{|z+2|} \\ &< \frac{1}{2-|z|} \\ &< 1 \end{aligned}$$

olur. Tanım 27'ye göre  $w$  bir Schwarz fonksiyonudur.

Dolayısıyla  $f < g$  olur (Çağlar 2013). Bu durum aşağıdaki şekilde görülebilir:

$$f(z) = 1 + z \Rightarrow w = 1 + z \Rightarrow |z| = |w - 1| < 1 \Rightarrow (u - 1)^2 + v^2 < 1$$

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow w - wz = 1 + z \Rightarrow w - 1 = z(1 + w) \Rightarrow |z| = \left| \frac{w-1}{w+1} \right| < 1 \Rightarrow u > 0$$



Şekil 3.  $1 + z < \frac{1+z}{1-z}$

### Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Bu bölümde  $\mathcal{S}$  sınıfının önemli alt sınıflarından olan yıldızıl ve konveks fonksiyonlardan bahsedilecektir.

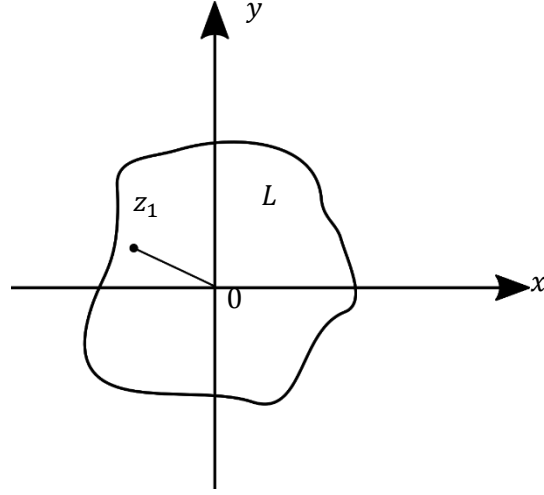
**Tanım 29. (Yıldızıl Küme) :**  $L \subset \mathbb{C}$  kümesi verilsin ve  $w_0$ ,  $L$  kümesinin sabit bir noktası olsun. Her  $w \in L$  için  $w_0$  noktasını  $w$  noktasına birleştiren doğru parçası tamamen  $L$  de kalıyorsa bu  $L$  ye  $w_0$  noktasına göre yıldızıl (starlike) küme denir.

Biliyoruz ki  $\gamma(t) = (1-t)w_0 + tw_1$ ,  $0 \leq t \leq 1$   $w_0$  ile  $w_1$  noktalarını birleştiren doğru parçasının parametrik denklemidir. Bunu dikkate alarak yıldızıl kümeyi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$L \subset \mathbb{C}$  kümesi verilsin ve  $w_0$ ,  $L$  kümesinin sabit bir noktası olsun. Her  $w \in L$  için  $\gamma(t) = (1-t)w_0 + tw \in L$  oluyorsa  $L$  ye  $w_0$  noktasına göre yıldızıl (starlike) küme adı verilir.

Özel olarak  $w_0 = 0$  olması halinde  $L$  ye orijine göre yıldızıl küme denebileceği gibi bunun yerine daha yaygın olarak kullanılan yıldızıl küme denilmesi tercih edilir.





**Şekil 4.** Sıfıra göre yıldızıl bir bölge.

Bu bağlamda yıldızıl bir  $f$  fonksiyonunu da tanımlayabiliriz:

**Tanım 30. ( $\mathcal{S}^*$  Sınıfı) :** Eğer  $\mathbb{U}$  da tanımlanan  $f$  fonksiyonunun görüntü kümesi olan  $f(\mathbb{U})$  yıldızıl ise  $f$  ye yıldızıl fonksiyon denir ve yıldızıl fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{S}^*$  ile gösterilir (Duren 1983).

Yukarıdaki tanımda verdiğimiz yıldızıl fonksiyonları aşağıdaki teorem ile de karakterize edebiliriz.

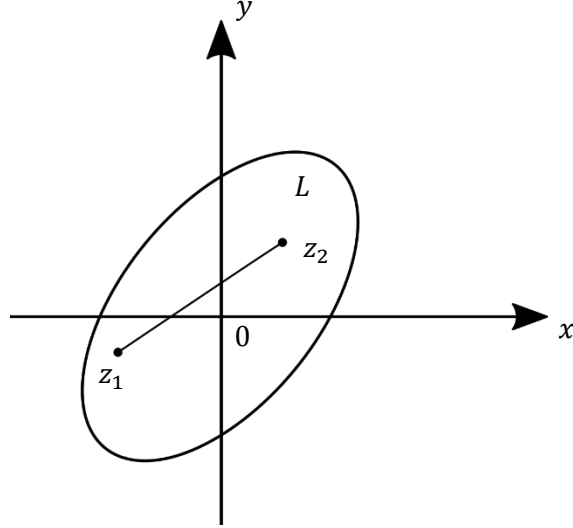
**Teorem 3. :**  $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$  analitik bir fonksiyon ve  $f(0) = 0$  olsun. Bu durumda  $f$  nin yıldızıl olması için gerek ve yeter şart  $f'(0) \neq 0$  ve  $\mathbb{U}$  da

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0$$

olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

**Tanım 31. (Konveks Küme):**  $L \subset \mathbb{C}$  kümesi verilsin.  $L$  deki her  $w_1, w_2$  nokta çiftleri için noktaları birleştiren doğru parçası tamamen  $L$  içinde kalıyorsa  $L$  kümesine konveks küme denir.

Başka bir ifade ile  $L \subset \mathbb{C}$  kümesi verilsin.  $L$  deki her  $w_1, w_2$  nokta çiftleri ve her  $t \in [0,1]$  için  $(1-t)w_1 + tw_2 \in L$  oluyorsa  $L$  ye konveks küme denir.



**Şekil 5.** Konveks bölge.

Konveks kümenin tanımından yararlanarak konveks fonksiyonu tanımlayabiliriz:

**Tanım 32. ( $\mathcal{C}$  Sınıfı):** Eğer bir  $f$  fonksiyonunun görüntü kümesi olan  $f(\mathbb{U})$  konveks bir küme oluyorsa  $f$  ye konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{C}$  ile gösterilir (Duren 1983).

Konveks fonksiyonları aşağıdaki teoremden verildiği gibi karakterize edebiliriz.

**Teorem 4. :**  $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$  analitik bir fonksiyon olsun.  $f$  nin konveks olması için gerek ve yeter şart  $f'(0) \neq 0$  ve

$$\operatorname{Re} \left[ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0$$

olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

1915 yılında Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem  $\mathcal{S}^*$  ve  $\mathcal{C}$  sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

**Teorem 5. (Alexander Teoremi):**  $f(z) \in \mathcal{A}$  ve  $z \in \mathbb{U}$  olmak üzere  $g(z) = zf'(z)$  olsun. Bu durumda  $f(z) \in \mathcal{C}$  olması için gerek ve yeter şart  $g(z) \in \mathcal{S}^*$  olmasıdır.

**Tanım 33. ( $\alpha$  Mertebeli Yıldızlı Fonksiyonlar) :**  $f, \mathbb{U}$  birim diskinde ünivalent bir fonksiyon,  $f(0) = 0$  ve  $f'(0) \neq 0$  olsun. Eğer  $\mathbb{U}$  da

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

oluyorsa  $f$  fonksiyonuna  $\alpha$  mertebeli yıldızlı fonksiyon denir (Graham and Kohr 2003).

$\alpha$  mertebeli yıldızlı fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{S}^*(\alpha)$  ile gösterilir. Bu durumda

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

olarak yazılır.

**Tanım 34. ( $\alpha$  Mertebeli Konveks Fonksiyonlar) :**  $f$ ,  $\mathbb{U}$  birim diskinde ünivalent bir fonksiyon,  $f(0) = 0$  ve  $f'(0) = 1$  olsun. Eğer  $\mathbb{U}$  da

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

oluyorsa  $f$  fonksiyonuna  $\alpha$  mertebeli konveks fonksiyon denir (Graham and Kohr 2003).

$\alpha$  mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{C}(\alpha)$  ile gösterilir. Böylece

$$\mathcal{C}(\alpha) = \left\{ f(z) \in \mathcal{S} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re} \left( 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

olur.

**Tanım 35. (Kompleks Mertebeli Yıldızlı Fonksiyon) :**  $b \neq 0$  ve  $b \in \mathbb{C}$  olsun.  $\mathbb{U}$  birim diskinde  $\frac{f(z)}{z} \neq 0$  ve

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{b} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \geq 0$$

şartlarını sağlayan  $f$  analitik fonksiyonuna  $(1 - b)$  kompleks mertebeli yıldızlı fonksiyon denir (Nasr ve Aouf, 1985).

Böyle fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{S}^*(1 - b)$  ile gösterilir.  $b = 1$  için  $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$  ve  $0 \leq \alpha < 1$  olmak üzere  $b = 1 - \alpha$  için  $\mathcal{S}^*(\alpha)$  sınıfı elde edilir.

**Önerme 1. :**  $f \in \mathcal{S}^*(1 - b)$  olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = b[p(z) - 1] + 1$$

olacak şekilde bir  $p \in \mathcal{P}$  fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

**Tanım 36. (Kompleks Mertebeli Konveks Fonksiyon) :**  $b \neq 0$  ve  $b \in \mathbb{C}$  olsun.  $\mathbb{U}$  birim diskinde  $g'(z) \neq 0$  ve

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{b} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq 0$$

şartlarını sağlayan  $f$  analitik fonksiyonuna  $b$  kompleks mertebeli konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{C}(b)$  ile gösterilir (Nasr ve Aouf, 1987).

**Teorem 6. :**  $f \in \mathcal{C}(b)$  olması için gerek ve yeter şart  $zf' \in \mathcal{S}^*(1 - b)$  olmasıdır.

### **$(p, q)$ -Analiz**

“Post kuantum analiz” olarak da bilinen  $(p, q)$ -analiz( $(p, q)$ -calculus)  $q$ -analizin genelleştirilmesidir.  $(p, q)$ -analizde  $p = 1$  olması durumunda  $q$ -analiz elde edilebilir.  $(p, q)$ -analizin belli tanımları için literatürdeki çalışmalara bakılabilir (Gupta et al. 2018).

Aslında  $(p, q)$ -analizin özünde verilen bir  $f$  fonksiyonu için  $f(pz) - f(qz)$  olarak ifade edilen  $(p, q)$ -farkı yatmaktadır. Buna bazen fark işlemi de denmektedir. Bu fark işlemi kullanılarak  $(p, q)$ -analizde  $(p, q)$ -türevi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

**Tanım 37. ( $(p, q)$ -Türev) :**  $f$ , kompleks sayıların uygun altkümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun.  $pz$  ve  $qz$  tanım kümesinde kalacak şekilde  $p$  ve  $q$  reel sayıları için  $f$  fonksiyonunun  $(p, q)$ -türevi

$$D_{p,q}f(z) = \frac{f(pz) - f(qz)}{pz - qz} \quad (z \neq 0)$$

olarak tanımlanır.

$z = 0$  için  $f'$  alışılmış türevi göstermek üzere  $D_{p,q}f(0) = f'(0)$  olduğu kabul edilir.

Tanımlanan bu  $D_{p,q}f(z)$  türevi için

$$D_{p,q}(f(z) + g(z)) = D_{p,q}f(z) + D_{p,q}g(z)$$

ve

$$D_{p,q}(cf(z)) = cD_{p,q}f(z) \quad (c, \text{sabit})$$

lineerlik şartları sağlanmaktadır. Yani  $D_{p,q}f$  bir lineer operatördür.

Bu genel  $(p, q)$ -türevini amacımıza uygun olarak  $\mathbb{U}$  birim diski için şu şekilde özelleştirebiliriz.

**Tanım 38. :**  $f \in \mathcal{A}$  fonksiyonu verilsin.  $0 < q < p \leq 1$  için  $f$  fonksiyonunun  $(p, q)$ -türevi  $z \neq 0$  iken

$$D_{p,q}f(z) = \frac{f(pz) - f(qz)}{pz - qz} \quad (2)$$

ve  $z = 0$  iken

$$D_{p,q}f(0) = f'(0)$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca, hatırlatalım ki

$$D_{p,q}^2 f(z) = D_{p,q} \left( D_{p,q} f(z) \right)$$

veya daha genel olarak

$$D_{p,q}^n f(z) = D_{p,q} \left( D_{p,q}^{n-1} f(z) \right)$$

olur.

$(p, q)$ -türevi ile bildiğimiz türev arasında

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1^- \\ p=1}} \left( D_{p,q} f(z) \right) = f'(z)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

**Örnek 2. :**  $h(z) = z^k$  fonksiyonunun  $(p, q)$ -türevini bulunuz.

**Çözüm:** Tanımı kullanırsak

$$\begin{aligned} D_{p,q}(h(z)) &= D_{p,q}(z^k) \\ &= \frac{(pz)^k - (qz)^k}{pz - qz} \\ &= \frac{(p^k - q^k)z^k}{pz - qz} \\ &= \frac{p^k - q^k}{p - q} \frac{z^k}{z} \\ &= \frac{p^k - q^k}{p - q} z^{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$[k]_{p,q} = \frac{p^k - q^k}{p - q}$$

denirse

$$D_{p,q}(z^k) = [k]_{p,q} z^{k-1}$$

yazılır.

Ayrıca  $h(z) = z^k$  fonksiyonu için  $(p, q)$ -türevi ile alışılmış türev arasındaki ilişki de

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1^- \\ p=1}} \left( D_{p,q} h(z) \right) = kz^{k-1} = h'(z)$$

şeklinde görülür.

Yukarıdaki örneği göz önüne alarak

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

fonksiyonunun  $(p, q)$ -türevini

$$[k]_{p,q} = \frac{p^k - q^k}{p - q}$$

olmak üzere

$$D_{p,q}f(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} [k]_{p,q} a_k z^{k-1}$$

şeklinde yazabiliriz.

$D_{p,q}f(z)$ ,  $(p, q)$ -türevini kullanarak  $0 \leq \alpha < 1$  için  $\alpha$  mertebeli  $(p, q)$ -yıldızlı fonksiyon ve  $\alpha$  mertebeli  $(p, q)$ -konveks fonksiyon sınıflarını tanımlayabiliriz.

**Tanım 39. ( $\alpha$  Mertebeli  $(p, q)$ -Yıldızlı Fonksiyon) :** Eğer  $f \in \mathcal{A}$  fonksiyonu için  $0 \leq \alpha < 1$  olmak üzere

$$Re \frac{z D_{p,q}f(z)}{f(z)} > \alpha$$

şartını sağlarsa  $f$  fonksiyonuna  $\alpha$  mertebeli  $(p, q)$ -yıldızlı fonksiyon denir.

$\alpha$  mertebeli  $(p, q)$ -yıldızlı fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{S}_{p,q}^*(\alpha)$  ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{S}_{p,q}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : Re \frac{z D_{p,q}f(z)}{f(z)} > \alpha, z \in \mathbb{U} \right\}$$

şeklinde yazılır.

**Tanım 40. ( $\alpha$  Mertebeli  $(p, q)$ -Konveks Fonksiyon) :** Eğer  $f \in \mathcal{A}$  fonksiyonu için  $0 \leq \alpha < 1$  olmak üzere

$$Re \frac{D_{p,q} \left( z D_{p,q}f(z) \right)}{D_{p,q}f(z)} > \alpha$$

şartını sağlarsa  $f$  fonksiyonuna  $\alpha$  mertebeli  $(p, q)$ -konveks fonksiyon denir.

$\alpha$  mertebeli  $(p, q)$ -konveks fonksiyonların sınıfı  $\mathcal{C}_{p,q}(\alpha)$  ile gösterilir ve

$$\mathcal{C}_{p,q}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \frac{D_{p,q}(zD_{p,q}f(z))}{D_{p,q}f(z)} > \alpha, z \in \mathbb{U} \right\}$$

olarak yazılır.

Dikkat edelim ki

$$f \in \mathcal{C}_{p,q}(\alpha) \Leftrightarrow zD_{p,q}f \in \mathcal{S}_{p,q}^*(\alpha)$$

olmasıdır.  $\mathcal{S}_{p,q}^*(\alpha)$  sınıfı ile  $\mathcal{S}^*(\alpha)$  sınıfı arasında

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1^- \\ p=1}} \mathcal{S}_{p,q}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \lim_{\substack{q \rightarrow 1^- \\ p=1}} \operatorname{Re} \frac{zD_{p,q}f(z)}{f(z)} > \alpha, z \in \mathbb{U} \right\}$$

olarak tanımlanırsa

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1^- \\ p=1}} \mathcal{S}_{p,q}^*(\alpha) = \mathcal{S}^*(\alpha)$$

ilişkisi vardır. Benzer şekilde

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1^- \\ p=1}} \mathcal{C}_{p,q}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \lim_{\substack{q \rightarrow 1^- \\ p=1}} \operatorname{Re} \frac{D_{p,q}(zD_{p,q}f(z))}{D_{p,q}f(z)} > \alpha, z \in \mathbb{U} \right\} = \mathcal{C}(\alpha)$$

yazılır. Burada  $\mathcal{S}^*(\alpha)$  ve  $\mathcal{C}(\alpha)$ , sırasıyla, literatürde bilinen  $\mathbb{U}$  da  $\alpha$  mertebeli yıldızlı ve  $\alpha$  mertebeli konveks fonksiyonların sınıflarını göstermektedir.

## ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde çalışmalar süresince elde edilen sonuçlar ispatlarıyla birlikte verilecektir.

**Tanım 41. :** Eğer  $f \in \mathcal{A}$  fonksiyonu

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{zD_{p,q}f(z)}{f(z)} - 1 \right] < \phi(z) \quad (b \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}; \phi \in \mathcal{P})$$

şartını sağlarsa  $f$  fonksiyonuna  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfındandır denir. Bu  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına kompleks mertebeli  $(p, q)$ -yıldızıl fonksiyon sınıfı adı verilir (Yatkın ve Kadıoğlu, 2020).

**Tanım 42. :** Eğer  $f \in \mathcal{A}$  fonksiyonu

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{D_{p,q} \left( \frac{zD_{p,q}f(z)}{f(z)} \right) - 1}{D_{p,q}f(z)} - 1 \right] < \phi(z) \quad (b \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}; \phi \in \mathcal{P})$$

şartını sağlarsa  $f$  fonksiyonuna  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfındandır denir. Bu  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına kompleks mertebeli  $(p, q)$ -konveks fonksiyon sınıfı adı verilir (Yatkın ve Kadıoğlu, 2020).

**Teorem 7. :**  $B_1 \neq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + \dots$  olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q} - 1} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right| \right\}$$

olur. Bu sonuç kesindir (Yatkın ve Kadıoğlu, 2020).

**İspat:**  $f \in \mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{zD_{p,q}f(z)}{f(z)} - 1 \right] < \phi(z)$$

yazılır. Subordinasyon tanımından

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{zD_{p,q}f(z)}{f(z)} - 1 \right] = \phi(w(z)) \tag{3}$$

olacak şekilde  $\mathbb{U}$ 'da analitik bir  $w$ , Schwarz fonksiyonu vardır.

Önce (3) eşitliğinin sağındaki  $\phi(w(z))$  'nin uygun bir ifadesini bulalım.



Lemma 2’de  $p(z)$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$ ’da  $p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots$ ,  $\text{Re } p(z) > 0$  olarak verilmiş olup  $|w(z)| < 1$  olduğundan

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \quad (4)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan

$$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}$$

olur.

Böylece

$$\begin{aligned} \phi(w(z)) &= \phi\left(\frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}\right) \\ &= \phi\left(\frac{c_1z + c_2z^2 + \dots}{2 + c_1z + c_2z^2 + \dots}\right) \\ &= \phi\left(\frac{1}{2}\left[c_1z + \left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right)z^2 + \left(c_3 - c_1c_2 + \frac{c_1^3}{4}\right)z^3 + \dots\right]\right) \end{aligned}$$

yazılır.  $\phi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + \dots$  olduğu göz önüne alınarak

$$\phi(w(z)) = 1 + \frac{B_1c_1}{2}z + \left[\frac{B_1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right) + \frac{B_2c_1^2}{4}\right]z^2 + \dots$$

elde edilir.

Şimdi de (3) ifadesinin solundaki ifadeyi düzenleyelim. Buna göre

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{z D_{p,q} f(z)}{f(z)} - 1 \right] \\ &= 1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{z + \sum_{k=2}^{\infty} [k]_{p,q} a_k z^k}{z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k} - 1 \right] \\ &= 1 + \frac{1}{b} [(1 + ([2]_{p,q} - 1)a_2z + ([3]_{p,q} - 1)a_3 - ([2]_{p,q} - 1)a_2^2]z^2 + \dots - 1] \\ &= 1 + \frac{1}{b} [(1 + ([2]_{p,q} - 1)a_2z + ([3]_{p,q} - 1)a_3 - ([2]_{p,q} - 1)a_2^2]z^2 + \dots] \\ &= 1 + \frac{([2]_{p,q} - 1)a_2}{b}z + \frac{([3]_{p,q} - 1)a_3 - ([2]_{p,q} - 1)a_2^2}{b}z^2 + \dots \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bulduğumuz bu sonuçlar (3) ifadesi olan

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{z D_{p,q} f(z)}{f(z)} - 1 \right] = \phi(w(z))$$

eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 1 + \frac{([2]_{p,q} - 1)a_2}{b}z + \frac{([3]_{p,q} - 1)a_3 - ([2]_{p,q} - 1)a_2^2}{b}z^2 + \dots \\ = 1 + \frac{B_1 c_1}{2}z + \left[ \frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} \right] z^2 + \dots \end{aligned}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned} \frac{[2]_{p,q} - 1}{b} a_2 &= \frac{B_1 c_1}{2} \\ \frac{[3]_{p,q} - 1}{b} a_3 - \frac{[2]_{p,q} - 1}{b} a_2^2 &= \frac{B_1 c_2}{2} - \frac{B_1 c_1^2}{4} + \frac{B_2 c_1^2}{4} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{B_1 c_1 b}{2([2]_{p,q} - 1)} \\ a_3 &= \frac{B_1 b}{2([3]_{p,q} - 1)} \left\{ c_2 - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \right] c_1^2 \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{B_1 b}{2([3]_{p,q} - 1)} \left\{ c_2 - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] c_1^2 \right\}$$

olduğu görülür. Burada

$$v = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right]$$

alınırsa yukarıdaki eşitlik daha sade bir şekilde

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{B_1 b}{2([3]_{p,q} - 1)} (c_2 - v c_1^2)$$

şeklinde yazılır. Lemma 2'e göre

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - v c_1^2|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} 2^{\max\{1; |2v - 1|\}} \\
&= \frac{|B_1 b|}{([3]_{p,q} - 1)} \max \left\{ 1; \left| 2 \left( \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] \right) - 1 \right| \right\} \\
&= \frac{|B_1 b|}{([3]_{p,q} - 1)} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right| \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da teoremdeki istenilen sonuçtur.

Şimdi de verilen sonucun kesin olduğunu gösterelim. Yani teoremdeki eşitsizliği eşitliğe dönüştürebilecek bir fonksiyonun varlığını araştıralım.

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

olarak alınırsa

$$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} = z$$

olur.

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{z D_{p,q} f(z)}{f(z)} - 1 \right] = \phi(w(z))$$

eşitliğinin sağ tarafındaki  $\phi(w(z))$  ifadesi

$$\phi(w(z)) = \phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$$

şeklinde yazılır. Bunu

$$\phi(w(z)) = 1 + \frac{B_1 c_1}{2} z + \left[ \frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} \right] z^2 + \dots$$

ifadesi ile karşılaştırsak

$$\frac{B_1 c_1}{2} = B_1 \Rightarrow c_1 = 2$$

ve

$$\frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} = B_2$$

$$\frac{B_1}{2} (c_2 - 2) + B_2 = B_2$$

$$\frac{B_1}{2}(c_2 - 2) = 0$$

$$c_2 = 2$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{B_1 b}{2([3]_{p,q} - 1)} \{c_2 - v c_1^2\} \\ &= \frac{B_1 b}{2([3]_{p,q} - 1)} \{2 - 4v\} \\ &= \frac{B_1 b}{([3]_{p,q} - 1)} \{1 - 2v\} \\ &= \frac{B_1 b}{([3]_{p,q} - 1)} \left\{ 1 - 2 \left( \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] \right) \right\} \\ &= \frac{B_1 b}{([3]_{p,q} - 1)} \left\{ 1 - 1 + \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right\} \\ &= \frac{B_1 b}{([3]_{p,q} - 1)} \left\{ \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right\} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q} - 1} \left| \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right|$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$p(z) = \frac{1 + z^2}{1 - z^2}$$

olarak alınırsa

$$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} = z^2$$

olur.

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{z D_{p,q} f(z)}{f(z)} - 1 \right] = \phi(w(z))$$

eşitliğinin sağ tarafındaki  $\phi(w(z))$  ifadesi

$$\phi(w(z)) = \phi(z^2) = 1 + B_1 z^2 + B_2 z^4 + \dots$$

şeklinde yazılır. Bunu

$$\phi(w(z)) = 1 + \frac{B_1 c_1}{2} z + \left[ \frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} \right] z^2 + \dots$$

ifadesi ile karşılaştırsak

$$\frac{B_1 c_1}{2} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

ve

$$\frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} = B_1$$

$$\frac{B_1 c_2}{2} = B_1$$

$$c_2 = 2$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{B_1 b}{2([3]_{p,q} - 1)} \{c_2 - v c_1^2\} \\ &= \frac{B_1 b}{2([3]_{p,q} - 1)} \{2\} \\ &= \frac{B_1 b}{([3]_{p,q} - 1)} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q} - 1}$$

elde edilir.

**Teorem 8. :**  $B_1 \neq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right| \right\}$$

olur. Bu sonuç kesindir (Yatkın ve Kadıoğlu, 2020).

**İspat:**  $f \in \mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{D_{p,q} \left( z D_{p,q} f(z) \right)}{D_{p,q} (f(z))} - 1 \right] < \phi(z)$$

yazılır. Subordinasyon tanımından

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{D_{p,q} \left( z D_{p,q} f(z) \right)}{D_{p,q} (f(z))} - 1 \right] = \phi(w(z)) \quad (5)$$

olacak şekilde  $\mathbb{U}$ 'da analitik bir  $w$ , Schwarz fonksiyonu vardır.

Önce (5) eşitliğinin sağındaki  $\phi(w(z))$  'nin uygun bir ifadesini bulalım.

Lemma 2'de  $p(z)$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$ 'da  $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ ,  $\text{Re } p(z) > 0$  olarak verilmiş olup  $|w(z)| < 1$  olduğundan

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan

$$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}$$

olur.

Böylece

$$\begin{aligned} \phi(w(z)) &= \phi \left( \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} \right) \\ &= \phi \left( \frac{c_1 z + c_2 z^2 + \dots}{2 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots} \right) \\ &= \phi \left( \frac{1}{2} \left[ c_1 z + \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) z^2 + \left( c_3 - c_1 c_2 + \frac{c_1^3}{4} \right) z^3 + \dots \right] \right) \end{aligned}$$

yazılır.  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$ , olduğu göz önüne alınarak

$$\phi(w(z)) = 1 + \frac{B_1 c_1}{2} z + \left[ \frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} \right] z^2 + \dots$$

elde edilir.

Şimdi de (5) ifadesinin solundaki ifadeyi düzenleyelim. Buna göre

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{D_{p,q} \left( z D_{p,q} f(z) \right)}{D_{p,q} (f(z))} - 1 \right] &= 1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} [k]_{p,q}^2 a_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} [k]_{p,q} a_k z^{k-1}} - 1 \right] \\
&= 1 + \frac{1}{b} \left[ \left( (1 + [2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)a_2 z + ([3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)a_3 - ([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)a_2^2) z^2 + \dots \right) - 1 \right] \\
&= 1 + \frac{1}{b} \left[ [2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)a_2 z + [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)a_3 - ([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)a_2^2 z^2 + \dots \right] \\
&= 1 + \frac{[2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)}{b} a_2 z + \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)a_3 - ([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)a_2^2}{b} z^2 + \dots
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bulduğumuz bu sonuçlar (3) ifadesi olan

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{D_{p,q} \left( z D_{p,q} f(z) \right)}{D_{p,q} (f(z))} - 1 \right] = \phi(w(z))$$

eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
1 + \frac{[2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)}{b} a_2 z + \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)a_3 - [2]_{p,q}^2([2]_{p,q} - 1)a_2^2}{b} z^2 + \dots \\
= 1 + \frac{B_1 c_1}{2} z + \left[ \frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} \right] z^2 + \dots
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned}
\frac{[2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)}{b} a_2 &= \frac{B_1 c_1}{2} \\
\frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)a_3 - [2]_{p,q}^2([2]_{p,q} - 1)a_2^2}{b} &= \frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{B_1 c_1 b}{2[2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)} \\
a_3 &= \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \left\{ c_2 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \right) c_1^2 \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \left\{ c_2 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \right) c_1^2 \right\} - \mu \frac{B_1^2 c_1^2 b^2}{4([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)^2}$$

$$= \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \left\{ c_2 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left[ 1 - \mu \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \right] c_1^2 \right) \right\}$$

olduğu görülür. Burada

$$v = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left[ 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right] \right)$$

alınırsa yukarıdaki eşitlik daha sade bir şekilde

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} (c_2 - v c_1^2)$$

şeklinde yazılır. Lemma 2'ye göre

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2^2| &= \frac{|B_1 b|}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - v c_1^2| \\ &\leq \frac{|B_1 b|}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} 2^{\max\{1, |2v - 1|\}} \\ &= \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right| \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu teoremdaki istenilen sonuçtur.

Şimdi de verilen sonucun kesin olduğunu gösterelim. Yani teoremdaki eşitsizliği eşitliğe dönüştürebilecek bir fonksiyonun varlığını araştıralım.

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

olarak alınırsa

$$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} = z$$

olur.

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{D_{p,q} \left( z D_{p,q} f(z) \right)}{D_{p,q} (f(z))} - 1 \right] = \phi(w(z))$$

eşitliğinin sağ tarafındaki  $\phi(w(z))$  ifadesi

$$\phi(w(z)) = \phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$$

şeklinde yazılır. Bunu



$$\phi(w(z)) = 1 + \frac{B_1 c_1}{2} z + \left[ \frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} \right] z^2 + \dots$$

ifadesi ile karşılaştırsak

$$\frac{B_1 c_1}{2} = B_1 \Rightarrow c_1 = 2$$

ve

$$\frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} = B_2$$

$$\frac{B_1}{2} (c_2 - 2) + B_2 = B_2$$

$$\frac{B_1}{2} (c_2 - 2) = 0$$

$$c_2 = 2$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \{c_2 - v c_1^2\} \\ &= \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \{2 - 4v\} \\ &= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \{1 - 2v\} \\ &= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \left\{ 1 - 2 \left( \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left[ 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right] \right) \right\} \\ &= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \left\{ 1 - 1 + \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left[ 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right] \right\} \\ &= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \left\{ \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right\} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \left| \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right|$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$p(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

olarak alınırsa

$$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} = z^2$$

olur.

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{D_{p,q} \left( z D_{p,q} f(z) \right)}{D_{p,q} (f(z))} - 1 \right] = \phi(w(z))$$

eşitliğinin sağ tarafındaki  $\phi(w(z))$  ifadesi

$$\phi(w(z)) = \phi(z^2) = 1 + B_1 z^2 + B_2 z^4 + \dots$$

şeklinde yazılır. Bunu

$$\phi(w(z)) = 1 + \frac{B_1 c_1}{2} z + \left[ \frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} \right] z^2 + \dots$$

ifadesi ile karşılaştırsak

$$\frac{B_1 c_1}{2} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

ve

$$\frac{B_1}{2} \left( c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{B_2 c_1^2}{4} = B_1$$

$$\frac{B_1 c_2}{2} = B_1$$

$$c_2 = 2$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \{c_2 - v c_1^2\} \\ &= \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \{2\} \\ &= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}$$

elde edilir.

Teorem 7’de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  alınarak  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 1.** :  $B_1 \neq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{|B_1 b|}{2} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} + (1 - 2\mu) B_1 b \right| \right\}$$

olur. Bu sonuç kesindir (Yatkın ve Kadioğlu, 2020).

Teorem 8’de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  alınarak  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 2.** :  $B_1 \neq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  olsun. Eğer  $f \in \mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{|B_1 b|}{6} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} + (1 - 3\mu) B_1 b \right| \right\}$$

olur. Bu sonuç kesindir (Yatkın ve Kadioğlu, 2020).

**Teorem 9.** :  $B_1 > 0$ ,  $B_2 \geq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  ve

$$\sigma_1 = \frac{([2]_{p,q} - 1) b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 (B_2 - B_1)}{([3]_{p,q} - 1) b B_1^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{([2]_{p,q} - 1) b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 (B_2 + B_1)}{([3]_{p,q} - 1) b B_1^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{([2]_{p,q} - 1) b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 B_2}{([3]_{p,q} - 1) b B_1^2}$$

olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2 b}{[3]_{p,q} - 1} + \frac{B_1^2 b^2}{[2]_{p,q} - 1} \left( \frac{1}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{\mu}{[2]_{p,q} - 1} \right); & \mu \leq \sigma_1 \\ \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} - 1}; & \sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_2 \\ -\frac{B_2 b}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{B_1^2 b^2}{[2]_{p,q} - 1} \left( \frac{1}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{\mu}{[2]_{p,q} - 1} \right); & \mu \geq \sigma_2 \end{cases}$$

olur. Ayrıca  $\sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_3$  ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q} - 1)^2}{([3]_{p,q} - 1)B_1^2 b} \left[ B_1 - B_2 - \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} - 1}$$

ve  $\sigma_3 \leq \mu \leq \sigma_2$  ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q} - 1)^2}{([3]_{p,q} - 1)B_1^2 b} \left[ B_1 + B_2 + \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} - 1}$$

olur.

**İspat:** Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{z D_{p,q} f(z)}{f(z)} - 1 \right] < \phi(z)$$

yazılır. Subordinasyon tanımından

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{z D_{p,q} f(z)}{f(z)} - 1 \right] = \phi(w(z))$$

olacak şekilde  $\mathbb{U}$ 'da analitik bir  $w$ , Schwarz fonksiyonu vardır.

Lemma 2'de  $p(z)$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$ 'da  $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ ,  $\text{Rep}(z) > 0$  olarak verilmiş olup  $|w(z)| < 1$  olduğundan

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan

$$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}$$

olur.

Teorem 7'nin ispatından

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{B_1 b}{2([3]_{p,q} - 1)} \{c_2 - v c_1^2\}$$

ve

$$v = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right]$$

elde etmiştik. Lemma 3'ten

$$|c_2 - v c_1^2| \leq \begin{cases} -4v + 2, & v \leq 0 \\ 2, & 0 \leq v \leq 1 \\ 4v - 2, & v \geq 1 \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz.

Önce  $v \leq 0$  olması durumunu göz önüne alalım. Hipotezde

$$\sigma_1 = \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 - B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}$$

olarak verilmiştir. Buna göre

$$\begin{aligned} v \leq 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] \leq 0 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \leq 0 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \leq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} - 1 \\ &\Rightarrow \mu \leq \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 - B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} = \sigma_1 \end{aligned}$$

bulunur. Yani  $v \leq 0$  olması

$$\mu \leq \sigma_1$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla  $v \leq 0$  için Lemma 3'e göre  $|c_2 - v c_1^2| \leq -4v + 2$  olacağından

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2^2| &= \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - v c_1^2| \\ &\leq \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} \{-4v + 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|B_1 b|}{([3]_{p,q} - 1)} \{-2v + 1\} \\
&= \frac{|B_1 b|}{([3]_{p,q} - 1)} \left\{ \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right\} \\
&= \frac{B_2 b}{[3]_{p,q} - 1} + \frac{B_1^2 b^2}{([2]_{p,q} - 1)([3]_{p,q} - 1)} - \frac{B_1^2 b^2}{([2]_{p,q} - 1)^2} \mu \\
&= \frac{B_2 b}{[3]_{p,q} - 1} + \frac{B_1^2 b^2}{([2]_{p,q} - 1)} \left( \frac{1}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{\mu}{[2]_{p,q} - 1} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi  $0 \leq v \leq 1$  ise bu durumunu göz önüne alalım. Hipotezde

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 - B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \\
\sigma_2 &= \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 + B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}
\end{aligned}$$

olarak verilmiştir. Buna göre

$$\begin{aligned}
0 \leq v \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] \leq 1 \\
&\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \leq 2 \\
&\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \leq 2 \\
&\Rightarrow \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} - 1 \leq \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \leq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + 1
\end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 - B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \leq \mu \leq \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 + B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}$$

veya

$$\sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_2$$

olduğu görülür. Lemma 3'e göre  $|c_2 - v c_1^2| \leq 2$  olacağından

$$\begin{aligned}
|a_3 - \mu a_2^2| &= \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - v c_1^2| \\
&\leq \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} \{2\} \\
&= \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q} - 1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de  $v \geq 1$  durumunu göz önüne alalım. Hipotezde

$$\sigma_2 = \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 + B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}$$

olarak verilmiştir. Buna göre

$$\begin{aligned}
v \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] \geq 1 \\
&\Rightarrow 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \geq 2 \\
&\Rightarrow 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \geq 2 \\
&\Rightarrow \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \geq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + 1 \\
&\Rightarrow \mu \geq \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 + B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani  $v \geq 1$  olması

$$\mu \geq \sigma_2$$

olmasını gerektirmektedir. Dolayısıyla  $v \geq 1$  için Lemma 3'e göre  $|c_2 - v c_1^2| \leq 4v - 2$  olacağından

$$\begin{aligned}
|a_3 - \mu a_2^2| &= \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - v c_1^2| \\
&\leq \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} \{4v - 2\} \\
&= \frac{|B_1 b|}{([3]_{p,q} - 1)} \{2v - 1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|B_1 b|}{([3]_{p,q} - 1)} \left\{ -\frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right\} \\
&= -\frac{B_2 b}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{B_1^2 b^2}{([2]_{p,q} - 1)([3]_{p,q} - 1)} + \frac{B_1^2 b^2}{([2]_{p,q} - 1)^2} \mu \\
&= -\frac{B_2 b}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{B_1^2 b^2}{([2]_{p,q} - 1)} \left( \frac{1}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{\mu}{[2]_{p,q} - 1} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca  $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$  durumunu göz önüne aldığımızda hipotezde

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 - B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \\
\sigma_3 &= \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 B_2}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}
\end{aligned}$$

verilmiş olup

$$\begin{aligned}
0 \leq v \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] \leq \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \leq 1 \\
&\Rightarrow \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} - 1 \leq \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \leq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \\
&\Rightarrow \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 - B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \leq \mu \leq \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 B_2}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}
\end{aligned}$$

olur. Yani  $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$  olması

$$\sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_3$$

olmasını gerektirir. Lemma 3'teki

$$|c_2 - v c_1^2| + v |c_1|^2 \leq 2$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Teorem 7'de bulduğumuz

$$v = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right]$$



$$a_2 = \frac{B_1 c_1 b}{2([2]_{p,q} - 1)} \Rightarrow c_1 = \frac{2([2]_{p,q} - 1)a_2}{B_1 b}$$

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - v c_1^2| \Rightarrow |c_2 - v c_1^2| = \frac{2([3]_{p,q} - 1)|a_3 - \mu a_2^2|}{|B_1 b|}$$

ifadeleri  $|c_2 - v c_1^2| + v |c_1|^2 \leq 2$  eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{2([3]_{p,q} - 1)|a_3 - \mu a_2^2|}{|B_1 b|} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] \frac{4([2]_{p,q} - 1)^2 |a_2|^2}{B_1^2 b^2} \leq 2$$

veya

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q} - 1)^2}{([3]_{p,q} - 1) B_1^2 b} \left[ B_1 - B_2 - \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} - 1}$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$  durumunu göz önüne aldığımızda hipotezde

$$\sigma_2 = \frac{([2]_{p,q} - 1) b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 (B_2 + B_1)}{([3]_{p,q} - 1) b B_1^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{([2]_{p,q} - 1) b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 B_2}{([3]_{p,q} - 1) b B_1^2}$$

verilmiş olup

$$\frac{1}{2} \leq v \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \leq \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \leq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{([2]_{p,q} - 1) b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 B_2}{([3]_{p,q} - 1) b B_1^2} \leq \mu \leq \frac{([2]_{p,q} - 1) b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 (B_2 + B_1)}{([3]_{p,q} - 1) b B_1^2}$$

olur. Yani  $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$  olması

$$\sigma_3 \leq \mu \leq \sigma_2$$

olmasını gerektirir. Şimdi Lemma 3'teki

$$|c_2 - v c_1^2| + (1 - v) |c_1|^2 \leq 2$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Teorem 7'deki

$$v = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right]$$

$$a_2 = \frac{B_1 c_1 b}{2([2]_{p,q} - 1)} \Rightarrow c_1 = \frac{2([2]_{p,q} - 1)a_2}{B_1 b}$$

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|B_1 b|}{2([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - v c_1^2| \Rightarrow |c_2 - v c_1^2| = \frac{2([3]_{p,q} - 1)|a_3 - \mu a_2^2|}{|B_1 b|}$$

ifadeleri  $|c_2 - v c_1^2| + (1 - v)|c_1|^2 \leq 2$  eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{2([3]_{p,q} - 1)|a_3 - \mu a_2^2|}{|B_1 b|} + \left( 1 - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] \right) \frac{4([2]_{p,q} - 1)^2 |a_2|^2}{B_1^2 b^2} \leq 2$$

veya

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q} - 1)^2}{([3]_{p,q} - 1)B_1^2 b} \left[ B_1 + B_2 + \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} - 1}$$

elde edilir. Bu teoremdaki istenilen sonuçtur.

**Teorem 10. :**  $B_1 > 0$ ,  $B_2 \geq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  ve

$$\chi_1 = \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 - B_1)]}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) b B_1^2}$$

$$\chi_2 = \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 + B_1)]}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) b B_1^2}$$

$$\chi_3 = \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [b B_1^2 + ([2]_{p,q} - 1) B_2]}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) b B_1^2}$$

olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)} + \frac{B_1^2 b^2}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) ([2]_{p,q} - 1)} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right); & \mu \leq \chi_1 \\ \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}; & \chi_1 \leq \mu \leq \chi_2 \\ -\frac{B_2 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)} - \frac{B_1^2 b^2}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) ([2]_{p,q} - 1)} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right); & \mu \geq \chi_2 \end{cases}$$

olur. Ayrıca  $\chi_1 \leq \mu \leq \chi_3$  ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)^2}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) B_1^2 b} \left[ B_1 - B_2 - \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] |a_2|^2$$

$$\leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}$$

ve  $\chi_3 \leq \mu \leq \chi_2$  ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)^2}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) B_1^2 b} \left[ B_1 + B_2 + \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] |a_2|^2$$

$$\leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}$$

olur.

**İspat:** Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{D_{p,q} (z D_{p,q} f(z))}{D_{p,q} (f(z))} - 1 \right] < \phi(z)$$

yazılır. Subordinasyon tanımından

$$1 + \frac{1}{b} \left[ \frac{D_{p,q} (z D_{p,q} f(z))}{D_{p,q} (f(z))} - 1 \right] = \phi(w(z))$$

olacak şekilde  $\mathbb{U}$ 'da analitik bir  $w$ , Schwarz fonksiyonu vardır.

Lemma 2'de  $p(z)$  fonksiyonu  $\mathbb{U}$ 'da  $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ ,  $\text{Rep}(z) > 0$  olarak verilmiş olup  $|w(z)| < 1$  olduğundan

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan

$$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}$$

olur.

Teorem 8'in ispatından

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)} \{c_2 - \nu c_1^2\}$$

ve

$$v = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right]$$

elde etmiştik. Lemma 3'ten

$$|c_2 - v c_1^2| = \begin{cases} -4v + 2, & v \leq 0 \\ 2, & 0 \leq v \leq 1 \\ 4v - 2, & v \geq 1 \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz.

İlk olarak  $v \leq 0$  olması durumunu göz önüne alalım. Hipotezde

$$\chi_1 = \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 - B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}$$

olarak verilmiştir. Buna göre

$$\begin{aligned} v \leq 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] \leq 0 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \leq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} - 1 \\ &\Rightarrow \mu \leq \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 - B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} = \chi_1 \end{aligned}$$

bulunur. Yani  $v \leq 0$  olması

$$\mu \leq \chi_1$$

olmasını gerektirmektedir. Dolayısıyla  $v \leq 0$  için Lemma 3'e göre  $|c_2 - v c_1^2| \leq -4v + 2$  olacağından

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2^2| &= \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - v c_1^2| \\ &\leq \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} (-4v + 2) \\ &= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} (-2v + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \left( \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)B_1 b}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \\
&= \frac{B_2 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} + \frac{B_1^2 b^2}{[3]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)([3]_{p,q} - 1)} - \frac{B_1^2 b^2 [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{[3]_{p,q}([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \\
&= \frac{B_2 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} + \frac{B_1^2 b^2}{[3]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)([3]_{p,q} - 1)} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{[3]_{p,q}([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi  $0 \leq v \leq 1$  olması durumunu göz önüne alalım. Hipotezde

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 - B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \\
\chi_2 &= \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 + B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}
\end{aligned}$$

olarak verilmiştir. Buradan

$$\begin{aligned}
0 \leq v \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] \leq 1 \\
&\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \leq 2 \\
&\Rightarrow \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} - 1 \leq \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \leq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + 1 \\
&\Rightarrow \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 - B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \leq \mu \leq \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 + B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\chi_1 \leq \mu \leq \chi_2$$

olması demektir. Dolayısıyla  $0 \leq v \leq 1$  için Lemma 3'e göre  $|c_2 - vc_1^2| \leq 2$  olacağından

$$\begin{aligned}
|a_3 - \mu a_2^2| &= \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - vc_1^2| \\
&\leq \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} 2
\end{aligned}$$

$$= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}$$

elde edilir.

Şimdi de  $v \geq 1$  durumunu göz önüne alalım. Hipotezde

$$\chi_2 = \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 + B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}$$

olarak verilmiştir. Buna göre

$$\begin{aligned} v \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] \geq 1 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \geq 2 \\ &\Rightarrow \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \geq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + 1 \\ &\Rightarrow \mu \geq \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 + B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \end{aligned}$$

yani

$$\mu \geq \chi_2$$

olduğu görülür. Dolayısıyla Lemma 3'e göre  $|c_2 - vc_1^2| \leq 4v - 2$  olacağından

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2^2| &= \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - vc_1^2| \\ &\leq \frac{B_1 b}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} (4v - 2) \\ &= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} (2v - 1) \\ &= \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \left( -\frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left[ 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)B_1 b}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{B_2 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} - \frac{B_1^2 b^2}{[3]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)([3]_{p,q} - 1)} \\
&\quad + \frac{B_1^2 b^2 [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{[3]_{p,q}([2]_{p,q})^2 ([3]_{p,q} - 1)([2]_{p,q} - 1)^2} \mu \\
&= -\frac{B_2 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} - \frac{B_1^2 b^2}{[3]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)([3]_{p,q} - 1)} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca  $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$  durumunu göz önüne aldığımızda hipotezde

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 - B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \\
\chi_3 &= \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)B_2]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}
\end{aligned}$$

verilmiş olup

$$\begin{aligned}
0 \leq v \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] \leq \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)^2} \mu \leq 1 \\
&\Rightarrow \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} - 1 \leq \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)^2} \mu \leq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \\
&\Rightarrow \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 - B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \leq \mu \\
&\leq \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)B_2]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}
\end{aligned}$$

yani

$$\chi_1 \leq \mu \leq \chi_3$$

olduğu görülür. Lemma 3'teki

$$|c_2 - v c_1^2| + v |c_1|^2 \leq 2$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Teorem 8'deki

$$v = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right]$$

$$a_2 = \frac{B_1 c_1 b}{2[2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)} \Rightarrow c_1 = \frac{2[2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)a_2}{B_1 b}$$

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|B_1 b|}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - v c_1^2| \Rightarrow |c_2 - v c_1^2| = \frac{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)|a_3 - \mu a_2^2|}{|B_1 b|}$$

ifadeleri  $|c_2 - v c_1^2| + v|c_1|^2 \leq 2$  eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)|a_3 - \mu a_2^2|}{|B_1 b|} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] \frac{4([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)^2 |a_2|^2}{B_1^2 b^2}$$

veya

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)^2}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)B_1^2 b} \left[ B_1 - B_2 - \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$  durumunu göz önüne alalım. Hipotezde

$$\chi_2 = \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 + B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}$$

$$\chi_3 = \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)B_2]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}$$

verilmiş olup

$$\frac{1}{2} \leq v \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \leq \frac{B_1 b [3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \leq \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)B_2]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \leq \mu$$

$$\leq \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)[bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 + B_1)]}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)bB_1^2}$$



yani

$$\chi_3 \leq \mu \leq \chi_2$$

olduğu görülür. Lemma 3'teki

$$|c_2 - \nu c_1^2| + (1 - \nu)|c_1|^2 \leq 2$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Teorem 8'deki

$$\nu = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right]$$

$$a_2 = \frac{B_1 c_1 b}{2[2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)} \Rightarrow c_1 = \frac{2[2]_{p,q}([2]_{p,q} - 1)a_2}{B_1 b}$$

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{|B_1 b|}{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} |c_2 - \nu c_1^2| \Rightarrow |c_2 - \nu c_1^2| = \frac{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)|a_3 - \mu a_2^2|}{|B_1 b|}$$

ifadeleri  $|c_2 - \nu c_1^2| + (1 - \nu)|c_1|^2 \leq 2$  eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{2[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)|a_3 - \mu a_2^2|}{|B_1 b|} + \left( 1 - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] \right) \frac{4([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)^2 |a_2|^2}{B_1^2 b^2} \leq 2$$

veya

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)^2}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)B_1^2 b} \left[ B_1 + B_2 + \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}$$

elde edilir.

Teorem 9'da  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  alınarak  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3. :**  $B_1 > 0$ ,  $B_2 \geq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  ve

$$\sigma_4 = \frac{bB_1^2 + (B_2 - B_1)}{2bB_1^2}$$

$$\sigma_5 = \frac{bB_1^2 + (B_2 + B_1)}{2bB_1^2}$$

$$\sigma_6 = \frac{bB_1^2 + B_2}{2bB_1^2}$$

olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2 b}{2} + \frac{B_1^2 b^2}{2} (1 - 2\mu); & \mu \leq \sigma_4 \\ \frac{B_1 b}{2}; & \sigma_4 \leq \mu \leq \sigma_5 \\ -\frac{B_2 b}{2} - \frac{B_1^2 b^2}{2} (1 - 2\mu); & \mu \geq \sigma_5 \end{cases}$$

olur. Dahası eğer  $\sigma_4 \leq \mu \leq \sigma_6$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{1}{2bB_1^2} [B_1 - B_2 - B_1^2 b(1 - 2\mu)] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{2}$$

olur. Eğer  $\sigma_6 \leq \mu \leq \sigma_5$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{1}{2bB_1^2} [B_1 + B_2 + B_1^2 b(1 - 2\mu)] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{2}$$

olur. Bu sonuç kesindir.

Teorem 10'da  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  alınarak  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4. :**  $B_1 > 0, B_2 \geq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  ve

$$\chi_4 = \frac{2[bB_1^2 + B_2 - B_1]}{bB_1^2},$$

$$\chi_5 = \frac{2[bB_1^2 + B_2 + B_1]}{bB_1^2},$$

$$\chi_6 = \frac{2[bB_1^2 + B_2]}{bB_1^2}.$$

olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2 b}{6} + \frac{B_1^2 b^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2}\mu\right); & \mu \leq \chi_4 \\ \frac{B_1 b}{6}; & \chi_4 \leq \mu \leq \chi_5 \\ -\frac{B_2 b}{6} - \frac{B_1^2 b^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2}\mu\right); & \mu \geq \chi_5 \end{cases}$$

olur. Dahası eğer  $\chi_4 \leq \mu \leq \chi_6$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{2}{3B_1^2 b} \left[ B_1 - B_2 - B_1^2 b \left(1 - \frac{3}{2}\mu\right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{6}$$

olur. Eğer  $\chi_3 \leq \mu \leq \chi_2$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{2}{3B_1^2 b} \left[ B_1 + B_2 + B_1^2 b \left( 1 - \frac{3}{2} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{6}$$

olur. Bu sonuç kesindir.



## TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde Geometrik Fonksiyonlar Teorisinde önemli bir çalışma alanı olan Fekete-Szegö problemi, tanımlanan kompleks mertebeli  $(p, q)$ -yıldızıl fonksiyon sınıfı ve kompleks mertebeli  $(p, q)$ -konveks fonksiyon sınıfı üzerinde incelendi. Çalışmamız boyunca elde etmiş olduğumuz sonuçlar aşağıda verilmiştir:

**Teorem 7. :**  $B_1 \neq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q} - 1} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right| \right\}$$

olur. Bu sonuç kesindir (Yatkın ve Kadıoğlu, 2020).

**Teorem 8. :**  $B_1 \neq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{|B_1 b|}{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q}([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right| \right\}$$

olur. Bu sonuç kesindir (Yatkın ve Kadıoğlu, 2020).

**Teorem 9. :**  $B_1 > 0, B_2 \geq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  ve

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 - B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \\ \sigma_2 &= \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2(B_2 + B_1)}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \\ \sigma_3 &= \frac{([2]_{p,q} - 1)bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)^2 B_2}{([3]_{p,q} - 1)bB_1^2} \end{aligned}$$

olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2 b}{[3]_{p,q} - 1} + \frac{B_1^2 b^2}{[2]_{p,q} - 1} \left( \frac{1}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{\mu}{[2]_{p,q} - 1} \right); & \mu \leq \sigma_1 \\ \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} - 1}; & \sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_2 \\ -\frac{B_2 b}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{B_1^2 b^2}{[2]_{p,q} - 1} \left( \frac{1}{[3]_{p,q} - 1} - \frac{\mu}{[2]_{p,q} - 1} \right); & \mu \geq \sigma_2 \end{cases}$$

olur. Ayrıca  $\sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_3$  ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q} - 1)^2}{([3]_{p,q} - 1)B_1^2 b} \left[ B_1 - B_2 - \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} - 1}$$

ve  $\sigma_3 \leq \mu \leq \sigma_2$  ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q} - 1)^2}{([3]_{p,q} - 1)B_1^2 b} \left[ B_1 + B_2 + \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} - 1}{[2]_{p,q} - 1} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} - 1}$$

olur.

**Teorem 10. :**  $B_1 > 0, B_2 \geq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  ve

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 - B_1)]}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) bB_1^2} \\ \chi_2 &= \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)(B_2 + B_1)]}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) bB_1^2} \\ \chi_3 &= \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1) [bB_1^2 + ([2]_{p,q} - 1)B_2]}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) bB_1^2} \end{aligned}$$

olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)} + \frac{B_1^2 b^2}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) ([2]_{p,q} - 1)} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right); & \mu \leq \chi_1 \\ \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}; & \chi_1 \leq \mu \leq \chi_2 \\ -\frac{B_2 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)} - \frac{B_1^2 b^2}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) ([2]_{p,q} - 1)} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right); & \mu \geq \chi_2 \end{cases}$$

olur. Ayrıca  $\chi_1 \leq \mu \leq \chi_3$  ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)^2}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) B_1^2 b} \left[ B_1 - B_2 - \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}$$

ve  $\chi_3 \leq \mu \leq \chi_2$  ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)^2}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1) B_1^2 b} \left[ B_1 + B_2 + \frac{B_1^2 b}{[2]_{p,q} - 1} \left( 1 - \frac{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}{([2]_{p,q})^2 ([2]_{p,q} - 1)} \mu \right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{[3]_{p,q} ([3]_{p,q} - 1)}$$

olur.

**Sonuç 1. :**  $B_1 \neq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{|B_1 b|}{2} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} + (1 - 2\mu) B_1 b \right| \right\}$$

olur. Bu sonuç kesindir.

**Sonuç 2. :**  $B_1 \neq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  olsun. Eğer  $f \in \mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{|B_1 b|}{6} \max \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} + (1 - 3\mu) B_1 b \right| \right\}$$

olur. Bu sonuç kesindir.

**Sonuç 3. :**  $B_1 > 0, B_2 \geq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  ve

$$\sigma_4 = \frac{b B_1^2 + (B_2 - B_1)}{2b B_1^2}$$

$$\sigma_5 = \frac{b B_1^2 + (B_2 + B_1)}{2b B_1^2}$$

$$\sigma_6 = \frac{b B_1^2 + B_2}{2b B_1^2}$$

olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{S}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2 b}{2} + \frac{B_1^2 b^2}{2} (1 - 2\mu); & \mu \leq \sigma_4 \\ \frac{B_1 b}{2}; & \sigma_4 \leq \mu \leq \sigma_5 \\ -\frac{B_2 b}{2} - \frac{B_1^2 b^2}{2} (1 - 2\mu); & \mu \geq \sigma_5 \end{cases}$$

olur. Dahası eğer  $\sigma_4 \leq \mu \leq \sigma_6$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{1}{2b B_1^2} [B_1 - B_2 - B_1^2 b (1 - 2\mu)] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{2}$$

olur. Eğer  $\sigma_6 \leq \mu \leq \sigma_5$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{1}{2bB_1^2} [B_1 + B_2 + B_1^2 b(1 - 2\mu)] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{2}$$

olur. Bu sonuç kesindir.

**Sonuç 4. :**  $B_1 > 0, B_2 \geq 0$  olmak üzere  $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$  ve

$$\chi_4 = \frac{2[bB_1^2 + B_2 - B_1]}{bB_1^2},$$

$$\chi_5 = \frac{2[bB_1^2 + B_2 + B_1]}{bB_1^2},$$

$$\chi_6 = \frac{2[bB_1^2 + B_2]}{bB_1^2}.$$

olsun. Eğer  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$  fonksiyonu,  $b > 0$  olmak üzere,  $\mathcal{C}_{p,q}^b(\phi)$  sınıfına ait ise

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2 b}{6} + \frac{B_1^2 b^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2}\mu\right); & \mu \leq \chi_4 \\ \frac{B_1 b}{6}; & \chi_4 \leq \mu \leq \chi_5 \\ -\frac{B_2 b}{6} - \frac{B_1^2 b^2}{6} \left(1 - \frac{3}{2}\mu\right); & \mu \geq \chi_5 \end{cases}$$

olur. Dahası eğer  $\chi_4 \leq \mu \leq \chi_6$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{2}{3B_1^2 b} \left[ B_1 - B_2 - B_1^2 b \left(1 - \frac{3}{2}\mu\right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{6}$$

olur. Eğer  $\chi_3 \leq \mu \leq \chi_2$  ise bu durumda

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \frac{2}{3B_1^2 b} \left[ B_1 + B_2 + B_1^2 b \left(1 - \frac{3}{2}\mu\right) \right] |a_2|^2 \leq \frac{B_1 b}{6}$$

olur. Bu sonuç kesindir.

Elde ettiğimiz bu sonuçlar literatürdeki çalışmaların bir genelleştirilmesi olup bunların bir kısmı aşağıda verilmiştir.

- Teorem 7 de  $b = 1$  alınması durumunda Srivastava et al. (2019) tarafından verilen Theorem 2.1 elde edilmektedir.
- Teorem 7 de  $p = 1$  alınması durumunda Seoudy ve Aouf (2016) tarafından verilen Theorem 1 elde edilmektedir.
- Teorem 8 de  $b = 1$  alınması durumunda Srivastava et al. (2019) tarafından verilen Theorem 2.2 elde edilmektedir.

- Teorem 8 de  $p = 1$  alınması durumunda Seoudy ve Aouf (2016) tarafından verilen Theorem 1 elde edilmektedir.
- Teorem 9 da  $b = 1$  alınması durumunda Srivastava et al. (2019) tarafından verilen Theorem 3.1 elde edilmektedir.
- Teorem 9 da  $p = 1$  alınması durumunda Seoudy ve Aouf (2016) tarafından verilen Theorem 3 elde edilmektedir.
- Teorem 10 da  $b = 1$  alınması durumunda Srivastava et al. (2019) tarafından verilen Theorem 3.2 elde edilmektedir.
- Teorem 10 da  $p = 1$  alınması durumunda Seoudy ve Aouf (2016) tarafından verilen Theorem 4 elde edilmektedir.
- Tanım 41 de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  olması durumunda Ravichandran et al. (2005) tarafından verilen  $S_b^*(\phi)$  sınıfı elde edilmektedir.
- Tanım 42 de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  olması durumunda Ravichandran et al. (2005) tarafından verilen  $C_b(\phi)$  sınıfı elde edilmektedir.
- Tanım 41 de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  olması durumunda Ma and Minda (1992) tarafından verilen  $S_b^*(\varphi)$  sınıfı elde edilmektedir.
- Tanım 42 de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  olması durumunda Ma and Minda (1992) tarafından verilen  $C_b(\varphi)$  sınıfı elde edilmektedir.
- Tanım 41 de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  olması durumunda Frasin (2006) tarafından verilen  $S_\alpha^*(b)$  sınıfı elde edilmektedir.
- Tanım 42 de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  olması durumunda Frasin (2006) tarafından verilen  $C_\alpha(b)$  sınıfı elde edilmektedir.
- Tanım 41 de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  olması durumunda Nasr and Aouf (1985) ve Wiatrowski (1970) tarafından verilen  $S_b^*(\phi)$  sınıfı elde edilmektedir.
- Tanım 42 de  $p = 1$  ve  $q \rightarrow 1^-$  olması durumunda Nasr and Aouf (1985) ve Wiatrowski (1970) tarafından verilen  $C_b(\phi)$  sınıfı elde edilmektedir.



## KAYNAKLAR

- Aral A., Gupta V., Agarwal R. P., 2013. Applications of  $q$  Calculus in Operator Theory, Springer, Cham.
- Bieberbach, L., 1915-1916. Über einige extremal probleme im Gebiete der konformen. Abbildung Math. Ann., 77, 153-172.
- Bieberbach, L., 1916. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte., Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S-P Preuss. Akad. Wiss. 940-955.
- Burban I. M., Klimyk A. U., 1994.  $P, Q$ -Differantiation,  $P, Q$ -Integration and  $P, Q$ -Hypergeometric Functions Related to Quantum Groups, Integral Transforms and Special Functions, 2(1), 15-36.
- Chakrabarti R., Jagannathan R., 1991. A  $(p, q)$ -Oscillator Realization of Two-Parameter Quantum, Journal of Physics A: Mathematical and General, 24(13), L711.
- Çağlar M., 2013. Analitik Fonksiyonlar İçin Yeni Ünivalentlik Kriterleri ve Quasikonform Genişlemeler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Çetinkaya A., Kahramaner Y., Polatoğlu Y.; 2018. Fekete-Szegö Inequality For  $q$ -Starlike and  $q$ -Convex Functions. Acta Universitatis Apulensis, 53, 55-64.
- Darus M., Thomas D. K.; On The Fekete-Szegö Problem For Close-To-Convex Functions. Mathematics Japon, 47, 125-132.
- Demirbaş A., 2015. Kompleks Mertebeden Yıldızlı ve Konveks Fonksiyonlar. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Rize.
- Duren P.L., 1983. Duren univalent functions. Springer-Verlag, New York.
- Düşün S. A., 2017. Fekete-Szegö Problemi Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.
- Ernst T., 2001. The History of  $q$ -Calculus And A New Method. Uppsala University, 231, Sweden.
- Frasin B. A., 2006. Family of Analytic Functionc of Complex Order. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae, 22, 179-191.
- G. Brodimas, A. Jannussis, R. Mignani, 1991. Two-parameter quantum groups. Universita di Roma Preprint Nr. 820.
- Goodman A. W., 1983. Univalent Functions. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House. Washington, New Jersey.
- Graham I. and Kohr G., 2003. Geometric Function Theory In One and Higher Dimensions.
- Gupta V., Rassias T. M., Agrawal P. N., Acu A. M., 2018. Recent Advances in Constructive Approximation Theory. Springer Optimization and Its Applications 138. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature 2018.
- Jagannathan R., Rao K. S., 2006. Two-parameter quantum algebras, twin-basic numbers, and associated generalized hypergeometric series. To appear in the Proceedings of the International Conference on Number Theory and Mathematical Physics, Srinivasa Ramanujan Centre, Kumbakonam, India.
- Jenkins, J.A., 1960. On certain coefficients of univalent functions. Analytic functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
- Kac V., Cheung P., 2002. Quantum Calculus, Springer, New York.
- Keogh, F.R. and Merkes E. P., 1967. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 20, 8-12.
- Löwner, K., 1923. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Ann. 89, 103-121.
- M. Arik, E. Demircan, T. Turgut, L. Ekinici, M. Mungan, 1991. Fibonacci oscillators. Z. Phys. C: Particles and Fields, 55, 89-95.
- M. Wachs, D. White, 1991.  $p, q$ -Stirling numbers and set partition statistics. J. Conbin. Theory, A 56, 27-46.

- Ma W. and Minda C. D., 1992. A unified treatment of some special classes of functions. Proceedings of the International Conference on Complex Analysis at the Nankai Institute of Mathematics, 157-169.
- Milovanović G. V., Rassias M. Th.(eds.) 2014. Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions (Springer, New York)
- Nasr M. A. and Aouf M. K., 1982. On convex functions of complex order. Mansoura Bull. Sci., 8, 565-582.
- Nasr M. A. and Aouf M. K., 1985. Starlike function of complex order. J. Natur. Sci. Math., 25, 1-12.
- Orhan H., 2002. Analitik Fonksiyonların Belli Sınıfları İçin Katsayı Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Pfluger, A., 1984. The Fekete-Szegö inequality by variational method. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI 10.
- Pfluger, A., 1986. The Fekete-Szegö inequality for complex parameters. Complex Variables, 7, 149-160.
- Ravichandran V., Polatoglu Y., Bolcal M., Sen A., 2005. Certain Subclasses Of Starlike And Convex Functions Of Complex Order. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 34, 9-15.
- Sadjang P. N., 2013. On the fundamental theorem of  $(p, q)$ -calculus and some  $(p, q)$ -Taylor formulas. arXiv preprint arXiv: 1309.3934.
- Seoudy T.M., Aouf M.K.; 2016. Coefficient Estimates of New Classes of  $q$ -Starlike and  $q$ -Convex Functions of Complex Order. Journal of Mathematical Inequalities. Volume 10, Number 1, 135-145.
- Srivastava H.M., Raza N., Abujarad Eman S.A., Srivastava G., Abujarad Mohammed H.; 2019. Fekete-Szegö Inequality For Classes  $(p, q)$ -Starlike and  $(p, q)$ -Convex Functions. The Royal Academy of Sciences, 113:3563-3584.
- Trimble S. Y., 1975. A Coefficient Inequality for Convex Univalent Functions. Proceedings of The American Mathematical Society, 48, Number 1.
- Yatkın F., Kadioğlu E., 2020. Fekete-Szegö Inequality for  $(p, q)$ -Starlike and  $(p, q)$ -Convex Functions of Complex Order. Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(2), 1247-1253.
- Uçar H. E. Ö., 2016. Coefficient Inequality For  $q$ -Starlike Functions. Applied Mathematics and Computation, 276, 122-126.
- Wiatrowski P., 1970. On the coefficients of some family of holomorphic functions. Zeszyty Nauk. Uniw. Lodz, Nauk. Mat.-Przyr. (39), 75-85.

## ÖZGEÇMİŞ

| Kişisel Bilgiler                                                                                                                                                          |                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| <b>Adı Soyadı :</b>                                                                                                                                                       | Feyza YATKIN                                                                |
| <b>Doğum Tarihi :</b>                                                                                                                                                     | 15.01.1988                                                                  |
| <b>Doğum Yeri :</b>                                                                                                                                                       | İlca/Erzurum                                                                |
| <b>Uyruğu :</b>                                                                                                                                                           | T.C.                                                                        |
| <b>Adres :</b>                                                                                                                                                            | Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü                         |
| <b>E-mail :</b>                                                                                                                                                           | feyzayatkin@gmail.com                                                       |
| Eğitim                                                                                                                                                                    |                                                                             |
| <b>Lise :</b>                                                                                                                                                             | Nenehatun Kız Lisesi                                                        |
| <b>Lisans :</b>                                                                                                                                                           | Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi                                          |
| <b>Yüksek Lisans :</b>                                                                                                                                                    | Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2013) |
| Yabancı Dil Bilgisi                                                                                                                                                       |                                                                             |
| <b>İngilizce :</b>                                                                                                                                                        | İyi                                                                         |
| Tezden Üretilmiş Yayınlar                                                                                                                                                 |                                                                             |
| Fekete-Szegö Inequality for $(p,q)$ -Starlike and $(p,q)$ -Convex Functions of Complex Order. Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(2), 1247-1253, 2020. |                                                                             |