



**MODİFİYE EDİLMİŞ h -KONVEKS
FONKSİYONLAR ÜZERİNE YENİ
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

Büşra YERGÖZ

Danışman: Doç. Dr. Çetin YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2023

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**MODİFİYE EDİLMİŞ h -KONVEKS FONKSİYONLAR ÜZERİNE
YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

(New Integral Inequalities on Modified h -Convex Functions)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Büşra YERGÖZ

Danışman: Doç. Dr. Çetin YILDIZ

Erzurum
Ocak, 2023

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Büşra YERGÖZ tarafından hazırlanan Modifiye Edilmiş h -Konveks Fonksiyonlar Üzerine Yeni İntegral Eşitsizlikleri başlıklı çalışması 06/01/2023 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. İsa YILDIRIM
Atatürk Üniversitesi

Aslı Islak İmzalıdır

Danışman: Doç. Dr. Çetin YILDIZ
Atatürk Üniversitesi

Aslı Islak İmzalıdır

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR
Erzurum Teknik Üniversitesi

Aslı Islak İmzalıdır

Enstitü Yönetim Kurulunun
....../....../.... tarih ve sayılı
kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN
Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır

Bu çalışma Atatürk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince desteklenmiştir.

Proje No: FYL-2022-10539

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Doç. Dr. Çetin Yıldız danışmanlığında sunulan “Modifiye Edilmiş h-Konveks Fonksiyonlar Üzerine Yeni İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	26	30
Kuramsal Temeller	23	30
Materyal ve Yöntem	20	35
Bulgular	20	20
Tartışma	1	20
Tezin Geneli	18	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Büşra YERGÖZ	Doç. Dr. Çetin YILDIZ
27.12.2022	27.12.2022
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/.../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/.../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans programında ve tez sürecinde iyi bir yol gösterici olan bilgi ve deneyimleriyle danışmanlığımı yürüten; her aşamada yardım ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Çetin YILDIZ'a teşekkür ederim.

Lisansüstü Tez Projeleri kapsamında FYL-2022-10539 numaralı proje ile tez çalışmamı destekleyerek finanse eden Atatürk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimine teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmam boyunca bana destek olan kıymetli eşime, her daim eğitim ve öğretim hayatımda başarılı olacağıma inanan annem, babam ve ablalarımın sevgi ve şükranlarını sunarım.

Büşra YERGÖZ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODİFİYE EDİLMİŞ h -KONVEKS FONKSİYONLAR ÜZERİNE YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Büşra YERGÖZ

Danışman: Doç. Dr. Çetin YILDIZ

Amaç: Bu çalışmada modifiye edilmiş h -konvekslik tanımı ve eşitsizlik teorisinin özellikleri kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilmesi amaçlanmıştır.

Yöntem: Teorem ve sonuçları elde etmek amacıyla integraller için üçgen eşitsizliği, Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan İntegral Eşitsizlikleri ve Geliştirilmiş Power-Mean İntegral Eşitsizliği kullanıldı.

Bulgular: Modifiye edilmiş h -konveks fonksiyonla ilgili yeni teoremler yazılmıştır. Ayrıca üç farklı lemmaya uygulanan eşitsizlikler ve modifiye edilmiş h -konveks fonksiyon yardımıyla yeni teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç: Bu tezde elde edilen tüm teoremlere modifiye edilmiş h -konveks fonksiyonla ilgili çeşitli sonuçlar yazılmıştır.

Anahtar Kelimeler: modifiye edilmiş h -konveks fonksiyon, Hölder Eşitsizliği, Power-Mean Eşitsizliği, Hölder-İşcan Eşitsizliği, Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizliği.

Ocak 2023, 86 sayfa

ABSTRACT

MS THESIS

NEW INTEGRAL INEQUALITIES ON MODIFIED h -CONVEX FUNCTIONS

Büşra YERGÖZ

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Purpose: In this study, it is aimed to obtain new inequalities by using the modified h -convex function whole and the properties of the inequality theory.

Method: Triangle inequality, Hölder, Power-Mean, Hölder-Iskan Inequalities and Improved Power-Mean Inequality are used for integrals in order to obtain theorems and results.

Findings: New theorems have been written about modified h -convex function. In addition, new theorems and results are obtained by using inequalities and modified h -convex function applied to three different lemmas.

Results: Diverse results related to modified h -convex function are written in all theorems obtained in this thesis.

Keywords: modified h -convex function, Hölder Inequality, Power-Mean Inequality, Hölder-Iskan Inequality, Improved Power-Mean Inequality.

January 2023, 86 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
KISALTMALAR ve SİMGELER DİZİNİ	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	3
Genel Terimler	3
Pozitif Reel Sayılar İçin Bazı Özel Ortalamalar.....	8
MATERYAL VE YÖNTEM	10
Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler.....	10
Modifiye Edilmiş h-Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilmiş Teorem ve Sonuçlar	12
ARAŞTIRMA BULGULARI	16
SONUÇ VE ÖNERİLER	73
Öneriler	73
KAYNAKLAR.....	74
ÖZGEÇMİŞ.....	76

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Konveks kümeler.....	3
Şekil 2. Konveks olmayan kümeler.....	3
Şekil 3. Aralıklar üzerinde (yani $\mathbb{R}^+$ da) konveks fonksiyon ($\mathcal{B}(x) = x $).....	4
Şekil 4. Konveks fonksiyonun incelenmesi.....	5



KISALTMALAR ve SİMGELER DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
I	$\mathbb{R}$ 'de bir aralık
I°	I aralığının içi
$\subset$	Alt küme
$\subseteq$	Alt küme veya eşit
β	Beta Fonksiyonu
$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\xi, \varpi)$	Aritmetik Ortalama
$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\xi, \varpi)$	Geometrik Ortalama
$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\xi, \varpi)$	Harmonik Ortalama
$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\xi, \varpi)$	Logaritmik Ortalama
$L[\xi, \varpi]$	$[\xi, \varpi]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{B}'$	$\mathcal{B}$ Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$\mathcal{B}''$	$\mathcal{B}$ Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum

GİRİŞ

Matematiksel ifadeler arasında $\neq$, $<$, $>$, $\leq$ ve $\geq$ sembolleri kullanılarak oluşturulan ilişkilere eşitsizlik denir. " $\neq$ " sembolü dışındaki semboller büyüklük küçüklük ilişkisi oluşturmak için kullanılır. Kısacası eşitsizlikler iki çokluğun birbirlerine göre kıyaslanmasını ifade eder.

Eşitsizlikler konusu matematikte önemli bir yer tutmaktadır. Eşitsizlik " $\neq$ " sembolünün ilk olarak kim tarafından bulunduğu bilinmemekle birlikte, 18. yüzyılda ilk olarak Leonhard Euler tarafından kullanıldığı düşünülüyor. Büyüktür ($>$) ve küçüktür ($<$) işaretleri ise İngiliz matematikçi Thomas Harriot'un "Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas" başlıklı kitabında ilk olarak 1631 yılında kullanılmıştır. 18. ve 19.'yy. da P.L. Chebyshev, K.F. Gauss ve A.L. Cauchy gibi ünlü matematikçilerin eşitsizlik konusunda çalışmaları var olsa da Littlewood, Hardy, ve Polya tarafından 1934'te yazılan "Inequalities" adlı kitap, bu alanda yazılan ilk yapıttır. Bu çalışmadan sonra E.F. Beckenbach ve R. Belmann da eşitsizliklerle ilgili bir eser ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmalar birçok matematikçinin dikkatini çekmiş ve sonraki süreçte eşitsizlikler açısından bir dönüm noktası olmuştur. Bunlardan bir kısmı "Analytic Inequalities" (Mitrinoviç D.S., 1970), "Inequalities Involving Functions and Their Derivates" (Mitrinoviç D.S., 1991), "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinoviç D.S., 1993), "Differential Inequalities" (Szarki J., 1965)'tir.

"Neden Matematiksel Eşitsizlikler?" sorusunu 1978 yılında Richard Bellman şu şekilde cevaplamıştır: "Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizliklerde bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir." Son yıllarda eşitsizlik çalışmaları matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalarına katkıları çok büyüktür. Bunlardan bazıları: Grüss, Hadamard, Jensen, Ostrowski ve Chebyshev tipli eşitsizlikler şeklinde sıralanabilir.

Klasik eşitsizlikler konusunda önemli bir yere sahip olan konveks fonksiyon teorisi oldukça eskiye dayanmakta olup son zamanlarda da konveks fonksiyonların farklı sınıfları üzerinde birçok yeni tanım ve özellikler bulunmuştur. Bunlar h -konveks, s -konveks, üstel

tipli konveks, modifiye h -konveks vs. gibi fonksiyon sınıflarıdır. Ayrıca tamsayı olmayan bir basamaktan türev veya integral alma fikri 1695 yılında ortaya atılmış ve eşitsizliğe farklı bir boyut kazandıran kesirli integraller ortaya çıkmıştır. Bu alanda çalışmalara başlanmıştır. Öncüleri ise Liouville, Wely, Euler, Riemann, Lagrange, Abel gibi birçok değerli matematikçilerdir.

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde Eşitsizlik Teorisinin tarihi gelişiminden, günümüzde bu konu ile çalışma yapan bilim insanlarından ayrıca konvekslik kavramının tanımından ve kullanım alanlarından bahsedilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde konveks fonksiyonlarla ilgili tanım, teorem ve konveks fonksiyonun geometrik olarak incelenmesi ayrıca iki pozitif sayı için bazı ortalamalara ilişkin bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde konveks fonksiyonlar için temel eşitsizliklerden ve modifiye edilmiş h -konveks fonksiyonlar için daha önce elde edilmiş teoremlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde literatürde var olan lemmalar kullanılarak modifiye edilmiş h -konveks fonksiyonlar ile ilgili yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Tezin beşinci bölümünde ise önerilere yer verilmiştir.

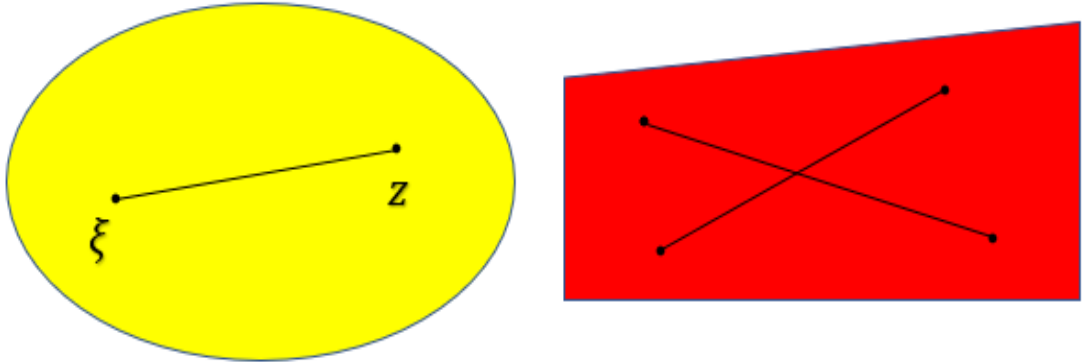
KURAMSAL TEMELLER

Genel Terimler

Tanım 1. (Konveks Küme) L bir lineer uzay $K \subseteq L$ ve $\xi, \varpi \in K$ keyfi bir küme olmak üzere

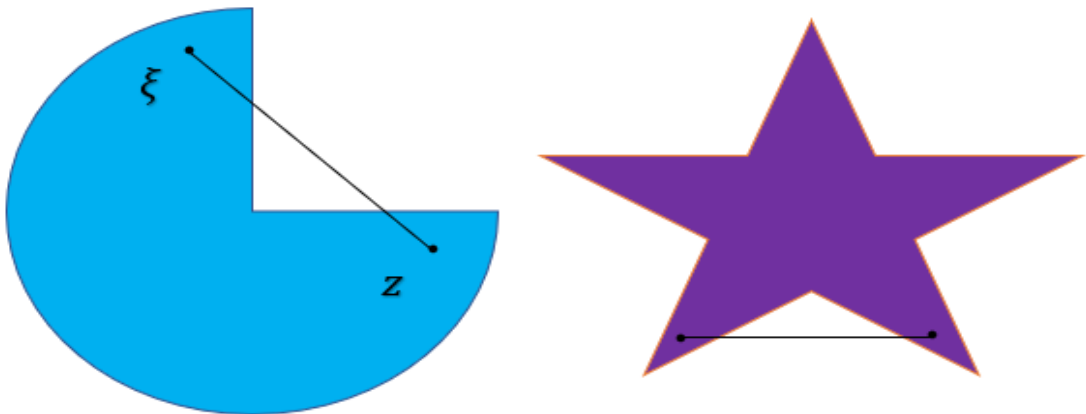
$$B = \{ \vartheta \in L : \vartheta = \sigma \xi + (1 - \sigma) \varpi, 0 \leq \sigma \leq 1 \} \subseteq K$$

ise K kümesine konveks küme denir. Eğer $\vartheta \in B$ ise $\vartheta = \sigma \xi + (1 - \sigma) \varpi$ eşitliğindeki ξ ve ϖ 'nin katsayıları için $\sigma + (1 - \sigma) = 1$ bağıntısı her konveks küme için geçerlidir. Bu nedenle konveks küme tanımındaki $1 - \sigma = \beta$ yazılırsa $\sigma + \beta = 1$ şartı sağlanır. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları ξ ve ϖ olan doğru parçasını gösterir. Dolayısıyla konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 1. Konveks kümeler

Bir küme konveks küme değil ise bu küme konkav küme olarak ifade edilir.



Şekil 2. Konkav kümeler

Tanım 2. (Konveks Fonksiyon) $I \subseteq \mathbb{R}$ de bir aralık ve $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $\xi, \varpi \in I$ ve $\sigma \in [0,1]$ için

$$\mathcal{B}(\sigma\xi + (1 - \sigma)\varpi) \leq \sigma \mathcal{B}(\xi) + (1 - \sigma) \mathcal{B}(\varpi)$$

eşitsizliğini sağlayan $\mathcal{B}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pečarić *et al.* 1992).

Eğer $\sigma \in (0,1)$ açık aralığında seçilirse buradan

$$\mathcal{B}(\sigma\xi + (1 - \sigma)\varpi) < \sigma \mathcal{B}(\xi) + (1 - \sigma) \mathcal{B}(\varpi)$$

olur. Bu $\mathcal{B}$ fonksiyonuna da kesin konveks fonksiyon denir.

Konveks fonksiyon tanımında eğer $-\mathcal{B}$ konveks fonksiyon (kesin konveks fonksiyon) ise $\mathcal{B}$ 'ye konkav fonksiyon (kesin konkav fonksiyon) denir.

Örnek 1. $\mathcal{B}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için $\mathcal{B}(x) = |x|$ fonksiyonu I kümesi üzerinde konveks bir fonksiyondur.

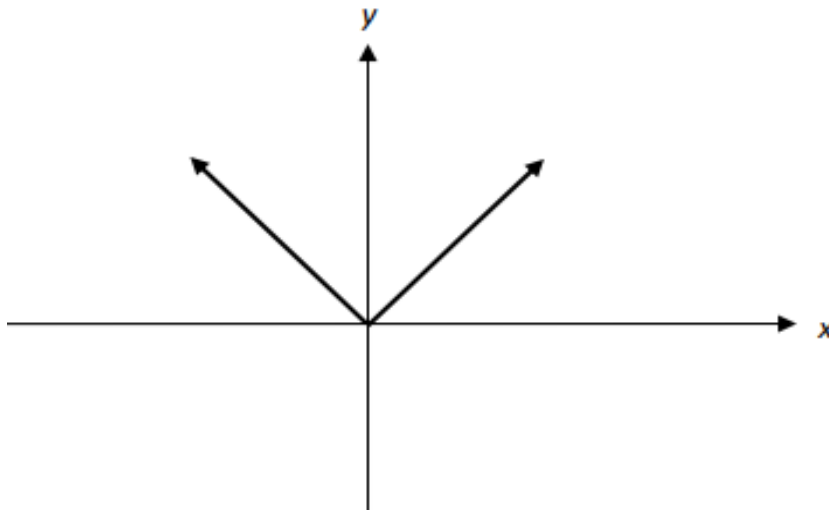
Çözüm: Her $\xi, \varpi \in I$ ve $\sigma \in [0,1]$ olmak üzere $\mathcal{B}$ fonksiyonunun konveks olduğunu göstermek için

$$\mathcal{B}(\sigma\xi + (1 - \sigma)\varpi) \leq \sigma \mathcal{B}(\xi) + (1 - \sigma) \mathcal{B}(\varpi)$$

olduğu gösterilmelidir. Buna göre

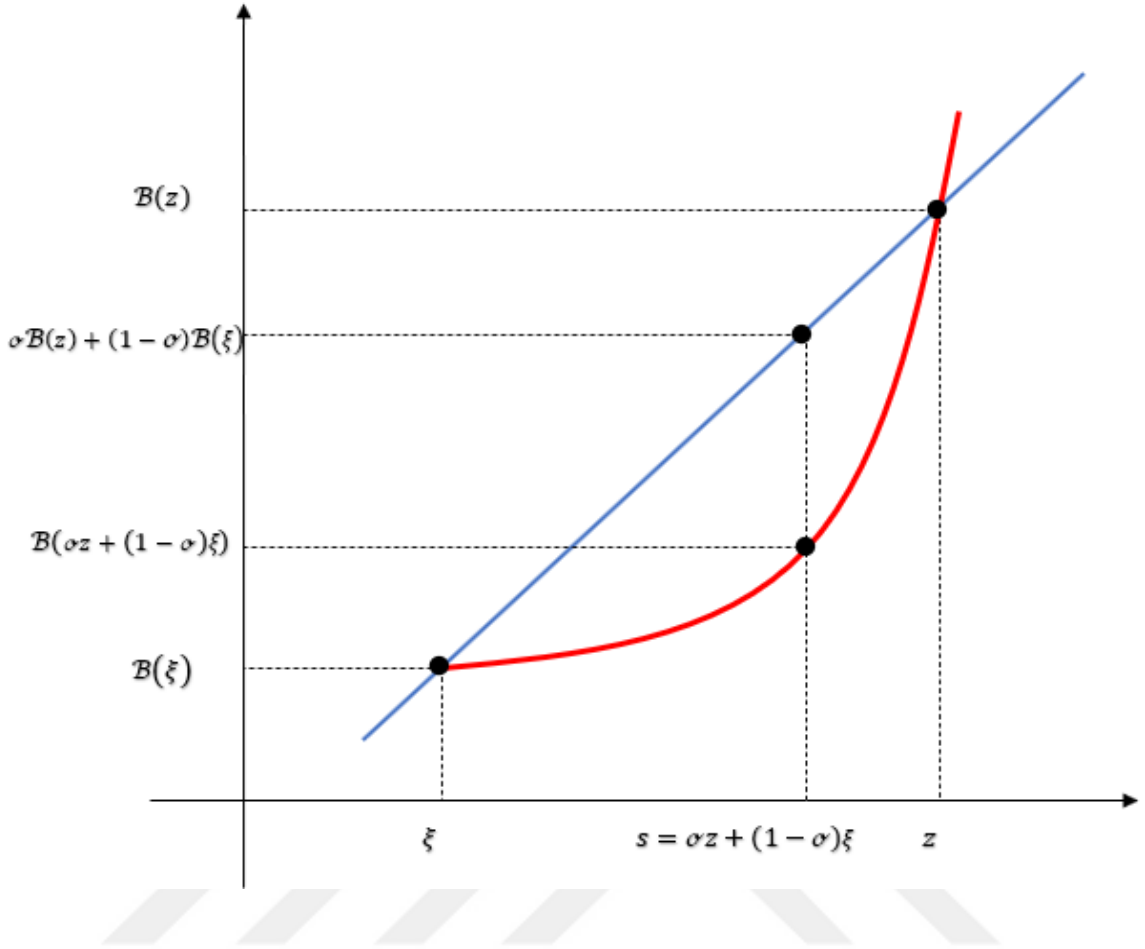
$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\sigma\xi + (1 - \sigma)\varpi) &= |\sigma\xi + (1 - \sigma)\varpi| \\ &\leq |\sigma\xi| + |(1 - \sigma)\varpi| \quad \text{‘Teorem 1. kullanılarak’} \\ &= \sigma|\xi| + (1 - \sigma)|\varpi| = \sigma \mathcal{B}(\xi) + (1 - \sigma) \mathcal{B}(\varpi) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk ve son terimden $\mathcal{B}$ fonksiyonunun konveksliği görülmüş olur.



Şekil 3. Aralıklar üzerinde (yani $\mathbb{R}^+$ da) konveks fonksiyon ($\mathcal{B}(x) = |x|$)

Konveks fonksiyonların geometrik olarak anlamı, Şekil 4.’teki gibi açıklanabilir:



Şekil 4. Konveks Fonksiyonun İncelenmesi

Şekil 4.’te görüldüğü gibi konveks fonksiyon geometrik olarak şöyle ifade edilir:

ξ ’nin B fonksiyonu altındaki görüntüsü $B(\xi)$, ϖ ’nin B fonksiyonu altındaki görüntüsü $B(\varpi)$ olmak üzere $(\xi, B(\xi))$ ve $(\varpi, B(\varpi))$ noktalarını birleştiren doğru parçasını ele alalım. $s = \sigma\varpi + (1 - \sigma)\xi$ noktasının B fonksiyonu altındaki görüntüsü aynı σ değeri için doğru üzerinde oluşan değerden küçük veya eşit kaldığı için fonksiyona konvektir denir.

Tanım 3. Eğer B fonksiyonu hem konveks hem de konkav fonksiyon ise B ’ye afindir (lineerdir) denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 1. $I \subset \mathbb{R}$ için bir B fonksiyonunun I kümesinde konveks bir fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\xi, \varpi \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$B\left(\frac{p\xi + q\varpi}{p + q}\right) \leq \frac{p B(\xi) + q B(\varpi)}{p + q}$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Tanım 4. (*J*-Konveks Fonksiyon): $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere ve her $\xi, \varpi \in I$ için

$$\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \leq \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2}$$

ifadesini sağlayan $\mathcal{B}$ fonksiyonuna $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde *Jensen* anlamında konveks veya *J*-konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Sonuç 2. Her konveks fonksiyon aynı zamanda *J* –konveks fonksiyondur.

Tanım 5. (Kesin *J*-Konveks Fonksiyon): Her $\xi, \varpi \in I$ ve $\xi \neq \varpi$ için

$$\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) < \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2}$$

şartını sağlayan $\mathcal{B}$ fonksiyonuna $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde kesin *J*-konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 6. $h \neq 0$ olmak üzere $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathcal{B}$ negatif değilse $\xi, \varpi \in I$ ve $\sigma \in [0,1]$ için

$$\mathcal{B}(\sigma\xi + (1 - \sigma)\varpi) \leq h(\sigma) \mathcal{B}(\xi) + h(1 - \sigma) \mathcal{B}(\varpi)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$, bir *h*-konveks fonksiyondur. Bu durumda $\mathcal{B}$ fonksiyonu $SX(h, I)$ sınıfına aittir (Varosanec 2007).

Tanım 7. $\mathcal{B}, h: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, negatif olmayan birer fonksiyon, her $\xi, \varpi \in J$ ve $\sigma \in [0,1]$ için

$$\mathcal{B}(\sigma\xi + (1 - \sigma)\varpi) \leq h(\sigma) \mathcal{B}(\xi) + (1 - h(\sigma)) \mathcal{B}(\varpi)$$

eşitsizliği sağlanırsa $\mathcal{B}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ ye modifiye *h*-konveks fonksiyon denir (Toader 1984).

Özel durumlar:

- i. $h(\sigma) = \sigma$ için modifiye *h*-konveks fonksiyonun tanımı klasik konveks fonksiyon tanımına dönüşür.
- ii. $h(\sigma) = \sigma^\alpha$ için $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere modifiye *h*-konveks fonksiyonun tanımı $(\alpha, 1)$ konveks fonksiyon tanımına dönüşür.

Tanım 8. Her $\xi, \varpi \in I$ için $\mathcal{B}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\alpha, 1)$ konveks fonksiyon ise

$$\mathcal{B}(\sigma\xi + (1 - \sigma)\varpi) \leq \sigma^\alpha \mathcal{B}(\xi) + (1 - \sigma^\alpha) \mathcal{B}(\varpi)$$

eşitsizliği geçerlidir (Toader 2009).

Tanım 9. Her $\xi, \varpi \in D$ ve $\sigma \in [0,1]$ için $\mathcal{B}: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Wright-konveks fonksiyon ise

$$\mathcal{B}((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi) + \mathcal{B}(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) \leq \mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)$$

eşitsizliği geçerlidir (Wright 1954).

Tanım 10. Her $\xi, \varpi \in D$ ve $\sigma \in [0,1]$ için $\mathcal{B}: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu Wright tipli çarpımsal konveks fonksiyon ise

$$\mathcal{B}(\xi^{(1-\sigma)} + \varpi^\sigma) + \mathcal{B}(\xi^\sigma + \varpi^{(1-\sigma)}) \leq \mathcal{B}(\xi) \mathcal{B}(\varpi)$$

eşitsizliği geçerlidir (Guan 2015).

Tanım 11. Her $\xi, \varpi \in J$ için $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süper toplamsal fonksiyon ise

$$h(\xi + \varpi) \geq h(\xi) + h(\varpi)$$

eşitsizliği geçerlidir (Alzer 2009).

Tanım 12. Her $\xi, \varpi \in J$ için $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süper çarpımsal fonksiyon ise

$$h(\xi\varpi) \geq h(\xi)h(\varpi)$$

eşitsizliği geçerlidir (Pecaric *et al.* 1992).

Teorem 1. (Üçgen Eşitsizliği) $\xi, \varpi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|\xi + \varpi| \leq |\xi| + |\varpi|,$$

$$||\xi| - |\varpi|| \leq |\xi - \varpi|,$$

$$||\xi| - |\varpi|| \leq |\xi + \varpi|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|\xi_1 + \dots + \xi_n| \leq |\xi_1| + \dots + |\xi_n|$$

eşitsizlikleri elde edilir (Mitrinovic *et al.* 1993).

Teorem 2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Formu) $\mathcal{B}$, $[\xi, \varpi]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir dönüşüm ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Mitrinovic *et al.* 1993).

$$\left| \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)| dx \quad (\xi < \varpi)$$

Pozitif Reel Sayılar İçin Bazı Özel Ortalamalar

$\xi, \varpi \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

(1) Aritmetik ortalama:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\xi, \varpi) = \frac{\xi + \varpi}{2},$$

(2) Geometrik ortalama:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\xi, \varpi) = \sqrt{\xi \varpi},$$

(3) Harmonik ortalama:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\xi, \varpi) = \frac{2\xi\varpi}{\xi + \varpi},$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\xi, \varpi) = \begin{cases} \xi, & \xi = \varpi \\ \frac{\varpi - \xi}{\ln \varpi - \ln \xi}, & \xi \neq \varpi \end{cases}$$

(5) İdentrik ortalama:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\xi, \varpi) = \begin{cases} \xi, & \xi = \varpi \\ \frac{1}{e} \left(\frac{\varpi^\varpi}{\xi^\xi} \right)^{\frac{1}{\varpi - \xi}}, & \xi \neq \varpi \end{cases}$$

(6) p -Logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\xi, \varpi) = \begin{cases} \xi, & \xi = \varpi \\ \left[\frac{\varpi^{p+1} - \xi^{p+1}}{(p+1)(\varpi - \xi)} \right]^{\frac{1}{p}}, & \xi \neq \varpi \end{cases}$$

geçerlidir.

Bu özel ortalamalar arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{I} \leq \mathcal{A}.$$

Tanım 13. Beta fonksiyonu

$$\beta(\xi, \varpi) = \int_0^1 \sigma^{\xi-1} (1 - \sigma)^{\varpi-1} d\sigma, \quad \xi, \varpi > 0$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tipli Beta integral fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır. Beta fonksiyonu

$$(1) \quad \beta(\xi, \varpi) = \beta(\varpi, \xi)$$

$$(2) \quad \beta(\xi + 1, \varpi) = \frac{\xi}{\xi + \varpi} \beta(\xi, \varpi)$$

özelliklerini sağlar (Dragomir *et al.* 2000).

MATERYAL VE YÖNTEM

Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler

Teorem 3. (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $\mathcal{B}$ ve g , $[\xi, \varpi]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon ve $|\mathcal{B}|^p, |g|^q$ $[\xi, \varpi]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\xi}^{\varpi} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 4. (Hölder-İşcan Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $\mathcal{B}$ ve g $[\xi, \varpi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyon $|\mathcal{B}|^p$ ve $|g|^q$, $[\xi, \varpi]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{\varpi - \xi} \left\{ \left(\int_{\xi}^{\varpi} (\varpi - x) |\mathcal{B}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\xi}^{\varpi} (\varpi - x) |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\xi}^{\varpi} (x - \xi) |\mathcal{B}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\xi}^{\varpi} (x - \xi) |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &\leq \left(\int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\xi}^{\varpi} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (İşcan 2019).

Teorem 5. (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. $\mathcal{B}$ ve g , $[\xi, \varpi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\mathcal{B}|$ ve $|g|^q$, $[\xi, \varpi]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)|dx \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Power Mean eşitsizliği

$$\int_{\xi}^{\varpi} \int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)g(x)| dx dy \leq \left(\int_{\xi}^{\varpi} \int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)| dx dy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\xi}^{\varpi} \int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)||g(x)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 6. (Geliştirilmiş Power-Mean İntegral Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. Eğer $\mathcal{B}$ ve g , $[\xi, \varpi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|\mathcal{B}|$ ve $|\mathcal{B}||g|^q$, $[\xi, \varpi]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)g(x)| dx &\leq \frac{1}{\varpi - \xi} \left\{ \left(\int_{\xi}^{\varpi} (\varpi - x) |\mathcal{B}(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\xi}^{\varpi} (\varpi - x) |\mathcal{B}(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\xi}^{\varpi} (x - \xi) |\mathcal{B}(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\xi}^{\varpi} (x - \xi) |\mathcal{B}(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &\leq \left(\int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\xi}^{\varpi} |\mathcal{B}(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (Kadakal *et al.* 2019).

Teorem 7. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık, $\xi, \varpi \in I$ ve $\xi < \varpi$ olmak üzere $\mathcal{B}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \leq \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \leq \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 8. (Simpson Eşitsizliği) $\mathcal{B}: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$, (ξ, ϖ) üzerinde sürekli ve dört kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\|\mathcal{B}^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (\xi, \varpi)} |\mathcal{B}^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. O halde

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} + 2\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|\mathcal{B}^{(4)}\|_{\infty} (\varpi - \xi)^4$$

eşitsizliği elde edilir (Dragomir *et al.* 2000a).

Teorem 9. (Ostrowski Eşitsizliği) $\mathcal{B}: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° (I 'nin içi) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\mathcal{B}' \in L[\xi, \varpi]$ ve $\xi, \varpi \in I$ için $\xi < \varpi$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}'(x)| \leq M$ ise

$$\left| \mathcal{B}(x) - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(\sigma) d\sigma \right| \leq \frac{M}{\varpi - \xi} \left[\frac{(x - \xi)^2 + (\varpi - x)^2}{2} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $x \in [\xi, \varpi]$ dır. Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir (Ostrowski 1938).

Modifiye Edilmiş h -Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilmiş Teorem ve Sonuçlar

Noor *et al.* 2014 yılında yapmış oldukları çalışmalarında modifiye edilmiş h -konveks fonksiyonların özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca bu konvekslik çeşidini kullanarak literatürde var olan bazı önemli eşitsizlikleri de elde etmişlerdir.

Sonuç 3. Eğer $\mathcal{B}$ ve g modifiye h -konveks fonksiyonlar ise her $\xi, \varpi \in \mathbb{R}$ için $\xi \mathcal{B} + \varpi g$ de modifiye h -konveks fonksiyondur.

Sonuç 4. h_1 ve h_2 , I üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Eğer $\mathcal{B}$ modifiye h_2 -konveks fonksiyon, $\mathcal{B}$ modifiye h_1 -konveks fonksiyon ve $\sigma \in [0, 1]$ ise

$$h_2(\sigma) \leq h_1(\sigma)$$

olur.

Sonuç 5. g doğrusal fonksiyon ve $\mathcal{B}$, modifiye h -konveks fonksiyon ise $\mathcal{B}og$ modifiye h -konveks fonksiyondur.

Sonuç 6. $\mathcal{B}_i: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ modifiye h -konveks fonksiyon ve $\mu_1, \dots, \mu_n$ pozitif değişkenler olmak üzere, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathcal{B}_i(x)$$

dir. g fonksiyonu aynı zamanda modifiye h -konveks fonksiyondur.

Teorem 10. $\mathcal{B}$ ve g modifiye h -konveks fonksiyonlar olsun. O zaman $\mathcal{B}$ ve g aynı monotonluğa sahip fonksiyonlar ise $\mathcal{B}$ ve g 'nin çarpımı, modifiye h -konveks fonksiyon olacaktır.

Teorem 11. h süper çarpımsal fonksiyon ve $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$ modifiye h -konveks fonksiyon olmak üzere $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ ve $x_3 - x_1, x_3 - x_2, x_2 - x_1 \in I$ için

$$h(x_3 - x_2)\mathcal{B}(x_1) - h(x_3 - x_1)\mathcal{B}(x_2) + [h(x_3 - x_1) - h(x_3 - x_2)]\mathcal{B}(x_3) \geq 0$$

eşitsizliği geçerli olur.

Teorem 12, modifiye h -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir.

Teorem 12. $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\xi, \varpi]$ üzerinde modifiye h -konveks fonksiyon, $\sigma \in [0,1]$ ve $\xi < \varpi$ olmak üzere

$$f\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \leq \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \leq \mathcal{B}(\xi) + \{\mathcal{B}(\varpi) - \mathcal{B}(\xi)\} \int_0^1 h(\sigma) d\sigma$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 7. Eğer Teorem 12’de $h(\sigma) = \sigma$ olarak alınırsa o zaman klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 8. Eğer Teorem 12’de $h(\sigma) = \sigma^{\alpha}$ olarak alınırsa o zaman α konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 9. $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\xi, \varpi]$ üzerinde α -konveks fonksiyon ve $\alpha \in [0,1]$ ve $\xi < \varpi$ olmak üzere

$$\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \leq \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \leq \frac{\alpha \mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{\alpha + 1}$$

eşitsizliği elde edilir. $\alpha = 1$ olarak alınırsa klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 10. $\sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ toplamı modifiye h -konveks fonksiyon ve $\sigma \in [0,1]$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{\varpi - \xi} \sum_{i=1}^n \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}_i(x) dx \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i(\xi) + \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i(\varpi) - \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i(\xi) \right) \int_0^1 h(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 13. $\mathcal{B}$ ve g modifiye h -konveks fonksiyonlar olsun. O zaman $\mathcal{B}$ ve g aynı monotonluğa sahip fonksiyonlar ve $h\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + h\left(\frac{1}{2}\right)\right) \neq \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - 2h\left(\frac{1}{2}\right) + 2h\left(\frac{1}{2}\right)^2} \left[\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) - h\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right) Q(\xi, \varpi, \sigma) \right] \\ & \leq \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) g(x) dx \leq \mathcal{B}(\xi) g(\xi) + [\mathcal{B}(\varpi) g(\varpi) - \mathcal{B}(\xi) g(\xi)] \int_0^1 h(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

dir. Burada

$$Q(\xi, \varpi, \sigma) = M(\xi, \varpi) \int_0^1 [1 - h(\sigma) + h(\sigma)^2] d\sigma$$

ve

$$M(\xi, \varpi) = \mathcal{B}(\xi) g(\xi) + \mathcal{B}(\varpi) g(\varpi)$$

dir.

Lemma 1. $\mathcal{B}$ modifiye h -konveks fonksiyon olmak üzere her $x \in [\xi, \varpi]$ için

$$\mathcal{B}(\xi + \varpi - x) \leq \mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi) - \mathcal{B}(x)$$

dir. Burada $x = \sigma\xi + (1 - \sigma)\varpi$, $\sigma \in [0, 1]$ dir.

Lemma 1 kullanılarak modifiye h -konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

Teorem 14. $\mathcal{B}: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ modifiye h -konveks fonksiyon, $w: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$, $w \geq 0$ integrallenebilir ve $\frac{\xi + \varpi}{2}$ 'ye göre simetrik olmak üzere

$$\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \int_{\xi}^{\varpi} w(x) dx \leq \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) w(x) dx \leq \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} \int_{\xi}^{\varpi} w(x) dx$$

dir.

Teorem 15. $\mathcal{B}: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ξ, ϖ) üzerinde iki kere diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. $\mathcal{B}'': (\xi, \varpi) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı ve $\|\mathcal{B}''\|_{\infty} = \sup |\mathcal{B}''(\sigma)| < \infty$, $\sigma \in (\xi, \varpi)$ 'dir. O halde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{B}(x) - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(\sigma) d\sigma - \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2}\right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \left[\frac{1}{24} (\varpi - \xi)^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2}\right)^2 \right] \|\mathcal{B}''\|_{\infty} \\ & \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{6} \|\mathcal{B}''\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Burada $x \in [\xi, \varpi]$ ve $\xi < \varpi$ dir (Set *et al.* 2014).



ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde literatürde mevcut olan lemmalardan faydalanarak modifiye edilmiş h –konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu eşitsizlikleri elde etmek için modifiye edilmiş h –konveks tanımı ve özellikleri, Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan ve Geliştirilmiş Power-Mean İntegral Eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Teorem 16. $\mathcal{B}: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\xi, \varpi]$ üzerinde modifiye h -konveks fonksiyon olmak üzere $\xi < \varpi$, $\mathcal{B} \in L[\xi, \varpi]$ ve $g: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir, $\frac{\xi+\varpi}{2}$ ‘ye göre simetrik bir fonksiyon ise

$$\int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx \leq \frac{\mathcal{B}(\xi) - \mathcal{B}(\varpi)}{2} \int_{\xi}^{\varpi} \left[h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) + h\left(\frac{x-\xi}{\varpi-\xi}\right) \right] g(x)dx + \Xi(\mathcal{B}, g)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\Xi(\mathcal{B}, g) = \mathcal{B}(\varpi) \int_{\xi}^{\varpi} g(x)dx$$

dir.

İspat: $\mathcal{B}: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\xi, \varpi]$ üzerinde modifiye h -konveks fonksiyon olmak üzere $\xi < \varpi$ ve $\mathcal{B} \in L[\xi, \varpi]$ olsun. Ayrıca $g: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\xi+\varpi}{2}$ ‘ye göre simetrik bir fonksiyon için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx + \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(\xi + \varpi - x)g(\xi + \varpi - x)dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\varpi} [\mathcal{B}(x) + \mathcal{B}(\xi + \varpi - x)]g(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\varpi} [\mathcal{B}(x) + \mathcal{B}(\xi + \varpi - x)]g(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\varpi} \left[\mathcal{B}\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\xi + \frac{x-\xi}{\varpi-\xi}\varpi\right) + \mathcal{B}\left(\frac{x-\xi}{\varpi-\xi}\xi + \frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\varpi\right) \right] g(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\varpi} \left[h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) \mathcal{B}(\xi) + \left(1 - h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right)\right) \mathcal{B}(\varpi) + h\left(\frac{x-\xi}{\varpi-\xi}\right) \mathcal{B}(\xi) \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - h\left(\frac{x-\xi}{\varpi-\xi}\right)\right) \mathcal{B}(\varpi) \right] g(x) dx \\
&= \frac{\mathcal{B}(\xi) - \mathcal{B}(\varpi)}{2} \int_{\xi}^{\varpi} \left[h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) + h\left(\frac{x-\xi}{\varpi-\xi}\right) \right] g(x) dx + \mathcal{B}(\varpi) \int_{\xi}^{\varpi} g(x) dx.
\end{aligned}$$

Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 11. Teorem 16’da

- i. $h(\sigma) = \sigma$ olarak alınırsa Fejer eşitsizliğinin sağ kısmı elde edilir.
- ii. $h(\sigma) = \sigma$ ve $g(x) = 1$ seçilirse Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ kısmı elde edilir.

Sonuç 12. h bir süper toplamsal fonksiyon olsun. Teorem 16’nın varsayımları altında aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) g(x) dx \leq \left[\frac{\mathcal{B}(\xi) - \mathcal{B}(\varpi)}{2} h(1) + \mathcal{B}(\varpi) \right] \int_{\xi}^{\varpi} g(x) dx.$$

Ayrıca $g(x) = 1$ alınırsa

$$\frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \leq \frac{\mathcal{B}(\xi) - \mathcal{B}(\varpi)}{2} h(1) + \mathcal{B}(\varpi)$$

olur.

Teorem 17. $\mathcal{B}, g: [\xi, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları aynı monotonluğa sahip iki modifiye h -konveks fonksiyon olsun. Eğer $\mathcal{B}, g \in L[\xi, \varpi]$ ise

$$\frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) g(x) dx \leq \mathcal{B}(\varpi) g(\varpi) + \frac{\mathcal{B}(\xi) g(\xi) - \mathcal{B}(\varpi) g(\varpi)}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) dx$$

dir.

İspat: $\mathcal{B}$ ve g modifiye h -konveks fonksiyonlar olsun. Buradan

$$\mathcal{B}(x) g(x) = \mathcal{B}\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi} \xi + \frac{x-\xi}{\varpi-\xi} \varpi\right) g\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi} \xi + \frac{x-\xi}{\varpi-\xi} \varpi\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) \mathcal{B}(\xi) + \left(1 - h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right)\right) \mathcal{B}(\varpi) \right] \left[h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) g(\xi) \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right)\right) g(\varpi) \right] \\
&= h^2\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) \mathcal{B}(\xi)g(\xi) + h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) \left(1 - h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right)\right) \{\mathcal{B}(\xi)g(\varpi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\xi)\} \\
&\quad + \left(1 - h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right)\right)^2 \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)
\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{B}$ ve g aynı monotonluğa sahip fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}(x)g(x) \leq h^2\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) \mathcal{B}(\xi)g(\xi) \\
&+ h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right) \left(1 - h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right)\right) \{\mathcal{B}(\xi)g(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)\} + \left(1 - h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right)\right)^2 \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi) \\
&= \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi) + \{\mathcal{B}(\xi)g(\xi) - \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)\} h\left(\frac{\varpi-x}{\varpi-\xi}\right)
\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizliğin $x \in [\xi, \varpi]$ 'e göre integrali alınırsa istenen sonuç elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 13. Teorem 17'de,

i. $h(\sigma) = \sigma$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx \leq \frac{\mathcal{B}(\xi)g(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)}{2} = \frac{M(\xi, \varpi)}{2}$$

ii. $h(\sigma) = 1$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx \leq \mathcal{B}(\xi)g(\xi),$$

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx \leq \frac{\mathcal{B}(\xi)g(\xi) + s\mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)}{s+1}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 18. $\mathcal{B}$ ve g aynı monotonluğa sahip iki modifiye h -konveks fonksiyon olsun.

Eğer $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq \frac{1}{2}$ ise

$$\frac{1}{\left(1 - 2h\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} \mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) - Q(\mathcal{B}, g, h, x) \leq \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) g(x) dx$$

elde edilir. Burada

$$Q(\mathcal{B}, g, h, x) = \frac{2h^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1 - 2h\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} M(\xi, \varpi) + \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(\varpi - \xi) \left(1 - 2h\left(\frac{1}{2}\right)\right)} \\ \times \left[\{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)\} \int_{\xi}^{\varpi} g(x) dx + \{g(\xi) + g(\varpi)\} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right]$$

ve

$$M(\xi, \varpi) = \mathcal{B}(\xi)g(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)$$

dir.

İspat: $\mathcal{B}$ ve g modifiye h -konveks fonksiyonlar olmak üzere

$$\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) = \mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi + x - x}{2}\right) g\left(\frac{\xi + \varpi + x - x}{2}\right) \\ \leq \left[h\left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{B}(\xi + \varpi - x) + \left(1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right) \mathcal{B}(x) \right] \\ \times \left[h\left(\frac{1}{2}\right) g(\xi + \varpi - x) + \left(1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right) g(x) \right]$$

elde edilir.

Lemma 1'i ve $\mathcal{B}$ ile g 'nin aynı monotonluğa sahip fonksiyonlar olma özelliği kullanılırsa

$$\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \\ \leq \left[h\left(\frac{1}{2}\right) \{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)\} + \left(1 - 2h\left(\frac{1}{2}\right)\right) \mathcal{B}(x) \right] \\ \times \left[h\left(\frac{1}{2}\right) \{g(\xi) + g(\varpi)\} + \left(1 - 2h\left(\frac{1}{2}\right)\right) g(x) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= h^2 \left(\frac{1}{2} \right) \{ \mathcal{B}(\xi)g(\xi) + \mathcal{B}(\xi)g(\varpi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi) \} \\
&\quad + h \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - 2h \left(\frac{1}{2} \right) \right) [\{ \mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi) \} g(x) + \{ g(\xi) + g(\varpi) \} \mathcal{B}(x)] \\
&\quad + \left(1 - 2h \left(\frac{1}{2} \right) \right)^2 \mathcal{B}(x)g(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $x \in [\xi, \varpi]$ 'e göre integrali alınırsa gerekli sonuç elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 14. Teorem 18'de $h(\sigma) = 1$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B} \left(\frac{\xi + \varpi}{2} \right) g \left(\frac{\xi + \varpi}{2} \right) - 2M(\xi, \varpi) + \frac{1}{\varpi - \xi} \psi(\mathcal{B}, g) \\
&\leq \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\psi(\mathcal{B}, g) = \{ \mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi) \} \int_{\xi}^{\varpi} g(x)dx + \{ g(\xi) + g(\varpi) \} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)dx$$

dir. Yukarıdaki eşitsizliğe ek olarak, $g(x) = 1$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)dx \leq [\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)] - \mathcal{B} \left(\frac{\xi + \varpi}{2} \right)$$

elde edilir.

Teorem 19. $\mathcal{B}$ ve g aynı monotonluğa sahip iki modifiye h -konveks fonksiyon olsun.

O halde

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B} \left(\frac{\xi + \varpi}{2} \right) g \left(\frac{\xi + \varpi}{2} \right) - h \left(\frac{1}{2} \right) \left[1 - h \left(\frac{1}{2} \right) \right] \psi(\mathcal{B}, g, \sigma) \\
&\leq \left[1 - h \left(\frac{1}{2} \right) \right]^2 \frac{2}{\varpi - \xi} \int_a^{\frac{\xi + \varpi}{2}} \mathcal{B}(x)g(x)dx + \left[h \left(\frac{1}{2} \right) \right]^2 \frac{2}{\varpi - \xi} \int_{\frac{\xi + \varpi}{2}}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\psi(\mathcal{B}, g, \sigma) = M(\xi, \varpi) \int_0^1 \left[1 - h \left(\frac{\sigma}{2} \right) + \left(h \left(\frac{\sigma}{2} \right) \right)^2 \right] d\sigma$$

ve

$$M(\xi, \varpi) = \mathcal{B}(\xi)g(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)$$

dir.

İspat: $\mathcal{B}$ ve g modifiye h -konveks fonksiyonlar olsun. Buradan

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right)g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \\ & \leq \mathcal{B}\left(\frac{\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi + \frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi}{2}\right)g\left(\frac{\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi + \frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi}{2}\right) \\ & \leq \left\{ \left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right] \mathcal{B}\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right) + h\left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{B}\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right) \right\} \\ & \quad \times \left\{ \left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right] g\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right) + h\left(\frac{1}{2}\right) g\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right) \right\} \\ & = \left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \mathcal{B}\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right)g\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right) \\ & \quad + \left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \mathcal{B}\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right)g\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right) + h\left(\frac{1}{2}\right)\left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\ & \quad \times \left\{ \mathcal{B}\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right)g\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right) + \mathcal{B}\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right)g\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right) \right\} \end{aligned}$$

olur. Tekrar modifiye h -konveks fonksiyonun tanımını kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right)g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \\ & \leq \left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \mathcal{B}\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right)g\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right) \\ & \quad + \left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \mathcal{B}\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right)g\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right) + h\left(\frac{1}{2}\right)\left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\ & \quad \times \left\{ \left(\left[1 - h\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right] \mathcal{B}(\xi) + h\left(\frac{\sigma}{2}\right) \mathcal{B}(\varpi) \right) \left(h\left(\frac{\sigma}{2}\right) g(\xi) + \left[1 - h\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right] g(\varpi) \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(h\left(\frac{\sigma}{2}\right) \mathcal{B}(\xi) + \left[1 - h\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right] \mathcal{B}(\varpi) \right) \left(\left[1 - h\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right] g(\xi) + h\left(\frac{\sigma}{2}\right) g(\varpi) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \mathcal{B}\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right) g\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right) \\
&\quad + \left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \mathcal{B}\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right) g\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right) + h\left(\frac{1}{2}\right)\left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
&\quad \times \left\{h\left(\frac{\sigma}{2}\right)\left[1 - h\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right](2\mathcal{B}(\xi)g(\xi) + 2\mathcal{B}(\varpi)g(\varpi))\right. \\
&\quad \left.+ \left[\left(1 - h\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)^2 + \left(h\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)^2\right](\mathcal{B}(\xi)g(\varpi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\xi))\right\} \\
&\leq \left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \mathcal{B}\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right) g\left(\frac{2-\sigma}{2}\xi + \frac{\sigma}{2}\varpi\right) \\
&\quad + \left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \mathcal{B}\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right) g\left(\frac{\sigma}{2}\xi + \frac{2-\sigma}{2}\varpi\right) + h\left(\frac{1}{2}\right)\left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
&\quad \times \left[1 - h\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \left(h\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)^2\right]\{\mathcal{B}(\xi)g(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın $\sigma \in [0,1]$ 'ye göre integral alınırsa istenilen sonuca ulaşılır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 20. $\mathcal{B}$ ve g aynı monotonluğa sahip fonksiyonlar, $\mathcal{B}$, modifiye h_1 -konveks fonksiyon ve g , modifiye h_2 -konveks fonksiyon olsun. $\mathcal{B}g \in L[\xi, \varpi]$ ve $h_1 h_2 \in L[0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx &\leq [M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] \int_0^1 h_1(\sigma)h_2(\sigma) d\sigma + \phi(\mathcal{B}, g, h_1, h_2) \\
&\leq \phi(\mathcal{B}, g, h_1, h_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\phi(\mathcal{B}, g, h_1, h_2) &= \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi) \int_0^1 [1 - h_1(\sigma) - h_2(\sigma)]d\sigma + \mathcal{B}(\xi)g(\xi) \int_0^1 h_1(\sigma)d\sigma \\
&\quad + \mathcal{B}(\varpi)g(\xi) \int_0^1 h_2(\sigma)d\sigma
\end{aligned}$$

ve

$$M(\xi, \varpi) = \mathcal{B}(\xi)g(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi), \quad N(\xi, \varpi) = \mathcal{B}(\xi)g(\varpi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\xi)$$

dir.

İspat: $\mathcal{B}$, modifiye h_1 -konveks fonksiyon ve g , modifiye h_2 -konveks fonksiyon olarak alınsın. Her $\sigma \in [0,1]$ için

$$\mathcal{B}(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) \leq h_1(\sigma)\mathcal{B}(\xi) + (1-h_1(\sigma))\mathcal{B}(\varpi)$$

$$g(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) \leq h_2(\sigma)g(\xi) + (1-h_2(\sigma))g(\varpi)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Buradan

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi)g(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) \\ & \leq h_1(\sigma)h_2(\sigma)\mathcal{B}(\xi)g(\xi) + h_1(\sigma)(1-h_2(\sigma))\mathcal{B}(\xi)g(\varpi) \\ & \quad + (1-h_1(\sigma))h_2(\sigma)\mathcal{B}(\varpi)g(\xi) + (1-h_1(\sigma))(1-h_2(\sigma))\mathcal{B}(\varpi)g(\varpi) \\ & = \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)h_1(\sigma)h_2(\sigma)\{M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)\} \\ & \quad + h_1(\sigma)\{\mathcal{B}(\xi)g(\varpi) - \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)\} + h_2(\sigma)\{\mathcal{B}(\varpi)g(\xi) - \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi)\} \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın $\sigma \in [0,1]$ 'ye göre integrali alınırsa istenen sonuç elde edilir.

$\mathcal{B}$ ve g aynı monotonluğa sahip iki fonksiyon olduğundan $N(\xi, \varpi) \leq M(\xi, \varpi)$ ifadesi yazılabilir. Bu nedenle ikinci eşitsizlik kolaylıkla görülür. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 15. Teorem 20'de $h_1(\sigma) = h_2(\sigma) = \sigma$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx \leq \frac{1}{3}M(\xi, \varpi) + \frac{1}{6}N(\xi, \varpi)$$

eşitsizliği elde edilir (Pachpatte 2003).

Teorem 21. $\mathcal{B}$ ve g aynı monotonluğa sahip fonksiyonlar, $\mathcal{B}$, modifiye h_1 -konveks fonksiyon ve g , modifiye h_2 -konveks fonksiyon olsun. $\mathcal{B}g \in L[\xi, \varpi]$ ve $h_1h_2 \in L[0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)}\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right)g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)g(x)dx \\ & \leq \frac{1}{2} \left\{ [M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] \int_0^1 [2h_1(\sigma)h_2(\sigma) - h_1(\sigma) - h_2(\sigma)] d\sigma - N(\xi, \varpi) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2h_2\left(\frac{1}{2}\right)} \left\{ [M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] \int_0^1 [h_2(\sigma) - 2h_1(\sigma)h_2(\sigma)] d\sigma \right. \\
& + [\mathcal{B}(\xi)g(\xi) - \mathcal{B}(\varpi)g(\xi)] \int_0^1 [2h_1(\sigma) - 1] d\sigma \Big\} \\
& + \frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left\{ [M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] \int_0^1 [h_1(\sigma) - 2h_1(\sigma)h_2(\sigma)] d\sigma \right. \\
& + [\mathcal{B}(\xi)g(\xi) - \mathcal{B}(\xi)g(\varpi)] \int_0^1 [2h_2(\sigma) - 1] d\sigma \Big\} \\
& + \frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)} \left\{ [M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] \int_0^1 h_1(\sigma)h_2(\sigma) d\sigma \right. \\
& + [\mathcal{B}(\varpi)g(\xi) - \mathcal{B}(\xi)g(\xi)] \int_0^1 h_1(\sigma) d\sigma \\
& + [\mathcal{B}(\xi)g(\varpi) - \mathcal{B}(\xi)g(\xi)] \int_0^1 h_2(\sigma) d\sigma + \mathcal{B}(\xi)g(\xi) \Big\}
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$M(\xi, \varpi) = \mathcal{B}(\xi)g(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\varpi), \quad N(\xi, \varpi) = \mathcal{B}(\xi)g(\varpi) + \mathcal{B}(\varpi)g(\xi)$$

dir.

İspat: $\mathcal{B}$, modifiye h_1 -konveks fonksiyon ve g , modifiye h_2 -konveks fonksiyon olarak alınsın. O halde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \\
& = \mathcal{B}\left(\frac{\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi}{2} + \frac{(1-\sigma)\xi + \sigma\varpi}{2}\right) g\left(\frac{\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi}{2} + \frac{(1-\sigma)\xi + \sigma\varpi}{2}\right) \\
& \leq \left\{ h_1\left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{B}(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) + \left(1 - h_1\left(\frac{1}{2}\right)\right) \mathcal{B}((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi) \right\} \\
& \quad \times \left\{ h_2\left(\frac{1}{2}\right) g(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) + \left(1 - h_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) g((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi) \right\} \\
& = h_1\left(\frac{1}{2}\right) h_2\left(\frac{1}{2}\right) \{ \mathcal{B}(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) g(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) \\
& \quad + \mathcal{B}((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi) g((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\{B(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi)g((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi) \\
& \quad + B((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)g(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi)\} \\
& + h_1\left(\frac{1}{2}\right)\{B(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi)g((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi) \\
& \quad - B((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)g((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)\} \\
& + h_2\left(\frac{1}{2}\right)\{B((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)g(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) \\
& \quad - B((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)g((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)\} \\
& + B((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)g((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi).
\end{aligned}$$

Tekrar modifiye h_1 -konveks fonksiyonun ve modifiye h_2 -konveks fonksiyonun tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\{B(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi)g(\sigma\xi + (1-\sigma)\varpi) \\
& \quad + B((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)g((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)\} \\
& - h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\{[h_1(\sigma) + h_2(\sigma) - 2h_1(\sigma)h_2(\sigma)][M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] + N(\xi, \varpi)\} \\
& + h_1\left(\frac{1}{2}\right)\{[h_2(\sigma) - 2h_1(\sigma)h_2(\sigma)][M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] + [2h_1(\sigma) - 1] \\
& \quad \times [B(\xi)g(\xi) - B(\varpi)g(\xi)]\} \\
& + h_2\left(\frac{1}{2}\right)\{[h_1(\sigma) - 2h_1(\sigma)h_2(\sigma)][M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] + [2h_2(\sigma) - 1] \\
& \quad \times [B(\xi)g(\xi) - B(\xi)g(\varpi)]\} + B((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)g((1-\sigma)\xi + \sigma\varpi)
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden integrali alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)}B\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right)g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) - \frac{1}{\varpi - \xi}\int_{\xi}^{\varpi}B(x)g(x)dx \\
& \leq \frac{1}{2}\left\{[M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)]\int_0^1[2h_1(\sigma)h_2(\sigma) - h_1(\sigma) - h_2(\sigma)]d\sigma - N(\xi, \varpi)\right\} \\
& \quad + \frac{1}{2h_2\left(\frac{1}{2}\right)}\left\{[M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)]\int_0^1[h_2(\sigma) - 2h_1(\sigma)h_2(\sigma)]d\sigma\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [B(\xi)g(\xi) - B(\varpi)g(\xi)] \int_0^1 [2h_1(\sigma) - 1] d\sigma \Big\} \\
& + \frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)} \Big\{ [M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] \int_0^1 [h_1(\sigma) - 2h_1(\sigma)h_2(\sigma)] d\sigma \\
& \quad + [B(\xi)g(\xi) - B(\xi)g(\varpi)] \int_0^1 [2h_2(\sigma) - 1] d\sigma \Big\} \\
& + \frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)} \Big\{ [M(\xi, \varpi) - N(\xi, \varpi)] \int_0^1 h_1(\sigma)h_2(\sigma) d\sigma + [B(\varpi)g(\xi) - B(\xi)g(\xi)] \\
& \quad \times \int_0^1 h_1(\sigma) d\sigma + [B(\xi)g(\varpi) - B(\xi)g(\xi)] \int_0^1 h_2(\sigma) d\sigma + B(\xi)g(\xi) \Big\}.
\end{aligned}$$

Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 16. Teorem 21’de $h_1(\sigma) = h_2(\sigma) = \sigma$ olarak alınırsa

$$2B\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right)g\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \leq \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(x)g(x)dx + \frac{1}{6}M(\xi, \varpi) + \frac{1}{3}N(\xi, \varpi)$$

eşitsizliği elde edilir (Pachpatte 2003).

Lemma 2. $B, I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı I° üzerinde sürekli bir dönüşüm olsun. $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ ve $\sigma \in [0, 1]$ olmak üzere eğer $B' \in L[\xi, \varpi]$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \left[B(\xi) + 4B\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + B(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(x)dx \\
& = \frac{\varpi - \xi}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3}\right) B'\left(\frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2}\right) B'\left(\frac{1+\sigma}{2}\xi + \frac{1-\sigma}{2}\varpi\right) \right] d\sigma
\end{aligned}$$

olur (Sarıkaya *et al.* 2010).

İspat: Eşitliğin sağ tarafına kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
A_1 & = \int_0^1 \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3}\right) B'\left(\frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi\right) d\sigma \\
& = \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{2}{\varpi - \xi} B\left(\frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi\right) \Big|_0^1 - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_0^1 B\left(\frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi\right) d\sigma \\
& = \frac{2}{6(\varpi - \xi)} B(\varpi) + \frac{2}{3(\varpi - \xi)} B\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_0^1 B\left(\frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi\right) d\sigma
\end{aligned}$$

olur. Burada $x = \frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi$ ve $dx = \frac{\varpi-\xi}{2}d\sigma$ olarak alınırsa

$$A_1 = \frac{2}{6(\varpi-\xi)}\mathcal{B}(\varpi) + \frac{2}{3(\varpi-\xi)}\mathcal{B}\left(\frac{\xi+\varpi}{2}\right) - \frac{2}{(\varpi-\xi)^2}\int_{\frac{\xi+\varpi}{2}}^{\varpi}\mathcal{B}(x)dx$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2}\right) \mathcal{B}'\left(\frac{1+\sigma}{2}\xi + \frac{1-\sigma}{2}\varpi\right) d\sigma \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2}\right) \frac{2}{\xi-\varpi} \mathcal{B}\left(\frac{1+\sigma}{2}\xi + \frac{1-\sigma}{2}\varpi\right) \Big|_0^1 - \frac{1}{\xi-\varpi} \int_0^1 \mathcal{B}\left(\frac{1+\sigma}{2}\xi + \frac{1-\sigma}{2}\varpi\right) d\sigma \\ &= \frac{2}{6(\varpi-\xi)}\mathcal{B}(\xi) + \frac{2}{3(\varpi-\xi)}\mathcal{B}\left(\frac{\xi+\varpi}{2}\right) - \frac{2}{(\varpi-\xi)^2}\int_{\xi}^{\frac{\xi+\varpi}{2}}\mathcal{B}(x)dx \end{aligned}$$

olur. A_1 ve A_2 toplanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\frac{\varpi-\xi}{2}(A_1 + A_2) = \left[\frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{6} + \frac{2}{3}\mathcal{B}\left(\frac{\xi+\varpi}{2}\right) - \frac{1}{(\varpi-\xi)}\int_{\xi}^{\varpi}\mathcal{B}(x)dx \right].$$

İspat tamamlanmış olur. ■

Aşağıdaki teoremler Lemma 2'ye bağlı olarak türevlenebilen fonksiyonlar için Simpson tipli yeni eşitsizliklerdir.

Teorem 22. $\mathcal{B}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $\mathcal{B}' \in L_1[\xi, \varpi]$ olsun. $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ ve $\sigma \in [0,1]$ olmak üzere eğer $|\mathcal{B}'|$, $[\xi, \varpi]$ üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi+\varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi-\xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x)dx \right| \\ &\leq \frac{\varpi-\xi}{2} [K_1(\sigma)|\mathcal{B}'(\xi)| + K_2(\sigma)|\mathcal{B}'(\varpi)|] \\ K_1(\sigma) &= \frac{5}{36} + \int_0^1 h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \left[\left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| - \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \right] d\sigma \\ K_2(\sigma) &= \frac{5}{36} + \int_0^1 h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \left[\left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| - \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \right] d\sigma \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 2'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi\right) \right| d\sigma \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\frac{1+\sigma}{2}\xi + \frac{1-\sigma}{2}\varpi\right) \right| d\sigma \right\} \end{aligned}$$

olur. $|\mathcal{B}'|$ modifiye h -konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \int_0^1 \left[\left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left\{ h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)| + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\right) |\mathcal{B}'(\xi)| \right\} \right. \\ & \quad \left. + \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left\{ h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)| + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\right) |\mathcal{B}'(\varpi)| \right\} \right] d\sigma \\ & = \frac{\varpi - \xi}{2} [K_1(\sigma) |\mathcal{B}'(\xi)| + K_2(\sigma) |\mathcal{B}'(\varpi)|] \\ & \quad K_1(\sigma) = \frac{5}{36} + \int_0^1 h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \left[\left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| - \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \right] d\sigma \\ & \quad K_2(\sigma) = \frac{5}{36} + \int_0^1 h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \left[\left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| - \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \right] d\sigma \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 17. Teorem 22'nin şartları altında, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{5(\varpi - \xi)}{72} \{ |\mathcal{B}'(\xi)| + |\mathcal{B}'(\varpi)| \} \end{aligned}$$

olur (Özdemir *et al.* 2010).

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{211(\varpi - \xi)}{2^6 3^5} \{ |\mathcal{B}'(\xi)| + |\mathcal{B}'(\varpi)| \}$$

olur.

Teorem 23. $\mathcal{B}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $\mathcal{B}' \in L[\xi, \varpi]$, $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}'|^q$, $[\xi, \varpi]$ üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon, $\sigma \in [0, 1]$ ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left(\frac{2^{p+2} + 2}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} (K_3 + K_4)$$

$$K_3 = \left(\int_0^1 \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$K_4 = \left(\int_0^1 \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 2'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi\right) \right| d\sigma \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\frac{1+\sigma}{2}\xi + \frac{1-\sigma}{2}\varpi\right) \right| d\sigma \right\}$$

ve Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \left(\int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \mathcal{B}' \left(\left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \varpi + \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) \xi \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \mathcal{B}' \left(\left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \xi + \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) \varpi \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. $|\mathcal{B}'|^q$ modifiye h -konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \\
& \times \left\{ \left(\frac{2^{p+2} + 2}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q d\sigma + \int_0^1 h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\frac{2^{p+2} + 2}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q d\sigma + \int_0^1 \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{(\varpi - \xi)}{2} \left(\frac{2^{p+2} + 2}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} (K_3 + K_4)
\end{aligned}$$

$$K_3 = \left(\int_0^1 \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$K_4 = \left(\int_0^1 \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 18. Teorem 23'ün şartları altında, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left(\frac{2^{p+2} + 2}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} (|\mathcal{B}'(\xi)| + |\mathcal{B}'(\varpi)|)
\end{aligned}$$

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left(\frac{2^{p+2} + 2}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathcal{B}'(\xi)|^q + 3|\mathcal{B}'(\varpi)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\mathcal{B}'(\xi)|^q + |\mathcal{B}'(\varpi)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left(\frac{2^{p+2} + 2}{6^{p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{(2^s(s-1) + 1)|\mathcal{B}'(\xi)|^q + (2^{s+1} - 1)|\mathcal{B}'(\varpi)|^q}{2^s(s+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{(2^{s+1} - 1)|\mathcal{B}'(\xi)|^q + 2^s(s-1)|\mathcal{B}'(\varpi)|^q}{2^s(s+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

olur.

Teorem 24. $\mathcal{B}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $\mathcal{B}' \in L[\xi, \varpi]$, $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}'|^q$, $[\xi, \varpi]$ üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon, $\sigma \in [0, 1]$ ve $q \geq 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left(\frac{5}{36} \right)^{1 - \frac{1}{q}} (K_5 + K_6)$$

$$K_5 = \left(\int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$K_6 = \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 2'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi\right) \right| d\sigma \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\frac{1+\sigma}{2}\xi + \frac{1-\sigma}{2}\varpi\right) \right| d\sigma \right\}
\end{aligned}$$

ve Power-Mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \left(\int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\varpi + \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\xi\right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\xi + \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\varpi\right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. $|\mathcal{B}'|^q$ modifiye h -konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left(\frac{5}{36} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \left(\int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left(\frac{5}{36} \right)^{1-\frac{1}{q}} (K_5 + K_6)
\end{aligned}$$

$$K_5 = \left(\int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$K_6 = \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. ■

Sonuç 19. Teorem 24'ün şartları altında, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{5(\varpi - \xi)}{72} \{ |\mathcal{B}'(\xi)| + |\mathcal{B}'(\varpi)| \}$$

olur (Özdemir *et al.* 2010).

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{\varpi - \xi}{72} (5)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \left(\frac{29|\mathcal{B}'(\xi)|^q + 61|\mathcal{B}'(\varpi)|^q}{18} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{61|\mathcal{B}'(\xi)|^q + 29|\mathcal{B}'(\varpi)|^q}{18} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

olur (Özdemir *et al.* 2010).

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{(\varpi - \xi) 5^{1-\frac{1}{q}}}{2^{3-\frac{1}{q}} 3^2} \times \left\{ \left(\frac{|\mathcal{B}'(\xi)|^q (2+3^s 6s+3^{s+1}) + |\mathcal{B}'(\varpi)|^q [2^{-s}(7 \cdot 3^{s+1} + 2^{s+3} 3^{s+1} - 2 \cdot 5^{s+2}) + 3^s 6s(2^{-s}-1)]}{3^s(s+1)(s+2)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|\mathcal{B}'(\xi)|^q [2^{-s}(7 \cdot 3^{s+1} + 2^{s+3} 3^{s+1} - 2 \cdot 5^{s+2}) + 3^s 6s(2^{-s}-1)] + |\mathcal{B}'(\varpi)|^q (2+3^s 6s+3^{s+1})}{3^s(s+1)(s+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

olur.

Teorem 25. $\mathcal{B}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $\mathcal{B}' \in L[\xi, \varpi]$, $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}'|^q$, $[\xi, \varpi]$ üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon, $\sigma \in [0, 1]$ ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{\varpi - \xi}{2 \cdot 3^{\frac{p+2}{p}} (p^2 + 3p + 2)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (6p + 8)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 (1 - \sigma) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(1 - h \left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \right) |B'(\xi)|^q + h \left(\frac{1+\sigma}{2} \right) |B'(\varpi)|^q \right] d\sigma \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (1-\sigma) \left[h \left(\frac{1+\sigma}{2} \right) |B'(\xi)|^q + \left(1 - h \left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \right) |B'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Big] \\
& + \frac{1}{2} (2^{p+2} + 3p + 5)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[\left(\int_0^1 \sigma \left[\left(1 - h \left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \right) |B'(\xi)|^q + h \left(\frac{1+\sigma}{2} \right) |B'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \sigma \left[h \left(\frac{1+\sigma}{2} \right) |B'(\xi)|^q + \left(1 - h \left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \right) |B'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 2'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[B(\xi) + 4B \left(\frac{\xi + \varpi}{2} \right) + B(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left| B' \left(\frac{1+\sigma}{2} \varpi + \frac{1-\sigma}{2} \xi \right) \right| d\sigma \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left| B' \left(\frac{1+\sigma}{2} \xi + \frac{1-\sigma}{2} \varpi \right) \right| d\sigma \right\}
\end{aligned}$$

ve Hölder-İşcan eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[B(\xi) + 4B \left(\frac{\xi + \varpi}{2} \right) + B(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(x) dx \right| \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \\
& \times \left\{ \left[\left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| B' \left(\left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \varpi + \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) \xi \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sigma \left| B' \left(\left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \varpi + \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) \xi \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\
& \left. + \left[\left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| B' \left(\left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \xi + \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) \varpi \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sigma \left| \mathcal{B}' \left(\left(\frac{1+\sigma}{2} \right) \xi + \left(\frac{1-\sigma}{2} \right) \varpi \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \Bigg\}$$

olur. $|\mathcal{B}'|^q$ modifiye h -konveks fonksiyon olmak üzer

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \left[\left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left(\int_0^1 (1-\sigma) \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \left. \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sigma \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q \right. \right. \right. \\ & \quad + \left. \left. h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \left[\left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left. \left(\int_0^1 (1-\sigma) \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \left. \left. \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sigma \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q d\sigma \right] \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \\ & = \frac{\varpi - \xi}{2 \cdot 3^{\frac{p+2}{p}} (p^2 + 3p + 2)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (6p + 8)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 (1-\sigma) \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \left. \left(\int_0^1 (1-\sigma) \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \Bigg\} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(2^{p+2}+3p+5)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left[\left(\int_0^1 \sigma \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |B'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |B'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 \sigma \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |B'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |B'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \Bigg\}$$

elde edilir. ■

Sonuç 20. Teorem 25'in şartları altında, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[B(\xi) + 4B\left(\frac{\xi+\varpi}{2}\right) + B(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi-\xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(x) dx \right| \\ \leq \frac{\varpi-\xi}{2^{\frac{1}{q}+1} 3^{1+\frac{2}{p}} (p^2+3p+2)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left[(6p+8)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2} (2^{p+2}+3p+5)^{\frac{1}{p}} \right] (|B'(\xi)| + |B'(\varpi)|) \right\}$$

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[B(\xi) + 4B\left(\frac{\xi+\varpi}{2}\right) + B(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi-\xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(x) dx \right| \\ \leq \frac{\varpi-\xi}{2 \cdot 3^{1+\frac{2}{p}} (p^2+3p+2)^{\frac{1}{p}}} \\ \times \left\{ (6p+8)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|B'(\xi)|^q + 2|B'(\varpi)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|B'(\xi)|^q + |B'(\varpi)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\ \left. + \frac{(2^{p+2}+3p+5)^{\frac{1}{p}}}{2} \left[\left(\frac{|B'(\xi)|^q + 5|B'(\varpi)|^q}{12} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{5|B'(\xi)|^q + |B'(\varpi)|^q}{12} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[B(\xi) + 4B\left(\frac{\xi+\varpi}{2}\right) + B(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi-\xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(x) dx \right| \\ \leq \frac{\varpi-\xi}{2 \cdot 3^{1+\frac{2}{p}} (p^2+3p+2)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (6p+8)^{\frac{1}{p}} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\left(\frac{2s+2^{-s}}{(s+1)(s+2)} + \frac{2^{-s}-2}{s+1} + \frac{1}{2} \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \frac{2^{-s}(2^{s+2}-s-3)}{(s+1)(s+2)} |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\left(\frac{2^{-s}(2^{s+2}-s-3)}{(s+1)(s+2)} \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(\frac{2s+2^{-s}}{(s+1)(s+2)} + \frac{2^{-s}-2}{s+1} + \frac{1}{2} \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \frac{(2^{p+2}+3p+5)^{\frac{1}{p}}}{2} \\
& \times \left[\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{2s+2^{-s}}{(s+1)(s+2)} \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(\frac{2s+2^{-s}}{(s+1)(s+2)} \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\left(\frac{2s+2^{-s}}{(s+1)(s+2)} \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(\frac{1}{2} - \frac{2s+2^{-s}}{(s+1)(s+2)} \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 26. $\mathcal{B}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $\mathcal{B}' \in L[\xi, \varpi]$, $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}'|^q$, $[\xi, \varpi]$ aralığı üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon, $q \geq 1$ ve $\sigma \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi+\varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi-\xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{\varpi-\xi}{2} \left\{ \left(\frac{29}{324} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \times \left[\left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \left(\frac{4}{81} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 2'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\frac{1+\sigma}{2}\varpi + \frac{1-\sigma}{2}\xi\right) \right| d\sigma \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\frac{1+\sigma}{2}\xi + \frac{1-\sigma}{2}\varpi\right) \right| d\sigma \right\} \end{aligned}$$

ve Geliştirilmiş Power-Mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \left[\left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \right. \\ & \quad \times \left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\varpi + \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\xi\right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\varpi + \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\xi\right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \left[\left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \times \left(\int_0^1 (1-\sigma) \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\xi + \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\varpi\right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. \left. + \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left| \mathcal{B}'\left(\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\xi + \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\varpi\right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \end{aligned}$$

olur. $|\mathcal{B}'|^q$ modifiye h -konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| d\sigma \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\left(1 - h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| d\sigma \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\left(1 - h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \\
& \quad + \left[\left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| d\sigma \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| d\sigma \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \frac{\varpi - \xi}{2} \left\{ \left(\frac{29}{324} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left[\left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\left(1 - h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left. \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \left(\frac{4}{81} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{3} \right| \left[\left(1 - h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left. \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right) \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$+ \left(\int_0^1 \sigma \left| \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2} \right| \left[h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q + \left(1 - h\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

elde edilir. ■

Sonuç 21. Teorem 26'nın şartları altında, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{5(\varpi - \xi)}{72} [|\mathcal{B}'(\xi)| + |\mathcal{B}'(\varpi)|]$$

olur (Özdemir *et al.* 2010).

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\varpi - \xi)}{2} \left\{ \frac{29}{324 \cdot 348^{\frac{1}{q}}} \left[(137|\mathcal{B}'(\xi)|^q + 211|\mathcal{B}'(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} + (211|\mathcal{B}'(\xi)|^q + 137|\mathcal{B}'(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{2^{2-\frac{6}{q}}}{3^{4+\frac{1}{q}}} \left[(37|\mathcal{B}'(\xi)|^q + 155|\mathcal{B}'(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} + (155|\mathcal{B}'(\xi)|^q + 37|\mathcal{B}'(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \end{aligned}$$

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[\mathcal{B}(\xi) + 4\mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) + \mathcal{B}(\varpi) \right] - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\varpi - \xi)}{3^{4-\frac{1}{q}} 6^s} \left[\left(\frac{29}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3^{s+2} 2s + 3^{s+3} + 2}{2(s+2)(s+3)} \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{3^{s+2}(2^{s+2}s - 2^{s+2}9 - 2s^2 - 15s - 33) + 5^{s+2}(2s+26)}{2(s+1)(s+2)(s+3)} \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + (4)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3^{s+2}s + 2s + 8}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right) |\mathcal{B}'(\xi)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{3^{s+2}(s+6 + 2^s s^2 - 3s 2^s + 2^{s+1}) + 5^{s+2}(2s+26)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right) |\mathcal{B}'(\varpi)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(\frac{29}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3^{s+2}(2^{s+2}s - 2^{s+2}9 - 2s^2 - 15s - 33) + 5^{s+2}(2s + 26)}{2(s+1)(s+2)(s+3)} \right) |B'(\xi)|^q \right. \right. \\
& \quad + \left(\frac{3^{s+2}2s + 3^{s+3} + 2}{2(s+2)(s+3)} |B'(\varpi)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (4)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3^{s+2}(s+6 + 2^s s^2 - 3s2^s + 2^{s+1}) + 5^{s+2}(2s + 26)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right) |B'(\xi)|^q \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{3^{s+2}s + 2s + 8}{(s+1)(s+2)(s+3)} |B'(\varpi)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right]
\end{aligned}$$

olur.

Lemma 3. $\mathcal{B}: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\xi, \varpi \in I^\circ$, $\xi < \varpi$ ve $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ olmak üzere eğer $B'' \in L[\xi, \varpi]$ ise

$$\begin{aligned}
I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi]) &= \frac{1}{\varpi - \xi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[\mathcal{B} \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) + \mathcal{B} \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right] - \frac{1}{(\varpi - \xi)^2} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varpi - \xi}{2n^3} \left[\int_0^1 \sigma(1 - \sigma) B'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1 - \sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) d\sigma \right]
\end{aligned}$$

dir. Burada $\sigma \in [0, 1]$ 'dir (Yıldız and Yergöz 2023).

İspat: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için aşağıdaki eşitliğe kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
I_i &= \int_0^1 \sigma(1 - \sigma) B'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1 - \sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) d\sigma \\
I_i &= \frac{n}{\xi - \varpi} (\sigma - \sigma^2) B' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1 - \sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \Bigg|_0^1 \\
&\quad - \frac{n}{\xi - \varpi} \int_0^1 (1 - 2\sigma) B' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1 - \sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) d\sigma \\
I_i &= \frac{n}{\varpi - \xi} \int_0^1 (1 - 2\sigma) B' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1 - \sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) d\sigma.
\end{aligned}$$

Buradan

$$I_i = \frac{n}{\varpi - \xi} \left[\frac{n}{\xi - \varpi} (1 - 2\sigma) B \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1 - \sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right] \Bigg|_0^1$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2n}{\xi - \varpi} \int_0^1 \mathcal{B} \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) d\sigma \Big] \\
I_i = & \frac{n}{\varpi - \xi} \left[\frac{n}{\varpi - \xi} \left(\mathcal{B} \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) + \mathcal{B} \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{2n^2}{(\xi - \varpi)^2} \int_{\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n}}^{\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n}} \mathcal{B}(x) dx \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
* x &= \sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \\
* dx &= \frac{\xi - \varpi}{n} d\sigma
\end{aligned}$$

değişken değişimi yapıp I_i , $\frac{\varpi - \xi}{2n^3}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\varpi - \xi}{2n^3} I_i &= \frac{1}{2n^2} \left[\frac{n}{\varpi - \xi} \left(\mathcal{B} \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) + \mathcal{B} \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2n^2}{(\xi - \varpi)^2} \int_{\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n}}^{\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n}} \mathcal{B}(x) dx \right] \\
\frac{\varpi - \xi}{2n^3} I_i &= \frac{1}{2n(\varpi - \xi)} \left[\mathcal{B} \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) + \mathcal{B} \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{(\varpi - \xi)^2} \int_{\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n}}^{\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n}} \mathcal{B}(x) dx
\end{aligned}$$

olur. Son olarak her iki tarafa toplam sembolü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varpi - \xi}{2n^3} I_i &= \frac{1}{\varpi - \xi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[\mathcal{B} \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) + \mathcal{B} \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{(\varpi - \xi)^2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n}}^{\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n}} \mathcal{B}(x) dx \\
&= \frac{1}{\varpi - \xi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[\mathcal{B} \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) + \mathcal{B} \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{(\varpi - \xi)^2} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx
\end{aligned}$$

bulunur. Bu şekilde

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varpi - \xi}{2n^3} \left[\int_0^1 \sigma(1-\sigma) \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{\varpi - \xi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[\mathcal{B} \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) + \mathcal{B} \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right] - \frac{1}{(\varpi - \xi)^2} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

Teorem 27. $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\xi, \varpi \in I^\circ$, $\xi < \varpi$, $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$ ve $\sigma \in [0, 1]$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}''|$, $[\xi, \varpi]$ aralığı üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} |I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right| \int_0^1 \sigma(1-\sigma) h(\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| \int_0^1 \sigma(1-\sigma)(1-h(\sigma)) d\sigma \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 3'ten ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\begin{aligned} |I_n(\mathcal{B}_n, [a, b])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\sigma - \sigma^2| \right. \\ &\quad \left. \times \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| d\sigma \right] \end{aligned}$$

olur. $|\mathcal{B}''|$ modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\sigma - \sigma^2| \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| \right] d\sigma \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right| \int_0^1 (\sigma - \sigma^2) h(\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| \int_0^1 (\sigma - \sigma^2) (1-h(\sigma)) d\sigma \right] \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 22. Teorem 27'nin şartları altında $h(\sigma)$ 'lara uygun değerler verilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{12n^3} \left| \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right| \right|$$

olur.

ii. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınırsa

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{12} |\mathcal{B}''(\xi)|$$

eşitsizliği yazılır.

iii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\begin{aligned} |I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{24n^3} \left| \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right| + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| \right| \end{aligned}$$

olur.

iv. $h(\sigma) = \sigma$ alındığında bulunan eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ için aşağıdaki sonuç Sarıkaya ve Aktan'ın 2011'de elde ettiği sonuç olur:

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{12} \left[\frac{|\mathcal{B}''(\xi)| + |\mathcal{B}''(\varpi)|}{2} \right].$$

v. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\begin{aligned} |I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{12n^3(s+2)(s+3)} \left[6 \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right| \right. \\ &\quad \left. + (s^2 + 5s - 5) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| \right] \end{aligned}$$

olur.

vi. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| &\leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{12(s+2)(s+3)} [6|\mathcal{B}''(\xi)| + (s^2 + 5s - 5)|\mathcal{B}''(\varpi)|] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 28. $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\xi, \varpi \in I^\circ$, $\xi < \varpi$, $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$ ve $\sigma \in [0, 1]$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}''|^q$, $[\xi, \varpi]$ aralığı üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon ve $p > 1$ ise

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \right. \\ \left. \times \int_0^1 h(\sigma) d\sigma + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (1-h(\sigma)) d\sigma \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 3'ten ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\sigma - \sigma^2| \right. \\ \left. \times \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| d\sigma \right]$$

yazılır. İntegraller için Hölder Eşitsizliği ve $|\mathcal{B}''|^q$ nun bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\sigma - \sigma^2|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} \\ \times \left[\int_0^1 \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q d\sigma \right]^{\frac{1}{q}} \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\sigma - \sigma^2|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \right. \right. \\ \left. \left. + (1-h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right]^{\frac{1}{q}} \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \right. \\ \left. \times \int_0^1 h(\sigma) d\sigma + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (1-h(\sigma)) d\sigma \right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. ■

Sonuç 23. Teorem 28'in şartları altında $h(\sigma)$ 'lara uygun değerler verilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

olur.

ii. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınırsa

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{2} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) |\mathcal{B}''(\xi)|$$

eşitsizliği yazılır.

iii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2^{\frac{1}{q}+1} n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

olur.

iv. $h(\sigma) = \sigma$ alındığında bulunan eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{2^{\frac{1}{q}+1}} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) [|\mathcal{B}''(\xi)|^q + |\mathcal{B}''(\varpi)|^q]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır.

v. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3(s+1)} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + s \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

olur.

vi. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınırsa

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{2(s+1)} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) [|\mathcal{B}''(\xi)|^q + s|\mathcal{B}''(\varpi)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 29. $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\xi, \varpi \in I^\circ$, $\xi < \varpi$ ve $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}''|^q$, $[\xi, \varpi]$ aralığı üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ ise

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \times \int_0^1 (\sigma - \sigma^2) h(\sigma) d\sigma + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (\sigma - \sigma^2) (1 - h(\sigma)) d\sigma \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\sigma \in [0,1]$ 'dir.

İspat: Lemma 3'ten ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\sigma - \sigma^2| \times \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| d\sigma \right]$$

yazılır. İntegraller için Power-Mean Eşitsizliği ve $|\mathcal{B}''|^q$ nun bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} |I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\left(\int_0^1 |\sigma - \sigma^2| d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\sigma - \sigma^2| \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\left(\int_0^1 (\sigma - \sigma^2) d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (\sigma - \sigma^2) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (1-h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \right. \\
&\quad \times \int_0^1 (\sigma - \sigma^2) h(\sigma) d\sigma + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (\sigma - \sigma^2) (1 - \\
&\quad \left. h(\sigma)) d\sigma \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 24. Teorem 29'un şartları altında $h(\sigma)$ 'lara uygun değerler verilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{12n^3} \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|$$

olur.

ii. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınırsa

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{12} |\mathcal{B}''(\xi)|$$

eşitsizliği yazılır.

iii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2^{\frac{1}{q}+2} 3n^3} \left[\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

olur.

iv. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınırsa

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{2^{\frac{1}{q}+2} 3} [|\mathcal{B}''(\xi)|^q + |\mathcal{B}''(\varpi)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır.

v. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{12n^3(s^2 + 5s + 6)^{\frac{1}{q}}} \\ \times \left[6 \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (s^2 + 5s - 5) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

olur.

vi. $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınırsa

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{12(s^2 + 5s + 6)^{\frac{1}{q}}} [6|\mathcal{B}''(\xi)|^q + (s^2 + 5s - 5)|\mathcal{B}''(\varpi)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 30. $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\xi, \varpi \in I^\circ$, $\xi < \varpi$, $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}''|^q, [\xi, \varpi]$ aralığı üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon ise

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left\{ (\beta(p+1, p+2))^{\frac{1}{p}} \right. \\ \times \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (1 - h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left. + (\beta(p+2, p+1))^{\frac{1}{p}} \right. \\ \times \left. \left(\int_0^1 \sigma \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (1 - h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\sigma \in [0, 1]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 3'ten ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\sigma - \sigma^2| \right. \\ \times \left. \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1 - \sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| d\sigma \right]$$

yazılır. İntegraller için Hölder-İşcan eşitsizliği ve $|\mathcal{B}''|^q$ nun bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \sigma) |\sigma - \sigma^2|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \times \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1 - \sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 \sigma |\sigma - \sigma^2|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sigma \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1 - \sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\int_0^1 \sigma^p (1 - \sigma)^{p+1} d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \times \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (1 - h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 \sigma^{p+1} (1 - \sigma)^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_0^1 \sigma \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (1 - h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left\{ (\beta(p+1, p+2))^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \times \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (1 - h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + (\beta(p+2, p+1))^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_0^1 \sigma \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (1 - h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 25. Teorem 30'un şartları altında $h(\sigma)$ 'lara uygun değerler verilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\begin{aligned}
|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2^{\frac{1}{q}+1} n^3} \left\{ \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right| \left[\beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) + \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \right] \right\}
\end{aligned}$$

olur.

ii. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınırsa

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{2^{\frac{1}{q}+1}} |\mathcal{B}''(\xi)| \left[\beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) + \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \right]$$

eşitsizliği yazılır.

iii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2 \cdot 6^{\frac{1}{q}} n^3} \left\{ \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) \left[\left| \mathcal{B}''\left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n}\right) \right|^q + 2 \left| \mathcal{B}''\left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \left[2 \left| \mathcal{B}''\left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n}\right) \right|^q + \left| \mathcal{B}''\left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

olur.

iv. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınır

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{2^{\frac{1}{q}+1}} \left\{ \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) \left[\frac{|\mathcal{B}''(\xi)|^q + 2|\mathcal{B}''(\varpi)|^q}{3} \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \left[\frac{2|\mathcal{B}''(\xi)|^q + |\mathcal{B}''(\varpi)|^q}{3} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği yazılır.

v. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2^{\frac{1}{q}+1} n^3 (s^2 + 3s + 2)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times \left\{ \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) \left[2 \left| \mathcal{B}''\left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n}\right) \right|^q + (s^2 + 3s) \left| \mathcal{B}''\left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$+ \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \left[2(s+1) \left| \mathcal{B}''\left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n}\right) \right|^q \right.$$

$$\left. \left. + (s^2 + s) \left| \mathcal{B}''\left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

olur.

vi. $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{2^{\frac{1}{q}+1}(s^2 + 3s + 2)^{\frac{1}{q}}} \left\{ \beta^{\frac{1}{p}}(p + 1, p + 2) [2|\mathcal{B}''(\xi)|^q + (s^2 + 3s)|\mathcal{B}''(\varpi)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \beta^{\frac{1}{p}}(p + 2, p + 1) [2(s + 1)|\mathcal{B}''(\xi)|^q + (s^2 + s)|\mathcal{B}''(\varpi)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sigma^p (1 - \sigma)^{p+1} d\sigma &= \beta(p + 1, p + 2) \\ \int_0^1 \sigma^{p+1} (1 - \sigma)^p d\sigma &= \beta(p + 2, p + 1) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 31. $\mathcal{B}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\xi, \varpi \in I^\circ$, $\xi < \varpi$, $q \geq 1$, $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$ olsun. Eğer $|\mathcal{B}''|^q, [\xi, \varpi]$ üzerinde bir modifiye h -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & |I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \sigma(1 - \sigma)^2 h(\sigma) d\sigma \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \sigma(1 - \sigma)^2 (1 - h(\sigma)) d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \sigma^2(1 - \sigma) h(\sigma) d\sigma \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \sigma^2(1 - \sigma) (1 - h(\sigma)) d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\sigma \in [0, 1]$ 'dir.

İspat: Lemma 3'ten ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\sigma - \sigma^2| \right. \\ \left. \times \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right| d\sigma \right]$$

yazılır. İntegraller için Geliştirilmiş Power-Mean eşitsizliği ve $|\mathcal{B}''|^q$ nun bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\int_0^1 (1-\sigma) |\sigma - \sigma^2| d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ \times \left(\int_0^1 (1-\sigma) |\sigma - \sigma^2| \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left. + \left(\int_0^1 \sigma |\sigma - \sigma^2| d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ \times \left(\int_0^1 \sigma |\sigma - \sigma^2| \left| \mathcal{B}'' \left(\sigma \frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} + (1-\sigma) \frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-\sigma)(\sigma - \sigma^2) \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \right. \right. \right. \\ \left. \left. + (1-h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left. + \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sigma(\sigma - \sigma^2) \left[h(\sigma) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \right. \right. \right. \\ \left. \left. + (1-h(\sigma)) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \sigma(1-\sigma)^2 h(\sigma) d\sigma \right. \right. \\ \left. \left. + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \sigma(1-\sigma)^2 (1-h(\sigma)) d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \sigma^2(1-\sigma) h(\sigma) d\sigma \right. \right. \\ \left. \left. + \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \sigma^2(1-\sigma) (1-h(\sigma)) d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

$$+ \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \sigma^2 (1-\sigma) (1-h(\sigma)) d\sigma \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\}$$

elde edilir. ■

Sonuç 26. Teorem 31'in şartları altında $h(\sigma)$ 'lara uygun değerler verilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{12n^3} \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|$$

olur.

ii. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınır

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{12} |\mathcal{B}''(\xi)|$$

eşitsizliği yazılır.

iii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\begin{aligned} |I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{5^{\frac{1}{q}} 24 n^3} \\ &\quad \times \left[\left(2 \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3 \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(3 \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + 2 \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

olur.

iv. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınır

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ &\leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{5^{\frac{1}{q}} 24} \left[(2|\mathcal{B}''(\xi)|^q + 3|\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} + (3|\mathcal{B}''(\xi)|^q + 2|\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır.

v. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$|I_n(\mathcal{B}_n, [\xi, \varpi])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\varpi - \xi)^2}{24n^3(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)^{\frac{1}{q}}} \\ \times \left\{ \left(24 \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (s^3 + 9s^2 + 26s) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left((12s + 24) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i)\xi + i\varpi}{n} \right) \right|^q + (s^3 + 9s^2 + 14s) \left| \mathcal{B}'' \left(\frac{(n-i-1)\xi + (i+1)\varpi}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

olur.

vi. Yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ ve $i = 0$ alınır

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\xi) + \mathcal{B}(\varpi)}{2} - \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(x) dx \right| \\ \leq \frac{(\varpi - \xi)^2}{24(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)^{\frac{1}{q}}} \left\{ (24|\mathcal{B}''(\xi)|^q + (s^3 + 9s^2 + 26s)|\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + ((12s + 24)|\mathcal{B}''(\xi)|^q + (s^3 + 9s^2 + 14s)|\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği yazılır.

Lemma 4. $\mathcal{B} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\xi < \varpi$ ve $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$ olmak üzere

$$\frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \\ = \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 \mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi) d\sigma + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 \mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi) d\sigma$$

eşitliği elde edilir. Burada $x \in [\xi, \varpi]$ ve $\sigma \in [0, 1]$ 'dir (Set et al. 2014).

İspat: Kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$I_1 = \int_0^1 \sigma^2 \mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi) d\sigma \\ = \frac{\sigma^2}{(x - \xi)} \mathcal{B}'(\sigma x + (1 - \sigma)\xi) \Big|_0^1 - \frac{2}{(x - \xi)} \int_0^1 \sigma \mathcal{B}'(\sigma x + (1 - \sigma)\xi) d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathcal{B}'(x)}{(x-\xi)} - \frac{2}{(x-\xi)} \left[\frac{\sigma}{(x-\xi)} \mathcal{B}(\sigma x + (1-\sigma)\xi) \right]_0^1 - \frac{1}{(x-\xi)} \int_0^1 \mathcal{B}(\sigma x + (1-\sigma)\xi) d\sigma \\
&= \frac{\mathcal{B}'(x)}{(x-\xi)} - \frac{2\mathcal{B}(x)}{(x-\xi)^2} + \frac{2}{(x-\xi)^2} \int_0^1 \mathcal{B}(\sigma x + (1-\sigma)\xi) d\sigma
\end{aligned}$$

bulunur. Değişken değiştirme işlemi yapılırsa $u = \sigma x + (1-\sigma)\xi$ olur. Burada $\sigma \in [0,1]$ dir.

Ayrıca her iki taraf $\frac{(x-\xi)^3}{2(\varpi-\xi)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-\xi)^3}{2(\varpi-\xi)} \int_0^1 \sigma^2 \mathcal{B}''(\sigma x + (1-\sigma)\xi) d\sigma \\
&= \frac{(x-\xi)^2 \mathcal{B}'(x)}{2(\varpi-\xi)} - \frac{(x-\xi)\mathcal{B}(x)}{\varpi-\xi} + \frac{1}{\varpi-\xi} \int_\xi^x \mathcal{B}(u) du
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde $I_2 = \int_0^1 \sigma^2 \mathcal{B}''(\sigma x + (1-\sigma)\varpi) d\sigma$ olmak üzere I_2 'ye kısmi integrasyon uygulanır ve değişken değişimi yapılır ardından $\frac{(\varpi-x)^3}{2(\varpi-\xi)}$ ile çarpılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\frac{(\varpi-x)^3}{2(\varpi-\xi)} \int_0^1 \sigma^2 \mathcal{B}''(\sigma x + (1-\sigma)\varpi) d\sigma \\
&= -\frac{(\varpi-x)^2 \mathcal{B}'(x)}{2(\varpi-\xi)} - \frac{(\varpi-x)\mathcal{B}(x)}{\varpi-\xi} + \frac{1}{\varpi-\xi} \int_x^\varpi \mathcal{B}(u) du.
\end{aligned}$$

$I_1 + I_2$ ifadesinden Lemma 4'ün sol tarafı elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 32. $\mathcal{B} : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$ olsun. $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ ve $x \in [\xi, \varpi]$ olmak üzere $|\mathcal{B}''|$ bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\varpi-\xi} \int_\xi^\varpi \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi+\varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\
&\leq \frac{(x-\xi)^3}{2(\varpi-\xi)} \left\{ \frac{|\mathcal{B}''(\xi)|}{3} + \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) [|\mathcal{B}''(x)| - |\mathcal{B}''(\xi)|] d\sigma \right\} \\
&\quad + \frac{(\varpi-x)^3}{2(\varpi-\xi)} \left\{ \frac{|\mathcal{B}''(\varpi)|}{3} + \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) [|\mathcal{B}''(x)| - |\mathcal{B}''(\varpi)|] d\sigma \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\sigma \in [0,1]$ 'dir.

İspat: Lemma 4'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)| d\sigma \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)| d\sigma \end{aligned}$$

yazılır. $|\mathcal{B}''(x)|$ bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)| + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\xi)|] d\sigma \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)| + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\varpi)|] d\sigma \\ & = \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left\{ \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)| d\sigma + \int_0^1 \sigma^2 |\mathcal{B}''(\xi)| d\sigma - \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)| d\sigma \right\} \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left\{ \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)| d\sigma + \int_0^1 \sigma^2 |\mathcal{B}''(\varpi)| d\sigma - \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |\mathcal{B}''(\varpi)| d\sigma \right\} \\ & = \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left\{ \frac{|\mathcal{B}''(\xi)|}{3} + \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) [|\mathcal{B}''(x)| - |\mathcal{B}''(\xi)|] d\sigma \right\} \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left\{ \frac{|\mathcal{B}''(\varpi)|}{3} + \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) [|\mathcal{B}''(x)| - |\mathcal{B}''(\varpi)|] d\sigma \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 27. Teorem 32'nin şartları altında:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\frac{|\mathcal{B}''(x)|}{3} \right) + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\frac{|\mathcal{B}''(x)|}{3} \right) \\ & = \frac{|\mathcal{B}''(x)|}{6(\varpi - \xi)} ((x - \xi)^3 + (\varpi - x)^3) \end{aligned}$$

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{24(\varpi - \xi)} \{ (x - \xi)^3 (|\mathcal{B}''(\xi)| + 3|\mathcal{B}''(x)|) + (\varpi - x)^3 (|\mathcal{B}''(\varpi)| + 3|\mathcal{B}''(x)|) \}$$

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{6(\varpi - \xi)(s + 3)} \{ (x - \xi)^3 (s|\mathcal{B}''(\xi)| + 3|\mathcal{B}''(x)|) + (\varpi - x)^3 (s|\mathcal{B}''(\varpi)| + 3|\mathcal{B}''(x)|) \}$$

olur.

iv. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $|\mathcal{B}''(x)| \leq M$, ($M > 0$ ve $x \in [\xi, \varpi]$) olarak seçilirse

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right|$$

$$\leq \frac{M}{6(\varpi - \xi)} \left[\frac{1}{24} (\varpi - \xi)^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right)^2 \right]$$

$$\leq \frac{M(\varpi - \xi)}{36}$$

yazılır.

v. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $\|\mathcal{B}''\|_{\infty} = \sup |\mathcal{B}''(\sigma)| < \infty$, $\sigma \in (\xi, \varpi)$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)}{36} \|\mathcal{B}''\|_{\infty}$$

bulunur.

vi. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $x = \frac{\xi + \varpi}{2}$ olarak seçilirse

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \right| \leq \frac{M(\varpi - \xi)}{144}$$

yazılır.

Teorem 33. $\mathcal{B} : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$, $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ olsun. Eğer $x \in [\xi, \varpi]$ seçilirse ve $|\mathcal{B}''|^q$ bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\frac{1}{2p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\mathcal{B}''(\xi)|^q + \int_0^1 h(\sigma) [|\mathcal{B}''(x)|^q - |\mathcal{B}''(\xi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\frac{1}{2p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\mathcal{B}''(\varpi)|^q + \int_0^1 h(\sigma) [|\mathcal{B}''(x)|^q - |\mathcal{B}''(\varpi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada $\sigma \in [0, 1]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 'dir.

İspat: Lemma 4'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)| d\sigma + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)| d\sigma \end{aligned}$$

ve Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\int_0^1 \sigma^{2p} d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\int_0^1 \sigma^{2p} d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazılır. $|\mathcal{B}''|^q$ bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\int_0^1 \sigma^{2p} d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\xi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\int_0^1 \sigma^{2p} d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 [h(\sigma)|\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma))|\mathcal{B}''(\varpi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\frac{1}{2p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\mathcal{B}''(\xi)|^q + \int_0^1 h(\sigma)[|\mathcal{B}''(x)|^q - |\mathcal{B}''(\xi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\frac{1}{2p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\mathcal{B}''(\varpi)|^q + \int_0^1 h(\sigma)[|\mathcal{B}''(x)|^q - |\mathcal{B}''(\varpi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma & \leq \int_0^1 [h(\sigma)|\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma))|\mathcal{B}''(\xi)|^q] d\sigma \\
\int_0^1 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma & \leq \int_0^1 [h(\sigma)|\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma))|\mathcal{B}''(\varpi)|^q] d\sigma
\end{aligned}$$

dır. ■

Sonuç 28. Teorem 33'ün şartları altında:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\
& \leq \frac{1}{2(\varpi - \xi)} \left(\frac{1}{2p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} |\mathcal{B}''(x)| [(x - \xi)^3 + (\varpi - x)^3]
\end{aligned}$$

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\
& \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{q}+1}(\varpi - \xi)(2p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (x - \xi)^3 (|\mathcal{B}''(x)|^q + |\mathcal{B}''(\xi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (\varpi - x)^3 (|\mathcal{B}''(x)|^q + |\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\
& \leq \frac{1}{2(\varpi - \xi)(2p + 1)^{\frac{1}{p}}(s + 1)^{\frac{1}{q}}} \left\{ (x - \xi)^3 (|\mathcal{B}''(x)|^q + s|\mathcal{B}''(\xi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$+(\varpi - x)^3(|\mathcal{B}''(x)|^q + s|\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}}\Big\}$$

olur.

iv. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $|\mathcal{B}''(x)| \leq M$, ($M > 0$ ve $x \in [\xi, \varpi]$) olarak seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \frac{M}{2(\varpi - \xi)(2p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{24} (\varpi - \xi)^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right)^2 \right] \\ & \leq \frac{M(\varpi - \xi)}{12(2p + 1)^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

yazılır.

v. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $\|\mathcal{B}''\|_{\infty} = \sup |\mathcal{B}''(\sigma)| < \infty$, $\sigma \in (\xi, \varpi)$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)}{12(2p + 1)^{\frac{1}{p}}} \|\mathcal{B}''\|_{\infty}$$

bulunur.

vi. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $x = \frac{\xi + \varpi}{2}$ olarak seçilirse

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \right| \leq \frac{M(\varpi - \xi)}{48(2p + 1)^{\frac{1}{p}}}$$

yazılır.

Teorem 34. $\mathcal{B} : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$, $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ olsun. Eğer $x \in [\xi, \varpi]$ seçilirse ve $|\mathcal{B}''|^q$ bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2 \cdot 3^{1 - \frac{1}{q}} (\varpi - \xi)} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\xi)|^q}{3} + \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(\varpi - x)^3}{2 \cdot 3^{1-\frac{1}{q}}(\varpi - \xi)} \left(\frac{|B''(\varpi)|^q}{3} + \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |B''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |B''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\sigma \in [0,1]$ ve $q \geq 1$ 'dir.

İspat: Lemma 4'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(u) du - B(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) B'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)| d\sigma \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)| d\sigma \end{aligned}$$

ve Power-Mean integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\int_0^1 \sigma^2 d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left(\int_0^1 \sigma^2 d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazılır. $|B''|^q$ bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(u) du - B(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) B'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2 \cdot 3^{1-\frac{1}{q}}(\varpi - \xi)} \left(\frac{|B''(\xi)|^q}{3} + \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |B''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |B''(\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2 \cdot 3^{1-\frac{1}{q}}(\varpi - \xi)} \left(\frac{|B''(\varpi)|^q}{3} + \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |B''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma^2 h(\sigma) |B''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma & \leq \int_0^1 \sigma^2 [h(\sigma) |B''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |B''(\xi)|^q] d\sigma \\ \int_0^1 \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma & \leq \int_0^1 \sigma^2 [h(\sigma) |B''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |B''(\varpi)|^q] d\sigma \end{aligned}$$

dır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 29. Teorem 34'ün şartları altında:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \leq \frac{|\mathcal{B}''(x)|}{6(\varpi - \xi)} [(x - \xi)^3 + (\varpi - x)^3]$$

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \leq \frac{(x - \xi)^3}{2^{1+\frac{2}{q}} 3(\varpi - \xi)} (3|\mathcal{B}''(x)|^q + |\mathcal{B}''(\xi)|^q)^{\frac{1}{q}} + \frac{(\varpi - x)^3}{2^{1+\frac{2}{q}} 3(\varpi - \xi)} (3|\mathcal{B}''(x)|^q + |\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \leq \frac{(x - \xi)^3}{6(\varpi - \xi)(s+3)^{\frac{1}{q}}} (3|\mathcal{B}''(x)|^q + s|\mathcal{B}''(\xi)|^q)^{\frac{1}{q}} + \frac{(\varpi - x)^3}{6(\varpi - \xi)(s+3)^{\frac{1}{q}}} (3|\mathcal{B}''(x)|^q + s|\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

olur.

iv. $h(\sigma) = 1, h(\sigma) = \sigma, h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $|\mathcal{B}''(x)| \leq M, (M > 0 \text{ ve } x \in [\xi, \varpi])$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| &\leq \frac{M}{6(\varpi - \xi)} \left[\frac{1}{24} (\varpi - \xi)^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{M(\varpi - \xi)}{36} \end{aligned}$$

yazılır.

v. $h(\sigma) = 1, h(\sigma) = \sigma, h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $\|\mathcal{B}''\|_{\infty} = \sup |\mathcal{B}''(\sigma)| < \infty, \sigma \in (\xi, \varpi)$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)}{36} \|\mathcal{B}''\|_{\infty}$$

bulunur.

vi. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $x = \frac{\xi + \varpi}{2}$ olarak seçilirse

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \right| \leq \frac{M(\varpi - \xi)}{144}$$

yazılır.

Teorem 35. $\mathcal{B} : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$, $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ olsun. Eğer $x \in [\xi, \varpi]$ seçilirse ve $|\mathcal{B}''|^q$ bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2}\right) \mathcal{B}'(x) \right| \leq \frac{(x - \xi)^3}{2^{1 + \frac{1}{p}} (\varpi - \xi)^{(p+1)\frac{1}{p}}} \\ & \times \left[\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\xi)|^q}{2} + \int_0^1 (1 - \sigma) h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 (1 - \sigma) h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{|\mathcal{B}''(\xi)|^q}{2} + \int_0^1 \sigma h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \frac{(\varpi - x)^3}{2^{1 + \frac{1}{p}} (\varpi - \xi)^{(p+1)\frac{1}{p}}} \\ & \times \left[\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\varpi)|^q}{2} + \int_0^1 (1 - \sigma) h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 (1 - \sigma) h(\sigma) |\mathcal{B}''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{|\mathcal{B}''(\varpi)|^q}{2} + \int_0^1 \sigma h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma h(\sigma) |\mathcal{B}''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right]. \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada $\sigma \in [0, 1]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 'dir.

İspat: Lemma 4'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2}\right) \mathcal{B}'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)| d\sigma \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)| d\sigma \end{aligned}$$

ve Hölder-İşcan integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\
& \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\int_0^1 \sigma^{2p} (1 - \sigma) d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1 - \sigma) |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \sigma^{2p} \sigma d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sigma |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\int_0^1 \sigma^{2p} (1 - \sigma) d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1 - \sigma) |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \sigma^{2p} \sigma d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sigma |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|\mathcal{B}''|^q$ modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\
& \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\frac{1}{(2p+1)(2p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1 - \sigma) [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\xi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{2p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sigma [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\xi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\frac{1}{(2p+1)(2p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1 - \sigma) [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\varpi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{2p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sigma [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\varpi)|^q] d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{(x - \xi)^3}{2^{1+\frac{1}{p}} (\varpi - \xi) (p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\xi)|^q}{2} + \int_0^1 (1 - \sigma) h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 (1 - \sigma) h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\mathcal{B}''(\xi)|^q}{2} + \int_0^1 \sigma h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\varpi - x)^3}{2^{1+\frac{1}{p}}(\varpi - \xi)(p+1)^{\frac{1}{p}}} \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2^{p+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|B''(\varpi)|^q}{2} + \int_0^1 (1-\sigma)h(\sigma)|B''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 (1-\sigma)h(\sigma)|B''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\frac{|B''(\varpi)|^q}{2} + \int_0^1 \sigma h(\sigma)|B''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma h(\sigma)|B''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (1-\sigma)|B''(\sigma x + (1-\sigma)\xi)|^q d\sigma \\
& \leq \int_0^1 (1-\sigma)[h(\sigma)|B''(x)|^q + (1-h(\sigma))|B''(\xi)|^q] d\sigma \\
& \int_0^1 (1-\sigma)|B''(\sigma x + (1-\sigma)\varpi)|^q d\sigma \\
& \leq \int_0^1 (1-\sigma)[h(\sigma)|B''(x)|^q + (1-h(\sigma))|B''(\varpi)|^q] d\sigma \\
& \int_0^1 \sigma|B''(\sigma x + (1-\sigma)\xi)|^q d\sigma \leq \int_0^1 \sigma[h(\sigma)|B''(x)|^q + (1-h(\sigma))|B''(\xi)|^q] d\sigma \\
& \int_0^1 \sigma|B''(\sigma x + (1-\sigma)\varpi)|^q d\sigma \leq \int_0^1 \sigma[h(\sigma)|B''(x)|^q + (1-h(\sigma))|B''(\varpi)|^q] d\sigma
\end{aligned}$$

dır. İspat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 30. Teorem 35'in şartları altında:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(u) du - B(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) B'(x) \right| \\
& \leq \frac{|B''(x)|}{4(\varpi - \xi)(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{1 + (2p+1)^{\frac{1}{p}}}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}} \right) [(x - \xi)^3 + (\varpi - x)^3]
\end{aligned}$$

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-\xi)^3}{2^{\frac{1}{p}+1}(\varpi-\xi)(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|B''(x)|^q + 2|B''(\xi)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|B''(x)|^q + |B''(\xi)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \frac{(\varpi-x)^3}{2^{\frac{1}{p}+1}(\varpi-\xi)(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|B''(x)|^q + 2|B''(\varpi)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|B''(x)|^q + |B''(\varpi)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-\xi)^3}{2^{\frac{1}{p}+1}(\varpi-\xi)(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|B''(x)|^q + (s^2+3s)|B''(\xi)|^q}{2(s+1)(s+2)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|B''(x)|^q + s|B''(\xi)|^q}{2(s+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \quad + \frac{(\varpi-x)^3}{2^{\frac{1}{p}+1}(\varpi-\xi)(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|B''(x)|^q + (s^2+3s)|B''(\varpi)|^q}{2(s+1)(s+2)} \right)^{\frac{1}{q}} + \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{2|B''(x)|^q + s|B''(\varpi)|^q}{2(s+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

olur.

iv. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $|B''(x)| \leq M$, ($M > 0$ ve $x \in [\xi, \varpi]$) olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right| \\
& \leq \frac{M \left(1 + (2p+1)^{\frac{1}{p}} \right)}{4(\varpi - \xi)(p+1)^{\frac{1}{p}}(2p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{24} (\varpi - \xi)^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right)^2 \right] \\
& \leq \frac{M \left(1 + (2p+1)^{\frac{1}{p}} \right) (\varpi - \xi)}{24(p+1)^{\frac{1}{p}}(2p+1)^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}$$

yazılır.

v. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $\|B''\|_{\infty} = \sup|B''(\sigma)| < \infty$, $\sigma \in (\xi, \varpi)$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right|$$

$$\leq \frac{\left(1 + (2p + 1)^{\frac{1}{p}} \right) (\varpi - \xi)}{24(p + 1)^{\frac{1}{p}} (2p + 1)^{\frac{1}{p}}} \|\mathcal{B}''\|_{\infty}$$

bulunur.

vi. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $x = \frac{\xi + \varpi}{2}$ olarak seçilirse

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \right| \leq \frac{M(\varpi - \xi) \left(1 + (2p + 1)^{\frac{1}{p}} \right)}{96(p + 1)^{\frac{1}{p}} (2p + 1)^{\frac{1}{p}}}$$

yazılır.

Teorem 36. $\mathcal{B} : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\mathcal{B}'' \in L[\xi, \varpi]$, $\xi, \varpi \in I$, $\xi < \varpi$ olsun. Eğer $x \in [\xi, \varpi]$ seçilirse ve $|\mathcal{B}''|^q$ bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right|$$

$$\leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\frac{1}{12} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\xi)|^q}{12} + \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma \right. \right.$$

$$\left. - \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\frac{1}{4} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\xi)|^q}{4} + \int_0^1 \sigma^3 h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma^3 h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

$$+ \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\frac{1}{12} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\varpi)|^q}{12} + \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma \right. \right.$$

$$\left. - \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) h(\sigma) |\mathcal{B}''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|B''(\varpi)|^q}{4} + \int_0^1 \sigma^3 h(\sigma) |B''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma^3 h(\sigma) |B''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

eşitsizliği bulunur. Burada $\sigma \in [0,1]$ ve $q \geq 1$ 'dir.

İspat: Lemma 4'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(u) du - B(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) B'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)| d\sigma \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \int_0^1 \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)| d\sigma \end{aligned}$$

ve Geliştirilmiş Power-Mean integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(u) du - B(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) B'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\int_0^1 (1 - \sigma) \sigma^2 d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 \sigma \sigma^2 d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sigma \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\int_0^1 (1 - \sigma) \sigma^2 d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1 - \sigma) \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 \sigma \sigma^2 d\sigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sigma \sigma^2 |B''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

yazılır. $|B''|^q$ bir modifiye h -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(u) du - B(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) B'(x) \right| \\ & \leq \frac{(x - \xi)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|B''(\xi)|^q}{12} + \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) h(\sigma) |B''(x)|^q d\sigma \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)|^q d\sigma \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\xi)|^q}{4} + \int_0^1 \sigma^3 h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma^3 h(\sigma) |\mathcal{B}''(\xi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \Big] \\
& + \frac{(\varpi - x)^3}{2(\varpi - \xi)} \left[\left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\varpi)|^q}{12} + \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) h(\sigma) |\mathcal{B}''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|\mathcal{B}''(\varpi)|^q}{4} + \int_0^1 \sigma^3 h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q d\sigma - \int_0^1 \sigma^3 h(\sigma) |\mathcal{B}''(\varpi)|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma \\
& \leq \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\xi)|^q] d\sigma \\
& \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma \\
& \leq \int_0^1 (\sigma^2 - \sigma^3) [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\varpi)|^q] d\sigma \\
& \int_0^1 \sigma^3 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\xi)|^q d\sigma \leq \int_0^1 \sigma^3 [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\xi)|^q] d\sigma \\
& \int_0^1 \sigma^3 |\mathcal{B}''(\sigma x + (1 - \sigma)\varpi)|^q d\sigma \leq \int_0^1 \sigma^3 [h(\sigma) |\mathcal{B}''(x)|^q + (1 - h(\sigma)) |\mathcal{B}''(\varpi)|^q] d\sigma
\end{aligned}$$

dır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 31. Teorem 36'nın şartları altında:

i. $h(\sigma) = 1$ için

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right|$$

$$\leq \frac{|\mathcal{B}''(x)|}{6(\varpi - \xi)} [(x - \xi)^3 + (\varpi - x)^3]$$

ii. $h(\sigma) = \sigma$ için

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right|$$

$$\leq \frac{(x - \xi)^3}{2^{1+\frac{2}{q}} 15^{\frac{1}{q}} (\varpi - \xi)} \left[(3|\mathcal{B}''(x)|^q + 2|\mathcal{B}''(\xi)|^q)^{\frac{1}{q}} + 3^{\frac{1}{q}} (4|\mathcal{B}''(x)|^q + |\mathcal{B}''(\xi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$+ \frac{(\varpi - x)^3}{2^{1+\frac{2}{q}} 15^{\frac{1}{q}} (\varpi - \xi)} \left[(3|\mathcal{B}''(x)|^q + 2|\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} + 3^{\frac{1}{q}} (4|\mathcal{B}''(x)|^q + |\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]$$

iii. $h(\sigma) = \sigma^s$ için

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right|$$

$$\leq \frac{(x - \xi)^3}{24(\varpi - \xi)(s^2 + 7s + 12)^{\frac{1}{q}}} \left[(12|\mathcal{B}''(x)|^q + (s^2 + 7s)|\mathcal{B}''(\xi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + (12(s + 3)|\mathcal{B}''(x)|^q + 3s(s + 3)|\mathcal{B}''(\xi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$+ \frac{(\varpi - x)^3}{24(\varpi - \xi)(s^2 + 7s + 12)^{\frac{1}{q}}} \left[(12|\mathcal{B}''(x)|^q + (s^2 + 7s)|\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + (12(s + 3)|\mathcal{B}''(x)|^q + 3s(s + 3)|\mathcal{B}''(\varpi)|^q)^{\frac{1}{q}} \right]$$

olur.

iv. $h(\sigma) = 1$, $h(\sigma) = \sigma$, $h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $|\mathcal{B}''(x)| \leq M$, ($M > 0$ ve $x \in [\xi, \varpi]$) olarak seçilirse

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} \mathcal{B}(u) du - \mathcal{B}(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) \mathcal{B}'(x) \right|$$

$$\leq \frac{M}{6(\varpi - \xi)} \left[\frac{1}{24} (\varpi - \xi)^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right)^2 \right]$$

$$\leq \frac{M(\varpi - \xi)}{36}$$

yazılır.

v. $h(\sigma) = 1, h(\sigma) = \sigma, h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $\|B''\|_\infty = \sup|B''(\sigma)| < \infty, \sigma \in (\xi, \varpi)$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(u) du - B(x) + \left(x - \frac{\xi + \varpi}{2} \right) B'(x) \right| \leq \frac{(\varpi - \xi)}{36} \|B''\|_\infty$$

bulunur.

vi. $h(\sigma) = 1, h(\sigma) = \sigma, h(\sigma) = \sigma^s$ alındığında bulunan eşitsizliklerde $x = \frac{\xi + \varpi}{2}$ olarak seçilirse

$$\left| \frac{1}{\varpi - \xi} \int_{\xi}^{\varpi} B(u) du - B\left(\frac{\xi + \varpi}{2}\right) \right| \leq \frac{M(\varpi - \xi)}{144}$$

yazılır.



SONUÇ VE ÖNERİLER

Öneriler

Bu tezde modifiye h -konveks fonksiyonlar için Hölder, Power Mean, Hölder-İşcan ve Geliştirilmiş Power Mean İntegral Eşitsizlikleri ile ilgili yeni teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Farklı konveks fonksiyon çeşidi kullanılarak aynı eşitsizlikler ile ilgili yeni teoremler elde edilip bulunan eşitsizlikler ile tezde bulunan eşitsizlikler arasında kıyaslama yapılabilir. Ayrıca modifiye h -konveks fonksiyonlarla ilgili bulunan eşitsizliklere uygun yeni uygulamalar yazılabilir. Her modifiye h -konveks fonksiyonun h -konveks fonksiyon olup olmadığı ile ilgili çalışmalar yapılabilir. Eğer modifiye h -konveks fonksiyon diğer konveks fonksiyon çeşitleriyle kıyaslanabilirse bu konudaki çalışma alanı daha da genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Alzer, H., (2009). A superadditive property of Hadamard's gamma function. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 79, 11-23.
- Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.
- Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Cerone, P., 2000. On Simpson's Inequality and Applications. *J. of Inequal. & Appl*, 5, 533-579.
- Dragomir, S., Agarwal, R., & Barnett, N. (2000). Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. *J. of Inequal. and Appl* , 5 (2), 103-165.
- İşcan, İ., (2019). New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality. *Journal of Inequalities and Applications* , 2019 (304), 1-11.
- Greenberg, H., & Pierskalla, W., (1971). A review of quasi convex functions. *Operations* , 7, 1553-1570.
- Guan, K., (2015). Wright type multiplicatively convex functions. *Math. Inequal. Appl.* (Accepted) Volume 18, Number 1, 389–399
- Kadakal, M., İşcan, İ., Kadakal, H. & Bekar, K., (2019). On improvements of some integral inequalities. *Honam Math. Jour.*, 43(3), 441-452.
- Mitrinovic, D. S., Pečarić, J. & Fink, A. M., (1993). *Classical and new inequalities in analysis*. Kluwer Academic, Dordrecht.
- Mitrinović, D., (1970). *Analytic Inequalities*. Berlin.: Springer-Verlag.
- Noor, M.A, Noor, K.I., Awan, M.U., (2014). Hermite-Hadamard inequalities for modified h-convex functions. *TJMM*, 6(2) 171-180
- Ostrowski, A., (1938). Über die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von. *Comment. Math. Hel*, 1(17), 226-230.
- Pachpatte, B.G., (2003). On some inequalities for convex functions. *RGMIA Res. Rep. Coll.* 6 (E). [http://rgmia.vu.edu.au/v6\(E\).html](http://rgmia.vu.edu.au/v6(E).html).
- Pečarić, J. E., Proschan, F. and Tong, Y. L., (1992). *Convex functions, Partial Ordering and Statistical Applications*, Academic Press, Inc.
- Sarıkaya, M.Z., Set, E. & Özdemir M.E., (2010). On new inequalities of Simpson's type for convex functions. *Computers & Mathematics with Applications*. Volume 60, Issue 8, Pages 2191-2199.
- Sarıkaya, M.Z. and Aktan, N., 2011. On the generalization some integral inequalities and their applications. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(9-10), 2175- 2182.
- Set, E., Sarıkaya M. Z., Özdemir M. E., 2014. Some Ostrowski's type inequalities for functions whose second derivatives are s-convex in the second sense and applications. *Demonstratio Mathematica*, Vol. XLVIINo 1.

- Toader, G., (1984). Some generalizations of the convexity, Proceedings of The Colloquium On Approximation and Optimization. Turkish Journal of Analysis and Number Theory , 2 (3), 60-64.
- Toader, G., Toader, S., (2009). A hierarchy of logarithmic convexity of functions. Annals of the T. Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity ISSN 1584-4536, vol. 7, 147-154
- Varosanec, S., (2007) On h-convexity, Jour. Math. Anal. Appl. 326, 303-311.
- Yıldız, Ç., Yergöz, A., (2023). An investigation into inequalities obtained through the new lemma for exponential type convex functions. Filomat (Accepted).
- Wright, E. M., (1954). An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly, 61, 620-622.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Büşra YERGÖZ
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Esenyurt Nakipoğlu Cumhuriyet Anadolu Lisesi
Lisans:	Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Makaleler:	Yıldız, Ç., Yergöz, B. and Yergöz, A., (2023). On new general inequalities for s-convex functions and their applications. Journal of Inequalities and Applications 2023:11 Cotirla, L. I., Yıldız, Ç., Rahman, G. and Yergöz, B., (2023). An investigation into new inequalities for modified h-convex functions. Submitted (Accepted).