



**DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN MOHAND DÖNÜŞÜMÜ İLE
TAM ÇÖZÜMLERİ**

Şevket VURMAZ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mesut KARABACAK
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
2022
(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MOHAND
DÖNÜŞÜMÜ İLE TAM ÇÖZÜMLERİ**

(The Exact Solutions of Differential Equations with Variable Coefficients with Mohand Transform)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şevket VURMAZ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mesut KARABACAK

Erzurum
Ocak, 2022

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Şevket VURMAZ tarafından hazırlanan “Değişken Katsayılı Diferansiyel Denklemlerin Mohand Dönüşümü İle Tam Çözümleri ” başlıklı çalışması 24/01/2022 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Ercan ÇELİK
Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi. Mesut KARABACAK
Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Rıdvan ŞAHİN
Gümüşhane Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN

Enstitü Müdürü

Aslı ıslak imzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Dr. Öğr. Üyesi. Mesut KARABACAK danışmanlığında sunulan “Değişken Katsayılı Diferansiyel Denklemlerin Mohand Dönüşümü İle Tam Çözümleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	15	30
Kuramsal Temeller	22	30
Materyal ve Yöntem	20	35
Bulgular	15	20
Tartışma	0	20
Tezin Geneli	19	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Şevket VURMAZ	Dr. Öğr. Üyesi. Mesut KARABACAK
2.2.2022	2.2.2022
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/.../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/.../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde başından sonuna kadar tüm aşamalarında her türlü desteği sağlayan, beni yönlendiren ve benden anlayışını esirgemeyen danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mesut KARABACAK' a değerli katkılarından ötürü öncelikle teşekkürlerimi sunarım. Atatürk Üniversitesi'nde lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca benden her türlü desteklerini esirgemeyen eşime, oğluma ve kızıma sonsuz şükranlarımı ifade etmek isterim.

Şevket VURMAZ



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MOHAND DÖNÜŞÜMÜ İLE TAM ÇÖZÜMLERİ

Şevket VURMAZ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mesut KARABACAK

Amaç: Bu tezde, değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümü için bir metot sunulmuştur.

Yöntem: Bir İntegral dönüşüm metodu olarak Mohand dönüşümü tanıtılmıştır. Türevlerin Mohand dönüşümleri elde edilmiştir. Daha sonra türevlerin ve önüne gelen değişken katsayılı terimlerin Mohand Dönüşümleri elde edilmiştir. Ardından bu dönüşümler kullanılarak değişken katsayılı diferansiyel denklemler Mohand dönüşümü altında çözülmüştür.

Bulgular: Dört farklı değişken katsayılı diferansiyel denklem ele alınmıştır ve Mohand dönüşümü metoduyla çözülmüştür.

Sonuç: Mohand dönüşümü metodunun değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümü için etkili bir metot olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: diferansiyel denklem, değişken katsayılı diferansiyel denklem, Mohand dönüşümü, İntegral dönüşümler

Ocak 2022, 38 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

THE EXACT SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS WITH MOHAND TRANSFORM

Şevket VURMAZ

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mesut KARABACAK

Purpose: In this thesis, a method for solving the differential equations with variable coefficients is presented.

Method: Mohand transform is introduced as an integral transform method. Mohand transformations of derivatives are obtained. Then, Mohand Transforms of derivatives and terms with variable coefficients are obtained. Then, using these transformations, differential equations with variable coefficients are solved under the Mohand transform.

Findings: Four differential equations with variable coefficients are considered and solved exactly by the Mohand transform method.

Results: Mohand transform method has been found to be an effective tool for solving the differential equations with variable coefficients.

Keywords: differential equation, differential equation with variable coefficients, Mohand transform, integral transform

January 2022, 38 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	4
Gamma Fonksiyonu	7
Beta Fonksiyonu	9
Laplace Dönüşümü.....	10
MATERYAL VE YÖNTEM	14
Mohand Dönüşümü Yöntemi.....	14
Mohand Dönüşümünün Özellikleri.....	15
Türevlerin Mohand Dönüşümleri.....	16
İntegrallerin Mohand Dönüşümü	17
Ters Mohand Dönüşümü.....	19
Mohand Dönüşümü için Konvolüsyon Teoremi.....	19
ARAŞTIRMA BULGULARI	20
Test Problemi 1	20
Test Problemi 2	21
Test Problemi 3	22
Test Problemi 4	23
SONUÇ VE TARTIŞMA.....	25
KAYNAKLAR.....	26
ÖZGEÇMİŞ.....	27

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Bazı Fonksiyonların Mohand Dönüşümleri	18
--	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Gamma fonksiyonunun grafiği	8
--	---



SİMGELER DİZİNİ

ε	Epsilon
δ	Delta
τ	To
Γ	Gamma Fonksiyonu
β	Beta Fonksiyonu
$\mathcal{L}\{f\}$	f fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}\{f\}$	f fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü
$\mathcal{M}\{f(t)\}$	$f(t)$ nin Mohand dönüşümü
$\mathcal{M}^{-1}\{f(t)\}$	$f(t)$ nin ters Mohand dönüşümü

GİRİŞ

İntegral dönüşümler, uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislik biliminde birçok problemin çözümünde uzun zamandır etkili ve başarılı bir yöntem olarak karşımızda durmaktadır. Laplace ve Fourier dönüşümlerini içeren integral dönüşümlerin temel dayanağı 1822 yılında yayınlanan Joseph Fourier (1768,1830)'nin *La Theorie Analytique de la Chaleur* isimli bilimsel eseri ve 1780 lerde P.S. Laplace (1749-1827)' in olasılık teorisi üzerine yazdığı en bilinen çalışması olarak gösterilebilir. Aslında Laplace'nin klasik *La Theorie Analytique des Probabilities* isimli kitabı, Matematik alanyazınında geçerli en eski ve çok yaygın kullanılan integral dönüşümlerinden biri olan Laplace dönüşümlerinin bazı temel sonuçlarını içermektedir. Hesaplamalarda sembolik yöntem fikrini ortaya çıkaran ilk kişi G.W. *Leibniz* (1646-1716)' dir. Ardından, *J.L. Lagrange* (1736-1813) çalışmalarında Laplace operasyonel hesap olarak bilinen sembolik metotlar için büyük katkılar sağlamıştır. Her ne kadar 19. Yüzyılda hem Laplace hem de Fourier dönüşümleri keşfedilmişse de, elektriksel devre sistemlerinin adi diferansiyel denklemlerini çözmede kullanılarak ve daha sonra modern operasyonel hesabı geliştirerek Laplace dönüşümlerini çok popüler hale getiren *Oliver Heaviside* (1850,1925) İngiliz bir elektrik mühendisidir. Fourier ve Laplace dönüşümleri dışında *Mellin, Hankel, Hilbert, Stieltjes* dönüşümleri gibi birçok integral dönüşüm mevcuttur. Bunlar adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmede kullanıldıkları gibi matematik, fen ve mühendislikteki diğer problemleri içeren başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde de yaygın bir şekilde kullanılırlar. (Köklü, 2018)

İntegral dönüşümler, çoğunlukla belirli sınır koşullarına tabi diferansiyel denklemlerle uğraşırken getirdikleri basitleştirme için tercih edildiklerinden dolayı etkili ve değerli yöntemlerdir. Uygun integral dönüşümlerin seçimi, karmaşık diferansiyel denklemleri ve integral denklemleri, kolayca çözülebilen basit bir adi diferansiyel denkleme yahut çözümü kolay elde edilebilen bir cebirsel denkleme dönüştürmeye yardımcı olur. Elbette elde edilen çözüm, orijinal diferansiyel denklemin çözümünün dönüşümüdür ve çözümü tamamlamak için bu dönüşümü tersine çevirmek gerekir.

Son yirmi yılda Matematik alanyazınında Laplace İntegral dönüşümü sınıfında Sumudu, Elzaki, Natural, Aboodh, Tarig, Poureza, Mohand, G-Transform, Sawi, Shehu ve Kamal dönüşümleri gibi birçok integral dönüşüm tanıtılmıştır. Biz bu tezde ismi zikredilen dönüşümlerin hepsine değinmek yerine ana kategori başlığı olan Laplace İntegral

dönüşümünün özelliklerine değinip seçtiğimiz dönüşüm metodu olan Mohand Dönüşümünü inceledik.

Bu dönüşümler, farklı tipteki integral denklemlerin (IE), adi diferansiyel denklemlerin (ODE), kısmi diferansiyel denklemlerin (PDE) ve kesirli diferansiyel denklemlerin (FDE) çözümü için kullanıldığı gibi, ayrıca bu tür dönüşümlerin diğer yöntemlerle kombinasyonu gibi birleşik çok adımlı yöntemlerin de yukarıda bahsettiğimiz denklemlerin çözümünde kullanıldığı görülmüştür. İntegral dönüşümlerine eşlik eden çok adımlı yöntemlere örnek olarak Adomian Ayırıştırma ve Homotopi Pertürbasyon Yöntemi verilebilir. (Lokenath *et.al* 2006) (Jafari, 2021)

2017 yılında Mohand M. Abdelrahim Mahgoub tarafından *Mohand dönüşümü* tanımlanmış ve bazı temel özellikleri ispatlanarak alanyazına girmiştir. Kısa sürede araştırmacıların ilgisini çekmeyi başarmış ve bazı integral denklemler için uygulamaları yapılmıştır.(Mohand, 2017)

Tezimizde ele aldığımız değişken katsayılı diferansiyel denklemleri çözmek için sabit katsayılı diferansiyel denklemlerde olduğu gibi genel metotlar bulunmamaktadır. Bu denklemlerin bazı özel halleri için geliştirilmiş bazı yaklaşımlar mevcuttur ki bu yaklaşımlar, mertebe düşürme, parametrelerin değişimi, sabit katsayılı hale getirme ve bazı özel metotlar olarak sıralanabilir.

Değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine birçok matematikçi çalışmış ve yeni metotların uygulanabilirliğini belirtmişlerdir. Bu tezde bahsi geçen denklemlerin çözümünde integral dönüşümlerden biri olan Mohand dönüşümünün etkinliği incelenecektir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır.

- Birinci bölümde yani giriş bölümünde, Laplace İntegral dönüşüm Metodu, Mohand dönüşümü ve değişken katsayılı diferansiyel denklemlerinin tarihçesinden bahsedildi.
- İkinci bölümde yani kuramsal temeller bölümünde, tezimizde kullandığımız bazı temel tanım ve teoremler verildi.
- Üçüncü bölümde yani materyal ve yöntem kısmında, Mohand dönüşümü, Mohand dönüşümünün özellikleri, türevlerin ve önüne gelen katsayılarla oluşan denklem terimlerinin Mohand dönüşüm formülleri elde edildi.

- Dördüncü bölümde yani Araştırma Bulguları kısmında, dört tane değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem çözümüne Mohand dönüşümü uygulanarak çözümleri elde edildi.
- Beşinci bölümde yani Sonuç kısmında, Değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem çözümüne uygulanan Mohand dönüşümünün etkinliği tartışıldı.



KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1 (Diferansiyel Denklem): Bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini ihtiva eden denkleme diferansiyel denklem denir.

Genel olarak y bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, diferansiyel denklem

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y' nin x 'e göre n ' inci türevidir. (1) denklemini $y^{(n)}$ ye göre çözülebilirse;

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

formu elde edilir. Bu ise (1) ifadesinin açık formudur.

Tanım 2 (Değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem): x bir reel değişken olmak üzere

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

şeklindeki denklemlere lineer diferansiyel denklem denir. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki $r(x)$ ve sol tarafta ki $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ katsayıları x 'e bağlıdır. Eğer $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ katsayıları sabit ise denkleme sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem denir. En az biri değişken ise denkleme *değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem* denir.

Tanım 3 (Limit): $D \subset R$, $f: D \rightarrow R$ bir fonksiyon ve c , D nin yığılma noktası olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x - c| < \delta$ olduğunda $|f(x) - K| < \varepsilon$ olacak şekilde

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa x, c ye yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun *limiti* K dır denir ve

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = K$$

olarak yazılır.

Bu tanımda

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = K$$

olması $0 < |x - c| < \delta$ eşitliğini sağlayan $\forall x$ için $|f(x) - K| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlaması gerektiğini vurgulanmaktadır. Ayrıca $\varepsilon > 0$ ne kadar küçük olursa, ona bağlı olan, δ da o kadar küçük olacaktır (Kadıoğlu, 2005).

Tanım 4 (Süreklilik): $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in D$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $|x - c| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ sayısı varsa

f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir. Burada $\delta = \delta(\varepsilon, c)$, δ nın hem ε hem de c ye bağlı olarak değişeceğini gösterir. Sürekliliğin bu şekildeki tanımı ε, δ tekniği ile süreklilik tanımı olarak adlandırılır. $c \in D$, D nin yığılma noktası olması durumunda limitin tanımlanacağı bilinmektedir. O halde, $c \in D$, D nin yığılma noktası olması durumunda sürekliliğin tanımını şu şekilde verebiliriz. $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in D$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

oluyorsa f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir. Buna göre: $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun verilen bir $c \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olması için

1. f fonksiyonunun c noktasında tanımlıdır.

2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ mevcuttur.

3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

şartlarını sağlaması gerekir.

Tanım 5 (Süreklilik Çeşitleri): f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlansın

i. $c \in [a, b)$ için

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

oluyor ise f fonksiyonuna c noktasında sağdan süreklidir denir.

ii. $c \in (a, b]$ için

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

oluyor ise f fonksiyonuna c noktasında soldan süreklidir denir.

Bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sürekliliğinden söz ettiğimiz zaman. a noktasında sağdan, b noktasında soldan sürekli olduğu anlaşılacaktır.

Tanım 6 (Süreksizlik ve Süreksizlik Çeşitleri):

i. Eğer f fonksiyonunun bir c noktasında limiti var ve süreksiz ise bu fonksiyon c noktasında

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

olarak tanımlarsak, bu noktada, sürekli bir fonksiyon elde ederiz. Bu tip süreksizlere kaldırılabilir süreksizlik denir. Eğer fonksiyonun süreksiz olduğu noktada limiti yoksa bu süreksizliklere de kaldırılamaz süreksizlik denir.

ii. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ limitleri var ve birbirinden farklı ise f fonksiyonu c noktasında sıçramalı süreksizliğe sahiptir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

sayısına f nin c noktasındaki sıçraması denir.

iii. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ limitlerden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise veya mevcut değilse, bu fonksiyon c noktasında sonsuz süreksizliğe sahiptir denir.

Örnek 1 :

i. $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında süreksiz olduğunu biliyoruz. Çünkü bu noktada tanımsızdır. Yine biliyoruz ki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

dir. O halde, $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında kaldırılabilir bir süreksizliği vardır. Bu fonksiyon

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığın da, sürekli bir fonksiyon olur.

ii. $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olarak veriliyor. $x = 0$ noktasında

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

olduğundan, f fonksiyonunu bu noktada sıçrama süreksizliği vardır ve sıçrama

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 - (-1) = 2$$

olur

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

olmadığından dolayı kaldırılamaz süreksizlik vardır.

iii. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun sıfır noktasında sağdan ve soldan limiti olmadığından bu noktada kaldırılamaz bir süreksizlik vardır. (Kadioğlu, 2005)

Gamma Fonksiyonu

Diferansiyel hesaplamalarında kullanılan en temel fonksiyon, Gamma fonksiyonudur. Bu fonksiyon $n!$ hesabındaki n sayısını, tamsayı olmayan sayıları ve karmaşık sayıları da içerecek şekilde genelleştirir. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad z \in \mathbb{R} \quad (3)$$

integral yardımıyla tanımlanır. Bu fonksiyonun en önemli özelliklerinden biri,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (4)$$

eşitliğidir. Böylece

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (5)$$

eşitliğiyle gösterilir. (4) eşitliğinden görüleceği gibi $\Gamma(1) = 1$ olup $z = 1, 2, 3 \dots$, için

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(z + 1) = z. \Gamma(z) = z. (z - 1)! = z!$$

şeklinde genelleştirilebilir (Podlubny 1999).

$z > 0$ için (3) denklemi ile verilen gamma fonksiyonu yakınsaktır. Böylece $a > 0$ ve $\forall [a, b]$ sonlu aralığında $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ integrali düzgün yakınsaktır. O halde gamma fonksiyonunun diğer özellikleri aşağıdaki gibidir:

$\Gamma[z]$ nin tanım bölgesi $\{z: z > 0\}$

$\Gamma[z]$ fonksiyonu $z > 0$ için süreklidir.

$\Gamma[z]$ için verilen integral, her sonlu $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan $\Gamma[z]$ nin türevide elde edilebilir.

Ayrıca $\Gamma[z]$ nin diğer tamsayıli mertebeden türevleride benzer şekilde hesaplanır.

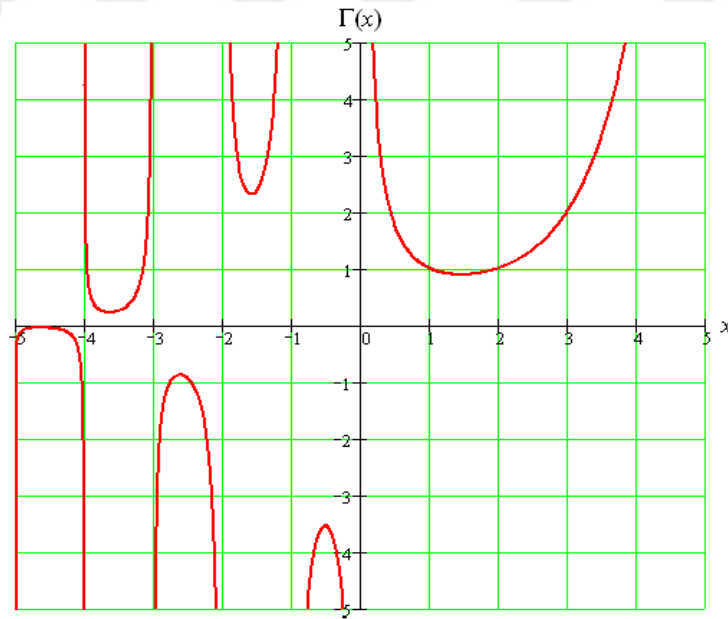
Örneğin,

$$\Gamma'[z] = \int_0^\infty t^{z-1} \ln(t) e^{-t} dt, \quad \Gamma''[z] = \int_0^\infty t^{z-1} [\ln(t)]^2 e^{-t} dt, \dots$$

şeklinde yazılır (Podlubny, 1999).

Tanım 7 (Genelleştirilmiş Gamma Fonksiyonu):

Gamma fonksiyonunun tanım kümesi tüm reel eksendir.



Şekil 1. Gamma fonksiyonunun grafiği

(4) eşitliğinden faydalanılarak $1 \leq z \leq 2$, $z \leq 2$ ve $\forall z \in \mathbb{R}$ için $\Gamma(z)$ elde edilebilir. Negatif z değerleri için düşünüldüğünde, $-1 < z < 0$, $z < 0$ için $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ de $0 < z+1 < 1$ olacağından $\Gamma(z+1)$ değeri bilindiğinden $z \in (-1, 0)$ için $\Gamma(z)$ ler bulunabilir. Genel olarak $-n < z < -n+1$ ise $0 < z+n < 1$ olup,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1)} \quad (6)$$

eşitliğinden gamma fonksiyonunun değerleri hesaplanabilir. Gamma fonksiyonun tanım kümesi tüm Reel eksen olduğundan, gamma fonksiyonunun sıfır ve negatif tamsayı değerleri sonsuzdur. Böylece,

$$\Gamma(z) > \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt > \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{e^z}$$

olup,

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) > \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^z} \rightarrow \infty$$

olur. Faktöriyel özelliğinden,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1)\Gamma(z-1) \rightarrow \infty$$

olur.

Tanım 8: Gamma fonksiyonunun limit gösterimi $Re(z) > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)} \quad (7)$$

şeklindedir.

Beta Fonksiyonu

$Re(z) > 0$ ve $Re(w) > 0$ olmak üzere $\tau = \frac{t}{n}$ olmak üzere

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau \quad (8)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir.

Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada $h_{z,w}(t)$ fonksiyonunun t^{z-1} ile t^{w-1} in konvülasyonu olduğu ve $h_{z,w}(1) = \beta(z, w)$ eşitliğinin olduğu görülmektedir.

$H_{z,w}(s)$, $h_{z,w}(t)$ fonksiyonunun Laplace fonksiyonu olmak üzere,

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} t^{z+w-1}$$

eşitliği ters Laplace dönüşümüyle de elde edilir. Bu durumda $t = 1$ için,

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}$$

olur. Buradan da $\beta(z, w) = \beta(w, z)$ olduğu görülür (Podlubny 1999).

Tanım 9: f , $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer tüm $x > x_0$ ler için

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$$

olacak şekilde, x_0, M ve α pozitif sabitleri mevcut ise, f fonksiyonuna α üstel mertebededir denir.

Eğer f , $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyon ise $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$ koşulu geometrik olarak f nin $[x_0, \infty)$ aralığındaki $y = Me^{\alpha x}$ üstel fonksiyonundan daha hızlı artmadığını ifade eder.

Örneğin $f(x) = x$, $g(x) = x$ ve $h(x) = 2\cos x$ fonksiyonları $x > 0$ için $a = 1$ üstel mertebededir. Çünkü bu fonksiyonlar için sırasıyla $|x| \leq e^x$, $|e^{-x}| \leq e^x$ ve $|2\cos x| \leq 2e^x$ dir.

Örneğin $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu ise $[0, \infty) -$ aralığında üstel mertebeden değildir. Çünkü bu fonksiyon $x > x_0 > 0$ için e^x den daha hızlı artar.

Tanım 10 (Laplace Dönüşümü)

f , $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ integrali mevcut (veya yakınsak) ise, s nin bir fonksiyon olan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (9)$$

ifadesine f nin Laplace dönüşümü denir.

f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) \text{ veya } \mathcal{L}\{f\} = F$$

biçiminde gösterilir. (9) da s reel veya kompleks bir değişkendir. Burada s nin reel olduğunu varsayarsak (9) daki integral has olmayan integraldir. Bilindiği gibi, eğer

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-sx} f(x) dx$$

limiti mevcut ise (9) daki has olmayan integral mevcuttur (veya yakınsaktır) denir. $F(s)$ nin tanım cümlesi şüphesiz (9) daki integralin mevcut olduğu s değerlerinden ibarettir. (Aggarwal *et.al*, 2019)

Örneğin $f(x) = 2$ ve $(x \geq 0)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

Tanımdan

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-sx} 2 dx = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-sx} dx = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sx}}{s} \right]_0^A = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right]$$

yazılabilir. Dikkat edelim ki $s > 0$ için $-sA < 0$ olup $A \rightarrow \infty$ iken $sA < 0$ $A \rightarrow \infty$ iken $e^{-sA} \rightarrow 0$ dır.

$s \leq 0$ için $-sA \geq 0$ olup $A \rightarrow \infty$ iken $e^{-sA} \rightarrow \infty$ dır. Buradan $2 \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right]$ $s > 0$ için mevcuttur. Ve $\frac{2}{s}$ ye eşittir. Yani $\mathcal{L}\{1\} = \frac{2}{s}$ ($s > 0$) dır.

Örneğin $f(x) = e^{2x}$, $(x \geq 0)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{L}\{e^{2x}\} = \int_0^\infty e^{-sx} e^{2x} dx = \int_0^\infty e^{-(s-2)x} dx = \frac{1}{s-2}, \quad s > 2$$

bulunur.

Teorem 1 (Laplace dönüşümünün varlığı): f , $[0, \infty)$ – aralığında parçalı sürekli ve $x > x_0$ için α – üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{f(x)\}$ mevcuttur.

İspat: $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ integralinin $s > \alpha$ için yakınsak olduğunu göstereceğiz. Bunun için integrali

$$\int_0^{x_0} e^{-sx} f(x) dx + \int_{x_0}^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (10)$$

biçiminde iki ayrı integralin toplamı olarak yazalım. $f(x)$ ve dolayısıyla $e^{-sx} f(x)$, tespit edilmiş herhangi bir s için $[0, x_0]$ aralığında parçalı sürekli olduğundan, (10) daki birinci integral mevcut yani yakınsaktır. (10) daki ikinci integralin yakınsak olduğunu göstermek için, has olmayan integraller için karşılaştırma kuralını kullanacağız.

f , α – üstel mertebeden olduğundan $x > x_0$ için

$$|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$$

ve dolayısıyla tüm $x > x_0$ lar için

$$|e^{-sx}f(x)| = e^{-sx}|f(x)| \leq Me^{-(s-a)x}$$

yazılabilir. Öte yandan $s > \alpha$ için

$$\int_0^{\infty} Me^{-(s-a)x} dx = M \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx = \frac{Me^{-(s-a)x_0}}{s-a} < \infty$$

dır. $x \geq x_0$ için $|e^{-sx}f(x)| \leq Me^{-(s-a)x}$ olduğundan ve daha büyük bir fonksiyonun has olmayan integrali $s > \alpha$ için yakınsaktır. Böylece (10) daki her iki integral mevcut olduğundan, $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{f(x)\}$ mevcuttur. (Çağlıyan ve d. 2016)

Tanım 11 (Ters Laplace Dönüşümü): Bir $F(s)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$$

olacak biçimde bir $f(x)$ fonksiyonu var ise, f ye F nin Ters Laplace Dönüşümü denir. F nin Ters Laplace Dönüşümü

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \text{ veya } f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

biçiminde gösterilir.

Bir F fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü tek olmayabilir. Yani $\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\}$ iken $f(x) \neq g(x)$ olabilir. Örneğin

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \quad (s > -3)$$

fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü

$$f(x) = e^{-3x} \text{ ve } g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 1 \\ e^{-3x} & , \quad x \neq 1 \end{cases}$$

fonksiyonlarıdır. Ters Laplace dönüşümünün tek olması için hangi koşulların sağlanması aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 2 (Ters Laplace dönüşümünün tekliği):

f ve g , $[0, \infty)$ – aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden iki fonksiyon olsun. Eğer tüm $s > s_0$ lar için $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$ olacak şekilde bir s_0 sabiti mevcutsa, bu takdirde sonlu sayıda süreksizlik noktaları hariç tüm $x > 0$ lar için $f(x) = g(x)$ dir. (Çağlıyan ve d. 2016)

İntegral Denklem

İntegral denklem, integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonlardan meydana gelen bir eşitliktir. Bu bir veya daha fazla integral işareti altındaki bilinmeyen fonksiyonun, fonksiyonel eşitliğe dahil olduğu anlamına gelmektedir. Örneğin,

$$y(x) = f(x) + 5 \int_0^1 e^{t+x} y(t) dt \quad (11)$$

bir integral denklemdir. İntegral denklemler lineerliğe, bilinmeyen fonksiyonun sınırlarına, homojenliğe ve bulunduğu yere göre çeşitli şekilde sınıflandırılmaktadır.

Tanım 12 (Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler):

Bir integral denklemde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olsun. $u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$ yapısındaki integral denklemde, $u(t)$ lineerse integral denkleme *lineer integral denklem*, $u(t)$ lineer değilse yani $u^n(t)$ şeklinde ise integral denkleme *lineer olmayan integral denklem* denir. Lineer olan ve olmayan integral denklemler

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (12)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u^n(t)dt \quad (13)$$

şeklinde gösterilir (Aksoy, 1998)

MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Mohand Dönüşümü, temel özellikleri ve Mohand Dönüşümü için türev fonksiyonların farklı katsayılarla birlikte Mohand dönüşüm formülleri verildi.

Mohand Dönüşümü Yöntemi

$f(t)$, her $t \geq 0$ için tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonunun Mohand dönüşümü $\mathcal{R}(s)$ fonksiyonudur. A kümesi aşağıdaki gibi tanımlanmak üzere

$$A = \{ f(t) : \exists M, k_1, k_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{k_j}}, t \in (-1)^j \times [0, \infty) \}$$

her $f(t) \in A$ için Mohand dönüşümü

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{M}\{f(t)\} = s^2 \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (14)$$

şeklinde tanımlanır. Sağ taraftaki integralin tanımlı olması şartıyla. (14) 'deki $f(t)$ fonksiyonu, Mohand dönüşümü altında $\mathcal{R}(s)$ fonksiyonu ile gösterilir.

Örneğin $f(t) = e^{at}$ olsun, burada $t \geq 0$, ve a bir sabittir, bu durumda bu fonksiyonun Mohand dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{e^{at}\} &= s^2 \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = s^2 \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} s^2 \int_0^b e^{(a-s)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} s^2 \left(\frac{-1}{s-a} e^{(a-s)t} \right) \Big|_0^b \\ &= \frac{s^2}{s-a} \quad (a-s > 0, s > 0) \end{aligned}$$

Yani,

$$\mathcal{M}\{e^{at}\} = \frac{s^2}{s-a}$$

şeklindedir.

1. Birim Adım Fonksiyonu:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{M}\{1\} = s$$

şeklindedir.

2. $f(t) = t^n$ için sonuç: Burada $t, t^2, \dots, t^n$ değerini bulacağız. Sonra bu kuralı genelleyeceğiz.

$f(t) = t$ olsun, o zaman tanımdan hareketle

$$\mathcal{M}\{f(t)\} = \mathcal{M}\{t\} = s^2 \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

yazılır ve kısmi integrasyondan

$$\mathcal{M}\{t\} = 1$$

elde edilir.

eğer $f(t) = t^2$ alınırsa;

$$\mathcal{M}\{f(t)\} = \mathcal{M}\{t^2\} = s^2 \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt$$

yazılır ve yine ard arda iki kısmi integrasyondan

$$\mathcal{M}\{t^2\} = \frac{2!}{s}$$

elde edilir.

Bu sonuçları genelleyerek $f(t) = t^n$ alındığında yine ardarda gelecek kısmi integrasyon işlemlerinden

$$\mathcal{M}\{f(t)\} = \mathcal{M}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

eşitliğinin elde edileceğini söyleyebiliriz.

Mohand Dönüşümünün Özellikleri

1. Mohand dönüşümü doğrusaldır (lineerdir), yani a ve b herhangi bir sabit ve $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyon olsun.

$$\mathcal{M}\{a f(t) + b g(t)\} = a \mathcal{M}\{f(t)\} + b \mathcal{M}\{g(t)\}$$

dir.

2. $f(t)$ bir fonksiyon ve $f(t) \geq 0$ olsun, o zaman

$$\mathcal{M}\{e^{at}f(t)\} = \left[\frac{s^2}{(s-a)^2} \right] \mathcal{R}\{s-a\}$$

dir.

3. $\mathcal{M}\{f(t)\} = \mathcal{R}(s)$ olsun, O zaman

$$\mathcal{M}\{f(at)\} = a \mathcal{R}\left\{\frac{s}{a}\right\}$$

dir.

Türevlerin Mohand Dönüşümleri

1. $\mathcal{M}\{f(t)\} = \mathcal{R}(s)$ olsun. O zaman

$$i. \mathcal{M}\{f'(t)\} = s\mathcal{R}(s) - s^2F(0)$$

$$ii. \mathcal{M}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{R}(s) - s^3F(0) - s^2F'(0)$$

⋮

$$iii. \mathcal{M}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{R}(s) - s^{n+1}F(0) - s^nF'(0) - \dots - s^2F^{(n-1)}(0)$$

2. $\mathcal{M}\{f(t)\} = \mathcal{R}(s)$ olsun. Bu durumda

$$a) \mathcal{M}\{t f(t)\} = \left[\frac{2}{s} - \frac{d}{ds} \right] [\mathcal{R}(s)]$$

$$b) \mathcal{M}\{t f'(t)\} = 2\mathcal{R}(s) - 2sf(0) - \frac{d}{ds} [s\mathcal{R}(s) - s^2f(0)]$$

$$c) \mathcal{M}\{t f''(t)\} = 2s\mathcal{R}(s) - 2s^2f(0) - 2sf'(0) - \frac{d}{ds} [s^2\mathcal{R}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0)]$$

(Mohand, 2017)

$$d) \mathcal{M}\left[t^2 f'(t)\right] = -s \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{R}(s) - 2 \frac{d}{ds} \mathcal{R}(s) + \frac{2}{s} \mathcal{R}(s)$$

İspat: d) a) şıkkındaki $\mathcal{M}\{t f(t)\} = \left[\frac{2}{s} - \frac{d}{ds} \right] [\mathcal{R}(s)]$ eşitliğimizde $f(t)$ yerine $t f'(t)$ yazarsak

$$\mathcal{M}\{t. t f'(t)\} = \left[\frac{2}{s} - \frac{d}{ds} \right] [\mathcal{M}\{t f'(t)\}]$$

eşitliği elde edilir. Burada $t f'(t)$ nin Mohand dönüşümünü kullanarak,

$$\mathcal{M}\{t \cdot t f'(t)\} = \left[\frac{2}{s} - \frac{d}{ds} \right] \left[2\mathcal{R}(s) - 2s f(0) - \frac{d}{ds} [s\mathcal{R}(s) - s^2 f(0)] \right]$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yaparak,

$$\mathcal{M}[t^2 f'(t)] = -s \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{R}(s) - 2 \frac{d}{ds} \mathcal{R}(s) + \frac{2}{s} \mathcal{R}(s)$$

dönüşüm formülünü elde etmiş oluruz.

$[t^2 f(t)]$ ve $[t^2 f''(t)]$ 'nin Mohand dönüşüm formülleri de benzer şekilde bulunabilir.

Bu eşitlikleri değişken katsayılı diferansiyel denklemleri çözerken kullanacağız. Denklemin mertebesine ve katsayılarına göre yeni eşitlikler tanımdan ve d) şıkında yaptığımız ispat yoluyla kolaylıkla elde edilebilir.

İntegrallerin Mohand Dönüşümü

3. $\mathcal{M}\{f(t)\} = \mathcal{R}(s)$ olsun, o zaman

$$\mathcal{M}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{R}(s)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3: $\mathcal{M}\{f(t)\} = \mathcal{R}(s)$ verilsin. Bu durumda,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{R}(s) \right] = 0$$

dır.

İspat:

$$\mathcal{M}\{f(t)\} = \mathcal{R}(s) = s^2 \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$\frac{1}{s^2} \mathcal{R}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{R}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right]$$

$$= 0$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{R}(s) \right] = 0$$

elde edilmiş olur.

Tablo 1. Bazı Fonksiyonların Mohand Dönüşümleri

S.No.	$f(t)$	$\mathcal{M}\{f(t)\}$
1	1	s
2	t	1
3	t^2	$\frac{2!}{s}$
4	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$t^n, n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
6	e^{at}	$\frac{s}{s-a}$
7	$\sin at$	$\frac{as}{(s^2 + a^2)}$
8	$\cos at$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)}$
9	$\sinh at$	$\frac{as^2}{(s^2 + a^2)}$
10	$\cosh at$	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)}$
11	$J_0(t)$	$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$
12	$J_1(t)$	$s^2 - \frac{s^3}{\sqrt{1+s^2}}$

Tanım 13 (Ters Mohand Dönüşümü)

Bir $F(s)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = F(s)$$

olacak biçimde bir $f(x)$ fonksiyonu var ise , f ye F nin Ters Mohand Dönüşümü denir. F nin Ters Mohand Dönüşümü

$$f = \mathcal{M}^{-1}\{F\} \text{ veya } f(x) = \mathcal{M}^{-1}\{F(s)\}$$

biçiminde gösterilir.

Örneğin, $\mathcal{M}(s) = \frac{s^2}{s-2}$ fonksiyonunun ters Mohand dönüşümü

$$\mathcal{M}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s-2}\right\} = e^{2t}$$

şeklindedir.

Teorem 4: (Ters Mohand Dönüşümünün tekliği):

f ve g , $[0, \infty)$ – aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden iki fonksiyon olsun. Eğer her $s > s_0$ lar için $\mathcal{M}\{f\} = \mathcal{M}^{-1}\{g\}$ olacak şekilde bir s_0 sabiti mevcutsa bu takdirde sonlu sayıda süreksizlik noktaları hariç her $x > 0$ için $f(x) = g(x)$ dir.

Teorem 5: (Mohand Dönüşümü için Konvolüsyon Teoremi):

$f(t)$ ve $g(t)$ iki fonksiyon olsun. Mohand Dönüşümünün konvolüsyonu

$$\mathcal{M}(f * g) = \frac{1}{s^2} \mathcal{M}(f(t)).\mathcal{M}(g(t))$$

dir.

Mohand Dönüşümünün Konvolüsyon çarpımı integral denklemlerin çözümünde kullanılmakta olup tezimizin konusu ile doğrudan alakalı olmadığı için ispatına gerek duyulmamıştır.

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde dört adet değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem alınıp Mohand Dönüşümü ile çözüldü.

Test Problemi 1

$$y'' + ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemini Mohand dönüşümü ile çözelim.

Çözüm: Denklemin Mohand dönüşümü alınır

$$\mathcal{M}[y''] + \mathcal{M}[ty'] - \mathcal{M}[y] = 0$$

olur.

$$\mathcal{M}[y''(t)] = s^2\mathcal{R}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0)$$

$$\mathcal{M}[ty'(t)] = 2\mathcal{R}(s) - 2sf(0) - \frac{d}{ds}[s\mathcal{R}(s) - s^2f(0)]$$

$$\mathcal{M}[y] = \mathcal{R}(s)$$

türevlerin Mohand dönüşümünün özellikleri kullanılıp bu değerler denkleme yazılırsa

$$s^2\mathcal{R}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) + 2\mathcal{R}(s) - 2sf(0) - \frac{d}{ds}[s\mathcal{R}(s) - s^2f(0)] - \mathcal{R}(s) = 0$$

elde edilir. Başlangıç şartları yerine yazıldığında

$$s^2\mathcal{R}(s) - s^2 + \mathcal{R}(s) - s\mathcal{R}'(s) - \mathcal{R}(s) = 0$$

ve

$$\mathcal{R}'(s) - s\mathcal{R}(s) = -s$$

eşitliği elde edilir ki bu klasik lineer bir diferansiyel denklemdir. Bu denkleme bilinmeyen fonksiyon $\mathcal{R}$ dir ve integral çarpanı bulunarak kolayca

$$\mathcal{R}(s) = 1 + ce^{\frac{s^2}{2}}$$

genel çözümü elde edilebilir. Burada Mohand dönüşümü için tanımlanan Teorem 3 gereği $c = 0$ alınarak

$$\mathcal{R}(s) = 1$$

elde edilir. Daha sonra her iki tarafın ters Mohand dönüşümü alınır

$$s = \mathcal{M}^{-1}[1]$$

den

$$y(t) = t$$

çözümü elde edilir.

Test Problemi 2

$$y'' + 2ty' - 4y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemini Mohand dönüşümü ile çözelim.

Çözüm: Denklemin Mohand dönüşümü alınır

$$\mathcal{M}[y''] + \mathcal{M}[2ty'] - \mathcal{M}[4y] = \mathcal{M}[1]$$

olur.

$$\mathcal{M}[y''(t)] = s^2\mathcal{R}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0)$$

$$\mathcal{M}[2ty'(t)] = 4\mathcal{R}(s) - 4sf(0) - 2\frac{d}{ds}[s\mathcal{R}(s) - s^2f(0)]$$

$$\mathcal{M}[4y] = 4\mathcal{R}(s)$$

$$\mathcal{M}[1] = s$$

türevlerin Mohand dönüşümünün özellikleri kullanılıp terimler tek tek bu değerlerle denkleme yazılırsa

$$s^2\mathcal{R}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) + 4\mathcal{R}(s) - 4sf(0) - 2\frac{d}{ds}[s\mathcal{R}(s) - s^2f(0)] - 4\mathcal{R}(s) = 0$$

elde edilir. Başlangıç şartları yerine yazıldığında

$$s^2\mathcal{R}(s) - 2s\mathcal{R}'(s) - 2\mathcal{R}(s) = s$$

ve

$$\mathcal{R}'(s) - \left[\frac{s^2 - 2}{2s} \right] \mathcal{R}(s) = \frac{-1}{2}$$

eşitliği elde edilir ki bu da yine klasik lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemden bilinmeyen

fonksiyon $\mathcal{R}$ dir ve integral çarpanı bulunarak kolayca

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} c e^{\frac{s^2}{4}}$$

genel çözümü elde edilebilir. Burada Mohand dönüşümü için tanımlanan Teorem 3 gereği $c = 0$ alınarak

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{2!} \left[\frac{2!}{s} \right]$$

elde edilir. Daha sonra her iki tarafın ters Mohand dönüşümü alınır

$$s = \mathcal{M}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right]$$

den

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2$$

genel çözümü elde edilir.

Test Problemi 3

$$ty'' + (1 - 2t)y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemini Mohand dönüşümü ile çözelim.

Çözüm: Denklemin Mohand dönüşümü alınır,

$$\mathcal{M}[ty''] + \mathcal{M}[(1 - 2t)y'] - \mathcal{M}[2y] = 0$$

yazılır. Türevlerin Mohand dönüşümünün özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz.

$$\mathcal{M}[ty''(t)] = 2s\mathcal{R}(s) - 2s^2f(0) - 2sf'(0) - \frac{d}{ds}[s^2\mathcal{R}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0)]$$

$$\mathcal{M}[(1 - 2t)y'] = \mathcal{M}[y'] - \mathcal{M}[2ty'] \quad (\text{Lineerlik özelliği})$$

$$\mathcal{M}[y'(t)] = s\mathcal{R}(s) - s^2f(0)$$

$$\mathcal{M}[2ty'(t)] = 4\mathcal{R}(s) - 4sf(0) - 2\frac{d}{ds}[s\mathcal{R}(s) - s^2f(0)]$$

$$\mathcal{M}[2y] = 2\mathcal{R}(s)$$

Denklemdaki terimler tek tek bu eşitliklerle denklemde yerine yazılıp başlangıç değerleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& 2s\mathcal{R}(s) - 2s^2f(0) - 2sf'(0) - \frac{d}{ds}[s^2\mathcal{R}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0)] + s\mathcal{R}(s) - s^2f(0) \\
& - 4\mathcal{R}(s) + 4sf(0) + 2\frac{d}{ds}[s\mathcal{R}(s) - s^2f(0)] - 2\mathcal{R}(s) = 0 \\
& 2s\mathcal{R}(s) - 2s^2 - 4s - \frac{d}{ds}[s^2\mathcal{R}(s) - s^3 - 2s^2] + s\mathcal{R}(s) - s^2 - 4\mathcal{R}(s) + 4s \\
& + 2\frac{d}{ds}[s\mathcal{R}(s) - s^2] - 2\mathcal{R}(s) = 0
\end{aligned}$$

yazılır ve

$$(-s^2 + 2s)\frac{d}{ds}\mathcal{R}(s) = (4 - s)\mathcal{R}(s)$$

eşitliği elde edilir ki bu da yine değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemde bilinmeyen fonksiyon $\mathcal{R}$ dir ve çözümü yapılırsa

$$\mathcal{R}(s) = -\frac{c s^2}{s - 2}$$

ve $c = -1$ alınırsa

$$\mathcal{R}(s) = \frac{s^2}{s - 2}$$

elde edilmiş olur. Daha sonra her iki tarafın ters Mohand dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
s &= \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{s^2}{s - 2}\right] \\
y(t) &= e^{2t}
\end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

Test Problemi 4

$$ty'' + y' + 4ty = 0 \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemini Mohand dönüşümü ile çözelim.

Çözüm: Denklemin Mohand dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{M}[ty''] + \mathcal{M}[y'] + \mathcal{M}[4ty] = 0$$

olur.

$$\mathcal{M}[ty''(t)] = 2s\mathcal{R}(s) - 2s^2f(0) - 2sf'(0) - \frac{d}{ds}[s^2\mathcal{R}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0)]$$

$$\mathcal{M}[y'(t)] = s\mathcal{R}(s) - s^2 f(0)$$

$$\mathcal{M}[4ty] = 4 \left[\frac{2}{s} - \frac{d}{ds} \right] \mathcal{R}(s)$$

türevlerin Mohand dönüşümünün özellikleri kullanılıp terimler tek tek bu değerlerle denklemde yazılırsa

$$2s\mathcal{R}(s) - 2s^2 f(0) - 2sf'(0) - \frac{d}{ds} [s^2 \mathcal{R}(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0)] + s\mathcal{R}(s) - s^2 f(0) + 4 \left[\frac{2}{s} - \frac{d}{ds} \right] \mathcal{R}(s) = 0$$

elde edilir. Başlangıç şartları yerine yazıldığında

$$2s\mathcal{R}(s) - 6s^2 - 2s\mathcal{R}(s) - s^2 \mathcal{R}'(s) + 9s^2 + s\mathcal{R}(s) - 3s^2 + \frac{8}{s} \mathcal{R}(s) - 4\mathcal{R}'(s) = 0$$

ve

$$(s^2 + 4)\mathcal{R}'(s) - \left(s + \frac{8}{s} \right) \mathcal{R}(s) = 0$$

eşitliği elde edilir ki bu da değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir. Bu denklem çözülürse,

$$\mathcal{R}'(s) = \left[\frac{s^2 + 8}{s(s^2 + 4)} \right] \mathcal{R}(s)$$

$$\frac{d[\mathcal{R}(s)]}{\mathcal{R}(s)} = \frac{s^2 + 8}{s(s^2 + 4)} = \frac{(s^2 + 4) + 4}{s(s^2 + 4)}$$

$$\frac{d[\mathcal{R}(s)]}{\mathcal{R}(s)} = \frac{2}{s} - \frac{s}{(s^2 + 4)}$$

$$\mathcal{R}(s) = c \frac{s^2}{\sqrt{s^2 + 4}}$$

çözümü elde edilir. Ters Mohand dönüşümünden

$$y(t) = c J_0(2t)$$

yazılır ve başlangıç değerleri $y(0) = 3$ dikkate alındığında $J_0(0) = 1$ olup $c = 3$ alınır

$$y(t) = 3 J_0(2t)$$

çözümü elde edilir ki burada J_n birinci çeşit Bessel fonksiyonlarını temsil etmektedir. Böylece değişken katsayılı diferansiyel denklemin çözümü tamamlanmış olur. Bu denklem Emden-Fowler tipinde çözümü nispeten zor bulunan denklem çeşitlerindendir. (Aggarwal *et.al*, 2018)

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde Laplace İntegral dönüşüm metotlarından Mohand dönüşümü tanıtıldı ve değişken katsayılı diferansiyel denklemler verilerek çözümleri Mohand Dönüşümü metoduyla yapıldı. Önce Mohand Dönüşümünün tanımı ve özellikleri detaylı bir şekilde tanıtıldı. Ardından fonksiyon türevleri ve katsayılarıyla oluşan denklem terimlerinin Mohand dönüşüm formülleri elde edildi. Daha sonra dört tane test problemi ele alındı. Metot bu problemlere uygulandı. İstenilen sonuçlar yani bahsi geçen denklemlere ait tam çözümler elde edildi.

Mohand Dönüşümünün, değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözüm sürecini kolaylaştırdığı ve bu tür denklemlerin tam çözümleri için etkili bir metot olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Aggarwal, S., Chauhan, R., & Sharma, N. 2018. Mohand transform of Bessel's functions. International Journal of Research in Advent Technology, 6(11), 3034-3038.
- Aggarwal, S., Gupta, AR, Singh, DP., et al. 2018. Application of Laplace transform for solving population growth and decay problems. International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science; 7(9): 141-145.
- Aggarwal, S., Singh, A., Kumar, A., et al. 2019. Application of Laplace transform for solving improper integrals whose integrand consisting error function. Journal of Advanced Research in Applied Mathematics and Statistics; 4(2): 1-7.
- Aksoy, Y., 1998, İntegral Denklemler, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayını, İstanbul.
- Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S., 2016, Adi Diferansiyel Denklemler, Dora Yayınları.
- Jafari, H., 2021. A new general integral transform for solving integral equations, Journal of Advanced Research, Volume 32, pages 133-138, ISSN 2090-1232,
- Kadioğlu, E., 2005. Genel Matematik, Erzurum.
- Köklü, K., 2018. İntegral Dönüşümler ve Uygulamaları.
- Lokenath Debnath and D. Bhatta. 2006. Integral transform and their Application Second Edition, Chapman & Hall /CRC.
- Mohand, M., & Mahgoub, A. (2017). The new integral transform "Mohand Transform". Advances in Theoretical and Applied Mathematics, 12(2), 113-120.
- Podlubny, I., 1999, Fractional differential equations, Academic Pres, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Şevket VURMAZ
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Şehit Sedat Nezih Özok Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.
Yüksek	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enst., Uygulamalı
Lisans:	Matematik Anabilim Dalı
Doktora:	-
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Başlangıç