



**SIRALI UZAYLARDA TANIMLI MONOTON
DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA
TEOREMLERİ**

Tuğba TEKİN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Sezgin AKBULUT
2024**

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**SIRALI UZAYLARDA TANIMLI MONOTON DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT
NOKTA TEOREMLERİ**

(Some Fixed Point Theorems For Monotone Mappings Defined in Ordered Spaces)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba TEKİN

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Erzurum
Ocak, 2024

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Tuğba TEKİN tarafından hazırlanan “Sıralı Uzaylarda Tanımlı Monoton Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri ” başlıklı çalışma 30 / 01 / 2024 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır
Danışman:	Prof. Dr. Sezgin AKBULUT <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. İbrahim KARAHAN <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır

Enstitü Yönetim Kurulunun
.../.../.... tarih ve sayılı
kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN

Enstitü Müdürü

Aslı ıslak imzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak *Prof. Dr. Sezgin AKBULUT* danışmanlığında sunulan “Sıralı Uzaylarda Tanımlı Monoton Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	20	30
Kuramsal Temeller	26	30
Materyal ve Yöntem	21	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	13	20
Sonuç ve Öneriler	3	20
Tezin Geneli	20	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Tuğba TEKİN	Prof. Dr. Sezgin AKBULUT
5.2.2024	5.2.2024
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak hazırladığım bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında bana her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan bilgisiyle beni destekleyen tez çalışması boyunca her zaman sabırla bana yol gösteren ve tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Sezgin AKBULUT' a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışmam süresince yanımda olan sevgili aileme, eşim ve biricik kızım Sümeyye'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Tuğba TEKİN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SIRALI UZAYLARDA TANIMLI MONOTON DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Tuğba TEKİN

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Amaç: Bu çalışmada sıralı uzaylarda tanımlı monoton dönüşümler için Mann ve Ishikawa iterasyon metotlarının zayıf ve güçlü yakınsaması incelenecektir.

Yöntem: Verilen teoremler, matematiksel yöntemler ve lemmalar yardımı ile ispatlanmıştır.

Bulgular: Bu tezde ilk olarak teoremlerde sıkça kullanacağımız bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Sonra Mann ve Ishikawa iterasyon metodları tanıtılarak sıralı Banach uzaylarda monoton α –genişlemeyen, monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşümler kullanılarak Mann ve Ishikawa iterasyon metodlarının zayıf ve güçlü yakınsamaları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı Banach uzay, sabit nokta, düzgün konveks uzay, monoton genişlemeyen dönüşüm, monoton α –genişlemeyen dönüşüm, monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşüm, güçlü yakınsaklık ve zayıf yakınsaklık.

Ocak 2024, 59 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

SOME FIXED POINT THEOREMS FOR MONOTONE MAPPINGS DEFINED IN ORDERED COMPLETE SPACES

Tuğba TEKİN

Supervisor: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Purpose: In this study, the weak and strong convergence of Mann and Ishikawa iteration methods for monotone mappings defined on ordered spaces will be investigated.

Method: The theorems in the thesis are proved with the help of mathematical methods and lemmas.

Findings: In this thesis, we first introduce some basic concepts that we will use frequently in theorems. Then Mann and Ishikawa iteration methods are introduced and weak and strong convergence of Mann and Ishikawa iteration methods are given using monotone α –non-expansive, monotone (α, β) -non-expansive, mappings in ordered Banach spaces.

Keywords: Ordered Banach space, fixed point, uniformly convex space, monotone nonexpansive mapping, monotone α –nonexpansive mapping, monotone (α, β) –nonexpansive mapping, strongly convergence and weakly convergence.

January 2024, 59 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
0000GÖİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER	3
Temel Kavramlar.....	3
Kısmi Sıralı Metrik Uzay.....	6
Bazı Dönüşüm Sınıfları ve Sabit Nokta Teoremleri	9
MATERYAL ve YÖNTEM	17
Bazı İterasyon Yöntemleri	17
Monoton Dönüşümlerin Sabit Noktaları.....	21
ARAŞTIRMA BULGULARI	31
Mann İterasyon Metodunun Zayıf ve Güçlü Yakınsaması	31
Ishikawa İterasyon Metodunun Zayıf ve Güçlü Yakınsaması.....	35
TARTIŞMA ve SONUÇ.....	43
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	49

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Örnek 15 için Mann ve Ishikawa İterasyonunun Yakınsama Adımları.....	42
--	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Dönüşümler arasındaki ilişki	10
Şekil 2. Örnek 15 deki T dönüşümünün sabit noktası	41
Şekil 3. $x_0 = 0.1$ için Mann ve Ishikawa İterasyonunun sabit noktaya yakınsaması	41
Şekil 4. $x_0 = 0.5$ için Mann ve Ishikawa İterasyonunun sabit noktaya yakınsaması	41



SİMGELER DİZİNİ

B_x	Kapalı birim yuvar
$<$	Önce gelir
$(N, \ \cdot \)$	Normlu uzay
S_x	Birim küre
$x_n \rightarrow x$	Güçlü yakınsama
$x_n \rightharpoonup x$	Zayıf yakınsama
δ_x	X in konveksliğinin modülü
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$D(x_0, r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$D(T)$	T dönüşümünün tanım kümesi
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalar kümesi
$R(T)$	T dönüşümünün değer kümesi
$\dim(X)$	X uzayının boyutu

GİRİŞ

$X \neq \emptyset$ olmak üzere $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $f(x) = x$ denklemini sağlayan $x \in X$ noktasına f nin sabit noktası denir. Sabit noktanın tanımından görüldüğü üzere X kümesi üzerinde veya f dönüşümü üzerinde hiçbir yapıya gerek yoktur. Bu nedenle sabit nokta teorisi üzerine yapılan çalışmalar, bir dönüşümün hangi şartlar altında sabit noktasının mevcut olduğunu araştırmaktadır. Dolayısıyla bu teori, bir varlık teorisidir. Diğer taraftan bazı sabit nokta teoremleri sabit noktanın varlığının yanı sıra tekliğini ve nasıl elde edilebileceğini de göstermektedir.

Sabit nokta teorisinin temelleri, 20. yüzyılın başlarından itibaren matematiksel analizde büyük ilerlemeler kaydetti. Bu dönemde Hollandalı matematikçi Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Brouwer Sabit Nokta Teoremi olarak bilinen önemli bir buluşu ortaya koydu. Bu teorem, sürekli bir dönüşümün bir aralıkta her zaman en az bir sabit noktaya sahip olduğunu belirtir. Ayrıca bu teorem sabit nokta teorisinin temel taşlarından biri olarak kabul edilir.

Metrik uzaylardaki sabit nokta teori çalışmaları 1922 yılında S. Banach tarafından kendisinin doktora tezinde tam normlu uzaylarda ifade edilen ve “Daraltan (büzülme) Dönüşüm Teoremi” olarak da bilinen Banach Sabit Nokta Teoremi, sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eden en önemli teoremlerden biridir. Yine o yıllarda Felix Hausdorff metrik uzay kavramını ortaya çıkarmış ve Renato Caccioppoli, 1930 yılında ilk kez bu teoremi metrik uzaylara genişletmiştir. Sabit nokta çalışmaları, sadece metrik uzaylar ile sınırlı kalmamış olup daha birçok farklı uzaylar için araştırma konusu olmuştur. Böylece, sabit nokta teorisi daha fazla uygulama alanı bulmuş olup önemi bir derece daha artmıştır. Bu uzaylardan bir kaç metrik uzay, fuzzy metrik uzay ve düzgün uzaylardır. En iyilerinden birisi de Matthews (1994) tarafından tanımlanan kısmi metrik uzaydır. Kısmi metrik uzay kavramı Mathews tarafından 1994 de, Genel Topoloji ve Uygulamaları 8. Yaz Konferansında tanıtıldı. 4 aksiyomla verilen kısmi metrik uzay kavramı, kendisine uzaklığı sıfırdan farklı olan cümleler kavramını da içermekte olup bu manada metrik kavramından daha geniş bir kavramdır.

Kısmi metrik uzay tanımından sonra Matthews, Banach sabit nokta teoreminin kısmi metrik uzay versiyonunu tanımlamıştır. Daha sonra Valero (2005), Oltra ve Valero (2004) ve Altun (2010), Matthews in sonucunun bazı genellemelerini vermişlerdir. Yine Romaguera (2010), kısmi sıralı metrik uzayda Caristi tipi sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

2010 da Aoyama λ –hybrid dönüşümlerinin bir sınıfını tanıttı. Buna göre her $x, y \in D(T)$ için

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2(1 - \lambda)(x - Tx, y - Ty)$$

ise H Hilbert uzayında T dönüşümüne λ –hybrid dönüşüm denir (Aoyama 2010). Bu dönüşüm için sabit nokta ve ergodic teoremini gösterdiler. Açıkça genişlemeyen bir dönüşüm 1 –hybrid dönüşümdür. 2011 de Aoyama ve Kohsaka α –genişlemeyen dönüşümü de tanımladı. Her $x, y \in D(T)$ için $\alpha < 1$ olmak üzere

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \alpha\|Tx - y\|^2 + \alpha\|Ty - x\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2$$

ise T dönüşümüne α –genişlemeyen dönüşüm denir. Açıkça bir genişlemeyen dönüşüm 0 –genişlemeyendir ve H Hilbert uzayında $\lambda < 2$ ise bir λ –hybrid dönüşüm $\frac{1-\lambda}{2-\lambda}$ genişlemeyendir (daha fazla detay için (Aoyama et al 2011)).

2015 yılında, Bachar ve Khamsi monoton genişlemeyen dönüşüm kavramını takdim etti ve monoton genişlemeyen bir yarı grubun ortak sabit noktalarını incelediler (Bachar and Khamsi 2015). 2015 yılında Dehaish ve Khamsi, düzgün konveks sıralı Banach uzaylarında monoton genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarını bulmak için Mann iterasyonun zayıf yakınsaması ile ilgili bazı teoremler ispatladılar (Dehaish and Khamsi 2015).

2017 de Muangchoo-in ve arkadaşları, “ K , X normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. T monoton, $\alpha, \beta < 1$ ve $x \leq y$ şartını sağlayan her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \alpha\|Tx - y\|^2 + \beta\|Ty - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2$$

oluyorsa T dönüşümüne monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşüm denir.” şeklinde tanımladıkları (α, β) –genişlemeyen dönüşümün sabit noktalarını incelediler. Devamında (α, β) –genişlemeyen dönüşümü kullanarak Ishikawa iterasyonunun zayıf ve güçlü yakınsamasını gösterdiler.

Bu çalışmada sıralı uzaylarda tanımlı monoton dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Beş ana bölümden oluşan bu tezin giriş bölümünde literatür bilgisi verilmektedir. Kuramsal Temeller adındaki ikinci bölümde temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Materyal ve Yöntem adını alan üçüncü bölümde birkaç önemli iterasyon metodu, bazı önemli sabit nokta teoremleri ve bu teoremlerin ispatları yer almaktadır. Araştırma Bulguları adındaki dördüncü bölümde monoton α –genişlemeyen, monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşümler kullanılarak Mann ve Ishikawa iterasyon metotlarının zayıf ve güçlü yakınsamaları gösterilmiştir.

KURAMSAL TEMELLER

Temel Kavramlar

Bu kısımda önemli gördüğümüz bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 1: $X \neq \emptyset$ olmak üzere keyfi $x, y, z \in X$ elemanları için

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

şartlarını sağlayan $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik, X' e (veya (X, ρ) ikilisine) de metrik uzay denir.

Tanım 2: $\{x_n\}$, X normlu uzayında bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x e güçlü yakınsaktır (strongly convergence) denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ veya } x_n \xrightarrow{k} x$$

şeklinde gösterilir. x e $\{x_n\}$ dizisinin güçlü limiti de denir.

Tanım 3: $\{x_n\}$, (X, ρ) metrik uzayda tanımlı bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $k, p > n_0$ için $\rho(x_k, x_p) < \varepsilon$ şartını sağlayan bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 4: (X, ρ) metrik uzayındaki herhangi bir Cauchy dizisi yine bu uzayda bulunan bir noktaya yakınsıyor ise (X, ρ) uzayına tam metrik uzay denir.

Örnek 1: $\rho(x, y) = |x - y|$ mutlak değer metriğine göre $(\mathbb{R}, \rho)$ tam metrik uzaydır.

Örnek 2: $\rho(x, y) = |x - y|$ mutlak değer metriğine göre $(\mathbb{Q}, \rho)$ metrik uzayı tam değildir.

Tanım 5: (X, ρ) metrik uzayında bulunan her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa bu uzaya kompakt metrik uzay denir (Maddox 1970).

Kompakt metrik her uzay aynı zamanda tam metrik uzaydır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 3: Alışılmış metriğe göre $\mathbb{R}$ kompakt metrik uzay değildir. Çünkü $(x_n) = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi yoktur.

ρ , alışılmış metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, \rho)$ tam metrik uzaydır ancak kompakt metrik uzay değildir.

Tanım 6: (X, ρ) , (Y, d) metrik uzaylar olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\rho(x, x_0) < \delta$ iken $d(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$ şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa T dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir. T dönüşümü X in her noktasında sürekli ise T dönüşümüne X de süreklidir denilir.

Tanım 7: N kümesi F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|, (a \in F)$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlayan $\| \cdot \|: N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna N de bir norm, $(N, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Her normlu uzay bir metrik uzaydır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 8: N normlu lineer uzayı üzerinde tanımlanan $\rho(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzay denir (Maddox 1970).

X , reel lineer uzay ise Banach uzayı da reeldir. Eğer X kompleks lineer uzay ise Banach uzayıda komplekstir.

Tanım 9: X bir normlu lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonların kümesini $C(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(X, \mathbb{R}) = \{T: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineer ve sürekli}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $T_1, T_2 \in C(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $C(X, \mathbb{R})$ bir lineer uzaydır. Bu $C(X, \mathbb{R})$ uzayına X in normlu duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 10: $\{x_n\}$, X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $f \in X^*$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsar (weakly convergence) denir ve

$$x_n \xrightarrow{z} x \text{ veya } x_n \rightharpoonup x$$

şeklinde gösterilir. x e $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti de denir.

Zayıf ve güçlü yakınsama arasındaki ilişki aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

Teorem 1: X normlu uzay olsun.

- a) Güçlü yakınsak bir dizi zayıf yakınsaktır.
- b) a. şikkının tersi genelde doğru değildir.
- c) $\dim(X) < \infty$ ise zayıf yakınsak bir dizi güçlü yakınsaktır (Kreyszig 1989).

Opial Şart: Bir E Banach uzayında $\{x_n\}$ dizisinin $x \in E$ noktasına zayıf yakınsaması her $x \neq y$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, E Banach uzayı Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Yukarıdaki eşitsizlikte ‘limsup’ ifadesi yerine ‘liminf’ ifadesi yazılırsa benzer bir şart elde edilir. Aynı eşitsizlikte ‘<’ işareti yerine ‘≤’ yazılırsa zayıf Opial şartı elde edilir.

Tanım 11: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ elemanına, T dönüşümünün sabit noktası denir. $Tx = x$ denkleminin çözümleri T dönüşümünün sabit noktalarını verir. Bu sabit noktaların kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir (Berinde 2007).

Örnek 4: $X = [0,2]$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$ ve $Tx = 3 - 2x$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesini bulalım. $Tx = x$ den $3 - 2x = x \Rightarrow x = 1$ olur. O halde sabit noktalar kümesi $F(T) = \{1\}$ olur.

Örnek 5: $T = [1,2] \rightarrow [1,2]$, $Tx = \frac{x-4}{3}$ dönüşümü verilsin. $Tx = x$ den $\frac{x-4}{3} = x$ için $x = -2$ bulunur. $-2 \notin [1,2]$ olduğundan $x = -2$ sabit nokta değildir. Yani bu dönüşümün sabit noktası yoktur.

Örnek 6: $X = [-1,1]$ ise $T: X \rightarrow X$ ve $Tx = x^3$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi, $Tx = x$ den $x^3 = x$ için $x^3 - x = 0$ ve $x(x^2 - 1) = 0$ olur. Buradan $x = -1, 0, 1$ elde edilir. Yani $F(T) = \{-1, 0, 1\}$ olur.

Tanım 12: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$ olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$ ve $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x)$ dönüşümüne x in T altındaki n . iterasyonu (adım) denir. Bundan sonraki işlemlerde $T(x)$ yerine Tx ifadesini kullanacağız.

$T: X \rightarrow X$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)$ olsun. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ (Berinde 2007). Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\} \Rightarrow F(T) = \{x\}$ olur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Hemen bir örnek verelim.

Örnek 7: $T: \{-1, 2, 1\} \rightarrow \{-1, 2, 1\}$ dönüşümü verilsin. $F(T^2) = \{-1, 2, 1\}$ iken $F(T) = \{2\}$ dir. Gerçekten

$$T(x) = \begin{cases} 1, & x = -1 \\ 2, & x = 2 \\ -1, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow Tx = x \text{ şartını sağlayan sadece } T(2) = 2 \text{ dir. Yani } F(T) = \{2\}$$

olur. Diğer yandan,

$$T^2(x) = T(T(x)) = \begin{cases} -1, & x = -1 \\ 2, & x = 2 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \text{ olduğundan } Tx = x \text{ şartını sağlayan } T(-1) = -1,$$

$T(2) = 2, T(1) = 1$ vardır. Yani $F(T^2) = \{-1, 2, 1\}$ olur. Buradan $F(T) = \{2\}$ iken $F(T^2) \neq \{2\}$ olur. Yani $F(T) = \{x\}$ iken $F(T^n) \neq \{x\}$ oldu.

Tanım 13: $X \neq \emptyset$ ve $T, H: X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. $Tx = Hx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcutsa bu x noktasına T ve H nin ortak sabit noktası adı verilir. Ortak sabit noktalarının kümesi

$$F = F(T) \cap F(H)$$

şeklinde gösterilir (Berinde 2007).

Örnek 8: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve $T, H: X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. $T(x, y) = (x, 0)$ ve $H(x, y) = (x, 2y)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T) \cap F(H) = \{(x, 0)\}$ dir. Gerçekten $T(x, y) = (x, 0)$ ve $Tx = x$ den

$$T(x, y) = (x, y) = (x, 0) \Rightarrow y = 0$$

olur. Buradan $F(T) = \{(x, y): y = 0\}$ olur. $H(x, y) = (x, 2y)$ ve $Hx = x$ den

$$H(x, y) = (x, y) = (x, 2y) \Rightarrow y = 2y \Rightarrow y = 0$$

olur. Buradan da $F(H) = \{(x, y): y = 0\}$ bulunur. O halde ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T) \cap F(H) = \{(x, 0)\}$ olur.

Kısmi Sıralı Metrik Uzay

Tanım 14: $X \neq \emptyset$ ve $\preceq$, X de bir bağıntı olsun. Eğer

1. $\forall x \in X$ için $x \preceq x$
2. $\forall x, y \in X$ için $x \preceq y$ ve $y \preceq x \Rightarrow x = y$
3. $\forall x, y, z \in X$ için $x \preceq y$ ve $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$

şartları sağlanıyorsa $\preceq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir. Boştan farklı X kümesi üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmış ise X e kısmi sıralı küme denir ve $(X, \preceq)$ ile gösterilir (Bayraktar 2017).

Tanım 15: $(X, \leq)$, kısmi sıralı küme olsun. Her $x, y \in X$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ oluyorsa $\leq$ bağıntısına tam sıralama bağıntısı ve $(X, \leq)$ ikilisine de tam sıralı küme adı verilir (Rao *et al.* 2020).

Tanım 16: $(X, \leq)$, kısmi sıralı küme olsun. Eğer X in boş kümeden farklı her alt kümesinin minimumu varsa o zaman $\leq$ bağıntısına iyi sıralama bağıntısı denir ve $(X, \leq)$ ikilisine de iyi sıralı küme adı verilir (Rao *et al.* 2020).

Tanım 17: $(X, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $a, b \in X$ olsun.

1. Eğer X in a dan büyük elemanı yoksa yani $x \in X$ için $a \leq x$ olması $x = a$ olmasını gerektiriyorsa a ya X in bir büyük elemanı veya maximal elemanı denir (Bayraktar 2017).

2. Eğer X in b den küçük elemanı yoksa yani $x \in X$ için $x \leq b$ olması $x = b$ olmasını gerektiriyorsa b ye X in bir küçük elemanı veya minimal elemanı denir (Bayraktar 2017).

Tanım 18: $a, b \in A$ olmak üzere

- a elemanı A kümesinin en küçük üst sınırı ise $\sup A = a$
- b elemanı A kümesinin en büyük alt sınırı ise $\inf A = b$ olur.

Tanım 19: $(X, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $f: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Keyfi $x, y \in X$ ve $x < y$ için $f(x) > f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$) oluyorsa f fonksiyonuna monoton azalan (artmayan) fonksiyon denir (Bayraktar 2017).

Tanım 20: $(X, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $f: X \rightarrow X$ fonksiyon olsun. Keyfi $x, y \in X$ ve $x < y$ için $f(x) < f(y)$ ($f(x) \leq f(y)$) oluyorsa f fonksiyonuna monoton artan (azalmayan) fonksiyon denir (Bayraktar 2017).

Tanım 21: X kısmi sıralı bir küme ve $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$p_1) \quad p(x, x) = p(x, y) = p(y, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$p_2) \quad p(x, x) \leq p(x, y)$$

$$p_3) \quad p(x, y) = p(y, x)$$

$$p_4) \quad p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$$

şartları sağlanıyorsa p ye X de kısmi sıralı metrik, (X, p) ikilisine de kısmi sıralı metrik uzay denir (Shukla *et al.* 2013).

$p(x, y) = 0$ iken $p_1)$ ve $p_2)$ özelliklerinden $x = y$ olur. Fakat $x = y$ iken $p(x, y) = 0$ olmak zorunda değildir.

$(X, p, \leq)$ üçlüsüne kısmi sıralı metrik uzay denir. (X, p) tam metrik uzay ise $(X, p, \leq)$ üçlüsüne kısmi sıralı tam metrik uzay denir (Almezel *et al.* 2014).

Bu çalışmada sıralı metrik uzay denilince kısmi sıralı metrik uzay anlaşılacaktır.

Örnek 9: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $p: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ve $p(x, y) = |x - y|$ tanımlandığında p kısmi metrik, $(\mathbb{R}, p)$ kısmi metrik uzaydır. Gerçekten her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$p_1) \quad p(x, x) = p(x, y) = p(y, y) \Rightarrow$$

$$|x - x| = |x - y| = |y - y| \Rightarrow |x - y| = 0 \Rightarrow x = y$$

$$p_2) \quad p(x, x) \leq p(x, y)$$

$$p(x, x) = |x - x| \leq |x - y| \Rightarrow 0 \leq |x - y| = p(x, y)$$

$$p_3) \quad p(x, y) = p(y, x)$$

$$p(x, y) = |x - y| = |y - x| = p(y, x)$$

$$p_4) \quad p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z) \Rightarrow$$

$$|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| - |z - z|$$

tüm şartlar sağlandığına göre $(\mathbb{R}, p)$ kısmi sıralı metrik uzaydır.

Tanım 22: (X, p) kısmi metrik uzay ve $\{x_n\}$, X kümesinde bir dizi olsun. $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$ sonlu ise $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi

$$p(x, x) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktasına yakınsıyorsa (X, p) ikilisine tam kısmi metrik uzay denir (Almezel *et al.* 2014).

Teorem 2: $\{x_n\}$, (X, p) kısmi metrik uzayında bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin $x \in X$ e yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x, x_n)$$

olmasıdır (Almezel *et al.* 2014).

Bazı Dönüşüm Sınıfları ve Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 23: (X, ρ) metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y)$$

şartını sağlayan $k \geq 0$ sabiti mevcutsa T dönüşümüne Lipschitzian dönüşüm, k sayısına da Lipschitzian sabiti denir. Lipschitzian şartını sağlayan T dönüşümü düzgün süreklidir. Fakat tersi her zaman doğru değildir (Berinde 2007).

Aşağıdaki örnekte Lipschitzian dönüşümün düzgün sürekli olduğu gösterilmiştir.

Örnek 10: (X, ρ) bir metrik uzay olmak üzere, $T: X \rightarrow X$ şeklinde tanımlanan Lipschitzian dönüşüm düzgün süreklidir. Gerçekten, her $\varepsilon > 0$ için $\rho(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k}$ alınırsa $\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$ olur. Bu ise T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir.

Tanım 24: X normlu uzay, $K \neq \emptyset$ ve $K \subseteq X$ olmak üzere $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in K$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L\|x - y\|$$

şartını sağlayan bir $L > 0$ sabiti mevcutsa T dönüşümüne düzgün Lipschitzian dönüşüm denir (Argawal *et al.* 2009).

Tanım 25: (X, ρ) metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ Lipschitzian dönüşüm olsun. $0 \leq k < 1$ olması halinde

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne daraltan dönüşüm (contraction) veya büzülme dönüşümü denir (Argawal *et al.* 2009).

Lipschitzian şartını sağlayan her dönüşüm aynı zamanda düzgün sürekli olacağından daraltan dönüşüm de düzgün süreklidir. Bu sebeple T sürekli değilse daraltan dönüşüm de değildir.

Tanım 26: (X, ρ) metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir (Edelstein 1962).

Tanım 27: (X, ρ) metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\rho(Tx, Ty) \leq \rho(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa T dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm (nonexpansive) denir (Edelstein 1962).

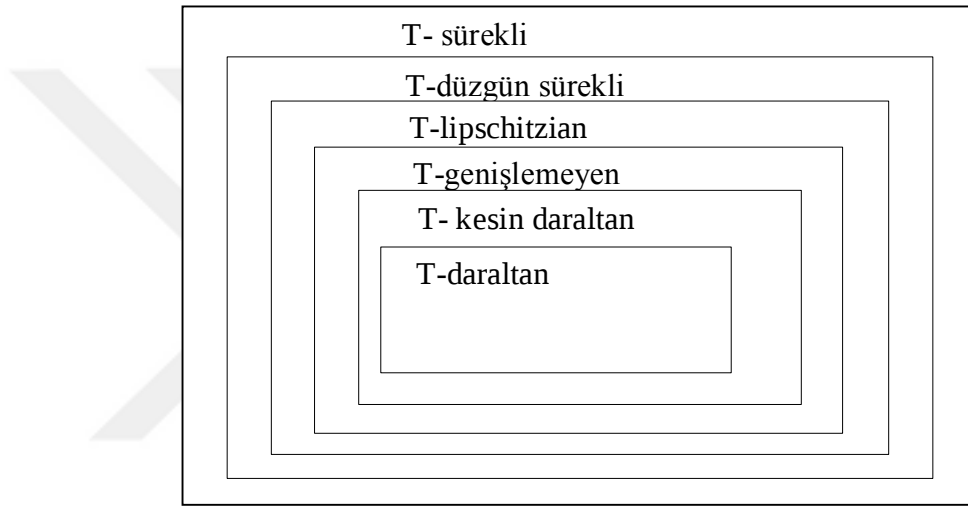
$$\rho(Tx, Ty) > \rho(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa T dönüşümüne genişleyen dönüşüm denir (Edelstein 1962).

Örnek 11: $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ sayılar kümesi ve $\rho(x, y) = |x - y|$ olsun. $T: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ dönüşümü için $Tx = x - 2$ genişlemeyen dönüşümdür. Gerçekten $\rho(Tx, Ty) = |x - 2 - y + 2| = |x - y| = \rho(x, y)$ olur. Eşitlik sağlandığından genişlemeyen dönüşümdür. Ancak daraltan ve kesin daraltan değildir.

Tanımlanan bu dönüşümler arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

T dönüşümü daraltan dönüşüm $\Rightarrow T$ kesin daraltan dönüşüm $\Rightarrow T$ genişlemeyen dönüşüm $\Rightarrow T$ Lipschitzian dönüşüm $\Rightarrow T$ düzgün sürekli $\Rightarrow T$ dönüşümü sürekli şeklinde bir ilişki vardır.



Şekil 1. Dönüşümler arasındaki ilişki

Tanım 28: $\mathbb{X}$ kısmi sıralı normlu uzay, $K \neq \emptyset$ olmak üzere $K \subset \mathbb{X}$ ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun.

1. $x \leq y$ olmak üzere her $x, y \in K$ için $Tx \leq Ty$ ise T dönüşümüne monoton,
2. T monoton ve $x \leq y$ olmak üzere her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

oluyorsa T dönüşümüne monoton genişlemeyen dönüşüm denir (Bachar and Khamsi 2015). Açıkça bir monoton genişlemeyen dönüşüm süreksiz olabilir.

Tanım 29: $\mathbb{X}$ normlu uzay, K kümesi $\mathbb{X}$ uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. $p \in F(T) \neq \emptyset, (Tp = p)$ ve her $x \in K$ için

$$\|Tx - Tp\| \leq \|x - p\|$$

oluyorsa, T dönüşümüne quasi genişlemeyen dönüşüm denir (Petryshyn and Williamson 1973).

$F(T) \neq \emptyset$ ise genişlemeyen dönüşüm aynı zamanda quasi genişlemeyen dönüşümdür. Ters her zaman doğru değildir.

Tanım 30: X kısmi sıralı normlu uzay, $K \neq \emptyset$ olmak üzere $K \subset X$ ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. $F(T) \neq \emptyset$ ve $x \leq p$ veya $x \geq p$ şartını sağlayan $x \in K$ ve her $p \in F(T)$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise T dönüşümüne monoton quasi- genişlemeyen dönüşüm denir (Song *et al.* 2016).

Tanım 31: X kısmi sıralı normlu uzay, $K \neq \emptyset$ olmak üzere $K \subset X$ ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. T monoton, $\alpha < 1$ ve $x \leq y$ şartını sağlayan her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \alpha \|Tx - y\|^2 + \alpha \|Ty - x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - y\|^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne monoton α - genişlemeyen dönüşüm denir (Aoyama ve Kohsaka 2011).

Açıkça bir monoton genişlemeyen dönüşüm monoton 0- genişlemeyen dönüşümdür. (Song *et al.* 2016).

Tanım 32: X kısmi sıralı normlu uzay, K kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. T monoton, $\alpha, \beta < 1$ ve $x \leq y$ olmak üzere her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \alpha \|Tx - y\|^2 + \beta \|Ty - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta)) \|x - y\|^2$$

oluyorsa T dönüşümüne monoton (α, β) – genişlemeyen dönüşüm denir (Muangchoo-in *et al.* 2017).

Tanım 33:

1. $\alpha = \beta$ ise α – genişlemeyen dönüşüm, (α, β) – genişlemeyen dönüşümdür.
2. Her genişlemeyen dönüşüm 0 – genişlemeyen dönüşüm ve $(0, 0)$ – genişlemeyen dönüşümdür.
3. $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere her α – genişlemeyen ve (α, β) – genişlemeyen dönüşüm quasi- genişlemeyen dönüşümdür (Muangchoo-in *et al.* 2017).

Şimdi monoton (α, β) – genişlemeyen her T dönüşümünün monoton α – genişlemeyen dönüşüm olmadığını gösteren bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 12: $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 0.25, & x \neq 1 \\ 0.5, & x = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\|x - y\| = |x - y|$ normuna göre T dönüşümünün $(0.8, 0.2)$ –genişlemeyen dönüşüm olduğunu göstereceğiz. Bunu iki adımda göstereceğiz.

İlk olarak T dönüşümünün monoton olduğunu gösterelim. Bunun için dört durum ele alınmıştır.

Durum1: $x = y = 1$ ise $Tx = 0.5 = Ty$,

Durum2: $x \neq 1$ ve $y \neq 1$ ise $Tx = 0.25 = Ty$,

Durum3: $x \neq 1$ ve $y = 1$ ise $Tx = 0.25 < 0.5 = Ty$,

Durum4: $y \neq 1$ ve $x = 1$ ise $Ty = 0.25 < 0.5 = Tx$.

Böylece T monotondur. İkinci olarak T dönüşümünün $(0.8, 0.2)$ –genişlemeyen dönüşüm olduğunu gösterelim. Bunun için de dört durumda ele alınmıştır.

Durum1: $x = y = 1$ ise

$$\|Tx - Ty\|^2 = 0 \leq 0.25 = 0.8\|0.5 - 1\|^2 + 0.2\|0.5 - 1\|^2.$$

Durum2: $x \neq 1, y \neq 1$ ise

$$\|Tx - Ty\|^2 = 0 \leq 0.8\|0.25 - y\|^2 + 0.2\|0.25 - x\|^2.$$

Durum3: $x = 1, y \neq 1$ ise

$$\|Tx - Ty\|^2 = 0.0625 \leq 0.8\|0.5 - y\|^2 + 0.2\|0.25 - 1\|^2 = 0.1125 + 0.8\|0.5 - y\|^2.$$

Durum4: $x \neq 1, y = 1$ ise

$$\|Tx - Ty\|^2 = 0.0625 \leq 0.8\|0.25 - 1\|^2 + 0.2\|0.5 - x\|^2 = 0.45 + 0.2\|0.5 - x\|^2.$$

Böylece bu dört durumdan T dönüşümünün monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşüm olduğu görülür. Yani T dönüşümü $(0.8, 0.2)$ –genişlemeyen dönüşümdür. Ancak T dönüşümü 0.8 –genişlemeyen dönüşüm değildir. Eğer $x = 1, y = 0 \in [0, 1]$ ve $\alpha = \beta = 0.8$, alınırsa

$$\|Tx - Ty\|^2 = 0.0625 \not\leq 0.05 = 0.8\|0.5 - 0\|^2 + 0.8\|0.25 - 1\|^2 - 0.6\|1 - 0\|^2$$

olur bu da bize T dönüşümünün monoton 0.8 –genişlemeyen dönüşüm olmadığını gösterir.

Tanım 34: X bir Banach uzayı, K kümesi X in kapalı, sınırlı, konveks ve boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $T: K \rightarrow K$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $F(T) \neq \emptyset$ ise K ya sabit nokta özelliğine sahiptir denir.

Tanım 35: L bir vektör uzay ve $A \subseteq L$ olsun. $\forall x, y \in A$ için

$$A = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

şartı sağlanıyorsa A ya konveks küme denir (Soykan 2008).

Tanım 36: $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in A$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

oluyorsa f fonksiyonuna konvektir denir. Eğer

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

ise f ye kesin konveks fonksiyon denir (Reed and Simon 1980).

X Banach uzayının normu daima konvektir. Yani $x, y \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| \leq \alpha \|x\| + (1 - \alpha)\|y\|$$

olmasıdır. Eğer $x \neq y$ alınırsa $\alpha \in (0,1)$ için

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| < \alpha \|x\| + (1 - \alpha)\|y\|$$

olmasıdır.

Tanım 37: X bir Banach uzayı olsun. $x, y \in S_x$, $x \neq y$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1$$

şartını sağlıyorsa, X e kesin konveks Banach uzayı denir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım $x, y \in S_x$, $x \neq y$ olmak üzere X deki S_x birim küresindeki x ve y noktalarının orta noktasının S_x de olmadığını gösterir. Yani $x, y \in S_x$ ve $\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|$ ise $x = y$ olur.

Örnek 13: $X = \mathbb{R}^n$, ($n \geq 2$) ve $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ normu ile birlikte X uzayı kesin konveks uzaydır.

Tanım 38: X bir Banach uzay olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2} \|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

eşitsizliğini sağlayan $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa X e düzgün (uniformly) konveks uzay denir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım $x, y \in B_x = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $\frac{x+y}{2}$ orta noktasının S_x den bir δ uzaklığında B_x kapalı birim yuvar içinde olduğunu ifade eder.

Teorem 3: Düzgün konveks her Banach uzayı kesin konvektir (Agarwal *et al.* 2009).

Tanım 39: X bir Banach uzayı olsun. $\delta_x = [0, 2] \rightarrow [0, 1]$,

$$\delta_x(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{1}{2} \|x + y\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}$$

şeklinde tanımlanan δ_x fonksiyonuna X in konveksliğinin modülü denir.

Teorem 4: X Banach uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon \in (0, 2]$ için $\delta_x(\varepsilon) > 0$ olmasıdır (Agarwal *et al.* 29).

İspat: X düzgün konveks Banach uzayı olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$0 < \delta_x(\varepsilon) \leq 1 - \frac{1}{2} \|x + y\|$$

olacak şekilde $\delta_x(\varepsilon) > 0$ vardır. Tersine olarak kabul edelim ki X in δ_x konvekslik modülü her $\varepsilon \in (0, 2]$ için $\delta_x(\varepsilon) > 0$ olsun. Sabit bir $\varepsilon \in (0, 2]$ için $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ve $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ olacak şekilde $x, y \in X$ elemanlarını alalım. Konvekslik modülünün tanımından

$$0 < \delta_x(\varepsilon) \leq 1 - \frac{1}{2} \|x + y\|$$

ve

$$\frac{1}{2} \|x + y\| \leq 1 - \delta_x(\varepsilon)$$

elde edilir. Burada x ve y den bağımsız olarak $\delta(\varepsilon) = \delta_x(\varepsilon)$ olur. O halde X düzgün konvektir.

Aşağıda verilen teorem bilinen ilk sabit nokta teoremidir.

Teorem 5: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ dönüşümü sürekli olsun. Bu durumda $f(c) = c$ eşitliğini sağlayan bir $c \in [a, b]$ vardır.

İspat: $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x - f(x)$ dönüşümünü tanımlayalım. $\forall x \in [a, b]$ için T dönüşümü süreklidir. Eğer $f(a) \geq a$ ise $T(a) \leq 0$ ve $f(b) \leq b$ ise $T(b) \geq 0$ olur. Buradan $T(a).T(b) < 0$ elde edilir. Ara değer teoremi göre $T(c) = 0$ olacağından $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [0, 1]$ vardır.

Sonlu boyutlu uzaylarda geçerli olan ve Brouwer Sabit Nokta Teoremi olarak bilinen teorem aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 6: $B, \mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre olmak üzere $f: B \rightarrow B$ sürekli dönüşümü B de bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Teorem 7 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X Banach uzay, $K \neq \emptyset$ olmak üzere K , X in kompakt konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Böyle bir durumda T nin en az bir sabit noktası vardır (Khamsi and Kirk 2001).

Teorem 8 (Banach Daralma İlkesi): (X, ρ) tam metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X$ daraltan dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Banach 1922).

İspat: x_0 , X kümesinde herhangi bir nokta olsun.

$$\begin{aligned} x_1 &= Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0 \\ x_2 &= Tx_1 = T(Tx_0) = T^2x_0 \\ x_3 &= Tx_2 = T(T^2x_0) = T^3x_0 \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= Tx_n = T^{n+1}x_0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Önce $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim

Her $\varepsilon > 0$, $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$ şartını sağlayan $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir. $n, p \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) &= \rho(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \leq k \rho(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) = k \rho(x_{n+p-1}, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 \rho(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \leq \dots \leq k^n \rho(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = k^n \rho(x_p, x_0) \\ &\leq k^n [\rho(x_p, x_{p-1}) + \rho(x_{p-1}, x_0)] \\ &\leq k^n [k\rho(x_{p-1}, x_{p-2}) + \rho(x_{p-1}, x_{p-2}) + \rho(x_{p-2}, x_0)] \\ &= k^n [\rho(x_{p-2}, x_0) + \rho(x_{p-1}, x_{p-2}) + k\rho(x_{p-1}, x_{p-2})] \\ &\leq k^n [\rho(x_{p-2}, x_0) + k\rho(x_{p-2}, x_{p-3}) + k^2\rho(x_{p-2}, x_{p-3})] \dots \\ &\leq k^n [\rho(x_1, x_0) + k\rho(x_1, x_0) + k^2\rho(x_1, x_0) + \dots] \\ &= k^n \rho(x_1, x_0) [1 + k + k^2 + k^3 + \dots] = k^n \rho(x_1, x_0) \frac{1}{1-k} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} \rho(x_1, x_0)$$

olur. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{n+p}, x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{1-k} \rho(x_1, x_0) = 0$$

olur. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{n+p}, x_n) = 0$$

bulunur. Buradan $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu elde ederiz. X tam uzay olduğundan $x_n \rightarrow x$ iken $x_{n+1} \rightarrow x$ olur. Yani $x_n \rightarrow x$ için $Tx_n \rightarrow x$ dir. Metrik uzayda dizi yakınsak ise limiti tektir. O halde $Tx = x$ olur. Bu da bize sabit noktanın var olduğunu verir. Şimdi ise sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki T dönüşümünün bir birinden farklı iki tane sabit noktası olsun. Yani $x, y \in F(T)$, $x \neq y$ için $Tx = x$, $Ty = y$ olsun.

$$0 < \rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, y) \leq k\rho(x, y) \Rightarrow (1 - k)\rho(x, y) \leq 0$$

$0 \leq k < 1$ ise $1 - k > 0$ olur. $k = 1$ olamayacağından $(1 - k)$ sıfırdan farklı olur. Buradan $\rho(x, y) = 0$ olur. O halde $x = y$ bulunur. Bu da bize sabit noktanın tek olduğunu gösterir.

Teorem 9: (X, ρ) tam metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olacak şekilde $T: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince X tam metrik uzay ve T^n bir daraltan dönüşüm olduğundan T^n tek bir x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

$$T^n(Tx_0) = T(T^n x_0) = Tx_0$$

Ayrıca Tx_0 , T^n nin bir sabit noktasıdır. Yani $F(T^n) = Tx_0$ ve $F(T^n) = x_0$ olur. Buradan $Tx_0 = x_0$ elde edilir. Böylece sabit noktasının olduğunu bulduk. Şimdi ise sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. Eğer $Ty = y$ ise $T^n y = y$ olur. Yani $y = x_0$ elde edilir. Bu da sabit noktasının tek olduğunu bize gösterir.

Banach daralma teoremi gereğince T nin tek bir sabit noktası vardır. Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanmış olan daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının olması gerekmez. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 14: $X = (0,1]$ tam metrik olmayan bir uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $Tx = \frac{2x}{7}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $d(Tx, Ty) = \left| \frac{2x}{7} - \frac{2y}{7} \right| = \frac{2}{7}|x - y| = \frac{2}{7}d(x, y)$ olduğundan T , bir daraltan dönüşümdür. Fakat T nin X de bir sabit noktası yoktur. Çünkü sabit noktanın tanımından $\frac{2x}{7} = x \Rightarrow 2x = 7x \Rightarrow x = 0$ olur. Fakat $X = (0,1]$ olduğundan T nin X de bir sabit noktası yoktur.

MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, ilk olarak Mann ve Ishikawa iterasyonları verilecektir. Sonra monoton α –genişlemeyen ve monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ile ilgili bazı teoremlere yer verilecektir.

Bazı İterasyon Metodları

Mann iterasyon metodu: W. R. Mann tarafından 1953 yılında kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. 1953'te Mann, genişlemeyen bir T dönüşümünün sabit noktasını bulmak için kendi adıyla anılan, $\{\beta_n\} \subset [0,1]$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n)Tx_n \quad (1)$$

şeklinde tanımlanan Mann iterasyon şemasını taktim etti (Mann 1953). Aslında

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(1 - \beta_n) = +\infty$$

olmak üzere $\{x_n\}$, Mann iterasyon dizisi H Hilbert uzayında genişlemeyen bir T dönüşümün sabit noktasına zayıf yakınsar.

W. R. Mann' ın bulmuş olduğu sonuçlar 1971 yılında Franks ve Marzec tarafından, Franks ve Marzec'in sonuçları da 1974 yılında B. E. Rhoades tarafından genişletilmiştir. 1974 yılında B. E. Rhoades, herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm(self-map) için Mann iterasyonunun bu dönüşümün sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Ishikawa iterasyon metodu: 1974 yılında S. Ishikawa tarafından kurulmuş ve Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyon metodunun yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak bulunmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya kuvvetli yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır (Berinde 2006).

X , bir normlu uzay, K, X in boş olmayan konveks alt kümesi, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olsun. O halde Ishikawa iterasyon metodu $n = 0,1,2, \dots$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - s_n)x_n + s_nTy_n \\ y_n = (1 - t_n)x_n + t_nTx_n \end{cases} \quad (2)$$

şeklindedir. Burada $\{t_n\}, \{s_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \infty$$

dır (Ishikawa 1974).

Ishikawa iterasyonunda $t_n = 0$ alınırsa bu iterasyon Mann iterasyon metoduna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

Son yıllarda, pek çok matematikçi, lineer olmayan dönüşümlerin çeşitli tipleri için Mann iterasyonunun ve onun modifiye edilmiş versiyonlarının güçlü ve zayıf yakınsaklığını çalışmışlardır; örneğin, George ve Nse (2014) demicontractive dönüşümler için, Hussain ve arkadaşları (2013) hemicontractions için, Liu (1995) güçlü accretive dönüşümler için, Narghirad ve ark. (2013) α -genişlemeyen dönüşümler için, Suzuki (2005) genişlemeyen semigroups için, Song (2008) genişlemeyen dönüşümler ailesi için, Opial (1967) genişlemeyen dönüşümler için, Kim ve ark. (2004) kesin hemicontractive dönüşümler için, Okeke ve Kim (2015) rastgele operatörler için, Berinde (2007) ve George ve Shaini (2012) Zamfirescu operatörleri için, Gu ve Lu (2004) doğrusal olmayan varyasyonel problemleri için, Zhou ve ark. (2006), Song ve Wang (2014), Zhang ve Su (2009), kesin olarak sözde daralma dönüşümler için, Zhou ve ark. (2008), kesin pseudocontraction dönüşümler için modifiye Mann iterasyonunu çalışmışlardır.

$(E, \leq)$ Banach uzayında monoton α -genişlemeyen dönüşümler için Mann iterasyon şemasını ele alacağız. Sonra düzgün konveks sıralı Banach uzaylarda sabit noktaların bazı varlık teoremlerini inceleyeceğiz.

Tanım 42: $\|\cdot\|$ normu ve $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı ile E , bir sıralı reel Banach uzayı ve P, E nin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa P ye kapalı konveks koni denir.

1. P , boştan farklı kapalı ve $P \neq \{0\}$,
2. Her $a, b \in R$ için $a, b \geq 0$ ve $x, y \in P$ iken $ax + by \in P$,
3. $x \in P$ ve $-x \in P$ ise $x = 0$.

P , reel bir E Banach uzayının kapalı konveks koni olsun. E de P ye göre bir kısmi sıralama $' \leq '$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın. Her $x, y \in E$ için

$x \leq y$ ($x < y$) olması için gerek ve yeter şart $y - x \in P$ ($y - x \in \dot{P}$) olmasıdır. Burada $\dot{P}$, P nin içidir (Song *et al.* 2016). Her $x, y \in E$ için sıralı bir aralık,

$$[x, y] = \{z \in E: x \leq z \leq y\}$$

şeklinde tanımlanır.

$x \leq y$ ve her $x, y \in E$ için sıralı $[x, y]$ kapalı aralığının konveksliği

$$x \leq tx + (1 - t)y \leq y$$

olduğunu ifade eder.

Çalışmamızda bundan sonra sıralı aralıkların kapalı ve konveks olduğunu varsayacağız. Çalışmamızın temelini oluşturan ana bölümde kullanacağımız bazı yardımcı teoremler aşağıda verilmiştir.

Lemma 1: $K, (E, \leq)$ sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

1. T , monoton quasi genişlemeyen,

2. $x \leq y$ şartını sağlayan her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \frac{2|\alpha|}{1 - \alpha} \|Tx - x\|^2 + \frac{2|\alpha|}{1 - \alpha} \|Tx - x\|(\|x - y\| + \|Tx - Ty\|)$$

dir (Song *et al.* 2016).

İspat: (1). Monoton α –genişlemeyen dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned} \|Tx - p\|^2 &= \|Tx - Tp\|^2 \leq \alpha \|Tx - p\|^2 + \alpha \|Tp - x\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - p\|^2 \\ &= \alpha \|Tx - p\|^2 + (1 - \alpha) \|x - p\|^2 \end{aligned}$$

ve buradan

$$\|Tx - p\|^2 \leq \|x - p\|^2$$

elde edilir.

(2). $1 > \alpha \geq 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|^2 &\leq \alpha\|Tx - y\|^2 + \alpha\|Ty - x\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2 \\
&\leq \alpha(\|Tx - x\| + \|x - y\|)^2 + \alpha(\|Ty - Tx\| + \|Tx - x\|)^2 \\
&\quad + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2 \\
&= \alpha\|Tx - x\|^2 + 2\alpha\|Tx - x\|\|x - y\| + \alpha\|x - y\|^2 + \alpha\|Ty - Tx\|^2 \\
&\quad + 2\alpha\|Ty - Tx\|\|Tx - x\| + \alpha\|Tx - x\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2 \\
&= 2\alpha\|x - Tx\|^2 + (1 - \alpha)\|x_n - x\|^2 + \alpha\|Tx - Tx_n\|^2 \\
&\quad + 2\alpha\|Tx - x\|(\|x - y\| + \|Tx - Ty\|)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \frac{2\alpha}{1 - \alpha}\|Tx - x\|^2 + \frac{2\alpha}{1 - \alpha}\|Tx - x\|(\|x - y\| + \|Tx - Ty\|)$$

elde edilir. Eğer $\alpha < 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|^2 &\leq \alpha\|Tx - y\|^2 + \alpha\|Ty - x\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2 \\
&\leq \alpha(\|Tx - x\| - \|x - y\|)^2 + \alpha(\|Ty - Tx\| - \|Tx - x\|)^2 \\
&\quad + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2 \\
&= \alpha\|Tx - x\|^2 - 2\alpha\|Tx - x\|\|x - y\| + \alpha\|x - y\|^2 + \alpha\|Ty - Tx\|^2 \\
&\quad - 2\alpha\|Ty - Tx\|\|Tx - x\| + \alpha\|Tx - x\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2 \\
&= 2\alpha\|x - Tx\|^2 + (1 - \alpha)\|x_n - x\|^2 + \alpha\|Tx - Tx_n\|^2 \\
&\quad - 2\alpha\|Tx - x\|(\|x - y\| + \|Tx - Ty\|)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \frac{2\alpha}{1 - \alpha}\|Tx - x\|^2 - \frac{2\alpha}{1 - \alpha}\|Tx - x\|(\|x - y\| + \|Tx - Ty\|)$$

elde edilir. O halde, $x \leq y$ şartını sağlayan her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \frac{2\alpha}{1 - \alpha}\|Tx - x\|^2 + \frac{2|\alpha|}{1 - \alpha}\|Tx - x\|(\|x - y\| + \|Tx - Ty\|)$$

olur.

Düzgün konveks E Banach uzayında Xu tarafından verilen ve kendi adı ile anılan eşitsizlik aşağıda verilmiştir.

Lemma 2: E Banach uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeter şart $q > 1$ ve $r > 0$ olmak üzere her $x, y \in B_R(0) = \{x \in E: \|x\| \leq r\}$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\|tx + (1 - t)y\|^q \leq t\|x\|^q + (1 - t)\|y\|^q - w(q, t)f(\|x - y\|)$$

olacak şekilde $f(0) = 0$ şartını sağlayan sürekli, kesin artan, konveks bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun var olmasıdır. Burada $w(q, t) = t^q(1 - t) + t(1 - t)^q$ şeklindedir. Özellikle $q = 2$ ve $t = \frac{1}{2}$ alındığında

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{1}{4} f(\|x-y\|)$$

elde edilir (Xu 1991).

İyi bilinen bir sonuç aşağıda verilmiştir.

Lemma 3: C , yansımali bir E Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. Varsayalım ki $g: C \rightarrow R$ ye proper konveks altyarı sürekli ve coercive (zorlayıcı) bir fonksiyon olsun (yani $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} g(x) = \infty$). Bu durumda g fonksiyonu C de bir minimuma sahip olur.

Yani

$$g(x) = \inf_{y \in C} g(y).$$

olacak şekilde bir $x \in C$ vardır (Takahashi 2000).

Monoton Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Monoton α –genişlemeyen bir T dönüşümü için Mann iterasyonu, $n \geq 1$ ve $(0,1)$ deki $\{\beta_n\}$ dizisi için,

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) T x_n$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bundan sonra

$$F_{\leq}(T) = \{p \in F(T): p \leq x_1\} \text{ ve } F_{\geq}(T) = \{p \in F(T): x_1 \leq p\}$$

gösterimini kullanacağız. Hem $F_{\leq}(T)$ hem de $F_{\geq}(T)$ kapalı ve konvektir.

Aşağıdaki Lemma Dehaish ve Khamsi tarafından verilmiştir.

Lemma 4: $K, (E, \leq)$ sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın ve $x_1 \leq T x_1$ (veya $T x_1 \leq x_1$) olsun. Bu durumda

$$1. x_n \leq x_{n+1} \leq T x_n \leq T x_{n+1} \text{ (veya } T x_{n+1} \leq T x_n \leq x_{n+1} \leq x_n),$$

$$2. \{x_n\} \text{ dizisinin } x \in K \text{ noktasına zayıf yakınsaması şartıyla her } n \geq 1 \text{ için } x_n \leq x \text{ (veya } x \leq x_n)$$

olur (Dehaish and Khamsi 2015).

$(E, \leq)$, düzgün konveks sıralı Banach uzayında tanımlı monoton α –genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ile ilgili bazı teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 10: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ ve bir $y \in K$ için $x_n \leq y$ şartını sağlayan (1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

olsun. Bu durumda $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ olur (Song *et al.* 2016).

İspat: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olduğundan $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$ olacak şekilde $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ bir alt dizisi mevcuttur. Lemma 4 ten $x_1 \leq x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}} \leq x_{n_{k+1}}$ dir. Her $k \geq 1$ için $C_k = \{z \in C: x_{n_k} \leq z\}$ olsun. Açıkça her bir $k \geq 1$ için C_k , kapalı, konveks ve $y \in C_k$ olup C_k boştan farklıdır. $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ olsun. C, K ($y \in C$) nin kapalı konveks boştan farklı alt kümesidir. $\{x_{n_k}\}$ dizisi sınırlı olduğundan her $z \in C$ için

$$g(z) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\|^2$$

olacak şekilde bir $g: C \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Lemma 3 ten

$$g(z^*) = \inf_{z \in C} g(z) \quad (3)$$

olacak şekilde bir $z^* \in C$ vardır. C nin tanımından,

$$x_1 \leq x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \dots \leq x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}} \leq \dots \leq z^*$$

elde edilir. T nin monotonluğundan ve Lemma 4 ten, $k \geq 1$ için $x_{n_k} \leq Tx_{n_k} \leq Tz^*$ olduğundan

$Tz^* \in C$ ve böylece $\frac{z^* + Tz^*}{2} \in C$ olur. z^* in (3) tanımından

$$g(z^*) \leq g\left(\frac{z^* + Tz^*}{2}\right), \quad g(z^*) \leq g(Tz^*) \quad (4)$$

yazılır. Diğer yandan Lemma 1 den

$$\begin{aligned} & \|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \\ & \leq \|x_{n_k} - z^*\|^2 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\|^2 \\ & \quad + \frac{2|\alpha|}{1-\alpha} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| (\|x_{n_k} - z^*\| + \|Tx_{n_k} - Tz^*\|) \end{aligned}$$

olur. $\{x_n\}$ dizisinin sınırlılığından $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$ dir. Ayrıca

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z^*\|^2 \quad (5)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
g(Tz^*) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tz^*\|^2 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \\
&\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z^*\|^2 = g(z^*)
\end{aligned} \tag{6}$$

elde edilir. Şimdi $z^* = Tz^*$ olduğunu gösterelim. Lemma 2 den ($q = 2$ ve $t = \frac{1}{2}$) ve (6) dan

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{z^* + Tz^*}{2}\right) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\|x_{n_k} - \frac{z^* + Tz^*}{2}\right\|^2 \\
&= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\|\frac{x_{n_k} - z^*}{2} + \frac{x_{n_k} - Tz^*}{2}\right\|^2 \\
&\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\|x_{n_k} - z^*\|^2 + \frac{1}{2}\|x_{n_k} - Tz^*\|^2 - \frac{1}{4}f(\|z^* - Tz^*\|)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}g(z^*) + \frac{1}{2}g(Tz^*) - \frac{1}{4}f(\|z^* - Tz^*\|) \leq g(z^*) - \frac{1}{4}f(\|z^* - Tz^*\|).
\end{aligned}$$

sonucu çıkar. (4) denklemi göz önüne alınarak

$$\frac{1}{4}f(\|z^* - Tz^*\|) \leq g(z^*) - g\left(\frac{z^* + Tz^*}{2}\right) \leq 0 \tag{7}$$

olur ve böylece $f(\|z^* - Tz^*\|) = 0$ elde ederiz. Böylece f nin özelliğinden $z^* = Tz^*$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 10 daki ispat tekniği kullanılarak, $C_k = \{z \in K : z \leq x_{n_k}\}$ ve $x_{n+1} \leq x_n$ alınarak aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 11: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \geq Tx_1$ ve $y \in K$ için $x_n \geq y$ şartını sağlayan (1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

olsun. Bu durumda $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$ olur (Song et al. 2016).

Teorem 12: P kapalı konveks koni ve $T: P \rightarrow P$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere $(E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayı olsun. Kabul edelim ki

$x_1 = 0$ ve $y \in P$ için $x_n \leq y$ şartını sağlayan (1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

olsun. Bu durumda $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ olur (Song et al. 2016).

İspat: ' $\leq$ ' kısmi sıralama bağıntısının tanımından $x_1 = 0 \leq T0 = Tx_1$ olur. Teorem 10 dan sonuç çıkar.

Şimdi de düzgün konveks $(E, \leq)$ sıralı Banach uzayında monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı incelenecektir. Sabit noktaların varlığını göstermeden önce teoremlerde kullanacağımız birkaç Lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 5: $K, (E, \leq)$ sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

1. T , monoton quasi-genişlemeyen,

2. $\alpha, \beta < 1$ ve $x \leq y$ şartını sağlayan her $x, y \in K$ için

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &\leq \|x - y\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|Tx - x\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{1 - \beta} \|Tx - x\|(\alpha\|x - y\| + \beta\|Tx - Ty\|) \end{aligned} \quad (8)$$

dir (Muangchoo-in *et al.* 2017).

İspat: 1.

$$\begin{aligned} \|Tx - p\|^2 &= \|Tx - Tp\|^2 \leq \alpha\|Tx - p\|^2 + \beta\|Tp - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - p\|^2 \\ &= \alpha\|Tx - p\|^2 + (1 - \alpha)\|x - p\|^2. \end{aligned}$$

ve buradan

$$\|Tx - p\|^2 \leq \|x - p\|^2$$

elde edilir.

2. Tanım 34 ten yola çıkarak aşağıdaki durumları düşünebiliriz:

a) $0 \leq \alpha, \beta < 1$ ise o zaman

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &\leq \alpha\|Tx - y\|^2 + \beta\|Ty - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\ &\leq \alpha[\|Tx - x\| + \|x - y\|]^2 + \beta[\|Ty - Tx\| + \|Tx - x\|]^2 \\ &\quad + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\ &= \alpha\|Tx - x\|^2 + 2\alpha\|Tx - x\|\|x - y\| + \alpha\|x - y\|^2 + \beta\|Ty - Tx\|^2 \\ &\quad + 2\beta\|Ty - Tx\|\|Tx - x\| + \beta\|Tx - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\ &= (\alpha + \beta)\|Tx - x\|^2 + (1 - \beta)\|x - y\|^2 + \beta\|Ty - Tx\|^2 \\ &\quad + 2\|Tx - x\|[\alpha\|x - y\| + \beta\|Tx - Ty\|] \end{aligned}$$

ve buradan

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|Tx - x\|^2 + \frac{2}{1 - \beta} \|Tx - x\|[\alpha\|x - y\| + \beta\|Tx - Ty\|].$$

elde edilir.

b) Eğer $0 \leq \alpha < 1$ ve $\beta < 0$ ise

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &\leq \alpha\|Tx - y\|^2 + \beta\|Ty - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\ &\leq \alpha[\|Tx - x\| + \|x - y\|]^2 + \beta[\|Ty - Tx\| - \|Tx - x\|]^2 \\ &\quad + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\ &= \alpha\|Tx - x\|^2 + 2\alpha\|Tx - x\|\|x - y\| + \alpha\|x - y\|^2 + \beta\|Ty - Tx\|^2 \\ &\quad - 2\beta\|Ty - Tx\|\|Tx - x\| + \beta\|Tx - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\ &= (\alpha + \beta)\|Tx - x\|^2 + (1 - \beta)\|x - y\|^2 + \beta\|Ty - Tx\|^2 \\ &\quad + 2\|Tx - x\|[\alpha\|x - y\| - \beta\|Tx - Ty\|] \end{aligned}$$

ve buradan

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|Tx - x\|^2 + \frac{2}{1 - \beta} \|Tx - x\|[\alpha\|x - y\| - \beta\|Tx - Ty\|]$$

elde edilir.

c) Eğer $\alpha < 0$ ve $0 \leq \beta < 1$ ise

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &\leq \alpha\|Tx - y\|^2 + \beta\|Ty - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\ &\leq \alpha[\|Tx - x\| - \|x - y\|]^2 + \beta[\|Ty - Tx\| + \|Tx - x\|]^2 \\ &\quad + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\ &= \alpha\|Tx - x\|^2 - 2\alpha\|Tx - x\|\|x - y\| + \alpha\|x - y\|^2 + \beta\|Ty - Tx\|^2 \\ &\quad + 2\beta\|Ty - Tx\|\|Tx - x\| + \beta\|Tx - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\ &= (\alpha + \beta)\|Tx - x\|^2 + (1 - \beta)\|x - y\|^2 + \beta\|Ty - Tx\|^2 \\ &\quad + 2\|Tx - x\|[-\alpha\|x - y\| + \beta\|Tx - Ty\|] \end{aligned}$$

ve buradan

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|Tx - x\|^2 + \frac{2}{1 - \beta} \|Tx - x\|[-\alpha\|x - y\| + \beta\|Tx - Ty\|]$$

elde edilir.

d) Eğer $\alpha, \beta < 0$ ise

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|^2 &\leq \alpha\|Tx - y\|^2 + \beta\|Ty - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\
&\leq \alpha[\|Tx - x\| - \|x - y\|]^2 + \beta[\|Ty - Tx\| - \|Tx - x\|]^2 \\
&\quad + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\
&= \alpha\|Tx - x\|^2 - 2\alpha\|Tx - x\|\|x - y\| + \alpha\|x - y\|^2 + \beta\|Ty - Tx\|^2 \\
&\quad - 2\beta\|Ty - Tx\|\|Tx - x\| + \beta\|Tx - x\|^2 + (1 - (\alpha + \beta))\|x - y\|^2 \\
&= (\alpha + \beta)\|Tx - x\|^2 + (1 - \beta)\|x - y\|^2 + \beta\|Ty - Tx\|^2 \\
&\quad + 2\|Tx - x\|[-\alpha\|x - y\| - \beta\|Tx - Ty\|]
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta}\|Tx - x\|^2 + \frac{2}{1 - \beta}\|Tx - x\|[-\alpha\|x - y\| - \beta\|Tx - Ty\|]$$

elde edilir. O halde $\alpha, \beta < 1$ ve $x \leq y$ şartını sağlayan her $x, y \in K$ için

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|^2 &\leq \|x - y\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta}\|Tx - x\|^2 \\
&\quad + \frac{2}{1 - \beta}\|Tx - x\|[\alpha\|x - y\| + \beta\|Tx - Ty\|]
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Lemma 6: $K, (E, \leq)$ sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın ve $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) olsun. Bu durumda

1. $x_n \leq y_n \leq x_{n+1}$ ve $x_n \leq y_n \leq Tx_n \leq Ty_n$ (veya $x_n \geq y_n \geq x_{n+1}$ ve $x_n \geq y_n \geq Tx_n \geq Ty_n$);

2. $\{x_n\}$ dizisinin $x \in K$ noktasına zayıf yakınsaması şartıyla her $n \leq 1$ için $x_n \leq x$ (veya $x \leq x_n$)

olur (Dehaish and Khamsi 2015).

İspat: 1. $k_1 \leq k_2$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in K$ olsun. Her $\alpha \in [0, 1]$ için sıra aralıkları konveks olduğundan

$$k_1 \leq (1 - \alpha)k_1 + \alpha k_2 \leq k_2$$

olur. Varsayıma göre elimizde $x_1 \leq Tx_1$ var ve dolayısıyla $n = 1$ için eşitsizlik doğrudur. Varsayalım ki $k \geq 2$ için $x_k \leq Tx_k$ olsun. Konvekslik ve monotonluktan

$$x_k \leq (1 - t_k)x_k + t_kTx_k = y_k \leq (1 - t_k)Tx_k + t_kTx_k = Tx_k,$$

yani, $x_k \leq y_k \leq Tx_k$ olur. Monotonluk sayesinde $x_k \leq y_k \leq Tx_k \leq Ty_k$ elde ederiz. $x_k \leq Ty_k$ dan konveksliğe göre

$$x_k \leq (1 - s_k)x_k + s_kTy_k = x_{k+1} \leq Ty_k$$

olup $x_k \leq x_{k+1} \leq Ty_k$ olur. Yine

$$y_k = (1 - t_k)x_k + t_kTx_k \leq (1 - s_k)x_k + s_kTy_k = x_{k+1},$$

olduğundan $x_k \leq y_k \leq x_{k+1}$ bulunur. Monotonluk sayesinde $Ty_k \leq Tx_{k+1}$ elde ederiz. Böylece $x_{k+1} \leq Tx_{k+1}$ olur. Tümevarım yoluyla şu sonuca varırız: Her $n \geq 1$ için $x_n \leq Tx_n$ olduğu açıktır. Şimdi konveksliğe göre her $n \geq 1$ için $x_n \leq Tx_n$ e sahibiz.

$$x_n \leq (1 - s_n)x_n + s_nTx_n = y_n \leq Tx_n,$$

T nin monotonluğundan $Tx_n \leq Ty_n$, yani $x_n \leq y_n \leq Tx_n \leq Ty_n$. Ve

$$y_n = (1 - s_n)x_n + s_nTx_n \leq (1 - s_n)x_n + s_nTy_n \leq x_{n+1},$$

Böylece $x_n \leq y_n \leq x_{n+1}$ olur.

Dolayısıyla şu sonuca varırız: $x_n \leq y_n \leq x_{n+1}$ ve $x_n \leq y_n \leq Tx_n \leq Ty_n$. Diğer yandan $Tx_1 \leq x_1$ olduğunu varsayarsak $x_n \geq y_n \geq x_{n+1}$ ve $x_n \geq y_n \geq Tx_n \geq Ty_n$ olur.

2. Dehaish ve Khamsi den (Lemma 3.1) sonuca ulaştık ve ispat tamamlanır.

Şimdi, $(E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayında monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili bazı teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 13: K , $(E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ ve $y \in K$ için $x_n \leq y$ şartını sağlayan (2) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

olsun. Bu durumda $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ dır (Muangchoo-in et al. 2017).

İspat: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ ifadesinden $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$ olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ alt dizisi mevcuttur. Lemma 6 dan $x_1 \leq x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}} \leq x_{n_{k+1}}$ dir. Her $k \geq 1$ için $C_k = \{z \in K: x_{n_k} \leq z\}$ olsun. Açıkça her bir $k \geq 1$ için C_k , kapalı konveks $y \in C_k$ olup buradan C_k boştan farklı olur. Şimdi $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, K nın kapalı konveks boştan farklı alt kümesi olsun. $\{x_{n_k}\}$ dizisi sınırlı olduğundan her $z \in C$ için $g(z) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|^2$ olacak şekilde bir $g: C \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonunu tanımlanabilir. Lemma 3 ten

$$g(z^*) = \inf_{z \in C} g(z) \quad (9)$$

olacak şekilde bir $z^* \in C$ vardır. C nin tanımından,

$$x_1 \leq x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \dots \leq x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}} \leq \dots \leq z^*$$

elde edilir. T nin monotonluğundan ve Lemma 6 dan $k \geq 1$ için $x_{n_k} \leq Tx_{n_k} \leq Tz^*$ olduğundan $Tz^* \in C$ ve böylece $\frac{z^* + Tz^*}{2} \in C$ olur. Böylece (9) ile

$$g(z^*) \leq g\left(\frac{z^* + Tz^*}{2}\right), \quad g(z^*) \leq g(Tz^*) \quad (10)$$

yazılır. Diğer yandan Lemma 5 ten

$$\begin{aligned} & \|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \\ & \leq \|x_{n_k} - z^*\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\|^2 \\ & \quad + \frac{2}{1 - \beta} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| [|\alpha| \|x_{n_k} - z^*\| + |\beta| \|Tx_{n_k} - Tz^*\|] \end{aligned}$$

olur. $\{x_n\}$ dizisinin sınırlılığından $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$ dır. Ayrıca

$$\|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \leq \|x_{n_k} - z^*\|^2$$

ve

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z^*\|^2 \quad (11)$$

yazılır. Böylece, (11) kullanılarak,

$$\begin{aligned} g(Tz^*) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tz^*\|^2 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z^*\|^2 = g(z^*) \end{aligned} \quad (12)$$

elde edilir. Şimdi $z^* = Tz^*$ olduğunu gösterelim. Lemma 2 den ($q = 2$ ve $t = \frac{1}{2}$) ve (12) den

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{z^* + Tz^*}{2}\right) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| x_{n_k} - \frac{z^* + Tz^*}{2} \right\|^2 \\
&= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_{n_k} - z^*}{2} + \frac{x_{n_k} - Tz^*}{2} \right\|^2 \\
&\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|x_{n_k} - z^*\|^2 + \frac{1}{2} \|x_{n_k} - Tz^*\|^2 - \frac{1}{4} f(\|z^* - Tz^*\|) \right) \\
&\leq \frac{1}{2} g(z^*) + \frac{1}{2} g(Tz^*) - \frac{1}{4} f(\|z^* - Tz^*\|) \leq g(z^*) - \frac{1}{4} f(\|z^* - Tz^*\|).
\end{aligned}$$

sonucu çıkar. Lemma 2 den

$$\frac{1}{4} f(\|z^* - Tz^*\|) \leq g(z^*) - g\left(\frac{z^* + Tz^*}{2}\right) \leq 0$$

olur ve böylece $f(\|z^* - Tz^*\|) = 0$ elde ederiz. Böylece f nin özelliğinden $z^* = Tz^*$ dır. Bu çözüm istenen sonucu verir ve ispat tamamlanır.

Teorem 14: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $Tx_1 \leq x_1$ ve $y \in K$ için $y \leq x_n$ şartını sağlayan (2) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olsun. Bu durumda $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$ dır (Muangchoo-in *et al.* 2017).

İspat: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ ifadesinden $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$ olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ alt dizisi mevcuttur. Lemma 6 dan $x_{n_{k+1}} \leq x_{n_k} \leq x_1$ dir. Her $k \geq 1$ için $C_k = \{z \in K: z \leq x_{n_k}\}$ olsun. Açıkça her bir $k \geq 1$ için C_k , kapalı konveks $y \in C_k$ olup buradan C_k boştan farklıdır. Şimdi $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, K nın kapalı konveks boştan farklı alt kümesi olsun. $\{x_{n_k}\}$ dizisi sınırlı olduğundan her $z \in C$ için

$$g(z) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|^2$$

olacak şekilde bir $g: C \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Lemma 3 ten

$$g(z^*) = \inf_{z \in C} g(z) \tag{13}$$

olacak şekilde bir $z^* \in C$ vardır. C nin tanımından,

$$x_1 \geq x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq \dots \geq x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}} \geq \dots \geq z^*$$

elde edilir. T nin monotonluğundan ve Lemma 6 dan $k \geq 1$ için $x_{n_k} \geq Tx_{n_k} \geq Tz^*$ olduğundan $Tz^* \in C$ ve böylece $\frac{z^* + Tz^*}{2} \in C$ olur. Böylece (13) ile

$$g(z^*) \leq g\left(\frac{z^* + Tz^*}{2}\right), \quad g(z^*) \leq g(Tz^*) \quad (14)$$

yazılır. Diğer yandan Lemma 5 ten

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 &\leq \|x_{n_k} - z^*\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{1 - \beta} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| [|\alpha| \|x_{n_k} - z^*\| + |\beta| \|Tx_{n_k} - Tz^*\|] \end{aligned}$$

olur. $\{x_n\}$ dizisinin sınırlılığından $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$ dir ayrıca

$$\|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \leq \|x_{n_k} - z^*\|^2$$

ve

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z^*\|^2 \quad (15)$$

yazılır. Böylece (15) i kullanılarak,

$$\begin{aligned} g(Tz^*) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tz^*\|^2 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz^*\|^2 \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z^*\|^2 = g(z^*) \end{aligned} \quad (16)$$

elde edilir. Şimdi $z^* = Tz^*$ olduğunu gösterelim. Lemma 2 den ($q = 2$ ve $t = \frac{1}{2}$) ve (16) dan

$$\begin{aligned} g\left(\frac{z^* + Tz^*}{2}\right) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\|x_{n_k} - \frac{z^* + Tz^*}{2}\right\|^2 \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\|\frac{x_{n_k} - z^*}{2} + \frac{x_{n_k} - Tz^*}{2}\right\|^2 \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|x_{n_k} - z^*\|^2 + \frac{1}{2} \|x_{n_k} - Tz^*\|^2 - \frac{1}{4} f(\|z^* - Tz^*\|)\right) \\ &\leq \frac{1}{2} g(z^*) + \frac{1}{2} g(Tz^*) - \frac{1}{4} f(\|z^* - Tz^*\|) \leq g(z^*) - \frac{1}{4} f(\|z^* - Tz^*\|) \end{aligned}$$

Sonucu çıkar. Lemma 2 den

$$\frac{1}{4} f(\|z^* - Tz^*\|) \leq g(z^*) - g\left(\frac{z^* + Tz^*}{2}\right) \leq 0$$

olur ve böylece $f(\|z^* - Tz^*\|) = 0$ elde ederiz. Böylece f nin özelliğinden $z^* = Tz^*$ dir. Bu çözüm istenen sonucu verir ve ispat tamamlanır.

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ilk olarak $n \geq 1$ ve $(0,1)$ deki $\{\beta_n\}$ ve $\{s_n\}$ dizileri için,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0 \text{ veya } \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$$

koşulları altında monoton α –genişlemeyen dönüşümlerin bir sabit noktasını bulmak için Mann iterasyonunun zayıf ve güçlü yakınsaması ile ilgili bazı teoremler ve ispatları verilmiştir. Sonra

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0 \text{ ve } \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$$

koşulları altında monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşümlerin bir sabit noktasını bulmak için Ishikawa iterasyonunun zayıf ve güçlü yakınsaması ile ilgili bazı teoremler ve ispatları verilmiştir.

Daha sonra, bu çalışmadaki ana sonucu göstermek için sayısal bir örnek verilmiştir.

Mann İterasyon Metodunun Zayıf ve Güçlü Yakınsaması

İlk olarak $(E, \leq)$ sıralı Banach uzayında monoton α –genişlemeyen bir T dönüşümü için Mann iterasyonunun yakınsamasını inceleyeceğiz.

Teorem 15: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın, $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) ve $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ (veya $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) olsun. Bu durumda

1. $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır,
2. $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ ve her $p \in F_{\geq}(T)$ (veya $p \in F_{\leq}(T)$) için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır,
3. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ dır,
4. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ dır (Song et al. 2016).

İspat: Genelliği bozmaksızın, $x_1 \leq p \in F_{\geq}(T)$ olduğunu varsayalım. Her $n \geq 1$ için $x_n \leq p$ olduğunu iddia edelim. T monoton olduğundan

$$x_1 \leq Tx_1 \leq Tp = p$$

ve buradan

$$x_1 \leq x_2 \leq Tx_1 \leq p$$

olur. Kabul edelim ki $x_n \leq p$ olsun. Buradan $Tx_n \leq Tp = p$ elde edilir. Lemma 4 ten

$$x_n \leq x_{n+1} \leq Tx_n \leq p$$

olur. Yani iddia edildiği gibi $x_{n+1} \leq p$ dir. Diğer yandan Lemma 1 den her $n \geq 1$ için

$$\|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|$$

olduğu sonucu çıkar ve böylece

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \beta_n \|x_n - p\| + (1 - \beta_n) \|Tx_n - p\| \\ &\leq \beta_n \|x_n - p\| + (1 - \beta_n) \|x_n - p\| \\ &= \|x_n - p\| \dots \\ &\leq \|x_1 - p\| \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\{\|x_n - p\|\}$ dizisi artmayan ve sınırlı bir dizidir. Dolayısıyla 1 ve 2 sağlanır.

Şimdi 3 ve 4 ü gösterelim. Lemma 2 ($q = 2$ ve $t = \beta_n$) den,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|\beta_n(x_n - p) + (1 - \beta_n)(Tx_n - Tp)\|^2 \\ &\leq \beta_n \|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n) \|Tx_n - p\|^2 - \beta_n(1 - \beta_n)f(\|x_n - Tx_n\|) \\ &\leq \|x_n - p\|^2 - \beta_n(1 - \beta_n)f(\|x_n - Tx_n\|) \end{aligned}$$

ve böylece,

$$\beta_n(1 - \beta_n)f(\|x_n - Tx_n\|) \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2.$$

olur. Sonra 2 den

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n)f(\|x_n - Tx_n\|) = 0$$

sonucu çıkar.

$$3. \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0 \text{ ve}$$

$$(\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n))(\liminf_{n \rightarrow \infty} f(\|x_n - Tx_n\|)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n)f(\|x_n - Tx_n\|)$$

olduğundan

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f\|x_n - Tx_n\| = 0,$$

olur. Bu ise f nin özellikleri gereği 3 ü ifade eder.

$$4. \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0 \text{ ve}$$

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n))(\limsup_{n \rightarrow \infty} f(\|x_n - Tx_n\|)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n)f(\|x_n - Tx_n\|)$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\|x_n - Tx_n\|) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(\|x_n - Tx_n\|) = 0,$$

olur. Bu ise f nin özellikleri gereği 4 ü ifade eder ve ispat tamamlanır.

Teorem 16: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki E , Opial in şartını sağlasın ve $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın. Eğer $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ (veya $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi, T nin z sabit noktasına zayıf yakınsar (Song *et al.* 2016).

İspat: Teorem 15 ten $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

olur. $z \in K$ noktasına zayıf yakınsayan bir $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ alt dizisi vardır. Lemma 4 ten her $k \geq 1$ için $x_1 \leq x_{n_k} \leq z$ (veya $z \leq x_{n_k} \leq x_1$) elde edilir. Diğer yandan Lemma 1 (2) den

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_k} - Tz\|^2 &\leq \|x_{n_k} - z\|^2 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\|^2 \\ &\quad + \frac{2|\alpha|}{1-\alpha} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| (\|x_{n_k} - z\| + \|Tx_{n_k} - Tz\|). \end{aligned}$$

olur. $\{x_n\}$ dizisinin sınırlılığından ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$ dan

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz\|^2 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\|^2 \quad (17)$$

yazılır ve böylece

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\| \quad (18)$$

elde edilir.

Şimdi $z = Tz$ olduğunu gösterelim. Varsayalım bu ifade doğru olmasın yani $z \neq Tz$ olsun. (18) ve Opial şartından

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\| &< \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tz\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Tz\|) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\| \end{aligned}$$

elde edilir, bu bir çelişkidir. Yani $z \in F_{\geq}(T)$ (veya $z \in F_{\leq}(T)$) olur. Teorem 15 (2) den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$ vardır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin z noktasına zayıf yakınsadığını gösterelim. Bunun

doğru olmadığını varsayalım. O zaman $x \in K$ noktasına zayıf yakınsayan bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır ve $z \neq x$ olur. Benzer şekilde $x = Tx$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$ vardır. Opial şartından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \limsup_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - x\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$$

olur. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $x = z$ olur bu da ispatı tamamlar.

Şimdi (1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin güçlü yakınsaması ile ilgili bir teorem vereceğiz.

Teorem 17: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kompakt, kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton α -genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Varsayalım ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın. Eğer $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\geq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Song et al. 2016).

İspat: K nın kompaktlığından $y \in K$ noktasına güçlü yakınsak ve $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Lemma 4 ten her $k \geq 1$ için $x_1 \leq x_{n_k} \leq y$ olduğu sonucu çıkar. Teorem 10 dan $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ dır. Teorem 15 ten $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğu ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

olduğu sonucu çıkar.

Genelliği bozmaksızın,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$$

olduğunu kabul edebiliriz. Diğer yandan Lemma 1 (2) den

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_k} - Ty\|^2 &\leq \|x_{n_k} - y\|^2 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\|^2 \\ &\quad + \frac{2|\alpha|}{1-\alpha} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| (\|x_{n_k} - y\| + \|Tx_{n_k} - Ty\|) \end{aligned}$$

dır. $\{x_{n_k}\}$ dizisinin sınırlılığından $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\| = 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$ olur.

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Ty\|^2 \leq 0$$

olup $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Ty\| = 0$ elde edilir. Bu durumda

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Ty\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Ty\|) = 0$$

ve bu böylece $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Ty\| = 0$ olur. Bu ise $y \in F_{\geq}(T)$ demektir. Teorem 15 (2) den

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$ vardır ve böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teoremler de benzer olarak ispatlanabilir.

Teorem 18: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kompakt, kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın. Eğer $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\geq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Song *et al.* 2016).

Teorem 19: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kompakt, kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın. Eğer $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ veya $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\leq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Song *et al.* 2016).

Ishikawa İterasyon Metodunun Zayıf ve Güçlü Yakınsaması

Teorem 20: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın, $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) ve $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ (veya $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) olsun. Bu durumda

1. $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır,
2. $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ ve her $p \in F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ ($F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır,
3. $\limsup_{n \rightarrow \infty} (1 - s_n)s_n > 0$ ise $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ dır,
4. $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - s_n)s_n > 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ dır (Muangchoo-in *et al.* 2017).

İspat: Genelliği bozmaksızın, $x_1 \leq p \in F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Her $n \geq 1$ için $x_n \leq p$ olduğunu iddia edelim. T nin monotonluğundan, $x_1 \leq Tx_1 \leq Tp = p$ ve buradan $x_1 \leq y_1 \leq Tx_1 \leq p$ olur o zaman $y_1 \leq p$ dir. Tekrar T nin monotonluğundan, $x_1 \leq Ty_1$ den $Ty_1 \leq Tp = p$ elde ederiz. Konvekslikten $x_2 \leq p$ olur ve buradan $x_1 \leq x_2 \leq p$ yazılır. Kabul edelim ki bazı $k \geq 2$ için $x_k \leq p$ dir. Monotonluktan $Tx_k \leq Tp = p$, Lemma 6 nın (1) şartından $x_k \leq y_k \leq Tx_k \leq Ty_k$ ve $x_k \leq y_k \leq Tx_k \leq p$ olur. $y_k \leq p$ den $Ty_k \leq Tp = p$ dir. Konvekslikten $x_k \leq Ty_k$ ve

$$x_k \leq (1 - s_k)x_k + s_kTy_k = x_{k+1} \leq Ty_k.$$

Yani $x_{k+1} \leq p$ elde edilir. Böylece her $n \geq 1$ için $x_n \leq p$ olduğu sonucuna varırız. Her $n \geq 1$ için Lemma 6 dan $\|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|$ olduğu sonucu çıkar ve böylece

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|(1 - t_n)x_n + t_nTx_n - p\| \\
&\leq (1 - t_n)\|x_n - p\| + t_n\|T(x_n) - p\| \\
&\leq (1 - t_n)\|x_n - p\| + t_n\|x_n - p\| = \|x_n - p\|.
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - s_n)x_n + s_nT(y_n) - p\| \\
&\leq (1 - s_n)\|x_n - p\| + s_n\|Ty_n - p\| \\
&\leq (1 - s_n)\|x_n - p\| + s_n\|y_n - p\| \\
&\leq (1 - s_n)\|x_n - p\| + s_n\|x_n - p\| = \|x_n - p\| \quad \dots \\
&\leq \|x_1 - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\{\|x_n - p\|\}$ dizisi artmayan ve sınırlı bir dizidir. Dolayısıyla (1) ve (2) sağlanır.

Şimdi (3) ve (4) ün ispatını göstereyim. Lemma 2 ($q = 2, t = s_n$) den ve Lemma 6 dan

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 &= \|(1 - s_n)x_n + s_nTy_n - p\|^2 \leq \|(1 - s_n)(x_n - p) + s_n(Ty_n - p)\|^2 \\
&\leq (1 - s_n)\|x_n - p\|^2 + s_n\|Ty_n - p\|^2 - s_n(1 - s_n)f(\|x_n - Ty_n\|) \\
&\leq (1 - s_n)\|x_n - p\|^2 + s_n\|y_n - p\|^2 - s_n(1 - s_n)f(\|x_n - Ty_n\|) \\
&\leq (1 - s_n)\|x_n - p\|^2 + s_n\|x_n - p\|^2 - s_n(1 - s_n)f(\|x_n - Ty_n\|) \\
&\leq \|x_n - p\|^2 - s_n(1 - s_n)f(\|x_n - Tx_n\|)
\end{aligned}$$

ve böylece,

$$s_n(1 - s_n)f(\|x_n - Tx_n\|) \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2.$$

olur. Sonra sonuç (2) den

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n)f(\|x_n - Tx_n\|) = 0$$

sonucu çıkar. Sonuç (3) ten yola çıkarak $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ olduğundan

$$(\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n))(\liminf_{n \rightarrow \infty} f(\|x_n - Tx_n\|)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n)f(\|x_n - Tx_n\|),$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(\|x_n - Tx_n\|) = 0$$

elde ederiz. Böylece f nin özelliğinden

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

olur. Sonuç (4) ten yola çıkarak $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ olduğundan

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n))(\limsup_{n \rightarrow \infty} f(\|x_n - Tx_n\|)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n)f(\|x_n - Tx_n\|),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\|x_n - Tx_n\|) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(\|x_n - Tx_n\|) = 0.$$

Böylece f nin özelliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 21: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki E , Opial’ın şartını sağlasın ve $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın. Eğer $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ (veya $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi, T nin z sabit noktasına zayıf yakınsar (Muangchoo-in et al. 2017).

İspat: Teorem 20 den $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olur. $z \in K$ noktasına zayıf yakınsak olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ alt dizisi vardır. Ardından Lemma 6 dan her $k \geq 1$ için $x_1 \leq x_{n_k} \leq z$ (veya $z \leq x_{n_k} \leq x_1$) elde edilir. Diğer yandan Lemma 5 (2) şartından

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &\leq \|x - y\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|Tx - x\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{1 - \beta} \|Tx - x\| [|\alpha| \|x - y\| + |\beta| \|Tx - Ty\|] \end{aligned}$$

olur. $\{x_n\}$ dizisinin sınırlılığından ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| = 0$ dan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz\|^2 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\|^2$$

yazılır ve böylece

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Tz\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\| \quad (19)$$

elde edilir. Şimdi $z = Tz$ olduğunu gösterelim. Varsayalım bu ifade doğru olmasın yani $z \neq Tz$ olsun. (19) ve Opial’ın şartından ,

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\| &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tz\| \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Tz\|) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\| \end{aligned}$$

elde edilir, bu bir çelişkidir. Yani $z \in F_{\geq}(T)$ (veya $z \in F_{\leq}(T)$) olur. Teorem 20 nin (2) sonucunu kullanarak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$ vardır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin $z \in T$ noktasına zayıf yakınsadığını gösterelim. Bunun doğru olmadığını varsayalım. O zaman $x \in K$ noktasına zayıf

yakınsayan bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır ve $z \neq x$ olsun. Benzer olarak $x = Tx$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$ mevcuttur. Opial' in şartından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \limsup_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - x\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$$

olur fakat bu bir çelişkidir. Bu nedenle $x = z$ olur ve ispat tamamlanır.

Şimdi (8) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin güçlü yakınsaması ile ilgili bir teorem vereceğiz.

Teorem 22: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kompakt, kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın. Eğer $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ ise, $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\geq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Muangchoo-in et al. 2017).

İspat: K nın kompaktlığından $y \in K$ noktasına güçlü yakınsak ve $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Lemma 6 dan her $k \geq 1$ için $x_1 \leq x_{n_k} \leq y$ olduğu sonucu çıkar. Teorem 13 den $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ dir. Teorem 20 den $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğu ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

olduğu sonucu çıkar. Varsayalım ki

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$$

olsun. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &\leq \|x - y\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|Tx - x\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{1 - \beta} \|Tx - x\| [|\alpha| \|x - y\| + |\beta| \|Tx - Ty\|] \end{aligned}$$

mevcuttur. $\{x_{n_k}\}$ dizisinin sınırlılığından ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$$

olmasından dolayı

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Ty\|^2 \leq 0$$

olur ve böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Ty\| = 0$$

dır. Buradan

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Ty\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Ty\|) = 0$$

elde edilir ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Ty\| = 0$ dır. Bu ise $y \in F_{\geq}(T)$ demektir. Teorem 20 nin (2) den $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\|$ vardır ve böylece $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 23: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kompakt, kapalı konveks, bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın. Eğer $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi, $y \in F_{\geq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Muangchoo-in et al. 2017).

İspat: K nın kompaktlığından $y \in K$ noktasına güçlü yakınsak ve $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Lemma 6 dan her $k \geq 1$ için $x_1 \leq x_{n_k} \leq y$ olduğu sonucu çıkar. Buradan $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ dır. Teorem 13 ten $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğu ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

olduğu sonucu çıkar.

Genellemeyi bozmaksızın,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$$

olduğunu kabul edebiliriz. Diğer yandan Lemma 5 (2) den

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &\leq \|x - y\|^2 + \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \|Tx - x\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{1 - \beta} \|Tx - x\| [|\alpha| \|x - y\| + |\beta| \|Tx - Ty\|] \end{aligned}$$

mevcuttur. $\{x_{n_k}\}$ dizisinin sınırlılığından ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$$

olmasından dolayı

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Ty\|^2 \leq 0$$

olur ve böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k} - Ty\| = 0$$

dır. Buradan

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Ty\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Ty\|) = 0$$

elde edilir ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Ty\| = 0$ dır. Bu ise $y \in F_{\geq}(T)$ demektir. Teorem 20 nin (2) sonucundan $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\|$ vardır ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\| = 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Benzer olarak aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 24: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kompakt, kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $Tx_1 \leq x_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın. Eğer $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ veya $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\leq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Muangchoo-in et al. 2017).

Teorem 23 ten aşağıdaki sonuç çıkar.

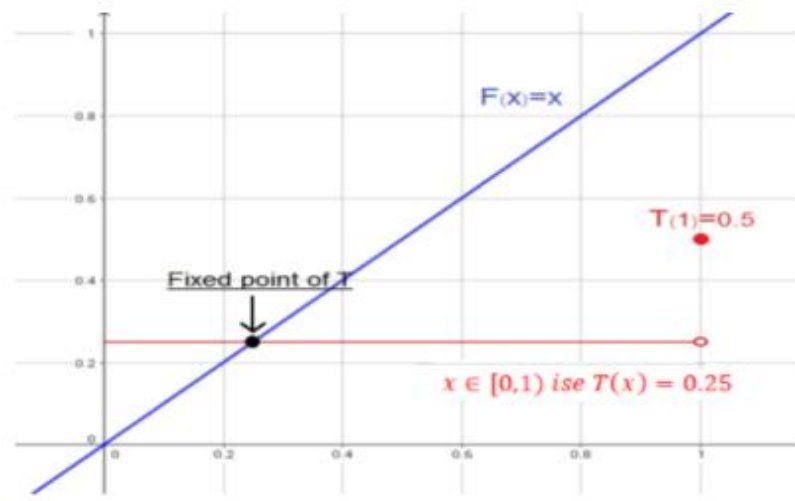
Teorem 25: $K, (E, \leq)$ düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kompakt, kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) ve $y \in K$ için $x_n \leq y$ (veya $y \leq x_n$) şartını sağlayan Mann iterasyonu ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olsun. O zaman $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ dır (Muangchoo-in et al. 2017).

Aşağıda verilen örnekte monoton (α, β) –genişlemeyen dönüşüm için Mann ve Ishikawa iterasyonlarının nümerik çözümleri Şekil 2,3 ve Tablo 1 de karşılaştırılmıştır.

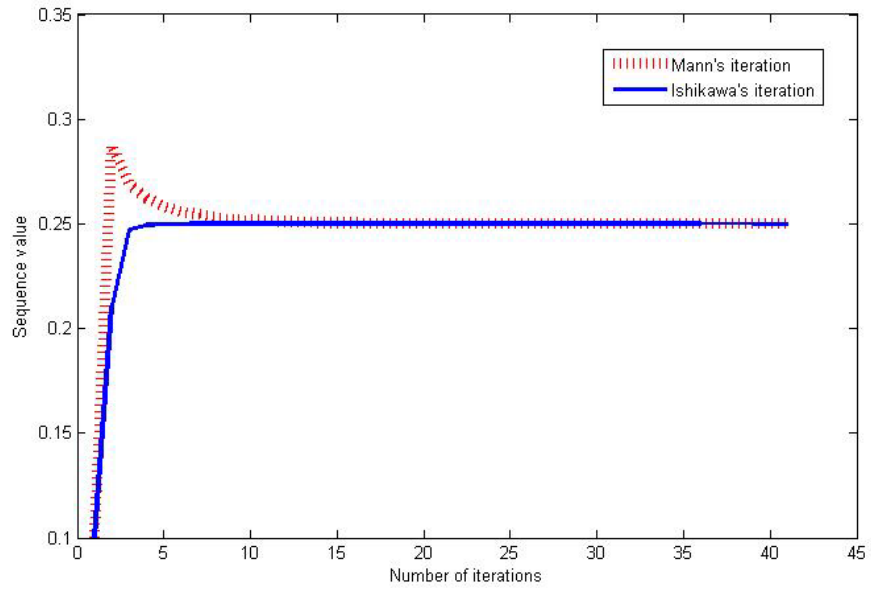
Örnek 15: $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in [0,1]$ için T dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} 0.25 & , \quad x \neq 1 \\ 0.5 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

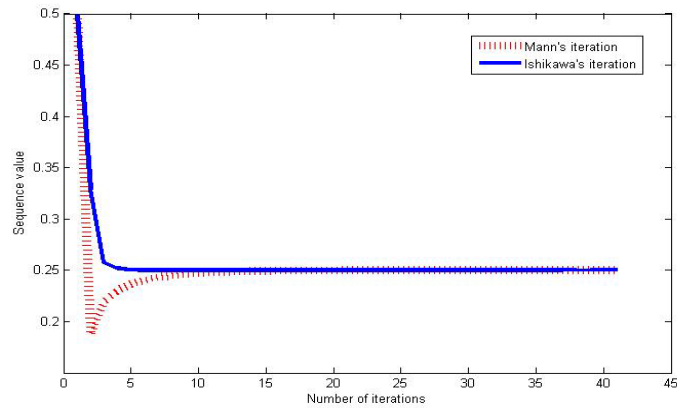
ile verilsin. Bu durumda T dönüşümü, bir $(0.8, 0.2)$ –genişlemeyen dönüşümdür. Her $n \geq 1$ için $s_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}$ olacak şekilde $\{s_n\}$ ve $\{t_n\}$ dizilerini alalım bu durumda $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{3}{16} > 0$ olur. O zaman Teorem 22 nin tüm koşulları sağlanmış olur. Ayrıca 0.25 T nin bir sabit noktasıdır (Şekil 2, 3, 4 ve Tablo 1'e bakınız).



Şekil 2. Örnek 15 deki T dönüşümünün sabit noktası



Şekil 3. $x_0 = 0.1$ için Mann ve Ishikawa iterasyonunun sabit noktaya yakınsaması



Şekil 4. $x_0 = 0.5$ için Mann ve Ishikawa iterasyonunun sabit noktaya yakınsaması

Tablo 1. Örnek 15 için Mann ve Ishikawa iterasyonunun yakınsama adımları

İterasyonların adımları	Mann'ın dizi değeri		Ishikawa ın dizi değeri	
	$x_0 = 0.1$	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 0.1$	$x_0 = 0.5$
1	0.1000000	0.5000000	0.1000000	0.5000000
2	0.2875000	0.1875000	0.2107903	0.3294046
4	0.2619791	0.2300347	0.2493380	0.2518192
6	0.2558473	0.2402544	0.2499226	0.2502132
8	0.2530811	0.2448648	0.2499882	0.2500322
10	0.2516690	0.2472181	0.2499980	0.2500053
12	0.2509161	0.2484731	0.2499996	0.2500009
14	0.2505065	0.2491557	0.2499999	0.2500001
16	0.2502813	0.2495311	0.2499999	0.2500000
18	0.2501566	0.2497388	0.2499999	0.2500000
20	0.2500874	0.2498542	0.2499999	0.2500000
22	0.2500488	0.2499185	0.2499999	0.2500000
24	0.2500273	0.2499544	0.2499999	0.2500000
26	0.2500153	0.2499744	0.2499999	0.2500000
28	0.2500085	0.2499856	0.2499999	0.2500000
30	0.2500048	0.2499919	0.2499999	0.2500000
32	0.2500026	0.2499955	0.2499999	0.2500000
34	0.2500015	0.2499974	0.2499999	0.2500000
36	0.2500008	0.2499985	0.2500000	0.2500000
38	0.2500004	0.2499992	0.2500000	0.2500000
40	0.2500002	0.2499995	0.2500000	0.2500000

TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlara yer verilmiştir.

İlk olarak düzgün konveks sıralı Banach uzayının boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlanan $T:K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm için Mann iterasyonunun yakınsaması ile ilgili sonuçlar verildi.

Sonuç 1: K ve E , Teorem 15’deki gibi olmak üzere $T:K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın, $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) ve $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ (veya $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) olsun. Bu durumda

1. $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır,
2. $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ ve her $p \in F_{\geq}(T)$ (veya $p \in F_{\leq}(T)$) için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır,
3. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ dır,
4. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ dır (Song et al. 2016).

Sonuç 2: K ve E , Teorem 16’daki gibi olmak üzere $T:K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki E , Opial in şartını sağlasın ve $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın. Eğer $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ (veya $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi, T nin z sabit noktasına zayıf yakınsar (Song et al. 2016).

Sonuç 3: K ve E , Teorem 17’deki gibi olmak üzere $T:K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Varsayalım ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın. Eğer $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\geq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Song et al. 2016).

Sonuç 4: K ve E , Teorem 18’deki gibi olmak üzere $T:K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (1) ile tanımlansın. Eğer $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\geq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Song et al. 2016).

Sonuç 5: K ve E , Teorem 19’daki gibi olmak üzere $T:K \rightarrow K$ monoton α –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (1)

ile tanımlansın. Eğer $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ veya $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\leq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Song *et al.* 2016).

İkinci olarak düzgün konveks sıralı Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlanan ve $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm için Ishikawa iterasyonunun yakınsaması ile ilgili sonuçlar verildi.

Sonuç 6: K ve E , Teorem 20’deki gibi olmak üzere $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın, $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) ve $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ (veya $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) olsun. Bu durumda

1. $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır,
2. $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ ve her $p \in F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ ($F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır,
3. $\limsup_{n \rightarrow \infty} (1 - s_n)s_n > 0$ ise $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ dır,
4. $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - s_n)s_n > 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ dır (Muangchoo-in *et al.* 2017).

Sonuç 7: K ve E , Teorem 21’deki gibi olmak üzere $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki E , Opial’in şartını sağlasın ve $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın. Eğer $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ (veya $F_{\leq}(T) \neq \emptyset$) ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi, T nin z sabit noktasına zayıf yakınsar (Muangchoo-in *et al.* 2017).

Sonuç 8: K ve E , Teorem 22’deki gibi olmak üzere $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın. Eğer $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ ise, $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\geq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Muangchoo-in *et al.* 2017).

Sonuç 9: K ve E , Teorem 23’deki gibi olmak üzere $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın. Eğer $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi, $y \in F_{\geq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Muangchoo-in *et al.* 2017).

Sonuç 10: K ve E , Teorem 24’deki gibi olmak üzere $T: K \rightarrow K$ monoton (α, β) –genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $Tx_1 \leq x_1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisi (2) ile tanımlansın. Eğer $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ veya $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(1 - s_n) > 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $y \in F_{\leq}(T)$ sabit noktasına güçlü yakınsar (Muangchoo-in *et al.* 2017).

Sonuç 9 dan aşağıdaki sonuç çıkar.

Sonuç 11: K ve E , Teorem 25'deki gibi olmak üzere $T:K \rightarrow K$ monoton α -genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x_1 \leq Tx_1$ (veya $Tx_1 \leq x_1$) ve $y \in K$ için $x_n \leq y$ (veya $y \leq x_n$) şartını sağlayan Mann iterasyonu ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olsun. O zaman $F_{\geq}(T) \neq \emptyset$ dir (Muangchoo-in *et al.* 2017).



- Agarwal, R. P., Meehan, M. and O'Regan, D., 2001. Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D.R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications, doi 10.1007/978-0-387-75818-3.
- Aksoy, A. G. and Khamisi, M. A., 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory, ISBN 0-387-97364-8.
- Almezel, S., Ansari, Q.H., and Khamisi, M.A. (Eds.), 2014. Topics in fixed point theory (Vol. 5), Switzerland Springer.
- Altun, I. And Erduran, A., 2011. Fixed points theorems for monotone mappings on partial metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, doi:10.1155/2011/508730.
- Aoyama, K. and Kohsaka, F., 2011. Fixed points theorem for-nonexpansive mappings in Banach spaces, Nonlinear Anal., 74, 4387–4391.
- Aoyama, K., Lemoto, S., Kohsaka, F. and Takahashi, 2010. W., Fixed points and ergodic theorems for -hybrid mappings in Hilbert spaces, Nonlinear Convex Anal., 11, 335–343.
- Bachar, M. And Khamisi, M.A., 2015. On common approximate fixed points of monotone nonexpansive semigroups in banach spaces, Fixed Point Theory Appl., 160.
- Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fund. Math. 3 pp., 133–181.
- Bayraktar, M., 2017. Fonksiyonel Analiz, 5. Baskı, 978-605-83870-3-4.
- Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics.
- Berinde, V., 2007. A convergence theorem for Mann iteration in the class of Zamfirescu operators, An. Univ. Vest Timi. Ser. Mat. Inform., 45, 33–41.
- Dehaish, B.A.B. and Khamisi, 2015. MA: Mann iteration process for monotone nonexpansive mappings. Fixed Point Theory Appl., 177.
- Edelstein, M., 1962. On fixed and periodic points under contractive mappings. Journal of the London Mathematical Society, 1(1), 74-79.
- George, A.B. and Nse C.A., 2014. A monotonicity condition for strong convergence of the Mann iterative sequence for demicontractive maps in Hilbert spaces, Appl. Math., 5 2195–2198.
- George, S. and Shaini, P., 2012. Convergence theorems for the class of Zamfirescu operators, Int. Math., Forum 7 (33–36), 1785–1792 .
- Goebel, K. and Kirk, W. A., 1972. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 35, 171-174.
- Gu, F., Lu, J., 2004. Stability of Mann and Ishikawa iterative processes with errors for a class of nonlinear variational inclusions problem, Math. Commun., 9, 149–159.
- Harandi, A., Fakhar, M. and Hajisharifi, H.R., 2018. Approximate fixed points of α -nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 467, 1168–1173.
- Hussain, N., Ćirić, L.B., Cho, Y.J. and Rafiq, A., 2013. On Mann-type iteration method for a family of hemicontractive mappings in Hilbert spaces. J. Inequl. Appl., 41.

- Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 147-150.
- Ishikawa, S., 1976. Fixed points and iterations of non-expansive mappings in Banach spaces, in *Proceedings of the American Mathematical Society*, Atlanta, U.S.A., 59, 65-71.
- Jung, J.S., 2005. Iterative approaches to common fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 302, 509-520.
- Khamsi, M. A. and Kirk, W. A., 2001. *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*.
- Kim, J.K., Liu, Z., Nam, Y.M. and Chun, S.A., 2004. Strong convergence theorems and stability problems of Mann and Ishikawa iterative sequences for strictly hemi-contractive mappings, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 5, 285-294 .
- Kirk, W. A., 1971. On successive approximation for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Glasgow Math. J.*, 6-9.
- Kohsaka, F. and Takahashi, W., 2008. Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings relate to maximal monotone operators in Banach spaces, *Arch. Math.*, 91, 166-177
- Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, *Uspehi Mat. Nauk.*, 10, 123-127.
- Kreyszig, E. 1978. On a Decision Theoretic Method for Social Decision. In *Foundations and Applications of Decision Theory* (pp. 275-281). Springer, Dordrecht.
- Kreyszig, E., 1989. *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library Edition Published.
- Liu, L.S., 1995. Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 194, 114-125.
- Maddox, I. J., 1970. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 506-510.
- Matthews, S.G., 1994. Partial metric topology, *Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications*, *Ann. New York Acad. Sci.*, vol., 728, pp. 183-197.
- Muangchoo -in, K., Thongtha D., Kumam P. and Cho Y. J., 2017. Fixed point theorems and convergence theorems for monotone (α, β) nonexpansive mappings in ordered Banach spaces, *Creat. Math. Inform.*, 163-180.
- Naraghirad, E., Wong, N.C. and Yao, J.C., 2013. Approximating fixed points of α -nonexpansive mappings in uniformly convex banach spaces and CAT(0) spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, 57.
- Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 251, 217-229.
- Okeke, G.A. and Kim, J.K., 2015. Convergence and summable almost t-stability of the random Picard-Mann hybrid iterative process, *J. Inequal. Appl.*, 290.
- Oltra, S. and Valero, O., 2004. Banach's fixed point theorem for partial metric spaces, *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste*, 36, 17-26.
- Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 591-597.
- Petryshyn, W. V. and Williamson, T. E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 43, 459-497.

- Picard, E. (Charles), 1890. Jour. de Math., (4) 6, 145-210.
- Rao, S. N., Kalyani K. and Khatri K., 2020. Contractive mapping theorems in Partially ordered metric spaces. CUBO, A Mathematical Journal, 22 (2): 203–214.
- Reed, M. and Simon, B., 1980. I: Functional analysis (Vol. 1). Gulf Professional Publishing.
- Reich, S., 1979. Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 67, 274-276.
- Rhoades, B. E. and Soltuz S. M., 2004. The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration, Nonlinear Analysis, 58, 219-228.
- Shukla, S., Altun, I. and Sen, R., 2013. Fixed point theorems and asymptotically regular mappings in partial metric spaces. International Scholarly Research Notices.
- Song, Y., 2008. Weak and strong convergence of Mann's-type iterations for a countable family of nonexpansive mappings. J. Korean Math. Soc., 45, 1393-1404.
- Song, Y. and Wang, H., 2014. Strong convergence for the modified Mann's iteration of λ -strict pseudocontraction, Appl. Math. Comput. 237, 405–410.
- Song, Y. and Huang, Y., 2014. Fixed point property and approximation of a class of nonexpansive mappings. Fixed Point Theory Appl., 2014, 81.
- Song, Y., Kumam, P. and Cho, Y. J., 2016. Some convergence theorems of the Mann iteration for monotone -nonexpansive mappings, Appl. Math. Comput., 287/288, 74–82.
- Song, Y., Promluang, K., Kumam, P. and Cho, Y. J., 2016. Fixed point theorems and iterative approximations for monotone nonexpansive mappings in ordered Banach spaces, Fixed Point Theorem Appl., 73.
- Suzuki, T., 2005. Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, J. Math. Anal. Appl., 305, 227–239 .
- Suzuki, T., 2008. "Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol., 340, no. 2, pp., 1088–1095.
- Takahashi, W., 2000. Nonlinear Functional Analysis –Fixed Point Theory and its Applications, Yokohama Publishers Inc., Yokohama.
- Wen, D., Chen, Y. and Lu, Y., 2017. "Ergodic-type method for a system of split variational inclusion and fixed point problems in Hilbert spaces," *The Journal of Nonlinear Science and Applications*, vol.10, no. 06, pp., 3046–3058.
- Xu, H.K., 1991. Inequality in Banach spaces with applications, Nonlinear Anal., 16 (1991) 1127–1138.
- Yildirim, I., 2010. 'New approach methods for common fixed points of asymptotically nonexpansive mappings.' Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1-35.
- Zhang, H. and Su, Y., 2009. Convergence theorems for strict pseudo-contractions in q - uniformly smooth Banach spaces, Nonlinear Anal., 71 (2009) 4572–4580 .
- Zhou, H., 2008. Convergence theorems for λ -strict pseudo-contractions in 2-uniformly smooth Banach spaces, Nonlinear Anal., 69 (2008) 3160–3173 .
- Zhou, H., Zhang, M. and Zhou, H., 2006. A convergence theorem on Mann iteration for strictly pseudo-contraction mappings in Hilbert spaces, J. Hebei Univ. Nat. Sci., 26 (2006) 348–349 .

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler			
Adı Soyadı:	Tuğba TEKİN		
Adres:			
Tel:			
E-mail:			
Eğitim			
Lise:	GEYVE ANADOLU LİSESİ		
Lisans:	SELÇUK	ÜNİVERSİTESİ	FEN FAKÜLTESİ
Lisans:	MATEMATİK BÖLÜMÜ		
Lisans:			
Yüksek lisans:	ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ		
Doktora:			
Yabancı Dil Bilgisi			
İngilizce:	Orta		
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar			