

**BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER
DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

Osman HASANPAŞAOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Murat SUBAŞI

2009

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

Osman HASANPAŞAOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ERZURUM
2009**

Her hakkı saklıdır

Doç. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, Osman HASANPAŞAOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma 25/06/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Murat SUBAŞI

İmza: 

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ercan ÇELİK

İmza: 

Üye: Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN

İmza: 

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ömer AKBULUT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Y.Lisans Tezi

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Osman HASANPAŞAOĞLU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat SUBAŞI

Bu tezde,

$$y' + p(x)y = f(x); y(x_0) = a$$

probleminde

$$J_{\alpha}(f) = [y(x_1; f) - b]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \rightarrow \min$$

fonksiyoneli kullanılarak $f(x)$ fonksiyonunun kontrol edilmesi problemi ele alınmaktadır. Problemin çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığı ispatlandıktan sonra nümerik örnekler yapılmış ve karşılık gelen MAPLE® prosedürleri yazılmıştır.

2009, 24 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer Diferansiyel Denklem, Optimal Kontrol

ABSTRACT

MS. Thesis

AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR FIRST ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Osman HASANPAŞAOĞLU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this thesis the problem of controlling the function $f(x)$ has been investigated in the problem of

$$y' + p(x)y = f(x); y(x_0) = a$$

using the functional

$$J_{\alpha}(f) = [y(x_1; f) - b]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \rightarrow \min$$

After being proven the existence, uniqueness and stability of the solution of the problem, numerical examples have been illustrated and corresponding MAPLE[®] procedures have been given.

2009, 24 Pages

Keywords: Linear differential equation, Optimal control

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma sırasında danışmanlığımı üstlenip değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Doç. Dr. Murat SUBAŞI hocama en içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde desteğini her zaman hissettiğim sevgili eşim Hatice HASANPAŞAOĞLU'na da ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Osman HASANPAŞAOĞLU

Haziran 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM	5
3.1. Problemin Koyuluşu.....	5
3. 2. Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulmuş Olması	6
3. 3. Fonksiyonelin Türevi ve Minimalleştirici Dizi Kurulması	10
3. 4. Nümerik Örnekler	15
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	22
5. SONUÇ	23
KAYNAKLAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ.....	25

1. GİRİŞ

Birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin önemli uygulamalarıyla bilim dünyasında sıkça karşılaşılabılır. Soğuma yasası, nüfus artım ve azalım problemleri, seri devreler, karışım problemleri, ekonomi ve finans, yayılma problemleri, radyoizotoplar, kanser tespiti birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin önemli uygulama alanlarına girmektedir (Nagle *et al.* 2003; Crout *et al.* 2003; Siddiqi and Manchanda 2005).

Birinci mertebeden diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemleri, denklemde yer alan bir fonksiyonu verilen bir amaç fonksiyoneli doğrultusunda kontrol etmeyi amaçlar. Bu tür problemler (Hestenes 1980; Pinch 1997; Lebedev and Cloud 2003) gibi çalışmalarda teorik açıdan incelenmiştir. Bu çalışmalarda genellikle optimal çözümün varlığı için Pontryagin'in maksimum prensibi kullanılmıştır.

Problemin çözümünün tekliği ve kararlılığı meseleleri literatürde fazla incelenmemiş olup kötü konulmuş problemler için uygulanması gereken yaklaşımlar ise açıkça ortaya konmamıştır. Regülerleştirilmiş çözümün elde edilmesi meselesi etkin bir biçimde ele alınmamıştır.

Bu tezde birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler için kurulmuş bir optimal kontrol probleminde regülerleştirilmiş çözümün elde edilmesi konusu incelenmektedir. 2. Bölümde kuramsal temeller ifade edildikten sonra 3. bölümde önce ele alınan problem ifade edilmiş sonra da sırasıyla optimal kontrol probleminin iyi konulmuş olması, fonksiyonelin türevi ve minimalleştirici dizi kurulması konuları incelenerek nümerik örnekler verilmiştir. Regülerleştirme parametresinin elde edilmesinde orijine en yakın nokta seçilmiş ve optimal çözümü bulmak için MAPLE® prosedürleri yazılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Tanım 2.1: X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

$$i. \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$ii. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$iii. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartları sağlanıyorsa, d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X kümesine metrik uzay denir ve (X, d) ya da X ile gösterilir.

Tanım 2.2: N , bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \| : N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

$$N1. \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N2. \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in F)$$

$$N3. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna N üzerinde norm, $(N, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.3: (x_n) , X normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ oluyorsa (x_n) dizisi $x \in X$ elemanına kuvvetli yakınsıyor denir.

Tanım 2.4: L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle \cdot \rangle : L \times L \rightarrow F$ fonksiyonu

$$II. \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\textbf{i2. } \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad (\alpha \in F)$$

$$\textbf{i3. } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\textbf{i4. } \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir.

Tanım 2.5(Cauchy-Schwartz Eşitsizliği): X bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.6(ε -Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a, b sayıları ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$a.b \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.7: Bir kümedeki her yakınsak dizinin limiti yine aynı kümenin elemanı ise bu kümeye kapalı küme denir.

Tanım 2.8: $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X kümesindeki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.9: Bir (X, d) metrik uzayında tanımlı $f : X \rightarrow R$ fonksiyonuna, her $x, y \in X$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ sayısı varsa X 'de Lipschitz süreklidir denir ve Lipschitz şartını sağlayan en küçük sayıya da Lipschitz sabiti denir.

$$Lip(f) = \inf \{ L : |f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y), \text{ her } x, y \in X \}$$

Tanım 2.10: $F \subset \mathbb{R}$ veya $F \subset \mathbb{C}$ olmak üzere L, F üzerinde bir vektör uzay olsun. $f : L \rightarrow F$ operatörüne fonksiyonel denir.

Tanım 2.11: F konveks bir küme olmak üzere her $f, g \in F$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$J(\alpha f + (1-\alpha)g) \leq \alpha J(f) + (1-\alpha)J(g) - \chi \alpha(1-\alpha) \|f - g\|^2$$

olacak şekilde bir $\chi > 0$ sabiti varsa $J(f)$ fonksiyoneline güçlü konveks fonksiyonel denir.

Tanım 2.12: $L_2[x_0, x_1]$ fonksiyon uzayı karesel olarak integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu bir uzaydır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{L_2[x_0, x_1]} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx, \quad \|f\|_{L_2[x_0, x_1]} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2[x_0, x_1]}}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.13(İskenderov *et al.* 2002): Kabul edelim ki $F \subseteq L_2(x_0, x_1)$ kapalı ve konveks bir küme $J(f)$ ise bu kümede $\chi > 0$ sabiti ile güçlü konveks ve sürekli bir fonksiyoneldir. O zaman;

1) $J(f)$ fonksiyoneli F kümesinde aşağıdan sınırlıdır.

$$\inf_F J(f) = J_* > -\infty$$

2) Tek bir $f_* \in F$ elemanı için $J(f_*) = J_*$ olur.

3) Keyfi minimalleştirici $\{f_k\}$ dizisi $L_2(x_0, x_1)$ uzayında f_* elemanına güçlü yakınsar.

$$\|f_k - f_*\|^2 \leq \frac{2}{\chi} [J(f_k) - J(f_*)]$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Problemin Konuluşu

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= f(x), \quad x \in [x_0, x_1] \\ y(x_0) &= a. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

problemi, değişik $f(x)$ fonksiyonları için değişik $y(x)$ çözümleri verecektir. b verilen keyfi bir sayı olmak üzere $y(x_1)$ sayısını b sayısına mümkün olduğu kadar yaklaştırmak istiyoruz. $y(x_1)$ sayısını b sayısına eşit yapacak bir çok $f(x)$ fonksiyonu bulabiliriz. Bu $f(x)$ fonksiyonlarından hangisi optimal çözüm olarak tercih edilmelidir? $f(x)$ fonksiyonları seçtikleri uzaya göre değişik normlara sahip olacaktır. Bizim amacımız istediğimiz şarta uygun olan ve normu en küçük olan bir tek $f(x)$ fonksiyonunu bulmak olacaktır. $y(x_1) = b$ şartını sağlayan $f(x)$ fonksiyonlarının normlarının oldukça büyük olduğunu görüyoruz. Bu şartın sağlanması talebimizden vazgeçip $y(x_1)$ ve b değerleri arasında bir miktar fark olmasına izin verirse bu takdirde bunu sağlayacak olan $f(x)$ fonksiyonlarının normu daha da küçülecektir. O halde biz $y(x_1) - b$ farkı ve bunu sağlayan $f(x)$ normları arasında bir ilişki kurmalıyız. Bunun için

$$J_\alpha(f) = [y(x_1; f) - b]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \quad (3.1.2)$$

fonksiyoneli oluşturup bu fonksiyoneli minimum yapacak olan $f(x)$ fonksiyonunu bulmalıyız. Burada α sayısı regülerleştirme parametresi olup $[y(x_1; f) - b]^2$ sayısı ile $\|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2$ normu arasında bir denge kurmaya yarar. α sayısının küçük değerleri için $[y(x_1; f) - b]^2$ miktarı azalırken $\|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2$ normu artacaktır. α sayısının büyük değerleri için $[y(x_1; f) - b]^2$ miktarı atarken $\|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2$ normu azalacaktır. Yani α sayısının seçimi çok önemlidir.

Problemde $p(x)$ katsayısının

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1, \quad x \in [x_0, x_1] \quad (3.1.3)$$

şartını sağladığını kabul edip, optimal çözümü de

$$F = \left\{ f : f(x) \in L_2[x_0, x_1], \quad \|f(x)\|_{L_2[x_0, x_1]} \leq k \right\} \quad (3.1.4)$$

kümesinde arayacağız.

Bu küme $L_2[x_0, x_1]$ fonksiyon uzayında kapalı, sınırlı ve konveks bir kümedir. Bu özellikler optimal çözümün varlığı için gerekli olan özelliklerdir.

3.2. Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulmuş Olması

Bu bölümde (3.1.1)-(3.1.2) probleminin iyi konulmuş bir problem olduğunu, yani çözümünün varlığını, tekliğini ve kararlılığını göstereceğiz.

Önce F kümesinin $L_2[x_0, x_1]$ uzayında kapalı ve konveks olduğunu gösterelim. Kapalı kümenin tanımından bu kümede yakınsak bir $\{f_n\}$ dizisi seçelim. Bu dizi yakınsak olduğu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_*\|_{L_2[x_0, x_1]} = 0$$

şartını sağlayacaktır. Limit elemanı olan f_* fonksiyonunun da bu kümenin elemanı olduğunu yani $\|f_*\|_{L_2[x_0, x_1]} \leq k$ olduğunu gösterebilirsek kümenin kapalılığını ispatlamış olacağız.

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

özelliklerinden

$$\|f_*\| - \|f_n\| \leq \|f_* - f_n\|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|f_*\| - \|f_n\|) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_* - f_n\|$$

$$\|f_*\| - \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| \leq 0$$

$$\|f_*\| \leq k$$

yazılabilir. Böylece F kümesinin $L_2[x_0, x_1]$ uzayında kapalı olduğu görülür.

F kümesinin $L_2[x_0, x_1]$ uzayında konveks olduğunu göstermek için her $f_1, f_2 \in F$ ve $\beta \in [0, 1]$ için $\beta f_1 + (1 - \beta) f_2 \in F$ olduğunu yani $\|\beta f_1 + (1 - \beta) f_2\|_{L_2[x_0, x_1]} \leq k$ olduğunu göstermeliyiz.

$f_1, f_2 \in F$ olduğundan $\int_{x_0}^{x_1} f_1^2 dx \leq k^2$ ve $\int_{x_0}^{x_1} f_2^2 dx \leq k^2$ şeklindedir. Böylece

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} (\beta f_1 + (1 - \beta) f_2)^2 dx &= \int_{x_0}^{x_1} [\beta f_1^2 + (1 - \beta) f_2^2] dx \\ &= \beta \int_{x_0}^{x_1} f_1^2 dx + (1 - \beta) \int_{x_0}^{x_1} f_2^2 dx \\ &\leq \beta k^2 + (1 - \beta) k^2 = k^2 \end{aligned}$$

olup

$$\|\beta f_1 + (1 - \beta) f_2\|_{L_2[x_0, x_1]} \leq k$$

olduğu görülür. Böylece F kümesinin $L_2[x_0, x_1]$ uzayında konveks olduğu ispatlanmıştır.

Şimdi $J_\alpha(f)$ fonksiyonelinin sürekliliğini ve güçlü konveksliğini incelemeliyiz.

f elemanına $f + \Delta f \in F$ olacak şekilde bir Δf artımı verelim ve bu artıma karşılık gelen

$$\begin{aligned} y'_\Delta + p(x)y_\Delta &= f + \Delta f \\ y_\Delta(x_0) &= a \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

probleminin çözümünü $y_\Delta = y(x; f + \Delta f)$ şeklinde gösterelim. (3.1.1) problemini (3.2.1) probleminden çıkarırsak

$$\begin{aligned} (\Delta y)' + p(x)\Delta y &= \Delta f \\ \Delta y(x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

fark problemini elde ederiz. Burada $\Delta y = y_\Delta - y$ şeklindedir.

Lemma 3.1: $J_\alpha(f)$ fonksiyoneli için oluşturulmuş $\Delta J_\alpha(f) = J_\alpha(f + \Delta f) - J_\alpha(f)$ farkı

$$|\Delta J_\alpha(f)| \leq a_0 \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]} + b_0 \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \quad (3.2.3)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada a_0 ve b_0 sayıları Δf fonksiyonundan bağımsız sabitlerdir.

İspat: Kolaylıkla

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(f) &= [y(x_1; f + \Delta f) - b]^2 - [y(x_1; f) - b]^2 + \alpha \left(\|f + \Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 - \|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \right) \\ &= 2[y(x_1) - b]\Delta y(x_1) + [\Delta y(x_1)]^2 + \alpha \left(2\langle f, \Delta f \rangle + \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer yandan (3.2.2) ile verilen fark denkleminin her iki yanını Δy ile çarpıp $[x_0, x_1]$ aralığında integralleyelim;

$$\int_{x_0}^{x_1} ((\Delta y)' \Delta y) dx + \int_{x_0}^{x_1} (p(x)(\Delta y)^2) dx = \int_{x_0}^{x_1} (\Delta f \Delta y) dx$$

(3.1.3) şartını kullanarak

$$\frac{1}{2} [\Delta y(x_1)]^2 - \frac{1}{2} [\Delta y(x_0)]^2 + p_0 \int_{x_0}^{x_1} (\Delta y)^2 dx \leq \|\Delta f\| \|\Delta y\| \quad (3.2.5)$$

elde ederiz. $\Delta y(x_0) = 0$ olduğunu biliyoruz.

(3.2.5) eşitsizliğinin sağ tarafına ε -Cauchy eşitsizliğini uygulayalım;

$$\frac{1}{2} [\Delta y(x_1)]^2 + p_0 \int_{x_0}^{x_1} (\Delta y)^2 dx \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \|\Delta f\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\Delta y\|^2$$

Buradan

$$\frac{1}{2}[\Delta y(x_1)]^2 + \left(p_0 - \frac{1}{2\varepsilon_1}\right)\|\Delta y\|^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2}\|\Delta f\|^2$$

yazabiliriz. $p_0 - \frac{1}{2\varepsilon_1}$ katsayısının pozitifliğini garanti edersek bu terimi, eşitsizliğin yönü bozulmayacak şekilde atabiliriz. Yani

$$p_0 - \frac{1}{2\varepsilon_1} \geq 0 \Rightarrow p_0 \geq \frac{1}{2\varepsilon_1} \Rightarrow 2p_0 \geq \frac{1}{\varepsilon_1} \Rightarrow \varepsilon_1 \geq \frac{1}{2p_0}$$

kabulü ile

$$\frac{1}{2}[\Delta y(x_1)]^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2}\|\Delta f\|^2$$

ve

$$[\Delta y(x_1)]^2 \leq \varepsilon_1 \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \quad (3.2.6)$$

elde edilir.

(3.1.4) ve (3.2.6) ifadelerini (3.2.4) ifadesinde değerlendirirsek

$$|\Delta J_\alpha(f)| \leq (2m\sqrt{\varepsilon_1} + 2\alpha k)\|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]} + (\varepsilon_1 + \alpha)\|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \quad (3.2.7)$$

yazabiliriz. Burada $m = |y(x_1)| + |b|$ şeklindedir. $a_0 = 2m\sqrt{\varepsilon_1} + 2\alpha k$ ve $b_0 = \varepsilon_1 + \alpha$ dersek (3.2.3) ifadesini elde ederiz. Böylece 3.2.1. Lemmayı ispatlamış olduk.

(3.2.3) eşitsizliği aynı zamanda $J_\alpha(f)$ fonksiyonelinin sürekliliğini de gerektirmektedir.

Lemma 3.2: $J_\alpha(f)$ fonksiyoneli F kümesinde güçlü konvektir.

İspat: F kümesinin konveks olduğunu biliyoruz. $J_\alpha(f)$ fonksiyonelinin F kümesinde güçlü konveksliğini göstermek için $\forall f, g \in F$ ve $\beta \in [0, 1]$ için

$$J_\alpha(\beta f + (1-\beta)g) \leq \beta J_\alpha(f) + (1-\beta)J_\alpha(g) - \chi\beta(1-\beta)\|f - g\|_{L_2[x_0, x_1]}^2$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $\chi > 0$ sabitinin varlığını ispatlamalıyız.

$$\begin{aligned}
J_\alpha(\beta f + (1-\beta)g) &= [y(x_1; \beta f + (1-\beta)g) - b]^2 + \alpha \|\beta f + (1-\beta)g\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \\
&\leq \beta [y(x_1; f) - b]^2 + (1-\beta) [y(x_1; g) - b]^2 \\
&\quad + \alpha \left(\beta \|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 + (1-\beta) \|g\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 - \beta(1-\beta) \|f - g\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \right) \\
&= \beta \left([y(x_1; f) - b]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \right) \\
&\quad + (1-\beta) \left([y(x_1; g) - b]^2 + \alpha \|g\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \right) - \alpha\beta(1-\beta) \|f - g\|_{L_2[x_0, x_1]}^2
\end{aligned}$$

ifadesinden $\chi = \alpha$ için

$$J_\alpha(\beta f + (1-\beta)g) \leq \beta J_\alpha(f) + (1-\beta) J_\alpha(g) - \chi\beta(1-\beta) \|f - g\|_{L_2[x_0, x_1]}^2$$

yazılabileceği görülmektedir. Bu ise $J_\alpha(f)$ fonksiyonelinin güçlü konveksliğini ispatlamaktadır.

Böylece Teorem 2.13'ün bütün şartları sağlandığından, incelediğimiz optimal kontrol probleminin iyi konulmuş olduğunu söyleyebiliriz.

3.3. Fonksiyonelin Türevi ve Minimalleştirici Dizi Kurulması

Bu bölümde Lagrange çarpanları metodunu kullanarak problemimize karşılık gelen eşlenik problemi bulduktan sonra fonksiyonelin türevini elde edecek ve gradyen metoduna göre bir minimalleştirici dizi oluşturacağız.

İncelediğimiz problem için Lagrange fonksiyoneli

$$L(f, \eta) = [y(x_1; f) - b]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 + \int_{x_0}^{x_1} (-y' - p(x)y + f) \eta dx \quad (3.3.1)$$

şeklinde ifade edilir.

δy , y elemanına verilen $\delta y(x_0)=0$ şartını sağlayan bir artım olmak üzere bu fonksiyonelin birinci varyasyonunu elde edelim;

$$\delta L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(y + \varepsilon \delta y, f, \eta) - L(y, f, \eta)}{\varepsilon}$$

tanımından faydalanacağız. Burada

$$\begin{aligned} L(y + \varepsilon \delta y, f, \eta) &= [(y + \varepsilon \delta y)(x_1; f) - b]^2 + \alpha \|f\|_{L_2(x_0, x_1)}^2 \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \eta [f - p(x)(y + \varepsilon \delta y) - (y + \varepsilon \delta y)'] dx \end{aligned}$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned} \delta L &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ [(y + \varepsilon \delta y)(x_1; f) - b + y(x_1; f) - b] [(y + \varepsilon \delta y)(x_1; f) - b - y(x_1; f) + b] \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \eta [-p(x)\varepsilon \delta y - \varepsilon(\delta y)'] dx \} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \delta L &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ [2(y(x_1; f) - b) + \varepsilon \delta y(x_1; f)] \cdot \varepsilon \delta y(x_1; f) + \int_{x_0}^{x_1} \eta [-p(x)\varepsilon \delta y - \varepsilon(\delta y)'] dx \right\} \\ \delta L &= 2[y(x_1; f) - b] \delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \left(-(\delta y)' - p(x) \delta y \right) \eta dx \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

yazılabilir. Burada $\int_{x_0}^{x_1} \eta(\delta y)' dx$ integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(\delta y)' dx = \delta y(x_1) \eta(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \delta y \eta' dx$$

olacağını görürüz. Bunu (3.3.2) ifadesinde yerine yazarsak

$$\delta L = \{2[y(x_1; f) - b] - \eta(x_1)\} \delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} (\eta' - p(x)\eta) \delta y dx \quad (3.3.3)$$

olarak elde ederiz. $\delta L = 0$ optimallik şartından

$$\begin{aligned} \eta' - p(x)\eta &= 0 \\ \eta(x_1) &= 2[y(x_1; f) - b] \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

eşlenik problemini buluruz.

Eşlenik problemde f elemanına Δf artımını verip aşağıdaki eşlenik fark probleminin elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} (\Delta \eta)' - p(x) \Delta \eta &= 0 \\ \Delta \eta(x_1) &= 2\Delta y(x_1) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Burada $\Delta \eta = \eta(x; f + \Delta f) - \eta(x)$ şeklindedir. (3.3.5) ifadesiyle verilen eşitlikte her iki tarafın $[x_0, x_1]$ aralığında integralini alıp (3.2.6) özelliğini de kullanarak

$$\|\Delta \eta\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \leq \frac{2}{p_0} \varepsilon_1 \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \quad (3.3.6)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Teorem 3.1: $J_\alpha(f)$ fonksiyonelinin türevi (3.3.4) eşlenik probleminin çözümü vasıtasıyla

$$J'_\alpha(f) = \eta + 2\alpha f$$

şeklinde elde edilir.

İspat: $\Delta J_\alpha(f) = 2[y(x_1) - b] \Delta y(x_1) + [\Delta y(x_1)]^2 + \alpha \left(2\langle f, \Delta f \rangle + \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \right)$

ifadesindeki

$$2[y(x_1) - b] \Delta y(x_1)$$

terimini inceleyelim.

(3.3.4) probleminden faydalanarak

$$\begin{aligned} 2[y(x_1) - b] \Delta y(x_1) &= \eta(x_1) \Delta y(x_1) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} [\eta(x) \Delta y(x)] dx = \int_{x_0}^{x_1} [\eta' \Delta y + \eta (\Delta y)'] dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [\eta' \Delta y + \eta (\Delta f - p(x) \Delta y)] dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \eta \Delta f dx \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi ve (3.2.6) eşitsizliğini $\Delta J_\alpha(f)$ eşitliğinde kullanırsak

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha(f) &= \int_{x_0}^{x_1} (\eta + 2\alpha f) \Delta f dx + \varepsilon_1 \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 + \alpha \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2 \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (\eta + 2\alpha f) \Delta f dx + o\left(\|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2\right)\end{aligned}$$

olacağını görürüz.

Böylece $f \in F$ noktasındaki Frechet türevin

$$J_\alpha(f + \Delta f) - J_\alpha(f) = \langle J'_\alpha(f), \Delta f \rangle_{L_2[x_0, x_1]} + o\left(\|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}^2\right)$$

tanımıyla fonksiyonelin türevini

$$J'_\alpha(f) = \eta + 2\alpha f$$

olarak elde ederiz.

Teorem 3.2: $J_\alpha(f)$ fonksiyonelinin türevi

$$\|\Delta J'_\alpha(f)\| \leq L \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]} \quad (3.3.7)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $L = \left[(1 + 2\alpha) \frac{2p_0}{\varepsilon_1} + (2\alpha + 4\alpha^2) \right]^{1/2}$ şeklindedir.

İspat: Cauchy-Schwartz eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\|\Delta J'_\alpha(f)\|^2 &= \|J'_\alpha(f + \Delta f) - J'_\alpha(f)\|^2 = \|\Delta \eta + 2\alpha \Delta f\|^2 \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (\Delta \eta + 2\alpha \Delta f)^2 dx \leq \|\Delta \eta\|^2 + 4\alpha \|\Delta \eta\| \|\Delta f\| + 4\alpha^2 \|\Delta f\|^2\end{aligned}$$

elde ederiz. ε – Cauchy eşitsizliği ile de

$$\|\Delta J'_\alpha(f)\|^2 \leq \|\Delta \eta\|^2 + 2\alpha \varepsilon_2 \|\Delta \eta\|^2 + \frac{2\alpha}{\varepsilon_2} \|\Delta f\|^2 + 4\alpha^2 \|\Delta f\|^2$$

yazılabilir. $\varepsilon_2 = 1$ olarak alırsak

$$\begin{aligned}\|\Delta J'_\alpha(f)\|^2 &\leq \|\Delta \eta\|^2 + 2\alpha \|\Delta \eta\|^2 + 2\alpha \|\Delta f\|^2 + 4\alpha^2 \|\Delta f\|^2 \\ &= (1+2\alpha)\|\Delta \eta\|^2 + (2\alpha+4\alpha^2)\|\Delta f\|^2\end{aligned}$$

olacaktır. (3.3.6) ifadesini burada kullanırsak

$$\|\Delta J'_\alpha(f)\|^2 \leq \left[(1+2\alpha)\frac{2p_0}{\varepsilon_1} + (2\alpha+4\alpha^2) \right] \|\Delta f\|^2$$

bulunur. Böylece $L = \left[(1+2\alpha)\frac{2p_0}{\varepsilon_1} + (2\alpha+4\alpha^2) \right]^{1/2}$ olmak üzere

$$\|\Delta J'_\alpha(f)\| \leq L \|\Delta f\|_{L_2[x_0, x_1]}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik, fonksiyonelin türevinin L Lipschitz sabiti ile Lipschitz şartını sağladığını göstermektedir.

Gradyen metoduna göre $J_\alpha(f)$ fonksiyoneli için minimalleştirici diziyi

$$f_{k+1} = f_k - \lambda_k J'_\alpha(f_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde seçebiliriz. Burada λ_k sabitleri $J_\alpha(f_{k+1}) < J_\alpha(f_k)$ monotonluk şartından

bulunabilir ve türevin L Lipschitz sabitinin bilindiği durumlarda bu sabitler $\lambda_k = \frac{1}{L}$

şeklinde alınabilir. Böylece

$$f_{k+1} = f_k - \frac{1}{L} J'_\alpha(f_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.8)$$

şeklindeki $\{f_k\}$ dizisi $J_\alpha(f)$ fonksiyoneli için minimalleştirici olacaktır. Bu dizinin yakınsaması Teorem 2.13 de verilmiştir.

3.4. Nümerik Örnekler

(3.1.1) probleminin çözümü

$$y(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \left[a\lambda(x_0) + \int_{x_0}^x \lambda(x) f(x) dx \right]$$

fonksiyonu ile verilir. Burada $\lambda(x) = e^{\int p(x) dx}$ integral çarpanıdır.

(3.3.4) eşlenik problemin çözümü ise

$$\eta(x) = \frac{2}{\lambda_1(x)} [y(x_1) - b] \lambda_1(x_1)$$

şeklinde olup $\lambda_1(x) = e^{-\int p(x) dx}$ bu problem için integral çarpanıdır.

Örnek 3.1: (3.1.1) probleminde $p(x) = 1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $a = -1$ ve $b = 0$ olarak seçerek

$$\begin{aligned} y' + y &= f(x), \quad x \in [0, 1] \\ y(0) &= -1 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

problemini elde ederiz. Böylece

$$J_\alpha(f) = [y(1; f)]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[0,1]}^2 \rightarrow \min \tag{3.4.2}$$

fonksiyoneli için (3.4.1)-(3.4.2) problemini çözelim.

$p_0 = 1$ ve $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ olarak alıp $f_0 = 0$ elemanından başlayarak aşağıdaki nm1 MAPLE®

prosedürü ile herhangi bir α sayısı için hesaplanmış $[y(1; f)]^2$ değerlerini elde ederiz.

```

> nm1:=proc(alpha);
> p:=1.:x0:=0.:x1:=1.:a:=-1.:b:=0.:p0:=1.:ep1:=1/2:
> lambda:=exp(int(p,x)):
> lambdaeta:=exp(int(-p,x)):
> f[1]:=0:
> L:=sqrt((1+2*alpha)*(2*p0/ep1)+(2*alpha+4*alpha^2)):
> n:=100:
> for i from 1 to n do
> y[i]:=simplify((1/lambda)*(a*subs(x=x0,lambda)+int(lambda*f[i],x=x0..x))):
> eta[i]:=(1/lambdaeta)*2*(subs(x=x1,y[i])-b)*subs(x=x1,lambdaeta):
> f[i+1]:=simplify(f[i]-(1/L)*(eta[i]+2*alpha*f[i])):
> J1[i]:=evalf((subs(x=x1,y[i])-b)^2);
> od:
> end:

```

nm1 Prosedürü

Aşağıdaki nm2 MAPLE[®] prosedürü ile de $\|f\|_{L_2[0,1]}^2$ değerlerini elde ederiz.

```

> nm2:=proc(alpha);
> p:=1.:x0:=0.:x1:=1.:a:=-1.:b:=0.:p0:=1.:ep1:=1/2:
> lambda:=exp(int(p,x)):
> lambdaeta:=exp(int(-p,x)):
> f[1]:=0:
> L:=sqrt((1+2*alpha)*(2*p0/ep1)+(2*alpha+4*alpha^2)):
> n:=100:
> for i from 1 to n do
> y[i]:=simplify((1/lambda)*(a*subs(x=x0,lambda)+int(lambda*f[i],x=x0..x))):
> eta[i]:=(1/lambdaeta)*2*(subs(x=x1,y[i])-b)*subs(x=x1,lambdaeta):
> f[i+1]:=simplify(f[i]-(1/L)*(eta[i]+2*alpha*f[i])):
> J2[i]:=evalf(int(f[i]^2,x=x0..x1));
> od:
> end:

```

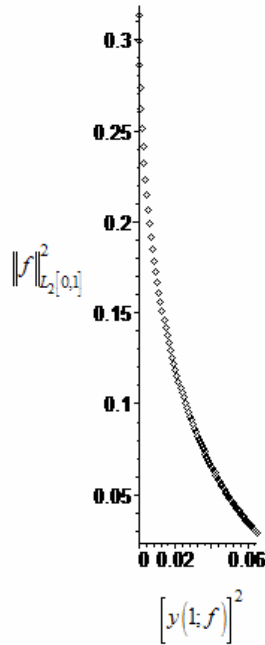
nm2 Prosedürü

Bu prosedürleri $\alpha = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.98, 0.99, 1\}$ değerleri için

```
> N:=100;
> for i from 1 to N do
> A[i]:=(nm1(1-i*(1/N))):B[i]:=(nm2(1-i*(1/N))):
> od:
> l:= [[A[n],B[n]] $n=1..N]:
> plot(l,x=0..A[1],style=point,color=black,scaling=CONSTRAINED);
```

Grafik işlemleri

işlemleriyle çalıştırsak her bir α sayısına karşılık elde edilmiş $[y(1; f)]^2$ ve $\|f\|_{L_2[0,1]}^2$ değerleri aşağıdaki şekilde olduğu gibidir.



Orijine en yakın nokta optimal çözümle elde edilmiş $[y(1; f)]^2$ ve $\|f\|_{L_2[0,1]}^2$ değerlerini temsil etmektedir.

```

> P:=array(1..N);
> for i from 1 to N do
> P[i]:=sqrt(A[i]^2+B[i]^2);
> od;
> mn:=P[1];
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to N do
> if(P[i]>mn) then break else mn:=P[i]: k:=i: fi;
> od;
> od;
> print(k,1-k*(1/N),nm1(1-k*(1/N)),nm2(1-k*(1/N)));

```

En yakın noktayı bulma işlemleri

Yukarıdaki MAPLE® işlemleri ile

24, 0.7600000000 , 0.05498491532 , 0.04115609088

değerlerini elde ederiz. Burada 0.76 regülerleştirme parametresi, 24 bu parametreyi veren dizi elemanının indisi, 0.05498491532 ve 0.04115609088 ise sırasıyla $[y(1; f)]^2$ ve $\|f\|_{L_2[0,1]}^2$ değerleridir.

Aşağıdaki nm3 MAPLE® prosedürünü nm3(0.76) şeklinde çalıştırırsak

```

> nm3:=proc(regparam);
> p:=1.:x0:=0.:x1:=1.:a:=-1.:b:=0.:p0:=1.:ep1:=1/2:
> lambda:=exp(int(p,x)):
> lambdaeta:=exp(int(-p,x)):
> f[1]:=0:
> L:=sqrt((1+2*regparam)*(2*p0/ep1)+(2*regparam+4*regparam^2)):
> N:=100:
> for i from 1 to N do
> y[i]:=simplify((1/lambda)*(a*subs(x=x0,lambda)+int(lambda*f[i],x=x0..x))):
> eta[i]:=(1/lambdaeta)*2*(subs(x=x1,y[i])-b)*subs(x=x1,lambdaeta):
> f[i+1]:=simplify(f[i]-(1/L)*(eta[i]+2*regparam*f[i])):
> od:
> end:

```

nm3 prosedürü

$$0.1135046636e^x$$

optimal çözümünü elde ederiz.

Örnek 3.2: (3.1.1) probleminde $p(x) = x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $a = 2$ ve $b = 1$ olacak şekilde seçerek

$$\begin{aligned} y' + xy &= f(x), \quad x \in [1, 2] \\ y(1) &= 2 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

problemini elde ederiz. Böylece

$$J_\alpha(f) = [y(2; f) - 1]^2 + \alpha \|f\|_{L_2[1,2]}^2 \rightarrow \min \quad (3.4.4)$$

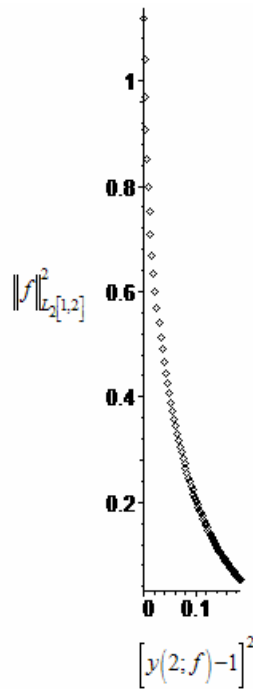
fonksiyoneli için (3.4.3)-(3.4.4) problemini çözelim.

Bir önceki örnekte verilen nm1 ve nm2 prosedürlerinde ikinci satırı

$$p:=x:x0:=1.:x1:=2.:a:=2.:b:=1.:p0:=1.:ep1:=1./2:$$

şeklinde değiştirirsek, buna karşılık gelen $[y(2; f) - 1]^2$ ve $\|f\|_{L_2[1,2]}^2$ değerlerini elde ederiz.

Bu prosedürleri $\alpha = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.98, 0.99, 1\}$ değerleri için çalıştırırsak her bir α sayısı için karşılık gelen $[y(2; f) - 1]^2$ ve $\|f\|_{L_2[1,2]}^2$ değerlerini elde edebiliriz. İlk örnekte verilen grafik işlemleri ile de bu değerleri aşağıda verilen şekilde olduğu gibi grafikledebiliriz.



Orijine en yakın nokta optimal çözümle elde edilmiş $[y(2; f) - 1]^2$ ve $\|f\|_{L_2[1,2]}^2$ değerlerini temsil etmektedir.

İlk örnekte verilen en yakın noktayı bulma işlemleri ile de

$$35, 0.6500000000, 0.1515570943, 0.09848556185$$

değerlerini bulabiliriz. Burada, 0.65 regülerleştirme parametresi, 35 bu parametreyi veren dizi elemanının indisi, 0.1515570943 ve 0.09848556185 sırasıyla $[y(2; f) - 1]^2$ ve $\|f\|_{L_2[1,2]}^2$ değerleridir.

nm3 prosedürünü nm3(0.65) şeklinde çalıştırırsak

$$0.0810561206e^{0.5x^2}$$

optimal çözümünü elde etmiş oluruz.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu tezde incelenen problemde çözümün tek olmadığı anlaşıldıktan sonra problem için yeni bir fonksiyonel ile çözümünün tek ve kararlı olup olmayacağı araştırılmaya başlanmıştır. Optimal kontrolün seçileceği kümenin kapalı ve konveks olması gerektiği bilindiğinden, önce bu şartı sağlayan uygun bir küme ortaya konulmuştur. Sonra seçilen fonksiyonelin bu kümede sırasıyla sürekliliği ve güçlü konveksliği incelenmiştir. Bu fonksiyonelin bu kümede sürekli ve güçlü konveks olduğunun ispatlanmasıyla da bilinen teoremlerden faydalanılarak bu yeni fonksiyonel ile ortaya konulan durum için çözümün tek ve kararlı olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Daha sonra bu fonksiyoneli minimalleştirecek dizilerin nasıl bulunabileceği konusu araştırılmıştır. Seçilen fonksiyonelin türevi için Lipschitz sabitinin elde edilebilmesiyle bu minimalleştirici dizinin kolay bir şekilde bulunabileceği görülmüştür. Nümerik örnekler de yapılarak bu uygulananların doğruluğu test edilmiştir. Hazırlanan MAPLE® prosedürleri ile de bu problemin uygulanması kolaylaştırılmıştır.

5. SONUÇ

Tezde belirtilen türdeki optimal kontrol problemleri için belirtilen anlamda çözümün varlığı, tekliği ve kararlılığı ispatlanmış olup bu çözüme ulaşmada minimalleştirici dizinin nasıl seçilebileceği ortaya çıkarılmıştır. İncelenen nümerik örnekler de bu durumu doğrulamaktadır. Hazırlanan MAPLE[®] prosedürleri sayesinde de bu tür problemleri çalışan diğer bilim insanları kolaylıkla bu sonuçlardan faydalanabilecektir.

KAYNAKLAR

- Crout N., Beresford N., Sanchez A., 2003. Predicting transfer of radionuclides: soil-plant-animal, Modeling Radioactivity in the environment, Editor: Scott, E. M., Elsevier, 261-287.
- Hestenes M. R., 1980. Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Robert E. Krieger Publishing Company, New York.
- İskenderov, A. D., Tagiyev, R. Y., Yagubov, G. Y., 2002. Optimalleştırme Üsulleri, Çaşıoğlu, Bakü.
- Kirk D. E., 1970. Optimal Control Theory, Prentice-Hall.
- Lebedev L. P., Cloud M. J., 2003. The Calculus of Variations and Functional Analysis, World Scientific.
- Nagle K. B., Saff E. B., and Snider A. D., 2003. Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems, Addison Wesley.
- Pinch E. R., 1997. Optimal Control and the Calculus of Variations, Oxford University Pres.
- Siddiqi A. H. and Manchanda P., 2005. A First Course of Differential Equations with Applications, McMillan India.
- Vasilyev F. P., 1980. Methods for Solution of Extremal Problems, Nauka, Moscow.
- Yosida K., 1980. Functional Analysis, Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Samsun ilinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Samsun’da tamamladı. 19 Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2000 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erzurum Uzundere Lisesi’nde öğretmenliğe başladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Yüksek Lisans programına başladı.