



**ASİMPOTOTİK GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER
İÇİN YENİ YAKLAŞIM METOTLARI**

Aynur YÜCE

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Sezgin AKBULUT
2011
Her hakkı saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ASİMPTOTİK GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN
YENİ YAKLAŞIM METOTLARI**

Aynur YÜCE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2011

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**ASİMPOTOTİK GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN
YENİ YAKLAŞIM METOTLARI**

Doç. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Aynur YÜCE tarafından hazırlanan bu çalışma 13/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oy birliği (3./3.)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Sezgin AKBULUT

İmza :

Üye : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Ömer AKBULUT
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ASİMPTOTİK GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN YENİ YAKLAŞIM METOTLARI

Aynur YÜCE

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezgin AKBULUT

Bu tezde, önce asimptotik genişlemeyen dönüşümler için son yıllarda kurulan iterasyon yöntemleri incelenmiştir. Sonra kendi üzerine tanımlı olmayan asimptotik genişlemeyen iki dönüşümün ortak sabit noktalarını bulmak için yeni bir iterasyon şeması teşkil edilmiştir. Daha sonra da bu iterasyon şeması için kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri verilmiştir.

2011, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler: Asimptotik genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta, kuvvetli ve zayıf yakınsama, düzgün konveks Banach uzayı.

ABSTRACT

MS Thesis

NEW APPROACH METHODS FOR ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS

Aynur YUCE

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

In this thesis, firstly established in recent years for asymptotically nonexpansive mappings iteration process are examined. Secondly, it is introduced a new iterative process to compute the common fixed points of two nonself asymptotically nonexpansive mappings. Later, it is proved strongly and weakly convergence theorems for the iteration process.

2011, 66 pages

Keywords: Asymptotically nonexpansive mapping, fixed point, strongly and weakly convergence, uniformly convex Banach space.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarında ve tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Sezgin AKBULUT'a en içten dileklerle sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ'a, Sayın Arş. Gör. Dr. İsa YILDIRIM'a ve Matematik Bölümü'nde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere bölümümüzün öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca “Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı” ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Aynur YÜCE

Ocak - 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Genel Kavramlar.....	4
2.2. Sabit Nokta Kavramı	9
2.3. Dönüşümlerin Sabit Noktaları	18
3. MATERYAL ve YÖNTEM	25
3.1. İterasyon Yöntemleri	25
3.1.1. Picard İterasyon Metodu.....	25
3.1.2. Krasnoselskij İterasyon Metodu	26
3.1.3. Kirk İterasyon Metodu.....	26
3.1.4. Mann İterasyon Metodu.....	27
3.1.5. Ishikawa İterasyon Metodu.....	27
3.1.6. Noor İterasyon Metodu.....	28
3.1.7. n -adım İterasyon (Multistep İteration) Metodu.....	28
3.1.8. S-İterasyon Metodu	29
3.1.9. Modifiye Edilmiş S-İterasyon Metodu	29
3.2. Hatalı İterasyon Yöntemleri	30
3.2.1. Hatalı Mann İterasyon Metodu.....	31
3.2.2. Hatalı Ishikawa İterasyon Metodu.....	31
3.2.3. Hatalı Noor İterasyon Metodu.....	31
3.3. Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler.....	32
3.4. Kendi Üzerine Tanımlı Olmayan Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler	35
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	45
4.1. Reel Banach Uzaylarda Yakınsama Teoremleri.....	46
4.2. Düzgün Konveks ve Smooth Banach Uzaylarda Yakınsama Teoremleri	50
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	62
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	67

SİMGELER DİZİNİ

c_o	0 a yakınsayan dizilerin uzayı
$D(x_0; r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{D}(x_0; r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$\dim(X)$	X uzayının boyutu
$\text{diam}(X)$	X kümesinin çapı
X^*	X uzayının normlu duali
X^{**}	X uzayının normlu ikinci duali
X'	X uzayının cebirsel duali
X''	X uzayının cebirsel ikinci duali
δ_X	X uzayının konveksliğinin modülü
ρ_X	X uzayının smoothluğunun modülü
B_X	X uzayındaki kapalı birim yuvar
S_X	X uzayındaki birim küre
$I_K(x)$	$x \in K$ nın inward kümesi
$\overline{I_K(x)}$	$x \in K$ nın inward kümesinin kapanışı
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$I(x_0, \alpha_n, \beta_n, T)$	Ishikawa iterasyonu
$K(x_0, \lambda, T)$	Krasnoselskij iterasyonu
$M(x_0, \alpha_n, T)$	Mann iterasyonu
$S(x_n, \alpha_n, \beta_n, T^n)$	Modifiye edilmiş S-iterasyonu
$P(x_0, T)$	Picard iterasyonu
$S(x_n, \alpha_n, \beta_n, T)$	S-iterasyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Dönüşümler arasındaki bağlantı	14
---	----



1. GİRİŞ

“Sabit Nokta Teorisi” çalışmaları 19. yüzyıl başlarına dayanmaktadır. Sabit nokta teorisi, adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını, tekliğini ve bir integral denklemde çözümün varlığını göstermek amacıyla başlamıştır.

Genel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teoremi, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teoremidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teoremi çalışmaları, 1909-1913 yılları arasında L. E. J. Brouwer ile başlamıştır. Bilinen ilk sabit nokta teoremi, “ $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm ise, f nin X de bir sabit noktası vardır” şeklindedir. 1912 yılında Brouwer bu teoremi n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ Euclidean uzayına “ $B, \mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar ve $f: B \rightarrow B$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, B de en az bir sabit noktaya sahiptir” şeklinde genişletmiştir. Brouwer Sabit Nokta Teoremi, ekonomi biliminde Nobel ödülü alan John Nash’ın makalelerine temel bir matematiksel malzeme olmuştur. Ekonomistler, Brouwer Sabit Nokta Teoremi’nin kesin bir ekonomik dengenin oluşturulması için yardımcı bir unsur olarak kullanılabileceğini belirtmektedirler.

1922 yılında S. Banach tarafından ifade edilen ve “Daraltan (büzülme) Dönüşüm Teoremi” olarak da bilinen Banach Sabit Nokta Teoremi, sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eden en önemli teoremlerden biridir. Bu teorem, “ (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad 0 \leq k < 1$$

ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir” şeklindedir. Bu teorem, S. Banach’ın doktora tezinin bir kısmı olarak belirlenmiş ve ispatı yapılmıştır. Bundan sonraki aşamalarda Banach’ın sabit nokta teoremi, matematiğin birçok dalındaki varlık problemlerinin çözümünde, kullanışlı ve kolaylık sağlayan bir unsur olmuştur.

Yukarıda ifade edilen Brouwer Teoremi sonsuz boyutlu uzaylar için geçerli değildir. Bu teoremin sonsuz boyutlu Banach uzaylarına bir genelleştirmesi olan ve Schauder Teoremi olarak adlandırılan teorem, 1930 yılında J. Schauder tarafından “ K , bir X Banach uzayının boş olmayan kompakt, konveks bir alt kümesi ve $f: K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f , K da en az bir sabit noktaya sahiptir” şeklinde ifade edilmiştir.

Daha sonra 1950 de F. E. Browder, 1965 de W. A. Kirk, 1968 de R. Kannan, 1974 de L. B. Ćirić ve daha pek çok yazar bu temel sonuçları genelleştirmişlerdir. Bununla birlikte G. Ćirić, B. E. Rhoades, S. Sessa gibi pek çok araştırmacı birden fazla dönüşümün ortak sabit noktaları üzerine çok sayıda çalışma yapmışlardır. 1972 yılında Goebel ve Kirk, asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm için sabit noktanın varlığını ispatlamış ve Schu (1991), Tan ve Xu (1993), Rhoades (1994), Osilike ve Udomene (2000) tarafından Hilbert ve Banach uzaylarında bu tür dönüşümlerin sabit noktaları üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Normlu bir uzayın, boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesinden bu normlu uzaya tanımlanan ve “kendi üzerine tanımlı olmayan dönüşüm (nonself)” olarak adlandırılan dönüşümler için 2000 li yılların başlarından itibaren yeni iterasyon şemaları oluşturulmuş ve bu iterasyon şemalarının uygun şartlar altında sabit noktalara yakınsamaları incelenmiştir. Chidume, Ofoedu ve Zegeye (2003), Wang (2006), Zhou, Cho ve Kang (2007), Thianwan (2008), Özdemir, Akbulut ve Kızıltunç (2010) gibi pek çok araştırmacı kendi üzerine tanımlı olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için bu yeni iterasyon metotlarını kullanarak önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Yine bu bölümde daraltan, kesin daraltan ve genişlemeyen dönüşümler tanımlanmış ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlar altında var olduğu araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, ilk olarak dönüşümlerin sabit noktaları bulunurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları verilmiştir. Bunlardan bazıları Picard iterasyon metodu, Kirk iterasyon metodu, Krasnoselskij iterasyon metodu, Mann iterasyon metodu, Ishikawa iterasyon metodu, Noor iterasyonu, Rhoades'in n -adım iterasyon metodu, Agarwal-O'Regan-Sahu'nun S -iterasyon metodu ve modifiye edilmiş S -iterasyon metodudur. İkinci olarak hatalı iterasyon metotları verilmiştir. Bunlardan bazıları hatalı Mann iterasyon metodu, hatalı Ishikawa iterasyon metodu ve hatalı Noor iterasyon metodudur. Üçüncü olarak asimptotik genişlemeyen dönüşümler için yapılan çalışmalar verilmiştir. Daha sonra kendi üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için yapılan çalışmalar ifade edilerek ispatlarımızda kullanacağımız bazı lemmalar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, öncelikle kendi üzerine tanımlı olmayan asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için yeni bir iterasyon şeması teşkil edilmiş ve daha sonra bir reel Banach uzayında bu iterasyon şeması için kuvvetli yakınsama teoremi verilmiştir. Son olarak, smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzayında yukarıda bahsedilen yeni iterasyon şeması için kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri verilmiştir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

$$M1. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M2. d(x, y) = d(y, x)$$

$$M3. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir ve $X = (X, d)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 (Cauchy Dizisi): $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.3 (Tam Metrik Uzay): $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.4 (Kompakt Metrik Uzay): (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise, (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.1.5 (Sürekli Dönüşüm): $X = (X, d)$ ve $Y = (Y, \rho)$ iki metrik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f , X in her noktasında sürekli ise f ye X de süreklidir denir.

Tanım 2.1.6 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konvektir denir.

Tanım 2.1.7 (Normlu Uzay): N, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \|: N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

$$N1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N2. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, (\alpha \in F)$$

$$N3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) bir norm ve $(N, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.8 (Banach Uzayı): N normlu lineer uzay olsun. $N, d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir.

N nin reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayıda reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.9 (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı): L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$I1. \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$I2. \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$I3. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$I4. \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

şartlarını sağlayan $\langle \cdot, \cdot \rangle: L \times L \rightarrow F$ fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı lineer uzaya iç çarpım uzayı (veya ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayı, $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ veya kısaca L ile gösterilir.

Tanım 2.1.10 (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\| \cdot \|$ iç çarpım normu olsun. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise, X e Hilbert uzayı denir.

Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.1.11 (Sınırlı Lineer Operatör): N ve N' iki normlu uzay ve $T: N \rightarrow N'$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|Tx\|' \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K > 0$ reel sayısı varsa, T ye sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.1.12 (Cebirsel Dual): X bir reel lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm reel değerli lineer fonksiyonların kümesini $L(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $L(X, \mathbb{R}) = \{T: T: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineer}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $T_1, T_2 \in L(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $L(X, \mathbb{R})$ bir reel lineer uzaydır. Bu $L(X, \mathbb{R})$ uzayına X in cebirsel duali denir ve X' ile gösterilir. X' in cebirsel duali

$$L(X', \mathbb{R}) = (X')'$$

veya kısaca X'' ile gösterilir ve buna X lineer uzayının cebirsel ikinci duali (bidual space) adı verilir.

Tanım 2.1.13 (Normlu Dual): X bir normlu lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $C(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(X, \mathbb{R}) = \{T: T: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineer ve sürekli}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $T_1, T_2 \in C(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $C(X, \mathbb{R})$ bir lineer uzaydır. Bu $C(X, \mathbb{R})$ uzayına X in normlu duali denir ve X^* ile gösterilir. X^* in normlu duali

$$L(X^*, \mathbb{R}) = (X^*)^*$$

veya kısaca X^{**} ile gösterilir ve buna X normlu uzayının normlu ikinci duali (bidual space) adı verilir.

Burada X^* , $\|T\| = \sup\{T(x): \|x\| \leq 1\}$ normuna göre normlu lineer uzaydır. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X^* daima bir Banach uzaydır. Bu X^* uzayına bazen X in eşi veya eşleniği adı da verilir.

Yukarıdaki tanımlardan da anlaşılacağı gibi, X^* uzayı X' cebirsel dual uzayının bir alt uzayıdır. Sonlu boyutlu uzayların normlu dualleri ile cebirsel dualleri aynıdır.

Örnek 2.1.14: (i) Alışılmış norm ile $\mathbb{R}^n$ uzayının duali kendisidir.

(ii) ℓ_1 uzayının $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ normuna göre normlu duali ℓ_{∞} uzayıdır.

(iii) c_0 uzayının $\|x\| = \sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\}$ normuna göre normlu duali ℓ_1 uzayıdır.

Tanım 2.1.15 (Kuvvetli Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

ya da kısaca $x_n \xrightarrow{k} x$ ile gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir.

Tanım 2.1.16 (Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer her $f \in X^*$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya $x_n \xrightarrow{z} x$ ya da $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

Kuvvetli ve zayıf yakınsama arasındaki gerektirmeler aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.1.17: X normlu bir uzay olsun. Bu durumda,

- (a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.
- (b) (a) nın tersi genel olarak doğru değildir.
- (c) $\dim(X) < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir (Kreyszig 1989).

Normlu uzaylarda zayıf yakınsamanın kuvvetli yakınsamayı gerektirmediğini aşağıdaki örnek ile görebiliriz.

Örnek 2.1.18: $X = \ell_2$ uzayını ve bu uzayda $x \in X$ için $\|x\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$ şeklinde tanımlanan normu alalım. $\{x_n\}$ dizisini

$$x_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Herhangi bir $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in X^* = \ell_2$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$(x_n, y) = y_n \rightarrow 0$$

olur. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightharpoonup 0$ zayıf yakınsar. Ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsak değildir.

Tanım 2.1.19 (Opial Şartı): Bir X Banach uzayında $x_n \rightharpoonup x$ zayıf yakınsaması her $y \neq x$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, X Banach uzayı Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Örnek 2.1.20: Her Hilbert uzayı Opial şartını sağlar. Yani, bir H Hilbert uzayında $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ noktasına zayıf yakınsak ise, her $y \in H$ ve $y \neq x$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

dir. Her zayıf yakınsak dizi sınırlı olduğundan $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$ sonludur.

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y \rangle$$

olduğundan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|^2 > \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|^2$$

elde edilir.

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.2.1 (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir.

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Örneğin,

1. $X = [0,4]$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = 4 - x$ dönüşümü için $F(T) = \{2\}$ dir.

2. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \rightarrow X$ özdeş dönüşümü için X in her bir noktası bir sabit noktadır.

3. $X = [0,3]$ ve $Y = [4,5]$ olmak üzere herhangi bir $T: X \rightarrow Y$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.
4. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = x^5$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{-1,0,1\}$ dir.
5. $T: (0,1] \rightarrow (0,1]$, $Tx = \frac{x}{3}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bu dönüşüm için $x = 0$ noktası tek sabit nokta olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dir.

X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ olacak şekilde $T^n(x)$ i tanımlayabiliriz. $T^n(x)$, T altındaki x in n . iterasyonu olarak adlandırılır.

$T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazılabilir.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.
2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise, $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T: \{5,6,7\} \rightarrow \{5,6,7\}$ dönüşümü $T(5) = 7, T(6) = 6, T(7) = 5$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{5,6,7\}$ olduğu halde $F(T) = \{6\}$ dir.

X boş olmayan bir küme ve $T_1, T_2: X \rightarrow X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $T_1x = T_2x = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T_1 ve T_2 nin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T_1) \cap F(T_2)$ ile gösterilir. Aşağıda birden fazla dönüşümün ortak sabit noktalarıyla ilgili örnekler verilmiştir.

Örnek 2.2.1.1: $X = \mathbb{R}$, $T_1x = x^2 - 2x + 2$ ve $T_2x = x^2 + 3x - 3$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T_1) \cap F(T_2) = \{1\}$ dir.

Örnek 2.2.1.2: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $T_1, T_2: X \rightarrow X$, $T_1(x, y) = (0, y)$ ve $T_2(x, y) = (2x, y)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T_1) \cap F(T_2) = \{(0, y)\}$ dir.

Tanım 2.2.2 (Lipschitzian Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabit sayısı varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Yukarıdaki tanıma göre Lipschitz şartını sağlayan her T dönüşümü düzgün süreklidir.

Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x, y) < k\delta = \varepsilon$ olduğundan

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

yazılır. Bu da T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2.3: $X = \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$,

$$Tx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{2} \sin(1/x), & x \neq 0 \end{cases}$$

dönüşümü süreklidir. Fakat Lipschitzian bir dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.4 (Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ Lipschitzian bir dönüşüm olsun. Eğer (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa, T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (contraction) denir.

Eğer (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ daraltan bir dönüşüm ise, bu dönüşümün bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir (Banach Daralma İlkesi).

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Örneğin, $X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$ ve $Tx = \frac{x}{3}$ dönüşümünü alalım. Bu T dönüşümü daraltan dönüşümdür, fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm de olamaz. Buna karşın T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n daraltan bir dönüşüm olabilir.

Örnek 2.2.5: $T: [0,2] \rightarrow [0,2]$, $Tx = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$ olsun. T dönüşümü $x = 1$ de süreksizdir. Bu nedenle daraltan dönüşüm değildir. Diğer taraftan, $T^2: \{0,1\} \rightarrow \{0\}$, $T^2(x) = 0$ olup T^2 daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca $x = 0$, T^2 nin tek sabit noktasıdır.

Tanım 2.2.6 (Kesin Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

Örnek 2.2.7: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoreminden

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani,

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

dir.

Bu tip dönüşümlerin sabit noktasını garanti etmek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterlidir.

Tanım 2.2.8 (Genişlemeyen Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Örnek 2.2.9: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = x - 1$ olsun.

$$d(Tx, Ty) = |x - 1 - y + 1| = |x - y| = d(x, y)$$

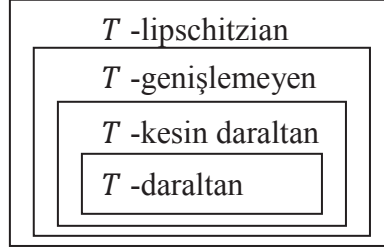
olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşüm ne daraltan ne de kesin daraltandır.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının var olması gerekmez. Bunun için, ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerine bazı ek koşullar konulması gereklidir. 1965 yılında Browder, Godhe ve Kirk düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır.

2.2.10. Dönüşümler Arasındaki Bağlantı

Yukarıda tanımlanan dönüşümler göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir:

$$T - \text{daraltan} \Rightarrow T - \text{kesin daraltan} \Rightarrow T - \text{genişlemeyen} \Rightarrow T - \text{lipschitzian}$$



Şekil 2.1. Dönüşümler arasındaki bağlantı

Tanım 2.2.11 (Düzgün Lipschitzian Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ ve her $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L \|x - y\|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, T ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 2.2.12 (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ ve her $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \rightarrow 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, T ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir.

Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yani, her genişlemeyen dönüşüm asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.2.13: $B_H, H = \ell_2$ Hilbert uzayında kapalı birim yuvar ve $\{a_i\}, \prod_{i=2}^{\infty} a_i = 1/2$ ($0 < a_i < 1$) şartını sağlayan bir reel sayı dizisi olsun. $T: B_H \rightarrow B_H$ dönüşümünü

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1^2, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots),$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda her $x, y \in B_H$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq 2\|x - y\|$$

dir. Yani, T dönüşümü Lipschitzian'dır. Diğer taraftan, her $x, y \in B_H$ ve $n \geq 2$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq 2 \prod_{i=2}^n a_i \|x - y\|$$

dir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır, $k_n = 2 \prod_{i=2}^n a_i \rightarrow 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla T asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür fakat genişlemeyen bir dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.14 (Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise, T ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Pettryshn and Wilhamson 1973).

Tanım 2.2.15 (Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$, her $x \in K$ ve her $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + u_n)\|x - p\|$$

olacak şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{u_n\} \in [0, \infty)$ dizisi varsa, T dönüşümüne asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Khan *et al.* 2008).

Tanım 2.2.16: E bir Banach uzay, K , E nin boştan farklı bir alt kümesi, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve x^* , T nin bir sabit noktası olsun.

(i) K daki $\{x_n\}$ dizisi x^* a zayıf ve $\{Tx_n\}$ dizisi p ye kuvvetli yakınsadığında $Tx^* = p$ oluyorsa T dönüşümüne p de demicloseddir denir.

(ii) Her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi var ve $\{Tx_{n_j}\}$ dizisi T nin görüntü kümesinde yakınsak ise, T dönüşümüne tamamen süreklidir denir.

Tanım 2.2.17 (Zayıf Inward Şartı): E bir Banach uzay ve K da E nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Herhangi bir $x \in K$ için inward küme $I_K(x)$ ile gösterilir ve

$$I_K(x) = \{y \in E: y = x + \lambda(z - x), z \in K, \lambda \geq 0\}$$

şeklinde tanımlanır. $T: K \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü her $x \in K$ için $Tx \in I_K(x)$ ise inward şartını, $Tx \in \overline{I_K(x)}$ ise zayıf inward şartını sağlıyor denir. (Burada $\overline{I_K(x)}$, $I_K(x)$ kümesinin kapanışıdır.)

Tanım 2.2.18 (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım, $x, y \in B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $(x + y)/2$ orta noktasının $S_X = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ den bir δ uzaklığında ve B_X kapalı birim yuvar içinde olduğu ifade eder.

Örnek 2.2.19: Her H Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $x, y \in H$ için paralelkenar kuralından

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$$

dir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in B_H = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Şayet, $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

elde edilir. O halde, H düzgün konveks bir uzaydır.

Örnek 2.2.20: ℓ_1 uzayı $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ normuna göre düzgün konveks uzay değildir. Bunu göstermek için $\varepsilon = 1$ olmak üzere $x = (1, 0, 0, 0, \dots), y = (0, -1, 0, 0, \dots) \in \ell_1$ elemanlarını alalım. Bu durumda $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ normuna göre

$$\|x\|_1 = 1, \|y\|_1 = 1, \|x - y\|_1 = 2 > 1 = \varepsilon$$

olur. Ancak $\|(x + y)/2\|_1 = 1$ olduğundan $\|(x + y)/2\|_1 \leq 1 - \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı yoktur. Dolayısıyla ℓ_1 uzayı düzgün konveks değildir.

Tanım 2.2.21: X bir Banach uzayı olsun. $\delta_X: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$,

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}$$

olarak tanımlanan δ_X fonksiyonuna X in konveksliğinin modülü denir.

Yukarıdaki tanımdan, $\delta_X(0) = 0$ ve her $t \geq 0$ için $\delta_X(t) \geq 0$ olduğunu görmek kolaydır.

Tanım 2.2.22 (Smooth Uzay): X bir Banach uzay olsun. Her $x, y \in S_X$ için

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

limiti var ise X e smooth uzay denir.

Örnek 2.2.23: (i) $1 < p < \infty$ için l_p uzayları smooth Banach uzaylardır.

(ii) c_0, l_1 ve l_∞ uzayları smooth uzay değildirler.

Tanım 2.2.24: X bir Banach uzayı olsun. $\rho_X: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \rho_X(t) &= \sup \left\{ \frac{\|x + y\| + \|x - y\|}{2} - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = t \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|x + ty\| + \|x - ty\|}{2} - 1 : \|x\| = \|y\| = 1 \right\}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

olarak tanımlanan ρ_X fonksiyonuna X in smoothluğunun modülü denir.

Yukarıdaki tanımdan, $\rho_X(0) = 0$ ve her $t \geq 0$ için $\rho_X(t) \geq 0$ olduğunu görmek kolaydır.

2.3. Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Daraltan, kesin daraltan, genişlemeyen ve Lipschitzian gibi dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde, bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası olabilir. Bu bölümde, hangi tür dönüşümlerin sabit noktalarının var ve bu sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğunu teorem ve örneklerle ifade edeceğiz.

Örnek 2.3.1: $X = [a, b]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T , $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için,

$$|T'x| \leq k < 1$$

şartını sağlıyorsa bu durumda T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (a, b)$ olmak üzere,

$$|Tx - Ty| = T'(c)|x - y| \leq k|x - y|$$

olur. Böylece Banach Daralma İlkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3.2: $X = (0, 1]$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = \frac{3x}{5}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = \left| \frac{3x}{5} - \frac{3y}{5} \right| = \frac{3}{5}|x - y| = \frac{3}{5}d(x, y)$$

olduğundan T bir daraltan dönüşümdür. Fakat T nin X de bir sabit noktası yoktur.

Çünkü sabit noktanın tanımından $\frac{3x}{5} = x \Rightarrow 3x = 5x \Rightarrow x = 0$ olur. Burada $x = 0 \notin (0, 1] = X$ olduğundan T nin X de bir sabit noktası yoktur.

Aşağıdaki örnekte, tam metrik uzay üzerinde tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 2.3.3: $X = c_0$ Banach uzayı ve $K = B_X = \{x \in c_0 : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı verilsin. Her $x \in K$ için

$$T(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = (1, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $T: K \rightarrow K$ dönüşümünü alalım. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $x = (1, 1, 1, \dots)$, T nin bir sabit noktasıdır. Fakat, $x = (1, 1, 1, \dots) \notin c_0$ dır. Yani, T genişlemeyen dönüşümü c_0 uzayında bir sabit noktaya sahip değildir.

Yine tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktasının olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3.4: $X = [1, \infty)$ kümesi üzerinde $d(x, y) = |x - y|$ metriği ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = x + \frac{1}{x^2}$ dönüşümü verilsin. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= |Tx - Ty| \\ &= \left| x + \frac{1}{x^2} - y - \frac{1}{y^2} \right| \\ &= \left| \frac{x^3y^2 + y^2 - x^2y^3 - x^2}{x^2y^2} \right| \\ &\leq \frac{|x - y||x^2y^2 - (x + y)|}{x^2y^2} \end{aligned}$$

olur. Burada her $x, y \in X = [1, \infty)$ için $\frac{|x^2y^2 - (x + y)|}{x^2y^2} \leq 1$ olacağından

$$\frac{|x - y||x^2y^2 - (x + y)|}{x^2y^2} < |x - y|$$

olur ki bu da $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ şartının sağlandığını gösterir. O halde, T bir daraltan dönüşüm değildir fakat kesin daraltan bir dönüşümdür. Dikkat edilirse burada T nin bir sabit noktası yoktur.

Aşağıdaki teorem, analizdeki en basit sabit nokta teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.3.5: $[a, b]$, $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

İspat: Her $x \in [a, b]$ için $T(x) = x - f(x)$ şeklinde bir $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise, $T(a) \leq 0$ ve $f(b) \leq b$ ise, $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c) = 0$ olacağından $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ vardır.

Teorem 2.3.6 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): B , $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda $f: B \rightarrow B$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Bu teorem sonlu boyutlu uzaylarda geçerlidir. Yani, Brouwer'ın bu teoremi herhangi bir sonsuz boyutlu Banach uzayında geçerli değildir. Bu durumu bir örnekle izah edelim.

Örnek 2.3.7: B , c_0 Banach uzayında bir kapalı birim küre olsun. $x = (x_1, x_2, \dots)$ için

$$T: B \rightarrow B, T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \dots)$$

dönüşümünü alalım. Her $x, y \in B$ için

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$$

olduğundan T süreklidir. Ancak, $Tx = x$ denkleminin B de bir çözümü yoktur.

Teorem 2.3.8 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, $K \subseteq X$ boş olmayan kompakt konveks bir alt küme ve $f: K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamisi and Kirk 2001).

Teorem 2.3.9 (Banach Daralma İlkesi): (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$

olsun. Önce $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ve sonra da bu dizinin limit noktasının $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. $n, p \geq 1$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \\ &\leq kd(x_{n+p-1}, x_{n-1}) \\ &= kd(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\ &\leq k^2d(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \leq \dots \\ &\leq k^nd(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = k^nd(x_p, x_0) \\ &\leq k^n(d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)) \\ &\leq k^n(kd(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)) \\ &= k^n(d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + kd(x_{p-1}, x_{p-2})) \\ &\leq k^n[d(x_{p-2}, x_0) + kd(x_{p-2}, x_{p-3}) + k^2d(x_{p-2}, x_{p-3})] \\ &\vdots \\ &\leq k^n(d(x_1, x_0) + kd(x_1, x_0) + k^2d(x_1, x_0) + \dots) \\ &= k^nd(x_1, x_0)(1 + k + k^2 + k^3 + \dots) \\ &= k^nd(x_1, x_0)\left(\frac{1}{1-k}\right), \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

dır. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınır, $d(x_{n+p}, x_n) \rightarrow 0$ elde edilir. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \rightarrow x$ ve dolayısıyla $x_{n+1} \rightarrow x$ dir. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \rightarrow Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ de $n \rightarrow \infty$ için limit alınır $x = Tx$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y , T nin başka bir sabit noktası yani, $Ty = y$ olsun. Bu durumda

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olur. Bu ise $d(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü,

$$\begin{aligned} d(x, y) \leq kd(x, y) &\Rightarrow d(x, y) - kd(x, y) \leq 0 \\ &\Rightarrow d(x, y)[1 - k] \leq 0 \end{aligned}$$

dir. $k < 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dır. Dolayısıyla hem $1 - k > 0$ hem de $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $d(x, y)[1 - k] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d(x, y) = 0$ olması gerekir. Bu da $x = y$ demektir.

Örnek 2.3.10: $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $T: K \rightarrow K$, $Tx = \frac{x}{6}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{6}$ olarak seçelim.

Buradan

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{36}$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = \frac{1}{216}$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = \frac{1}{1296}$$

$\vdots$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \dots = T^n x_0$$

$\vdots$

şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0, 1]$ dir. Sabit nokta tanımından da

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{6} = x \Rightarrow x = 6x \Rightarrow x = 0$$

dır. Yani $x = 0$, T dönüşümünün sabit noktasıdır. Ancak dönüşümlerin sabit noktalarını tanımdan hareket ederek bulmak her zaman kolay değildir. Bu sebeple farklı dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının bulunmasında iterasyon metodları kullanılır.

Teorem 2.3.11: (X, d) bir tam metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0 , T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu da $y = x_0$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.3.12: (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x_0$$

dır (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: $x \in X$ için,

$$\phi(x) = d(x, Tx),$$

şartını sağlayan bir $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda ϕ sürekli ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden ϕ , bir $x_0 \in X$ noktasında minimum değerini alır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\phi(Tx_0) = d(Tx_0, T^2x_0) < d(x_0, Tx_0) = \phi(x_0)$$

elde edilir. Bu ise $x_0 = Tx_0$ olmasını gerektirir. Şimdi $x \in X$ noktası ve $(d(T^n x, x_0))$ dizisi verilsin. Şayet $T^n x \neq x_0$ ise,

$$d(T^{n+1}x, x_0) = d(T^{n+1}x, Tx_0) < d(T^n x, x_0)$$

olur. Bu nedenle $(d(T^n x, x_0))$ dizisi kesin azalandır. Sonuç olarak $n \rightarrow \infty$ için

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n x, x_0)$$

limiti vardır ve $r \geq 0$ dır. Ayrıca X kompakt olduğu için $(T^n x)$ dizisi yakınsak bir $(T^{n_k} x)$ alt dizisine sahiptir. $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k} x = z$ diyelim. $(T^n x)$ dizisi azalan olduğundan

$$r = d(z, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(T^{n_k} x, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(T^{n_k+1} x, x_0) = d(Tz, x_0)$$

olur. Eğer $z \neq x_0$ ise, bu durumda

$$d(Tz, x_0) = d(Tz, Tx_0) < d(z, x_0)$$

dir. Bu ise $(T^n x)$ in herhangi yakınsak alt dizisinin x_0 noktasına yakınsadığını gösterir.

O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x_0$ dır.

3. MATERİYAL ve YÖNTEM

3.1. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon metotları kullanılır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

3.1.1. Picard İterasyon Metodu

(X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n \geq 1, \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). $P(x_0, T)$ ile gösterilen Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

Tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşım için kullanılan iterasyonlardan biri de Picard iterasyonudur. Daraltan dönüşüm yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Örnek 3.1.1.1: $X = [0,1]$ olmak üzere her $x \in [0,1]$ için $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olsun. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için (3.1) Picard iterasyonu,

$$x_1 = Tx_0 = 1 - a$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2 x_0 = a$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = 1 - a$$

$\vdots$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \dots = T^n x_0$$

⋮

şeklinde olup bu da $(a, 1-a, a, 1-a, \dots)$ salınımlı dizisine karşılık gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla istenilen sabit noktayı bulmak için diğer iterasyon metodlarını göz önüne almak gerekir.

3.1.2. Krasnoselskij İterasyon Metodu

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T : N \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda Tx_n, \quad n \geq 0, \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır (Krasnoselskij 1955). (3.2) Krasnoselskij iterasyonu kısaca $K(x_0, \lambda, T)$ ile gösterilir. Ayrıca bu iterasyon, $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir.

3.1.3. Kirk İterasyon Metodu

X bir normlu uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 Tx_n + \alpha_2 T^2 x_n + \dots + \alpha_k T^k x_n \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $k \geq 1$ tamsayı ve $i = 0, 1, 2, \dots, k$ için $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$ dir.

(3.3) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu, $k = 1$ için Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk 1971).

3.1.4. Mann İterasyon Metodu

Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \quad n \geq 0, \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ dir (Mann 1953). Mann iterasyonu kısaca $M(x_0, \alpha_n, T)$ ile gösterilir.

(3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon, Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

Mann'ın bulmuş olduğu sonuçlar Franks ve Marzec (1971) tarafından, aynı şekilde Franks ve Marzec'in sonuçları da Rhoades (1974) tarafından genişletilmiştir. Yine Rhoades (1974) herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm için Mann iterasyonunun bu dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Örnek 3.1.4.1: $X = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kümesi üzerinde $T: X \rightarrow X$, $Tx = \frac{1}{x}$ olarak tanımlanırsa, Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktası olan $x = 1$ e yakınsar.

3.1.5. Ishikawa İterasyon Metodu

Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya kuvvetli yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır (Berinde 2006). X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ dir (Ishikawa 1974). Ishikawa iterasyonu kısaca $I(x_0, \alpha_n, \beta_n, T)$ ile gösterilir.

(3.5) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

3.1.6. Noor İterasyon Metodu

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dir (Noor 2000).

Noor, Hilbert uzaylardaki çeşitli eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini çalışmak için 3-adım (Noor) iterasyonunu tanıtmıştır.

Xu ve Noor, (3.6) iterasyonunun düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinde kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya yakınsaklığını çalışmışlardır (Xu and Noor 2002).

3.1.7. n -adım İterasyon (Multistep İteration) Metodu

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere n -adım iterasyonu $p \geq 2$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = (1 - \beta_n^i)x_n + \beta_n^i T z_n^{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, p-2, \\ z_n^{p-1} = (1 - \beta_n^{p-1})x_n + \beta_n^{p-1} T x_n, \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $1 \leq i \leq p-1$ için $\{\beta_n^i\} \in [0,1)$ dir (Rhoades and Şoltuz 2004).

Rhoades ve Şoltuz, 2003-2004 yıllarında dönüşümlerin çeşitli sınıfları için Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının, Mann iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir.

3.1.8. S-İterasyon Metodu

X bir lineer uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere S-iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0,1)$ dir (Agarwal-O'Regan-Sahu 2007). S-iterasyonu kısaca $S(x_n, \alpha_n, \beta_n, T)$ ile gösterilir.

S-iterasyon yöntemi Mann ve Ishakawa iterasyon yöntemlerinden bağımsızdır. Yani S-iterasyonu ile Mann veya Ishakawa iterasyonu birbirinden elde edilemez. Agarwal-O'Regan-Sahu, daraltan dönüşümler için S-iterasyon yönteminin yakınsama hızının Picard iterasyon yönteminin yakınsama hızına denk ve diğer sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızlarından daha hızlı olduğunu göstermişlerdir.

3.1.9. Modifiye Edilmiş S-İterasyon Metodu

X bir lineer uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ kefi bir nokta olmak üzere modifiye edilmiş S-iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T^n x_n + \alpha_n T^n y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0,1)$ dir (Agarwal-O'Regan-Sahu 2007). Modifiye edilmiş S-iterasyonu $S(x_n, \alpha_n, \beta_n, T^n)$ ile gösterilir.

Agarwal-O'Regan-Sahu, çeşitli dönüşümler için hem S-iterasyon hem de modifiye edilmiş S-iterasyon yönteminin, dönüşümün sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsamasını incelemişlerdir.

3.2. Hatalı İterasyon Yöntemleri

Hatalı iterasyon yöntemleri ilk olarak Liu (1995) tarafından çalışılmıştır. Liu'nun hatalı iterasyon yöntemleri aşağıda verilmiştir.

(i) X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere hatalı Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n + u_n, \quad n \geq 1, \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| < \infty$ dur.

(ii) X bir normlu uzay, K da X boş olmayan bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere hatalı Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n + u_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n + v_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty$ dur.

(3.11) de $\beta_n = v_n = 0$ olarak alınırsa hatalı Mann iterasyonu elde edilir.

Liu'nun verdiği hatalı iterasyon yöntemlerinin tamamen tatmin edici olup olmadığı tartışılmaktadır. Çünkü hataların oluşumu rastgele bir şekildedir.

Xu (1998), aşağıdaki iterasyon yöntemlerinin hata terimlerini ifade etmede, daha yeterli olduğunu göstermiştir.

3.2.1. Hatalı Mann İterasyon Metodu

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere hatalı Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + b_n T x_n + c_n u_n, \quad n \geq 1, \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{u_n\}$ dizisi K da sınırlı ve $\alpha_n + b_n + c_n = 1$ olmak üzere $\{\alpha_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in [0,1]$ dir.

3.2.2. Hatalı Ishikawa İterasyon Metodu

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $\{x_n\}$, K da bir dizi olsun. $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, hatalı Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + b_n T y_n + c_n u_n, \\ y_n = \alpha'_n x_n + b'_n T x_n + c'_n v_n, \end{cases} \quad n \geq 1, \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{u_n\}, \{v_n\}$ dizileri K da sınırlı ve $\alpha_n + b_n + c_n = \alpha'_n + b'_n + c'_n = 1$ olmak üzere $\{\alpha_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha'_n\}, \{b'_n\}, \{c'_n\} \in [0,1]$ dir.

(3.13) eşitliği ile verilen iterasyonda $b'_n = c'_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon hatalı Mann iterasyonuna indirgenir.

3.2.3. Hatalı Noor İterasyon Metodu

X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere hatalı Noor iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + \gamma_n T y_n + \delta_n u_n, \\ y_n = \alpha'_n x_n + \gamma'_n T z_n + \delta'_n v_n, \\ z_n = \alpha''_n x_n + \gamma''_n T x_n + \delta''_n \omega_n, \end{cases} \quad n \geq 1, \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{u_n\}, \{v_n\}$ ve $\{\omega_n\}$ dizileri K da sınırlı ve $\alpha_n + \gamma_n + \delta_n = \alpha'_n + \gamma'_n + \delta'_n = \alpha''_n + \gamma''_n + \delta''_n = 1$ olmak üzere $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\gamma'_n\}, \{\delta'_n\}, \{\alpha''_n\}, \{\gamma''_n\}, \{\delta''_n\} \in [0,1]$ dir.

(3.14) eşitsizliği ile verilen iterasyonda $\gamma''_n = \delta''_n = 0$ alınırsa Xu'nun hatalı Ishikawa iterasyonuna, $\gamma'_n = \delta'_n = 0$ ve $\gamma''_n = \delta''_n = 0$ alınırsa Xu'nun hatalı Mann iterasyonuna indirgenir.

3.3. Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler

Bu başlık altında asimptotik genişlemeyen dönüşümler kullanılarak yapılan bazı çalışmalara yer verilmiştir.

Goebel ve Kirk, düzgün konveks bir Banach uzayında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya sahip olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlamışlardır.

Teorem 3.3.1: X düzgün konveks bir Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi ve $T:K \rightarrow K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda T , K da bir sabit noktaya sahiptir (Goebel and Kirk 1972).

İspat: $y \in K$ ve $r > 0$ için y merkezli ve r yarıçaplı $B(y, r)$ yuvarını göz önüne alalım.

$$K \cap \left(\bigcap_{i=k}^{\infty} B(T^i y, r) \right) \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısının olduğu, bütün r sayılarından oluşan küme R_y olarak tanımlansın. şeklinde tanımlansın. Eğer d , K nın çapı yani $d = \text{diam}(K)$ ise $d \in R_y$ dir. Böylece $R_y \neq \emptyset$ dir. $r_0 = \inf\{r: r \in R_y\}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$K_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=k}^{\infty} B(T^i y, r_0 + \varepsilon) \right)$$

tanımlanabilir (Kirk 1969). O halde her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon \cap K$ kümesi boştan farklı ve konvektir. X uzayının yansılmalı olması

$$\cap_{\varepsilon>0} (\overline{K_\varepsilon} \cap K) \neq \emptyset$$

olmasını gerektirir. $x \in \cap_{\varepsilon>0} (\overline{K_\varepsilon} \cap K)$, $\eta > 0$ ve $n \geq n_0$ için

$$\|x - T^n y\| \leq r_0 + \eta$$

olacak şekilde bir n_0 tamsayısı vardır. Şimdi $x \in \cap_{\varepsilon>0} (\overline{K_\varepsilon} \cap K)$ elemanı için $\{T^n x\}$ dizisinin x noktasına kuvvetli yakınsamadığını kabul edelim. Bu durumda her $i = 1, 2, \dots$ için

$$\|T^{n_i} x - x\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\{T^n x\}$ in bir $\{T^{n_i} x\}$ alt dizisi vardır. T^n in Lipschitz sabiti k_n olsun. O halde $m > n$ için

$$\|T^n x - T^m x\| \leq k_n \|x - T^{m-n} x\|$$

dir.

$$\left(1 - \delta_x \left(\frac{\varepsilon}{r_0 + \alpha}\right)\right) (r_0 + \alpha) < r_0$$

eşitsizliğini sağlayan $r_0 > 0$ ve $\alpha > 0$ sayılarının olduğunu kabul edelim. $\|x - T^n x\| \geq \varepsilon$ ve $k_n \left(r_0 + \frac{\alpha}{2}\right) \leq r_0 + \alpha$ olacak şekilde bir n sayısı seçelim. Eğer $n_0 \geq n$ yeteri kadar büyükse bu durumda $m > n_0$ için

$$\|x - T^{m-n} y\| \leq r_0 + \frac{\alpha}{2}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|T^n x - T^m y\| \leq k_n \|x - T^{m-n} y\| \leq k_n \left(r_0 + \frac{\alpha}{2}\right) \leq r_0 + \alpha$$

ve

$$\|x - T^m y\| \leq r_0 + \alpha$$

olup, $m > n_0$ için X in düzgün konveksliğinden

$$\left\| \frac{1}{2}(x + T^n x) - T^m y \right\| \leq \left(1 - \delta_x \left(\frac{\varepsilon}{r_0 + \alpha} \right) \right) (r_0 + \alpha) < r_0$$

elde edilir. Bu ise r_0 ın tanımına terstir. Böylece $r_0 = 0$ veya $x = Tx$ sonucu elde edilir. Fakat $r_0 = 0$, $\{T^n y\}$ nin bir Cauchy dizisi olmasını gerektirir ve böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n y = x = Tx$ olur. Bu durumda $\cap_{\varepsilon > 0} (\overline{K_\varepsilon} \cap K)$, T nin bir sabit noktasını ihtiva eden tek nokta kümesidir.

Goebel ve Kirk, düzgün konveks bir Banach uzayında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının kümesinin kapalı ve konveks olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlamışlardır.

Teorem 3.3.2: X düzgün konveks bir Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı, kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $F(T)$ kümesi kapalı ve konvektir (Goebel and Kirk 1972).

İspat: T dönüşümü sürekli olduğundan $F(T)$ kümesi daima kapalıdır. $x, y \in F(T)$ olsun. $F(T)$ nin konveks olduğunu ispat etmek için $z = (x + y)/2 \in F(T)$ olduğunu göstermek gerekir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x - T^n z\| = \|T^n x - T^n z\| \leq k_n \|x - z\| = \frac{1}{2} k_n \|x - y\|,$$

$$\|y - T^n z\| = \|T^n y - T^n z\| \leq k_n \|y - z\| = \frac{1}{2} k_n \|x - y\|,$$

dir. X düzgün konveks olduğundan

$$\|z - T^n z\| \leq \frac{1}{2} \left[1 - \delta_x \left(\frac{2}{k_n} \right) \right] k_n \|x - y\| \leq \frac{1}{2} \left[1 - \delta_x \left(\frac{2}{k_n} \right) \right] k_n \text{diam}(K)$$

olur. Böylece $n \rightarrow \infty$ limit alınır, $T^n z \rightarrow z$ elde edilir. T dönüşümünün sürekliliğinden z , T nin bir sabit noktasıdır.

Schu (1991), Hilbert uzaylarında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için modifiye edilmiş Mann iterasyon şemasını teşkil etti ve aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 3.3.3: H bir Hilbert uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı konveks ve sınırlı bir alt kümesi, $T: K \rightarrow K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^2 - 1) < \infty$ olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, uygun a, b sabitleri için $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$ şartını sağlayan $[0,1]$ aralığında bir dizi olsun. Bu durumda herhangi bir $x_1 \in K$ için,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n x_n, \quad n \geq 1, \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, T nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

3.4. Kendi Üzerine Tanımlı Olmayan Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler

Kendi üzerine tanımlı olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşüm kavramı, asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin önemli bir genelleştirmesi olarak ilk defa Chidume, Ofoedu ve Zegeye tarafından ifade edilmiştir.

Kendi üzerine tanımlı olmayan bir dönüşüm için ele alınan iterasyon şeması iyi tanımlı olmayabilir. Bu iterasyon şemasını iyi tanımlı yapabilmek için bir çekmeye ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 3.4.1 (Çekme): E bir reel Banach uzayı ve K da E nin bir alt kümesi olsun. Her $x \in K$ için $Px = x$ olacak şekilde $P: E \rightarrow K$ sürekli dönüşümü varsa, K ya E nin bir çekilmesi (retract) denir. Eğer $P: E \rightarrow E$ dönüşümü $P^2 = P$ şartını sağlıyorsa P ye bir çekme (retraction) denir. P dönüşümü bir çekme ise o zaman P nin görüntü kümesindeki her y için $Py = y$ dir.

Tanım 3.4.2 (Sunny Genişlemeyen Çekme): E bir Banach uzayı, C ve D , E nin iki alt kümesi olsun. $\forall x \in C$ ve $t \geq 0$ için $P(Px - t(x - Px)) = Px$ ise $P: C \rightarrow D$

dönüşümüne sunny çekme denir. Sunny çekme aynı zamanda genişlemeyen dönüşüm ise sunny genişlemeyen çekme olarak adlandırılır.

Tanım 3.4.3: K , bir E reel normlu uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $P: E \rightarrow K$ dönüşümü E nin K üzerindeki bir genişlemeyen çekmesi olsun.

(i) Her $x, y \in K$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq k_n \|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \rightarrow 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, $T: K \rightarrow E$ dönüşümüne asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir.

(ii) Her $x, y \in K$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq L \|x - y\|$$

olacak şekilde bir $L > 0$ reel sayısı varsa, $T: K \rightarrow E$ dönüşümüne düzgün L - Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 3.4.4 ((A) Şartı): $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\|x - Tx\| \geq f(d(x, F(T)))$$

ise, T ye (A) şartını sağlıyor denir (Senter and Dotson 1974). Burada $d(x, F(T)) = \inf_{y \in F(T)} d(x, y)$ dir. Tan ve Xu ya göre (A) şartı, K nin kompaktlığından daha zayıftır (Tan and Xu 1993).

Khan ve Fukhar-ud-din, $T_1, T_2 : K \rightarrow E$ asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için bu (A) şartını aşağıdaki şekilde geliştirmiştir: K, E nin boştan farklı bir altkümesi ve $T_1, T_2 : K \rightarrow E$ dönüşümleri verilsin. Eğer her $t > 0$ için $f(t) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{2}(\|x - T_1x\| + \|x - T_2x\|) \geq f(d(x, F(T)))$$

ise, $T_1, T_2 : K \rightarrow E$ dönüşümleri (A') şartını sağlıyor denir (Khan and Fukhar-ud-din 2005). Ayrıca $T_1 = T_2 = T$ olarak alınırsa (A) şartının (A') nün özel bir hali olduğu görülür.

Chidume *et al.* (2003), E düzgün konveks bir Banach uzay, K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow E$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki iterasyon yöntemini çalışmışlardır:

$$x_1 \in K, \quad x_{n+1} = P((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(PT)^{n-1}x_n) \quad (3.16)$$

Burada $\{\alpha_n\} \in (0,1)$ dir.

Bu çalışmadan sonra, pek çok iterasyon şeması yazılmış ve bu iterasyon şemalarının dönüşümlerin ortak sabit noktalarına zayıf ve kuvvetli yakınsamaları incelenmiştir. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

Wang (2006), E düzgün konveks bir Banach uzay, K da E nin P çekmesine sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2: K \rightarrow E$ kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olmak üzere aşağıdaki iterasyon yöntemini çalışmıştır:

$$\begin{cases} x_{n+1} = P((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T_1(PT_1)^{n-1}y_n), \\ y_n = P((1 - \beta_n)x_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1)$ dir.

Zhou *et al.* (2007), E düzgün konveks bir reel Banach uzay, K da E nin bir P çekmesine sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2: K \rightarrow E$ kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olmak üzere aşağıdaki iterasyon yöntemini çalışmışlardır:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n (PT_1)^n x_n + \gamma_n (PT_2)^n x_n, \quad n \geq 1.$$

Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$, $a \in (0,1)$ için $[a, 1 - a]$ aralığında $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ şartını sağlayan reel dizilerdir.

Thianwan (2009), E bir normlu uzay, K da E nin bir P genişlemeyen çekmesine sahip boştan farklı, konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2: K \rightarrow E$ kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olmak üzere (projeksiyon tip Ishakawa iterasyonu olarak adlandırılır) aşağıdaki iterasyon yöntemini çalışmıştır:

$$\begin{cases} x_{n+1} = P((1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T_1(P T_1)^{n-1} y_n), \\ y_n = P((1 - \beta_n)x_n + \beta_n T_2(P T_2)^{n-1} x_n), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1)$ dir.

3.2. bölümde bahsedilen hatalı iterasyon yöntemlerinde T dönüşümü, E normlu uzayının boştan farklı K alt kümesinde kendi üzerine bir dönüşümdür. Wang *et al.* (2009), kendi üzerine olmayan ve asimptotik quasi-genişlemeyen iki dönüşüm için hatalı iterasyon yöntemini aşağıdaki gibi tanıtmışlardır:

E bir reel normlu uzay, K da E 'nin bir P genişlemeyen çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T_1, T_2: K \rightarrow E$ kendi üzerine olmayan ve asimptotik quasi-genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere $\{x_n\}$ iterasyon yöntemi,

$$\begin{cases} x_{n+1} = P(\alpha_n y_n + \beta_n T_1(P T_1)^{n-1} y_n + \gamma_n u_n), \\ y_n = P(\alpha'_n x_n + \beta'_n T_2(P T_2)^{n-1} x_n + \gamma'_n v_n), \quad n \geq 1, \end{cases} \quad (3.19)$$

şeklindedir. Burada $\{u_n\}, \{v_n\}$ dizileri K da sınırlı ve $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n = 1$ olmak üzere $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\} \in [0,1]$ dir.

(3.19) eşitsizliği ile verilen iterasyonda T_1, T_2 asimptotik genişlemeyen ve $\gamma_n = \gamma'_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Thianwan'ın (3.18) iterasyonuna indirgenir.

Thianwan (2008), E düzgün konveks bir Banach uzay, K da E 'nin bir P genişlemeyen çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T: K \rightarrow E$ kendi üzerine olmayan ve genişlemeyen bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere aşağıdaki iterasyon yöntemini çalışmıştır:

$$\begin{cases} x_{n+1} = P((1 - \alpha_n - \mu_n)x_n + \alpha_n TP((1 - \beta_n)y_n + \beta_n Ty_n) + \mu_n u_n), \\ y_n = P(1 - b_n - \delta_n)x_n + b_n TP((1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n) + \delta_n v_n), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (3.20)$$

Burada $\{u_n\}, \{v_n\}$ dizileri K da sınırlı ve $\{\alpha_n\}, \{b_n\}, \{\mu_n\}, \{\delta_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dir.

Kızıltunç vd (2010), Thianwan'ın (3.20) iterasyon yöntemini kendi üzerine olmayan ve genişlemeyen iki dönüşüm için aşağıdaki gibi genelleştirmişlerdir.

E bir normlu uzay, K da E 'nin bir P genişlemeyen çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T, S: K \rightarrow E$ kendi üzerine olmayan ve genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere $\{x_n\}$ iterasyon yöntemi,

$$\begin{cases} x_{n+1} = P((1 - \alpha_n - \mu_n)x_n + \alpha_n SP((1 - \beta_n)y_n + \beta_n Sy_n) + \mu_n u_n), \\ y_n = P(1 - b_n - \delta_n)x_n + b_n TP((1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n) + \delta_n v_n), \quad n \geq 1, \end{cases} \quad (3.21)$$

şeklindedir. Burada $\{u_n\}, \{v_n\}$ dizileri K da sınırlı ve $\{\alpha_n\}, \{b_n\}, \{\mu_n\}, \{\delta_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dir.

(3.21) iterasyonu $S = T$ için Thianwan'ın (3.20) iterasyon yöntemine indirgenir. Ayrıca (3.21) de $\beta_n = \gamma_n = 0$, $S = T$ ve T kendi üzerine genişlemeyen dönüşüm olarak alınırsa, (3.21) iterasyonu Xu'nun (3.13) iterasyon yöntemine indirgenir.

Yine Özdemir vd (2010), Thianwan'ın (3.20) iterasyon yöntemini kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için aşağıdaki gibi genelleştirmişlerdir.

E bir normlu uzay, K da E 'nin bir P genişlemeyen çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T_1, T_2: K \rightarrow E$ kendi üzerine olmayan ve asimptotik

genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere $\{x_n\}$ iterasyon yöntemi,

$$\begin{cases} x_{n+1} = P((1 - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n T_1(P T_1)^{n-1} P((1 - \beta_n)y_n + \beta_n T_1(P T_1)^{n-1} y_n) + \gamma_n u_n), \\ y_n = P(1 - \alpha'_n - \gamma'_n)x_n + \alpha'_n T_2(P T_2)^{n-1} P((1 - \beta'_n)x_n + \beta'_n T_2(P T_2)^{n-1} x_n) + \gamma'_n v_n, \end{cases}$$

şeklindeir. Burada $\{u_n\}, \{v_n\}$ dizileri K da sınırlı ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\} \in [0,1]$ dir.

Şimdi, Araştırma Bulguları kısmında ispatladığımız teoremlerde kullanacağımız lemmalar aşağıda verilecektir.

Lemma 3.4.5: $\{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{\delta_n\}$

$$a_{n+1} \leq (1 + \delta_n)a_n + b_n, \quad n \geq 1$$

eşitsizliği sağlayan ve negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ limiti vardır (Tan and Xu 1993).

İspat: $m, n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} a_{n+m+1} &\leq (1 + \delta_{n+m})a_{n+m} + b_{n+m} \\ &\leq (1 + \delta_{n+m})(a_{n+m} + b_{n+m}) \\ &\leq (1 + \delta_{n+m})((1 + \delta_{n+m-1})(a_{n+m-1} + b_{n+m-1}) + b_{n+m}) \\ &\vdots \\ &\leq \left(\prod_{i=n}^{n+m} (1 + \delta_i) \right) \left(a_n + \sum_{i=n}^{n+m} b_i \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \left(\prod_{i=n}^{\infty} (1 + \delta_i) \right) \left(a_n + \sum_{i=n}^{\infty} b_i \right) \quad (3.22)$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n}^{\infty} (1 + \delta_i) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{\infty} b_i = 0$ elde edilir. (3.22) den $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ yazılabilir. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ limiti vardır.

Lemma 3.4.6: E düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve $n \geq 1$ için $0 \leq p \leq t_n \leq q < 1$ olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, E de iki dizi olmak üzere uygun bir $r \geq 0$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq s, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq s, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n x_n + (1 - t_n) y_n\| = s$$

şartları sağlansın. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ dır (Schu 1991).

İspat: $s = 0$ için ispat açıktır. $s > 0$ olsun. Kabul edelim ki $\{x_n - y_n\}$ dizisi sıfıra yakınsasın. Bu durumda $\{x_n - y_n\}$ dizisinin $\inf_i \|x_{n_i} - y_{n_i}\| > 0$ olacak şekilde $\{x_{n_i} - y_{n_i}\}$ alt dizisi vardır. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq s$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq s$ olduğundan $\|x_{n_i}\| \leq r$, $\|y_{n_i}\| \leq r$ olacak şekilde $\{n_i\}$ alt dizisi için $r \in (s, s + 1)$ olduğunu kabul edebiliriz. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$2p(1 - q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) < 1 \text{ ve } \|x_{n_i} - y_{n_i}\| \geq \varepsilon > 0$$

olacak şekilde $r \geq \varepsilon > 0$ seçebiliriz. E düzgün konveks olduğundan her $t \in (0, 1)$, $r > 0$, $x, y \in X$, $\|x\| \leq r$ ve $\|y\| \leq r$ için

$$\|tx + (1 - t)y\| \leq r \left[1 - 2\min\{t, 1 - t\}\delta_X\left(\frac{\|x - y\|}{r}\right) \right] \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) den

$$\begin{aligned} \|t_{n_i} x_{n_i} + (1 - t_{n_i}) y_{n_i}\| &\leq r \left[1 - 2t_{n_i}(1 - t_{n_i})\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right] \\ &\leq r \left[1 - 2p(1 - q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right] < s \end{aligned}$$

olur. Bu durum hipotezle çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.4.7: E düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da E nin boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $T : K \rightarrow E$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ise, $(I - T)$ sıfırda demicloseddir (Chidume *et al.* 2003).

İspat: $\{x_n\}$, K de bir dizi, $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightharpoonup x^* \in K$ ve $(I - T)x_n \rightarrow 0$ olsun. $(I - T)x^* = 0$ olduğunu ispatlayacağız. $\{x_n\}$ dizisi x^* a zayıf yakınsak olduğundan sınırlıdır.

Dolayısıyla $\{x_n\} \subset C = K \cap \bar{B}_r(0)$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. Böylece C , K da boştan farklı, kapalı, konveks ve sınırlı bir kümedir. Şimdi iddiamız $n \rightarrow \infty$ için

$$T(PT)^{n-1}x^* \rightarrow x^* \quad (3.24)$$

dir. Buna göre $\{x_n\}$ dizisi x^* a zayıf yakınsadığından Mazur'un teoreminden her $n > 1$ için $t_i^{(n)} \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} = 1$ olacak şekilde

$$y_n = \sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} x_{i+n}$$

konveks kombinasyonu vardır ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\|y_n - x^*\| \rightarrow 0 \quad (3.25)$$

dır (Wojtaszczyk 1991). Bununla birlikte $\{(I - T)x_n\}$ dizisi 0 a kuvvetli yakınsak olduğundan her $n \geq N$, $j \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\|(I - T)x_n\| \leq \frac{1}{(1 + k_1 + k_2 + \dots + k_{j-1})} < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon, j) > 0$ sayısı vardır. Tanım 3.4.3 den, P genişlemeyen bir dönüşüm olup, her $n \geq N$ için

$$\begin{aligned} \|(I - T(PT)^{j-1})x_n\| &\leq \|(I - T)x_n\| + \|(T - T(PT))x_n\| \\ &\quad + \dots + \|(T(PT)^{j-2} - T(PT)^{j-1})x_n\| \\ &\leq (1 + k_1 + k_2 + \dots + k_{j-1})\|x_n - Tx_n\| < \varepsilon \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. $T : K \rightarrow E$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan $T : C \rightarrow E$ bir asimptotik genişlemeyen dönüşümdür. Dolayısıyla her $j \geq 1$ için $k_j \geq 1$ Lipschitz sabitine sahip $T(PT)^{j-1} : C \rightarrow E$ dönüşümü bir Lipschitzian dönüşümdür. Ayrıca,

$$\|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\| \leq \left\| T(PT)^{j-1}y_n - \sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} T(PT)^{j-1}x_{i+n} \right\|$$

$$+ \sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} \|T(PT)^{j-1}x_{i+n} - x_{i+n}\| \quad (3.27)$$

dir. (3.26) eşitsizliğini kullanarak her $n \geq N$ için

$$\sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} \|T(PT)^{j-1}x_{i+n} - x_{i+n}\| < \varepsilon \quad (3.28)$$

yazılabilir. (3.26) eşitsizliği ve X in düzgün konveksliğinden, her $n \geq N$ için

$$\left\| T(PT)^{j-1}y_n - \sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} T(PT)^{j-1}x_{i+n} \right\| \leq k_j \phi^{-1}(2\varepsilon + 2r(1 - k_j^{-1})k_j) \quad (3.29)$$

olacak şekilde kesin artan sürekli ve konveks bir $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\phi(0) = 0$ fonksiyonu vardır (Chang *et al.* 2001). (3.27) eşitsizliğinde (3.28) ve (3.29) kullanılırsa

$$\|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\| \leq k_j \phi^{-1}(2\varepsilon + 2r(1 - k_j^{-1})k_j) + \varepsilon$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafının limsup u alınır,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\| \leq k_j \phi^{-1}(2r(1 - k_j^{-1})k_j) \quad (3.30)$$

elde edilir. Diğer taraftan herhangi bir $j \geq 1$ için (3.25) den

$$\begin{aligned} \|T(PT)^{j-1}x^* - x^*\| &\leq \|T(PT)^{j-1}x^* - T(PT)^{j-1}y_n\| + \|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\| \\ &\quad + \|y_n - x^*\| \\ &\leq (k_j + 1)\|y_n - x^*\| + \|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\| \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.30) eşitsizliği kullanılarak üstteki eşitsizliğin her iki tarafının limsup u alınır,

$$\|T(PT)^{j-1}x^* - x^*\| \leq k_j \phi^{-1}(2r(1 - k_j^{-1})k_j)$$

elde edilir. Yine yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının limsup u alınır,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|T(PT)^{j-1}x^* - x^*\| \leq \phi^{-1}(0) = 0$$

olur. Bu da $j \rightarrow \infty$ iken $\|T(PT)^{j-1}x^* - x^*\| \rightarrow 0$ olmasını gerektirir. Böylece (3.24) de ki iddiamız sağlanmış olur. TP nin sürekliliğinden

$$\lim_{j \rightarrow \infty} TP(T(PT)^{j-1}x^*) = TPx^* = Tx^* = x^*$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.4.8: E smooth bir reel Banach uzayı, K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow E$ zayıf inward şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $F(PT) = F(T)$ dir (Chidume 2009).

İspat: $F(T) \subseteq F(PT)$ olduğu açıkca görülmektedir. $F(PT) \subseteq F(T)$ olduğunu gösterelim. $F(PT) \not\subseteq F(T)$ olduğunu farzedelim. O halde $x \notin F(T)$ olacak şekilde $x \in F(PT)$ vardır. Fakat T zayıf inward olduğundan dolayı bir $\lambda > 1$ ve $u \neq x$ için $Tx = x + \lambda(u - x)$ olacak şekilde $u \in K$ vardır. $u = x$ ise $Tx = x$ olur. $x \notin F(T)$ olduğu için bu bir çelişkidir. P sunny genişlemeyen olduğundan dolayı her $t \geq 0$ için $P[PTx + t(Tx - PTx)] = x$ dir. Fakat $PTx = x$ olduğundan her $t \geq 0$ için $P[tTx + (1 - t)x] = x$ olur. T zayıf inward ve $u \in K$ için $Pu = u$ olduğundan $u := t_0Tx + (1 - t_0)x$ olacak şekilde $t_0 \in (0,1)$ vardır. Bu ise $u = Pu = x$ olmasını gerektirir. $x \neq u$ olduğundan dolayı bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $F(PT) \subseteq F(T)$ olması gerekir. Bu durumda $F(PT) = F(T)$ dir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilecektir.

Kendi üzerine tanımlı olmayan asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için yeni bir iterasyon şeması teşkil edilmiştir. İlk olarak bir reel Banach uzayında ve daha sonra smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzayında bu iterasyon şeması için kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri verilmiştir.

$T: K \rightarrow E$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve $P: E \rightarrow K$ genişlemeyen bir çekme ise $PT: K \rightarrow K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür. Gerçekten, $\forall x, y \in K$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|(PT)^n x - (PT)^n y\| &= \|PT(PT)^{n-1} x - PT(PT)^{n-1} y\| \\ &\leq \|T(PT)^{n-1} x - T(PT)^{n-1} y\| \\ &\leq k_n \|x - y\| \end{aligned}$$

dir.

E bir reel normlu lineer uzay ve K da E nin P çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P ye göre kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\}, \{\alpha''_n\}, \{\beta''_n\}, \{\gamma''_n\}$ dizileri $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n = \alpha''_n + \beta''_n + \gamma''_n = 1$ şartını sağlayan $[0,1]$ aralığında reel diziler ve $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ K da sınırlı diziler olsun. $\{x_n\}$ iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \alpha_n (PT_1)^n y_n + \beta_n (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n, \\ y_n &= \alpha'_n (PT_1)^n z_n + \beta'_n (PT_2)^n z_n + \gamma'_n v_n, \\ z_n &= \alpha''_n x_n + \beta''_n (PT_1)^n x_n + \gamma''_n w_n, \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu şema kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için yeni bir iterasyon yöntemidir.

Sonuç 4.1: (i) (4.1) iterasyon yöntemimiz, $T_1 = I$, $T_2 = T$ ve $\beta'_n = \gamma_n = \gamma'_n = \gamma''_n = 0$ olması durumunda modifiye edilmiş Mann iterasyon yöntemine indirgenir.

(ii) Wang'ın (3.17) iterasyon yöntemi, Thianwan'ın (3.18) iterasyon yöntemi ve (4.1) iterasyon yöntemimiz birbirinden bağımsızdır. Yani hiçbirini diğerine indirgenemez.

4.1. Reel Banach Uzaylarda Yakınsama Teoremleri

Kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremlerinden önce bu teoremlerin ispatında kullanacağımız bazı lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.1.1 : E bir reel normlu lineer uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre iki asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma''_n < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise, her $p \in F$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$$

limiti vardır.

İspat: $p \in F$ ve $k_n = \max\{k_n^{(1)}, k_n^{(2)}\}$ olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ olduğundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$ dur. $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizileri K da sınırlı diziler olduğundan

$$r = \max\left\{\sup_{n \geq 1} \|u_n - p\|, \sup_{n \geq 1} \|v_n - p\|, \sup_{n \geq 1} \|w_n - p\|\right\}$$

olacak şekilde $r > 0$ sayısı vardır.

(4.1) den

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \|\alpha_n'' x_n + \beta_n'' (PT_1)^n x_n + \gamma_n'' w_n - p\| \\
&= \|\alpha_n'' x_n + \beta_n'' (PT_1)^n x_n + \gamma_n'' w_n - (\alpha_n'' + \beta_n'' + \gamma_n'') p\| \\
&\leq \alpha_n'' \|x_n - p\| + \beta_n'' \|(PT_1)^n x_n - p\| + \gamma_n'' \|w_n - p\| \\
&\leq \alpha_n'' \|x_n - p\| + \beta_n'' k_n \|x_n - p\| + \gamma_n'' \|w_n - p\| \\
&= (\alpha_n'' + \beta_n'' k_n) \|x_n - p\| + \gamma_n'' \|w_n - p\| \\
&\leq (\alpha_n'' + \beta_n'') k_n \|x_n - p\| + \gamma_n'' \|w_n - p\| \\
&\leq (\alpha_n'' + \beta_n'') k_n \|x_n - p\| + \gamma_n'' r \\
&\leq k_n \|x_n - p\| + \gamma_n'' r
\end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|\alpha_n' (PT_1)^n z_n + \beta_n' (PT_2)^n z_n + \gamma_n' v_n - p\| \\
&= \|\alpha_n' (PT_1)^n z_n + \beta_n' (PT_2)^n z_n + \gamma_n' v_n - (\alpha_n' + \beta_n' + \gamma_n') p\| \\
&\leq \alpha_n' \|(PT_1)^n z_n - p\| + \beta_n' \|(PT_2)^n z_n - p\| + \gamma_n' \|v_n - p\| \\
&\leq \alpha_n' k_n \|z_n - p\| + \beta_n' k_n \|z_n - p\| + \gamma_n' \|v_n - p\| \\
&= (\alpha_n' + \beta_n') k_n \|z_n - p\| + \gamma_n' r \\
&\leq k_n \|z_n - p\| + \gamma_n' r \\
&\leq k_n (k_n \|x_n - p\| + \gamma_n'' r) + \gamma_n' r \\
&= k_n^2 \|x_n - p\| + k_n \gamma_n'' r + \gamma_n' r
\end{aligned} \tag{4.3}$$

bulunur. Ayrıca yine (4.1) ve (4.3) den

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n (PT_1)^n y_n + \beta_n (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n - p\| \\
&= \|\alpha_n (PT_1)^n y_n + \beta_n (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) p\| \\
&\leq \alpha_n \|(PT_1)^n y_n - p\| + \beta_n \|(PT_2)^n y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - p\| \\
&\leq \alpha_n k_n \|y_n - p\| + \beta_n k_n \|y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - p\| \\
&= (\alpha_n + \beta_n) k_n \|y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - p\| \\
&\leq (\alpha_n + \beta_n) k_n (k_n^2 \|x_n - p\| + k_n \gamma_n'' r + \gamma_n' r) + \gamma_n r \\
&= (\alpha_n + \beta_n) k_n^3 \|x_n - p\| + ((\alpha_n + \beta_n) k_n^2 \gamma_n'' + (\alpha_n + \beta_n) k_n \gamma_n' + \gamma_n) r \\
&\leq k_n^3 \|x_n - p\| + d_n \\
&= (1 + (k_n^3 - 1)) \|x_n - p\| + d_n
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Burada $d_n = ((\alpha_n + \beta_n)k_n^2\gamma_n'' + (\alpha_n + \beta_n)k_n\gamma_n' + \gamma_n)r$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n'' < \infty$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ olur. Yine $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^3 - 1) < \infty$ olur. Dolayısıyla (4.4) ve Lemma 3.4.5 den her $p \in F$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.1.2: E bir reel normlu lineer uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre iki asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n'' < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise, her $p \in F$ ve bir $Q > 0$ için

$$\|x_{n+m} - p\| \leq Q \left(\|x_n - p\| + \sum_{j=n}^{\infty} d_j \right) \quad (4.5)$$

dir. Burada $d_j = ((\alpha_n + \beta_n)k_n^2\gamma_n'' + (\alpha_n + \beta_n)k_n\gamma_n' + \gamma_n)r$ şeklindedir.

İspat: Lemma 4.1.1 de ispatlandığı gibi

$$\|x_{n+1} - p\| \leq k_n^3 \|x_n - p\| + d_n$$

dir. Burada $d_n = ((\alpha_n + \beta_n)k_n^2\gamma_n'' + (\alpha_n + \beta_n)k_n\gamma_n' + \gamma_n)r$ dir. Her $x \geq 0$ için $1 + x \leq e^x$ olduğu bilinmektedir. Yukarıdaki eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - p\| &\leq (1 + (k_{n+m-1}^3 - 1))\|x_{n+m-1} - p\| + d_{n+m-1} \\ &\leq e^{k_{n+m-1}^3 - 1} \|x_{n+m-1} - p\| + d_{n+m-1} \\ &\leq e^{k_{n+m-1}^3 - 1} [(1 + (k_{n+m-2}^3 - 1))\|x_{n+m-2} - p\| + d_{n+m-2}] + d_{n+m-1} \\ &\leq e^{k_{n+m-1}^3 + k_{n+m-2}^3 - 2} \|x_{n+m-2} - p\| + e^{k_{n+m-1}^3 - 1} [d_{n+m-2} + d_{n+m-1}] \\ &\vdots \\ &\leq e^{\sum_{j=n}^{n+m-1} (k_j^3 - 1)} \|x_n - p\| + e^{\sum_{j=n}^{n+m-1} (k_j^3 - 1)} \sum_{j=n}^{n+m-1} d_j \\ &\leq Q [\|x_n - p\| + \sum_{j=n}^{n+m-1} d_j], \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Q = e^{\sum_{j=n}^{n+m-1} (k_j^3 - 1)}$ dir. Yani her $m, n \geq 1$ ve her $p \in F$ için

$$\|x_{n+m} - p\| \leq Q \left(\|x_n - p\| + \sum_{j=n}^{\infty} d_j \right)$$

dir.

Teorem 4.1.3: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre iki asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma''_n < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. $\{x_n\}$ iterasyon şemasının T_1 ve T_2 nin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $d(x_n, F) = \inf\{\|x - p\|: p \in F\}$ olmak üzere $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik şartı açıktır. Bu yüzden sadece yeterlilik şartını ispatlayacağız. $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olduğunu fazedelim. (4.4) den

$$d(x_{n+1}, F) \leq k_n^3 \|x_n - p\| + d_n$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$ olduğu için Lemma 3.4.5 ten $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F)$ limiti vardır. $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ hipotezinden dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olmalıdır. Şimdi $\{x_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ olduğundan dolayı her $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, F) < \frac{\varepsilon}{4Q} \text{ ve } \sum_{j=n_0}^{\infty} d_j < \frac{\varepsilon}{6Q}$$

olacak şekilde bir n_0 sabiti vardır. Özel olarak $d(x_{n_0}, F) < \frac{\varepsilon}{4Q}$ dir. Yani $\inf\{\|x_{n_0} - p\|: p \in F\} < \frac{\varepsilon}{4Q}$ dir. O halde

$$\|x_{n_0} - p'\| < \frac{\varepsilon}{3Q}$$

olacak şekilde $p' \in F$ vardır. $n \geq n_0$ için Lemma 4.1.2 deki (4.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - p'\| + \|x_n - p'\| \\
&\leq 2Q \left(\|x_{n_0} - p'\| + \sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} d_j \right) \\
&\leq 2Q \left(\frac{\varepsilon}{3Q} + \frac{\varepsilon}{6Q} \right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$, K kümesinde bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden $\{x_n\}$ dizisi K da bir noktaya yakınsar. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olması $d(q, F) = 0$ olmasını gerektirir. Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının kümesi kapalı olduğundan F kapalıdır. O halde, $q \in F$ dir.

4.2. Düzgün Konveks ve Smooth Banach Uzaylarda Yakınsama Teoremleri

Bu bölümde düzgün konveks reel ve smooth Banach uzaylarda (4.1) iterasyon yönteminin T_1 ve T_2 , P çekmesine göre kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsaması verildi.

Lemma 4.2.1: E düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre iki asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\alpha''_n\}$ dizileri bir $a \in (0, 1)$ için $[a, 1 - a]$ aralığında ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma''_n < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_1)x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_2)x_n\| = 0$$

dır.

İspat: Herhangi bir $p \in F$ için Lemma 4.1.1 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır. $c \geq 0$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c$ olsun. Böylece $\{x_n\}$, (4.3) den $\{y_n\}$ ve (4.2) den $\{z_n\}$ dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla $\{(PT_1)^n x_n\}$, $\{(PT_1)^n y_n\}$, $\{(PT_1)^n z_n\}$, $\{(PT_2)^n y_n\}$ ve $\{(PT_2)^n z_n\}$ sınırlıdır. $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizileri K da sınırlı diziler olduğundan

$$M = \max \left\{ \sup_{n \geq 1} \|u_n - x_n\|, \sup_{n \geq 1} \|v_n - x_n\|, \sup_{n \geq 1} \|w_n - x_n\|, \sup_{n \geq 1} \|u_n - (PT_2)^n y_n\|, \sup_{n \geq 1} \|v_n - (PT_2)^n z_n\|, \sup_{n \geq 1} \|w_n - (PT_1)^n x_n\| \right\}$$

olacak şekilde $M > 0$ vardır. (4.3) eşitsizliğinden

$$\|y_n - p\| \leq k_n^2 \|x_n - p\| + k_n \gamma_n'' + \gamma_n' r$$

olduğu bilinmektedir. Buradan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c \quad (4.6)$$

elde edilir. Her $n \geq 1$ için $\|(PT_1)^n y_n - p\| \leq k_n \|y_n - p\|$ ve $\|(PT_2)^n y_n - p\| \leq k_n \|y_n - p\|$ dir. Bu eşitsizliklerin her iki tarafının limsup u alınırsa sırasıyla $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(PT_1)^n y_n - p\| \leq c$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(PT_2)^n y_n - p\| \leq c$ eşitsizlikleri elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} \|(PT_1)^n y_n - p + \gamma_n(u_n - (PT_2)^n y_n)\| &\leq \|(PT_1)^n y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - (PT_2)^n y_n\| \\ &\leq k_n \|y_n - p\| + \gamma_n M \end{aligned}$$

eşitsizliğini ele alalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$ olduğundan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(PT_1)^n y_n - p + \gamma_n(u_n - (PT_2)^n y_n)\| \leq c \quad (4.7)$$

elde edilir. Yine

$$\begin{aligned} \|(PT_2)^n y_n - p + \gamma_n(u_n - (PT_2)^n y_n)\| &\leq \|(PT_2)^n y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - (PT_2)^n y_n\| \\ &\leq k_n \|y_n - p\| + \gamma_n M \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(PT_2)^n y_n - p + \gamma_n(u_n - (PT_2)^n y_n)\| \leq c \quad (4.8)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n (PT_1)^n y_n + \beta_n (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n - p\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n (PT_1)^n y_n + (1 - \alpha_n - \gamma_n) (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n - (1 - \alpha_n)p - \alpha_n p\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha_n (PT_1)^n y_n + (1 - \alpha_n) (PT_2)^n y_n - \gamma_n (PT_2)^n y_n \\ &+ \gamma_n u_n - (1 - \alpha_n)p - \alpha_n p \end{aligned} \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha_n (PT_1)^n y_n - \alpha_n p + \alpha_n \gamma_n u_n - \alpha_n \gamma_n (PT_2)^n y_n \\ &+ (1 - \alpha_n) (PT_2)^n y_n - (1 - \alpha_n)p - \gamma_n (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n \\ &- \alpha_n \gamma_n u_n + \alpha_n \gamma_n (PT_2)^n y_n \end{aligned} \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha_n [(PT_1)^n y_n - p + \gamma_n (u_n - (PT_2)^n y_n)] \\ &+ (1 - \alpha_n) [(PT_2)^n y_n - p + \gamma_n (u_n - (PT_2)^n y_n)] \end{aligned} \right\| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\begin{aligned} &\alpha_n \left\| \limsup_{n \rightarrow \infty} ((PT_1)^n y_n - p + \gamma_n (u_n - (PT_2)^n y_n)) \right\| \\ &+ (1 - \alpha_n) \left\| \limsup_{n \rightarrow \infty} ((PT_2)^n y_n - p + \gamma_n (u_n - (PT_2)^n y_n)) \right\| \end{aligned} \right] \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha_n c + (1 - \alpha_n)c] \\
&= c
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha_n [(PT_1)^n y_n - p + \gamma_n (u_n - (PT_2)^n y_n)] \\ &+ (1 - \alpha_n) [(PT_2)^n y_n - p + \gamma_n (u_n - (PT_2)^n y_n)] \end{aligned} \right\| = c \quad (4.9)$$

olur. (4.7), (4.8), (4.9) ve Lemma 3.4.6 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(PT_1)^n y_n - (PT_2)^n y_n\| = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n (PT_1)^n y_n + (1 - \alpha_n - \gamma_n) (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n - p\| \\
&\leq \|\alpha_n (PT_1)^n y_n + (PT_2)^n y_n - \alpha_n (PT_2)^n y_n - \gamma_n (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n - p\| \\
&\leq \alpha_n \|(PT_1)^n y_n - (PT_2)^n y_n\| + \|(PT_2)^n y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - (PT_2)^n y_n\| \\
&\leq k_n \|y_n - p\| + \gamma_n M
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlikten

$$c \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\|$$

elde edilir. (4.6) ve yukarıdaki eşitsizlikten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| = c \quad (4.11)$$

bulunur. (4.2) eşitsizliğinden

$$\|z_n - p\| \leq k_n \|x_n - p\| + \gamma_n'' r$$

olduğu bilinmektedir. Buradan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.3), (4.11) ve (4.12) den

$$c = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \leq c$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| = c$$

dir. Her $n \geq 1$ için $\|(PT_1)^n z_n - p\| \leq k_n \|z_n - p\|$ ve $\|(PT_2)^n z_n - p\| \leq k_n \|z_n - p\|$ dir. Bu eşitsizliklerin her iki tarafının limsup u alınırsa sırasıyla $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(PT_1)^n z_n - p\| \leq c$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(PT_2)^n z_n - p\| \leq c$ eşitsizlikleri elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} \|(PT_1)^n z_n - p + \gamma_n'(v_n - (PT_2)^n z_n)\| &\leq \|(PT_1)^n z_n - p\| + \gamma_n' \|v_n - (PT_2)^n z_n\| \\ &\leq k_n \|z_n - p\| + \gamma_n' M \end{aligned}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Bu eşitsizlikten $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n' = 0$ olduğundan dolayı

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(PT_1)^n z_n - p + \gamma_n'(v_n - (PT_2)^n z_n)\| \leq c \quad (4.13)$$

yazılır. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \|(PT_2)^n z_n - p + \gamma_n'(v_n - (PT_2)^n z_n)\| &\leq \|(PT_2)^n z_n - p\| + \gamma_n' \|v_n - (PT_2)^n z_n\| \\ &\leq k_n \|z_n - p\| + \gamma_n' M \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(PT_2)^n z_n - p + \gamma_n'(v_n - (PT_2)^n z_n)\| \leq c \quad (4.14)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha'_n (PT_1)^n z_n + \beta'_n (PT_2)^n z_n + \gamma'_n v_n - p\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha'_n (PT_1)^n z_n + (1 - \alpha'_n - \gamma'_n) (PT_2)^n z_n + \gamma'_n v_n - (1 - \alpha'_n) p - \alpha'_n p\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha'_n (PT_1)^n z_n + (1 - \alpha'_n) (PT_2)^n z_n - \gamma'_n (PT_2)^n z_n \\ &+ \gamma'_n v_n - (1 - \alpha'_n) p - \alpha'_n p \end{aligned} \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha'_n (PT_1)^n z_n - \alpha'_n p + \alpha'_n \gamma'_n v_n - \alpha'_n \gamma'_n (PT_2)^n z_n \\ &+ (1 - \alpha'_n) (PT_2)^n z_n - (1 - \alpha'_n) p - \gamma'_n (PT_2)^n z_n + \gamma'_n v_n \\ &- \alpha'_n \gamma'_n v_n + \alpha'_n \gamma'_n (PT_2)^n z_n \end{aligned} \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha'_n [(PT_1)^n z_n - p + \gamma'_n (v_n - (PT_2)^n z_n)] \\ &+ (1 - \alpha'_n) [(PT_2)^n z_n - p + \gamma'_n (v_n - (PT_2)^n z_n)] \end{aligned} \right\| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\begin{aligned} &\alpha'_n \left\| \limsup_{n \rightarrow \infty} ((PT_1)^n z_n - p + \gamma'_n (v_n - (PT_2)^n z_n)) \right\| \\ &+ (1 - \alpha'_n) \left\| \limsup_{n \rightarrow \infty} ((PT_2)^n z_n - p + \gamma'_n (v_n - (PT_2)^n z_n)) \right\| \end{aligned} \right] \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha_n c + (1 - \alpha_n) c] \\
&= c
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha'_n [(PT_1)^n z_n - p + \gamma'_n (v_n - (PT_2)^n z_n)] \\ &+ (1 - \alpha'_n) [(PT_2)^n z_n - p + \gamma'_n (v_n - (PT_2)^n z_n)] \end{aligned} \right\| = c \quad (4.15)$$

olur. (4.13), (4.14), (4.15) ve Lemma 3.4.6 kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(PT_1)^n z_n - (PT_2)^n z_n\| = 0 \quad (4.16)$$

elde edilir. Şimdi de

$$\begin{aligned}
\|x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)\| &\leq \|x_n - p\| + \gamma_n'' \|w_n - (PT_1)^n x_n\| \\
&\leq \|x_n - p\| + \gamma_n'' M
\end{aligned}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Bu eşitsizlikten $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n'' = 0$ olduğundan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)\| \leq c \quad (4.17)$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\|(PT_1)^n x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)\| &\leq \|(PT_1)^n x_n - p\| + \gamma_n'' \|w_n - (PT_1)^n x_n\| \\
&\leq k_n \|x_n - p\| + \gamma_n'' M
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden de

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(PT_1)^n x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)\| \leq c \quad (4.18)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n'' x_n + \beta_n'' (PT_1)^n x_n + \gamma_n'' w_n - p\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n'' x_n + (1 - \alpha_n'' - \gamma_n'')(PT_1)^n x_n + \gamma_n'' w_n - (1 - \alpha_n'')p - \alpha_n'' p\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n'' x_n + (1 - \alpha_n'')(PT_1)^n x_n - \gamma_n'' (PT_1)^n x_n + \gamma_n'' w_n - (1 - \alpha_n'')p - \alpha_n'' p\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha_n'' x_n - \alpha_n'' p + \alpha_n'' \gamma_n'' w_n - \alpha_n'' \gamma_n'' (PT_1)^n x_n \\ &+ (1 - \alpha_n'')(PT_1)^n x_n - (1 - \alpha_n'')p - \gamma_n'' (PT_1)^n x_n + \gamma_n'' w_n \\ &- \alpha_n'' \gamma_n'' w_n + \alpha_n'' \gamma_n'' (PT_1)^n x_n \end{aligned} \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha_n'' [x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)] \\ &+ (1 - \alpha_n'')[(PT_1)^n x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)] \end{aligned} \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\begin{aligned} &\alpha_n'' \left\| \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)) \right\| \\ &+ (1 - \alpha_n'') \left\| \limsup_{n \rightarrow \infty} ((PT_1)^n x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)) \right\| \end{aligned} \right] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha_n c + (1 - \alpha_n) c] \\ &= c \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\alpha_n'' [x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)] \\ &+ (1 - \alpha_n'')[(PT_1)^n x_n - p + \gamma_n''(w_n - (PT_1)^n x_n)] \end{aligned} \right\| = c \quad (4.19)$$

olur. Dolayısıyla (4.17), (4.18), (4.19) ve Lemma 3.4.6 de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_1)^n x_n\| = 0 \quad (4.20)$$

bulunur. $z_n = \alpha_n'' x_n + \beta_n'' (PT_1)^n x_n + \gamma_n'' w_n$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|z_n - x_n\| &= \|\alpha_n'' x_n + \beta_n'' (PT_1)^n x_n + \gamma_n'' w_n - x_n\| \\ &= \|(1 - \beta_n'' - \gamma_n'')x_n + \beta_n'' (PT_1)^n x_n + \gamma_n'' w_n - x_n\| \\ &= \beta_n'' \|(PT_1)^n x_n - x_n\| + \gamma_n'' \|w_n - x_n\| \\ &\leq \beta_n'' \|(PT_1)^n x_n - x_n\| + \gamma_n'' M \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte (4.20) kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0 \quad (4.21)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|(PT_2)^n z_n - x_n\| &\leq \|(PT_2)^n z_n - (PT_1)^n x_n\| + \|(PT_1)^n x_n - x_n\| \\ &\leq \|(PT_2)^n z_n - (PT_1)^n z_n\| + \|(PT_1)^n z_n - (PT_1)^n x_n\| \\ &\quad + \|(PT_1)^n x_n - x_n\| \\ &\leq \|(PT_2)^n z_n - (PT_1)^n z_n\| + k_n \|z_n - x_n\| + \|(PT_1)^n x_n - x_n\| \end{aligned}$$

eşitsizliğinde (4.16), (4.20) ve (4.21) kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(PT_2)^n z_n - x_n\| = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|(PT_1)^n z_n - x_n\| &\leq \|(PT_1)^n z_n - (PT_1)^n x_n\| + \|(PT_1)^n x_n - x_n\| \\ &\leq k_n \|z_n - x_n\| + \|(PT_1)^n x_n - x_n\| \end{aligned}$$

eşitsizliğinde (4.20) ve (4.21) kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(PT_1)^n z_n - x_n\| = 0 \quad (4.23)$$

elde edilir. (4.21) ve (4.22) kullanılarak

$$\begin{aligned} \|(PT_2)^n x_n - x_n\| &= \|(PT_2)^n x_n - (PT_2)^n z_n\| + \|(PT_2)^n z_n - x_n\| \\ &\leq k_n \|x_n - z_n\| + \|(PT_2)^n z_n - x_n\| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(PT_2)^n x_n - x_n\| = 0 \quad (4.24)$$

bulunur. $y_n = \alpha'_n (PT_1)^n z_n + \beta'_n (PT_2)^n z_n + \gamma'_n v_n$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|y_n - x_n\| &= \|\alpha'_n (PT_1)^n z_n + \beta'_n (PT_2)^n z_n + \gamma'_n v_n - x_n\| \\ &= \|\alpha'_n (PT_1)^n z_n + \beta'_n (PT_2)^n z_n + \gamma'_n v_n - (\alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n)x_n\| \\ &\leq \alpha'_n \|(PT_1)^n z_n - x_n\| + \beta'_n \|(PT_2)^n z_n - x_n\| + \gamma'_n \|v_n - x_n\| \\ &\leq \alpha'_n \|(PT_1)^n z_n - x_n\| + \beta'_n \|(PT_2)^n z_n - x_n\| + \gamma'_n M \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.22) ve (4.23) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = 0 \quad (4.25)$$

bulunur. (4.21) ve (4.25) den ise

$$\begin{aligned} \|y_n - z_n\| &= \|y_n - x_n\| + \|x_n - z_n\| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.10), (4.23) ve (4.26) den

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|\alpha_n(PT_1)^n y_n + \beta_n(PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n - x_n\| \\ &= \|\alpha_n(PT_1)^n y_n + \beta_n(PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)x_n\| \\ &\leq \alpha_n \|(PT_1)^n y_n - x_n\| + \beta_n \|(PT_2)^n y_n - x_n\| + \gamma_n \|u_n - x_n\| \\ &\leq \alpha_n \|(PT_1)^n y_n - x_n\| \\ &\quad + \beta_n (\|(PT_2)^n y_n - (PT_1)^n y_n\| + \|(PT_1)^n y_n - x_n\|) + \gamma_n M \\ &= (\alpha_n + \beta_n) \|(PT_1)^n y_n - x_n\| + \beta_n \|(PT_2)^n y_n - (PT_1)^n y_n\| \\ &\quad + \gamma_n M \\ &\leq (\alpha_n + \beta_n) (\|(PT_1)^n y_n - (PT_1)^n z_n\| + \|(PT_1)^n z_n - x_n\|) \\ &\quad + \beta_n \|(PT_2)^n y_n - (PT_1)^n y_n\| + \gamma_n M \\ &\leq (\alpha_n + \beta_n) k_n \|y_n - z_n\| + (\alpha_n + \beta_n) \|(PT_1)^n z_n - x_n\| \\ &\quad + \beta_n \|(PT_2)^n y_n - (PT_1)^n y_n\| + \gamma_n M \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir. (4.21) ve (4.27) den

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z_n\| &= \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - z_n\| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.28)$$

bulunur.

$$\|x_{n+1} - (PT_1)^n z_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - (PT_1)^n z_n\|$$

eşitsizliğinden de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - (PT_1)^n z_n\| = 0 \quad (4.29)$$

elde edilir. P çekmesine göre her asimptotik genişlemeyen dönüşümün yine P çekmesine göre düzgün L -Lipschitzian dönüşümdür. Dolayısıyla $L = \sup_{n \geq 1} \{k_n\} \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|x_n - (PT_1)x_n\| &\leq \|x_n - (PT_1)^n x_n\| + \|(PT_1)^n x_n - (PT_1)^n z_{n-1}\| \\
&\quad + \|(PT_1)^n z_{n-1} - (PT_1)x_n\| \\
&\leq \|x_n - (PT_1)^n x_n\| + k_n \|x_n - z_{n-1}\| + L \|(PT_1)^{n-1} z_{n-1} - x_n\|
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlikte (4.20), (4.28) ve (4.29) kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_1)x_n\| = 0$$

bulunur. (4.22) ve (4.27) den

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - (PT_2)^n z_n\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - (PT_2)^n z_n\| \\
&\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - (PT_2)^n z_n\| = 0 \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.24), (4.28), (4.30) ile birlikte P çekmesine göre her asimptotik genişlemeyen dönüşümün yine P çekmesine göre düzgün L -Lipschitzian dönüşüm olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - (PT_2)x_{n+1}\| &\leq \|x_{n+1} - (PT_2)^{n+1} x_{n+1}\| + \|(PT_2)^{n+1} x_{n+1} - (PT_2)^{n+1} z_n\| \\
&\quad + \|(PT_2)^{n+1} z_n - (PT_2)x_{n+1}\| \\
&\leq \|x_{n+1} - (PT_2)^{n+1} x_{n+1}\| + k_{n+1} \|x_{n+1} - z_n\| \\
&\quad + L \|(PT_2)^n z_n - x_{n+1}\| \\
&\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_2)x_n\| = 0$$

dir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\alpha''_n\}$ dizileri bir $a > 0$ için $[a, 1 - a]$ aralığında olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ve T_1 ve T_2 dönüşümlerinden biri tamamen

sürekli ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Herhangi bir $p \in F$ için Lemma 4.1.1 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır. $\{x_n\}$ dizisinin T_1 ve T_2 nin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsayan bir alt dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.2.1 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_1)x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_2)x_n\| = 0$ dir. T_1 dönüşümünün tamamen sürekli olduğunu farzedelim. P nin genişlemeyen olduğu göz önüne alınırsa, $\{PT_1x_n\}$ nin $PT_1x_{n_j} \rightarrow p$ olacak şekilde $\{PT_1x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Bu yüzden $\|x_{n_j} - p\| \leq \|x_{n_j} - PT_1x_{n_j}\| + \|PT_1x_{n_j} - p\|$ ifadesinden $j \rightarrow \infty$ için $x_{n_j} \rightarrow p$ dir. $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - PT_1x_{n_j}\| = 0$ eşitliği ile birlikte P ve T_1 in sürekliliğinden $p = PT_1p$ elde edilir. Benzer olarak, $p = PT_2p$ ve böylece Lemma 3.4.8 den $p \in F$ dir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1 ve T_2 nin ortak p sabit noktasına kuvvetli yakınsar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\alpha''_n\}$ dizileri bir $a > 0$ için $[a, 1 - a]$ aralığında olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ve T_1 ve T_2 dönüşümleri (A') şartını sağlıyorsa $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Lemma 4.1.1 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır. Böylece her $p \in F$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F)$ vardır. Aynı zamanda Lemma 4.2.1 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_1)x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (PT_2)x_n\| = 0$ dir. (A') şartı ve Lemma 3.4.8 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} (\|x_n - (PT_1)x_n\| + \|x_n - (PT_2)x_n\|) \right) = 0$$

elde edilir. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) = 0$$

dir. $f(0) = 0$ ve $\forall t \in (0, \infty)$ için $f(t) > 0$ olacak şekilde $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$$

olmalıdır. Teorem 4.1.3 de $\{x_n\}$ nin K da bir Cauchy dizisi olduğu gösterilmişti. Dolayısıyla E tam uzay olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow q$ olacak şekilde bir $q \in K$ vardır. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olması $d(q, F) = 0$ olmasını gerektirir. F kapalı olduğundan $q \in F$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.4: E , Opial şartını sağlayan smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\alpha''_n\}$ dizileri bir $a > 0$ için $[a, 1 - a]$ aralığında olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $p \in F$ olsun. Lemma 4.1.1 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ var ve $\{x_n\}$ sınırlıdır. PT_1 ve PT_2 dönüşümlerinin K da kendi üzerine olduklarına dikkat edelim. Şimdi $\{x_n\}$ nin F de tek bir zayıf yakınsak alt dizisi olduğunu ispatlayacağız. İlk olarak $\{x_n\}$ nin sırasıyla p_1 ve p_2 ye zayıf yakınsayan $\{x_{n_k}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizileri olduğunu farzedelim. Lemma 4.2.1 den $i = 1, 2$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - (PT_i)x_{n_k}\| = 0$ dir. Lemma 3.4.7 dan $(I - PT_1)p_1 = 0$ yani $(PT_1)p_1 = p_1$ dir. Benzer olarak, $(PT_2)p_1 = p_1$ dir. Aynı yolla $(PT_1)p_2 = p_2$ ve $(PT_2)p_2 = p_2$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla Lemma 3.4.8 den $p_1, p_2 \in F$ dir. İkinci olarak $p_1 \neq p_2$ olduğunu farzedelim. O halde Opial şartından

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p_1\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - p_1\| \\ &< \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - p_2\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - p_2\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - p_1\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p_1\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $p_1 = p_2$ dir. O halde $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1 ve T_2 nin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar. Böylece ispat tamamlanmış olur.



5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilecektir.

İlk olarak bir reel Banach uzayın boştan farklı kapalı, konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlanan kendi üzerine olmayan $T_1, T_2: K \rightarrow E$ asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için kuvvetli yakınsamayla ilgili sonucu verelim.

Sonuç 5.1: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre iki asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma''_n < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. $\{x_n\}$ iterasyon şemasının T_1 ve T_2 nin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $d(x_n, F) = \inf\{\|x - p\|: p \in F\}$ olmak üzere $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olmasıdır.

Son olarak smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzayının boştan farklı kapalı, konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlanan kendi üzerine olmayan $T_1, T_2: K \rightarrow E$ zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için kuvvetli ve zayıf yakınsamayla ilgili sonuçları verelim.

Bulunan sonuçlar şunlardır :

Sonuç 5.2: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\alpha''_n\}$ dizileri bir $a > 0$ için $[a, 1 - a]$ aralığında olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ve T_1 ve T_2 dönüşümlerinden biri tamamen

sürekli ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 5.3: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\alpha''_n\}$ dizileri bir $a > 0$ için $[a, 1 - a]$ aralığında olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ve T_1 ve T_2 dönüşümleri (A') şartını sağlıyorsa $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 5.4: E , Opial şartını sağlayan smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $i = 1, 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ ve $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2: K \rightarrow E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\alpha''_n\}$ dizileri bir $a > 0$ için $[a, 1 - a]$ aralığında olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D.R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 8 (1), 61-79.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D.R., 2009. *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*. ISBN 978-0-387-75817-6.
- Aksoy, A. G. and Khamisi, M. A., 1990. *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory*. ISBN 0-387-97364-8.
- Berinde, V., 2006. *Iterative Approximation of Fixed Points*, *Lecture Notes in Math.*
- Browder, F. E., 1965. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 54, 1041-1044.
- Browder F. E., 1968. Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74, 660-665.
- Chang, S. S., Cho, Y. J. and Zhou, H., 2001. Demi-closed principle and weak convergence problem for asymptotically nonexpansive mappings, *J.Korean Math. Soc.*, 38, 1245-1260.
- Chidume, C.E., 2009. *Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations*, *Lecture Notes in Math.*
- Chidume, C. E., Ofoedu E. U. and Zegeye H., 2003. Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 280, 364-374.
- Ciric, L. B., 1974. A generalization of Banach's Contraction Principle, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45, 267-273.
- Franks, R. L. and Marzec, R. P., 1971. A theorem on mean-value iterations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 30, 324-326.
- Goebel, K. and Kirk, W. A., 1972. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 35, 171-174.
- Gohde, D., 1965. Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung, (German) *Math. Nachr.*, 30, 251-258.
- Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 147-150.
- Junck, G., 1976. Commuting mappings and fixed points, *Amer. Math. Monthly*, 83, 261-263.
- Khamisi, M. A. and Kirk W. A., 2001. *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*.
- Khan, A. R., Domlo A. A. and Fukhar-ud-din H., 2008. Common fixed points Noor iteration for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 341, 1-11.
- Khan, S. H. and Fukhar-ud-din, H., 2005. Weak and strong convergence of a scheme with errors of two nonexpansive mappings, *Nonlinear Anal.*, 61, 1295-1301.
- Kızıltunç, H., Özdemir, M. and Akbulut, S., 2010. Common fixed points of two nonexpansive nonself-mappings with errors in Banach spaces, *Arab. J. Sci. Eng.*, 35, 215-224.

- Kirk, W. A., 1965. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, *Amer. Math. Monthly*, 72, 1004-1006.
- Kirk, W. A., 1969. On nonlinear mappings of strongly semicontractive type, *J. Math. Anal. Appl.*, 27, 409-412.
- Kirk, W. A., 1971. On successive approximation for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Glasgow Math. J.*, 6-9.
- Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, *Uspehi Mat. Nauk.*, 10, 123-127.
- Kreyszig, E., 1989. *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library Edition Published.
- Liu, L. S., 1995. Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 194, 114-125.
- Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 506-510.
- Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 251, 217-229.
- Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 591-597.
- Osilike, M. O. and Udomene, A., 2000. Weak and strong convergence theorems for fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, *Math. Comput. Modelling*, 32, 1181-1191.
- Özdemir, M., Akbulut, S. and Kızıltunç, H., 2010. Convergence theorems on a new iteration process for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings with errors in Banach spaces, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, ID 307245, 19.
- Petryshyn, W. V. and Williamson, T. E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 43, 459-497.
- Picard, E. (Charles), 1890. *Jour. de Math.*, (4) 6, 145-210.
- Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using infinite matrices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 196, 161-176.
- Rhoades, B. E., 1994. Fixed point iterations for certain nonlinear mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 183, 118-120.
- Rhoades, B. E. and Soltuz S. M., 2004. The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration, *Nonlinear Anal.*, 58, 219-228.
- Schu, J., 1991. Iterative construction of a fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 158, 407-413.
- Schu, J., 1991. Weak and strong convergence of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 43, 153-159.
- Senter, H. F. and Dotson, W. G., 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 375-380.
- Tan, K. K. and Xu, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by Ishikawa iteration process, *J. Math. Anal. Appl.*, 178, 301-308.
- Thianwan, S., 2008. Weak and strong convergence theorems for new iterations with errors for nonexpansive nonself mapping, *Thai J. Math.*, 6 (3), 27-38.
- Thianwan, S., 2009. Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself mappings in a Banach space, *J. Comput. Appl. Math.*, 224, 688-695.

- Zhou, H.Y., Cho, Y.J and Kang, S.M., 2007. A new iterative algorithm for approximating common fixed points for asymptotically nonexpansive mappings, *Fixed Point Theory Appl.*, ID 64874, 10.
- Wang, C., Zhu, J., An, L., 2009. New iterative schemes for asymptotically quasi-nonexpansive nonself-mappings, *J. Comput. Appl. Math.*, 233, 2948-2955.
- Wang, L., 2006. Strong and weak convergence theorems for common fixed points of nonself asymptotically nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 323, 550-557.
- Wojtaszczył, P., 1991. *Banach spaces for analysts*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Xu, Y., 1998. Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive operator equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 224, 98-101.
- Xu, B. and Noor M. A., 2002. Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 267, 444-453.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Aydın ilinin Çine ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Çine’de tamamladı. 2004 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2008 yılında dereceyle mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitime başladı. Halen lisansüstü eğitime devam etmektedir.

