



**$p(\cdot)$ -LAPLACIAN İÇEREN ELİPTİK TİP STANDART
OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU PROBLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI**

Ebubekir AKKOYUNLU

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

2020

(Her hakkı saklıdır)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**$p(\cdot)$ -LAPLACIAN İÇEREN ELİPTİK TİP
STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU
PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI**

(Research of the Solutions of Elliptic Type Problems with Nonstandard
Growth Condition Involving $p(\cdot)$ -Laplacian)

DOKTORA TEZİ

Ebubekir AKKOYUNLU

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT
İkinci Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU

Erzurum
Kasım, 2020

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

$p(\cdot)$ -LAPLACIAN İÇEREN ELİPTİK TİP STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Ebubekir AKKOYUNLU tarafından hazırlanan bu çalışma, 26/11/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır.
Danışman:	Prof. Dr. Sezgin AKBULUT <i>Atatürk Ünivesitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır.
Jüri Üyesi:	Prof. Dr. Murat SUBAŞI <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır.
Jüri Üyesi:	Prof. Dr. Muhammet YILDIRIM <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır.
Jüri Üyesi:	Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU <i>Kütahya Dumlupınar Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır.
Jüri Üyesi:	Prof. Dr. Ali OLGUN <i>Kırıkkale Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır.
İkinci Tez Danışmanı:	Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU <i>Bayburt Üniversitesi</i>	Aslı Islak İmzalıdır.

Enstitü Yönetim
Kurulunun
21.09.2018 tarih ve
55885869-000-
E.1800268120 sayılı
kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Doktora Tezi olarak Prof. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında sunulan “*p(·)-Laplacian İçeren Eliptik Tip Standart Olmayan Büyüme Koşullu Problemlerin Çözümlerinin Araştırılması*” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	4	30
Kuramsal Temeller	26	30
Materyal ve Metot	17	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	12	20
Sonuç ve Öneriler	0	20
Tezin Geneli	17	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5’den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Ebubekir AKKOYUNLU	Prof. Dr. Sezgin AKBULUT
5.11.2020	5.11.2020
İmza:	İmza:

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU'na ve Sayın Prof. Dr. Sezgin AKBULUT'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ebubekir AKKOYUNLU

ÖZET

DOKTORA TEZİ

$p(\cdot)$ -LAPLACIAN İÇEREN ELİPTİK TİP STANDART OLMAYAN BÜYÜME KOŞULLU PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Ebubekir AKKOYUNLU

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

İkinci Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU

Amaç: Bu tezde, $p(\cdot)$ -Laplacian içeren eliptik tip standart olmayan büyüme koşullu problemlerin çözümlerinin varlığını ve çokluğunu ispatlamak amaçlanmıştır.

Yöntem: Sub-sup çözüm yöntemi ve varyasyonel yöntem kullanılmıştır.

Bulgular: $p(\cdot)$ -Laplacian içeren eliptik tip standart olmayan büyüme koşullu 3 farklı problem ele alınmış ve

- i) $p(\cdot)$ -Laplacian içeren problemin uygun koşullar altında $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında bir çözümü olduğu,
- ii) $p(\cdot)$ -Kirchhoff tipi problemin uygun koşullar altında $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sonsuz sayıda çözümü olduğu,
- iii) $p(\cdot)$ -Schrödinger-Kirchhoff tipi problemin uygun koşullar altında E uzayında birden fazla çözümü olduğu

elde edilmiştir.

Sonuç: Literatürdeki Laplacian, p -Laplacian ve $p(\cdot)$ -Laplacian içeren eliptik tip problemler incelenmiş ve bu çalışmalardan esinlenerek elde ettiğimiz $p(\cdot)$ -Laplacian içeren eliptik tip standart olmayan büyüme koşullu problemlerin çözümlerinin varlığı ve çokluğu ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları, standart olmayan büyüme koşulu, varyasyonel yaklaşım, mountain pass tekniği, fountain ve dual fountain teoremi.

Kasım 2020, 124 sayfa

ABSTRACT

DOCTORAL DISSERTATION

RESEARCH OF THE SOLUTIONS OF ELLIPTIC TYPE PROBLEMS WITH NONSTANDARD GROWTH CONDITION INVOLVING $p(\cdot)$ -LAPLACIAN

Ebubekir AKKOYUNLU

Supervisor: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Co-supervisor: Prof. Dr. Rabil AYAZOGLU

Purpose: The aim of the study is to prove the existence and multiplicity of solutions of elliptic type problems with non-standard growth condition involving $p(\cdot)$ -Laplacian.

Method: Sub-sup solution method and variational method were used.

Findings: 3 different elliptic type problems with nonstandard growth condition involving $p(\cdot)$ -Laplacian were studied and obtained that

- i) there is a solution of the problem involving $p(\cdot)$ -Laplacian in the space $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ with appropriate conditions,
- ii) there are infinitely many solutions of the problem $p(\cdot)$ -Kirchhoff type in the space $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ with appropriate conditions,
- iii) there are multiplicity of solutions of the problem $p(\cdot)$ -Schrödinger-Kirchhoff type in the space E with appropriate conditions.

Results: Elliptic type problems involving Laplacian, p -Laplacian and $p(\cdot)$ -Laplacian in the literature were examined and the existence and multiplicity of solutions the elliptic type problems with nonstandard growth condition involving $p(\cdot)$ -Laplacian that we obtained were proved.

Keywords: Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent, non-standard growth condition, variational approach, mountain pass technic, fountain and dual fountain theorem.

November 2020, 124 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	10
Temel Kavramlar	10
Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)	26
Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)	29
Modüler Uzay ve Orlicz Uzayı	33
Değişken Üslü Lebesgue Uzayı ($L^{p(\cdot)}(\Omega)$)	35
Değişken Üslü Sobolev Uzayı $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$	40
MATERYAL ve METOT	44
Temel Kavramlar	44
Varyasyonel Yaklaşım	49
Varyasyonel Yaklaşımında Kullanılan Teoremler.....	51
Varyasyonel Yaklaşımında Kullanılan Yöntemler	57
ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	59
$p(\cdot)$ -Laplacian İçeren Eliptik Problemin Sub-Sup Tekniği ile Çözümü.....	59
$p(\cdot)$ - Kirchhoff Tipi Problemin Çözümlerinin Varlığı ve Çokluğu.....	71
$\mathbb{R}^N$ de $p(\cdot)$ -Laplacian İçeren Schrödinger-Kirchhoff Tipi Problemin Çözümlerinin Varlığı ve Çokluğu.....	85
SONUÇLAR ve ÖNERİLER	106
KAYNAKLAR.....	108
ÖZGEÇMİŞ.....	114

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. A) Elektrik alan yokluğunda izotropik süspansiyon, B) Elektrik alanındaki fibrillenmiş yapılar.	3
Şekil 2. R^3 de Mountain Pass Teoreminin bir geometrik gösterimi.....	54
Şekil 3. Şekil 2'de temsil edilen fonksiyonelin R^2 de geometrik gösterimi.	54



SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^N$	: N boyutlu Euclid (Öklit) Uzayı
$\bar{A}$	: A kümesinin kapanışı
∂A	: A kümesinin sınırı
$\ u\ $	: u nun normu
X^*	: X uzayının duali
X^{**}	: X uzayının ikinci duali
$B_r(a)$	: Normlu uzayda a merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B_r(a)}$	: Normlu uzayda a merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$\sigma_r(a)$	: a merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi
$C(\Omega)$	: Ω bölgesinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$L^p(\Omega)$	: Lebesgue Uzayı
$L^{p(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üslü Lebesgue uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev uzayı
$W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üslü Sobolev uzayı
∇	: Gradient operatörü
Δ_p	: p -Laplace operatörü
$\Delta_{p(\cdot)}$	: $p(\cdot)$ -Laplace operatörü
meas	: $\mathbb{R}^N$ de Lebesgue ölçümü

GİRİŞ

Bu bölümde değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayların tarihsel gelişiminden bahsedilecek, sonra da standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerin gelişimi ve fiziksel uygulamaları hakkında genel bilgi verilecektir.

Sobolev (1936, 1938), k . mertebeden zayıf türevleri ve kendisi $L^p(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların ($W^{k,p}(\Omega)$) uzayını tanıtmış ve daha sonraki yıllarda da bu uzayların diğer özelliklerini incelemiştir. Sobolev (1950), hazırladığı “Some Application of Functional Analysis in Mathematical Physics” isimli kitabında bu uzayların matematiksel fiziğin çeşitli problemlerine uygulamasının önemine vurgu yapmıştır.

Orlicz (1931), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık bir bölge, $u: \Omega \rightarrow [0, \infty)$, $\lambda > 0$ ve φ bazı özel koşulları sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\vartheta(\lambda u) = \int_{\Omega} \varphi(\lambda |u(x)|) dx < \infty \quad (1)$$

şeklindeki modüler forma sahip fonksiyon uzaylarını ele almış ve literatürde Orlicz uzayı adıyla anılan fonksiyon uzayını tanımlamıştır. Ek olarak, eğer ϑ fonksiyonu bazı koşulları sağlarsa böyle uzaylara da modüler uzay adı verilir. Modüler uzaylar ilk defa sistematik olarak Nakano (1950,1951) tarafından çalışılmıştır. Musielak and Orlicz (1959), (1) eşitliğindeki φ fonksiyonunu x değişkenine bağlı hale getirerek

$$\vartheta(\lambda u) = \int_{\Omega} \varphi(x, \lambda |u(x)|) dx < \infty$$

şartını sağlayan genelleştirilmiş Orlicz uzayları veya Musielak Orlicz uzayları adı verilen daha genel uzayları elde etmişlerdir. Reel aralıkta değişken üslü Lebesgue uzayları ile ilgili ilk kapsamlı çalışmalar Rus araştırmacılar Tsenov (1961) ve Sharapudinov (1979) tarafından gerçekleştirilmiştir. Tsenov (1961), $\varphi(x, \lambda |u(x)|)$ fonksiyonunu $x \in \Omega$ ve $p(x) \geq 1$ olmak üzere $|u(x)|^{p(x)}$ şeklinde alarak genelleştirilmiş Orlicz uzayının özel durumu olan değişken üslü Lebesgue uzayını ($L^{p(\cdot)}(\Omega)$) tanımlamıştır. Sharapudinov (1979), p fonksiyonu Ω bölgesinde ölçülebilir reel değerli bir fonksiyon, u sabit bir fonksiyon ve v ise $L^{p(x)}([a, b])$ nin sonlu boyutlu alt uzayında değişen bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b |u(x) - v(x)|^{p(x)} dx$$

integralinin minimize problemini çalışmıştır. Sharapudinov bu çalışmasında değişken üslü Lebesgue uzaylar için Luxemburg normunu tanımlamış ve kuvvet $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olmak üzere değişken üslü Lebesgue uzayın yansılmalı olduğunu ispatlamıştır.

Kováčik and Rákosník (1991) tarafından, k . mertebeden zayıf türevleri ve kendisi değişken üslü Lebesgue ($L^{p(\cdot)}(\Omega)$) uzayına ait olan değişken üslü Sobolev ($W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$) uzayı tanıtılmış ve $\mathbb{R}^N$ de değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayların birçok temel özelliği ifade edilmiştir. Ayrıca Edmunds and Rákosník (1992); Samko (1998); Edmunds and Rákosník (2000); Samko (2000); Fan and Zhao (2001); Diening (2002); Diening *et al.* (2011) tarafından yapılan çalışmalarda da değişken üslü uzaylarla ilgili temel özelliklere yer verilmiştir.

Zhikov (1987), değişken üslü uzaylarla yakından ilişkili olan standart olmayan büyüme koşullu

$$\int_{\Omega} (1 + |\nabla u(x)|^2)^{\alpha(x)} dx$$

varyasyonel integralini çalışmış ve bu çalışma ile değişken üslü uzaylarla ilgili araştırmalar için yeni bir ufuk açmıştır.

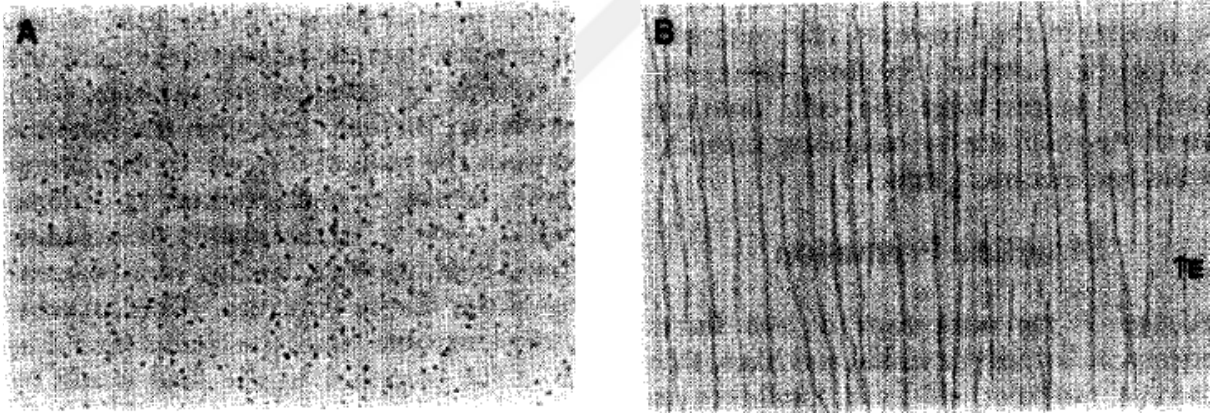
2000’li yılların başında çeşitli faktörler değişken üslü uzayların yoğun biçimde çalışılmasına katkıda bulunmuştur. Bu doğrultuda ilk önce, değişken üslü uzaylarla standart olmayan büyüme koşullu ve coercive’lik özelliğine sahip varyasyonel integraller arasında ilişki kurulmuştur (Zhikov 1995; Acerbi and Mingione 2001). Sonra bu varyasyonel problemlerle electrorheolojik (ER) akışkanların matematiksel modellemesi arasındaki ilişki farkedilmiştir (Rajagopal and Růžička 1996; Růžička 2000; Rajagopal and Růžička 2001). Ardından fizik ve mühendislikte kaydedilen ilerleme, bu sıvıların akışkan mekanik özelliklerinin incelenmesini önemli bir konu haline getirmiştir (Diening 2002). Daha sonra varyasyonel problemlerle gözenekli ortamlarda akış (flow in porous media), lineer olmayan esneklik teorisi (nonlinear elasticity theory), görüntü iyileştirme (Chen *et al.* 2006; Li *et al.* 2010) gibi farklı fiziksel durumlarla da bağlantı kurulmuştur.

Son yıllarda, çözümleri değişken üslü uzaylarda olan standart olmayan büyüme koşullu ($p(x)$ büyüme koşullu) kısmi diferansiyel denklemlere ve varyasyonel integrallere olan ilgi artmıştır (Acerbi and Mingione 2002; Cekic vd 2006; Harjulehto *et al.* 2006; Mihăilescu and Rădulescu 2007; Harjulehto and Hästö 2008; Ogras vd 2008; Buhrii and Mashiyev 2009;

Mashiyev vd 2010b; Mashiyev vd 2010c; Mashiyev vd 2011; Ekincioglu ve Ayazoglu 2017; Ayazoglu vd 2018).

Standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerin bazı fiziksel uygulamaları ve bu uygulamalarda değişken üslü uzayların önemi aşağıda ifade edilmiştir.

Electroreheolojik (ER) akışkanlar, harici bir elektrik alan kullanılarak reolojik özellikleri (viskozite, akma gerilimi, kayma modülü vb.) kolayca kontrol edilebilen akıllı malzemelerdir. ER akışkanlar, genellikle iletkenlik özelliği olmayan akışkanların içine yarı iletken materyalden hazırlanan tanecikler veya yarı iletken sıvı materyal eklenmesiyle oluşturulurlar. ER akışkanlar, dışarıdan elektrik alan uygulandığında, Şekil 1. de gösterildiği gibi uygulanan alana paralel olarak lifli yapılar oluşturarak tepki verirler ve milisaniye içinde sıvı halden katı hale, elektrik alan uzaklaştırıldığında ise tekrar milisaniye içinde katı halden sıvı hale geçebilme gibi oldukça önemli reolojik davranışlar sergilerler. ER akışkanlarla ilgili ilk önemli çalışma Winslow (1949) tarafından yapılmış ve bu çalışmada Winslow ER akışkanların kendi içlerindeki bağıl devinime gösterdikleri direnme özelliğinin yani viskozitenin, akışkana uygulanan elektrik alanının kuvveti ile ters orantılı olduğunu tespit etmiştir.



Şekil 1. A) Elektrik alan yokluğunda izotropik süspansiyon, B) Elektrik alanındaki fibrillenmiş yapılar (Halsey 1992).

Elektroreheolojik akışkanlar farklı şekillerde modellenenebilir. Bu modellemelere ilişkin yaklaşımlardan biri, malzemenin gözle görülebilir bir çeşidini elde etmek amacıyla altta yatan mikro yapının incelenmesidir (Halsey and Toor 1990; Klingenberg *et al.* 1991; Bonnecaze and Brady 1992; Parthasarathy and Klingenberg 1996). Bir diğer modelleme, devamlılık mekaniğinin framework özelliği yardımıyla elektoreheolojik sıvı homojenleştirilmiş tek bir parça halinde ele alınarak yapılmıştır (Atkin *et al.* 1991; Rajagopal and Wineman 1992; Wineman and Rajagopal 1995). Farklı bir modelleme olan, parçacıkların dinamikleri ve etkileşimi göz önünde bulundurularak doğrudan sayısal benzetimlere dayanan modelleme ile

tamamen farklı bir bakış açısı sağlanmıştır (Bailey *et al.* 1989; Whittle 1990). Bu modellemelerin hepsinde elektrik alan sabit bir parametredir. Rajagopal and Růžička (1996), elektromanyetik alanlar ile hareketli sıvılar arasındaki hassas etkileşimini hesaba katan farklı bir model üzerinde çalıştılar ve elektrik alanını tanımlanması gereken bir değişken şeklinde aldılar. Ardından Růžička (2000), bu modeli geliştirerek electrorheolojik akışkanlar için katsayıları değişken büyüme oranlı doğrusal olmayan sistem içeren farklı bir matematiksel model üzerinde çalışmıştır.

ER akışkanların parçacıkları manyetik alanla karşılaştıklarında hareket sırasında bir miktar kütle kaybederler. p kuvveti sabit olduğunda $x \in \mathbb{R}^N$ için farklı noktadaki kütle kaybının eşit olduğu kabul edilmektedir ve bu durumda farklı kütle kayıpları hesaba katılmamaktadır. Eğer, p kuvveti $p(x)$ şeklinde ölçülebilir pozitif reel değerli bir fonksiyon olarak alınırsa, $x \in \mathbb{R}^N$ nin farklı eksenlerdeki hareketleri boyunca meydana gelen farklı kütle kayıpları hesaba katılmış olur. Dolayısıyla, ER akışkanlara ilişkin matematiksel modellemeler standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklem tipindedir ve bu denklemler ancak değişken üslü Lebesgue ve değişken üslü Sobolev uzaylarda oluşturulabilir ve incelenebilirler. ER akışkanların matematiksel modellemelerine ilişkin çalışmalara örnek olarak Acerbi and Mingione (2002); Mihăilescu (2006); Mihăilescu and Rădulescu (2006); Ayazoglu ve Ekincioglu (2016) verilebilir.

ER akışkanların mekanik özellikleri, geniş bir aralıkta kolayca kontrol edilebildiği için ER akışkanlar günümüzde otomobil subapları, debriyajlar, damperler, hidrolik, robot sistemleri, biyolojik uygulamalar, uçak ve havacılık gibi farklı alanlar da kullanılmaktadır. Günümüzde ER akışkanların kullanım ve uygulama alanları ile ilgili birçok yenilik söz konusudur. Örneğin; ABD ordusunda “geleceğin savaş gücü” adında bir proje planlanmaktadır. Bu projeye göre, ER akışkanların kumaşın içine derinlemesine işleme ve kumaşın normal durumundan çok daha katı (dayanıklı) hale çok hızlı bir şekilde dönüşmesi özelliklerinden faydalanarak şu ankinden çok daha hafif olan kurşun geçirmez yelekler üretilmesi amaçlanmaktadır. Bununla birlikte, yine ABD’de NASA laboratuvarlarında ER akışkanların robot ve uzay teknolojisinde kullanımıyla ilgili deneysel çalışmalar yapılmaktadır. Ayrıca; ER akışkanların, sarılabilir/döndürülebilir ekranlar ve keypadler ile birlikte kullanılarak ihtiyaç duyulduğunda katı hale getirilebilen, ihtiyaç olmaması durumunda ise esnekleşerek sarılabilir/döndürülebilir hale getirilebilen ‘esnek elektronik cihazlar’ üretimi için de kullanılabileceği öngörülmektedir.

Değişken üslü uzayların önemini imaj (görüntü) iyileştirme işleminin matematiksel modellemesinde de görebiliyoruz. Klasik uzaylarda, imaj iyileştirme işlemleri için kullanılan

toplam varyasyon (TV) temelli difüzyon, izotropik difüzyon ve izotropik olmayan difüzyon yöntemleri mevcuttur. Klasik uzaylarda uygulanan bu yöntemlerde özellikle gürültüden (görüntüyü kirlüten ve görüntü kalitesini düşüren harici kaynaklardan oluşan etki) dolayı ortaya çıkan bazı eksikliklerin giderilebilmesi için değişken üslü uzaylara ihtiyaç duyulmuş ve bu uzaylarda imaj iyileştirme üzerine çalışmalar yapılmıştır (Blomgren *et al.* 1997; Chen *et al.* 2006; Li *et al.* 2010; Harjulehto *et al.* 2013).

Toplam varyasyon düzgünleştirme işlemi

$$\min \int_{\Omega} \left(|\nabla u(x)|^p + \frac{\lambda}{2} |u(x) - I(x)|^2 \right) dx \quad (2)$$

minimizasyon işleminde $p = 1$ alınarak gerçekleştirilir. (2) de bulunan λ terimi düzgünleştirmenin güçlüğüne işaret eden bir parametreyi, u gerçek görüntüyü, η gürültü olarak ifade edilen istenmeyen noktacıkların oluşturduğu bozulmuş gri (bulanık) alanları, Ω düzlemde yer alan dikdörtgen şeklindeki bölgeyi, I ise $I = u + \eta$ (u = gerçek görüntü, η = gürültü) fonksiyoneli temsil eder. İlk olarak Rudin *et al.* (1992) tarafından önerilen bu yöntem görüntüleri yeniden oluştururken kenarları korur ancak orijinal görüntüde bulunmayan yeni kenarlar meydana getirir.

İzotropik düzgünleştirme işlemi, (2) deki p değeri 2 iken $W^{1,2}(\Omega)$ Sobolev uzayında gerçekleştirilen minimize işlemidir. İzotropik difüzyon, görüntüdeki detaylara zarar verdiği için dolayı tek başına görüntüyü yeniden oluşturmak için önerilen bir uygulama değildir.

Anizotropik difüzyon işlemi, (2) deki p değeri, $1 < p < 2$ şeklinde seçilerek (p , 1 ile 2 aralığında sabit bir değer) gerçekleştirilen minimize işlemidir. Anizotropik difüzyon işlemi, parçalı pürüzsüz bölgeleri yeniden oluşturmakta etkilidir. Ancak, p nin aldığı sabit değere göre anizotropik difüzyon işlemi kenarları yok edebilir.

Yukarıdaki yöntemlerin zayıf ve güçlü yanları birlikte değerlendirilerek, p değişken bir üs şeklinde yazılıp imaj iyileştirme için değişken üslü uzaylarda çalışmalar yapılmıştır. Bu uzaylarda yapılmış bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Blomgren *et al.* (1997), makalelerinde $\lim_{s \rightarrow 0} p(s) = 2$, $\lim_{s \rightarrow \infty} p(s) = 1$ ve p monoton azalan olmak üzere

$$\min \int_{\Omega} \left(|\nabla u(x)|^{p(|\nabla u(x)|)} + \frac{\lambda}{2} |u(x) - I(x)|^2 \right) dx$$

minimizasyon problemini çalışmışlardır. Bu çalışmada, $|\nabla u(x)|$ ile ifade edilen görüntü iyileştirme terimindeki üssü gerçek görüntüye bağlı hale getirmişlerdir. Bu model ile izotropik ve TV temelli difüzyonun faydalı yanlarını birleştirmişlerdir.

Bollt *et al.* (2009), Blomgren *et al.* (1997) çalışmasını genişleterek

$$\min \int_{\Omega} \left(|\nabla u(x)|^{p(|\nabla u(x)|)} + \frac{\lambda}{2} |u(x) - I(x)|^q \right) dx$$

minimizasyon problemini çalışmışlardır. Bu çalışmada $q = 1$ durumunda $L^1(\Omega)$ normu ile $q = 2$ durumunda $L^2(\Omega)$ normu ile problemin minimum değerlere sahip olduğunu göstermişlerdir.

Chen *et al.* (2006) tarafından çalışılan modellemede; $\lambda \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir bölge, p sınırlı ve Lipschitz sürekli bir fonksiyon olmak üzere $1 \leq p(x) \leq 2$ için (2) minimizasyon probleminde ortaya çıkan izotropik difüzyon ($p = 2$ durumu), toplam varyasyon (TV) temelli difüzyon ($p = 1$ durumu) ve izotropik olmayan ($1 < p < 2$ durumu) difüzyon tiplerinin kuvvetli yanları birleştirilmektedir. Chen *et al.* (2006), p değerinin görüntüdeki x in yerine bağımlı olmasını sağladılar. Bu şekilde, her konumdaki difüzyonun yönünü ve hızını yerel davranışa bağlı hale getirdiler. Chen *et al.* (2006) tarafından önerilen model, $\beta > 0$ bir sabit ve $1 < \alpha \leq q(x) \leq 2$ için

$$\phi(x, r) = \begin{cases} \frac{1}{q(x)} |r|^{q(x)}, & |r| \leq \beta \\ |r| - \frac{\beta q(x) - \beta^{q(x)}}{q(x)}, & |r| > \beta \end{cases} \quad (3)$$

olmak üzere

$$\min_{u \in BV \cap L^2(\Omega)} \frac{1}{2\beta} \int_{\Omega} \left(\phi(x, |\nabla u|) + \frac{\lambda}{2} (u(x) - I(x))^2 \right) dx \quad (4)$$

şeklindedir.

(3)-(4) ün temel faydası, yerel görüntü bilgilerini barındırmasıdır. Bu model gradient yeterince büyük olduğunda (çoğunlukla kenarlarda) sadece TV-temelli, gradientin sıfıra yakın olduğu yerde (yani, homojen bölgelerde) izotropiktir. Ayrıca parçalı olarak pürüzsüz olabilen veya gürültü ile kenarlar arasındaki farkın ayırt edilmesinin zor olduğu bölgelerde anizotropik difüzyon ($1 < p < 2$) kullanmaktadır.

Li *et al.* (2010), Chen *et al.* (2006) in çalışmasından faydalanarak $p(x) = 1 + g(x)$ ve

$g(x) = \frac{1}{1+k|\nabla G_{\sigma} * f(x)|}$ olmak üzere

$$\min_{u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \left\{ E_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} + \frac{\lambda}{2} (u - f)^2 \right) dx \right\} \quad (5)$$

modelini önerdiler ve Chen *et al.* (2006) çalışmasını $p^- = \inf p > 1$ için incelediler. Li *et al.* (2010), (5) problemini değişken üslü $W^{1,p(x)}$ Sobolev uzayında çalışmışlardır. Li *et al.* (2010) çalışması, Harjulehto *et al.* (2013) tarafından $p^- = 1$ için genelleştirilmiştir.

Görüntü iyileştirme işlemlerinde p kuvveti sabit alındığında Ω bölgesinin tamamında aynı minimizasyon işlemi gerçekleştirilir ve bu da $p = 1$, $p = 2$ ve $1 < p < 2$ (p , 1 ile 2 aralığında sabit bir değer) için yukarıda ifade edilen dezavantajlardan en az birinin ortaya çıkmasına sebep olur. Fakat p kuvveti $p(x)$ şeklinde değişken alındığında Ω bölgesinin her farklı x noktasında farklı minimizasyon işlemi gerçekleştirilmiş olur. Bu da p değeri sabit iken ortaya çıkan problemlerin giderilmesini sağlar. Yani eğer p kuvveti $p(x)$ şeklinde ölçülebilir pozitif reel değerli bir fonksiyon olarak seçilirse, $x \in \Omega$ nın her farklı değeri için yeni bir görüntü iyileştirme işlemi gerçekleştirilmiş olur.

Değişken üslü uzayların önemini fizikteki Kirchhoff ve Schrödinger-Kirchhoff tipi dalga denklemlerinin matematiksel modellemelerinde de görebiliriz.

ρ kütle yoğunluğu, ρ_0 ilk gerginlik, L telin uzunluğu, h enine kesitin alanı, E materyalin Young (esneklik) modülü olmak üzere Kirchhoff (1883) tarafından

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\rho_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

hiperbolik tip dalga modeli çalışılmıştır. (6) denkleminde $\frac{\rho_0}{h}$ potansiyel enerji, $\frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx$ kinetik enerjidir. Denklem $[0, L]$ aralığında integrallenebilir olduğu için noktasal tanımlanamaz. Bundan dolayı problem nonlokal problem olarak tanımlanır. Bernstein (1940) bu denkleme ilk kez matematiksel bakış açısıyla yaklaşarak, başlangıç koşullarının Sobolev uzayından alınması durumunda çözümlerin lokal varlığını, başlangıç koşullarının analitik olması durumunda ise çözümlerin global varlığını ispatlamıştır.

Schrödinger dalga denklemi, Newton yasalarının ve enerjinin korunumunun klasik mekanikteki rolünü oynar, yani dinamik bir sistemin gelecekteki davranışını tahmin eder. ψ Schrödinger dalga fonksiyonu, m kütle, $\hbar$ Planck sabiti, $V(x)$ potansiyel enerji ve $E(x)$ toplam enerji olmak üzere Schrödinger denkleminin lineer formu

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E(x) - V(x))\psi = 0$$

şeklinde ifade edilir. Lineer olmayan Schrödinger denkleminin yapısı çok daha karmaşıktır.

Kirchoff ve Schrödinger-Kirchhoff tipi problemlerde homojen materyaller için Laplacian ve p -Laplacian içeren denklemlerle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Alves and Souto (2005); Correa and Figueiredo (2006); Correa and Figueiredo (2009); Liu (2010); Jin and Wu (2010); Li *et al.* (2012) dir. Ancak homojen olmayan materyaller için $p(\cdot)$ -Laplacian içeren denklemlere ihtiyaç duyulmuştur (Dai and Hao 2009; Dai and Liu 2009; Fan 2010; Dai and Ma 2011; Avci vd 2011; Yucedag vd 2012; Afrouzi and Mirzapour 2013; Chung 2013; Ayazoglu ve Alisoy 2018). Her bir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerlerin farklı olması homojen olmayan materyallerin doğal yapısıyla uyumluluk gösterir. Dolayısıyla homojen olmayan materyaller için elde edilen matematiksel modellemelerde her bir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerlerin farklı, yani $p(\cdot)$ olması durumunda klasik Lebesgue ve Sobolev uzayları yeterli olmaz ve değişken üslü Lebesgue $(L^{p(\cdot)}(\Omega))$ ve değişken üslü Sobolev uzaylarına $(W^{m,p(\cdot)}(\Omega))$ ihtiyaç duyulur.

Sunulan bu tez; Giriş, Kuramsal Temeller, Materyal ve Metot, Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuç ve Öneriler olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

Kuramsal Temeller bölümünde; tez çalışmamız ile ilgili temel tanımlar ve teoremlerin yanı sıra değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylar tanıtılmıştır.

Materyal ve Metot bölümünde; standart olmayan büyüme koşuluna sahip kısmi diferansiyel denklemler tanıtılmış, bu denklemlerin çözümlerinin varlığı ve çokluğu için varyasyonel yaklaşım, bu yaklaşımla ilgili temel kavramlar ve teoremler ile varyasyonel yaklaşımda kullanılan yöntemler hakkında bilgilere yer verilmiştir.

Araştırma Bulguları ve Tartışma bölümünde; Sub-Sup çözüm metodu kullanılarak $p(\cdot)$ -Laplacian içeren eliptik problemin $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında Sub çözüm ile Sup çözüm arasında sıfırdan farklı zayıf çözümü olduğu; Mountain Pass Teoremi, Fountain Teoremi, Dual Fountain Teoremi kullanılarak $p(\cdot)$ -Kirchhoff tipi problemin $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında zayıf çözümlerinin varlığı ve çokluğu; Mountain Pass Teoremi, Ekeland's varyasyonel prensibi, Variant Mountain Pass Teoremi, Krasnoselskii's genus teoremi kullanılarak $p(\cdot)$ -Laplacian içeren Schrödinger-Kirchhoff tipi problemin

$$E = \left\{ u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N) : \Lambda_{p(\cdot)}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x)|^{p(x)} + V(x)|u(x)|^{p(x)}) dx < \infty \right\}$$

uzayında zayıf çözümlerinin varlığı ve çokluğu ispatlanmıştır.

Sonuçlar ve Öneriler bölümünde; çalışmamızla ilgili sonuçlar ve öneriler sunulmuştur.



KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılacak olan temel tanım ve teoremler ifade edilecektir.

Temel Kavramlar

Tanım 1: X, K cismi üzerinde bir vektör uzay ve

$$\begin{aligned}\|\cdot\|: X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\mapsto \|x\|\end{aligned}$$

olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

- i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X de bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir. $x \in X$ elemanının normu $\|x\|$ ile, X uzayında tanımlanan norm ise $\|\cdot\|_X$ ile gösterilir (Rudin 1991).

Tanım 2: n -boyutlu $\mathbb{R}^N$ reel Euclid uzayında bir $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ vektörünün normu

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır. Bu norma $\mathbb{R}^N$ deki adi norm veya öklid normu denir (Saxe 2002).

Tanım 3: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay, $a \in X$ ve r pozitif bir sayı olmak üzere

$$B_r(a) = \{x \in X: \|x - a\|_X < r\}$$

kümesine a merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in X: \|x - a\|_X \leq r\}$$

kümesine a merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$\sigma_r(a) = \{x \in X: \|x - a\|_X = r\}$$

kümesine a merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 4: (x_n) , $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $n, m \geq n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Devito 1978).

Teorem 1: Aşağıda verilen önermeler doğrudur.

- i) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır,
- ii) Normlu uzaydaki her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir,
- iii) (x_n) Cauchy dizisinin $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında $a \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi varsa (x_n) Cauchy dizisi de a ya yakınsar,
- iv) (x_n) ve (y_n) , $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında birer Cauchy dizisi ise $(x_n + y_n)$ dizisi de $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisidir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 5: $(X, \|\cdot\|_X)$ bir normlu uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir (Rudin 1991).

Tanım 6: X vektör uzayında tanımlı skaler değerli operatörlere fonksiyonel denir (Rudin 1991).

Tanım 7: X bir vektör uzay ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

koşulu sağlanıyorsa f ye lineer fonksiyonel denir (Rudin 1991).

Tanım 8: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayı üzerinde tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonellerden oluşan uzaya X vektör uzayının dual uzayı denir ve X^* (veya X') ile gösterilir. Bu X^* dual uzayı $u, v \in X^*$ ve $c \in \mathbb{C}$ için $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ (toplama) ve $(cu)(x) = cu(x)$ (skalerle çarpım) işlemleri ile bir vektör uzayıdır. Bu uzayda bir $u \in X^*$ elemanın normu

$$\|u\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|u(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

olarak tanımlanırsa $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$, bir Banach uzayı olur (Zeidler 1995).

Ayrıca X in dual uzayıda normlu uzay olduğundan X^* dual uzayında dual uzayı tanımlanabilir.

Tanım 9: X^* normlu uzayının duali olan $X^{**} = (X^*)^*$ vektör uzayına X uzayının ikinci duali denir. X^{**} ikinci dual uzayı da bir Banach uzayıdır. Sabit bir $x \in X$ ve $u \in X^*$ için

$$g: X^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ (veya } \mathbb{C})$$

$$u \mapsto g_x(u) = u(x)$$

olacak şekilde bir g_x fonksiyoneli olduğunu kabul edelim. Her $x \in X$ için yalnız bir sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden

$$T: X \rightarrow X^{**}$$

$$x \mapsto T(x) = g_x(u)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu tip dönüşümlere kanonik dönüşüm adı verilir. Eğer bu dönüşüm üzerine ise X uzayına yansımali uzay denilir. X yansımali bir uzay ise $X = X^{**}$ olur (Miklavčič 1998).

Teorem 2: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzay ve M , X de tanımlanan norma göre X in kapalı bir alt uzayı olsun. Bu durumda X deki norm altında M de Banach uzayıdır. Ayrıca

- i) X ayrılabilir ise M de ayrılabilir,
- ii) X yansımali ise M de yansımali,
- iii) X düzgün konveks ise M de düzgün konvektir (Adams 1975).

Tanım 10: (x_n) , $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $(x_n) \in X$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0 a güçlü yakınsıyor denir ve $x_n \rightarrow x_0$ yada $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ile gösterilir (Zeidler 1995).

Tanım 11: (x_n) , $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $f \in X^*$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsıyor denir ve $x_n \rightharpoonup x_0$ ile gösterilir (Zeidler 1995).

Zayıf yakınsaklık her $f \in X^*$ için $f(x_n)$ sayılarından oluşan dizinin yakınsaklığı anlamına gelir.

Teorem 3: (x_n) , $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere

- i) (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsak ise yakınsadığı x_0 değeri bir tanedir,
- ii) (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsak ise $(\|x_n\|_X)$ dizisi sınırlıdır,
- iii) (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsak ise (x_n) dizisinin her alt dizisi x_0 a zayıf yakınsaktır,
- iv) (x_n) dizisi x_0 a güçlü yakınsak ise (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsak olur. Bunun tersi genel olarak doğru değildir,

v) Boy $X < \infty$ ise (x_n) dizisinin x_0 a güçlü yakınsak olması için gerek ve yeter şart (x_n) dizisinin x_0 a zayıf yakınsamasıdır. Yani sonlu boyutlu uzaylarda zayıf yakınsaklık ile güçlü yakınsaklık tanımları çakışır (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 4: (x_n) , $(X, \|\cdot\|_X)$ yansımali Banach uzayında sınırlı bir dizi ise bu dizinin X uzayında zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır (Wang 2002).

Tanım 12: X normlu uzay ve $\|\cdot\|_1$ ile $\|\cdot\|_2$ bu uzayda tanımlı farklı iki norm olsun. Her $x \in X$ için

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

olacak şekilde $c_1 > 0$ ve $c_2 > 0$ sabitleri varsa $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk normlar denir (Zeidler 1995).

Sonlu boyutlu bir vektör uzayında tanımlı normlar denk olduğundan dolayı, o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlarlar. Yani, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları denk olduğunda X de $\|\cdot\|_1$ (veya $\|\cdot\|_2$) normuna göre yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisi ise $\|\cdot\|_2$ (veya $\|\cdot\|_1$) normuna göre de yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisidir. Ayrıca, $(X, \|\cdot\|_1)$ (veya $(X, \|\cdot\|_2)$) bir Banach uzay ise $(X, \|\cdot\|_2)$ (veya $(X, \|\cdot\|_1)$) uzayı da bir Banach uzayıdır.

Tanım 13: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay ve X in bir E alt kümesi verilsin. Eğer, E deki her bir (x_n) dizisi X de yakınsak oluyorsa E kümesine X uzayında yoğunur denir (Zeidler 1995).

Tanım 14: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayına ayrılabilir uzay denir (Devito 1978).

Teorem 5: $(X, \|\cdot\|_X)$ ayrılabilir yansımali bir Banach uzay ve (x_n) , X^* da sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisi, X^* da zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir (Wang 2002).

Teorem 6: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay olmak üzere X uzayının yansımali olması için gerek ve yeter şart X^* uzayının yansımali olmasıdır. Eğer X ayrılabilir uzay ise X^* da ayrılabilir uzaydır. Bu durumda, X uzayı ayrılabilir ve yansımali ise X^* da ayrılabilir ve yansımalıdır (Adams 1975).

Tanım 15: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve X deki açık kümelerin bir sınıfı $\mathcal{A} = \{G_i; i \in I\}$ olsun. Bir $E \subset X$ alt kümesi $\mathcal{A}$ sınıfının birleşimi tarafından kapsanıyorsa, yani

$$E \subset \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa $\mathcal{A}$ sınıfına E kümesinin bir örtüsüdür denir. Eğer

i) Verilen örtüye ait kümeler sayılabilir sayıda ise bu örtüye sayılabilir bir örtü,

- ii) Verilen örtüye ait kümeler sonlu sayıda ise bu örtüye sonlu bir örtü,
- iii) Verilen örtüye ait kümelerin herbirisi açık bir küme ise bu örtüye açık bir örtü,
- iv) Eğer $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ alt sınıfı da E kümesini örtüyorsa $\mathcal{D}$ alt sınıfına bir alt örtü

denilir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 16: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve $E \subset X$ olmak üzere, E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine X de kompakttır denir. Eğer E kümesinin $\overline{E}$ kapanışı X de kompakt ise E kümesine X de ön-kompakttır denir. X kompakt (ön-kompakt) bir küme ise $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayına kompakt (ön-kompakt) normlu uzay denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 17: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E kümesindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa E kümesine, X de dizisel kompakt küme denir. Eğer E nin $\overline{E}$ kapanışı X de dizisel kompakt küme ise E ye X de dizisel ön-kompakt küme adı verilir. Eğer X dizisel kompakt (dizisel ön-kompakt) bir küme ise $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayına dizisel kompakt (dizisel ön-kompakt) normlu uzay denir (Musayev ve Alp 2000).

Bu tanıma göre, X de dizisel kompakt bir $E \subset X$ alt kümesinden alınan herhangi bir (x_n) dizisinin bir $x \in E$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Bu $x \in E$ noktası (x_n) dizisi için bir limit noktasıdır. Ayrıca, $E \subset X$ alt kümesinden alınan herhangi bir (x_n) dizisinin bir $x \in E$ limit noktası varsa (x_n) dizisinin bu " x " noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi bulunabilir.

Teorem 7 (Heine-Borel teoremi): $E \subset \mathbb{R}$ nin kompakt olması için gerek ve yeter şart E kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır (Wang 2002).

Heine-Borel teoreminden, $\mathbb{R}$ deki her kompakt kümenin $\mathbb{R}$ de kapalı ve sınırlı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, $\mathbb{R}$ de bir kümenin kompakt olması için gerek ve yeter şart bu kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır. Fakat sonsuz boyutlu Banach uzaylarda kapalılık ve sınırlılık koşulu kompaktlık için gereklidir ancak yeterli değildir.

Teorem 8: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E , X de kompakt bir küme ise E kümesi X de dizisel kompakttır (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 18: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için E kümesinin sonlu sayıda açık yuvarlardan oluşan ε -örtüsü varsa E ye X de tamamen sınırlı bir küme denir (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 9: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzay ve $E \subset X$ olsun. E kümesinin X de ön-kompakt olması için gerek ve yeter şart E kümesinin X de tamamen sınırlı olmasıdır (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 9 dan kapalı bir kümenin tamamen sınırlı bir küme olması için gerek ve yeter şart, bu kümenin kompakt olmasıdır. Böylece sonlu boyutlu uzaylarda doğru olan "kapalılık + sınırlılık = kompaktlık" özelliği yerine, "kapalılık + tamamen sınırlılık = kompaktlık" özelliğinin doğruluğu elde edilir.

Teorem 10: Bir $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayının sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter şart, bu uzayın $\{x \in X: \|x\|_X \leq 1\}$ kapalı yuvarının kompakt olmasıdır (Wang 2002).

Teorem 11: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzay ve $E \subset X$ olsun. $f: E \rightarrow K$ fonksiyonelinin E üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in E$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\|x - y\|_X < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ şartını sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ olmasıdır (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 12 (Weierstrass Teoremi): $u, (X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayının kompakt E alt kümesinde sürekli reel bir fonksiyonel ise u fonksiyoneli E üzerinde sınırlıdır ve E üzerinde bir en küçük ve bir en büyük değere ulaşır (Zeidler 1995).

Tanım 19: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayı ve $E \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer E deki her sonsuz (x_n) dizisinin bir $x \in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E ye $(X, \|\cdot\|_X)$ da zayıf kompakt (veya dizisel zayıf kompakt) küme denir (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 13: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayının zayıf kompakt her alt kümesi sınırlıdır (Willem 1996).

Tanım 20: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ve $u \in C^0(\Omega)$ olsun. u nun sıfırdan farklı değerler aldığı kümenin kapanışına u nun support (destek) u denir ve

$$\text{supp}u = \overline{\{x \in \Omega: u(x) \neq 0\}}$$

ile gösterilir. Eğer $\text{supp}u$, Ω bölgesinde kompakt ise u fonksiyonu Ω da kompakt desteğe sahiptir denir (Devito 1978).

Tanım 21: X, K ($K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzay olmak üzere $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow K$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $\theta \in K$ için

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

iii) $\langle \theta x, y \rangle = \theta \langle x, y \rangle$,

$$\text{iv)} \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

şartlarını sağlıyorsa $\langle ., . \rangle$ ye X de bir iç çarpım ve $(X, \langle ., . \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı adı verilir. $K = \mathbb{R}$ olması durumunda ii) özelliği $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ şeklinde olur (Curtain and Pritchard 1977).

Tanım 22: $(X, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayında bir $x \in X$ vektörünün normu

$$\|x\|_X = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır (Zeidler 1995).

Tanım 23: n -buyutlu $\mathbb{R}^N$ reel Euclid uzayındaki $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^N$ üzerindeki standart iç çarpım denir (Curtain and Pritchard 1977).

Teorem 14 (Paralelkenar Kuralı): X normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$ için

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Curtain and Pritchard 1977).

Tanım 24: $(X, \langle ., . \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Hilbert uzayı denir (Curtain and Pritchard 1977).

Tanım 25: $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in \Omega \text{ ve } \|x - x_0\| < \delta \text{ için } \|u(x) - u(x_0)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa u, x_0 da süreklidır denir (Bayraktar 2017).

Eğer u, Ω nın her noktasında sürekli ise u ya Ω da süreklidır denir. Ω bölgesinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların kümesi $C^0(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 26: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n -bileşenlisi ise α ya çoklu indis denir ve x^α , $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ olarak tanımlanır. Yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ olur. Buna göre $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ise $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ifadesi $|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Bu durumda herhangi bir u fonksiyonunun $|\alpha|$. mertebeden türevi

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

şeklinde tanımlanır (Devito 1978; Fucik and Kufner 1980).

Tanım 27: Ω , $\mathbb{R}^N$ de bir bölge ve herhangi bir $m \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$ için $C^m(\Omega)$ uzayı, Ω bölgesinde $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha u$ kısmi türevleri sürekli olan u fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzay olsun. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$ olmak üzere, $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt destekli olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki bütün fonksiyonlardan oluşur. $C_0^\infty(\Omega)$ nın elemanlarına test fonksiyonu veya düzgün (smooth) fonksiyon denir (Devito 1978).

Tanım 28: X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $E \subset X$ olsun. $T: E \subset X \rightarrow Y$ dönüşümü E nin her bir elemanını Y nin yalnız bir elemanına karşılık getiriyorsa, T ye E den Y ye bir operatör denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 29: X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzay ve $T: E \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in E$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

oluyorsa T operatörüne lineer operatör denir (Bayraktar 2006).

Tanım 30: $E \subset X$ olmak üzere $T: E \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in E$ için

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad (7)$$

şartını sağlayan bir $c > 0$ sabit sayısı varsa T operatörüne E de sınırlıdır denir. Eğer $E = X$ ise T operatörüne sınırlıdır denir (Bayraktar 2006).

(7) eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sayılarının infimum değerine $T: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatörünün normu denir. Buna göre

$$\|T\| = \inf\{c > 0: x \in E \text{ için } \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X\}$$

olur. Ayrıca, (7) eşitsizliği $x \neq 0$ için

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq c$$

yazılabilir ki bu durumda c değerinin en az sol taraftaki ifadenin $E - \{0\}$ kümesi üzerinde alınan supremumu kadar olabileceğini gösterir. O halde (7) eşitsizliğin de mümkün olan en küçük c nin söz konusu olduğu supremum değerine T operatörünün normu denir ve

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E_T \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

ile gösterilir.

Ayrıca, X den Y ye tanımlanan bütün sınırlı ve lineer operatörlerin oluşturduğu uzay $L(X, Y)$ şeklinde gösterilmek üzere, eğer Y bir Banach uzay ise $L(X, Y)$ uzayı da bir Banach uzaydır.

Tanım 31: $T: X \rightarrow Y$ bir operatör, $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|x_n - x_0\|_X \rightarrow 0 \quad (x_n \xrightarrow{X} x_0)$$

olduğunda

$$\|T(x_n) - T(x_0)\|_Y \rightarrow 0 \quad (Tx_n \xrightarrow{Y} T(x_0))$$

oluyorsa T operatörüne x_0 noktasında süreklidir denir (Musayev ve Alp 2000).

Lineer operatörler için sınırlılık ve süreklilik kavramları denktir. Lineer olmayan operatörler için bu ifade geçerli değildir.

Tanım 32: $T: X \rightarrow Y$ bir operatör, X de $x_n \rightarrow x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Eğer

- i) $n \rightarrow \infty$ iken Y de, $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ ise T operatörüne x_0 noktasında zayıf süreklidir,
- ii) $n \rightarrow \infty$ iken Y de, $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ ise T operatörüne x_0 noktasında güçlü süreklidir denir (Adams 1975).

Norma göre güçlü yakınsak olan bir T operatörü, aynı zamanda zayıf yakınsak olduğundan dolayı, eğer T operatörü güçlü sürekli ise aynı zamanda zayıf süreklidir. Bu nedenle güçlü süreklilik kavramı zayıf süreklilikten daha güçlü bir kavramdır.

Tanım 33: X ve Y normlu uzayları, $L: X \rightarrow Y$ operatörü ve $E \subset X$ sınırlı alt kümesi verilsin. Eğer $L(E)$, Y de önkompakt ise L ye kompakt operatör denir. Eğer L operatörü sürekli ve kompakt ise L operatörüne tamamen sürekli operatör denir (Devito 1978).

Teorem 15: X yansılmalı bir Banach uzay ve $T: X \rightarrow Y$ güçlü sürekli operatör ise T operatörü kompakttır (Willem 1996).

Tanım 34: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \rightarrow x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad (8)$$

ise f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında alttan yarı-süreklidir denir. Eğer (8) eşitsizliği $x_n \rightarrow x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi için sağlanıyorsa f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında alttan zayıf yarı-süreklidir denir (Adams 1975).

Tanım 35: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \rightarrow x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad (9)$$

ise f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında üstten yarı-süreklidir denir. Eğer (9) eşitsizliği $x_n \rightarrow x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi için sağlanıyorsa f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında üstten zayıf yarı-süreklidir denir (Adams 1975).

f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında alttan ve üstten yarı-süreklidir. Eğer f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında zayıf sürekli ise f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında alttan ve üstten zayıf yarı-süreklidir.

Tanım 36: X, Y iki Banach uzay ve $T: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. T operatörü X in her sınırlı alt kümesini Y nin bir ön kompakt alt kümesine dönüştürüyorsa T ye kompakt lineer operatör (tamamen sürekli lineer operatör) denir (Adams 1975).

Tanım 37: X, Y iki Banach uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir operatör ve $x \in X$ olsun. Her $h \in X$ için

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(x + th) - f(x)\|_Y}{t} = T_x(h)$$

olacak şekilde bir $T \in L(X, Y)$ sınırlı lineer operatörü varsa f operatörüne $x \in X$ noktasında ve h yönünde Gâteaux diferansiyellenebilir denir. T operatörüne ise f operatörünün $x \in X$ noktasındaki Gâteaux türevi denir. Eğer bu eşitlik her $x \in X$ için sağlanırsa f operatörü Gâteaux diferansiyellenebilir denir (Curtain and Pritchard 1977; Willem 1996).

Tanım 38: X bir Banach uzay ve $x \in X$ olmak üzere $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli X de Gâteaux diferansiyellenebiliyorsa ve bu Gâteaux diferansiyeli sürekli ise f fonksiyonelinin diferansiyeli zayıf süreklidir denir (Willem 1996).

Teorem 16 (Ortalama Değer Teoremi): X bir Banach uzay ve $x, h \in X$ olmak üzere $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli Gâteaux diferansiyellenebilir ise

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+th)h$$

olacak şekilde bir $0 < t < 1$ sayısı vardır (Papageorgiou and Kyritsi-Yiallourou 2009).

Tanım 39: X, Y iki Banach uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir operatör ve $x \in X$ olmak üzere her $h \in X$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T_x(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olacak şekilde bir $T \in L(X, Y)$ sınırlı lineer operatörü varsa f operatörüne $x \in X$ noktasında Fréchet diferansiyellenebilir denir. T operatörüne de f in $x \in X$ noktasındaki Fréchet türevi denir. Eğer bu eşitlik her $x \in X$ için sağlanırsa f operatörü Fréchet diferansiyellenebilir denir (Curtain and Pritchard 1977).

Teorem 17: $f: X \rightarrow Y$ operatörü $x \in X$ de Fréchet diferansiyellenebilir ise f operatörü $x \in X$ de sürekli (Papageorgiou and Kyritsi-Yiallourou 2009).

Teorem 18: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonelinin X de Gâteaux türevi sürekli ise bu durumda f fonksiyoneli Fréchet diferansiyellenebilirdir ve $f \in C^1(X, Y)$ olur (Willem 1996).

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 40: X ve Y iki normlu uzay olsun. Eğer

i) X, Y nin bir alt uzayı,

ii) X den Y ye $I(x) = x$ ile tanımlanan I birim operatörü her $x \in X$ için sürekli ise X, Y ye gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü doğrusal olduğundan ii) koşulu her $x \in X$ için

$$\|I(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sabitinin varlığına denktir. Eğer I birim operatörü kompakt ise X, Y ye kompakt gömülür denir ve $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ ile gösterilir (Adams 1975).

Tanım 41: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de tanımlı $u \in C^2(\Omega)$ fonksiyonunun $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ noktasındaki gradienti

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (10)$$

operatörü yardımıyla

$$\text{grad}(u) = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \quad (11)$$

olarak tanımlanan vektörel bir fonksiyondur. u fonksiyonunun gradientinin normu

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır (Fucik and Kufner 1980).

Tanım 42: $\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörü Δ ile gösterilir ve

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (12)$$

şeklinde tanımlanır (Fucik and Kufner 1980).

(10) ve (12) eşitliklerinden

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$$

yazılabilir.

Tanım 43: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de tanımlı bir $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektörel fonksiyonun diverjansı

$$\text{div } \vec{w} = \nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \quad (13)$$

şeklinde tanımlanan skaler bir fonksiyondur (Fucik and Kufner 1980).

(11) ve (13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } u) &= \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \nabla^2 u = \Delta u \end{aligned}$$

yazılır.

Tanım 44: $p > 1$ sabit bir değer olmak üzere

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = \text{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x))$$

operatörüne p -Laplace operatörü denir (Fucik and Kufner 1980).

p -Laplace operatörü

$$\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right| = \left\langle \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right\rangle = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$$

eşitliği kullanılarak

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 45: $|t|^{p(x)-2}t = |t|^{p(x)-1}\text{sgnt}$ ve $p(x) > 1$ olmak üzere

$$\Delta_{p(x)} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^{p(x)-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = \text{div} \left(|\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x) \right)$$

biçiminde tanımlanan operatöre $p(x)$ -Laplace operatörü denir (Fan and Zhao 2001; Cruz-Uribe and Fiorenza 2013).

$p(x)$ -Laplace operatörü

$$\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right| = \left\langle \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right\rangle = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$$

eşitliği kullanılarak

$$\Delta_{p(x)} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2 \right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)$$

şeklinde de yazılabilir.

$p(x)$ -Laplacian operatörü p -Laplacian operatörünün genelleştirilmiş bir halidir. $p(x)$ -Laplacian operatörü ile p -Laplacian operatörü arasındaki ana fark p -Laplacian operatörü $(p-1)$. dereceden homojendir, yani her $\lambda > 0$ değeri için $\Delta_p(\lambda u) = \lambda^{p-1} \Delta_p u$ eşitliğini sağlar, ancak $p(x) \neq \text{sabit}$ iken $p(x)$ -Laplace operatörü nonhomojendir. Yani $\lambda > 0$ değeri için $\Delta_{p(x)}(\lambda u) \neq \lambda^{p(x)-1} \Delta_{p(x)} u$ dur. $p(x)$ -Laplace operatörü homojen olmadığından dolayı bazı uygulamalar (Lagrange Çarpınlar teorisi, Hardy eşitsizliği gibi) $p(x)$ -Laplace operatörü bulunduran denklemlere uygulanamaz. $p(x)$ -Laplacian'ın özellikleri ve uygulamaları Růžička (2000); Fan ve Zhang (2003); Hästö 2007; Mashiyev ve Buhrii (2011); Diening *et al.* (2011) çalışmalarında verilmiştir.

Tanım 46: $h = h(x, \xi)$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ ve h Carathéodory fonksiyonu olsun. $x \in \Omega$ olmak üzere ölçülebilir $u_i = u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonu için

$$H(u_1, u_2, \dots, u_N) = h(x; u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x))$$

şeklinde tanımlanan operatöre Nemytskii operatörü denir (Fucik and Kufner 1980).

Teorem 19: $p_1, p_2, \dots, p_m$ ve r reel sayılar $p_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $r \geq 1$ ve h Carathéodory koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $N(u_1, u_2, \dots, u_m) \in L^r(\Omega)$ ise $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $g \in L^r(\Omega)$ olmak üzere

$$h(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \leq g(x) + c \sum_{i=1}^m |\xi_i|^{\frac{p_i}{r}}$$

eşitsizliğini sağlayan $c \geq 0$ vardır. Bu durumda N Nemytskii operatörü $L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega)$ uzayını $L^r(\Omega)$ uzayına dönüştürür. Dolayısıyla N Nemytskii operatörü $L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega)$ uzayından $L^r(\Omega)$ uzayına sürekli operatördür. Yani $c_1 = (m+1)^{\frac{r-1}{r}} \|g\|_{L^r(\Omega)}$, $c_2 = (m+1)^{\frac{r-1}{r}} C$ olmak üzere

$$\|N(u_1, u_2, \dots, u_m)\|_{L^r(\Omega)} \leq c_1 + c_2 \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\frac{p_i}{r}}$$

eşitsizliğini sağlayan $c_1, c_2 > 0$ sabitleri vardır (Fucik and Kufner 1980).

Tanım 47: $\mathfrak{R}$, $\mathbb{R}^N$ in alt kümelerinin bir sınıfı olmak üzere

- i) $\mathbb{R}^N \in \mathfrak{R}$,
- ii) Eğer $A \in \mathfrak{R}$ ise $A^c = \{x \in \mathbb{R}^N : x \notin A\} \in \mathfrak{R}$,
- iii) Eğer $j = 1, 2, \dots$ için $A_j \in \mathfrak{R}$ ise $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}$

şartları sağlanıyorsa $\mathfrak{R}$ sınıfına, $\mathbb{R}^N$ üzerinde bir σ -cebiri denir (Adams 1975).

i) - iii) özelliklerinin bir sonucu olarak

- iv) $\emptyset \in \mathfrak{R}$,
- v) Eğer $j = 1, 2, \dots$ için $A_j \in \mathfrak{R}$ ise $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}$,
- vi) Eğer $A, B \in \mathfrak{R}$ ise $A - B = A \cap B^c \in \mathfrak{R}$

özellikleri yazılabilir. i-iii koşulları ile iv-vi koşulları birbirine denktir (Adams 1975).

Tanım 48: $\mathfrak{R}$, $\mathbb{R}^N$ de σ -cebiri ve $\mu: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. μ fonksiyonu $\mathfrak{R}$ sınıfındaki ayrık kümelerin bir $\{A_j: j \in \mathbb{N}\}$ sınıfının sayılabilir her birleşimi için

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \quad \forall A_j \cap A_k = \emptyset, j \neq k$$

eşitliğini sağlıyorsa, μ fonksiyonuna $\mathfrak{R}$ sınıfı üzerinde bir ölçüm denir (Adams 1975).

Teorem 20: μ fonksiyonu $\mathfrak{R}$ üzerinde bir ölçüm olsun. Bu durumda

i) Eğer $A, B \in \mathfrak{R}$ ve $A \subset B$ ise

$$\mu(A) \leq \mu(B),$$

ii) $j = 1, 2, \dots$ için $A_j \in \mathfrak{R}$ ve $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ise

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j)$$

ifadeleri yazılabilir (Adams 1975).

Teorem 21: $\mathbb{R}^N$ nin alt kümelerinin $\mathfrak{R}$ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlayan bir σ -cebiri olsun. Bu durumda

i) $\mathbb{R}^N$ de bulunan her açık küme $\mathfrak{R}$ ye aittir,

ii) Eğer $A \subset B, B \in \mathfrak{R}$ ve $\mu(B) = 0$ ise, $A \in \mathfrak{R}$ ve $\mu(A) = 0$ dır,

iii) $A = \{x \in \mathbb{R}^N : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ ise $A \in \mathfrak{R}$ ve

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$$

dır,

iv) μ öteleme altında değişmeyendir, yani $x \in \mathbb{R}^N$ ve $A \in \mathfrak{R}$ için

$$x + A = \{x + y : y \in A\} \in \mathfrak{R} \text{ ve } \mu(x + A) = \mu(A)$$

dır

şartlarını sağlayan bir μ ölçümü vardır (Adams 1975).

Bu özelliklere sahip bir $\mathfrak{R}$ sınıfının elemanlarına $\mathbb{R}^N$ nin Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri, μ fonksiyonuna $\mathbb{R}^N$ nin Lebesgue ölçümü ve herhangi bir $A \in \mathfrak{R}$ için $\mu(A)$ ifadesine A nın ölçümü denir (Adams 1975).

Tanım 49: Eğer $B \subset A \subset \mathbb{R}^N$ ve $\mu(B) = 0$ ise $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özelliğe, A kümesinde hemen hemen her (h.h.h.) yerde sağlanan bir özellik denir (Jain and Gupta 1986).

Tanım 50: Ölçülebilir bir küme üzerinde tanımlı ve $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kümesindeki değerleri alan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $k \in \mathbb{R}$ için

$$\{x: f(x) > k\}$$

kümesi ölçülebilir ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir (Jain and Gupta 1986).

Teorem 22: f ve g , X üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar ve c bir sabit olsun. Bu durumda

- i) $f \pm c$,
- ii) cf ,
- iii) $f \pm g$,
- iv) $|f|$,
- v) f^2 ,
- vi) fg ,
- vii) $f \div g$ ($g \neq 0$)

fonksiyonları da X de ölçülebilirdir. Ayrıca

viii) (f_n) ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise $\max \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, $\min \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, $\sup (f_n)$, $\inf (f_n)$, $\limsup (f_n)$ ve $\liminf (f_n)$ de ölçülebilir,

ix) f , X den $\mathbb{R}$ ye sürekli bir fonksiyon ve g ölçülebilir ve reel değerli fonksiyon ise $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ile tanımlanan " $f \circ g$ " bileşke fonksiyonu da ölçülebilirdir (Jain and Gupta 1986).

Tanım 51: f fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli ise f fonksiyonu her ikisi de ölçülebilir ve negatif olmayan $f^+ = \max(f, 0)$ ve $f^- = -\min(f, 0)$ fonksiyonlar cinsinden $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazılabilir. Bir Ω bölgesi üzerinde tanımlanan $\int_{\Omega} f^+(x)dx$ ve $\int_{\Omega} f^-(x)dx$ integrallerinden en az biri sonlu olmak üzere

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \int_{\Omega} f^+(x)dx - \int_{\Omega} f^-(x)dx$$

olarak alınsın. Eğer her iki integral sonlu ise f fonksiyonuna Ω bölgesinde Lebesgue integrallenebilir denir ve Ω bölgesindeki integrallenebilir fonksiyonların sınıfı $L^1(\Omega)$ ile gösterilir (Jain and Gupta 1986).

Teorem 23 (Fatou's lemma): Ω , $\mathbb{R}^N$ in ölçülebilir bir alt kümesi ve (f_n) negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\int_{\Omega} (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

dir (Zeidler 1995).

Teorem 24 (Lebesgue Majorant Yakınsama Teoremi): Ölçülebilir fonksiyonların (f_n) dizisi $\mathbb{R}^N$ kümesinde f fonksiyonuna noktasal ve h.h.h. yerde yakınsak olsun. Her n için $|f_n(x)| \leq \vartheta(x)$ olacak biçimde integrallenebilir bir ϑ fonksiyonu olsun. Bu durumda f fonksiyonu $\mathbb{R}^N$ de Lebesgue anlamında integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$$

dır (Royden 1963).

Tanım 52: $E \subset \mathbb{R}^N$ alt kümesi için

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{X}_E(x)$ fonksiyonuna, E nin karakteristik fonksiyonu denir (Curtain and Pritchard 1977).

Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 53: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

özellğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına Lebesgue uzayı denir ve $L^p(\Omega)$ ile gösterilir (Jain and Gupta 1986).

$\Omega, \mathbb{R}^N$ in ölçülebilir bir alt kümesi, $|\Omega| > 0$ ve $S(\Omega) = \{u \in \Omega: u, \Omega \text{ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi}\}$ olmak üzere $L^p(\Omega)$ uzayı

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega): \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$$

olarak da yazılabilir.

$1 \leq p < \infty$ iken $L^p(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := |u|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır (Adams 1975).

Sonuç 1: $L^p(\Omega)$ uzayı, $p = 2$ için $L^2(\Omega)$ uzayı olur. Bu uzay

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır (Adams 1975).

Tanım 54: Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için h.h.h. yerde $|u(x)| \leq M$ olacak şekilde negatif olmayan bir M sabiti mevcutsa u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan $M \geq 0$ sabit sayılarının en büyük alt sınırına da $|u|$ nun Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve $\operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)|$ ile gösterilir. Yani

$$\operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf_{\substack{\Omega^* \subset \Omega \\ |\Omega^*| = 0}} \left\{ \sup_{x \in \Omega \setminus \Omega^*} |u(x)| \right\}$$

veya

$$\operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{ M > 0 : \operatorname{meas}\{x : |u(x)| > M\} = 0 \}$$

veya

$$\operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf_{x \in \Omega} \left\{ \sup_{x \in \Omega^*} |u(x)| : \operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega^*) = 0 \right\}$$

dır. $|u|$ nun Ω bölgesindeki esas (essential) infimumu ise $\operatorname{essinf}_{x \in \Omega} |u(x)|$ ile gösterilir ve

$$\operatorname{essinf}_{x \in \Omega} |u(x)| = \sup_{\substack{\Omega^* \subset \Omega \\ |\Omega^*| = 0}} \left\{ \inf_{x \in \Omega \setminus \Omega^*} |u(x)| \right\}$$

veya

$$\operatorname{essinf}_{x \in \Omega} |u(x)| = \sup \{ M > 0 : \operatorname{meas}\{x : |u(x)| < M\} = 0 \}$$

veya

$$\operatorname{essinf}_{x \in \Omega} |u(x)| = \sup_{x \in \Omega} \left\{ \inf_{x \in \Omega^*} |u(x)| : \operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega^*) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Jain and Gupta 1986).

Önerme 1: 1) Eğer $\operatorname{meas}|\Omega| > 0$ ise

$$\inf_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \operatorname{essinf}_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

2) $\operatorname{esssup}_{x \in \Omega} (u(x)) > 0$ ve $\operatorname{esssup}_{x \in \Omega} (v(x)) > 0$ ise

$$\operatorname{esssup}_{x \in \Omega}(u(x)v(x)) \leq \operatorname{esssup}_{x \in \Omega}(u(x)) \cdot \operatorname{esssup}_{x \in \Omega}(v(x)),$$

3) $\operatorname{essinf}_{x \in \Omega}(u(x)) > 0$ ve $\operatorname{essinf}_{x \in \Omega}(v(x)) > 0$ ise

$$\operatorname{essinf}_{x \in \Omega}(u(x)v(x)) \geq \operatorname{essinf}_{x \in \Omega}(u(x)) \cdot \operatorname{essinf}_{x \in \Omega}(v(x))$$

dir (Jain and Gupta 1986).

Örnek 1: $f(x) = \begin{cases} 3, & x = 1 \\ -2, & x = -1 \\ 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{cases}$ fonksiyonu için $\operatorname{meas}\{-1, 1\} = 0$

olduğundan

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 3, \inf_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = -2, \operatorname{essinf}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 2$$

dir.

Örnek 2: $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \mathbb{Q} \\ \arctan x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonu için

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \infty, \inf_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = -\infty, \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \frac{\pi}{2}, \operatorname{essinf}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = -\frac{\pi}{2}$$

dir.

Tanım 55: $1 < p < \infty$ iken $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ($p' = \frac{p}{1-p}$) eşitliğini sağlayan $1 < p' < \infty$

sayısına p nin eşleneği denir (Jain and Gupta 1986).

Tanım 55 e göre, $1 < p < \infty$ ve $\phi \in (L^p(\Omega))'$ alınırsa, her $u \in L^p(\Omega)$ için

$$\phi(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

eşitliğini sağlayan bir $v \in L^{p'}(\Omega)$ vardır. Ayrıca

$$\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))'}$$

olduğundan

$$L^{p'}(\Omega) \cong (L^p(\Omega))'$$

olur. Bu iki uzay çok farklı elemanlara sahip olmalarına rağmen, Banach uzay olmaları açısından aynı kabul edilebilir.

Teorem 25 (Hölder Eşitsizliği): Eğer $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^{p'}(\Omega)$ ise $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq |u|_p |v|_{p'}$$

eşitsizliği sağlanır (Jain and Gupta 1986; Diening *et al.* 2011).

Teorem 26: $|\Omega| = \int_{\Omega} dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^p(\Omega)$ olur ve

$$|u|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |u|_q$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Jain and Gupta 1986).

Teorem 27: Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ ayrılabilir ve $C_0(\Omega)$ ile $C_0^\infty(\Omega)$ uzayları $L^p(\Omega)$ da yoğundur (Jain and Gupta 1986).

Teorem 28: Eğer $p \in (1, \infty)$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve yansımalıdır (Adams 1975).

Teorem 27 ve Teorem 28 den $L^1(\Omega)$ nın ayrılabilir fakat yansımali olmadığı, $L^\infty(\Omega)$ nın ise hem ayrılabilir hem de yansımali olmadığı sonucuna ulaşılır.

Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 56: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $p \in [1, \infty)$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p . kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayına $L_{loc}^p(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzay $p = 1$ için $L_{loc}^1(\Omega)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını gösterir (Adams 1975).

Tanım 57: $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliğini sağlayan $v \in L_{loc}^p(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α . mertebeden zayıf türevi denir. v fonksiyonuna, u fonksiyonun genelleşmiş türevi de denir ve $v = D^\alpha u$ biçiminde yazılabilir (Devito 1978).

Örnek 3: $n = 1$ ve $\Omega = (0,2)$ olmak üzere u ve v fonksiyonları

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in (1,2) \end{cases} \quad \text{ve} \quad v(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \\ 0, & x \in (1,2) \end{cases}$$

ise v fonksiyonu u fonksiyonunun zayıf türevidir.

Gerçekten $u'(x) = v$ olmak üzere

$$\int_0^2 u(x) D\eta(x) dx = - \int_0^2 v(x) \eta(x) dx, \quad \eta(x) \in C_0^\infty(\Omega) \quad (14)$$

eşitliğin sol kısmına $x = u$ ($dx = du$), $D\eta(x) dx = dv$ ($\eta(x) = v$) olarak kısmi integral uygularsak

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x) D\eta(x) dx &= \int_0^1 x D\eta(x) dx + \int_1^2 D\eta(x) dx \\ &= x \cdot \eta(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \eta(x) dx + \eta(x) \Big|_1^2 \\ &= \eta(1) - 0 - \int_0^1 \eta(x) dx + \eta(2) - \eta(1) \\ &= - \int_0^1 \eta(x) dx \end{aligned}$$

elde ederiz. (14) eşitliğinin sağ kısmından da

$$\begin{aligned} - \int_0^2 v(x) \eta(x) dx &= - \left(\int_0^1 1 \eta(x) dx + \int_1^2 0 \eta(x) dx \right) \\ &= - \int_0^1 \eta(x) dx \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^2 u(x) D\eta(x) dx = - \int_0^2 v(x) \eta(x) dx$$

olduğu görülür. Yani v , u nun zayıf türevidir.

Tanım 58: Ω , $\mathbb{R}^N$ de bir bölge, $m \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

olarak ifade edilen uzaya Sobolev uzayı denir. Bu uzayda tanımlanan norm; $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha(u)|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha(u)|_\infty$$

dır. $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ iken $\|u\|_{m,p}$ ve $\|u\|_{m,\infty}$ normları ile bir Banach uzayıdır. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ daki kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ olur (Sobolev 1938; Diening *et al.* 2011).

Lebesgue ve Sobolev uzayların tanımlarının bir sonucu olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ yazılabilir. Ayrıca $1 \leq p < \infty$ iken $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ da yoğun olduğundan dolayı $W_0^{0,p} = L^p(\Omega)$ olur. Dolayısıyla, bu uzaylar arasında herhangi bir $m \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$ için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Adams 1975).

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında

- i) $m = 0$ ise $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ile
- ii) $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ ile gösterilir.

$H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde verilir. $H^m(\Omega)$ uzayı,

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır (Curtain and Pritchard 1977).

Teorem 29: Eğer $p \in [1, \infty)$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ ayrılabilir (Adams 1975).

Teorem 30: Eğer $1 < p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ yansımali ve düzgün konvektir (Willem 1996).

Teorem 31 (Sobolev Eşitsizliği): $\Omega, \mathbb{R}^N$ de açık bir bölge olsun. Eğer $1 \leq p < \infty$, $mp < N$ ve $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise

$$p^* = \frac{Np}{N - mp}$$

Sobolev kritik üs olmak üzere

$$|u|_{p^*} \leq C \|u\|_{m,p}$$

olacak şekilde bir $C(n, m, p)$ sabiti vardır (Adams 1975).

Tanım 59: $\mathbb{R}^N$ de $B_{r_1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{r_2}(y)$ açık yuvarlarını göz önüne alalım.

$$K_x = B_{r_1}(x) \cap \{x + \lambda(z - x) : z \in B_{r_2}(y), \lambda > 0\}$$

Kümesine, tepe noktası x olan sonlu koni denir. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık kümesinin her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepe noktası ise ve bütün K_x konileri bir K sonlu konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa Ω bölgesinin koni özelliği vardır denir (Adams 1975).

Teorem 32 (Sobolev Gömmme Teoremi): $\Omega, \mathbb{R}^N$ de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ tamsayılar ve $p \in [1, \infty)$ ise aşağıdaki gömmeler yazılabilir. Eğer

i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq q^* = \frac{Np}{N - mp}$$

ya da özel olarak

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q \leq q^* = \frac{Np}{N - mp}$$

dir,

ii) $mp = N$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

dur. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır,

iii) $mp > N$ ise

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır (Adams 1975).

Yukarıdaki gömmelerde W yerine W_0 uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın yukarıdaki gömmeler yine geçerli olur.

Modüler Uzay ve Orlicz Uzayı

Tanım 60: X bir reel vektör uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in X$$

ise X e konveks uzay denir. Eğer X konveks, her $x, y \in X$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlıyorsa f ye konveks fonksiyon denir (Zeidler 1995).

Tanım 61: X bir reel vektör uzay olsun. Eğer $\rho: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyoneli her $x, y \in X$ için

i) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $\rho(x) = \rho(-x),$

iii) her $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \rho(x) + \beta \rho(y)$$

şartlarını sağlıyorsa ρ fonksiyoneline X üzerinde modüler adı verilir. Eğer her $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ ve her $x, y \in X$ için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \rho(x) + \beta \rho(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ρ fonksiyoneline X üzerinde konveks modüler denir (Nakano 1950; Musielak and Orlicz 1959).

Tanım 62: X bir reel vektör uzay ve $\rho: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyoneli X üzerinde bir modüler ise bu durumda

$$X_\rho = \{x \in X: \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho(\lambda x) = 0\}$$

uzayına modüler uzay adı verilir. X_ρ modüler uzayı X in bir alt vektör uzayıdır (Nakano 1950; Musielak and Orlicz 1959).

Tanım 63: X bir reel vektör uzay ve ρ fonksiyoneli X üzerinde konveks modüler olmak üzere X_ρ üzerinde

$$|u|_\rho = \inf \left\{ \lambda > 0: \rho \left(\frac{u}{\lambda} \right) = \int_{\Omega} \varphi \left(x, \frac{u}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanan norma Luxemburg normu adı verilir (Sharapudinov 1979; Musielak 1983; Fan and Zhao 2001).

Tanım 64: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de ölçülebilir bir bölge olsun. Eğer $\varphi: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- i) her $x \in \Omega$ için $\varphi(x, u)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,
- ii) $\varphi(x, 0) = 0, u > 0$ için $\varphi(x, 0) > 0$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(x, u) \rightarrow \infty$,
- iii) her $u \geq 0$ için $\varphi(x, u)$ ölçülebilir fonksiyon

özelliklerini sağlıyorsa φ fonksiyonuna Φ (Young fonksiyonları) sınıfına aittir denir (Musiak 1983).

Tanım 65: X bir reel vektör uzayı ve φ fonksiyonu Φ sınıfına ait ise her $u \in X$ için $\varphi(x, |u(x)|)$ fonksiyonu ölçülebilirdir ve

$$\rho(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, |u(x)|) dx$$

ifadesi X de bir modüler tanımlar. Eğer $\varphi(x, u)$ fonksiyonu her $x \in \Omega$ için u nun konveks fonksiyonu ise ρ, X de konveks modülerdir. Bu durumda

$$X_\rho = \left\{ u \in X: \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \varphi(x, \lambda |u(x)|) dx = 0 \right\}$$

modüler uzayına genelleştirilmiş Orlicz uzayı veya Musielak-Orlicz uzayı denir ve L^φ ile gösterilir. Ayrıca

$$L_0^\varphi = \left\{ u \in X: \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \varphi(x, \lambda |u(x)|) dx < \infty \right\}$$

kümesine genelleştirilmiş Orlicz sınıfı adı verilir. L_0^φ, L^φ uzayının bir konveks alt uzayı, L^φ uzayı ise X in L_0^φ uzayını kapsayan en küçük alt vektör uzayıdır. Eğer $\varphi(x, u) = \varphi(u)$ ise (φ, x 'den bağımsız ise) L^φ ve L_0^φ uzaylarına sırasıyla Orlicz uzayı ve Orlicz sınıfı denir (Nakano 1950; Musielak 1983).

Değişken Üslü Lebesgue Uzayı ($L^{p(\cdot)}(\Omega)$)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ölçülebilir bir altküme $|\Omega| > 0$ ve Ω bölgesinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi

$$S(\Omega) = \{u: u, \Omega \text{ bölgesinde ölçülebilir bir fonksiyon}\}$$

olsun. $S(\Omega)$ daki h.h.h. yerde birbirine eşit fonksiyonları tek eleman olarak göz önüne alalım. $p \in S(\Omega)$ olmak üzere her $x \in \Omega$, $s \geq 0$ için

$$\varphi(x, s) = s^{p(x)}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, Tanım 64 te ifade edilen şartları sağladığı için Φ sınıfına aittir. Ayrıca, $\varphi(x, s)$ fonksiyonunun her $x \in \Omega$ için s nin bir konveks fonksiyonu olduğu açıktır. Bu nedenle $u \in S(\Omega)$ için

$$\rho(u) = \rho_{p(\cdot)}(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, |u|) dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlanan $\rho_{p(\cdot)}: S(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $u, v \in S(\Omega)$ için Tanım 61 de ifade edilen özellikleri sağladığından dolayı $S(\Omega)$ kümesi üzerinde bir konveks modülerdir. Dolayısıyla

$$E_{\rho} = L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega): \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda u) = 0 \right\}$$

modüler uzayı, genelleştirilmiş Orlicz uzayının özel bir çeşidi ve $S(\Omega)$ uzayının bir alt uzayıdır.

$\varphi(x, s)$ fonksiyonunun özelliklerinden, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının en az bir $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda u) < \infty$ olacak şekilde tüm $u \in S(\Omega)$ fonksiyonlarının kümesi olduğu açıktır, yani

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in S(\Omega): \exists \lambda > 0, \rho(\lambda u) < \infty\}$$

yazılabilir.

$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının konveks bir alt uzayı olan

$$L_0^{p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in S(\Omega): \rho(u) < \infty\}$$

uzayı, genelleştirilmiş Orlicz sınıfının bir türüdür ve

$$L_1^{p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in S(\Omega): \forall \lambda > 0, \rho(\lambda u) < \infty\}$$

uzayı da $S(\Omega)$ nın $L_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ kümesinde kapsanan en büyük alt vektör uzayıdır. Bu uzaylar için genel olarak

$$L_1^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L_0^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$$

yazılabilir (Fan and Zhao 2001).

Tezimizin bundan sonraki kısmında aksi belirtilmedikçe $p(\cdot): \Omega \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonu için

$$p^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \text{ ve } p^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x)$$

notasyonları kullanılacaktır.

Tanım 66: $u \in S(\Omega)$ ve $\varphi(x, u) = (u(x))^{p(x)}$ olmak üzere her $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\sigma_{p(\cdot)}(u) := \int_{\Omega} \varphi(x, |u|) dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlanan $\sigma_{p(\cdot)}: L^{p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneline $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının modüler fonksiyoneli denir (Kováčik and Rákosník 1991; Diening *et al.* 2011).

$\sigma_{p(\cdot)}$ fonksiyoneli

- i) $\sigma_{p(\cdot)}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
- ii) $\sigma_{p(\cdot)}(u) = \sigma_{p(\cdot)}(-u)$,
- iii) her $u, v \in S(\Omega)$, her $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ için

$$\sigma_{p(\cdot)}(\alpha u + \beta v) \leq \alpha \sigma_{p(\cdot)}(u) + \beta \sigma_{p(\cdot)}(v)$$

özelliklerini sağladığı için $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ kümesi üzerinde bir konveks modülerdir.

Tanım 67: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de açık bir bölge olsun. $p(\cdot): \Omega \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ olmak üzere

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in S(\Omega): \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya değişken üslü Lebesgue uzayı denir. $1 < p^- < p^+ < \infty$ iken $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := |u|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0: \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır (Kováčik and Rákosník 1991; Diening *et al.* 2011).

Tanım 67 de ifade edilen Luxemburg normu ile ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4: $p(x) = x$, $\Omega = [1, 2]$, $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ olmak üzere $|f|_{p(x)}$ değeri

$$\begin{aligned}
|f|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0: \rho_{p(x)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0: \int_1^2 \left(\frac{2^{1/x}}{\lambda} \right)^x dx \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0: \int_1^2 (2\lambda^{-x}) dx \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0, \lambda \neq 1: \frac{2\lambda^{-x}}{-\ln \lambda} \Big|_1^2 \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0, \lambda \neq 1: \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda^2 \ln \lambda} \leq 1 \right\} \\
&= \inf \{ \lambda > 0, \lambda \neq 1: \lambda \geq 1,59708 \} \\
&\cong 1,59708
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 68: Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya $L^\infty(\Omega)$ uzayı denir ve bu uzayda tanımlanan norm

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := |u|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

veya

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c: \text{h. h. h. } x \in \Omega \text{ için } |u(x)| \leq c \}$$

dır. Bu norm ile $L^\infty(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır (Adams 1975).

Tanım 69: Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı h fonksiyonlarının oluşturduğu uzayın elemanı olan ve $\operatorname{essinf}_{x \in \Omega} |h(x)| \geq 1$ şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu uzaya $L_+^\infty(\Omega)$ uzayı denir. Yani

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega): \operatorname{essinf}_{x \in \Omega} h(x) \geq 1 \right\}$$

dır (Adams 1975).

Önerme 2: $p(\cdot) \in L_+^\infty(\Omega)$ olduğunda $\sigma_{p(\cdot)}$ modüler fonksiyonel aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i) $\sigma_{p(\cdot)}(u + v) \leq 2p^+ \left(\sigma_{p(\cdot)}(u) + \sigma_{p(\cdot)}(v) \right),$
- ii) $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ için
 $\lambda > 1$ ise

$$\sigma_{p(\cdot)}(u) \leq \lambda \sigma_{p(\cdot)}(u) \leq \lambda^{p^-} \sigma_{p(\cdot)}(u) \leq \sigma_{p(\cdot)}(\lambda u) \leq \lambda^{p^+} \sigma_{p(\cdot)}(u)$$

$0 < \lambda < 1$ ise

$$\lambda^{p^+} \sigma_{p(\cdot)}(u) \leq \sigma_{p(\cdot)}(\lambda u) \leq \lambda^{p^-} \sigma_{p(\cdot)}(u) \leq \lambda \sigma_{p(\cdot)}(u) \leq \sigma_{p(\cdot)}(u)$$

dır,

iii) $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}$ için $\sigma_{p(\cdot)}(\lambda u)$ fonksiyonu λ ya göre sürekli konveks çift fonksiyondur ve $\lambda \in [0, \infty)$ için artandır (Fan and Zhao 2001).

Teorem 33: Eğer $u, u_n \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $\sigma_{p(\cdot)}: L^{p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ise

$$\text{i)} \quad |u|_{p(\cdot)} > 1 (< 1; = 1) \Leftrightarrow \sigma_{p(\cdot)}(u) > 1 (< 1; = 1),$$

$$\text{ii)} \quad |u|_{p(\cdot)} > 1 \Rightarrow |u|_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \sigma_{p(\cdot)}(u) \leq |u|_{p(\cdot)}^{p^+},$$

$$\text{iii)} \quad |u|_{p(\cdot)} < 1 \Rightarrow |u|_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \sigma_{p(\cdot)}(u) \leq |u|_{p(\cdot)}^{p^-},$$

$$\text{iv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{p(\cdot)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{p(\cdot)}(u_n) = 0,$$

$$\text{v)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{p(\cdot)} \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{p(\cdot)}(u_n) \rightarrow \infty$$

dur (Kováčik and Rákosnik 1991; Fan and Zhao 2001).

Teorem 34: Eğer $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $n = 1, 2, \dots$ için $u_n \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ise

$$\text{i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u|_{p(\cdot)} = 0,$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{p(\cdot)}(u_n - u) = 0,$$

$$\text{iii)} \quad \Omega \text{ bölgesindeki ölçüme göre } u_n \rightarrow u \text{ iken } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{p(\cdot)}(u_n) = \sigma_{p(\cdot)}(u)$$

ifadeleri eşdeğerdir (Kováčik and Rákosnik 1991; Fan and Zhao 2001).

Teorem 35: p ölçülebilir bir fonksiyon, $p \in L^\infty(\Omega)$ ise $C(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı $(L^{p(\cdot)}(\Omega), |\cdot|_{p(\cdot)})$ da yoğundur. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bölgesi açık ise $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $(L^{p(\cdot)}(\Omega), |\cdot|_{p(\cdot)})$ da yoğundur (Kováčik and Rákosnik 1991; Fan and Zhao 2001).

Teorem 36: Eğer $x \in \mathbb{R}^N$ için $1 \leq p(x) \leq p^+ < \infty$, p ölçülebilir ve $\mathbb{R}^N$ deki herhangi bir yuvarda log-Hölder şartını sağlayan bir fonksiyon ise $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uzayı $(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N), |\cdot|_{p(\cdot)})$ da yoğundur (Samko 2000).

Tanım 70: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge, E kümesi Ω bölgesinin ölçülebilir bir alt kümesi ve $\mathcal{X}_E(x)$, E nin karakteristik fonksiyonu olsun. Eğer her $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\lim_{E \rightarrow \infty} |u(x)\mathcal{X}_E(x)|_{p(\cdot)} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $u(x)$ fonksiyonuna $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde tanımlanan $|\cdot|_{p(\cdot)}$ normuna göre mutlak süreklidir denir (Fan and Zhao 2001).

Teorem 37: Her $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ fonksiyonu $|\cdot|_{p(\cdot)}$ normuna göre mutlak süreklidir (Fan and Zhao 2001).

Teorem 38 (Hölder Eşitsizliği): Eğer $p \in L_+^\infty(\mathbb{R}^N)$, $p^- > 1$ ise $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ olmak üzere $L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ uzayı, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ in dual uzayıdır ve her $u \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ için

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'} \right) |u|_{p(\cdot)} |v|_{p'(\cdot)} \leq 2|u|_{p(\cdot)} |v|_{p'(\cdot)}$$

dir (Kováčik and Rákosnik 1991; Fan and Zhao 2001; Diening *et al.* 2011; Ayazoglu ve Alisoy 2018).

Teorem 39: $m, h \in C_+(\bar{\Omega})$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^N$ ve $u \in L^{h(\cdot)}(\Omega)$ için $m(x) \leq h(x)$ olsun. $|u|^{m(\cdot)} \in L^{\frac{h(\cdot)}{m(\cdot)}}(\Omega)$ için

$$||u|^{m(\cdot)}|_{\frac{h(\cdot)}{m(\cdot)}} \leq \max \{ |u|_{h(\cdot)}^{m^-}, |u|_{h(\cdot)}^{m^+} \} \leq |u|_{h(\cdot)}^{m^-} + |u|_{h(\cdot)}^{m^+}$$

dır (Kováčik and Rákosnik 1991; Fan and Zhao 2001; Diening *et al.* 2011).

Teorem 40: $l \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $q, lq \in L_+^\infty(\mathbb{R}^N)$ ve $u \in L^{l(\cdot)q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ olsun. Bu durumda

$$\min \{ |u|_{l(\cdot)q(\cdot)}^{l^-}, |u|_{l(\cdot)q(\cdot)}^{l^+} \} \leq |u|_{l(\cdot)}^{l(\cdot)} \leq \max \{ |u|_{l(\cdot)q(\cdot)}^{l^-}, |u|_{l(\cdot)q(\cdot)}^{l^+} \}$$

dır. Özel olarak $l(\cdot) = l$ sabit olursa

$$||u|^l|_{q(\cdot)} = |u|_{lq(\cdot)}^l$$

olur (Kováčik and Rákosnik 1991; Diening *et al.* 2011; Ayazoglu ve Alisoy 2018).

$l \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $q, lq \in L_+^\infty(\mathbb{R}^N)$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}^N$ için $l(x) > \frac{1}{q^+} > 0$ dır.

Teorem 41: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge, $0 < |\Omega| < \infty$ ve $p(\cdot), q(\cdot) \in L_+^\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömmesinin olması için gerek ve yeter şart h.h.h. $x \in \Omega$ için $p(\cdot) \leq q(\cdot)$ olmasıdır. Ayrıca

$$|u|_{p(\cdot)} \leq C(1 + |\Omega|)|u|_{q(\cdot)}$$

eşitsizliği yazılabilir (Kováčik and Rákosnik 1991).

Değişken Üslü Sobolev Uzayı ($W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$)

Tanım 71: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$ olsun. $|\alpha| \leq m$ özellikli her α -çoklu indisi için Ω bölgesinde tanımlı $D^\alpha(u) \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ şeklindeki tüm u fonksiyonlarının sınıfına değişken üslü Sobolev uzayı adı verilir ve

$$W^{m,p(\cdot)}(\Omega) := \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p(\cdot)}(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde yazılır. $1 < p^- < p^+ < \infty$ iken $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} := \|u\|_{m,p(\cdot)} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{p(\cdot)}$$

normu ile ayrılabilir ve yansılmalı bir Banach uzayıdır. $m = 1$ olarak alınırsa $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) := \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\}$$

olur. $1 < p^- < p^+ < \infty$ iken $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} := \|u\|_{1,p(\cdot)} = |u|_{p(\cdot)} + |\nabla u|_{p(\cdot)}$$

normu ile ayrılabilir ve yansılmalı bir Banach uzayıdır (Kováčik and Rákosnik 1991; Diening *et al.* 2011).

Tanım 72: $u \in S(\Omega)$ ve $\varphi(x, u) = (\nabla u(x))^{p(x)} + (u(x))^{p(x)}$ olmak üzere her $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\Lambda_{p(\cdot)}(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, |u|) dx = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) dx,$$

şeklinde tanımlanan $\Lambda_{p(\cdot)} : W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneline $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının modüler fonksiyoneli denir (Kováčik and Rákosnik 1991; Diening *et al.* 2011).

Teorem 42: Eğer $u, u_n \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $\Lambda_{p(\cdot)} : W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ise

$$\text{i)} \quad \|u\|_{1,p(\cdot)} > 1 (< 1; = 1) \Leftrightarrow \Lambda_{p(\cdot)}(u) > 1 (< 1; = 1),$$

$$\text{ii)} \quad \|u\|_{1,p(\cdot)} > 1 \Rightarrow \|u\|_{1,p(\cdot)}^{p^-} \leq \Lambda_{p(\cdot)}(u) \leq \|u\|_{1,p(\cdot)}^{p^+},$$

$$\text{iii)} \quad \|u\|_{1,p(\cdot)} < 1 \Rightarrow \|u\|_{1,p(\cdot)}^{p^+} \leq \Lambda_{p(\cdot)}(u) \leq \|u\|_{1,p(\cdot)}^{p^-},$$

$$\text{iv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{1,p(\cdot)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{p(\cdot)}(u_n) = 0,$$

$$\text{v)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{1,p(\cdot)} = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{p(\cdot)}(u_n) = \infty$$

dur (Kováčik and Rákosnik 1991; Fan and Zhao 2001).

$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayıdır. Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{p(\cdot)} := |\nabla u|_{p(\cdot)}$$

şeklindedir. Eğer $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ise $\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ normu ile $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı da ayrılabilir ve yansılalı bir Banach uzayı olur (Kováčik and Rákosnik 1991).

Teorem 43: $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$, $x \in \Omega$ ve $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı $\left(W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\right)^*$

olmak üzere $Lu = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx$ operatörü

i) $L: W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ konveks ve $L': W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \left(W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\right)^*$ sürekli, sınırlı,

kesin monoton, homeomorfizm operatördür,

ii) L , (S_+) tipi dönüşümdür, yani, eğer $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında $u_n \rightarrow u$ ve $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (L(u_n) - L(u), u_n - u) \leq 0$ ise $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında $u_n \rightarrow u$ dur,

iii) L , $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ de iyi tanımlıdır,

iv) $L \in C^1\left(W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ ve her $u, v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\langle L'(u), v \rangle = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v) dx \right),$$

v) L , $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde alttan zayıf yarı süreklidir

şartlarını sağlar (Fan and Zhang 2003).

Teorem 44: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $p(x), q(x) \in C(\bar{\Omega})$ olsun. Her $x \in \bar{\Omega}$ için $1 \leq q(x) < p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ ise

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega) \text{ ve } W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

dır (Kováčik and Rákosnik 1991; Fan et al. 2001; Fan and Zhao 2001).

Tanım 73: X, Y iki normlu uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere herhangi $x_1, x_2 \in X$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\alpha$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ sayıları varsa f fonksiyonu X üzerinde Hölder koşulunu sağlar denir. A ve α sayılarına, sırasıyla Hölder katsayısı ve Hölder üssü denir. Eğer $\alpha = 1$ ise

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

olacak şekilde negatif olmayan L sabiti varsa f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar veya f , Lipschitz süreklidir denir (Fucik and Kufner 1980; Miklavčič 1998).

Lipschitz koşulundan daha zayıf koşul olan log-Hölder koşulu aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 74: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de açık bir bölge ve $p: \Omega \rightarrow [1, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{-\log|x - y|}, \quad |x - y| < \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $C_0 > 0$ sayısı varsa $p(x)$ fonksiyonuna (local olarak) log-Hölder (Lipschitz) süreklidir denir (Diening 2002; Cruz-Uribe and Fiorenza 2013).

Tanım 75: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de açık bir bölge ve $p: \Omega \rightarrow [1, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ için p fonksiyonu log-Hölder sürekli ve her $x \in \Omega$ için

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\log(e + |x|)}$$

olacak şekilde $\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x) = p_\infty \in [1, \infty)$ ve $C_\infty > 0$ sabiti varsa p fonksiyonuna global log-Hölder (Lipschitz) süreklidir denir (Diening 2002; Cruz-Uribe *et al.* 2003; Cruz-Uribe and Fiorenza 2013).

Teorem 45: $p: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz sürekli bir fonksiyon ve $q: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu h.h.h. $x \in \bar{\Omega}$ için

$$p(x) \leq q(x) \leq p^*(x) = \frac{Np(x)}{N - mp(x)}$$

ise

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan *et al.* 2001).

Teorem 46: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de Lipschitz sınırına sahip açık sınırlı bir bölge, $1 < p^- \leq p^+ < N$, $\delta = \frac{q^+ - q^-}{N^*}$, $N^* = \frac{N}{N-1}$ ve $p(x)$ fonksiyonu local olarak log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda en az bir $\delta > 0$ için $q(x) \leq p^*(x) - \delta$ özelliğindeki q fonksiyonu için

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi vardır (Diening 2002).

Teorem 47: Ω , $\mathbb{R}^N$ de ($N \geq 2$) koni özelliğine sahip açık bir bölge, m pozitif bir tamsayı olmak üzere $p: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$1 < p^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \leq p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \overline{\Omega}} p(x) < \frac{N}{m} \text{ ve } mp(x) < N$$

olacak şekilde ölçülebilir reel değerli düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, Ω da tanımlı ölçülebilir $q(x)$ fonksiyonu h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$p(x) \leq q(x)$$

ve

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} (p^*(x) - q(x)) > 0$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan *et al.* 2001).

Teorem 48: Ω , $\mathbb{R}^N$ de ($N \geq 2$) sınırlı bir bölge, m pozitif bir tamsayı, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve Ω da tanımlı ölçülebilir $q(x)$ fonksiyonu h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$p(x) \leq q(x)$$

ve

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} (p^*(x) - q(x)) > 0$$

ise

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi vardır (Fan *et al.* 2001).

Teorem 49 (Poincaré Eşitsizliği): Ω , $\mathbb{R}^N$ de düzgün sınıra sahip bir bölge ve $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$|u|_{p(\cdot)} \leq c |\nabla u|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliğini sağlayacak $c > 0$ sabiti vardır (Kováčik and Rákosník 1991; Diening *et al.* 2011).

MATERYAL ve METOT

Bu bölümde standart olmayan büyüme koşuluna sahip kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı için varyasyonel yaklaşım, bu yaklaşımla ilgili temel kavramlar, varyasyonel yaklaşıma ilişkin tanımlar ve teoremler ile varyasyonel yaklaşımda kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilecektir.

Temel Kavramlar

Tanım 76: $F = F(x; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N)$ bir fonksiyon ve bu fonksiyonun $i = 0, 1, \dots, N$ için $\frac{\partial F}{\partial \xi_i}$ türevleri mevcut olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de tanımlı

$$J(u) = \int F\left(x; u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_N}\right) dx$$

fonksiyoneline Euler-Lagrange fonksiyoneli (enerji fonksiyoneli),

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_0}(x; u(x), \text{grad } u(x)) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}(x; u(x), \text{grad } u(x)) \right) = 0 \quad (15)$$

denkleminde Euler-Lagrange denklemi denir (Fucik and Kufner 1980).

J fonksiyonelinesi ekstremum yapan bir fonksiyonun var olması için gerek ve yeter şart (15) denkleminin sağlanmasıdır.

Örnek 5: X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) sınırlı bir bölge, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon için

$$-\text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f(x, u) \quad (16)$$

kısmi diferansiyel denkleminin karşılık gelen $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ Euler-Lagrange fonksiyoneli (enerji fonksiyoneli) her $u \in X$ için

$$J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx$$

dir. Bu J enerji fonksiyonelinesinin türevi ise

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

dir.

Her $v \in C_0^\infty$ için

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx = 0$$

eşitliğini sağlayan $u \in X$ e (16) diferansiyel denkleminin zayıf (genelleştirilmiş) çözümü denir.

Tanım 77: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $p: \Omega \rightarrow (1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$|t|^{p(x)} \leq F(x, t) \leq c(|t|^{p(x)} + 1)$$

şartını sağlayan $F(x, t) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ fonksiyonuna nonstandard büyüme koşullu veya standart olmayan büyüme koşullu yada $p(x)$ -büyüme koşullu fonksiyon denir. Standart olmayan büyüme koşullu fonksiyonları bulunduran denklemlere de standart olmayan büyüme koşullu denklemler denir (Zhikov 1987; Acerbi and Mingione 2001).

Tanım 78: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $p, q: \Omega \rightarrow (1, \infty)$ ve $1 < p(x) < q(x)$ şeklindeki ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$|t|^{p(x)} \leq F(x, t) \leq c(|t|^{q(x)} + 1)$$

şartını sağlayan $F(x, t) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ fonksiyonuna $(p(x), q(x))$ -büyüme koşullu fonksiyon denir (Marcellini 1991; Acerbi and Mingione 2001).

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, \nabla u(x)) dx$$

enerji integrali $p(x)$ -büyüme koşuluna sahip iken, $F(x, \nabla u(x))$ fonksiyoneli $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(x)} dx$ olarak alınıp

$$\frac{\partial F(x, \nabla u(x))}{\partial u(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x, \nabla u(x))}{\partial (\nabla u(x))} \right) = 0$$

şeklindeki Euler-Lagrange denkleminde göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\Delta_{p(x)}u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^{p(x)-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) \\
&= \operatorname{div} \left(|\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x) \right) = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

elde edilir. Bu denklem nonlinear ve nonhomojen olan $p(x)$ -Laplace denklemidir. Yani $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$\Delta_{p(x)}(\lambda u) \neq \lambda^{p(x)-1} \Delta_{p(x)}(u)$$

dır.

(17) denkleminde $p(x) = p = \text{sabit}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
\Delta_p u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) \\
&= \operatorname{div} (|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)) = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

şeklindeki nonlinear ve homojen p -Laplace denklemi elde edilir.

Eğer (17) denkleminde $p(x) = 2$ olarak alınırsa

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla u(x)) = 0 \tag{19}$$

lineer ve homojen Laplace denklemi elde edilir.

Yukarıda ifade edilen (17), (18) ve (19) denklemleri arasında bazı yapısal farklılıklar vardır. (19) da verilen Laplace denklemi lineerdir, yani eğer u ve v fonksiyonları (19) denklemi için bir çözüm ise, α ve β sabitleri için, $\alpha u + \beta v$ fonksiyonu da (19) denkleminin çözümü olur. Yani lineer denklemlerde herhangi iki çözümünün lineer birleşimi aynı denklem için yine bir çözüm oluşturur. p -Laplace denklemi, p nin 2 den farklı olması durumunda lineer değildir, ancak *scalable*'dir, yani genel olarak $u + v$ fonksiyonu (18) denkleminin bir çözümü değilken $\alpha u + \beta$ fonksiyonu (18) denklemi için çözüm olabilmektedir. $p(x)$ -Laplace denkleminin lineer olmama durumu p -Laplace denklemine göre çok daha güçlüdür. Dolayısıyla (18) denkleminin çözümü olan $\alpha u + \beta$ fonksiyonunun (17) denkleminin çözümü olabilmesi için $\lambda = 1$ olması gerekmektedir.

Tanım 79: X bir Banach uzay ve $J: X \rightarrow \mathbb{R}$, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ sınıfından bir fonksiyonel olsun. Her $v \in X$ için

$$\langle J'(u), v \rangle = 0$$

eşitliğini sağlayan $u \in X$ e, J fonksiyonelinin kritik noktası denir (Rabinowitz 1986).

Bir diferansiyel denklemin zayıf çözümleri olan $u \in X$ fonksiyonları aynı zamanda bu diferansiyel denklemin kritik noktalarıdır.

Not: Bir kısmi diferansiyel denklemde görülen tüm kısmi türevlere sahip çözüme klasik çözüm denir. Bununla birlikte zayıf çözüm, denklemdeki bazı kısmi türevlere sahip olmayabilir.

Tanım 80: X bir Banach uzay ve $T: X \rightarrow X^*$ tanımlı bir operatör olmak üzere

$$T(\cdot) = J'(\cdot)$$

olacak şekilde bir $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli bulunabiliyorsa T operatörüne varyasyonel operatör denir. Eğer herhangi bir problem

$$T(\cdot) = 0$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu tip probleme varyasyonel problem denir (Struwe 2000).

Tanım 81: X bir Banach uzay ve $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olmak üzere her $u \in X$ için

$$|J(u)| \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı mevcutsa J fonksiyoneline sınırlıdır veya iyi tanımlıdır denir (Struwe 2000).

Tanım 82: X bir Banach uzay ve $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olmak üzere her $v \in X$ için

$$J(v^*) \leq J(v)$$

olacak şekilde X de bir v^* fonksiyonu varsa, bu v^* fonksiyonuna J fonksiyonelinin bir minimumu veya minimize edicisi denir ve

$$\inf_{v \in X} J(v) = J(v^*)$$

şeklinde yazılır (Struwe 2000).

Tanım 83: X bir Banach uzay ve $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olmak üzere her $(u_n) \subset X$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{u \in X} J(u)$$

eşitliğini sağlayan (u_n) dizisine J enerji fonksiyonelinin minimize dizisi denir (Struwe 2000).

Tanım 84: X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ sınırlı bir bölge ve $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyoneli

- i) h.h.h. $x \in \Omega$ için $\xi \mapsto f(x, \xi)$ fonksiyoneli sürekli,
- ii) her $\xi \in \mathbb{R}$ için $x \mapsto f(x, \xi)$ fonksiyoneli Ω da ölçülebilir

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyoneli Carathéodory koşulunu sağlar denir (Struwe 2000).

Önerme 3: X bir Banach uzay, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (N \geq 2)$ sürekli bir fonksiyon ve her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in \Omega$ ve $|t| \geq M (\exists M > 0)$, $t \in \mathbb{R}$ için

$$0 < \theta F(x, t) \leq t f(x, t)$$

olacak şekilde en az bir tane $\theta > p^+$ sayısı varsa f fonksiyonu Ambrosetti-Rabinovitz (AR) koşulunu sağlar (Ambrosetti and Rabinowitz 1973).

AR koşulu bir problemin çözümü için sınırlı bir dizi bulmak gerektiğinde f fonksiyonunun sağlaması gereken önemli bir koşuldur.

Tanım 85: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınırlı bir bölge, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir Carathéodory fonksiyonu ve $u_0 \in H_0^{1,2}(\Omega)$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\cdot, u), & x \in \Omega \\ u = u_0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (20)$$

olsun. Eğer $\partial\Omega$ üzerinde $u \leq u_0$ ve her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ için

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx \leq \int_{\Omega} f(\cdot, u) \varphi dx$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $u \in H^{1,2}(\Omega)$ ya (20) probleminin sub çözümü,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx \geq \int_{\Omega} f(\cdot, u) \varphi dx$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $u \in H^{1,2}(\Omega)$ ya (20) probleminin sup çözümü denir (Struwe 2000).

Teorem 50: $\underline{u}, \bar{u} \in H^{1,2}(\Omega)$, (20) probleminin sırasıyla sub ve sup çözümleri olsun. Ω bölgesinin h.h.h. yerinde $-\infty < \underline{c} \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \bar{c} < \infty$ olacak şekilde $\underline{c}, \bar{c}$ sabitleri olduğunu varsayalım. Bu durumda (20) nin Ω bölgesinin h.h.h. yerinde $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ şartını sağlayan bir $u \in H^{1,2}(\Omega)$ zayıf çözümü vardır (Struwe 2000).

Tanım 86: X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer $u \in X$ için

$$\|u\|_X \rightarrow \infty \text{ iken } J(u) \rightarrow \infty$$

oluyorsa J fonksiyoneline, X üzerinde Coercive fonksiyoneldir denir (Drábek *et al.* 1997).

Varyasyonel Yaklaşım

Varyasyonel yaklaşım, özellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analizinde kullanılan çok etkili bir araçtır. Bu yaklaşım, u bilinmeyen bir fonksiyon ve $T(\cdot)$ lineer olmayan bir operatör olmak üzere

$$T(u) = 0 \tag{21}$$

şeklindeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için, fonksiyonel analiz tekniklerinin kullanıldığı bazı varyasyonel hesaplamalara dayanır. Şimdilik, (21) tipindeki denklemlerin çözümünü veren genel bir teoremin mevcut olmaması, varyasyonel yaklaşımın önemini daha iyi ortaya koymaktadır.

Varyasyonel yaklaşım ile herhangi bir diferansiyel denklemi doğrudan çözmek yerine verilen diferansiyel denklemin çözümlerini ilgili enerji fonksiyonelinin kritik noktalarına veya minimize dizisine karşılık getirerek bulmak amaçlanır. Varyasyonel yaklaşımda iki temel yöntem kullanılır.

1) Klasik metot: Bu metoda göre, (21) denkleminin karşılık gelen enerji fonksiyoneli J olmak üzere $T(u) = J'(u)$ olduğu için $T(u) = 0$ denkleminin çözümü olan u fonksiyonları $J'(u) = 0$ enerji fonksiyonelinin de çözümüdür. Dolayısıyla, $J(u)$ enerji fonksiyoneli sağlayan u kritik noktaları aynı zamanda $T(u) = 0$ probleminin de zayıf çözümleridir. Diğer bir ifadeyle; X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumları, $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümleri olduğundan dolayı varyasyonel yaklaşımla, herhangi bir $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümlerini bulmak için, $F(x, u(x), \nabla u(x))$ e karşılık gelen ve

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

şeklinde tanımlanan $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumları (veya kritik noktaları) olan $u = u(x)$ fonksiyonlarını elde etmek hedeflenir. $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumlara

sahip olması için gerek şart $J'(u)$ ya karşılık gelen Euler-Lagrange denkleminin sağlanması yani

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla u)} \right) = 0$$

olmasıdır.

2) Direkt metot: Bu metot ile, X bir Banach uzay ve (21) denkleminin karşılık gelen enerji fonksiyoneli $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$J(u_n) \rightarrow \inf(J(u): u \in X)$$

olacak şekilde bir $(u_n) \subset X$ dizisi hesaba katılarak

$$u_{n_k} \rightarrow u_0 \in X \text{ ve } J(u_0) = \inf_{u \in X} J(u)$$

olacak şekilde bir (u_{n_k}) alt dizisinin varlığı gösterilir. Bu durumda (u_n) dizisi J fonksiyoneli minimize eder ve (u_{n_k}) alt dizisinin yakınsadığı u_0 değeri de J fonksiyonelinin bir minimumu (kritik değeri) ve dolayısıyla $J'(u) = 0$ denkleminin bir (zayıf) çözümü olur. Bu yöntemi kullanırken yukarıda bahsedilen yakınsamanın gerçekleşebilmesi için bir başka deyişle yakınsak bir alt dizinin varlığından emin olmak için bazı kompaktlık koşulları ((PS) koşulu, Cerami koşulu) ve nispeten daha zayıf topolojiler (Dual uzay üzerinde tanımlı topolojik yapılar) kullanma zarureti doğabilir.

f fonksiyonu gradient içerdiği zaman ele alınan problemler varyasyonel değildir. Bundan dolayı f fonksiyonu gradient içerdiğinde varyasyonel yaklaşım direk uygulanamaz. Bu durumlarda sub ve sup çözümleri, topolojik derece, sabit nokta teoremleri, Morse teorisi ve yaklaşım teknikleri, sabitleme “Freeze” işlemi gibi yöntemler kullanılabılır (Ruiz 2004; Liu *et al.* 2012; Faria *et al.* 2014; Faraci *et al.* 2015; Pei *et al.* 2017).

Ayazoglu vd (2017a) tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bir bölge, $1 < p(x) < 2$, $x \in \bar{\Omega}$ ve f bazı özel şartları sağlayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) + |u|^{p(x)-2} u = f(x, u, |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

varlık problemi incelendi. f fonksiyonu gradient içerdiğinden ele alınan problem varyasyonel değildir. Bu problemde varyasyonel yöntemi kullanabilmek için yazarlar tarafından, Figueiredo *et al.* (2004) nun geliştirdiği gradient’i sabitleme “Freeze” işlemi gerçekleştirilerek varyasyonel problem elde edilmiş ardından Mountain Pass ve iterasyon teknikleri kullanılarak çözümün varlığı elde edilmiştir.

Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Teoremler

Teorem 51: X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli

- i) X de alttan zayıf yarı sürekli,
- ii) X de coercive, yani $\|u\|_X \rightarrow \infty$ iken $J(u) \rightarrow \infty$

şartlarını sağlıyorsa

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v)$$

eşitliğini sağlayan bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Alttan zayıf yarı sürekli ve coercive şartlarını sağlayan J fonksiyonelinin bir minimum noktası vardır. J enerji fonksiyoneli eğer alttan zayıf yarı sürekli ve coercive şartlarından herhangi birini sağlamazsa bu teorem geçersizdir. Bu teoremin geçersiz olduğu durumda Kritik Nokta Teorisi kullanılır. Kritik nokta teorisine göre, fonksiyonelin alttan sınırlı olmadığı durumlarda fonksiyoneli minimize eden global minimum değerler yerine kritik noktalar (saddle points) bulunur.

Tanım 87 (Palais-Smale Dizisi): X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere herhangi bir $(u_n) \subset X$ dizisi için

- i) $|J(u_n)| \leq c, c \in \mathbb{R},$
 - ii) X^* uzayında $n \rightarrow \infty$ iken $J'(u_n) \rightarrow 0$
- (A)

şartları sağlanıyorsa, (u_n) dizisine J enerji fonksiyonelinin bir Palais-Smale dizisi denir. Palais-Smale dizisi $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyonelinin minimize yapar (Palais and Smale 1964; Palais 1970).

$J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli alttan sınırlı değilse, J enerji fonksiyonelinin Palais-Smale dizisi hakkında kesin bir şey söylenemez.

Teorem 52 (Palais-Smale Koşulu): X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J nin her Palais-Smale dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahip ise J enerji fonksiyoneli Palais-Smale koşuluna sahiptir denir (Palais and Smale 1964; Palais 1970).

Tanım 88: X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere (A) şartlarını sağlayan bir $(u_n) \subset X$ dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahipse J enerji fonksiyoneli $c \in \mathbb{R}$ seviyesinde $(PS)_c$ koşulunu sağlar denir. Eğer J enerji fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlarsa, o zaman her $c \in \mathbb{R}$ için $(PS)_c$ koşulunu da sağlar (Palais and Smale 1964; Palais 1970; Rabinowitz 1986).

Teorem 53 (Ekeland Varyasyonel Prensibi): X bir Banach uzay ve $J: X \rightarrow (-\infty, \infty)$ tanımlı bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli ve alttan sınırlı ise her $\varepsilon > 0$ için

$$J(u_\varepsilon) < \inf_{u \in X} J(u) + \varepsilon$$

$$J(u_\varepsilon) < J(u) + \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_X, \quad u_\varepsilon \neq u$$

olacak şekilde bir (u_ε) dizisi vardır. Ekeland's Varyasyonel yaklaşımıyla J enerji fonksiyonelinin Palais-Smale dizisi elde edilebilir (Ekeland 1974; Brezis and Nirenberg 1991).

Teorem 54 (Ekeland Varyasyonel Prensibi 2): X bir Banach uzay ve $J: X \rightarrow (-\infty, \infty)$ alttan sınırlı bir enerji fonksiyoneli ise her $\varepsilon > 0$ için

$$J(u) < \inf_{u \in X} J(u) + \varepsilon$$

$$X^* \text{ uzayında } |J'(u_n)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $u \in X$ vardır (Ekeland 1974).

Teorem 55: X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli

- i) (PS) koşulunu,
- ii) X de alttan sınırlı

şartlarını sağlıyorsa

$$J(u) < \inf_{v \in X} J(v) + \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Teorem 56: X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli

- i) X de alttan zayıf yarı sürekli,
- ii) X de coercive, yani $\|u\|_X \rightarrow \infty$ iken $J(u) \rightarrow \infty$,
- iii) X de alttan sınırlı

şartlarını sağlıyorsa

$$J(u) < \inf_{v \in X} J(v)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Teorem 57: X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli

- i) X de alttan zayıf yarı sürekli,
- ii) X de coercive, yani $\|u\|_X \rightarrow \infty$ iken $J(u) \rightarrow \infty$

şartlarını sağlıyorsa J enerji fonksiyoneli, X üzerinde alttan sınırlıdır ve

$$J(u) < \inf_{v \in X} J(v)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Tanım 89 (Cerami koşulu): X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli, herhangi bir $(u_n) \subset X$ dizisi için

- i) $|J(u_n)| \leq C$,
- ii) $n \rightarrow +\infty$ iken $(1 + \|u_n\|_X)|J'(u_n)| \rightarrow 0$

şartlarını sağlayan yakınsak bir alt diziye sahip ise J enerji fonksiyoneli Cerami koşuluna (C) sahiptir denir. Buradaki (u_n) dizisine de Cerami dizisi denir (Cerami 1980).

Teorem 58 (Mountain Pass Geometrisi): X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli (PS) koşulunu ve $J(0) = 0$ şartını sağlasın. Bunlara ilave olarak J fonksiyoneli

- i) her $u \in X$ fonksiyonu için

$$\|u\|_X = \rho \text{ iken } J(u) \geq \alpha > 0$$

koşullarını sağlayan α ve ρ pozitif sayılar vardır,

- ii) $J(w) < 0$ (veya $t \rightarrow \infty$ iken $J(tw) < -\infty$) olacak şekilde $\|u\|_X > \rho$ şartını sağlayan bir $w \in X$ fonksiyonu vardır

şartlarını sağlarsa J enerji fonksiyoneli, X uzayında sıfırdan farklı en az bir kritik noktaya sahiptir ve

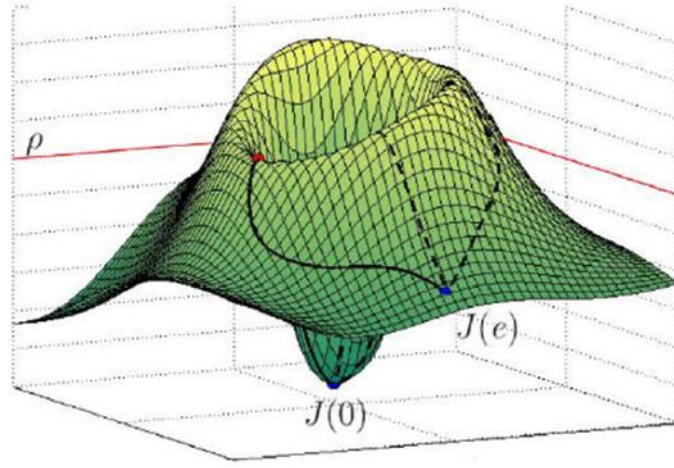
$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], X) | \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

olmak üzere

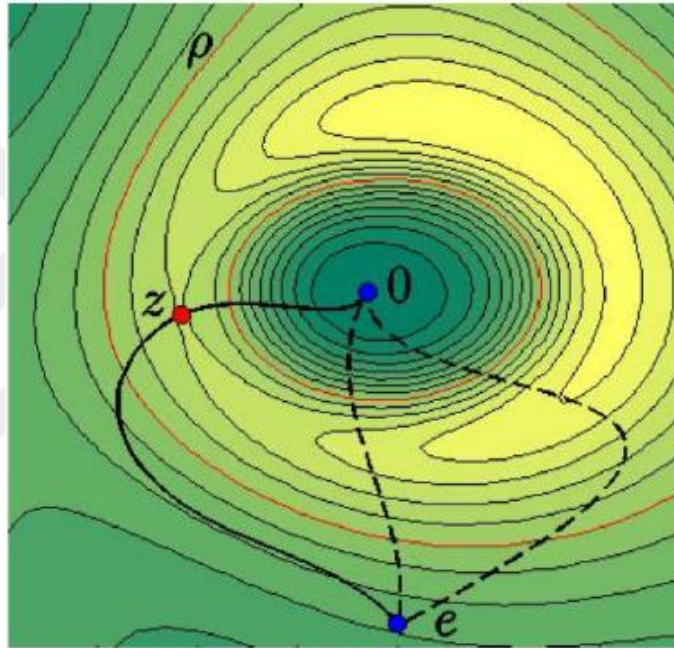
$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(t)) \geq \alpha$$

$J(u)$ nun bir kritik değeridir (Rabinowitz 1986; Willem 1996).

Mountain Pass Geometrisi, J enerji fonksiyonelinin coercivelik özelliğinin yerine kullanılabilir. Palais-Smale koşulunu ve Mountain Pass Geometrisini sağlayan bir J enerji fonksiyonelinin en az bir kritik noktası vardır. Bu kritik noktanın varlığı bize verilen denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu gösterir.



Şekil 2. $\mathbb{R}^3$ de Mountain Pass Teoreminin bir geometrik gösterimi (Kazar 2019).



Şekil 3. Şekil 2. de temsil edilen fonksiyonelin $\mathbb{R}^2$ de geometrik gösterimi (Kazar 2019).

Teorem 59 (Genelleştirilmiş Mountain Pass Teoremi): X bir Banach uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlayan bir fonksiyonel ve $J(0) = 0$ olmak üzere

i) $\|u\|_X > \rho$ iken $J(u) \leq J(0)$,

ii) $\alpha = \inf \{J(u) : u \in X, \|u\|_X = \rho\} > 0$, olacak şekilde bir ρ pozitif sayısı ve $u \in X$ olsun. Ayrıca $G \neq \emptyset$ olacak şekilde

$$G = \{\varphi \in C([0,1], X) : \varphi(0) = 0, \varphi(1) = v\}$$

ve

$$\beta = \inf\{\max J(\varphi([0,1])) : \varphi \in G\}$$

kümeleri verilsin. Bu durumda $\alpha \leq \beta < +\infty$ için β , J fonksiyonelinin kritik noktasıdır (Ambrosetti and Rabinowitz 1973).

Bu açıklanan teoremler, standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemin en az bir çözümünün varlığını göstermek için yeterlidir. Denklemin sonsuz çözümünün varlığını gösterebilmek için ise $\mathbb{Z}_2$ -Symmetric Mountain Pass, Variant Mountain Pass, Fountain, Dual Fountain teoremleri kullanılabilir.

Teorem 60 ($\mathbb{Z}_2$ -Symmetric Mountain-Pass Teoremi): X sonsuz boyutlu bir Banach uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlayan çift bir fonksiyonel ve $J(0) = 0$ olmak üzere J enerji fonksiyoneli

i) Her $u \in X$ fonksiyonu için

$$\|u\|_X = \rho \text{ iken } J(u) \geq \alpha > 0$$

olacak şekilde α ve ρ pozitif sayıları vardır,

ii) X in her sonlu boyutlu X_1 ($X_1 \subset X$) alt uzay için

$$\{u \in X_1 : J(u) \geq 0\}$$

kümesi X de sınırlıdır

şartlarını sağlarsa J , X de sınırsız olan bir kiritik değerler dizisine sahiptir (Rabinowitz 1986; Willem 1996; Mihăilescu 2008).

$\mathbb{Z}_2$ -Symmetric Mountain-Pass Teoremi, denklemin sonsuz çözümünün varlığını göstermek için kullanılmaktadır.

Teorem 61 (Variant Mountain Pass Teoremi): X sonsuz boyutlu bir Banach Uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli çift, $J(0) = 0$ ve $(PS)_c$ şartını sağlasın. V sonlu boyutlu olmak üzere eğer $X = V \oplus Y$ ise ve J fonksiyoneli

i) $J|_{\partial B_\rho \cap Y} \geq \alpha$ şartını sağlayan $\rho, \alpha > 0$ sabitleri var,

ii) $B_r(0)$, X uzayında orjin merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar olmak üzere her bir sonlu boyutlu $\tilde{X} \subset X$ alt uzayı için $\tilde{X} \setminus B_r(0)$ üzerinde $J \leq 0$ olan bir $r = r(\tilde{X})$ vardır şartlarını sağlarsa, J sınırlandırılmamış bir kritik noktalar dizisine sahiptir (Rabinowitz 1986).

Yardımcı Teorem 1: X yansılmalı ve ayrılabilir bir Banach uzay olsun. $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $n, m \in \mathbb{N}^*$ için

$$f_n(e_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

ve

$$X = \overline{\text{span} \{e_n: n \in \mathbb{N}^*\}} \text{ ve } X^* = \overline{\text{span} \{f_n: n \in \mathbb{N}^*\}}$$

olacak şekilde $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq X$ ve $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq X^*$ vardır. Bu durumda $k \in \mathbb{N}^*$ için

$$X_k = \text{span} \{e_k\}, Y_k = \bigoplus_{j=1}^k X_j, Z_k = \overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty} X_j} \quad (22)$$

olmak üzere X uzayı, $X = Y_k \oplus Z_k$ şeklinde iki uzayın toplamı olarak yazılabilir (Fan and Han 2004).

Teorem 62 (Fountain Teoremi): X bir Banach uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ çift bir fonksiyonel ve X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları (22) de tanımladığımız gibi olsunlar. Eğer her bir $k \in \mathbb{N}^*$ için

$$(A1): a_k = \max_{\substack{u \in Y_k \\ \|u\|_X = \rho_k}} J(u) \leq 0,$$

$$(A2): k \rightarrow \infty \text{ iken, } b_k = \inf_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|_X = r_k}} J(u) \rightarrow +\infty,$$

$$(A3): \text{ her bir } c > 0 \text{ için } J \text{ fonksiyoneli } (PS)_c \text{ koşulu sağlanır}$$

şartlarını sağlayacak şekilde $\rho_k > r_k > 0$ sayıları varsa J fonksiyoneli X uzayında sınırsız olan bir kritik değerler dizisine sahiptir (Bartsch 1993; Bartsch and Willem 1995).

Tanım 90: X bir Banach uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli $c \in \mathbb{R}$ ve X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları (22) de tanımladığımız gibi olmak üzere herhangi bir $(u_{n_j}) \subset X$ dizisi için

$$\text{i) } |J(u_{n_j})| < c, u_{n_j} \in Y_{u_{n_j}},$$

$$\text{ii) } u_{n_j} \rightarrow \infty \text{ iken } \left(J_{Y_{u_{n_j}}} \right)'(u_{n_j}) \rightarrow 0$$

şartları sağlanıyorsa (u_{n_j}) ye J enerji fonksiyonelinin bir $((PS)_c)^*$ dizisi denir (Willem 1996).

Teorem 63: Eğer $(PS)_c^*$ dizisinin güçlü yakınsak bir alt dizisi varsa J enerji fonksiyoneli $(PS)_c^*$ koşulunu sağlar denir. $(PS)_c^*$ dizisi J enerji fonksiyonelinin bir kritik noktasıdır (Willem 1996).

$(PS)_c^*$ koşulunu sağlayan J enerji fonksiyoneli $(PS)_c$ koşulunu da sağlar (Willem 1996; Fan and Han 2004).

Teorem 64 (Dual Fountain Teorem): X bir Banach uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ çift fonksiyonel, X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları (22) de tanımladığımız gibi olsunlar. Eğer her bir $k > k_0$ için $k_0 > 0$ olacak şekilde bir k_0 var ve

$$(B1): c_k := \inf_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|_X = \rho_k}} J(u) \geq 0,$$

$$(B2): d_k := \max_{\substack{u \in Y_k \\ \|u\|_X = r_k}} J(u) < 0,$$

$$(B3): e_k := \inf_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|_X \leq \rho_k}} J(u) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

(B4): her bir $c \in [e_{k_0}, 0)$ için J fonksiyoneli $((PS)_c^*)$ koşulunu sağlar

şartlarını sağlayacak şekilde $\rho_k > r_k > 0$ sayıları da varsa, bu durumda J fonksiyoneli X uzayında sıfıra yakınsayan bir negatif kritik noktalar dizisine sahip olur (Bartsch and Willem 1995; Willem 1996).

Tanım 91: X bir Banach uzay ve $\zeta, X \setminus \{0\}$ kümesinin orjine göre simetrik kapalı alt kümelerinin sınıfı olsun. Yani

$$\zeta = \{A \subset X \setminus \{0\} : A \text{ kapalı ve orjine göre simetrik, yani } A = -A\}$$

şeklinde tanımlansın. $A \in \zeta$, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ olmak üzere A kümesinin Krasnoselskii's genusu $\gamma(A)$ ile gösterilir ve

$$\gamma(A) = \min \{k \in \mathbb{N} : \exists \varphi \in C(A, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})\}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi bir $k > 0$ değeri için böyle bir eşleme yoksa $\gamma(A) = \infty$, $A = \emptyset$ ise $\gamma(\emptyset) = 0$ olur. Eğer A sonlu sayıda elemandan oluşuyorsa $\gamma(A) = 1$ dir (Krasnoselskii 1964; Struwe 2000).

Teorem 65: $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ (PS) şartını sağlayan çift bir fonksiyonel olsun. Eğer

i) J alttan sınırlı ve çift,

ii) $\gamma(K) = k$ ve $\sup_{u \in K} J(u) < J(0)$ olacak şekilde kompakt bir $K \in \zeta$ kümesi vardır

şartları sağlanıyorsa J fonksiyoneli en az k farklı kritik nokta çiftine sahiptir ve bunlara karşılık gelen kritik değerler $J(0)$ dan küçüktür (Struwe 2000).

Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Yöntemler

Varyasyonel yaklaşımda Nehari Manifold yöntemi, Fibrering eşleme yöntemi, Lagrange çarpanı yöntemi ve Kritik nokta yöntemi kullanılmaktadır. Aşağıda bizim çalışmalarımızda kullandığımız kritik nokta yöntemi ile ilgili açıklamaya yer verilmiştir.

Kritik Nokta Yöntemi

Modern fiziğin tipik özelliklerinden biri, algılanabilir ve denenebilir nesne veya olayların varyasyonel ilkelerle karakterize edilmesidir. Dolayısıyla birçok problem, uygun bir

J enerji fonksiyonelinin uygun bir fonksiyonel sınıfına göre minimize edilmesi problemi olarak görülebilir. Bu, doğal olarak J fonksiyonelinin kritik noktalarının araştırılmasını gerektirir. Varyasyonel yaklaşımın temel amacı ilgili enerji fonksiyonelinin minimize etmektir. Ancak çoğu problemde ifade edilen fonksiyonel ne alttan ne de üstten sınırlıdır, yani fonksiyonel iyi tanımlı değildir ve bu nedenle mutlak maksimum ve minimumlar aranamaz. Kritik nokta yöntemi bu durumda devreye girer ve fonksiyonelin mutlak minimumunları yerine lokal minimumunları veya eyer noktaları olarak ifade edilen kritik noktaları elde edilerek söz konusu problemin çözülebileceğini öngörür. Fonksiyonelin kritik değerlerini elde etmek için Minimax teorisinin dayandığı mountain pass teorem, saddle point teorem ve genelleştirilmiş mountain pass teoremi gibi farklı argümanlardan faydalanılır. Ayrıca yerel bağlantı koşulu veya simetri koşulları altında birden çok kritik noktanın varlığına ilişkin sonuçlarda elde edilebilir.



ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde standart olmayan büyüme koşullu

- i) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ düzgün sınırlı bölgesinde $p(\cdot)$ -Laplacian içeren eliptik problemin,
- ii) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bölgesinde $p(\cdot)$ -Laplacian içeren Kirchhoff tipi problemin,
- iii) $\mathbb{R}^N$ de $p(\cdot)$ -Laplacian içeren Schrödinger-Kirchhoff tipi problemin

çözümlerinin varlığı ve çokluğu ele alınmıştır.

$p(\cdot)$ -Laplacian İçeren Eliptik Problemin Sub-Sup Tekniği ile Çözümü

$p(\cdot)$ -Laplacian içeren eliptik problemlerin çözümleri için varyasyonel metod (Fan and Zhang 2003; Alves and Souto 2005), monoton dönüşüm teorisi (Marcellini 1991), topolojik metod (Cekic ve MASHIYEV 2010), sub-sup çözüm yöntemi gibi farklı yöntemler kullanılmaktadır. Semilineer ve quasilineer eliptik problemlerde sub-sup çözüm yöntemine ilişkin uygulamalar için Zhang (1983); Guedda and Veron (1989); Ambrosetti *et al.* (1996); Li and Wang (2000); Drábek and Hernandez (2001); Guo and Zhang (2003) kaynakları ve bu kaynaklarda verilen referanslar incelenebilir. Diğer yöntemlere göre, sub-sup çözüm yöntemi f in büyüme durumuna ilişkin daha esnek gereksinimlere izin verme, çözümlerin daha genel bir uzaydan (daha iyi bir sınıftan) olmasını sağlama gibi belirgin avantajlara sahiptir.

Mohammed (2009), $\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ p -Laplacian operatör, $t \rightarrow 0^+$ iken $f(x, t)$ singüler nonlinear terim, Ω bazı $0 < \omega < 1$ için $C^{1,\omega}$ sınırlı $\mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge olmak üzere

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u(x) > 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

sabit üslü singüler sınır değer probleminin, f üzerine koyduğu bazı şartlar altında zayıf çözümünün varlığını ve tekliğini ispatlamıştır. Mohammed (2009) çalışmasında f üzerine koyduğu şartları ifade etmeden önce

$[G_1]$: her $t \geq \rho$ için $g(t) \leq C$ şartını sağlayan $\rho \geq 1$ ve $C > 0$ sabiti vardır,

$[G_2]$: $t > 0$ için $h(t) = tg(t)$ olmak üzere

$$(1) \quad \text{her } 0 < t < \delta \text{ ve bazı } C > 0, \delta > 0 \text{ sabitleri için } h(t) \leq C,$$

(2) h azalmayan bir fonksiyon,

(3) (i) g azalmayan bir fonksiyon,

(ii) her $t > 0$ için $g(\theta t) \leq C_\theta g(t)$ olacak şekilde her bir $\theta \in (0,1)$ e karşılık bir $C_\theta \geq 1$ sabiti vardır,

(iii) Ω da $\omega > 0$ olmak üzere $bg(\omega) \in L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\Omega)$ şartını sağlayan bir $\omega \in C_0^1(\bar{\Omega})$ vardır

şartlarını sağlayan $\mathcal{G}$, $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonlarının sınıfını ve $\mathcal{B}$, $L^q(\Omega)$ uzayında negatif olmayan b fonksiyonlarının sınıfını tanımlamıştır.

Ardından f üzerine koyduğu şartları; herhangi bir $s > 0$ ve $x \in \Omega$ için $\gamma_s(x) = \sup \{f(x, t): t \geq s\}$ olmak üzere

[F₁]: herhangi bir $s > 0$ için $\gamma_s \in L^q(\Omega)$ dır,

[F₂]: a , pozitif ölçüye sahip $\{x \in \Omega: 0 < a(x) \leq 1\}$ kümesi için ölçülebilir bir fonksiyon ve $0 \leq a \leq b$ olmak üzere

(1) $(x, s) \in \Omega \times (0, \rho^{-1})$ için $f(x, s) \geq a(x)$ dir,

(2) $(x, s) \in \Omega \times (0, \infty)$ için $f(x, s) \leq b(x)g(s)$ dir,

(3) $x \in \Omega$, $0 < s < t$ ve $C > 0$ sabiti için $f(x, s)g(t) \leq Cf(x, t)g(s)$ dir

şartları gerçekleşmek koşulu ile $[G_1]$, $[G_2]$ şartlarını sağlayan $(g, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{B}$ vardır

şeklinde ifade etmiştir.

Fan (2007), $p(x)$ -Laplacian içeren Dirichlet problemleri için bir sub-sup çözüm prensibi oluşturdu ve verilen enerji fonksiyoneli için C^1 topolojisinde lokal minimizelerin aynı zamanda $W^{1,p(x)}$ topolojisinde de lokal minimizeler olduğunu ispatladı. Bu çalışmada $p(x)$ -Laplacian denklemleri için kuvvetli bir karşılaştırma teoremi sunulmuş ve elde edilen soyut teoremlerin bazı uygulamaları $p(x)$ -Laplacian denklemleri için özdeğer problemlerine uygulanmıştır.

Gonçalves *et al.* (2011), $1 < p < N$, $f: \Omega \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uygun bir fonksiyon ve $\lambda > 0$ reel parametre olmak üzere $\mathbb{R}^N$ de sınırlı bir Ω bölgesinde

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(x, u), & x \in \Omega \\ u(x) > 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki sabit üslü nonlinear eliptik probleminin çözümlerinin varlığını çalıştılar. Bu çalışmada temel durum $s \rightarrow 0$ ya da $s \rightarrow \infty$ iken nonlinear f fonksiyonunun $f(x, s) \rightarrow \infty$ olmasıdır.

Liu *et al.* (2014), $\partial\Omega$ düzgün sınıрыyla $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $\lambda > 0$ bir reel parametre olmak üzere

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \lambda f(x, u), & x \in \Omega \\ u(x) > 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$p(x)$ -Laplacian içeren Dirichlet problemi için pozitif çözümlerin varlığını çalıştılar. Singüler nonlinear f fonksiyonu her bir $x \in \Omega$ için ya $f(x, s) \rightarrow +\infty$ ya da $s \rightarrow 0^+$ iken $f(x, s) \rightarrow +\infty$ olarak düşünülmüştür. Liu *et al.* (2014) çalışmasının ana sonuçları, Gonçalves *et al.* (2011) tarafından sabit üslüler için elde edilen sonuçların değişken üslüler için genelleştirilmiş halidir. Yazarlar bu çalışmada değişken üslü diferansiyel denklemlerin sup çözümlerini bulmak için kullanışlı olan daha basit bir denklemin çözümlerinin asimptotik davranışını vermişlerdir.

Bizim çalışmamızda; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ düzgün sınırlı bölgesinde, $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \partial_{x_3} u)$ ve $-\Delta_{p(x)} u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u(x) > 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (23)$$

standard olmayan büyüme koşuluna sahip lineer olmayan eliptik $p(\cdot)$ -Laplacian içeren Dirichlet probleminin nonlinear $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ Carathéodory fonksiyonu üzerine konulan

(f_1) : $a_1, b_1 \geq 0$ pozitif sabitler, $a_1 + b_1 > 0$, $q \in C_+(\bar{\Omega})$ ve her $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ için

$$q(x) + 2 < p^*(x) = \frac{3p(x)}{3 - p(x)}, \quad 2 < p(x) < 3$$

olmak üzere her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için

$$|f(x, t)| \leq a_1 + b_1 |t|^{q(x)+1}$$

dır,

(f_2) : her $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ için

$$f'_t(x, t) \geq 0$$

veya

$$|f'_t(x, t)| \leq a$$

olacak şekilde bir $a \geq 0$ sabiti vardır

şartları altında sub-sup yöntemiyle $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sıfırdan farklı çözümünün mevcut olduğu gösterilecektir.

Tanım 92: $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ ve $u^-(x) = \min\{-u(x), 0\}$ olmak üzere $u^-, u^+ \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ve h.h.h. $x \in \Omega$ için $u^-, u^+ > 0$ olsun. Eğer $v \geq 0$ ve $\text{supp } v \subset\subset \Omega$ olmak üzere her $v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |\nabla u^-|^{p(x)-2} \nabla u^- \nabla v dx \leq \int_{\Omega} f(x, u^-) v dx \quad (24)$$

ve

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^{p(x)-2} \nabla u^+ \nabla v dx \geq \int_{\Omega} f(x, u^+) v dx \quad (25)$$

oluyorsa, u^- ve u^+ ya sırasıyla (23) ün sub çözümü ve sup çözümü denir. Eğer u , (23) ün hem sub çözümü hem de sup çözümü ise u ya (23) ün bir çözümüdür denir.

Tanım 93: Herhangi bir $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ fonksiyonu, her $v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

eşitliğini sağlarsa u fonksiyonuna (23) ün bir zayıf çözümü denir.

Şimdi, çalışmamızın ana teoremini ispatlamak için gerekli olan yardımcı teoremler ifade ve ispat edilecektir.

Yardımcı Teorem 2: $a, b \in \mathbb{R}^N$ için

$$\begin{aligned} & (|b|^{p(x)-2} b - |a|^{p(x)-2} a, b - a) \\ &= \frac{1}{2} (|b|^{p(x)-2} + |a|^{p(x)-2}) |b - a|^2 + \frac{1}{2} (|b|^{p(x)-2} - |a|^{p(x)-2}) (|b|^2 - |a|^2) \end{aligned}$$

dır.

İspat: İlk olarak

$$\begin{aligned} I_1 &= (|b|^{p(x)-2} b - |a|^{p(x)-2} a, b - a) \\ &= |b|^{p(x)} + |a|^{p(x)} - (|b|^{p(x)-2} + |a|^{p(x)-2}) \cdot (a, b) \end{aligned}$$

elde edilir. Ardından

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}(|b|^{p(x)-2} + |a|^{p(x)-2})|b - a|^2 + \frac{1}{2}(|b|^{p(x)-2} - |a|^{p(x)-2})(|b|^2 - |a|^2) \\
&= \frac{1}{2}(|b|^{p(x)-2} + |a|^{p(x)-2})(|b|^2 + |a|^2 - 2(a, b)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(|b|^{p(x)-2} - |a|^{p(x)-2})(|b|^2 - |a|^2) \\
&= |b|^{p(x)} + |a|^{p(x)} - (|b|^{p(x)-2} + |a|^{p(x)-2}).(a, b)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $I_1 = I_2$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 3: $p^- \geq 2$ olsun. Bu durumda

$$(|b|^{p(x)-2}b - |a|^{p(x)-2}a, b - a) \geq \frac{1}{2}(|b|^{p(x)-2} + |a|^{p(x)-2}).|b - a|^2 \geq 2^{2-p^+}|b - a|^{p(x)}$$

dir.

İspat: $p(x) \geq 2$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \Omega$ için $f(x, t) = t^{p(x)-2}$ olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 2 den f fonksiyonunun kesin artan olduğu elde edilir. Bu nedenle her $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ için

$$(|t_1|^{p(x)-2}t_1 - |t_2|^{p(x)-2}t_2)(t_1 - t_2) \geq 0 \quad (26)$$

dır. Böylece

$$(|a| + |b|)^s \leq 2^{s-1}(|a|^s + |b|^s)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
|b - a|^{p(x)} &= |b - a|^2|b - a|^{p(x)-2} \\
&= |b - a|^2(|b - a|^2)^{\frac{p(x)-2}{2}} \\
&= |b - a|^2(|b|^2 - 2(a, b) + |a|^2)^{\frac{p(x)-2}{2}} \\
&\leq |b - a|^2 2^{\frac{p(x)-2}{2}}(|b|^2 + |a|^2)^{\frac{p(x)-2}{2}} \\
&\leq |b - a|^2 2^{\frac{p^+-2}{2}} 2^{\frac{p^+-2}{2}-1}(|b|^{p(x)-2} + |a|^{p(x)-2}) \\
&\leq 2^{p^+-3}|b - a|^2(|b|^{p(x)-2} + |a|^{p(x)-2})
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (26) dan

$$(|b|^{p(x)-2}b - |a|^{p(x)-2}a, b - a) \geq 2^{2-p^+}|b - a|^{p(x)}$$

bulunur.

Teorem 66: Her $x \in \Omega$ için $2 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < 3$ ve $p \in C_+(\bar{\Omega})$ olsun. f fonksiyonunun (f_1) ve (f_2) şartlarını sağladığını kabul edelim. $u^-, u^+ \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ (23) ün sırasıyla sub ve sup çözümleri olsun. $x \in \partial\Omega$ için

$$u^+ \geq 0, \quad u^- \leq 0 \quad (27)$$

ve h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$u^- \leq u^+ \quad (28)$$

olsun. Eğer u , (23) ün herhangi bir çözümü ise, h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$u^- \leq u \leq u^+$$

dır.

İspat: İspat beş adımdan oluşmaktadır.

1. Adım: h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$z \rightarrow f(x, z) + \lambda z \quad (29)$$

dönüşümünü azalmayan yapacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı seçelim. Bu dönüşüm, $a \geq 0$ sayısı

$$a \geq \max\{-f'_u(x, u) : x \in \bar{\Omega}, u \in [u^-(x), u^+(x)]\} \quad (30)$$

şeklinde alınarak (f_2) yardımıyla oluşturulabilir.

Sonuç 2: $q(x) > 2$, her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için $|f'(t)| \leq a$ ile $f(x, t) = |t|^{q(x)-1}t$ fonksiyonu (30) eşitsizliğini sağlar.

$u_0 = u$ olmak üzere ispatımızın 2. ve 3. adımında u_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) için tümevarım yöntemini kullanarak

$$-\Delta_{p(x)} u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(x, u_k) + \lambda u_k, \quad x \in \Omega, \quad u_{k+1} = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (31)$$

sınır değer probleminin tek bir $u_{k+1} \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ zayıf çözümünün olduğunu gösterelim.

2. Adım: h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$u^- = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_k \leq u_{k+1} \dots \quad (32)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için

(i) İlk olarak $k = 0$ için (32) nin doğru olduğunu ispatlayacağız.

Her $v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ve $k = 0$ için (31) denklemi

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_1|^{p(x)-2} \nabla u_1 \nabla v + \lambda u_1 v) dx = \int_{\Omega} (f(x, u_0) + \lambda u_0) v dx \quad (33)$$

eşitliğini sağlar. $u_0 = u^-$ olmak üzere (24) ten (33) çıkarılarak

$$\int_{\Omega} \left((|\nabla u_0|^{p(x)-2} \nabla u_0 - |\nabla u_1|^{p(x)-2} \nabla u_1, \nabla v) + \lambda(u_0 - u_1, v) \right) dx \leq 0$$

elde edilir. $v \geq 0$ olmak şartıyla

$$v = (u_0 - u_1)^+ \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$$

için

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_0|^{p(x)-2} \nabla u_0 - |\nabla u_1|^{p(x)-2} \nabla u_1, \nabla(u_0 - u_1)^+) dx + \lambda \int_{\Omega} (u_0 - u_1, (u_0 - u_1)^+) dx \leq 0$$

sonucunu elde ederiz. Diğer taraftan

$$\nabla(u_0 - u_1)^+ = \begin{cases} \nabla(u_0 - u_1), & \text{h. h. h. } \{u_0 \geq u_1\} \text{ için} \\ 0, & \text{h. h. h. } \{u_1 \geq u_0\} \text{ için} \end{cases}$$

dır. Yardımcı Teorem 3 ten

$$\int_{u_0 \geq u_1} (|\nabla u_0|^{p(x)-2} \nabla u_0 - |\nabla u_1|^{p(x)-2} \nabla u_1, (\nabla u_0 - \nabla u_1)^+) dx \geq 2^{2-p^+} \int_{u_0 \geq u_1} |\nabla u_0 - \nabla u_1|^{p(x)} dx$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\int_{u_0 \geq u_1} (|\nabla u_0 - \nabla u_1|^{p(x)} + \lambda(u_0 - u_1)^2) dx \leq 0$$

ve buradan da h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$u_0(x) \leq u_1(x)$$

olur. Dolayısıyla $k = 0$ için ispat tamamlanmış olur.

(ii) Şimdi k değeri için ifademizin doğru olduğu kabul edilerek $k + 1$ değeri için (32) nin doğru olduğu ispatlanacak. Dolayısıyla h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$u_{k-1}(x) \leq u_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

olduğunu varsayalım. (31) den her $v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_{k+1}|^{p(x)-2} \nabla u_{k+1} \nabla v + \lambda u_{k+1} v) dx = \int_{\Omega} (f(x, u_k) + \lambda u_k) v dx \quad (35)$$

ve

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_k|^{p(x)-2} \nabla u_k \nabla v + \lambda u_k v) dx = \int_{\Omega} (f(x, u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) v dx$$

elde edilir. $v \geq 0$ olması şartıyla

$$v \equiv (u_k - u_{k+1})^+$$

denilirse, (29) ve (34) kullanılarak

$$\begin{aligned} & 2^{2-p^+} \int_{u_k \geq u_{k+1}} (|\nabla(u_k - u_{k+1})|^{p(x)} + \lambda(u_k - u_{k+1})^2) dx \\ & \leq \int_{\Omega} [f(x, u_{k-1}) + \lambda u_{k-1} - f(x, u_k) + \lambda u_k] (u_k - u_{k+1})^+ dx \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece h.h.h. $x \in \Omega$ için $u_k(x) \leq u_{k+1}(x)$ elde edilmiş ve böylece $k + 1$ için sonuç ispat edilmiş olur.

3. Adım: Şimdi h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$u_k \leq u^+ \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (36)$$

olduğunu gösterelim. $k = 0$ iken (27) ve (28) den (36) nın sağlandığı görülür. Herhangi bir k için bölgedeki h.h.h. yerde $u_k \leq u^+$ eşitsizliği sağlanır. (25) denkleminde (35) i çıkaralım ve

$$v \equiv (u_{k+1} - u^+)^+$$

olarak ifade edelim. Sonra (29) ve (36) dan

$$\begin{aligned} & 2^{2-p^+} \int_{u_{k+1} \geq u^+} (|\nabla(u_{k+1} - u^+)|^{p(x)} + \lambda(u_{k+1} - u^+)^2) dx \\ & \leq \int_{\Omega} [f(x, u_k) + \lambda u_k - f(x, u^+) + \lambda u^+] (u_{k+1} - u^+)^+ dx \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $u_k \leq u^+$ olduğu ispatlanmış olur.

4. Adım: Şimdi u_{k+1} in $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlı olduğunu gösterecek ve ardından (S_+) şartını kullanarak kuvvetli yakınsamayı elde edeceğiz.

1) (32) ve (36) dan h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$u^- \leq \dots \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \dots \leq u^+, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) \quad (38)$$

dir. Ayrıca $L^{q(\cdot)+2}(\Omega)$ uzayında

$$u_k \rightarrow u \quad (39)$$

dır. Böylece, (37) eşitliği Majorant Teoremi kullanılarak ispatlanabilir. Gerçekten $V(x) := \max\{|u^-(x)|, |u^+(x)|\} \in C(\Omega)$ olmak üzere

$$\int_{\Omega} |(u_k(x) - u(x))|^{q(x)+2} dx \leq c(q^-, q^+) \int_{\Omega} |V(x)|^{q(x)+2} dx < +\infty$$

eşitsizliği elde edilir. (38) ve (39) kullanılarak istenilen sonuca ulaşılır.

2) f Carathéodory fonksiyonu (f_1) ve (f_2) şartlarını sağladığı için, f olarak genelleştirilen N_f ($N_f(u)(x) = f(x, u(x))$) Nemytskii operatorü $L^{q(\cdot)+2}(\Omega)$ dan $L^{\frac{q(\cdot)+2}{q(\cdot)+1}}(\Omega)$ ya iyi tanımlıdır. Yani

$$N_f: L^{q(\cdot)+2}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{q(\cdot)+2}{q(\cdot)+1}}(\Omega)$$

sürekli ve sınırlıdır (Fan and Zhao 2001). $q(x) + 2 < p^*(x)$ kısıtlaması $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)+2}(\Omega)$ gömmesinin kompakt olmasını sağlar. Dolayısıyla $W_0^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$, $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ nın dual uzayı olmak üzere

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q(\cdot)+2}{q(\cdot)+1}}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$$

şeması N_f operatörünün $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ dan $W_0^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ ya kompakt operatör olduğunu gösterir, yani

$$N_f: W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$$

dır. Eğer $W_0^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ da

$$-\Delta_p(x) = N_f(u)$$

ise $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ elemanı (23) probleminin çözümüdür. Yani $\langle \cdot, \cdot \rangle: W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow W_0^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ olmak üzere her $v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\langle -\Delta_{p(x)} u, v \rangle = \langle N_f(u), v \rangle$$

veya her $v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

olur.

3) (31) eşitliğinin her iki tarafı $u_{k+1} \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ile çarpılırsa

$$\langle -\Delta_{p(x)} u_{k+1} + \lambda u_{k+1}, u_{k+1} \rangle = \langle f(x, u_k) + \lambda u_k, u_{k+1} \rangle \quad (40)$$

eşitliği elde edilir. Sonra, (40) eşitliğinin her iki tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa herhangi bir $u_{k+1} \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{k+1}|^{p(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} u_{k+1}^2 dx = \int_{\Omega} f(x, u_k) u_{k+1} dx + \lambda \int_{\Omega} u_k u_{k+1} dx \quad (41)$$

elde edilir. h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$u^-(x) \leq u_k(x) \leq u^+(x),$$

$$u^-(x), u^+(x) \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$$

ve

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)+2}(\Omega)$$

olduğundan

$$|u|_{q(\cdot)+2} \leq C_1 \|u\|_{p(\cdot)}, \quad C_1 > 0$$

dır. Buradan

$$|u_k(x)| \leq V(x) := \max\{|u^-(x)|, |u^+(x)|\} \in L^{q(\cdot)+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \quad (42)$$

dır. Ayrıca $L^{q(\cdot)+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ olduğundan

$$|u|_2 \leq C_2 |u|_{q(\cdot)+2} \leq C_2 C_1 \|u\|_{p(\cdot)}, \quad C_2 > 0 \quad (43)$$

ve

$$\int_{\Omega} |V(x)|^{q(x)+2} dx < +\infty \quad (44)$$

dur. (f_1) şartı, (42), (43), (44) eşitsizlikleri, Teorem 38 ve Teorem 39 kullanılarak

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x, u_k) u_{k+1} dx \right| &\leq a_1 \int_{\Omega} |u_{k+1}| dx + b_1 \int_{\Omega} |u_k|^{q(x)+1} |u_{k+1}| dx \\ &\leq \frac{a_1}{2} \int_{\Omega} u_{k+1}^2 dx + \frac{a_1}{2} \int_{\Omega} dx + 2b_1 |u_k|^{q(x)+1} |u_{k+1}|_{q(x)+2} \\ &\leq \frac{a_1}{2} \int_{\Omega} u_{k+1}^2 dx + \frac{|\Omega|a_1}{2} + b_1 \max \left\{ |V|_{q(x)+2}^{q^--1}, |V|_{q(x)+2}^{q^++1} \right\} |u_{k+1}|_{q(x)+2} \\ &\leq \frac{a_1}{2} \int_{\Omega} u_{k+1}^2 dx + \frac{|\Omega|a_1}{2} + C_3 \|u_{k+1}\|_{p(x)} \end{aligned} \quad (45)$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} u_k u_{k+1} dx &\leq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u_k|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u_{k+1}|^2 dx \\ &\leq C_4 |V|_{q(x)+2}^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u_{k+1}|^2 dx \\ &\leq C_5 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u_{k+1}|^2 dx \end{aligned} \quad (46)$$

elde edilir. (41) deki $\|u_{k+1}\|_{p(x)} > 1$ için (45), (46) ve Teorem 33 kullanılarak, $0 < \lambda < a_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}\|_{p(x)}^{p^-} + \lambda \int_{\Omega} u_{k+1}^2 dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_{k+1}|^{p(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} u_{k+1}^2 dx \\ &= \int_{\Omega} f(x, u_k) u_{k+1} dx + \lambda \int_{\Omega} u_k u_{k+1} dx \end{aligned}$$

$$\leq \frac{a_1}{2} \int_{\Omega} |u_{k+1}|^2 dx + \frac{|\Omega|a_1}{2} + C_3 \|u_{k+1}\|_{p(x)} + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u_{k+1}|^2 dx + C_5,$$

elde edilir. $p^- > 2$ olduğundan

$$\|u_{k+1}\|_{p(x)} \leq K \quad (47)$$

dır. Böylece (47) eşitsizliği (u_k) dizisinin $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında her $k \in \mathbb{N}$ için düzgün sınırlı olduğunu ispatlar. Ayrıca, $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ yansımali olduğundan, $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ da $u_{k_j} \rightarrow u$ olacak şekilde bir $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ dizisi vardır. $-\Delta_{p(\cdot)}$ operatörü (S_+) şartını sağladığından, $k_j \rightarrow +\infty$ iken $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ da

$$u_{k_j} \rightarrow u$$

ve $k_j \rightarrow +\infty$ iken $L^2(\Omega)$ da

$$u_{k_j} \rightarrow u$$

dur. Bundan dolayı $k_j \rightarrow +\infty$ iken $W_0^{-1,p'(\cdot)}(\Omega)$ da

$$\Delta_{p(\cdot)} u_{k_j} \rightarrow \Delta_{p(\cdot)} u$$

dur.

5. Adım: Son olarak u nun (23) probleminin bir zayıf çözümü olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)+2}(\Omega)$ olsun. Bu durumda, (40) tan

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u_{k_j}|^{p(x)-2} \nabla u_{k_j} \nabla v + \lambda u_{k_j} v \right) dx = \int_{\Omega} \left(f(x, u_{k_j-1}) + \lambda u_{k_j-1} \right) v dx \quad (48)$$

elde edilir. $k_j \rightarrow +\infty$ için

$$L^{\frac{q(\cdot)+2}{q(\cdot)+1}}(\Omega) \text{ da } f(x, u_{k_j-1}) \rightarrow f(x, u)$$

$$L^2(\Omega) \text{ da } u_{k_j-1} \rightarrow u$$

dur. Böylece (48) eşitliğinden

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v + \lambda u v) dx = \int_{\Omega} (f(x, u) + \lambda u) v dx$$

elde edilir. Dolayısıyla her $v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

dır. Böylece $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ fonksiyonunun (23) probleminin çözümü olduğu gösterilmiş olur.

$p(\cdot)$ -Kirchhoff Tipi Problemin Çözümlerinin Varlığı ve Çokluğu

Çalışmamızda ele aldığımız Kirchhoff-tipi problem, ρ kütle yoğunluğu $\left(\frac{m \text{ (Kütle)}}{L \text{ (Uzunluk)}}\right)$, ρ_0 ilk gerginlik, L telin uzunluğu, h enine kesitin alanı, E materyalin Young (esneklik) modülü $\left(E = \frac{\text{Gerilme}}{\text{Birim şekil değiştirme}} = \frac{P \text{ (Kuvvet)}}{\Delta L / L_0} / \frac{A \text{ (Kesit Alanı)}}{\Delta L / L_0}\right)$ olmak üzere Kirchhoff (1883) tarafından iki ucu sabitlenmiş elastik bir telin enine titreşimleri tanımlamak için klasik D'Alembert dalga denkleminin bir genişletilmesi olarak sunulan

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\rho_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

hiperbolik tip denkleminin durağan (zamandan bağımsız) durumu ile ilgilidir. Kirchhoff'un modeli, enine titreşimler tarafından üretilen telin uzunluğundaki değişiklikleri hesaba katar. Denklem $[0, L]$ aralığında integrallenebilir olduğu için noktasal tanımlanamaz. Bundan dolayı problem nonlokal problem olarak tanımlanır. Bernstein (1940) bu denkleme ilk kez matematiksel bakış açısıyla yaklaşarak, başlangıç koşullarının Sobolev uzayından alınması durumunda çözümlerin lokal varlığını, başlangıç koşullarının analitik olması durumunda ise çözümlerin global varlığını ispatlamıştır.

Kirchhoff denklemi ışığın kırınım teorisinde ve diğer elektromanyetik problemlerde (Stratton 1941; Jones 1964), akustikte dalga yayılımı problemlerinde kullanılır (Pierce 1981).

Ayrıca

$$\begin{cases} \left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

gibi yerel olmayan sınır değer problemleri, populasyon yoğunluğu gibi kendi ortalamasına bağlı olan bir işlemi tanımlayan çeşitli fiziksel ve biyolojik sistemleri modellemektedir (Mashiyev vd 2010a).

Liu and Zhao (2012), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bir bölge, $1 < p < N$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(\cdot)-2} \nabla u)$ p -Laplacian operatör olmak üzere

$$\begin{cases} \left[M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \right]^{p-1} (-\Delta_p u) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

p -Kirchhoff tipi nonlocal eliptik tip problemin aşıkâr olmayan çözümleri olduğunu göstermişlerdir.

Dai and Hao (2009), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bir bölge, $1 < p^- = \inf_{x \in \Omega} p(x) \leq p^+ = \sup_{x \in \Omega} p(x) < N$ ve $p(x) \in C(\bar{\Omega})$ olmak üzere $f(x, u): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonu ve

$M(t)$ sürekli fonksiyonu üzerine konulan

1) $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonu ve her $x \in \Omega$ için $\alpha(x) < p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ iken $|f(x, t)| \leq c(1 + |t|^{\alpha(x)-1})$ ve $\alpha \in C_+(\bar{\Omega})$,

2) $M(t) \geq m_0$ şartını sağlayan bir $m_0 > 0$ sabiti vardır,

3) $\hat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$ olmak üzere $\hat{M}(t) \geq (1 - \mu)M(t)t$ şartını sağlayan bir $0 < \mu < 1$ değeri vardır

şartları altında

$$\begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \Delta_{p(x)} u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

homojen olmayan eliptik $p(\cdot)$ -Kirchhoff tipi problemin aşıkâr olmayan çözümlerinin varlığını ve çokluğunu araştırdılar. Varyasyonel yaklaşım ve değişken üslû Sobolev uzayları teorisini kullanmak için, problemin çözümlerinin varlığını ve çokluğunu sağlayan koşulları oluşturdular ve ispatladılar.

Bizim bu çalışmamızda; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bir bölge, $\Delta_{p(\cdot)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(\cdot)-2} \nabla u)$ $p(\cdot)$ -Laplacian operatör, $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ Lipschitz sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) (-\Delta_{p(x)} u) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (49)$$

şeklindeki $p(\cdot)$ -Laplacian içeren homojen olmayan eliptik $p(\cdot)$ -Kirchhoff tipi problemin, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonu ve $M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ Kirchhoff tipi fonksiyonu üzerine konulan

(M_1) : $M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon, $m_2 \geq m_1 \geq 0$ reel sayılar, $\beta > 1$ olmak üzere her $t > 0$ için

$$m_1 t^{\beta-1} \leq M(t) \leq m_2 t^{\beta-1} \text{ (Polinom büyüme şartı)}$$

dır,

(f_1) : $q \in C_+(\bar{\Omega})$, $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonu olmak üzere

$$\text{her } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ için } |f(x, t)| \leq C_1(1 + |t|^{q(x)-1})$$

şartını sağlayan bir $C_1 > 0$ sabiti vardır,

$$(f_2): x \in \Omega \text{ için } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{|t|^{\beta p^+ - 1}} = 0, \left(t \rightarrow 0 \text{ iken } f(x, t) = o(|t|^{\beta p^+ - 1}) \right),$$

$$(f_3): \inf_{\{x \in \Omega, |t|=1\}} F(x, t) > 0,$$

(f_4) : f fonksiyonu, ikinci değişkenine göre tek, yani her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için

$$f(x, -t) = -f(x, t)$$

dir,

(f_5) : $q \in C_+(\bar{\Omega})$, her $x \in \Omega$ için $q^+ < \frac{m_2}{m_1} \beta p^-$ olmak üzere

$$t \rightarrow 0 \text{ iken } f(x, t) > a|t|^{q(x)-1}$$

(AR) : her $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ için

$$0 < \theta F(x, t) := \theta \int_0^t f(x, s) ds \leq t f(x, t)$$

şartını sağlayan bir $\theta > \frac{m_2 \beta (p^+)^{\beta}}{m_1 (p^-)^{\beta-1}}$ sayısı vardır

şartlar altında zayıf çözümlerinin varlığı ve çokluğu araştırılacaktır. Çözümleri elde etmek için varyasyonel method, Mountain Pass Teoremi, Fountain Teoremi ve Dual Fountain Teoremi kullanılacaktır.

Kolaylık için çalışmamızda $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayını W ile göstereceğiz.

(49) probleminin çözümünde kullanacağımız enerji fonksiyoneli, $\hat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$,

$F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$ olmak üzere $I: (W, \|u\|_W) \rightarrow \mathbb{R}$

$$I(u) = \hat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, u) dx$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonelimizin Gâteaux türevi, her $u, v \in W$ için

$$\langle I'(u), v \rangle = M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

dır.

Tanım 94: Her $v \in W$ için

$$M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

eşitliği sağlanıyorsa $u \in W$ ye (49) probleminin bir zayıf çözümü denir.

I fonksiyonelinin kritik noktaları (49) probleminin zayıf çözümleridir.

Teorem 67: (M_1) ve (f_1) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Her $x \in \bar{\Omega}$ için

$$q(x) < p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N - p(x)}, & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}$$

olmak üzere $q^+ < \beta p^- < (p^-)^*$ ise (49) probleminin bir zayıf çözümü vardır.

Teorem 68: M fonksiyonu (M_1) , f fonksiyonu $(f_1), (f_2), (f_3)$ ve (AR) şartlarını sağlasın. Eğer her $x \in \bar{\Omega}$ için $q(x) < p^*(x)$ ve $\beta p^+ < q^-$ ise (49) probleminin aşıkâr olmayan bir zayıf çözümü vardır.

Teorem 69: M fonksiyonu (M_1) , f fonksiyonu $(f_1) - (f_4)$ ve (AR) şartlarını sağlasın. Eğer her $x \in \bar{\Omega}$ için $q(x) < p^*(x)$ ve $\beta p^+ < q^-$ ise I fonksiyonelinin $k \rightarrow \infty$ iken $I(u_k) \rightarrow \infty$ şartını sağlayan (u_k) kritik noktalar dizisi ve (49) probleminin sonsuz sayıda çözümü vardır.

Teorem 70: M fonksiyonu (M_1) , f fonksiyonu $(f_1), (f_2), (f_4)$ ve (f_5) şartlarını sağlasın. Bu durumda (49) probleminin, $I(\pm v_k) < 0$ ve $k \rightarrow \infty$ iken $I(\pm v_k) \rightarrow 0$ olacak şekilde $(\pm v_k)_{k=1}^{\infty}$ bir çözüm dizisi vardır.

Yardımcı Teorem 4: M fonksiyonu (M_1) şartından dolayı sürekli ve sınırlı olduğundan Teorem 43, $M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx$ operatörü içinde geçerlidir.

Yardımcı Teorem 4 ün ispatı Fan and Zhang (2003) çalışmasında verilen Teorem 3.1 in ispatına benzer şekilde kolayca yapılabilir.

Yardımcı Teorem 5: $p \in C_+(\bar{\Omega})$ ise

- i) I fonksiyoneli W de iyi tanımlıdır,
- ii) I fonksiyoneli W de alttan zayıf yarı sürekli.

Yardımcı Teorem 5 in ispatı Mashiye v d (2012) çalışmasında verilen Lemma 2.7 nin ispatına benzer şekilde kolayca yapılabilir.

Teorem 67 nin İspatı: Teorem 48 den dolayı $W \hookrightarrow L^{\beta p^+}(\Omega)$, $W \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ sürekli gömmeleri ve her $u \in W$ için

$$|u|_{\beta p^+} \leq C_2 \|u\|_W \quad (50)$$

$$|u|_{q(\cdot)} \leq C_3 \|u\|_W \quad (51)$$

olacak şekilde C_2, C_3 pozitif sabitleri vardır.

(M_1) şartından

$$\frac{m_1}{\beta} t^\beta \leq \widehat{M}(t) \quad (52)$$

ve (f_1) şartından her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için

$$|F(x, t)| \leq C_4 + C_5 |t|^{q(x)} \quad (53)$$

olur. $\|u\|_W > 1$ olmak üzere (51), (52), (53), Teorem 33 ve Teorem 42 kullanılarak

$$\begin{aligned} I(u) &= \widehat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\geq \frac{m_1}{\beta} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^\beta - \int_{\Omega} (C_4 + C_5 |u|^{q(x)}) dx \\ &\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} \|u\|_W^{\beta p^-} - C_5 \max \{ |u|_{q(\cdot)}^{q^-}, |u|_{q(\cdot)}^{q^+} \} - C_4 |\Omega| \\ &\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} \|u\|_W^{\beta p^-} - C_5 C_3 \max \{ \|u\|_W^{q^-}, \|u\|_W^{q^+} \} - C_6 \\ &\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} \|u\|_W^{\beta p^-} - C_5 C_3 \|u\|_W^{q^+} - C_6 \end{aligned}$$

elde edilir.

$\beta p^- > q^+$ olduğu için $\|u\|_W \rightarrow \infty$ iken $I(u) \rightarrow \infty$ olur. Bu yüzden I fonksiyoneli coercive'dir. I fonksiyoneli W üzerinde alttan zayıf yarı sürekli olduğundan I fonksiyonelinin

W uzayında bir u minimum noktası vardır ve bu u minimum noktası (49) probleminin bir zayıf çözümüdür.

Teorem 68 in İspatı: İspatı Mountain Pass Teoremi'ni kullanarak yapacağız. İlk önce Mountain Pass Teoremi için gerekli yardımcı teoremleri ifade ve ispat edelim.

Yardımcı Teorem 6: Teorem 68 in hipotezleri altında, I fonksiyoneli $(PS)_c$ şartını sağlar.

İspat: (u_n) , W da bir Palais-Smale dizisi olsun. Bu durumda (M_1) , (AR) , (52) ve Teorem 42 kullanılarak

$$\begin{aligned}
c + 1 + \|u_n\|_W &\geq I(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle I'(u_n), u_n \rangle \\
&= \widehat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\
&\quad - \frac{1}{\theta} M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \\
&\geq \frac{m_1}{\beta} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\beta} - \frac{1}{\theta} M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \\
&\quad - \left(\int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \right) \\
&\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right)^{\beta} \\
&\quad - \frac{m_2}{\theta(p^-)^{\beta-1}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right)^{\beta-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \\
&\quad - \left(\int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \right) \\
&\geq \left(\frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} - \frac{m_2}{\theta(p^-)^{\beta-1}} \right) \|u_n\|_W^{\beta p^-} - C_7
\end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı (u_n) dizisi W da sınırlıdır. (u_n) sınırlı olduğu için W da $u_n \rightharpoonup u$ olur. Bu yüzden $\langle I'(u_n), (u_n - u) \rangle \rightarrow 0$ dir. Dolayısıyla

$$\langle I'(u_n), (u_n - u) \rangle = M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \right)$$

$$-\int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u)dx \rightarrow 0 \quad (54)$$

dır. u_n sınırlı olduğu için $|u_n|_{q(\cdot)} \leq \tilde{C}_1$ olacak şekilde bir $\tilde{C}_1$ sabiti vardır. Böylece (f_1) , Teorem 38 ve Teorem 40 dan

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u)dx \right| &\leq C_1 \left| \int_{\Omega} (1 + |u_n|^{q(x)-1})(u_n - u)dx \right| \\ &= C_1 \int_{\Omega} |u_n - u|dx + C_1 \int_{\Omega} ||u_n|^{q(x)-1}(u_n - u)|dx \\ &\leq C_1 \int_{\Omega} |u_n - u|dx + 2C_1 |u_n|^{q(x)-1}_{q'(\cdot)} |(u_n - u)|_{q(\cdot)} \\ &\leq C_1 \int_{\Omega} |u_n - u|dx + 2C_1 \left\{ |u_n|^{q^+_{(\cdot)}-1}_{q(\cdot)} + |u_n|^{q^-_{(\cdot)}-1}_{q(\cdot)} \right\} |(u_n - u)|_{q(\cdot)} \rightarrow 0 \quad (55) \end{aligned}$$

olur. Teorem 48 den $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ da (u_n) dizisi, u ya kuvvetli yakınsar yani $n \rightarrow \infty$ iken $|u_n - u|_{q(\cdot)} \rightarrow 0$ dır. (54) ve (55) ten

$$M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \rightarrow 0$$

elde edilir. (M_1) şartından

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \rightarrow 0$$

olur. Dolayısıyla Teorem 43 (ii) den W uzayında $u_n \rightarrow u$ olur. Sonuç olarak I fonksiyoneli $(PS)_c$ şartını sağlar.

Yardımcı Teorem 7: M fonksiyonu (M_1) , f fonksiyonu (f_1) , (f_2) şartlarını sağlarsa

- i) $u \in W$ için $\|u\|_W = \rho_1 \in (0,1)$ iken $I(u) \geq \alpha_1 > 0$ olacak şekilde iki pozitif ρ_1 ve α_1 reel sayısı vardır,
- ii) $\|u\|_W > \rho_1$ iken $I(u) < 0$ şartını sağlayan $u \in W$ mevcuttur.

İspat: i) $\rho_1 = \|u\|_W < 1$ olsun. (M_1) şartından

$$I(u) = \hat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, u) dx$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{m_1}{\beta} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\beta} - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\
&\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} \|u\|_W^{\beta p^+} - \int_{\Omega} F(x, u) dx
\end{aligned}$$

bulunur.

$$0 < \varepsilon_1 < \frac{m_1}{2\beta(p^+)^\beta C_2^{\beta p^+}} \text{ olmak üzere herhangi bir } \varepsilon_1 > 0 \text{ a karşılık } C_{\varepsilon_1} > 0 \text{ seçilirse, } (f_1)$$

ve (f_2) den her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{\beta p^+ - 1} + C_\varepsilon |t|^{q(x) - 1}$$

ve

$$|F(x, t)| \leq \varepsilon_1 |t|^{\beta p^+} + C_{\varepsilon_1} |t|^{q(x)} \quad (56)$$

elde edilir. $C_8 = C_{\varepsilon_1} C_3^{q^-}$ olmak üzere (50), (51), (56) ve Teorem 42 den

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} \|u\|_W^{\beta p^+} - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\
&\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} \|u\|_W^{\beta p^+} - \varepsilon_1 \int_{\Omega} |u|^{\beta p^+} dx - C_{\varepsilon_1} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \\
&\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} \|u\|_W^{\beta p^+} - \varepsilon_1 C_2^{\beta p^+} \|u\|_W^{\beta p^+} - C_{\varepsilon_1} C_3^{q^-} \|u\|_W^{q^-} \\
&\geq \left(\frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} - \varepsilon_1 C_2^{\beta p^+} \right) \|u\|_W^{\beta p^+} - C_8 \|u\|_W^{q^-} \\
&\geq \frac{m_1}{2\beta(p^+)^\beta} \rho_1^{\beta p^+} - C_8 \rho_1^{q^-} \\
&= \rho_1^{\beta p^+} \left(\frac{m_1}{2\beta(p^+)^\beta} - C_8 \rho_1^{q^- - \beta p^+} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\|u\|_W < 1$ ve $\beta p^+ < q^-$ olduğu için $t \rightarrow \frac{m_1}{2\beta(p^+)^\beta} - C_8 \rho_1^{q^- - \beta p^+}$ fonksiyonu sıfırın uygun komşuluğunda kesin pozitiftir. Bundan dolayı $u \in W$ için $\|u\|_W = \rho_1 \in (0, 1)$ iken $I(u) \geq \alpha_1 > 0$ olacak şekilde pozitif ρ_1 ve α_1 reel sayıları vardır.

ii) $s \geq 1$ iken, (M_1) şartı kullanılarak

$$\hat{M}(s) \leq m_2 \frac{s^\beta}{\beta} \leq \frac{m_2}{\beta} s^{\frac{m_2}{m_1} \beta} \quad (57)$$

elde edilir. Her bir $x \in \Omega$ ve $t \in \mathbb{R}$ için, her $s \geq 1$ için

$$\eta_1(s) = s^{-\theta} F(x, st) - F(x, t)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda (AR) şartı kullanılarak her $s \geq 1$ için

$$\eta'_1(s) = s^{-\theta} \left(f(x, st)t - \frac{\theta}{s} F(x, t) \right) \geq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\eta_1(s)$, $[1, \infty)$ aralığında artandır ve her $\tau \in [1, \infty)$ için

$$\eta_1(\tau) > \eta_1(1) = 0$$

dır. Dolayısıyla her $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, $s \geq 1$ için

$$F(x, st) \geq s^\theta F(x, t) \quad (58)$$

dır.

Herhangi bir sabit $\omega \in W$, $\omega \geq 0$, $\omega \not\equiv 0$ ve $s \geq 1$ için (57) ve (58) den

$$\begin{aligned} I(s\omega) &= \widehat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla s\omega|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, s\omega) dx \\ &\leq \frac{m_2}{\beta} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla s\omega|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\frac{m_2\beta}{m_1}} - \int_{\Omega} F(x, s\omega) dx \\ &\leq \frac{m_2}{\beta(p^-)^{\frac{m_2}{m_1}\beta}} s^{\frac{m_2}{m_1}\beta p^+} \left(\int_{\Omega} |\nabla \omega|^{p(x)} dx \right)^{\frac{m_2\beta}{m_1}} - s^\theta \int_{\Omega} F(x, \omega) dx \end{aligned}$$

bulunur. (AR) şartından bir $\theta > \frac{m_2\beta(p^+)^{\beta}}{m_1(p^-)^{\beta-1}} > \frac{m_2}{m_1}\beta p^+$ değeri vardır. Sonuç olarak $s \rightarrow \infty$ iken $I(s\omega) \rightarrow -\infty$ olur.

Yardımcı Teorem 6, Yardımcı Teorem 7 ve $I(0) = 0$ özelliği sağlandığı için I fonksiyoneli Mountain Pass Teoreminin şartlarını sağlamış olur. Bu yüzden I fonksiyonelinin en az bir kritik noktası vardır, yani (49) probleminin aşıkâr olmayan bir zayıf çözümü vardır. Bu ise Teorem 68 in ispatını tamamlar.

Teorem 69 u ispatlamak için Fountain Teoremini kullanacağız. İspata geçmeden önce teoremden kullanacağımız yardımcı teorem aşağıda verilmiştir.

Yardımcı Teorem 8: $\alpha \in C_+(\bar{\Omega})$ ve herhangi bir $x \in \bar{\Omega}$ için $\alpha(x) < p^*(x)$ olmak üzere

$$\gamma_k = \sup \left\{ |u|_{\alpha(\cdot)} : \|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = 1, u \in Z_k \right\}$$

tanımlayalım. Bu durumda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$$

olur (Fan and Zhang 2003).

Teorem 69 un İspatı: W yansımali ve ayrılabilir bir Banach uzay olduğu için

$$W = \overline{\text{span} \{e_j: j = 1, 2, \dots\}} \text{ ve } W^* = \overline{\text{span} \{e_j^*: j = 1, 2, \dots\}}$$

ve

$$\langle e_j, e_j^* \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olacak şekilde $e_j \in W$ ve $e_j^* \in W^*$ vardır. Bu durumda

$$W_j = \text{span} \{e_j\}, Y_k = \bigoplus_{j=1}^k W_j, Z_k = \overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty} W_j}$$

olmak üzere W uzayı, $W = Y_k \oplus Z_k$ olarak yazılabilir.

(f_4) şartından dolayı I çift fonksiyoneldir, Yardımcı Teorem 6 dan dolayı da I fonksiyoneli Teorem 62 (Fountain Teoremi) nin $(A3)$ şartı olan $(PS)_c$ şartını sağlar. Dolayısıyla biz sadece yeterince büyük k değerleri için, $(A1)$ ve $(A2)$ şartlarını sağlayan $\rho_k > r_k > 0$ değerlerinin olduğunu göstermeliyiz.

$(A1)$ in sağlanması: Herhangi bir $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ ve her $\xi \geq 1$

$$\eta_2(\xi) = F(x, \xi^{-1}t) \xi^\theta$$

olsun. (AR) şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} \eta_2^l(\xi) &= -f(x, \xi^{-1}t) t \xi^{\theta-2} + \theta F(x, \xi^{-1}t) \xi^{\theta-1} \\ &= \xi^{\theta-1} [\theta F(x, \xi^{-1}t) - \xi^{-1} f(x, \xi^{-1}t) t] \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı $\eta_2(\xi)$ fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında artmayandır. Dolayısıyla herhangi bir $|t| \geq 1$ için $\eta_2(1) \geq \eta_2(t)$, yani $\hat{C} = \inf_{\substack{x \in \Omega \\ |t|=1}} F(x, t) > 0$ olmak üzere her $x \in \Omega$ için

$$F(x, t) \geq F(x, t^{-1}t) |t|^\theta \geq \hat{C} |t|^\theta \quad (59)$$

dır. Ayrıca (f_2) den, her $x \in \Omega$, $0 < |t| \leq t^*$ için

$$|F(x, t)| \leq C_9 |t|^{\beta p^+} \quad (60)$$

şartını sağlayan $C_9 > 0$, $t^* > 0$ sabitleri ve (f_1) den, her $x \in \Omega$, $t^* \leq |t| \leq 1$ için

$$|F(x, t)| \leq C_{10}(C_4 + C_5|t|^{q(x)}) \leq C_{10}(C_4 + C_5|t|^{q^-}) \leq C_{10}|t|^{\beta p^+} \quad (61)$$

şartını sağlayan $C_{10} > 0$ sabiti vardır. (60) ve (61) kullanılarak, her $x \in \Omega$, $|t| \in [0, 1]$ için

$$F(x, t) \geq -(C_9 + C_{10})|t|^{\beta p^+} \quad (62)$$

sonucu ve daha sonra $C_{11} = C_9 + C_{10}$ olmak üzere (59) ve (62) den, her $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ için

$$F(x, t) \geq \hat{C}|t|^\theta - C_{11}|t|^{\beta p^+} \quad (63)$$

elde edilir. $p^+ < \beta p^+ < (p^-)^*$ olduğu için, (57) ve (63) kullanılarak, $\rho_k \geq 1$ iken

$$\begin{aligned} I(u) &= \hat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\leq \frac{m_2}{\beta} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\frac{m_2}{m_1} \beta} - \int_{\Omega} (\hat{C}|u|^\theta - C_{11}|u|^{\beta p^+}) dx \\ &\leq \frac{m_2}{\beta(p^-)^{\frac{m_2}{m_1} \beta}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx \right)^{\frac{m_2}{m_1} \beta} - \hat{C} \int_{\Omega} |u|^\theta dx + C_{11} \int_{\Omega} (|u|^{\beta p^+}) dx \\ &\leq \frac{m_2}{\beta(p^-)^{\frac{m_2}{m_1} \beta}} \|u\|_W^{\frac{m_2}{m_1} \beta p^+} - \hat{C} \|u\|_W^\theta + C_{11} \|u\|_W^{\beta p^+} \\ &\leq \frac{C^0 m_2}{\beta(p^-)^{\frac{m_2}{m_1} \beta}} \|u\|_W^{\frac{m_2}{m_1} \beta p^+} - \hat{C} \|u\|_W^\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Sonlu boyutlu uzaylarda bütün normlar eş olduğu için ve $\theta > \frac{m_2}{m_1} \beta p^+$ olduğundan

$$a_k = \max_{\substack{u \in Y_k \\ \|u\|_W = \rho_k}} I(u) \leq 0$$

şartını sağlayan yeteri kadar büyük $\rho_k \geq 1$ değeri vardır. Dolayısıyla (A1) şartı sağlanmış olur.

(A2) nin sağlanması: (51), (53) ve Teorem 33 kullanılarak herhangi bir $u \in Z_k$, $\|u\|_W = r_k = \left(C_{12} C_3^{q^+} q^+ \gamma_k^{q^+} m_1^{-1} (p^+)^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta p^+ - q^+}} \geq 1$ için

$$I(u) = \hat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, u) dx$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{m_1}{\beta} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\beta} - C_{12} \int_{\Omega} (C + |u|^{q(x)}) dx \\
&\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} \|u\|_W^{\beta p^-} - C_{12} \max \{ |u|_{q(\cdot)}^{q^-}, |u|_{q(\cdot)}^{q^+} \} - C_{12} C |\Omega| \\
&\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} \|u\|_W^{\beta p^-} - C_{12} \max \{ C_3^{q^-} |u|_{q(\cdot)}^{q^-}, C_3^{q^+} |u|_{q(\cdot)}^{q^+} \} - C_{13} \\
&\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} \|u\|_W^{\beta p^-} - C_{12} C_3^{q^+} \gamma_k^{q^+} \|u\|_W^{q^+} - C_{13} \\
&= \frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} \left(C_{12} C_3^{q^+} q^+ \gamma_k^{q^+} m_1^{-1} (p^+)^{\beta} \right)^{\frac{\beta p^-}{\beta p^- - q^+}} \\
&\quad - C_{12} C_3^{q^+} \gamma_k^{q^+} \left(C_{12} C_3^{q^+} q^+ \gamma_k^{q^+} m_1^{-1} (p^+)^{\beta} \right)^{\frac{q^+}{\beta p^- - q^+}} - C_{13} \\
&= \frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{q^+} \right) r_k^{\frac{\beta p^-}{\beta p^- - q^+}} - C_{13}
\end{aligned}$$

elde edilir. $k \rightarrow \infty$ iken $\gamma_k \rightarrow 0$ ve $\beta < \beta p^- < q^+$ olduğundan $k \rightarrow \infty$ iken $r_k \rightarrow \infty$ olur.

Bu durumda $u \in Z_k$, $\|u\|_W = r_k$ için $k \rightarrow \infty$ iken

$$b_k = \inf_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|_W = r_k}} I(u) \geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{q^+} \right) r_k^{\frac{\beta p^-}{\beta p^- - q^+}} - C_{13} \rightarrow \infty$$

şartını sağlayan $\rho_k > r_k > 0$ değeri vardır. Böylece (A2) şartı sağlanmış olur.

Fountain Teoreminin şartları sağlandığı için $k \rightarrow \infty$ iken $I(u_k) \rightarrow \infty$ şartını sağlayan (u_k) kritik noktaları dizisi ve (49) probleminin sonsuz sayıda çözümü olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 70 i ispatlamak için Dual Fountain Teoremini kullanacağız. Bunun için ilk önce M fonksiyonun (M_1) şartını, f fonksiyonun (f_1) ve (AR) şartlarını sağlaması durumunda, I fonksiyonelinin $(PS)_c^*$ şartını sağladığını ifade ve ispat edeceğimiz yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 9: M fonksiyonu (M_1) , f fonksiyonu (f_1) ve (AR) şartlarını sağlarsa, I fonksiyoneli $(PS)_c^*$ şartını sağlar.

İspat: $n_j \rightarrow \infty$ iken $u_{n_j} \in Y_{n_j}$, $I(u_{n_j}) \rightarrow \tilde{c}$ ve $(I|_{Y_{n_j}})'(u_{n_j}) \rightarrow 0$ olmak üzere $(u_{n_j}) \subset W$ olsun. Yardımcı Teorem 6 daki işlemlere benzer şekilde $\|u_{n_j}\|$ nin sınırlılığını elde ederiz. W da $u_{n_j} \rightarrow u$ olacak şekilde bir (u_{n_j}) alt dizisi vardır. $W = \overline{U_{n_j} Y_{n_j}}$ olduğundan $v_{n_j} \rightarrow u$ olacak şekilde bir $v_{n_j} \in Y_{n_j}$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\lim_{n_j \rightarrow \infty} \langle I'(u_{n_j}), (u_{n_j} - u) \rangle &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \langle I'(u_{n_j}), (u_{n_j} - v_{n_j}) \rangle + \lim_{n_j \rightarrow \infty} \langle I'(u_{n_j}), (v_{n_j} - u) \rangle \\
&= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \langle (I|_{Y_{n_j}})'(u_{n_j}), (u_{n_j} - v_{n_j}) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. $I', (S_+)$ olduğu için $u_{n_j} \rightarrow u$ ve dolayısıyla $I'(u_{n_j}) \rightarrow I'(u)$ olur.

Şimdi $I'(u) = 0$ olduğunu ispatlayalım. Keyfi bir $w_k \in Y_k$ seçelim. $n_j > k$ iken

$$\begin{aligned}
\langle I'(u), w_k \rangle &= \langle I'(u) - I'(u_{n_j}), w_k \rangle + \langle I'(u_{n_j}), w_k \rangle \\
&= \langle I'(u) - I'(u_{n_j}), w_k \rangle + \langle (I|_{Y_{n_j}})'(u_{n_j}), w_k \rangle
\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının limiti alınırsa her $w_k \in Y_k$ için

$$\langle I'(u), w_k \rangle = 0$$

ve

$$I'(u) = 0$$

elde edilir. Böylece her $c \in \mathbb{R}$ için $(PS)_c^*$ şartının sağlandığı ispatlanmış olur.

Teorem 70 in İspatı: (f_4) şartından ve Yardımcı Teorem 9 dan sırasıyla $I \in C^1(W, \mathbb{R})$ nin çift fonksiyonel olduğu ve $(PS)_c^*$ şartının yani Dual Fountain Teoremindeki (B_4) şartının sağlandığı elde edilmiş olur. Şimdi diğer şartları sağladığını gösterelim.

$(B1)$ in sağlanması: Herhangi bir $v \in Z_k$ için $\|v\|_W = 1$ ve $0 < t < 1$ olmak üzere (56) ve Teorem 33 kullanılarak

$$\begin{aligned}
I(tv) &= \widehat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla(tv)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, tv) dx \\
&\geq \frac{m_1}{\beta} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla(tv)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\beta} - \varepsilon_1 |t|^{\beta p^+} \int_{\Omega} |v|^{\beta p^+} dx - C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \int_{\Omega} |v|^{q(x)} dx \\
&\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} t^{\beta p^+} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^{p(x)} dx \right)^{\beta} - \varepsilon_1 |t|^{\beta p^+} \int_{\Omega} |v|^{\beta p^+} dx - C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \int_{\Omega} |v|^{q(x)} dx \\
&\geq \frac{m_1}{\beta(p^+)^{\beta}} t^{\beta p^+} \|v\|_W^{\beta p^+} - \varepsilon_1 C_2^{\beta p^+} |t|^{\beta p^+} \|v\|_W^{\beta p^+} - \begin{cases} C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \gamma_k^{q^-} \|v\|_W^{\beta p^+} & \text{eğer } |u|_{q(\cdot)} < 1 \text{ ise} \\ C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \gamma_k^{q^+} \|v\|_W^{\beta p^+} & \text{eğer } |u|_{q(\cdot)} > 1 \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left(\frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} - \varepsilon_1 C_2^{\beta p^+} \right) t^{\beta p^+} - \begin{cases} C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \gamma_k^{q^-} \|v\|_W^{\beta p^+} & \text{eğer } |u|_{q(\cdot)} < 1 \text{ ise} \\ C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \gamma_k^{q^+} \|v\|_W^{\beta p^+} & \text{eğer } |u|_{q(\cdot)} > 1 \text{ ise} \end{cases} \\
&\geq \left(\frac{m_1}{\beta(p^+)^\beta} - \varepsilon_1 C_2^{\beta p^+} \right) t^{\beta p^+} - C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \gamma_k^{q^-}
\end{aligned} \tag{64}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 7 nin (i) kısmında olduğu gibi $0 < \varepsilon_1 < \frac{m_1}{2\beta(p^+)^\beta C_2^{\beta p^+}}$ şartını sağlayan yeteri kadar küçük bir ε_1 değeri olsun. (64) ten

$$I(tv) \geq \frac{m_1}{2\beta(p^+)^\beta} t^{\beta p^+} - C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \gamma_k^{q^-} \tag{65}$$

olur. $q^- > \beta p^+$ olduğundan dolayı yeteri kadar küçük $t = \rho_k$ alınırsa $\|v\|_W = 1$ iken $v \in Z_k$ için $I(tv) \geq 0$ sağlanır. Yeteri kadar büyük k değeri için

$$c_k = \inf_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|_W = \rho_k}} I(u) \geq 0$$

elde edilir. Böylece (B1) şartının sağlandığı gösterilmiş olur.

(B2) nin sağlanması: Herhangi bir $v \in Y_k$ için $\|v\|_W = 1$ ve $0 < t < \rho_k < 1$ olmak üzere (f_5) ve (M_1) şartları kullanılarak

$$\begin{aligned}
I(tv) &= \widehat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla(tv)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, tv) dx \\
&\leq \frac{m_2}{\beta} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla(tv)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right)^{\frac{m_2}{m_1} \beta} - a \int_{\Omega} \frac{|tv|^{q(x)}}{q(x)} dx \\
&\leq \frac{m_2}{\beta(p^-)^{\frac{m_2}{m_1} \beta}} t^{\frac{m_2}{m_1} \beta} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^{p(x)} dx \right)^{\frac{m_2}{m_1} \beta} - a \frac{t^{q^+}}{q^+} \int_{\Omega} |v|^{q(x)} dx \\
&\leq \frac{m_2}{\beta(p^-)^{\frac{m_2}{m_1} \beta}} t^{\frac{m_2}{m_1} \beta p^-} - a \frac{t^{q^+}}{q^+}
\end{aligned}$$

elde edilir. $q^+ < \frac{m_2}{m_1} \beta p^-$ olduğu için $t = r_k$ iken $I(tv) < 0$ şartını sağlayan bir $r_k \in (0, \rho_k)$ vardır. Dolayısıyla

$$d_k = \max_{\substack{u \in Y_k \\ \|u\|_W = r_k}} I(u) < 0$$

dır. Böylece (B2) nin sağlandığı gösterilmiş olur.

(B3) ün sağlanması: $Y_k \cap Z_k \neq \emptyset$ ve $r_k < \rho_k$ olduğu için

$$e_k = \inf_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|_W \leq \rho_k}} I(u) < d_k = \max_{\substack{u \in Y_k \\ \|u\|_W = r_k}} I(u) < 0$$

dır. (65) ten $\|v\|_W = 1$, $0 \leq t \leq \rho_k$ ve $u = tv$ olmak üzere $v \in Z_k$ için

$$\begin{aligned} I(u) &= I(tv) \\ &\geq \frac{m_1}{2\beta(p^+)^\beta} t^{\beta p^+} - C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \gamma_k^{q^-} \\ &\geq -C_{\varepsilon_1} |t|^{q^-} \gamma_k^{q^-} \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $e_k = \inf_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|_W \leq \rho_k}} I(u) \rightarrow 0$ elde edilmiş olur ve böylece (B3) ün sağlandığı gösterilmiş olur.

Dual Fountain Teoreminin şartları sağlandığından dolayı (49) probleminin $I(\pm v_k) < 0$ ve $k \rightarrow \infty$ iken $I(\pm v_k) \rightarrow 0$ şartlarını sağlayan $(\pm v_k)_{k=1}^\infty$ bir çözüm dizisi olduğu gösterilmiş olur.

$\mathbb{R}^N$ de $p(\cdot)$ -Laplacian İçeren Schrödinger-Kirchhoff Tipi Problemin Çözümlerinin Varlığı ve Çokluğu

Schrödinger-Kirchhoff tipi denklemler, Kirchhoff tipi denklemlerin $V(x)$ potansiyel fonksiyon içeren halleridir.

Chen and Li (2013), f fonksiyonu AR şartını sağlamak üzere

$$-\left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + V(x)u = f(x, u) + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

problemini ele aldılar ve V , f ve h üzerine konulan

(V1): $V \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a_1 > 0$ bir sabit olmak üzere $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \geq a_1 > 0$ ve her

$M > 0$ için $\text{meas}\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\} < \infty$ dur,

(f1): $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $a_2 > 0$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^N$ ve $z \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x, z)| \leq a_2(1 + |z|^{p-1})$$

dir,

(f2): her $x \in \mathbb{R}^N$ ve $z \in \mathbb{R}$ için

$$\mu F(x, z) = \mu \int_0^z f(x, y) dy \leq z f(x, z)$$

olacak şekilde bir $\mu > 4$ değeri vardır,

(f3): her $x \in \mathbb{R}^N$ için $z \rightarrow 0$ iken $\frac{f(x, z)}{z} \rightarrow 0$ dır,

(f4): $\inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ |z|=1}} F(x, z) > 0$ dır,

şartları altında Kritik Nokta Teorisindeki Ekeland's varyasyonel prensibi ile Mountain Pass Teoremini kullanarak problemin çözümlerinin çokluğunu ispatladılar.

Guo and Nie (2015), $a > 0$, $b \geq 0$ sabitler, λ parametre, $p \geq 2$, $N < \frac{p^2}{p-1}$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ p -Laplacian operatör olmak üzere

$$\begin{cases} - \left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{p-1} \Delta_p u + \lambda V(x) |u|^{p-2} u = f(x, u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (66)$$

problemini çalıştılar ve V potansiyel fonksiyonu ile f fonksiyonu üzerine konulan

(V1): $V \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $V(x) \geq 0$. Ayrıca $\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq d\} \neq \emptyset$ ve $\operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq d\} < \infty$ şartını sağlayan bir $d > 0$ sabiti vardır,

(f1): $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve her $(x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ için

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & N > p \text{ ise} \\ +\infty, & N \leq p \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$|f(x, u)| \leq c_1 |u|^{p-1} + c_2 |u|^{q-1}$$

şartını sağlayan c_1, c_2 sabitleri ve $q \in (p, p^*)$ değeri vardır,

(f2): $x \in \mathbb{R}^N$ için $|u| \rightarrow 0$ iken $f(x, u) = o(|u|^{p-1})$ dır,

(f3): $0 < C_0 < \frac{\beta(\mu-p)}{r_0^p}$ iken her $x \in \mathbb{R}^N$ ve $|u| \geq r_0$ için

$$\inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ |u|=r_0}} F(x, u) = \beta > 0$$

ve

$$\mu F(x, u) - f(x, u)u \leq C_0 |u|^p$$

şartını sağlayan $\mu \in (p^2, p^*)$ and $r_0 > 0$ vardır,

$$(f4): x \in \mathbb{R}^N \text{ için } |u| \rightarrow \infty \text{ iken } \frac{F(x,u)}{|u|^{p^2}} \rightarrow \infty,$$

$$(f5): \text{ her } x \in \mathbb{R}^N \text{ ve } |u| \geq r \text{ için}$$

$$p^2 F(x, u) - f(x, u)u \leq C|u|^p$$

olacak şekilde $r > 0$ ve $C > 0$ vardır,

$$(f6): \text{ her } (x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \text{ için } f(x, -u) = -f(x, u),$$

$$(f'5): \text{ her } (x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \text{ için } p^2 F(x, u) \leq f(x, u)u$$

şartları altında varyasyonel metodları kullanarak (66) probleminin aşikar olmayan çözümlerinin varlığını ve çokluğunu ispatlamışlardır.

Shen and Qian (2015), b pozitif bir sabit, $V \in L^\infty(\Omega)$ işaret değiştiren fonksiyon, $p(x) \in C(\Omega)$ ve $1 < p^- = \inf_{x \in \Omega} p(x) \leq p^+ = \sup_{x \in \Omega} p(x) < \infty$ olmak üzere düzgün sınırlı Ω bölgesinde

$$\begin{cases} -\left(1 + b \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \Delta_{p(x)} u + V(x)|u|^{p(x)-2}u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega), \end{cases}$$

problemini çalıştılar ve $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonu üzerine konulan

(f1): h.h.h. $x \in \Omega$, her $\zeta \in R$ için $a(x) \in L^\infty(\Omega)_+ = \{u \in L^\infty(\Omega): \text{her } x \in \Omega \text{ için } u(x) > 0\}$ ve $\lambda > 0$ iken

$$|f(x, \zeta)| \leq a(x) + \lambda|\zeta|^{p(x)-1},$$

$$(f2): p^+ < \eta(x) < p^*(x) \text{ iken herhangi bir } \eta(x) \in C_+(\bar{\Omega}) \text{ ve } x \in \Omega \text{ için}$$

$$\liminf_{|\zeta| \rightarrow \infty} \frac{p-F(x, \zeta)-f(x, \zeta)\zeta}{|\zeta|^{\eta(x)}} > 0,$$

$$(f3): \text{ her } x \in \Omega \text{ için}$$

$$\sup_{|\zeta| \rightarrow \infty} F(x, \zeta) \leq \vartheta(x) < 0$$

şartını sağlayan $\delta > 0$ ve $\vartheta(x) \in L^\infty(\Omega)_- = \{u \in L^\infty(\Omega): \text{her } x \in \Omega \text{ için } u(x) < 0\}$ vardır,

$$(f4): p^+ < q^- \text{ iken her } x \in \Omega \text{ için}$$

$$\liminf_{|\zeta| \rightarrow \infty} \frac{F(x, \zeta)}{|\zeta|^{2q(x)}} > 0$$

olacak şekilde bir $q(x) \in C_+(\bar{\Omega})$ vardır,

$$(f5): \text{ her } (x, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ için } f(x, -\zeta) = -f(x, \zeta)$$

şartları altında Symmetric Mountain Pass Lemmasını ve Fountain Teoremini kullanarak problemin sonsuz sayıda çözümünün olduğunu elde etmişlerdir.

$p(\cdot)$ -Laplacian içeren Kirchhoff tipi ve Schrödinger-Kirchhoff tipi eliptik problemler son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir (Dai and Hao 2009; Colasuonno and Pucci 2011; Afrouzi and Mirzapour 2013; Cammaroto and Vilasi 2013; Yucedag ve Ayazoglu 2014; Repovš 2015; Wang *et al.* 2015; Ayazoglu vd 2017b; Ayazoglu ve Alisoy 2018).

Çalışmamızın bu kısmında; yukarıda ifade edilen çalışmalardan esinlenerek, $b \geq 0$ bir sabit, $N \geq 2$, $\Delta_{p(\cdot)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u)$ $p(\cdot)$ -Laplacian operatör, $p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz sürekli ve sınırlı bir fonksiyon, $V: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ coercive tipi potansiyel fonksiyon, $f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nonlinear bir Carathéodory fonksiyonu ve $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere $p(\cdot)$ -Laplacian içeren homojen olmayan

$$\begin{cases} -\left(1 + b \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx\right) \Delta_{p(x)}u + V(x)|u|^{p(x)-2}u = f(x, u) + g(x), x \in \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (67)$$

Schrödinger-Kirchhoff tipi problemin aşık olma çözümlerinin çokluğu araştırılacaktır. Bu sebeple sınırlı Palais-Smale dizileri elde etmek için lineer olmayan $f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü üzerine yeni varsayımlar konulacak ve sonra bulduğumuz özel dizilerin kritik noktalara yakınsadığı ispatlanacaktır. Çözümler için Mountain Pass Teoremi, Ekeland's Varyasyonel Prensibi ve Krasnoselskii's Genus Teorisi kullanılacaktır.

(67) probleminde ifade edilen p , V , g ve f fonksiyonları üzerine konulan şartlar;

(p_1) : $1 < p^- \leq p^+ < N$ olmak üzere $p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Lipschitz sürekli ve sınırlı,

(V_1) : $V: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) := V^- > 0$ ve $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$,

(g_1) : $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ keyfi bir fonksiyondur,

(f_1) : $f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory fonksiyonu ve $q \in L_+^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ her $x \in \mathbb{R}^N$ için $q^- > p^+$ şartıyla $q(x) \ll p^*(x)$ olmak üzere, her $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ için

$$|f(x, t)| \leq C_0(1 + |t|^{q(x)-1})$$

olacak şekilde $C_0 > 0$ vardır,

(f_2) : $x \in \mathbb{R}^N$ için $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{|t|^{p(x)-1}} = 0$ ($t \rightarrow 0$ için $f(x, t) = o(|t|^{p(x)-1})$),

(f_3) : her $|t| \geq r$ ve $x \in \mathbb{R}^N$ için $F(x, t) = \int_0^t f(x, \xi) d\xi$ olmak üzere

$$\frac{p^-}{2(p^+)^2} f(x, t)t - F(x, t) \geq 0$$

olacak şekilde $r > 0$ vardır,

(f_4): $s \in L_+^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ ve $2p^+ < s^-$ iken $p < s \ll p^*$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^N$ için

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{F(x, t)}{|t|^{s(x)}} = +\infty$$

dur,

(f_5): f fonksiyonu, ikinci değişkenine göre tek, yani her $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ için

$$f(x, -t) = -f(x, t)$$

dir.

(f_1)-(f_5) şartlarını sağlayan f fonksiyonuna bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 6: $p(x) = 3 + \frac{10}{11}|\sin x|$, $s(x) = 8 + |\cos x|$ ve $f(x) = t^{11+6|\sin x|}$ olarak seçilen f fonksiyonu (f_1) – (f_5) şartlarını sağlar.

$f(x, t)$ fonksiyonunun yerine $f_0(x, t)$ yazarak aşağıdaki (f_6) koşulunu verelim.

(f_6): $f_0: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir Carathéodory fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}^N$ için $r^0(x) = \frac{p(x)}{p(x)-m(x)}$ olmak şartıyla $l, m \in L_+^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$, $0 < h \in L^{r^0(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ ve $\max\{l^+, m^+\} < p^-$ iken $l, m < p$ olmak üzere her $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ için

$$d_1|t|^{l(x)-1} \leq f_0(x, t) \leq d_2h(x)|t|^{m(x)-1}$$

şartını sağlayan $d_1, d_2 > 0$ sabitleri vardır.

Şimdi f_0 fonksiyonun (f_6) şartını sağladığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 7: $p(x) = 3 + \frac{10}{11}|\sin x|$, $m(x) = \frac{9}{5} + \frac{12}{11}|\sin x|$ ve $f_0(x) = t^{\frac{1}{5}p(x)}$ olarak seçilirse f_0 fonksiyonu (f_6) şartını sağlar.

V fonksiyonu (V_1) şartını, p fonksiyonu ise (p_1) şartını sağlasın.

$$\sigma_{p(\cdot)}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p(x)} dx$$

ve

$$\sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p(x)} dx$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \Lambda_{p(\cdot)}(u) &:= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x)|^{p(x)} + V(x) |u(x)|^{p(x)}) dx \\ &\equiv \sigma_{p(\cdot)}(|\nabla u|) + \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

şartını sağlayan $u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ fonksiyonlarından oluşan küme E , yani

$$E = \left\{ u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N) : \Lambda_{p(\cdot)}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x)|^{p(x)} + V(x) |u(x)|^{p(x)}) dx < \infty \right\} \quad (68)$$

olsun.

E deki norm

$$\|u\|_E := \inf \left\{ \eta > 0 : \Lambda_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\eta}\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \frac{\nabla u(x)}{\eta} \right|^{p(x)} + V(x) \left| \frac{u(x)}{\eta} \right|^{p(x)} \right) dx \leq 1 \right\}$$

dir. E , $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ nin kapalı alt uzayı olduğundan $1 < p^- < p^+ < \infty$ için E ayrılabilir ve yansımali Banach uzayıdır.

Önerme 4: $u \in E$ için

- i) $\min \{ \|u\|_E^{p^-}, \|u\|_E^{p^+} \} \leq \Lambda_{p(\cdot)}(u) \leq \max \{ \|u\|_E^{p^-}, \|u\|_E^{p^+} \},$
- ii) $\min \left\{ \Lambda_{p(\cdot)}^{1/p^-}(u), \Lambda_{p(\cdot)}^{1/p^+}(u) \right\} \leq \|u\|_E \leq \max \left\{ \Lambda_{p(\cdot)}^{1/p^-}(u), \Lambda_{p(\cdot)}^{1/p^+}(u) \right\},$
- iii) Eğer $\|u\|_E \neq 0$ ise $\Lambda_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\|u\|_E}\right) = 1$

dir (Kováčik and Rákosnik 1991; Diening *et al.* 2011).

Yardımcı Teorem 10: V fonksiyonu (V_1) ve p fonksiyonu (p_1) şartını sağlarsa her $x \in \mathbb{R}^N$ için $p(x) < q(x) \ll p^*(x)$ olmak üzere herhangi bir ölçülebilir $q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $E \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ kompakt gömmesi vardır (Ayazoglu ve Alisoy 2018).

Her $u \in E$ için

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} (|\nabla u|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}) dx + \frac{b}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right)^2$$

şeklinde tanımlayalım. Φ çifttir ve $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ dır (Fan and Deng 2007). E^* , E nin dual uzayı olmak üzere $L = \Phi' : E \rightarrow E^*$ olarak tanımlayalım. Her $u, \varphi \in E$ için

$$\begin{aligned} \langle L(u), \varphi \rangle &= \left(1 + b \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p(x)-2} u \varphi dx \end{aligned} \quad (69)$$

dır.

Önerme 5: E uzayı ve L dönüşümü, (68) ve (69) da tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda

- i) $L : E \rightarrow E^*$ sürekli, sınırlı ve kesin monoton operatör,
- ii) L dönüşümü (S_+) tipi bir dönüşümdür, yani E de $u_n \rightarrow u$ ve $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle L(u_n) - L(u), (u_n - u) \rangle \leq 0$ ise E de $u_n \rightarrow u$ dur,
- iii) $L : E \rightarrow E^*$ bir homeomorfizmadır (Fan and Deng 2007).

(67) problemi için $I_g : E \rightarrow \mathbb{R}$ enerji fonksiyoneli

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^u f(x, s) ds$$

ve

$$G_g(u) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u(x) dx$$

olmak üzere $u \in E$ için

$$I_g(u) = \Phi(u) - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u(x) dx := \Phi(u) - \mathcal{F}(u) - G_g(u) \quad (70)$$

olarak tanımlayalım.

$(V_1), (f_1) - (f_3)$ ve $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. (67) problemi ile ilgili $I_g: E \rightarrow \mathbb{R}$ enerji fonksiyonelinin iyi tanımlı olduğu açıktır. I_g enerji fonksiyonelinin kritik noktaları (67) probleminin çözümüdür.

$g \equiv 0$ olduğunda (70) eşitliğindeki enerji fonksiyoneli $I_0: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$I_0(u) = \Phi(u) - \mathcal{F}(u)$$

şekline dönüşür. Bunun yanı sıra V, f ve $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ için uygun şartlar altında $I_g \in C^1(E, \mathbb{R})$ olur ve her $u, \varphi \in E$ için

$$\langle I'_g(u), \varphi \rangle = \langle L(u), \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) \varphi(x) dx - G_g(\varphi)$$

elde edilir.

(f_1) ve (f_2) den herhangi bir $\varepsilon > 0$ a karşılık $C_\varepsilon > 0$ seçelim. Her $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ için

$$f(x, t) \leq \varepsilon |t|^{p(x)-1} + C_\varepsilon |t|^{q(x)-1}$$

ve

$$F(x, t) \leq \frac{\varepsilon}{p^-} |t|^{p(x)} + \frac{C_\varepsilon}{q^-} |t|^{q(x)}$$

dir. Yardımcı Teorem 10 kullanılarak her $u \in E$ için

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx &\leq \frac{\varepsilon}{p^-} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p(x)} dx + \frac{C_\varepsilon}{q^-} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{p^-} \max \{ |u|_{p(\cdot)}^{p^-}, |u|_{p(\cdot)}^{p^+} \} + \frac{C_\varepsilon}{q^-} \max \{ |u|_{q(\cdot)}^{q^-}, |u|_{q(\cdot)}^{q^+} \} \\ &\leq C_1 (1 + \|u\|_E^{p^+}) + C_2 (1 + \|u\|_E^{q^+}) < \infty \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 95: Her $\varphi \in E$ için

$$\langle L(u), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [f(x, u(x)) + g(x)] \varphi(x) dx$$

eşitliği sağlanıyorsa $u \in E$ ye (67) probleminin zayıf çözümü denir. I_g nin kritik noktaları (67) probleminin zayıf çözümüdür.

Teorem 71: (p_1) , (V_1) ve $(f_1) - (f_4)$ şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $g \neq 0$ olmak üzere $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $m_0 > 0$ olmak üzere $|g|_{p'(\cdot)} \leq m_0$ iken (67) probleminin E de sıfırdan farklı en az iki çözümü vardır.

Teorem 72: (p_1) , (V_1) ve $(f_1) - (f_5)$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $g \equiv 0$ ise (67) probleminin $I_0(u_n) \rightarrow +\infty$ olacak şekilde (u_n) çözüm dizisi vardır.

Teorem 73: (p_1) , (V_1) , (f_5) ve (f_6) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $g \equiv 0$ ise (67) probleminin $I_0(u_n) \rightarrow +\infty$ olacak şekilde (u_n) çözüm dizisi vardır.

Teorem 71 in İspatı: İspat için ilk önce I_g enerji fonksiyonelinin sıfır noktası civarında pozitif olan bir kritik noktasını elde etmek amacıyla Mountain Pass Teoreminde kullanılacak yardımcı teoremleri ifade ve ispat edelim.

Yardımcı Teorem 11: $(f_1) - (f_3)$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. (70) ile ifade edilen I_g fonksiyoneli $(PS)_c$ şartını sağlar.

İspat: $c > 0$ ve $(u_n) \subset E$

$$|I_g(u_n)| < c \text{ ve } n \rightarrow \infty \text{ iken } E^* \text{ da } I'_g(u_n) \rightarrow 0 \quad (71)$$

olsun.

İlk olarak (u_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için aksini kabul ederek

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \|u_n\|_E \rightarrow +\infty$$

olduğunu varsayalım. (f_3) kullanılarak, her $x \in \mathbb{R}^N$, $|t| \geq r$ için

$$f(x, t)t \geq \frac{2(p^+)^2}{p^-} F(x, t)$$

elde edilir.

$$(f_2) \text{ den } 0 < \varepsilon_0 < \frac{(2p^+ - p^-)v^-}{4(p^+)^2} \text{ olmak üzere her } |t| \leq \delta, x \in \mathbb{R}^N \text{ için}$$

$$\frac{p^-}{2(p^+)^2} f(x, t)t - F(x, t) \leq \varepsilon_0 |t|^{p(x)}$$

şartını sağlayan $\delta := \delta(\varepsilon_0)$ mevcuttur.

$$(f_1) \text{ den her } x \in \mathbb{R}^N \text{ ve } \delta \leq |t| \leq r \text{ için}$$

$$\frac{p^-}{2(p^+)^2} f(x, t)t - F(x, t) \leq C_0(\delta^{1-p^+} + r^{q^- - p^+})|t|^{p(x)}$$

elde edilir. Böylece, $C_1 = C_0(\delta^{1-p^+} + r^{q^- - p^+})$ olmak şartıyla her $|t| \leq r$, $x \in \mathbb{R}^N$ için

$$\begin{aligned}\frac{p^-}{2(p^+)^2} f(x, t) t - F(x, t) &\leq \varepsilon_0 |t|^{p(x)} + C_0 (\delta^{1-p^+} + r^{q^- - p^+}) |t|^{p(x)} \\ &= \varepsilon_0 |t|^{p(x)} + C_1 |t|^{p(x)}\end{aligned}$$

olur. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ olduğundan dolayı her $|x| \geq R$ için

$$\frac{(2p^+ - p^-)V(x)}{8(p^+)^2} > C_1$$

şartını sağlayan $R > 0$ değeri vardır. $0 < \varepsilon_0 < \frac{(2p^+ - p^-)V^-}{4(p^+)^2}$ ile birleştirerek $B_R := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$, $|B_R| := \text{meas}(B_R)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}& \frac{2p^+ - p^-}{2(p^+)^2} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u_n) + \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| \leq r\}} \left[\frac{p^-}{2(p^+)^2} u_n f(x, u_n) - F(x, u_n) \right] dx \\ & \geq \frac{2p^+ - p^-}{2(p^+)^2} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u_n) - \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| \leq r\}} (\varepsilon_0 |u_n|^{p(x)} + C_1 |u_n|^{p(x)}) dx \\ & = \frac{2p^+ - p^-}{4(p^+)^2} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u_n) - \varepsilon_0 \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| \leq r\}} |u_n|^{p(x)} dx + \frac{2p^+ - p^-}{4(p^+)^2} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u_n) \\ & \quad - C_1 \int_{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| \leq r} |u_n|^{p(x)} dx \\ & \geq \left(\frac{(2p^+ - p^-)V^-}{4(p^+)^2} - \varepsilon_0 \right) \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| \leq r\}} |u_n|^{p(x)} dx + \frac{2p^+ - p^-}{8(p^+)^2} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u_n) \\ & \quad - C_1 r^{p^+} |B_R| \\ & \geq \frac{(2p^+ - p^-)V^-}{8(p^+)^2} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u_n) - C_1 r^{p^+} |B_R|\end{aligned} \tag{72}$$

elde edilir. Ardından (71), (72), Teorem 38, Önerme 4 ve Yardımcı Teorem 10 kullanılarak yeterince büyük n için

$$\begin{aligned}& I_g(u_n) - \frac{p^-}{2(p^+)^2} \langle I'_g(u_n), u_n \rangle \\ & \geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{p^-}{2(p^+)^2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \left(\frac{1}{p^+} - \frac{p^-}{2(p^+)^2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^{p(x)} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| \leq r\}} \left[\frac{p^-}{2(p^+)^2} u_n f(x, u_n) - F(x, u_n) \right] dx - \left(1 - \frac{p^-}{2(p^+)^2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_n dx \\
& = \frac{2p^+ - p^-}{2(p^+)^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{2p^+ - p^-}{2(p^+)^2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^{p(x)} dx \\
& \quad + \int_{\{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x)| \leq r\}} \left[\frac{p^-}{2(p^+)^2} u_n f(x, u_n) - F(x, u_n) \right] dx - \frac{2(p^+)^2 - p^-}{2(p^+)^2} \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_n dx \\
& \geq \frac{2p^+ - p^-}{2(p^+)^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{2p^+ - p^-}{8(p^+)^2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^{p(x)} dx - C_1 r^{p^+} |B_R| \\
& \quad - \frac{2(p^+)^2 - p^-}{2(p^+)^2} \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_n dx \\
& \geq \frac{2p^+ - p^-}{8(p^+)^2} \Lambda_{p(\cdot)}(u_n) - C_1 r^{p^+} |B_R| - \frac{2(p^+)^2 - p^-}{(p^+)^2} |g|_{p'(\cdot)} |u_n|_{p(\cdot)} \\
& \geq \frac{2p^+ - p^-}{8(p^+)^2} \|u_n\|_E^{p^-} - \frac{C_p m_0 (2(p^+)^2 - p^-)}{(p^+)^2} \|u_n\|_E - C_1 r^{p^+} |B_R|
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{I_g(u_n) - \frac{p^-}{2(p^+)^2} \langle I'_g(u_n), u_n \rangle}{\|u_n\|_E^{p^-}} \\
& \geq \frac{2p^+ - p^-}{8(p^+)^2} - \frac{\frac{C_p m_0 (2(p^+)^2 - p^-)}{(p^+)^2} \|u_n\|_E + C_1 r^{p^+} |B_R|}{\|u_n\|_E^{p^-}}
\end{aligned}$$

dır. (u_n) bir $(PS)_c$ dizisi ve $\|u_n\|_E \rightarrow +\infty$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_g(u_n) - \frac{p^-}{2(p^+)^2} \langle I'_g(u_n), u_n \rangle}{\|u_n\|_E^{p^-}} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{C_p m_0 (2(p^+)^2 - p^-)}{(p^+)^2} \|u_n\|_E + C_1 r^{p^+} |B_R|}{\|u_n\|_E^{p^-}} = 0$$

dır. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle (u_n) dizisi E de sınırlıdır.

$E, W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ nin kapalı bir alt uzayı olduğu için E ayrılabilir ve yansılalı Banach uzayıdır. Bundan dolayı

$$E \text{ de } u_n \rightharpoonup u$$

sonucunu elde ederiz. Genellemeyi bozmaksızın, her $n \geq 1$ ve bazı C sabitleri için $\|u_n\|_E \leq C$ olsun. (u_n) dizisi E uzayında sınırlı olduğu için $b \geq 0$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken

$$1 + b \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \geq 1$$

dir. $u_n \rightharpoonup u$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle I'_g(u_n), u_n - u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle I'_g(u_n) - I'_g(u), u_n - u \rangle$$

dır.

Şimdi E de (u_n) dizisinin u ya kuvvetli yakınsadığını gösterelim. Yardımcı Teorem 10 kullanılarak $p \leq q \ll p^*$ olmak üzere

$$L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N) \text{ de } u_n \rightarrow u$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} A_n &= \langle I'_g(u_n), u_n - u \rangle \\ &= \left(1 + b \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^{p(x)-2} u_n (u_n - u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) (u_n - u) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x) (u_n - u) dx \end{aligned} \tag{73}$$

dizisini ele alalım. E^* da $I'_g(u_n) \rightarrow 0$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $A_n \rightarrow 0$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} B_n = L(u_n)(u_n - u) &= \left(1 + b \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^{p(x)-2} u_n (u_n - u) dx \end{aligned} \tag{74}$$

olmak üzere, E de $u_n \rightarrow u$ olduğundan $B_n \rightarrow 0$ dir. (f_1) ve (f_2) den $\varepsilon > 0$ ve $C_\varepsilon > 0$ için

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{p(x)-1} + C_\varepsilon |t|^{q(x)-1}, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

olur. Bu nedenle Teorem 33, 38, 40, Önerme 4 ve Yardımcı Teorem 10 kullanılarak C_1 , n den bağımsız genel bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} D_n &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x, u_n)| |u_n - u| dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u_n - u| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon |u_n|^{p(x)-1} + C_\varepsilon |u_n|^{q(x)-1}) |u_n - u| dx + 2|g|_{p'(\cdot)} |u_n - u|_{p(\cdot)} \\ &\leq \varepsilon (1 + \|u_n\|_E^{p^+-1}) |u_n - u|_{p(\cdot)} \\ &\quad + C_1 (1 + \|u_n\|_E^{q^+-1}) |u_n - u|_{q(\cdot)} + 2|g|_{p'(\cdot)} |u_n - u|_{p(\cdot)} \\ &= D_n^1 + D_n^2 + D_n^3 \end{aligned} \tag{75}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 10 dan $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ de $u_n \rightarrow u$ olur, böylece

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } D_n^1, D_n^3 \rightarrow 0$$

elde edilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 10 dan $|u_n - u|_{q(\cdot)} \rightarrow 0$ ($L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ uzayında $u_n \rightarrow u$) olur. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken $D_n^2 \rightarrow 0$ elde edilir. Sonuç olarak $n \rightarrow \infty$ iken $D_n \rightarrow 0$ dir. Bu yüzden $n \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} &\langle I'_g(u_n), u_n - u \rangle \\ &= L(u_n)(u_n - u) - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)(u_n - u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x)(u_n - u) dx \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{76}$$

olur. Böylece (S_+) özelliği kullanılarak, E de $u_n \rightarrow u$ elde edilir. Böylece I_g fonksiyonelinin $(PS)_c$ şartını sağladığı gösterilmiş olur.

Yardımcı Teorem 12: (f_1) ve (f_2) şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ olsun. $|g|_{p'(\cdot)} \leq m_0$ şartını sağlayan her g fonksiyonu ve her $u \in E$ için

$$\|u\|_E = \rho_2 \text{ olmak üzere } I_g(u) \geq \alpha_2 > 0$$

olacak şekilde $\rho_2, \alpha_2, m_0 > 0$ sabitleri vardır.

İspat: (f_1) ve (f_2) den herhangi bir $0 < \varepsilon < \frac{V^-}{2p^+}$ için

$$|F(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{p(x)} + c(\varepsilon) |t|^{q(x)}, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (77)$$

şartını sağlayan bir $c = c(\varepsilon) > 0$ sabiti vardır. Yardımcı Teorem 10 dan dolayı her $u \in E$ için

$$|u|_{q(\cdot)} \leq C_q \|u\|_E \quad (78)$$

olacak şekilde bir $C_q > 0$ sabiti vardır. Teorem 33, 38, 40, 42, Yardımcı Teorem 10, (77) ve (78) kullanılarak yeteri kadar küçük $\rho_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} I_g(u) &\geq \frac{1}{p^+} \sigma_{p(\cdot)}(\nabla u) + \frac{1}{p^+} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u) - \varepsilon \sigma_{p(\cdot)}(u) - c \sigma_{q(\cdot)}(u) - G_g(u) \\ &\geq \frac{1}{p^+} \sigma_{p(\cdot)}(\nabla u) + \frac{1}{p^+} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u) - \frac{\varepsilon}{V^-} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u) - c \max(|u|_{q(\cdot)}^{q^-}, |u|_{q(\cdot)}^{q^+}) \\ &\quad - 2|g|_{p'(\cdot)} |u|_{p(\cdot)} \\ &\geq \frac{1}{p^+} \sigma_{p(\cdot)}(\nabla u) + \left(\frac{1}{p^+} - \frac{\varepsilon}{V^-} \right) \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u) - c C_q^{q^-} \|u\|_E^{q^-} - C_p m_0 \|u\|_E \\ &\geq \frac{1}{2p^+} \|u\|_E^{p^+} - C_q \|u\|_E^{q^-} - C_p m_0 \|u\|_E \\ &= \|u\|_E \left(\frac{1}{2p^+} \|u\|_E^{p^+-1} - C_q \|u\|_E^{q^--1} - C_p m_0 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $t \in \mathbb{R}_0^+$ için

$$\omega(t) = \frac{1}{2p^+} t^{p^+-1} - C_q t^{q^--1}$$

olsun. $q^- > p^+ > 1$ olduğu için (f_1) den $\max_{t \in \mathbb{R}_0^+} \omega(t) = \omega(\rho_2) > 0$ şartını sağlayan $\rho_2 > 0$

değerinin olduğu görülür. $m_0 := \frac{\omega(\rho_2)}{2C_p}$ olarak alınırsa $|g|_{p'(\cdot)} \leq m_0$ olmak üzere her $g \in$

$L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ için $I_g(u) \geq \alpha_2 = \rho_2 \omega(\rho_2)/2 > 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 13: (f_1) , (f_2) ve (f_4) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Yardımcı Teorem 12 de ifade edilen ρ_2 terimi için $\|v\|_E > \rho_2$ olmak üzere $I_g(v) < 0$ şartını sağlayan bir $v \in E$ fonksiyonu vardır.

İspat: $\|u\|_E = 1, u > 0$ olmak üzere bir $u \in E$ noktası alalım. $D_0 > \frac{b \sigma_{p(\cdot)}^2(\nabla u)}{2(p^-)^2 \sigma_{s(\cdot)}(u)}$ olmak üzere, (f_4) den her $x \in \mathbb{R}^N$ için

$$F(x, t) \geq D_0 |t|^{s(x)}, |t| \geq \tau \quad (79)$$

şartını sağlayan bir $\tau > 1$ sabiti vardır. (f_1) ve (f_2) varsayımlarından dolayı herhangi bir $D_0 > 0$ için

$$|F(x, t)| \leq D_0 |t|^{p(x)} + C_3 |t|^{q(x)}, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (80)$$

şartını sağlayan bir $C_3 := C_3(D_0) > 0$ sabiti vardır. Dolayısıyla $C_4 := 2D_0 + C_3 \tau^{q^- - p^+}$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^N$ ve $|t| \leq \tau \in (0, 1)$ için (f_4) ve (80) den

$$\begin{aligned} F(x, t) &\geq -D_0 |t|^{p(x)} - C_3 |t|^{q(x)} \\ &\geq -D_0 |t|^{p(x)} - C_3 \tau^{q^- - p^+} |t|^{p(x)} \\ &\geq D_0 |t|^{s(x)} - D_0 |t|^{p(x)} - (D_0 + C_3 \tau^{q^- - p^+}) |t|^{p(x)} \\ &= D_0 |t|^{s(x)} - C_4 |t|^{p(x)} \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlik ve (79) dan her $x \in \mathbb{R}^N$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$F(x, t) \geq D_0 |t|^{s(x)} - C_4 |t|^{p(x)} \quad (81)$$

elde edilir. Sonra $t \geq 1$ için (81) den

$$\begin{aligned} I_g(tu) &\leq \frac{1}{p^-} t^{p^+} \Lambda_{p(\cdot)}(u) + \frac{b}{2(p^-)^2} t^{2p^+} \sigma_{p(\cdot)}^2(\nabla u) \\ &\quad + C_4 t^{p^+} \sigma_{p(\cdot)}(u) - D_0 t^{s^-} \sigma_{s(\cdot)}(u) - t G_g(u) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $s^- > 2p^+ > 1$ olduğundan $u \in E$ ($u \neq 0$) için $t \rightarrow +\infty$ iken $I_g(tu) \rightarrow -\infty$ olur. Yeteri kadar büyük $t > 0$ için $v = tu$ şeklinde alınarak ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 11 ile I_g enerji fonksiyonelinin $(PS)_c$ şartını sağlayan bir (u_n) dizisinin var olduğu ve Yardımcı Teorem 12, 13 ile Mountain Pass Teoreminin (i), (ii) şartlarının sağlandığı gösterildi. Yardımcı Teorem 13 ve $0 < \delta \leq c$ ile E de yine (u_n) ile ifade edilen bir (u_n) alt dizisi olduğu ve $u_n \rightarrow u^{(1)}$ yakınsaması elde edilir. Ayrıca $I_g(u_n) = c \geq \delta$ dır. $u^{(1)}$, (67) probleminin bir çözümüdür.

Şimdi Ekeland's varyasyonel prensibini (Ekeland 1974) kullanarak sıfırın uygun bir komşuluğunda $u^{(1)} \neq u^{(2)}$ ($u^{(2)} \neq 0$) olan ikinci bir $u^{(2)} \in E$ zayıf çözümünün var olduğunu göstereyim. Yardımcı Teorem 12 den, $\rho_2 > 0$ olmak üzere

$$\inf_{\partial B_{\rho_2}(0)} I_g > 0$$

olacak şekilde bir $B_{\rho_2}(0) \subset E$ yuvarı vardır. $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ ve $g \neq 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 13 kullanılarak $G_g(\phi) > 0$ olan bir $\phi \in E$ fonksiyonu seçilebilir. Dolayısıyla yeteri kadar küçük $\tau_0 \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned}
I_g(\tau_0 \phi) &\leq \frac{1}{p^-} \tau_0^{p^+} \Lambda_{p(\cdot)}(\phi) + \frac{b}{2(p^-)^2} \tau_0^{2p^+} \sigma_{p(\cdot)}^2(\nabla \phi) \\
&\quad + \frac{C_4}{V^-} \tau_0^{p^+} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(\phi) - D_0^{s^-} \tau_0^{s^-} \sigma_{s(\cdot)}(\phi) - \tau_0 G_g(\phi) \\
&< 0
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, Yardımcı Teorem 12 ile her $u \in B_{\rho_2}(0)$ için

$$I_g(u) \geq \frac{1}{2p^+} \|u\|_E^{p^+} - C_q \|u\|_E^{q^-} - C_p m_0 \|u\|_E > 0$$

elde edilir. Böylece

$$-\infty < \tilde{c} := \inf_{B_{\rho_2}(0)} I_g < 0$$

olur. $\varepsilon > 0$ seçmek üzere

$$0 < \varepsilon < \inf_{\partial B_{\rho_2}(0)} I_g - \inf_{B_{\rho_2}(0)} I_g$$

olur ve $I_g: \overline{B_{\rho_2}(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli için Ekeland Varyasyonel Prensibi uygulanarak

$$I_g(u_\varepsilon) < \inf_{B_{\rho_2}(0)} I_g + \varepsilon,$$

$$u \neq u_\varepsilon \text{ için } I_g(u_\varepsilon) < I_g(u) + \varepsilon \|u - u_\varepsilon\|_E$$

eşitsizliğini sağlayan $u_\varepsilon \in \overline{B_{\rho_2}(0)}$ elde edilir.

$$I_g(u_\varepsilon) < \inf_{B_{\rho_2}(0)} I_g + \varepsilon < \inf_{B_{\rho_2}(0)} I_g + \varepsilon < \inf_{\partial B_{\rho_2}(0)} I_g$$

olduğundan $u_\varepsilon \in B_{\rho_2}(0)$ olur.

Şimdi $Y_g: \overline{B_{\rho_2}(0)} \rightarrow \mathbb{R}$

$$Y_g(u) = I_g(u) + \varepsilon \|u - u_\varepsilon\|_E$$

olarak tanımlayalım. u_ε nun Y_g nin bir minimumu olduğu açıktır. Bu yüzden yeterince küçük $t > 0$ ve $v \in B_1(0)$ için

$$\frac{Y_g(u_\varepsilon + tv) - Y_g(u_\varepsilon)}{t} \geq 0$$

dır. Yani pozitif ve yeterince küçük t_0 ve $v \in B_1(0)$ için

$$\frac{I_g(u_\varepsilon + tv) - I_g(u_\varepsilon)}{t} + \varepsilon \|v\|_E \geq 0$$

dır. $t_0 \rightarrow 0$ iken her $v \in B_1(0)$ için

$$\langle I'_g(u_\varepsilon), v \rangle + \varepsilon \|v\| \geq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\|I'_g(u_\varepsilon)\|_{E^*} \leq \varepsilon$ dur. Bundan dolayı $(u_n) \subset B_{\rho_1}(0)$ dizisi vardır ve bu dizi I_g fonksiyoneli için bir $(PS)_{\tilde{c}}$ dizisidir. Yardımcı Teorem 12 deki gibi işlem yaparak, E de $u_n \rightarrow u^{(2)}$ olan bir $u^{(2)}$ buluruz. Böylece,

$$I_g(u^{(2)}) \leq d < 0 \text{ ve } \|u^{(2)}\|_E < \rho_2$$

şartını sağlayan (67) nin sıfırdan farklı bir $u^{(2)}$ çözümü elde edilir. Böylece

$$I_g(u^{(2)}) = \tilde{c} \leq d < 0 < \delta \leq c = I_g(u^{(1)})$$

elde edilir.

Sonuç olarak I_g enerji fonksiyonelinin biri pozitif diğeri negatif olan iki farklı kritik noktası elde edilmiş olur. Dolayısıyla (67) probleminin sıfırdan farklı iki farklı zayıf çözümü bulunmuş olur.

Teorem 72 nin İspatı: İspat için Teorem 61 (Variant Mountain Pass Teorem) in şartlarını sağlamak yeterlidir. (f_5) şartından dolayı I_0 fonksiyoneli çifttir. $\|u\|_E = \rho_2 < 1$ iken herhangi bir $u \in \partial B_{\rho_2}(0) \cap Y$ için (f_1) , (f_2) ve Yardımcı Teorem 12 den $g \equiv 0$ iken $I_0|_{\partial B_{\rho_2}(0) \cap Y} \geq \alpha_2 > 0$ elde edilir. Böylece Teorem 61 (Variant Mountain Pass Teorem) in (i) şartının sağlandığı gösterilmiş olur. Dolayısıyla (ii) şartının sağlandığını göstermek yeterlidir. Şimdi ilk olarak iddia edelim ki E nin sonlu boyutlu $\tilde{E}$ alt uzayı için $B_{R_0}(\tilde{E}) = \{u \in \tilde{E} : \|u\|_E < R_0\}$ olmak üzere her $u \in E \setminus B_{R_0}(\tilde{E})$ için $I_0(u) < 0$ olacak şekilde $R_0 = R_0(\tilde{E})$ vardır.

$\tilde{E}$, herhangi bir $u \in \tilde{E}$ için $\tilde{E} \subset E$ nin sabit sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun. Sonlu boyutlu uzaydaki tüm normlar denk olduğundan dolayı her $u \in E$ için

$$|u|_{s(\cdot)} \geq \tilde{C}_1(\tilde{E}) \|u\|_E \quad (82)$$

ve

$$|u|_{p(\cdot)} \leq \tilde{C}_2(\tilde{E}) \|u\|_E \quad (83)$$

şartlarını sağlayan $\tilde{C}_1(\tilde{E}) > 0$, $\tilde{C}_2(\tilde{E}) > 0$ sabitleri vardır. (f_4) ten, $D_0 = \frac{\frac{1}{p^-} + \frac{b}{2(p^-)^2} + C_4 \tilde{C}_2^{p^+}(\tilde{E})}{\tilde{C}_1^{s^-}(\tilde{E})}$

olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^N$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$F(x, t) \geq D_0 |t|^{s(x)} - C_4 |t|^{p(x)} \quad (84)$$

elde edilir. $\tilde{E}$, herhangi bir $u \in \tilde{E}$ için $\|u\|_E = 1$ normuyla E nin sabit sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun. Böylece (82), (83) ve (84) kullanılarak her $t \geq 1$ için

$$\begin{aligned} I_0(tu) &\leq \frac{1}{p^-} t^{p^+} \|u\|_E^{p^+} + \frac{b}{2(p^-)^2} t^{2p^+} \left(\sigma_{p(\cdot)}(\nabla u) + \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u) \right)^2 \\ &\quad - D_0 t^{s^-} \sigma_{s(\cdot)}(u) + C_4 t^{p^+} \sigma_{p(\cdot)}(u) \\ &\leq \frac{1}{p^-} t^{p^+} \|u\|_E^{p^+} + \frac{b}{2(p^-)^2} t^{2p^+} \|u\|_E^{2p^+} - D_0 \tilde{C}_1^{s^-}(\tilde{E}) t^{s^-} \|u\|_E^{s^-} + C_4 \tilde{C}_2^{p^+} \|u\|_E^{p^+} \\ &\leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{b}{2(p^-)^2} + C_4 \tilde{C}_2^{p^+}(\tilde{E}) \right) t^{2p^+} - D_0 \tilde{C}_1^{s^-}(\tilde{E}) t^{s^-} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $2p^+ < s^-$ olduğundan

$$t \rightarrow \infty \text{ iken } I_0(tu) \rightarrow -\infty$$

olur. Böylece $R \rightarrow \infty$ iken

$$\sup_{\substack{\|u\|_E=R \\ u \in \tilde{E}}} I_0(u) = \sup_{\substack{\|u\|_E=1 \\ u \in \tilde{E}}} I_0(Ru) \rightarrow -\infty$$

dur. Bu yüzden o kadar büyük $R_0 > 0$ vardır ki her $u \in E$ için $R \geq R_0$ ve $\|u\|_E = R$ ile $I_0(u) < 0$ dır. Bu da (ii) nin sağlandığını gösterir. Böylece Teorem 61 (Variant Mountain Pass Teorem) in şartlarının sağlandığı gösterilmiş olur.

Sonuç 3: $(p_1), (V_1), (f_3) - (f_5)$ ve

(f_7) : $f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir Caratheodory fonksiyonudur ve $q \in L_+^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$, $p < q \ll p^*, p^+ < q^-$ olmak üzere her $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ için

$$|f(x, t)| \leq C_0(|t|^{p(x)-1} + |t|^{q(x)-1})$$

olacak şekilde bir $C_0 > 0$ sabiti vardır

şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $g \equiv 0$ ise, (67) probleminin $I_0(u_n) \rightarrow +\infty$ olacak şekilde bir (u_n) çözüm dizisi vardır.

Sonuç 3 ün İspatı: İspat için Teorem 72 deki (f_1) ve (f_2) şartları ile (f_7) şartını karşılaştırmak yeterlidir. Gerçekten (f_7) şartı (f_1) ve (f_2) şartından daha zayıftır. (f_1) ve (f_2) den her $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ için $C_0 = \varepsilon + C_\varepsilon$ olmak üzere

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{p(x)-1} + C_\varepsilon |t|^{q(x)-1} \leq (\varepsilon + C_\varepsilon)(|t|^{p(x)-1} + |t|^{q(x)-1})$$

şartını sağlayan her $\varepsilon > 0$ a karşılık bir $C_\varepsilon > 0$ alınarak sonuç 3 ün ispatı Teorem 72 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 73 ün İspatı: İspat için Struwe (2000) de ifade edilen Krasnoselskii's genus teorisini kullanacağız. İspata geçmeden önce gerekli olan bazı yardımcı teoremleri ifade ve ispat edeceğiz.

Yardımcı Teorem 14: (p_1) , (V_1) ve (f_6) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda I_0 fonksiyoneli çift, coercive, E de alttan sınırlıdır ve $(PS)_c$ şartını sağlar.

İspat: $f_0(x, -u) = -f_0(x, u)$ olduğundan $I_0(-u) = I_0(u)$ olduğu açıktır. (f_6) kullanılarak

$$F_0(x, u) = \int_0^u f_0(x, t) dt = \int_0^1 f_0(x, tu) u dt \leq \frac{d_2}{m^-} h(x) |u|^{m(x)} \quad (85)$$

elde edilir. Böylece $H = |h|_{r^0(\cdot)}$ olmak üzere $\|u\|_E > 1$ ile herhangi bir $u \in E$ için Teorem 33, 38, 40, 42 ve Yardımcı Teorem 10 kullanılarak

$$\begin{aligned} I_0(u) &\geq \frac{1}{p^+} \sigma_{p(\cdot)}(\nabla u) + \frac{1}{p^+} \sigma_{p(\cdot), V(\cdot)}(u) - \frac{d_2}{m^-} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |u|^{m(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|_E^{p^-} - \frac{2d_2}{m^-} |u|^{m(x)} \Big|_{\frac{p(\cdot)}{m(\cdot)}} |h|_{r^0(\cdot)} \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|_E^{p^-} - \frac{2d_2 H}{m^-} \max\{|u|_{p(\cdot)}^{m^-}, |u|_{p(\cdot)}^{m^+}\} \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|_E^{p^-} - \frac{2d_2 H C_p^{m^+}}{m^-} \|u\|_E^{m^+} \end{aligned}$$

elde edilir. $p^- > m^+$ olduğu için I_0 coercive ve E üzerinde alttan sınırlıdır.

Şimdi I_0 fonksiyonelinin E üzerinde $(PS)_c$ şartını sağladığını gösterelim. (u_n) dizisi E üzerinde I_0 fonksiyonelinin bir $(PS)_c$ dizisi olsun. $p^- > m^+$ olduğundan Teorem 38, 40, 42 ve Yardımcı Teorem 10 dan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f_0(x, u_n)| |u_n - u| dx &\leq d_2 \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |u_n|^{m(x)-1} |u_n - u| dx \\ &\leq d_3 |u_n - u|_{p(\cdot)} |u_n|^{m(x)-1} \Big|_{\frac{p(\cdot)}{m(\cdot)-1}} |h|_{\frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-m(\cdot)}} \\ &\leq d_3 H |u_n - u|_{p(\cdot)} \max\{|u_n|_{p(\cdot)}^{m^-}, |u_n|_{p(\cdot)}^{m^+}\} \\ &\leq d_4 (1 + C_p^{m^+} \|u_n\|_E^{m^+}) |u_n - u|_{p(\cdot)} \end{aligned}$$

elde edilir. (u_n) dizisi E uzayında sınırlı olduğundan Yardımcı Teorem 10 dan $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ de $u_n \rightarrow u$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $\int_{\mathbb{R}^N} |f_0(x, u_n)| |u_n - u| dx \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece (73)-(76) dan E de $u_n \rightarrow u$ olur. Bu ise (u_n) dizisinin $(PS)_c$ şartını sağladığını gösterir. Yani E de I_0 için $(PS)_c$ şartı sağlanmış olur.

Yardımcı Teorem 15: Teorem 73 teki şartlar sağlansın. Bu durumda

$$I_0^{-\varepsilon} = \{u \in E | I_0(u) \leq -\varepsilon\}$$

olmak üzere herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için $\gamma(I_0^{-\varepsilon}) \geq k$ olacak şekilde $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$ vardır.

İspat: E_k , E nin k -boyutlu bir alt uzayı olsun. E_k da bütün normlar birbirine denk olduğundan her $u \in E_k$ için

$$|u|_{l(\cdot)} \geq \tilde{C}_3 \|u\|_E \quad (86)$$

olacak şekilde bir $\tilde{C}_3 > 0$ sabiti vardır. $\|u\|_E < 1$ olmak üzere herhangi bir $u \in E_k$ için (85) ve (86) dan

$$\begin{aligned} I_0(u) &\leq \frac{1}{p^-} \|u\|_E^{p^-} + \frac{b}{2(p^-)^2} \|u\|_E^{2p^+} - \frac{d_1}{l^+} \sigma_{l(\cdot)}(u) \\ &\leq \frac{1}{p^-} \|u\|_E^{p^-} + \frac{b}{2(p^-)^2} \|u\|_E^{2p^+} - \frac{d_1}{l^+} \min\{|u|_{l(\cdot)}^{l^-}, |u|_{l(\cdot)}^{l^+}\} \\ &\leq \frac{1}{p^-} \|u\|_E^{p^-} + \frac{b}{2(p^-)^2} \|u\|_E^{2p^+} - \frac{d_1}{l^+} \tilde{C}_3^{l^+} \|u\|_E^{l^+} \\ &\leq C_5 \|u\|_E^{p^-} - C_6 \|u\|_E^{l^+} \end{aligned}$$

elde edilir. $1 < l^+ < p^-$ olduğu için, $\|u\|_E = \eta$ ise $I_0(u) \leq -\varepsilon$ şartını sağlayan $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$ ve $0 < \eta < 1$ vardır. S_η , E_k de η yarıçaplı bir küre olsun. Öyleyse $S_\eta \subset I_0^{-\varepsilon}$ dur. Bu yüzden genusun özelliklerini kullanarak $\gamma(I_0^{-\varepsilon}) \geq \gamma(S_\eta) = k$ elde ederiz ve böylece ispat tamamlanmış olur.

$\Lambda_k = \{A \in \Lambda | \gamma(A) \geq k\}$ olsun. Bu durumda $\Lambda_{k+1} \subset \Lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$) olur.

$$c_k = \inf_{A \in \Lambda_k} \sup_{u \in A} I_0(u)$$

olarak tanımlayalım.

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k \leq c_{k+1} \leq \dots$$

olduğu açıktır. Ayrıca Yardımcı Teorem 13 ten E üzerinde I_0 fonksiyonelinin coercive ve alttan sınırlı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $k = 1, 2, \dots$ için $-\infty < c_k < 0$ dır. $c \in \mathbb{R}$ için

$$K_c = \{u \in E | I_0(u) = c, I'_0(u) = 0\}$$

olmak üzere Teorem 73 ü ispatlamak için gerekli olan aşağıdaki yardımcı teoremi ifade edelim.

Yardımcı Teorem 16: Bütün c_k lar I_0 ın kritik değerleridir. Ayrıca, eğer $c_k = c_{k+1} = \dots = c_{k+\tau} = c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq I_0(0)$ olan $\tau \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\gamma(K_c) \geq 1 + \tau$ dur.

Teorem 73 ün İspatı: Yardımcı Teorem 16 dan, I_0 fonksiyonelinin kritik değerleri negatif olan sonsuz kritik noktasının var olduğunu görüyoruz. Böylece $g \equiv 0$ iken (67) probleminin negatif enerjili sonsuz sayıda çözümünün varlığı elde edilmiş olur.



SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında değişken üslü lineer olmayan eliptik denklemlerden oluşan problemler 3 farklı başlık altında ele alınmıştır. Bu problemler $p(\cdot)$ -Laplacian içeren problemlerdir. Bu problemlerin çözümlerinin varlığının ve çokluğunun hangi koşullar altında olduğu ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve elde edilen sonuçlar aşağıda ifade edilmiştir.

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ düzgün sınırlı bir bölgede (23) ile ifade edilen problemde sub-sup çözüm yöntemi kullanılarak $p(\cdot)$ -Laplacian içeren standart olmayan büyüme koşullu Dirichlet probleminin, (23) problemi için ifade edilen (f_1) ve (f_2) şartları sağlanmak şartı ile sürekli f fonksiyonu için $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında çözümün varlığı elde edildi.

2. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bir bölgede (49) ile ifade edilen $p(\cdot)$ -Laplacian içeren homojen olmayan Kirchhoff tipi problem için;

i) (49) problemi için ifade edilen (M_1) ve (f_1) şartları sağlanmak koşulu ile her $x \in \bar{\Omega}$ için $q(x) < p^*(x)$ ve $q^+ < \beta p^- < (p^-)^*$ iken I enerji fonksiyoneli coercive ve $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde alttan zayıf yarı sürekli olduğundan I fonksiyonelinin $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında bir u minimum noktası olduğu ve bu u minimum noktasının (49) probleminin bir zayıf çözümü olduğu elde edildi.

ii) (49) problemi için ifade edilen (M_1) , (f_1) , (f_2) , (f_3) ve (AR) şartları sağlanmak koşulu ile her $x \in \bar{\Omega}$ için $q(x) < p^*(x)$ ve $\beta p^+ < q^-$ iken Mountain Pass Teoremi kullanılarak (49) probleminin $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sıfırdan farklı (aşıkâr olmayan) bir zayıf çözümü olduğu gösterildi.

iii) (49) problemi için ifade edilen (M_1) , $(f_1) - (f_4)$ ve (AR) şartları sağlanmak koşulu ile her $x \in \bar{\Omega}$ için $q(x) < p^*(x)$ ve $\beta p^+ < q^-$ iken Fountain Teoremi kullanılarak I fonksiyonelinin $k \rightarrow \infty$ iken $I(u_k) \rightarrow \infty$ şartını sağlayan (u_k) kritik noktaları dizisi olduğu ve (49) probleminin sonsuz sayıda çözümü olduğu elde edildi.

iv) (49) problemi için ifade edilen (M_1) , (f_1) , (f_2) , (f_4) ve (f_5) şartları sağlanmak koşulu ile Dual Fountain Teoremi kullanılarak (49) probleminin $I(\pm v_k) < 0$ ve $k \rightarrow \infty$ iken $I(\pm v_k) \rightarrow 0$ şartlarını sağlayan $(\pm v_k)_{k=1}^\infty$ bir çözüm dizisinin olduğu elde edildi.

3. (67) ile ifade edilen $\mathbb{R}^N$ de $p(\cdot)$ -Laplacian içeren homojen olmayan Schrödinger-Kirchhoff tipi problem için;

i) (67) problemi için ifade edilen $(p_1), (V_1), (M_1), (f_1) - (f_4)$ şartları sağlanmak koşulu ve $g \neq 0, g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ için $m_0 > 0$ olmak üzere $|g|_{p'(\cdot)} \leq m_0$ iken Mountain Pass Teoremi ve Ekeland Varyasyonel Prensibi kullanılarak (67) probleminin

$$E = \left\{ u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N) : \Lambda_{p(\cdot)}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x)|^{p(x)} + V(x)|u(x)|^{p(x)}) dx < \infty \right\}$$

uzayında sıfırdan farklı en az iki çözümü olduğu elde edildi.

ii) Variant Mountain Pass Teoremi kullanılarak (67) problemi için ifade edilen $(p_1), (V_1), (M_1), (f_1) - (f_5)$ şartları sağlanmak üzere $g \equiv 0$ iken (67) probleminin E uzayında $I_0(u_n) \rightarrow +\infty$ olacak şekilde bir (u_n) çözüm dizisinin olduğu gösterildi.

iii) Krasnoselskii's Genus Teorisi kullanılarak (67) problemi için ifade edilen $(p_1), (V_1), (f_5), (f_6)$ şartları sağlanmak üzere $g \equiv 0$ iken (67) probleminin E uzayında $I_0(u_n) \rightarrow +\infty$ olacak şekilde bir (u_n) çözüm dizisi olduğu gösterildi.

Değişken üslü uzayların araştırma alanı çok geniş olduğu için değişken üslere sahip eliptik, parabolik, hiperbolik denklemler ve bu denklemleri içeren problemlerin çözümleri, özdeğerleri ve öz fonksiyonları araştırma konusu olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Acerbi, E., Mingione, G., 2001. Regularity results for a class of functionals with nonstandard growth. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 156, 121-140.
- Acerbi, E., Mingione, G., 2002. Regularity results for stationary electrorheological fluids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 164 (3), 213-259.
- Adams, R. A., 1975. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 268 p, New York, USA.
- Afrouzi, G. A., Mirzapour, M., 2013. Eigenvalue problems for $p(x)$ -Kirchhoff type equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013 (253), 1-10.
- Alves, C. O., Souto, M. A. S., 2005. Existence of solutions for a class of problems involving the $p(x)$ -Laplacian. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Appl.*, 66, 17-32.
- Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H., 1973. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal.*, 14, 349-381.
- Ambrosetti, A., Azorero, G. J., Peral, I., 1996. Multiplicity for some nonlinear elliptic equations. *J. Funct. Anal.*, 137, 219-242.
- Atkin, R. J., Shi, X., Bullough, W. A., 1991. Solutions of the constitutive equations for the flow of an electrorheological fluid in radial configurations. *Journal of Rheology*, 35 (7), 1441-1461.
- Avci, M., Cekic, B., Mashiyev, R. A., 2011. Existence and multiplicity of the solutions of the $p(x)$ -Kirchhoff type equation via genus theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34 (14), 1751-1759.
- Ayazoglu (Mashiyev), R., Ekincioglu, I., 2016. Electrorheological fluids equations involving variable exponent with dependence on the gradient via Mountain Pass techniques. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 37 (9), 1144-1157.
- Ayazoglu, R., Akbulut, S., Akkoyunlu, E., 2017a. Solutions for the $p(x)$ -Laplacian with dependence on the gradient. *Acta Universitatis Apulensis*, 52 (2017), 71-88.
- Ayazoglu Mashiyev, R., Ekincioglu, I., Alisoy, G., 2017b. Multiple small solutions for $p(x)$ -Schrödinger equations with local sublinear nonlinearities via genus theory. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2017 (75), 1-16.
- Ayazoglu, R., Akbulut, S., Akkoyunlu, E., 2018. Standart olmayan büyüme koşullu denklemlerin mühendislikteki uygulamaları. *Engineering Sciences*, 13 (3), 167-179.
- Ayazoglu, R., Alisoy, G., 2018. Infinitely many solutions for a class of stationary Schrödinger equations with non-standard growth. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 63 (4), 482-500.
- Bailey, P., Gillies, D. G., Heyes, D. M., Sutcliffe, L. H., 1989. Experimental and simulation studies of electrorheology. *Molecular Simulation*, 4 (1-3), 137-151.
- Bartsch, T., 1993. Infinitely many solutions of a symmetric Dirichlet problem. *Nonlinear Analysis, TMA*, 20, 1205-1216.
- Bartsch, T., Willem, M., 1995. On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123, 3555-3561.
- Bavraktar, M., 2006. *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi, 320 s, Ankara, Türkiye.
- Bayraktar, M., 2017. *Analiz*. Korza Yayıncılık, 646 s, Ankara, Türkiye.
- Bernstein, S., 1940. Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles, (in Russian with French summary), *Bull. Acad. Sci. URSS, Set. Math.*, 4, 17-26.
- Blomgren, P., Chan, T. F., Mulet, P., Wong, C. K., 1997. Total variation image restoration: numerical methods and extensions. In *Proceedings of International Conference on Image Processing*, 3, 384-387.

- Boltt, E. M., Chartrand, R., Esedoğlu, S., Schultz, P., Vixie, K. R., 2009. Graduated adaptive image denoising: local compromise between total variation and isotropic diffusion. *Advances in Computational Mathematics*, 31 (1-3), 61-85.
- Bonnecaze, R. T., Brady, J. F., 1992. Dynamic simulation of an electrorheological fluid. *The Journal of chemical physics*, 96 (3), 2183-2202.
- Brezis, H., Nirenberg, L., 1991. Remarks on finding critical points. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44, 939-963.
- Buhrii, O. M., Mashiyev, R. A., 2009. Uniqueness of solutions of the parabolic variation inequality with variable exponent of nonlinearity. *Nonlinear Analysis-Theory Methods& Appl.*, 70 (6), 2325-2331.
- Cammaroto, F., Vilasi, L., 2013. On a Schrödinger-Kirchhoff-type equation involving the $p(x)$ -Laplacian. *Nonlinear Anal.*, 81, 42-53.
- Cekic, B., Mashiyev, R., Alisoy, G. T., 2006. On the Sobolev-type inequality for Lebesgue spaces with a variable exponent. *Int. Math. Forum*, 1 (25-28), 1313-1323.
- Cekic, B., Mashiyev, R. A., 2010. Existence and localization results for $p(x)$ -Laplacian via topological methods. *Fixed Point Theory Appl.*, 2010, 1-7.
- Cerami, G., 1980. Sull'esistenza di autovalori per un problema al contorno non lineare. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 124 (1), 161-179.
- Chen, Y., Levine, S., Rao, R., 2006. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, 66 (4), 1383-1406.
- Chen, S. J., Li, L., 2013. Multiple solutions for the nonhomogeneous Kirchhoff equation on $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Anal Real World Appl.*, 14, 1477-1486.
- Chung, N. T., 2013. Multiple solutions for a class of $p(x)$ -Kirchhoff type problems with Neumann boundary conditions. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 4 (2), 165-177.
- Colasuonno, F., Pucci, P., 2011. Multiplicity of solutions for $p(x)$ -polyharmonic elliptic Kirchhoff equations. *Nonlinear Anal.*, 74, 5962-5974.
- Correa F. J. S. A., Figueiredo, G. M., 2006. On an elliptic equation of p -Kirchhoff type via variational methods. *Bull Austral Math Soc.*, 74 (2), 263-277.
- Correa, F. J. S. A., Figueiredo, G. M., 2009. On a p -Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus. *Applied Mathematics Letters*, 22 (6), 819-822.
- Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Neugebauer, C. J., 2003. The maximal function on variable L^p spaces. *Annales-Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 28 (1), 223-238.
- Cruz-Uribe, D. V., Fiorenza, A., 2013. Variable Lebesgue spaces: Foundations and harmonic analysis. Springer Science & Business Media, 316 p, New York, USA.
- Curtain, R. F., Pritchard, A. J., 1977. *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*. Academic Press, 174 p, London, England.
- Dai, G., Hao, R., 2009. Existence of solutions for a $p(x)$ -Kirchhoff-type equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 359, 275-284.
- Dai, G., Liu, D., 2009. Infinitely many positive solutions for a $p(x)$ -Kirchhoff-type equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 359, 704-710.
- Dai, G., Ma, R., 2011. Solutions for a $p(x)$ -Kirchhoff type equation with Neumann boundary data. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12 (5), 2666-2680.
- Devito, C. L., 1978. *Functional Analysis*. Academic Press, 177 p, New York, USA.
- Diening, L., 2002. Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids. Ph. D. Thesis, University of Friburg, Germany.
- Diening, L., Harjuletho, P., Hästö, P. and Růžička, M., 2011. *Lebesgue and Sobolev Spaces With Variable Exponents*. Springer-Verlag, 509 p, Berlin, Germany.
- Drábek, P., Kufner, A., Nicolosi, F., 1997. *Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities*. Walter de Gruyter, 219 p, New York, USA.
- Drábek, P., Hernandez, J., 2001. Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems. *Nonlinear Anal.*, 44, 189-204.

- Edmunds, D. E., Rákosník, J., 1992. Density of smooth functions in $W^{k,p(x)}(\Omega)$. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 437 (1899), 229-236.
- Edmunds, D., Rákosník, J., 2000. Sobolev embeddings with variable exponent. Studia Mathematica, 3 (143), 267-293.
- Ekeland, I., 1974. On the variational principle. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47 (2), 324-353.
- Ekincioglu, I., Ayazoglu (Mashiyev), R., 2017. On Steklov boundary value problems for $p(x)$ -Laplacian equations. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 5 (2), 289-297.
- Fan, X. L., Shen, J. S., Zhao, D., 2001. Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl., 262, 749-760.
- Fan, X. L., Zhao, D., 2001. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl., 263, 424-446.
- Fan, X. L., Zhang, Q. H., 2003. Existence of solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problems. Nonlinear Anal., 52, 1843-1852.
- Fan, X. L., Han, X., 2004. Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$ -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Anal., 59, 173-188.
- Fan, X. L., 2007. On the sub-supersolution method for $p(x)$ -Laplacian equations, J. Math. Anal. Appl., 330 (1), 665-682.
- Fan, X., Deng, S. G., 2007. Remarks on Ricceri's variational principle and applications to the $p(x)$ -Laplacian equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 67 (11), 3064-3075.
- Fan, X. L., 2010. On nonlocal $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problems. Nonlinear Anal., 72, 3314-3323.
- Faraci, F., Motreanu, D., Puglisi, D., 2015. Positive solutions of quasilinear elliptic equations with dependence on the gradient. Calc. Var., 54, 525-538.
- Faria, L. F. O., Miyagaki, O. H., Motreanu, D., Tanaka, M., 2014. Existence results for nonlinear elliptic equations with Leray-Lions operator and dependence on the gradient. Nonlinear Anal. TMA, 96, 154-166.
- Figueiredo, D. G., Girardi, M. and Matzeu, M., 2004. Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via Mountain Pass techniques. Differential and Integral Equations, 17 (1-2), 119-126.
- Fucik, S., Kufner, A., 1980. Nonlinear Differential Equations. Elsevier, 359 p, New York, USA.
- Gonçalves, J. V. A., Rezende, M. C., Santos, C. A., 2011. Positive solutions for a mixed and singular quasilinear problem. Nonlinear Anal., 74 (1), 132-140.
- Guedda, M., Veron, L., 1989. Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Nonlinear Anal., 13, 879-902.
- Guo, Y., Nie, J., 2015. Existence and multiplicity of nontrivial solutions for p -Laplacian Schrödinger-Kirchhoff-type equations. J. Math Anal. Existence Appl., 428 (2), 1054-1069.
- Guo, Z. M., Zhang, Z. T., 2003. $W^{1,p}$ versus C^1 local minimizers and multiplicity results for quasilinear elliptic equations. J. Math. Anal. Appl., 286, 32-50.
- Halsey, T. C., Toor, W., 1990. Structure of electrorheological fluids. Physical Review Letters, 65 (22), 2820-2823.
- Halsey, T.C., 1992. Electrorheological Fluids. Science, 258 (5083), 761-766.
- Harjulehto, P., Hästö, P., Koskenoja, M., Varonen, S., 2006. The Dirichlet energy integral and variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values. Potential Anal., 25 (3), 205-222.
- Harjulehto, P., Hästö, P., 2008. Sobolev inequalities with variable exponent attaining the values 1 and n . Publicacions Matemàtiques, 52 (2), 347-363.

- Harjulehto, P., Hästö, P., Latvala, V., Toivanen, O., 2013. Critical variable exponent functionals in image restoration. *Applied Mathematics Letters*, 26 (1), 56-60.
- Hästö, P., 2007. The $p(x)$ -Laplacian and applications. *J. Anal.*, 15, 53-62.
- Jain, P. K., Gupta, V. P., 1986. *Lebesgue Measure and Integration*. Wiley Eastern Limited, 269 p, New York, USA.
- Jin, J., Wu, X., 2010. Infinitely many radial solutions for Kirchhoff-type problems in $\mathbb{R}^N$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 369 (2), 564-574.
- Jones, D. S., 1964. *The Theory of Electromagnetism*. Pergamon Press, 806 p, Oxford, England.
- Kazar, C., 2019. Değişken Üslü Lineer Olmayan Eliptik Denklemler. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Kirchhoff, G., 1883. *Vorlesungen Über Mechanik*. Teubner, 475 p, Leipzig, Germany.
- Klingenberg, D. J., Van Swol, F., Zukoski, C. F., 1991. The small shear rate response of electrorheological suspensions. I. Simulation in the point-dipole limit. *The Journal of Chemical Physics*, 94 (9), 6160-6169.
- Kováčik, O., Răkosnik, J., 1991. On the Space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$. *Czechoslovak Math. J.*, 41, 592-618.
- Krasnoselskii, M. A., 1964. *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. Macmillan, 405 p, New York, USA.
- Li, S. J., Wang, Z. Q., 2000. Mountain pass theorem in order intervals and multiple solutions for semilinear elliptic Dirichlet problems. *J. Anal. Math.*, 81, 373-396.
- Li, F., Li, Z., Pi, L., 2010. Variable exponent functionals in image restoration. *Applied Mathematics and Computation*, 216 (3), 870-882.
- Li, Y., Li, F., Shi, J., 2012. Existence of a positive solution to Kirchhoff type problems without compactness conditions. *Journal of Differential Equations*, 253 (7), 2285-2294.
- Liu, D., 2010. On a p -Kirchhoff equation via fountain theorem and dual fountain theorem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72 (1), 302-308.
- Liu, D., Zhao, P., 2012. Multiple nontrivial solutions to a p -Kirchhoff equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75 (13), 5032-5038.
- Liu, G., Shi, S., Wei, Y., 2012. Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2012 (139), 1-9.
- Liu, J., Zhang, Q., Zhao, C., 2014. Existence of positive solutions $p(x)$ -Laplacian equations with a singular nonlinear term. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014 (155), 1-21.
- Marcellini, P., 1991. Regularity and existence of solutions of elliptic equation with p, q -growth conditions. *J. Differential Equations*, 50 (1), 1-30.
- Mashiyev, R. A., Alisoy, G., Ogras, S., 2010a. Solutions to semilinear p -Laplacian Dirichlet problem in population dynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*, 31 (2), 247-254.
- Mashiyev, R. A., Cekic, B., Buhrii, O. M., 2010b. Existence of solutions for $p(x)$ -Laplacian equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2010 (65), 1-13.
- Mashiyev, R. A., Ogras, S., Yucedag, Z., Avci, M., 2010c. The Nehari manifold approach for Dirichlet problem involving the $p(x)$ -Laplacian equation. *J. Korean Math. Soc.*, 47 (4), 845-860.
- Mashiyev, R. A., Buhrii, O. M., 2011. Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity. *Journal of mathematical analysis and applications*, 377 (2), 450-463.
- Mashiyev, R. A., Yucedag, Z., Ogras, S., 2011. Existence and multiplicity of solutions for a Dirichlet problem involving the discrete $p(x)$ -Laplacian operator. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2011 (67), 1-10.

- Mashiyev, R. A., Cekic, B., Avci, M., Yucedag, Z., (2012). Existence and multiplicity of weak solutions for nonuniformly elliptic equations with nonstandard growth condition. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 57 (5), 579-595.
- Mihăilescu, M., 2006. Existence and multiplicity of solutions for an elliptic equation with $p(x)$ -growth conditions. *Glasgow Math. J.*, 48, 411-418.
- Mihăilescu, M., Rădulescu, V., 2006. A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462 (2073), 2625-2641.
- Mihăilescu, M., Rădulescu, V., 2007. On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent. *Proceedings Amer. Math. Soc.*, 135 (9), 2929-2937.
- Mihăilescu, M., 2008. On a class of nonlinear problems involving a $p(x)$ -Laplace type operator. *Czechoslovak Math. J.*, 58 (133), 155-172.
- Miklavčič, M., 1998. *Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Allied Publishers, 305 p, Singapore.
- Mohammed, A., 2009. Positive solutions of the p -Laplace equation with singular nonlinearity. *J. Math. Anal. Appl.*, 352 (1), 234-245.
- Musayev, B., Alp, M., 2000. *Fonksiyonel Analiz*. Balcı Yayınları Tic. Ltd. Sti., 470 s, Kütahya, Türkiye.
- Musielak, J., 1983. *Orlicz Spaces and Modular Spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 222 p, Berlin, Germany.
- Musielak, J., Orlicz, W., 1959. On modular spaces. *Studia Math.*, 18, 49-65.
- Nakano, H., 1950. *Modulared Semi-ordered Linear Spaces*. Maruzen Co. Ltd., 288 p, Tokyo.
- Nakano, H., 1951. *Topology and Topological Linear Spaces*, Maruzen Co., Ltd., 306 p, Tokyo.
- Ogras, S., Mashiyev, R. A., Avci, M., Yucedag, Z., 2008. Existence of solutions for a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^N$ involving the $(p(x), q(x))$ -Laplacian. *Journal of Inequalities and Applications*, 2008 (1), 1-16.
- Orlicz, W., 1931. Über konjugierte exponentenfolgen. *Studia Math.*, 3, 200-211.
- Palais, R. S., Smale, S., 1964. A generalized Morse theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2, 503-510.
- Palais, R. S., 1970. Critical point theory and the minimax principle. *Proc. Symp. Pure Math*, 15, 185-212.
- Papageorgiou, N. S., Kyritsi-Yiallourou, S. T., 2009. *Handbook of Applied Analysis*. Springer Science & Business Media, 792 p, New York, USA.
- Parthasarathy, M., Klingenberg, D. J., 1996. Electrorheology: mechanisms and models. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 17 (2), 57-103.
- Pei, M., Wang, L., Lv, X., 2017. Multiplicity of positive radial solutions of p -Laplacian problems with nonlinear gradient term. *Boundary Value Problems*, 2017 (1), 1-7.
- Pierce, A. D., 1981. *Acoustics - An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. McGraw-Hill Book Company, 767 p, New York, USA.
- Rabinowitz, P. H. (Ed.), 1986. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. American Mathematical Society, 100 p, Rhode Island, USA.
- Rajagopal, K. R., Wineman, A. S., 1992. Flow of electrorheological materials. *Acta Mechanica*, 91 (1-2), 57-75.
- Rajagopal, K. R., Růžička, M., 1996. On the modeling of electrorheological materials. *Mechanics research communications*, 23 (4), 401-407.
- Rajagopal, K. R., Růžička, M., 2001. Mathematical modeling of electrorheological materials. *Cont. Mech. and Thermodynamics*, 13 (1), 59-78.
- Repovš, D. D., 2015. Stationary waves of Schrödinger-type equations with variable exponent. *Anal. Appl.*, 13 (06), 645-661.
- Royden, H. L., 1963. *Real Analysis*. The Macmillan Company, 457 p, New York, USA.
- Rudin, L. I., Osher, S. and Fatemi, E., 1992. Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Nonlinear Phenomena*, 60 (1-4), 259-268.

- Rudin, W., 1991. Functional Analysis (Second Edition). McGraw-Hill, 440 p, New York, USA.
- Ruiz, D., 2004. A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems. *J. Differ. Equ.*, 199, 96-114.
- Růžička, M., 2000. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 177 p, Berlin, Germany.
- Samko, S. G., 1998. Convolution type operators in $L^{p(x)}$. *Integral Transforms and Special Functions*, 7 (1-2), 123-144.
- Samko, S., (2000). Denseness of $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ in the Generalized Sobolev Spaces. In *Direct and Inverse Problems of Mathematical Physics*, Springer, 452 p, Boston, MA.
- Saxe, K., 2002. *Beginning Functional Analysis*. Springer Verlag, 210 p, New York, USA.
- Sharapudinov, I. I., 1979. On the topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. *Mat. Zametki*, 26 (4), 613-632.
- Shen, Z., Qian, C., 2015. Infinitely many solutions for a Kirchhoff-type problem with nonstandard growth and indefinite weight. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 66, 399-415.
- Sobolev, S. L., 1936. On some estimates related to families of functions having derivatives which are square integrable. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1 (1936), 267-270.
- Sobolev, S. L., 1938. On a theorem in functional analysis. *Mat. Sborn. A*, (1938), 471-497 (In Russian.); Engl transl. *Amer. Math. Soc. Transl. II Ser.*, 34 (1963), 39-68.
- Sobolev, S.L., 1950. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. 1st ed.: LGU Leningrad, 1950; 2nd ed.: NGU Novosibirsk, 1962; 3rd ed.: Izd. Nauka, Moskva 1988. (In Russian.) Engl. transl.: *Amer. Math. Soc*, Providence R.I. 1963; German transl.: Akademie-Verlag Berlin 1964.
- Stratton, J. A., 1941. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill Book Company, 401 p, New York, USA.
- Struwe, M., 2000. *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Springer-Verlag, 244 p, New York, USA.
- Tsenov, I. V., 1961. Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s . (Russian) *Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ.*, 7, 25-37.
- Wang, H. C., 2002. On the compactness and the minimization. *Taiwanese J. Math.*, 6 (4), 441-464.
- Wang, X., Yao, J., Liu, D., 2015. High energy solutions to $p(x)$ -Laplacian equations of Schrodinger type. *Electron J. Differ. Equ.*, 2015 (136), 1-17.
- Whittle, M., 1990. Computer simulation of an electrorheological fluid. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, 37 (2-3), 233-263.
- Wineman, A. S., Rajagopal, K. R., 1995. On constitutive equations for electrorheological materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 7 (1), 1-22.
- Willem, M., 1996. *Minimax Theorems*. Birkhäuser, 165 p, Boston, USA.
- Winslow, W. M., 1949. Induced fibrillation of suspensions. *J. Appl. Physics*, 20, 1137-1140.
- Yucedag, Z., Avci, M., Mashiyev, R., 2012. On an elliptic system of $p(x)$ -Kirchhoff-type under Neumann boundary condition. *Mathematical Modelling and Analysis*, 17 (2), 161-170.
- Yucedag, Z., Ayazoglu, R., 2014. Existence of solutions for a class of Kirchhoff-type equation with nonstandard growth. *Univ. J. App. Math*, 2 (5), 215-221.
- Zeidler, E., 1995. *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*. Springer Verlag, 509 p, New York, USA.
- Zhang, K. C., 1983. A variant of mountain pass lemma. *Science in China Series A-Mathematics, Physics, Astronomy & Technological Science*, 26 (12), 1241-1255.
- Zhikov, V. V., 1987. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. *Izvestiya: Mathematics*, 29 (1), 33-36.
- Zhikov, V. V., 1995. On Lavrentiev's phenomenon. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 3, 249-269.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Ebubekir Akkoyunlu
Doğum tarihi:	21 Mayıs 1978
Doğum Yeri:	Bayburt
Uyruğu:	T.C.
Adres:	Bayburt Üniversitesi Sosyal Bilimler Meslek Yüksekokulu
Tel:	0505 3888533
E-mail:	eakkoyunlu@bayburt.edu.tr
Eğitim	
Lise:	Bayburt Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans:	19 Mayıs Üniversitesi, Amasya Eğitim Fakültesi
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2017)
Doktora:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	İyi
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
1. Ayazoglu, R., Akbulut, S., Akkoyunlu, E., 2018. On the sub-supersolution principle for $p(x)$-Laplacian equations. Gulf Journal of Mathematics, 6 (3), 78-90. 2. Ayazoglu, R., Akbulut, S., Akkoyunlu, E., 2020. Existence of multiple solutions of Schrödinger-Kirchhoff-type equations involving the $p(\cdot)$-Laplacian in $\mathbb{R}^N$. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, 1-17.	