



**ÇARPIMSAL METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT
NOKTA TEOREMLERİNİN İNCELENMESİ**

Fatih AVŞAR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2025

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ BİLİM DALI

**ÇARPIMSAL METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA
TEOREMLERİNİN İNCELENMESİ**

(Investigation of Some Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Spaces)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatih AVŞAR

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Erzurum
Ağustos, 2025



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Graduate School of Natural and
Applied Sciences

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

**ÇARPIMSAL METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN
İNCELENMESİ**

Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Fatih AVŞAR tarafından hazırlanan bu çalışma, 12/08/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. İsa YILDIRIM <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır
Danışman:	Prof. Dr. Sezgin AKBULUT <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır
Jüri Üyesi:	Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Aslı ıslak imzalıdır

Prof.Dr. Alper NUHOĞLU
Enstitü Müdürü

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Graduate School of Natural and
Applied Sciences

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak *Prof. Dr. Sezgin AKBULUT* danışmanlığında sunulan “Çarpımsal Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremlerinin İncelenmesi” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	9	30
Kuramsal Temeller	13	30
Materyal ve Metot	12	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	3	20
Sonuçlar ve Öneriler	4	20
Tezin Geneli	14	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Sunulan bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ettiğimizi beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Fatih AVŞAR	Prof. Dr. Sezgin AKBULUT
12.8.2025	12.8.2025
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

Not: Bu form, Tezin son şekline uygun olarak bilgisayar ortamında doldurulmalı, çıktısı imzalanıp Tezin sonuna eklenmelidir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak hazırladığım bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında bana her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan değerli zamanını esirgemeyerek kıymetli bilgi ve birikimiyle beni destekleyen tez çalışması boyunca her zaman sabırla bana yol gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Sezgin AKBULUT'a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım. Yüksek lisans eğitimim boyunca ve tez yazım sürecinde üzerimde emeği olan Prof. Dr. İsa YILDIRIM'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca güçlü destekleriyle yanımda olan babam Ümit AVŞAR annem Hanım AVŞAR'a ve kardeşlerime, tez çalışmam süresince yanımda olup beni ileriye taşıyan sevgili eşim Gamze AVŞAR'a ve oğlum Aren Mirza AVŞAR'a en güzel cümlelerle teşekkür ederim.

Fatih AVŞAR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇARPIMSAL METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN İNCELENMESİ

Fatih AVŞAR

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Amaç: Bu çalışmada çarpımsal metrik uzaylarda ve çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzaylarda Kannan, Chatterjea, Hardy-Rogers ve Zamfirescu dönüşümünün sabit noktası incelenecektir.

Yöntem: Verilen teoremler, matematiksel yöntemler ve lemmalar yardımı ile ispatlanmıştır.

Bulgular: Bu çalışmada çarpımsal metrik uzay ve çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzaylarda Kannan, Chatterjea, Zamfirescu ve Hardy-Rogers tipi dönüşümler kullanılarak sabit noktanın varlığı ve tekliği ispatlanmıştır.

Sonuçlar: Çarpımsal metrik uzay ve çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzaylarda Kannan, Chatterjea, Hardy-Rogers ve Zamfirescu dönüşümlerinin sabit noktaları bulunmuştur. Bu sonuçlar çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzaylarda, farklı dönüşümlerin sabit noktaların bulunması için geliştirilebilir.

Anahtar Kelimeler: Çarpımsal metrik uzay, çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay, sabit nokta, Kannan dönüşüm, Chatterjea dönüşüm, Zamfirescu dönüşüm, yakınsaklık ve teklik.

Ağustos 2025, 59 Sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

INVESTIGATION OF SOME FIXED POINT THEOREMS IN MULTIPLICATIVE METRIC SPACES

Fatih AVŞAR

Supervisor: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Purpose: In this study, the fixed point of Kannan, Chatterjea, Hardy-Rogers and Zamfirescu mappings in multiplicative metric spaces and multiplicative rectangular b -metric spaces will be investigated.

Method: The theorems in the thesis are proved with the help of mathematical methods and lemmas.

Findings: In this study, the existence and uniqueness of fixed points were proven by using Kannan, Chatterjea, Zamfirescu and Hardy Rogers type mappings in multiplicative metric spaces and multiplicative rectangular b -metric spaces.

Conclusions: Fixed points of Kannan, Chatterjea, Hardy-Rogers and Zamfirescu mappings have been found in multiplicative metric spaces and multiplicative rectangular b -metric spaces. Different mappings can be developed for these results to find fixed points in multiplicative rectangular b -metric spaces.

Keywords: Multiplicative metric sapace, multiplicative rectangular b -metric sapace, fixed point, Kannan mapping, Chatterjea mapping, Zamfirescu mapping, convergence and uniqueness.

August 2025, 59 Pages

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ	viii
GİRİŞ	1
KURAMSAL TEMELLER.....	4
MATERYAL VE YÖNTEM	17
BULGULAR	34
TARTIŞMA VE SONUÇ	45
KAYNAKÇA	48
ÖZ GEÇMİŞ.....	51

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Dönüşümler arasındaki ilişki	12
---	----



KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$\bar{B}_\varepsilon(\kappa)$	: Çarpımsal kapalı birim yuvar
(U, ζ^*)	: Çarpımsal metrik uzay
(U, ζ)	: Metrik uzay
$\text{int}(B)$	: B 'nin çarpımsal içi
$\kappa_n \rightarrow \kappa$	: Yakınsama
e^κ	: Üstel fonksiyon
$\{\kappa\}$	: κ değerli sabit dizi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\zeta^*(\kappa, \varepsilon)$	: κ merkezli ve ε yarıçaplı çarpımsal açık yuvar
$T^k(\kappa)$	: T dönüşümünün periyodik noktası
$F(T)$	: T dönüşümünün sabit noktalar kümesi
B'	: Çarpımsal limit noktalarının kümesi
(U, ζ^*, s)	: Çarpımsal b -metrik uzay

GİRİŞ

Matematik, evrenin düzenini kavrama ve problemleri çözüme kavuşturmak için çeşitli yöntem ve teoriler ortaya koymuştur. Sabit nokta teorisi de bunlardan biridir. Modern matematikte önemli bir yeri olan “Sabit Nokta Teorisi” çalışmaları 20.yy başlarına dayanmaktadır. Sabit nokta teorisi yapılan çalışmalarla sabit noktanın varlığını bazı dönüşümleri kullanarak araştırmaktadır. En temel anlamıyla sabit nokta şu şekilde tanımlanır: U boştan farklı bir küme ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. $T\kappa = \kappa$ olacak şekilde $\kappa \in U$ varsa κ ya T dönüşümünün sabit noktası denir.

Sabit noktanın bulunmasında kullanılan daralma dönüşümünü ortaya atan ilk kişinin Banach olduğu bilinmektedir. Banach, 1906 yılında Frechet’in sabit nokta teorisinde çok önemli bir yere sahip olan metrik uzay kavramını tanıtmıştıktan sonra bir metrik uzayda kendi üzerine olan dönüşümler için daralma kavramını tanıttı ve tam metrik uzayda bütün daralma dönüşümlerinin tek bir sabit noktası olduğunu ve bu sabit noktanın tekliğini ortaya koydu. Bu teorem, “ (U, ζ) bir tam metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir daraltan dönüşüm olsun. Yani her $\kappa, v \in U$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq k\zeta(\kappa, v), \quad 0 \leq k < 1$$

ise T dönüşümü U da tek bir sabit noktaya sahiptir” şeklindedir. Banach daralma prensibi (1922), uygulamalı matematikte farklı problemlerin varlığını ve tekliğini ispatlamak için en güçlü ve önemli araçlardan biridir. Banach daralma prensibi, doğrusal olmayan analizde faydalı ve etkili bir araç olmuştur. Çeşitli yazarlar, Banach daralma prensibini farklı uzaylarda genelleştirmişlerdir.

Daha sonra b -metrik kavramı, 1989 yılında Bakhtin tarafından ortaya atılmıştır. Czerwik, 1993 yılında b -metrik kavramını tanımlamıştır. 2013 yılında, Kir ve arkadaşları b -metrik uzaylarda bazı iyi bilinen sabit nokta teoremlerini tanımlamışlardır. Daha sonra Suzuki, b -metrik uzaylarda temel eşitsizlikler kullanarak bazı sabit nokta teoremlerini kanıtlamıştır.

Singxi ve ark. (1980) ve Sastry ve ark. (2010), iki farklı metrik uzay üzerinde tanımlı iki dönüşüm için bazı ortak sabit nokta teoremlerini incelemiştir. Dhage (1999), D -metrik uzayda sabit nokta sonuçlarını ispat etmiştir. Branciari (2000), metrik uzayda alışılmış üçgen eşitsizliği yerine genel bir eşitsizlik koşulu getirerek genelleştirilmiş metrik uzaylar kavramını tanıtmıştır. Gu ve arkadaşları (2003), tam metrik uzayda zayıf komütatif fonksiyonlarla ilgili bazı ortak

sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir. Mustafa ve Sims (2004, 2006), genelleştirilmiş metrik uzaylar sınıfı üzerinde çeşitli sonuçları incelemişlerdir. Agarwal ve ark. (2008), kısmi sıralı metrik uzaylarda monoton operatörlerle ilgili bazı sabit nokta sonuçlarını tartışmış, zayıf genelleştirilmiş daraltan dönüşümü kullanarak sabit noktanın varlığını ve yakınsamayı garanti eden önemli sonuçlar elde etmiştir. Suzuki (2008), genelleştirilmiş Banach daralma prensibi ile metrik tamlığı karakterize etmiştir. Aydi ve ark. (2012), tam Hausdorff genelleştirilmiş metrik uzaylarda zayıf daraltan dönüşümler için sabit nokta sonuçları elde etmiştir.

Aynı olmayan uzaylardaki sabit nokta ve ortak sabit nokta ile ilgili çalışmalar ve bu çalışmaların sonuçları sabit nokta teorisinde geniş bir yere sahiptir. Metrik uzay ve çarpımsal metrik uzayda sabit nokta çalışmalarında sıkça kullanılan uzaylardır. Son yıllarda çarpımsal kalkülüs Bashirov, Özyapıcı ve Kurpınar kişileri tarafından çalışılmıştır. Çarpımsal kalkülüsünün uygulamalarını, çarpımsal mutlak değeri, iki pozitif reel sayı arasındaki çarpımsal mesafeyi tanımladılar ve sonunda çarpımsal metrik uzay kavramını tanıttılar. Çarpımsal türevlerin, çarpımsal integrallerin bazı özelliklerini incelediler ve çarpımsal kalkülüsünün temel teoremini kurdular. L. Florack ve H. Van Assen (2012), biyomedikal görüntü analizinde çarpımsal kalkülüsünün faydalarını araştırdılar. A.E. Bashirov ve arkadaşları (2011), çarpımsal diferansiyel denklemlerinin çözümünün sıradan diferansiyel denklemlerden daha basit olduğunu farklı alanlarda tartıştılar.

2012 yılında Özavsar ve Cevikel, çarpımsal daraltan dönüşüm kavramını tanıtmış ve tam çarpımsal metrik uzayda bu tür dönüşümlerin bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamıştır. Ayrıca ilgili çarpımsal metrik uzayın bazı topolojik özelliklerini de vermişlerdir. Daha sonra Özavsar ve Cevikel, çarpımsal daraltan dönüşümlerini ifade ederek tam çarpımsal metrik uzaylardaki dönüşümlerin bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır. Bu teorem, “ (U, ζ^*) bir tam metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir daraltan dönüşüm olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \zeta^*(\kappa, v)^\varphi, \quad \varphi \in [0,1)$$

ise T, U da tek bir sabit noktaya sahiptir” şeklindedir. Elde edilen sonuçlar, Zamfirescu (1972) ve Aydi ve ark. (2012)'nin sabit nokta sonuçlarını çarpımsal metrik uzaylara taşımaktadır. Agamirza, Ozavsar ve Cevikel (2017) gibi bu alanda çalışan diğer araştırmacılar çarpımsal metriği hesaplama, finans ve iktisat gibi farklı, matematikle ilgili alanlarda kullanmışlardır.

2016 yılında çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay kavramı, Clement Ampadu tarafından tanıtılmıştır. 2017 yılında Ali ve arkadaşları, b -çarpımsal metrik uzay kavramını tanıtmış ve bazı sabit nokta sonuçlarını kanıtlamışlardır.

2020 yılında, Shoaib ve Saleemullah, Ali ve arkadaşlarının sonuçlarını genişleterek b -

arpımsal metrik uzayda kapalı kre üzerinde daraltan koşulunu vermişlerdir.

Bu tezde, çarpımsal metrik uzay bağlamında bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Beş ana bölümden oluşan bu tezin giriş bölümünde literatür bilgisi verilmiştir. Kuramsal Temeller adındaki ikinci bölümde çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Materyal ve Yöntem adını alan üçüncü bölümde, çarpımsal metrik uzaylarda bazı önemli sabit nokta teoremleri, sabit noktanın varlığını ve tekliğini ifade eden, metrik uzay ile çarpımsal metrik uzay arasındaki ilişkiyi gösteren teoremler ve bu teoremlerin ispatları yer almaktadır.

Araştırma Bulguları adındaki dördüncü bölümde Kannan, Chatetterjea, Zamfirescu ve Hardy Rogers tipi dönüşümler kullanılarak çarpımsal metrik uzaylarda ve çarpımsal dikdörtgen b-metrik uzaylarda sabit noktanın varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

Tartışma ve Sonuç adındaki beşinci bölümde ise ispat edilen teoremlerde gösterilen sabit noktanın varlığı ve tekliği ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

KURAMSAL TEMELLER

Temel Kavramlar

Bu kısımda önemli gördüğümüz bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 1: U boştan farklı bir küme ve $\zeta: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olmak üzere, $\forall \kappa, \nu, z \in U$ için

1. $\zeta(\kappa, \nu) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \nu$
2. $\zeta(\kappa, \nu) = \zeta(\nu, \kappa)$
3. $\zeta(\kappa, \nu) \leq \zeta(\kappa, z) + \zeta(z, \nu)$

şartları sağlanıyorsa ζ ye U üzerinde bir metrik, (U, ζ) ikilisine de metrik uzay denir ve $U = (U, \zeta)$ ile gösterilir.

Tanım 2: $\{\kappa_n\}$ bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için,

$$n > n_0 \Rightarrow |\kappa_n - a| < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir n_0 doğal sayısı varsa o zaman $\{\kappa_n\}$ ($n \rightarrow \infty$) dizisi a 'ya yakınsar ya da a , $\{\kappa_n\}$ dizisinin limitidir denir.

Tanım 3: (U, ζ) metrik uzay ve $\{\kappa_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $\zeta(\kappa_n, \kappa_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ varsa $\{\kappa_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 4: (U, ζ) bir metrik uzay olsun. U da ki her $\{\kappa_n\}$ Cauchy dizisi yakınsaksa (U, ζ) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 5: (U, ζ) bir metrik uzay olsun. U da ki tüm diziler yakınsak bir alt diziye sahipse, (U, ζ) uzayına kompakt metrik uzay denir (Maddox 1970).

Tanım 6: (U, ζ) ve (V, d) iki metrik uzay, $T: U \rightarrow V$ bir dönüşüm ve $\kappa_0 \in U$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $\zeta(\kappa, \kappa_0) < \delta$ olduğunda $d(T(\kappa), T(\kappa_0)) < \varepsilon$ veya denk bir ifade ile $T(D(\kappa_0, \delta)) \subseteq D(T(\kappa_0), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, T ye κ_0 noktasında süreklidir denir. T, U nun tüm noktalarında sürekli ise T ye U da süreklidir denir.

Çarpımsal Metrik Uzay

Tanım 7: U boştan farklı bir küme ve $\zeta^*: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $\forall \kappa, \nu, z \in U$ için

1. $\zeta^*(\kappa, \nu) \geq 1$ ve $\zeta^*(\kappa, \nu) = 1 \Leftrightarrow \kappa = \nu$
2. $\zeta^*(\kappa, \nu) = \zeta^*(\nu, \kappa)$

$$3. \zeta^*(\kappa, z) \leq \zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, z)$$

şartları sağlanıyorsa ζ^* a U üzerinde bir çarpımsal metrik, (U, ζ^*) ikilisine de çarpımsal metrik uzay denir. (Bashirov *et al.* 2008).

Örnek 1: $\mathbb{R}_+^n = \{(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_n) : \kappa_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ olsun.

$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_n), v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ve $|\cdot|^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$|\varphi|^* = \begin{cases} \varphi, & \varphi \geq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{\varphi}, & 0 < \varphi < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\zeta^*(\kappa, v) = \left| \frac{\kappa_1}{v_1} \right|^* \cdot \left| \frac{\kappa_2}{v_2} \right|^* \cdots \left| \frac{\kappa_n}{v_n} \right|^*$$

şeklinde ifade edilen $\zeta^* : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ dönüşümü çarpımsal bir metriktir (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

Örnek 2: $\zeta^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ olarak tanımlansın. $\kappa, v \in \mathbb{R}$ ve $a > 1$ için $\zeta^*(\kappa, v) = a^{|\kappa-v|}$ sağlanıyorsa $\zeta^*(\kappa, v)$ çarpımsal bir metriktir.

Çözüm:

1. $\zeta^*(\kappa, v) \geq 1$ ve $\zeta^*(\kappa, v) = 1 \Leftrightarrow \kappa = v$ olduğu gösterilecektir.

$a^{|\kappa-v|} \geq 1$ ve $a > 1$ olduğundan $|\kappa - v| = 0$ olur. Bu durumda $\zeta^*(\kappa, v) = 1 \Leftrightarrow \kappa = v$ elde edilir. Böylece 1. şart sağlanır.

2. $\zeta^*(\kappa, v) = \zeta^*(v, \kappa)$ eşitliğine bakalım.

$$\zeta^*(\kappa, v) = a^{|\kappa-v|} = a^{|v-\kappa|} = \zeta^*(v, \kappa)$$

olur. 2. şart sağlanır.

3. $\zeta^*(\kappa, z) \leq \zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, z)$

$$\zeta^*(\kappa, z) = a^{|\kappa-z|} \leq a^{|\kappa-v+v-z|} \leq a^{|\kappa-v|+|v-z|} \leq a^{|\kappa-v|} \cdot a^{|v-z|} = \zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, z)$$

olur. Dolayısıyla 3. şart sağlanır.

Bu durumda $\zeta^*(\kappa, v) = a^{|\kappa-v|}$ çarpımsal bir metriktir.

Önerme 1: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik ve $\forall \kappa, v, z \in U$ için

$$\left| \frac{\zeta^*(\kappa, z)}{\zeta^*(v, z)} \right|^* \leq \zeta^*(\kappa, v)$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

İspat: Çarpımsal üçgen eşitsizliğinden

$$\zeta^*(\kappa, z) \leq \zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, z) \Rightarrow \frac{\zeta^*(\kappa, z)}{\zeta^*(v, z)} \leq \zeta^*(\kappa, v) \quad (1)$$

ve

$$\zeta^*(v, z) \leq \zeta^*(v, \kappa) \cdot \zeta^*(\kappa, z) \Rightarrow \frac{1}{\zeta^*(\kappa, v)} \leq \frac{\zeta^*(\kappa, z)}{\zeta^*(v, z)}$$

gerektirmelerini yazabiliriz. Böylece çarpımsal üçgen eşitsizliği ve (1) den

$$\frac{1}{\zeta^*(\kappa, v)} \leq \frac{\zeta^*(\kappa, z)}{\zeta^*(v, z)} \leq \zeta^*(u, v) \Leftrightarrow \left| \frac{\zeta^*(\kappa, z)}{\zeta^*(v, z)} \right|^* \leq \zeta^*(\kappa, v)$$

gerektirmesi elde edilir.

Tanım 8: U boştan farklı bir küme $s \geq 1$ ve $\zeta^*: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $\forall \kappa, v, z \in U$ için

1. $\zeta^*(\kappa, v) \geq 1$ ve $\zeta^*(\kappa, v) = 1 \Leftrightarrow \kappa = v$
2. $\zeta^*(\kappa, v) = \zeta^*(v, \kappa)$
3. $\zeta^*(\kappa, z) \leq (\zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, z))^s$

şartları sağlanıyorsa ζ^* a çarpımsal b -metrik, (U, ζ^*, s) üçlüsüne de çarpımsal b -metrik uzay denir.

Tanım 9: U boştan farklı bir küme ve $\zeta^*: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $\forall \kappa, z \in U$ ve $v, p \in U \setminus \{\kappa, z\}$ için

1. $\zeta^*(\kappa, v) \geq 1$ ve $\zeta^*(\kappa, v) = 1 \Leftrightarrow \kappa = v$
2. $\zeta^*(\kappa, v) = \zeta^*(v, \kappa)$
3. $\zeta^*(\kappa, z) \leq \zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, p) \cdot \zeta^*(p, z)$

şartları sağlanıyorsa ζ^* a çarpımsal dikdörtgen metrik, (U, ζ^*) ikilisine de çarpımsal dikdörtgen metrik uzay denir.

Örnek 3: $d^*: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ olarak tanımlansın. Her $\kappa, v \in \mathbb{R}_+$ için $\zeta^*(\kappa, v) = \max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right)$ çarpımsal metriği, çarpımsal dikdörtgen metrik uzayın şartlarını sağlar.

Çözüm:

1. $\zeta^*(\kappa, v) \geq 1$ ve $\zeta^*(\kappa, v) = 1 \Leftrightarrow \kappa = v$ olduğu gösterilecektir.

Eğer $\kappa = v$ ise o zaman $\frac{\kappa}{v} = \frac{v}{\kappa} = 1 \Rightarrow \zeta^*(\kappa, v) = \max(1, 1) = 1$ olur. Tersine $\zeta^*(\kappa, v) = 1$ ise $\max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\kappa}{v} = \frac{v}{\kappa} = 1 \Rightarrow \kappa = v$ olur. Böylece 1. şart sağlanır.

2. $\zeta^*(\kappa, v) = \zeta^*(v, \kappa)$ eşitliğine bakalım.

$$\zeta^*(\kappa, v) = \max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right) = \max\left(\frac{v}{\kappa}, \frac{\kappa}{v}\right) = \zeta^*(v, \kappa)$$

olur. 2. şart sağlanır.

3. $\zeta^*(\kappa, z) \leq \zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, p) \cdot \zeta^*(p, z)$

$$\begin{aligned} \zeta^*(\kappa, z) &= \max\left(\frac{\kappa}{z}, \frac{z}{\kappa}\right) \leq \max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right) \cdot \max\left(\frac{v}{p}, \frac{p}{v}\right) \cdot \max\left(\frac{p}{z}, \frac{z}{p}\right) \\ &\leq \zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, p) \cdot \zeta^*(p, z) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla 3. şart sağlanır.

Bu durumda $\zeta^*(\kappa, v) = \max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right)$ çarpımsal dikdörtgen metrik uzaydır.

Tanım 10: U boştan farklı bir küme $s \geq 1$ ve $\zeta^*: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $\forall \kappa, z \in U$ ve $v, p \in U \setminus \{\kappa, z\}$ için

1. $\zeta^*(\kappa, v) \geq 1$ ve $\zeta^*(\kappa, v) = 1 \Leftrightarrow \kappa = v$

2. $\zeta^*(\kappa, v) = \zeta^*(v, \kappa)$

3. $\zeta^*(\kappa, z) \leq (\zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, p) \cdot \zeta^*(p, z))^s$

şartları sağlanıyorsa ζ^* a çarpımsal dikdörtgen b -metrik, (U, ζ^*, s) üçlüsüne de çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay denir.

Örnek 4: $\zeta^*: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, 10]$ olarak tanımlansın. Her $\kappa, v \in \mathbb{R}_+$ ve $s \geq 1$ için $\zeta^*(\kappa, v) = \left(\max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right)\right)^s$ çarpımsal metriği, çarpımsal dikdörtgen b -metriktir.

Çözüm:

1. $\zeta^*(\kappa, v) \geq 1$ ve $\zeta^*(\kappa, v) = 1 \Leftrightarrow \kappa = v$ olduğu gösterilecektir.

Eğer $\frac{\kappa}{v} = \frac{v}{\kappa} = 1 \Rightarrow \max = 1 \Rightarrow (1)^s = 1$ olur. Tersine $\zeta^*(\kappa, v) = 1$ ise $\left(\max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right)\right)^s = 1 \Rightarrow \max = 1 \Rightarrow \kappa = v$ olur. Böylece 1. şart sağlanır.

2. $\zeta^*(\kappa, v) = \zeta^*(v, \kappa)$ eşitliğine bakalım.

$$\zeta^*(\kappa, v) = \max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right) = \max\left(\frac{v}{\kappa}, \frac{\kappa}{v}\right) = \zeta^*(v, \kappa)$$

olur. 2. şart sağlanır.

3. $\zeta^*(\kappa, z) \leq (\zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, p) \cdot \zeta^*(p, z))^s$

$\zeta^*(\kappa, z) \leq \zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, p) \cdot \zeta^*(p, z)$ çarpımsal dikdörtgen metrik uzayını örnek 3 te ispatladık.

Eşitsizliğin her iki tarafının s 'ninci kuvvetini alalım

$$\begin{aligned}\{\zeta^*(\kappa, z)\}^s &= \left\{ \max \left(\frac{\kappa}{z}, \frac{z}{\kappa} \right) \right\}^s \leq \left\{ \max \left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa} \right) \cdot \max \left(\frac{v}{p}, \frac{p}{v} \right) \cdot \max \left(\frac{p}{z}, \frac{z}{p} \right) \right\}^s \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, p) \cdot \zeta^*(p, z)\}^s\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla 3. şart sağlanır.

Bu durumda $\zeta^*(\kappa, v) = \left(\max \left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa} \right) \right)^s$ çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzaydır.

Tanım 11: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay $\kappa \in U$ ve $\varepsilon \geq 1$ olsun.

$$B_\varepsilon(\kappa) = \{v \in U \mid \zeta^*(\kappa, v) < \varepsilon\}$$

kümesine κ merkezli ε yarıçaplı çarpımsal açık yuvar denir.

$$\bar{B}_\varepsilon(\kappa) = \{v \in U \mid \zeta^*(\kappa, v) \leq \varepsilon\}$$

kümesine de çarpımsal kapalı yuvar denir.

Örnek 5: $(\mathbb{R}_+, \zeta^*)$ çarpımsal metrik uzayını ele alalım. Çarpımsal metrik tanımından κ_0 merkezli $\varepsilon > 1$ yarıçaplı $B_\varepsilon(\kappa_0) = \left(\frac{\kappa_0}{\varepsilon}, \kappa_0 \cdot \varepsilon \right) \subset \mathbb{R}_+$ yuvarı, çarpımsal açık yuvardır (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

Tanım 12: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay $B \subset U$ olsun. $\varepsilon \geq 1$ ve $\kappa \in B$ noktası için $B_\varepsilon(\kappa) \subset B$ koşulu sağlanıyor ise κ noktasına B 'nin bir iç noktası denir. B 'nin tüm iç noktalarının kümesine B 'nin çarpımsal içi denir ve $\text{int}(B) = B$ ile gösterilir.

Tanım 13: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay $B \subset U$ olsun. B 'nin tüm noktaları çarpımsal iç nokta ise B ye çarpımsal açık küme denir. $\text{int}(B) = B$ şeklinde gösterilir.

Lemma 1: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay olsun. U 'nun her bir çarpımsal açık yuvarı çarpımsal açık kümedir (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

İspat: $\kappa \in U$ ve $B_\varepsilon(\kappa)$ çarpımsal açık yuvar olsun. $v \in B_\varepsilon(\kappa)$ için, eğer $\delta = \frac{\varepsilon}{\zeta^*(\kappa, v)}$ ve $z \in B_\delta(v)$ ise $\zeta^*(v, z) < \frac{\varepsilon}{\zeta^*(\kappa, v)}$ dır. Buradan

$$\zeta^*(\kappa, z) < \zeta^*(\kappa, v) \cdot \zeta^*(v, z) < \varepsilon$$

elde edebiliriz. Yani $z \in B_\varepsilon(\kappa)$ olduğunu gösterir. Bu da $B_\delta(v) \subset B_\varepsilon(\kappa)$ anlamına gelir. Böylece $B_\varepsilon(\kappa)$ çarpımsal açık kümedir.

Lemma 2: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay olsun. O halde U ve $\emptyset$ çarpımsal açık kümedir (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

Lemma 3: Çarpımsal açık kümelerin ailesinin sonlu, sayılabilir ya da sayılamaz çoklukta birleşimi de çarpımsal açık kümedir (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

Lemma 4: Çarpımsal açık kümeler ailesinin her sonlu kesişimi de çarpımsal açık kümedir (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

İspat: B_1 ve B_2 çarpımsal açık küme ve $v \in B_1 \cap B_2$ olsun. O halde $B_{\delta_1}(v) \subset B_1$ ve $B_{\delta_2}(v) \subset B_2$ olacak şekilde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alınırsa $B_\delta(v) \subset B_1 \cap B_2$ elde ederiz. Böylece her sonlu sayıda çarpımsal açık kümelerin kesişimi çarpımsal açık kümedir.

Teorem 1: Her çarpımsal metrik uzay bütün çarpımsal açık kümelerin ailesini baz kabul eden bir topolojik uzaydır (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

Tanım 14: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay ve $\kappa \in U$ olsun. $\kappa \in U$ noktasının $S \subset U$ nun çarpımsal limit noktası olması için gerekli koşul her $\varepsilon > 1$ için $(B_\varepsilon(\kappa) \setminus \{\kappa\}) \cap S \neq \emptyset$ olmasıdır. S kümesinin çarpımsal limit noktalarının kümesi S' ile gösterilir.

Tanım 15: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay olsun. Eğer S tüm çarpımsal limit noktalarını içeriyorsa $S \subset U$ kümesi (U, ζ^*) da çarpımsal kapalı kümedir (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

Tanım 16: (U, ζ_κ) ve (V, ζ_ν) iki çarpımsal metrik uzay, $T: U \rightarrow V$ bir dönüşüm olsun. $\varepsilon > 1$ için $T(B_\delta(\kappa)) \subset B_\varepsilon(T(\kappa))$ olacak şekilde bir $\delta > 1$ sayısı varsa $T, \kappa \in U$ de çarpımsal süreklidir denir.

Tanım 17: (U, ζ^*) bir çarpımsal metrik uzay, $\{\kappa_n\}$ de U 'da bir dizi ve $\kappa \in U$ olsun. Her çarpımsal $B_\varepsilon(\kappa)$ açık yuvarı ve $n \geq n_0$ için $\kappa_n \in B_\varepsilon(\kappa)$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa, κ_n dizisi κ noktasına çarpımsal yakınsaktır denir ve $\kappa_n \rightarrow \kappa$ ($n \rightarrow \infty$) ile gösterilir.

Tanım 18: $\{\kappa_n\}$ çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzayında bir dizi ve $\kappa \in U$ olsun. her $\varepsilon > 1$ ve $n \geq n_0$ için, $\zeta^*(\kappa_n, \kappa) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa $\{\kappa_n\}$, (U, ζ^*) uzayında κ 'ya çarpımsal olarak yakınsar denir.

Tanım 19: (U, ζ^*) çarpımsal metrik uzay ve $\{\kappa_n\}$, U 'da bir dizi olsun. $\varepsilon \geq 1$ ve $m, n \geq n_0$ için $\zeta^*(\kappa_n, \kappa_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa $\{\kappa_n\}$ dizisine çarpımsal Cauchy dizisi adı verilir.

Tanım 20: (U, ζ^*) çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay, $\{\kappa_n\}$ de U 'da bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 1$ ve $m, n \geq n_0$ için ve $\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+q}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ varsa veya $\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+q}) \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) oluyorsa $\{\kappa_n\}$ dizisine çarpımsal Cauchy dizisi denir.

Tanım 21: (U, ζ^*) çarpımsal metrik uzayında bulunan her Cauchy dizisi U 'da yakınsak olması halinde bu uzaya tam çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay adı verilir.

Tanım 22: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay $A \subset U$ olsun. Bir $\kappa \in U$ noktası için bir $A \subseteq B_M(\kappa)$ olacak şekilde bir $M > 1$ sabiti varsa A 'ya çarpımsal sınırlı küme denir.

Tanım 23: (U, ζ^*) bir çarpımsal metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Her $\kappa \in U$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$T^k(\kappa) = \kappa$$

eşitliği sağlanıyorsa $\kappa \in U$ ya periyodik nokta denir.

Bazı Dönüşüm Sınıfları ve Sabit Nokta

Tanım 24: $T: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall \kappa_1, \kappa_2 \in A$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $|\kappa_1 - \kappa_2| < \delta$ iken $|T(\kappa_1) - T(\kappa_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa T, A kümesi üzerinde düzgün süreklidir.

Tanım 25: (U, ζ) metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. $\forall \kappa, v \in U$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq k\zeta(\kappa, v)$$

şartını sağlayan $k \geq 0$ sabiti mevcutsa T dönüşümüne Lipschitzian dönüşümü, k sayısına da Lipschitzian sabiti denir. Lipschitzian şartını sağlayan her T dönüşümü düzgün süreklidir. Fakat tersi her zaman doğru değildir (Berinde 2007).

Tanım 26: (U, ζ) bir metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer $0 \leq k < 1$ olması halinde

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq k\zeta(\kappa, v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne daraltan dönüşüm (contraction) veya büzülme dönüşümü denir.

Lipschitzian dönüşüm düzgün süreklidir. Gerçekten $T: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $|T(\kappa) - T(v)| \leq k|\kappa - v|$ olacak şekilde $k \geq 0$ sabiti $\kappa, v \in A$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $|\kappa - v| < \delta$ iken $|T(\kappa) - T(v)| \leq k|\kappa - v| < k\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{k}$ olur. Buradan $\delta \leq \frac{\varepsilon}{k}$, $\delta(\varepsilon) > 0$ bulunur. Yani Lipschitzian dönüşüm düzgün süreklidir.

Lipschitzian koşulunu sağlayan dönüşümler düzgün sürekli olduğundan dolayı daraltan dönüşüm de düzgün sürekli olur. Buradan T sürekli değilse daraltan dönüşüm de olamaz (Berinde 2007).

Teorem 2: (U, ζ) bir tam metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir daraltan dönüşüm olsun. $\forall \kappa, v \in U$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq k\zeta(\kappa, v)$$

olacak şekilde bir $0 \leq k < 1$ varsa, bu durumda T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır (Banach, 1922).

Tanım 27: (U, ζ) metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. $\forall \kappa, v \in U$ ve $\kappa \neq v$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) < \zeta(\kappa, v)$$

şartı sağlanıyorsa T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir (Berinde 2007).

Tanım 28: (U, ζ) metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. $\forall \kappa, v \in U$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq \zeta(\kappa, v)$$

şartı sağlanıyorsa T dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm (nonexpansive) denir (Berinde 2007).

Yukarıdaki eşitsizliğin tersine

$$\zeta(T\kappa, Tv) > \zeta(\kappa, v)$$

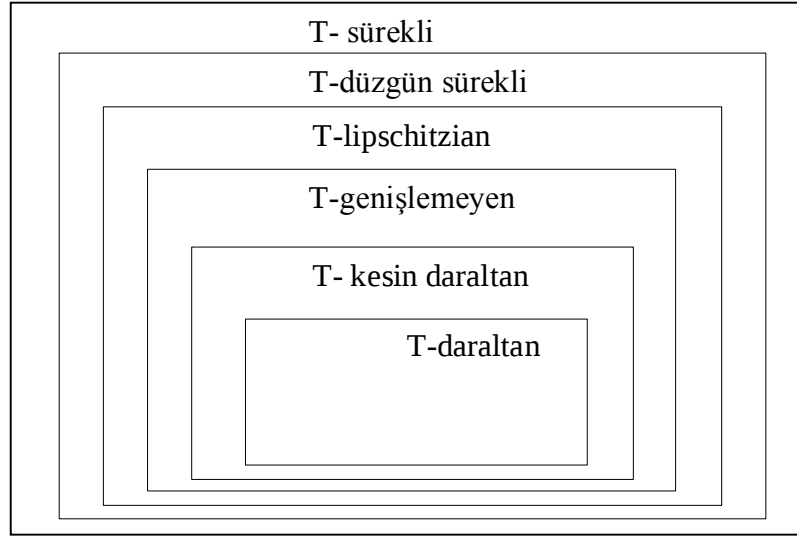
sağlanıyorsa T dönüşümüne genişleyen dönüşüm denir.

Örnek 6: $U = \mathbb{R}$ sayılar kümesi ve $\zeta(\kappa, v) = |\kappa - v|$ olsun. $T: U \rightarrow U$ dönüşümü için $T\kappa = \kappa - 2$ genişlemeyen dönüşümdür. Gerçekten $\zeta(T\kappa, Tv) = |\kappa - 2 - v + 2| = |\kappa - v| = \zeta(\kappa, v)$ olur. Eşitlik sağlandığından genişlemeyen dönüşümdür. Ancak daraltan ve kesin daraltan değildir.

Yukarıda tanımladığımız dönüşümler arasında

T dönüşümü daraltan $\Rightarrow T$ dönüşümü kesin daraltan $\Rightarrow T$ dönüşümü genişlemeyen $\Rightarrow T$ dönüşümü Lipschitzian $\Rightarrow T$ dönüşümü düzgün sürekli $\Rightarrow T$ dönüşümü sürekli

şeklinde bir ilişki vardır.



Şekil 1. Dönüşümler arasındaki ilişki

Tanım 29: (U, ζ) bir metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\kappa, v \in U$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq \beta[\zeta(\kappa, T\kappa) + \zeta(v, Tv)]$$

eşitsizliği $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ olması halinde sağlanıyorsa T dönüşümüne Kannan daraltan dönüşümü denir.

Tanım 30: (U, ζ) bir metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\kappa, v \in U$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq \gamma[\zeta(\kappa, Tv) + \zeta(v, T\kappa)]$$

eşitsizliği $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ olması halinde sağlanıyorsa T dönüşümüne Chatterjea dönüşümü denir.

Tanım 31: (U, ζ) bir metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\kappa, v \in U$ için

1. $\zeta(T\kappa, Tv) \leq \alpha\zeta(\kappa, v)$
2. $\zeta(T\kappa, Tv) \leq \beta[\zeta(\kappa, T\kappa) + \zeta(v, Tv)]$
3. $\zeta(T\kappa, Tv) \leq \gamma[\zeta(\kappa, Tv) + \zeta(v, T\kappa)]$

koşulları $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ olması halinde sağlanıyorsa T dönüşümüne Zamfirescu dönüşümü denir.

Şimdi yukarıdaki metrik uzaylarda tanımlanan dönüşüm sınıfları aşağıda çarpımsal metrik uzaylarda ifade edilecektir.

Tanım 32: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ için

$$\zeta^*(T\kappa_1, T\kappa_2) \leq \zeta^*(\kappa_1, \kappa_2)^\alpha$$

koşulu sağlanacak şekilde bir $\alpha \in [0,1)$ reel sayısı varsa $T: U \rightarrow U$ dönüşümüne çarpımsal daraltan dönüşümü denir.

Tanım 33: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^\beta$$

koşulu sağlanacak şekilde bir $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ reel sayısı varsa $T: U \rightarrow U$ dönüşümüne çarpımsal Kannan daraltan dönüşümü denir.

Örnek 7: $U = [1,2] \subset \mathbb{R}$ ve $T: U \rightarrow U$, $T\kappa = \sqrt{\kappa}$ dönüşümü verilsin. Her $\kappa, v \in U$ için $\zeta^*(\kappa, v) = \max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right)$ çarpımsal metriğini göz önüne alalım. Bu durumda T dönüşümü çarpımsal Kannan daraltan dönüşümüdür.

Çözüm: $T\kappa = \sqrt{\kappa}$ dönüşümü için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^\beta$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \zeta^*(T\kappa, Tv) &\leq [\zeta^*(\kappa, \sqrt{\kappa}) \cdot \zeta^*(v, \sqrt{v})]^\beta \\ &\leq \left[\zeta^*\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa}}\right) \cdot \zeta^*\left(\frac{v}{\sqrt{v}}\right) \right]^\beta \\ &\leq \left[\zeta^*\left(\frac{\frac{\kappa}{v}}{\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{v}}}\right) \right]^\beta \\ &\leq \left[\zeta^*\left(\frac{\kappa\sqrt{v}}{v\sqrt{\kappa}}\right) \right]^\beta \\ &\leq \left[\zeta^*\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{v}}\right) \right]^\beta \end{aligned}$$

bulunur ve çarpımsal Kannan daraltanlık şartı sağlanır.

$T\kappa = \sqrt{\kappa}$ dönüşümünün sabit noktası

$$T\kappa = \sqrt{\kappa} \Rightarrow \sqrt{\kappa} = \kappa \Rightarrow \kappa = 1$$

olur. Yani $F(T) = \{1\}$ dir.

Tanım 34: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^\gamma$$

koşulu sağlanacak şekilde bir $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ reel sayısı varsa $T: U \rightarrow U$ dönüşümüne çarpımsal Chatterjea dönüşümü denir.

Örnek 8: $U = [1, 2]$ ve $T: U \rightarrow U, T\kappa = \frac{\kappa+1}{2}$ dönüşümü verilsin. Her $\kappa, v \in U$ için $\zeta^*(\kappa, v) = \max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right)$ çarpımsal metriğini göz önüne alalım. Bu durumda T dönüşümü çarpımsal Chatterjea dönüşümüdür.

Tanım 35: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ ve $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ için

1. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \zeta^*(\kappa, v)^\alpha$
2. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \zeta^*(v, Tv)]^\beta$
3. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, Tv) \zeta^*(v, T\kappa)]^\gamma$

koşullarından en az biri sağlanıyorsa $T: U \rightarrow U$ dönüşümüne çarpımsal Zamfirescu dönüşümü denir.

Örnek 9: $U = [1, 4]$ ve $T: U \rightarrow U, T\kappa = \frac{\kappa+2}{3}$ dönüşümü verilsin. Her $\kappa, v \in U$ için $\zeta^*(\kappa, v) = \max\left(\frac{\kappa}{v}, \frac{v}{\kappa}\right)$ çarpımsal metriğini göz önüne alalım. Bu durumda T dönüşümü çarpımsal Zamfirescu dönüşümüdür.

Tanım 36: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Birbirinden farklı $\forall \kappa, v \in U$ için $r, p, q \geq 0$ ve $r + 2p + 2q < 1$ olacak şekilde

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, v)]^r [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^p [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^q$$

koşulu sağlanırsa $T: U \rightarrow U$ dönüşümüne çarpımsal Hardy-Rogers tipi dönüşümü denir.

Tanım 37: S ve T , (U, ζ^*) çarpımsal metrik uzayında kendi üzerine iki çarpımsal dönüşüm olsun. Eğer $\forall \kappa \in U$ için $ST\kappa = TS\kappa$ koşulu sağlanıyorsa S ve T ye değişmeli dönüşümler denir.

Tanım 38: S ve T , (U, ζ^*) çarpımsal metrik uzayında kendi üzerine iki çarpımsal dönüşüm olsun. Eğer $\forall \kappa \in U$ için $\zeta^*(ST\kappa, TS\kappa) \leq \zeta^*(S\kappa, T\kappa)$ ise S ve T ye zayıf değişmeli dönüşümler denir.

Tanım 39: U boş olmayan bir küme ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. $T\kappa = \kappa$ olacak şekilde $\kappa \in U$ varsa κ ya T nin sabit noktası denir. $T\kappa = \kappa$ denkleminin çözümleri T nin sabit noktalarıdır. $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir.

Örnek 10: $U = \mathbb{R}$ ve $T: U \rightarrow U$, $T\kappa = \kappa^3$ dönüşümü verilsin. $T\kappa = \kappa$ ise $\kappa - \kappa^3 = 0$ ve $\kappa(1 - \kappa^2) = 0$ olur. Buradan T dönüşümünün sabit noktaları $\kappa = -1, 0, 1$ elde edilir. Yani $F(T) = \{-1, 0, 1\}$ olur.

Örnek 11: $U = [0, 2]$ ve $T: U \rightarrow U$, $T\kappa = 2 - \kappa$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{1\}$ olur.

Örnek 12: $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $t \neq 0$ olmak üzere $T\kappa = t + \kappa$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda bu fonksiyonun sabit noktası yoktur.

Tanım 40: U boş olmayan bir küme ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $\kappa \in U$ için $T^n(\kappa)$ ve $T^0(\kappa) = \kappa$ dir. Buradan $T^{n+1}(\kappa) = T(T^n(\kappa))$ yazılır. $T^n(\kappa)$ dönüşümüne κ nun T altındaki n . iterasyonu (adımı) denir.

Tanım 41: $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$
2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{\kappa\} \Rightarrow F(T) = \kappa$ olur. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 13: $T: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ dönüşümü $T1 = 3, T2 = 2, T3 = 1$ şeklinde tanımlanırsa $F(T^2) = \{1, 2, 3\}$ olduğu halde $F(T) = \{2\}$ dir.

Çözüm: $T(\kappa) = \begin{cases} 3, \kappa = 1 \\ 2, \kappa = 2 \\ 1, \kappa = 3 \end{cases} \Rightarrow T\kappa = \kappa$ şartını sağlayan sadece $T2 = 2$ dir. Yani $F(T) =$

$\{2\}$ olur. Diğer yandan,

$T^2(\kappa) = T(T(\kappa)) = \begin{cases} 1, \kappa = 1 \\ 2, \kappa = 2 \\ 3, \kappa = 3 \end{cases}$ olduğundan $F(T^2) = \{1, 2, 3\}$ olur. Buradan $F(T) =$

$\{2\}$ iken $F(T^2) \neq \{2\}$ dir.

Tanım 42: $U \neq \emptyset$ ve $T, S: U \rightarrow U$ iki dönüşüm olsun. $T\kappa = S\kappa = \kappa$ olacak şekilde $\kappa \in U$ varsa bu κ noktasına T ve S nin ortak sabit noktası denir. Ortak olan sabit noktalarının kümesi

$$F = F(T) \cap F(S)$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 14: $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve $T, S: U \rightarrow U$ iki dönüşüm olsun. $T(\kappa, v) = (\kappa, 0)$ ve $S(\kappa, v) = (\kappa, 2v)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T) \cap F(S) = \{(\kappa, 0)\}$ dir.

Çözüm: $T(\kappa, v) = (\kappa, 0)$ ve $T\kappa = \kappa$ eşitliğinden

$$T(\kappa, v) = (\kappa, v) = (\kappa, 0) \Rightarrow v = 0$$

olur. Buradan $F(T) = \{(\kappa, v): v = 0\}$ olur. $S(\kappa, v) = (\kappa, 2v)$ ve $S\kappa = \kappa$ eşitliğinden ise

$$S(\kappa, v) = (\kappa, v) = (\kappa, 2v) \Rightarrow v = 2v \Rightarrow v = 0$$

olur. Buradan da $F(S) = \{(\kappa, v): v = 0\}$ bulunur. O halde ortak sabit noktalarının kümesi

$$F = F(T) \cap F(S) = \{(\kappa, 0)\}$$

olur.



MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezin temel kısımlarının oluşturulmasında kullanılacak çarpımsal metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri ve bu teoremlerin ispatı verilmiştir.

Çarpımsal Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3: (U, ζ^*) çarpımsal metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir çarpımsal daraltan dönüşüm olsun. Eğer (U, ζ^*) tam ise T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir (Ozavsar ve Cevikel, 2017).

İspat: κ_0, U da keyfi bir nokta ve U 'da $\{\kappa_n\}$ dizisini $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ için $\kappa_n = T\kappa_{n-1}$ olarak alalım. T çarpımsal daraltan olduğundan

$$\zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_n) \leq \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n-1})^\lambda \leq \zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_{n-2})^{\lambda^2} \leq \dots \leq \zeta^*(\kappa_1, \kappa_0)^{\lambda^n}$$

sonucunu elde ederiz. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \zeta^*(\kappa_m, \kappa_n) &\leq \zeta^*(\kappa_m, \kappa_{m-1}) \dots \zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_n) \\ &\leq \zeta^*(\kappa_1, \kappa_0)^{\lambda^{m-1}} + \dots + \lambda^n \\ &\leq \zeta^*(\kappa_1, \kappa_0)^{\frac{\lambda^n}{1-\lambda}} \end{aligned}$$

dır. Buradan $\zeta^*(\kappa_m, \kappa_n) \rightarrow 1$ ($m, n \rightarrow \infty$) olur. Dolayısıyla $\kappa_n = T^n \kappa_0$ dizisi çarpımsal Cauchy dizisidir. U uzayı tam olduğundan $\kappa_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$) olacak şekilde bir $z \in U$ mevcuttur. Ayrıca

$$\zeta^*(Tz, z) \leq \zeta^*(T\kappa_n, Tz). \zeta^*(T\kappa_n, z) \leq \zeta^*(\kappa_n, z)^\lambda. \zeta^*(\kappa_{n+1}, z) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. Böylece $\zeta^*(Tz, z) = 1$ olur. Bu durumda z, T 'nin bir sabit noktasıdır. Yani $Tz = z$ dir.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki farklı bir y noktası için $Ty = y$ olsun. Bu durumda

$$\zeta^*(z, y) = \zeta^*(Tz, Ty) \leq \zeta^*(z, y)^\lambda$$

dır. Böylece $\zeta^*(z, y) = 1$ ve $y = z$ dir. Bu sonuç z 'nin T 'nin tek bir sabit noktası olduğunu ifade eder.

Teorem 4: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay ise $\forall \kappa, v \in U$ için $\zeta(\kappa, v) = \text{In}\zeta^*(\kappa, v)$ şeklinde tanımlanan metriğe göre (U, ζ) bir metrik uzaydır. Tersine, eğer (U, ζ) bir metrik uzay

ise (U, ζ^*) , $\forall \kappa, v \in U$ için $\zeta^*(\kappa, v) = e^{\zeta(\kappa, v)}$ olarak tanımlanan metriğe göre bir çarpımsal metrik uzaydır (Agarwal *et al.* 2016).

Yukarıdaki teorem, aşağıdaki verilecek olan bazı sonuçların denkliklerini göstermek için kullanılacaktır.

Teorem 5: (U, ζ) sıralı kompakt bir metrik uzay olsun. $T: U \rightarrow U$ dönüşümü, $\forall \kappa, v \in U$ ve $\kappa \neq v$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) < \zeta(\kappa, v) \quad (2)$$

şartını sağlıyorsa tek bir sabit noktaya sahiptir (Ozavşar ve Cevikel, 2012).

Çarpımsal metrik uzaylardaki benzer sonuç aşağıdaki gibidir.

Teorem 6: (U, ζ^*) sıralı kompakt çarpımsal bir metrik uzay olsun. $T: U \rightarrow U$ dönüşümü, $\forall \kappa, v \in U$ ve $\kappa \neq v$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) < \zeta^*(\kappa, v) \quad (3)$$

şartını sağlıyorsa tek bir sabit noktaya sahiptir (Došenović *et al.* 2016).

Teorem 7: Teorem 5 ve Teorem 6 eşdeğerdir (Došenović *et al.* 2016).

İspat: (2) koşulunun sağlandığını kabul edelim. O zaman,

$$e^{\zeta(T\kappa, Tv)} < e^{\zeta(\kappa, v)}$$

olur. Buradan $\zeta^*(T\kappa, Tv) < \zeta^*(\kappa, v)$ dir. Böylece (3) koşulu sağlanır. Şimdi de (3) koşulunun geçerli olduğunu varsayalım. O zaman

$$\ln \zeta^*(T\kappa, Tv) < \ln \zeta^*(\kappa, v)$$

olur. Buradan $\zeta(T\kappa, Tv) < \zeta(\kappa, v)$ elde edilir. Yani (2) doğrudur.

Teorem 8: (U, ζ) tam bir metrik uzay olsun ve $T: U \rightarrow U$ dönüşümü her $\kappa, v \in U$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) < \varphi_1 \zeta(\kappa, v) \quad (4)$$

şartını sağlasın. Burada $\varphi_1: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sağdan üst yarı-süreklili bir fonksiyon olup, $t > 0$ için $\varphi_1(t) < t$ dir. Bu durumda T 'nin tek bir sabit noktası vardır. (Boyd and Wong, 1969).

Çarpımsal metrik uzaylardaki benzer sonuç aşağıdaki gibidir.

Teorem 9: (U, ζ^*) tam çarpımsal bir metrik uzay olsun ve $T: U \rightarrow U$ dönüşümü her $\kappa, v \in U$

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) < \varphi_2 \zeta^*(\kappa, v) \quad (5)$$

şartını sağlasın. Burada $\varphi_2: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ sağdan üst yarı-sürekli bir fonksiyon olup, $t > 1$ için $\varphi_2(t) < t$ dir. Bu durumda T 'nin tek bir sabit noktası vardır. (Došenović *et al.* 2016).

Teorem 10: Teorem 8 ve Teorem 9 eşdeğerdir (Došenović *et al.* 2016).

İspat: (4) koşulunun geçerli olduğunu varsayalım. O zaman,

$$e^{\zeta(T\kappa, Tv)} \leq e^{\varphi_1 \zeta(\kappa, v)} = e^{\varphi_1(\ln \zeta^*(\kappa, v))},$$

olur. Yani,

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq e^{\varphi_1(\ln \zeta^*(\kappa, v))} = \varphi_2 \zeta^*(\kappa, v),$$

elde edilir. Burada, $\varphi_2 = \exp \circ \varphi_1 \circ \ln$ olduğundan (4) numaralı eşitsizliğin (5) numaralı eşitsizliğini sağladığını görüyoruz. Ayrıca φ_1 ile birlikte $\varphi_2: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ sağdan üst yarı süreklidir ve $t > 1$ için $\varphi_2(t) < t$ dir.

Tersine, şimdi (5)'in sağlandığını varsayalım. Buradan

$$\ln \zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \ln(\varphi_2(\zeta^*(\kappa, v))) = \ln(\varphi_2(e^{\zeta(\kappa, v)}))$$

olur. Yani,

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq \ln(\varphi_2(e^{\zeta(\kappa, v)})) \quad (6)$$

dir.

Burada (U, ζ) tam bir metrik uzaydır. (6) eşitsizliğinde $\varphi_1 = \ln \circ \varphi_2 \circ \exp$ denilirse $\zeta(T\kappa, Tv) \leq \varphi_1(\zeta(\kappa, v))$ eşitliğinin elde edilir.

$$\varphi_1: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

dönüşümü φ_2 gibi sağdan üst yarı süreklidir ve $t > 0$ için $\varphi_1(t) < t$ dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Meir ve Keeler tarafından 1969 yılında yayınlanan makalede çok ilginç bir teorem kanıtlanmıştır. Onlar, Banach daraltan sonucunun daha geniş bir daraltan dönüşüm sınıfı için geçerli olduğunu kanıtladılar.

Teorem 11: (U, ζ) tam metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ dönüşümü verilsin $x \in U$ ve $\kappa \in U$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n \kappa = x$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \zeta(\kappa, v) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \zeta(T\kappa, Tv) < \varepsilon \quad (7)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa bu durumda T 'nin tek bir sabit noktası vardır (Meir and Keeler, 1969).

Çarpımsal metrik uzaylar bağlamındaki teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 12: (U, ζ^*) tam çarpımsal bir metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ dönüşümü verilsin. $x \in U$ ve $\kappa \in U$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n \kappa = x$ olsun. $\forall \varepsilon > 1$ için

$$\varepsilon \leq \zeta^*(\kappa, v) < \varepsilon \cdot \delta \Rightarrow \zeta^*(T\kappa, Tv) < \varepsilon \quad (8)$$

olacak şekilde bir $\delta > 1$ sayısı varsa bu durumda T 'nin tek bir sabit noktası vardır (Došenović et al. 2016).

Bu bölümde ifade ettiğimiz gibi, amacımız yukarıda belirtilen teoremlerin eşdeğerliğini göstermektir.

Teorem 13: Teorem 11 ve Teorem 12 eşdeğerdir (Došenović et al. 2016).

İspat: Burada, (8) ifadesinin (7) ifadesini ve tersine (7) ifadesinde (8) ifadesini gerektirdiğini göstereceğiz. (8)'in sağlandığını varsayalım ve $\varepsilon > 0$ olsun. $e^\varepsilon > 1$ olduğundan

$$e^\varepsilon \leq e^{\zeta(\kappa, v)} = \zeta^*(\kappa, v) < e^\varepsilon \cdot e^\delta \Rightarrow \zeta^*(T\kappa, Tv) = e^{\zeta(T\kappa, Tv)} < e^\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Başka bir ifadeyle (ln ve exp fonksiyonlarının artan fonksiyonlar olduğundan)

$$\varepsilon \leq \zeta(\kappa, v) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \zeta(T\kappa, Tv) < \varepsilon$$

Yazılır.

Dolayısıyla (7) sağlanır.

Tersine, şimdi (7)'nin sağlandığını varsayalım ve $\varepsilon > 1$ olsun. O zaman

$$\ln \varepsilon \leq \zeta(\kappa, v) = \ln \zeta^*(\kappa, v) < \ln \varepsilon + \ln \delta \Rightarrow \zeta(T\kappa, Tv) = \ln \zeta^*(T\kappa, Tv) < \ln \varepsilon$$

elde edilir.

Başka bir deyişle

$$\varepsilon \leq \zeta^*(\kappa, v) < \varepsilon \cdot \delta \Rightarrow \zeta^*(T\kappa, Tv) < \varepsilon$$

olur.

Dolayısıyla (8) sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 14: (U, ζ^*) tam çarpımsal bir metrik uzay, $\forall \kappa, v \in U$ için ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ olması halinde

1. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \zeta^*(\kappa, v)^\alpha$
2. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^\beta$
3. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^\gamma$

şartlarından en az biri sağlanıyorsa T 'nin tek bir sabit noktası vardır (Sarwar and Rome, 2014).

İspat: $\delta = \max \left\{ \alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma} \right\}$ alınırsa $\delta < 1$ olur. $\kappa_0 \in U$ keyfi bir eleman ve $n \geq 0$ olsun. $\kappa = T^n \kappa_0$ ve $v = T^{n+1} \kappa_0$ alalım.

Eğer $\kappa \neq v$ ise, bu durumda κ , T 'nin sabit noktasıdır. Bu iki nokta için koşul (1) sağlanıyorsa

$$\zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0) \leq (\zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0))^\delta$$

olur. κ ve v için koşul (2) sağlanıyorsa,

$$\begin{aligned} \zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0) &\leq (\zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0) \cdot \zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0))^\beta \\ &= (\zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0))^\beta \cdot (\zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0))^\beta \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$((\zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0))^{1-\beta} = \zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0)^\beta$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0) = \zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \leq (\zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0))^\delta$$

olur.

κ ve v için koşul (3) sağlanırsa o zaman

$$\begin{aligned} \zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0) &\leq (\zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0) \cdot \zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0))^\gamma \\ &= (\zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0))^\gamma \cdot 1 \\ &\leq (\zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0) \cdot \zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0))^\gamma \\ &\times \zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0) \\ &= \zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \\ &\leq (\zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0))^\delta \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her n için doğru olup

$$\zeta^*(T^{n+1} \kappa_0, T^{n+2} \kappa_0) \leq (\zeta^*(T^n \kappa_0, T^{n+1} \kappa_0))^\delta$$

$$\begin{aligned} &\leq (\zeta^*(T^{n-1}\kappa_0, T^n\kappa_0))^{\delta^2} \\ &\leq (\zeta^*(\kappa_0, T\kappa_0))^{\delta^{n+1}} \end{aligned}$$

yazılır.

Her $m, n \in N$ ve $m > n$ olsun. Çarpımsal üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \zeta^*(T^m\kappa_0, T^n\kappa_0) &\leq (\zeta^*(T^m\kappa_0, T^{m-1}\kappa_0) \cdot (\zeta^*(T^{m-1}\kappa_0, T^{m-2}\kappa_0) \dots (\zeta^*(T^{n+1}\kappa_0, T^n\kappa_0) \\ &\leq (\zeta^*(T\kappa_0, \kappa_0))^{\delta^{m-1} + \delta^{m-2} + \delta^{m-3} \dots + \delta^n} \\ &= (\zeta^*(T\kappa_0, \kappa_0))^{\frac{\delta^n - \delta^m}{1 - \delta}} \end{aligned}$$

sonucuna varılır. $\delta < 1$ olduğundan

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \zeta^*(T^m\kappa_0, T^n\kappa_0) = 1$$

olur. Bu $\{T^n\kappa_0\}$ dizisinin çarpımsal Cauchy dizisi olduğunu gösterir ve U tam olduğundan bu dizi U 'da bir z noktasına yakınsar.

Şimdi $T(z) = z$ olduğunu iddia ediyoruz. $T(z) \neq z$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\zeta^*(Tz, z) = \varepsilon > 1$ için

$$B = \left\{ \kappa \in U \mid \zeta^*(\kappa, z) < \varepsilon^{\frac{1}{4}} \right\}$$

şeklinde z merkezli yuvarını ele alalım. Şimdi herhangi bir $\kappa \in B$ için $\zeta^*(z, Tz) \leq \zeta^*(z, \kappa) \cdot \zeta^*(\kappa, Tz)$ dir. Bu ise $\zeta^*(\kappa, Tz) > \varepsilon^{\frac{3}{4}}$ anlamına gelir. $\{T^n\kappa_0\}$, z 'ye yakınsadığından merkezi z olan her yuvar $\{T^n\kappa_0\}$ 'nin sonsuz sayıda terimini içerir ve bundan dolayı $\forall n \geq p$ doğal sayısı için $T^n\kappa_0 \in B$ olur.

Teoremin hipotezine göre $T^p\kappa_0$ ve z için aşağıdaki üç koşuldan en az biri sağlanmalıdır:

1. $\zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, Tz) \leq \zeta^*(T^p\kappa_0, z)^\alpha$
2. $\zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, Tz) \leq [\zeta^*(T^p\kappa_0, T^{p+1}\kappa_0) \cdot \zeta^*(z, Tz)]^\beta$
3. $\zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, Tz) \leq [\zeta^*(T^p\kappa_0, Tz) \cdot \zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, z)]^\gamma$

Koşul (1) mümkün değildir. Çünkü

$$\zeta^*(T^p\kappa_0, z)^\alpha < \zeta^*(T^p\kappa_0, z) < \varepsilon^{\frac{1}{4}} < \varepsilon^{\frac{3}{4}} < \zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, Tz)$$

olup

$$[\zeta^*(T^p\kappa_0, T^{p+1}\kappa_0). \zeta^*(z, Tz)]^\beta$$

$$\begin{aligned} &< [\zeta^*(T^p\kappa_0, T^{p+1}\kappa_0). \zeta^*(z, Tz)]^{\frac{1}{2}} \leq [\zeta^*(T^p\kappa_0, z). \zeta^*(z, T^{p+1}\kappa_0). \zeta^*(z, Tz)]^{\frac{1}{2}} \\ &< (\varepsilon^{\frac{1}{4}}. \varepsilon^{\frac{1}{4}}. \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon^{\frac{3}{4}} \\ &< \zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, Tz) \leq [\zeta^*(T^p\kappa_0, z). \zeta^*(z, T^{p+1}\kappa_0). \zeta^*(z, Tz)]^{\frac{1}{2}} < (\varepsilon^{\frac{1}{4}}. \varepsilon^{\frac{1}{4}}. \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \\ &= \varepsilon^{\frac{3}{4}} < \zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, Tz) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu durum da koşul (2)'nin çelişkili olduğunu gösterir.

Benzer şekilde koşul (3) için

$$[\zeta^*(T^p\kappa_0, Tz). \zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, z)]^\gamma$$

$$\begin{aligned} &< [\zeta^*(T^p\kappa_0, Tz). \zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, z)]^{\frac{1}{2}} \leq [\zeta^*(T^p\kappa_0, z). \zeta^*(z, Tz). \zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, z)]^{\frac{1}{2}} \\ &< (\varepsilon^{\frac{1}{4}}. \varepsilon^{\frac{1}{4}}. \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon^{\frac{3}{4}} < \zeta^*(T^{p+1}\kappa_0, Tz) \end{aligned}$$

eşitsizliği çelişki belirtir.

Dolayısıyla $T^p\kappa_0$ ve z için üç koşuldan hiçbiri sağlanmamaktadır. Dolayısıyla $T(z) = z$ olmalıdır.

Teklik: $z' \neq z$ olmak üzere $z' \in B$, T dönüşümünün bir başka sabit noktası olsun. Yani $T(z') = z'$ olsun. ζ^* çarpımsal bir metrik olduğundan, $\zeta^*(z, z') > 1$ olmalıdır. $z, z' \in B$ ve her $\alpha \in [0,1)$ için

$$\zeta^*(Tz, Tz') > \zeta^*(z, z')^\alpha$$

ve

her $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ için

$$\zeta^*(Tz, Tz') > [\zeta^*(z, Tz). \zeta^*(z', Tz')]^\beta$$

ve her $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ için

$$\begin{aligned} \zeta^*(Tz, Tz') &= [\zeta^*(Tz, Tz')]^{\frac{1}{2}}. [\zeta^*(Tz, Tz')]^{\frac{1}{2}} = [\zeta^*(Tz, z'). \zeta^*(z, Tz')]^{\frac{1}{2}} \\ &> [\zeta^*(Tz, z'). \zeta^*(z, Tz')]^\gamma \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla teoremin üç koşulundan hiçbiri B 'nin z ve z' noktaları için sağlanmamaktadır.

Bu ise T 'nin sabit noktasının tek olduğunu gösterir.

Teorem 15: (U, ζ^*) çarpımsal bir metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olmak üzere, $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ ve $\forall \kappa, v \in U$ farklı nokta çifti için Teorem 14'ün koşullarından en az biri sağlanmış olsun. Bir κ_0 için $\{T^n \kappa_0\}$ dizisi, U 'da bir z_1 limit noktasına sahipse, z_1 T 'nin tek sabit noktasıdır (Sarwar and Rome, 2014).

İspat: Teorem 14'ün ispatındaki adımlar takip edilerek $T^n \kappa_0$ 'nın çarpımsal Cauchy dizisi olduğu sonucuna varılır. Çünkü $T^n \kappa_0 \rightarrow z_1$ dir. Dolayısıyla z_1 'in T 'nin sabit noktası olduğu elde edilir.

Teorem 16: $U, (U, \zeta^*)$ tam çarpımsal metrik uzayında bir küme $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm ve $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ olmak üzere U deki farklı her nokta çifti için Teorem 14'ün koşullarından en az biri sağlanmış olsun. Bu durumda $\kappa_0 \in U$ için, $\{T^n \kappa_0\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi κ_0 'ın seçiminden bağımsız olarak U 'da bir noktaya yakınsar (Sarwar and Rome, 2014).

İspat: Teorem 14'ün ispatına benzer olarak, $z \in U$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\kappa_0) = z$ dir. $z' \in U$ olmak üzere U 'daki keyfi bir v_0 noktası için $T^n(v_0) \rightarrow z'$ olsun. Şimdi $z = z'$ olduğunu göstereceğiz. Aksine $z \neq z'$ olduğunu varsayalım. Böylece

$$\zeta^*(z, z') > 1 \text{ ve } 1 < \varepsilon < \zeta^*(z, z')^{\frac{1}{2} \min\{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}\}}$$

olmak üzere $\varepsilon > 1$ reel olduğunu kabul edelim. $\{T^n(\kappa_0)\}$ ve $\{T^n(v_0)\}$ dizileri yakınsak olduklarından, her $n \geq n_0$ için $\zeta^*(T^n(\kappa_0), z) \leq \varepsilon$ ve $\zeta^*(T^n(v_0), z') \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır.

$n \geq n_0$ için $\kappa = T^n(\kappa_0)$ ve $v = T^n(v_0)$ olsun. $\kappa \neq v$ olmak üzere κ ve v için Teorem 14'ün 1. şartı sağlanmış olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \zeta^*(T^{n+1}(\kappa_0), T^{n+1}(v_0)) &\leq (\zeta^*(T^n(\kappa_0), T^n(v_0)))^\alpha \\ &\leq \zeta^*(T^n(\kappa_0), z) \cdot d^*(z, z') \cdot \zeta^*(z', T^n(v_0))^\alpha \\ &\leq \zeta^*(z, z')^\alpha \cdot \varepsilon^{2\alpha} \end{aligned}$$

olur.

Fakat ε 'nın $\zeta^*(z, z')^{\frac{1}{2} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ ifadesinden küçük olduğu kabul edildiğinde

$$\zeta^*(z, z')^\alpha \cdot \varepsilon^{2\alpha} < \frac{\zeta^*(z, z')}{\varepsilon^2}$$

olur. Sonuç olarak

$$(\zeta^*(T^n(\kappa_0), T^n(v_0)))^\alpha < \frac{\zeta^*(z, z')}{\varepsilon^2}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\zeta^*(z, z')}{\zeta^*(T^{n+1}(\kappa_0), z) \cdot \zeta^*(z', T^{n+1}(v_0))} \\ &\leq \zeta^*(T^{n+1}(\kappa_0), T^{n+1}(v_0)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişki oluşturur.

Şimdi κ ve v için Teorem 14'ün 2. şartı sağlanmış olsun. Dolayısıyla,

$$\zeta^*(T^{n+1}(\kappa_0), T^{n+1}(v_0)) < [\zeta^*(T^n(\kappa_0), (T^{n+1}(\kappa_0)). T^n(v_0). T^{n+1}(v_0))]^\beta$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned} &[\zeta^*(T^n(\kappa_0), (T^{n+1}(\kappa_0)). T^n(v_0). T^{n+1}(v_0))]^\beta \\ &\leq \left(\zeta^*(T^n(\kappa_0), z) \cdot \zeta^*(z, T^{n+1}(\kappa_0)) \cdot (T^n(v_0), z') \cdot \zeta^*(z', T^{n+1}(v_0)) \right)^\beta \\ &\leq \varepsilon^{4\beta} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\varepsilon < \zeta^*(z, z')^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} < \zeta^*(z, z')^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2\beta}}$$

eşitsizliğinden

$$\varepsilon^{4\beta} < \frac{\zeta^*(z, z')}{\varepsilon^2}$$

yazılır. Sonuç olarak

$$[\zeta^*(T^n(\kappa_0), (T^{n+1}(\kappa_0)). T^n(v_0). T^{n+1}(v_0))]^\beta \leq \varepsilon^{4\beta} < \frac{\zeta^*(z, z')}{\varepsilon^2} \leq \zeta^*(T^{n+1}(\kappa_0), T^{n+1}(v_0))$$

eşitsizliği bir çelişki belirtir.

κ ve v için Teorem 14'ün 3. şartı sağlanmış olsun. Bu taktirde

$$\zeta^*(T^{n+1}(\kappa_0), T^{n+1}(v_0)) \leq [\zeta^*(T^n(\kappa_0), (T^{n+1}(\kappa_0)). T^n(v_0). T^{n+1}(v_0))]^\gamma$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} &[\zeta^*(T^n(\kappa_0), (T^{n+1}(\kappa_0)). \zeta^*(T^n(v_0). T^{n+1}(v_0)))]^\gamma \\ &\leq \left(\zeta^*(T^n(\kappa_0), z) \cdot \zeta^*(z, z') \cdot \zeta^*(z', T^{n+1}(\kappa_0)) \right. \\ &\quad \times \left. \zeta^*(T^n(v_0), z) \cdot \zeta^*(z, z') \cdot \zeta^*(z', T^{n+1}(\kappa_0)) \right)^\gamma \\ &\leq \zeta^*(z, z')^{2\gamma} \cdot \varepsilon^{4\gamma} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\varepsilon < \zeta^*(z, z')^{\frac{1}{2} \frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}} \Rightarrow \zeta^*(z, z')^{2\gamma} \cdot \varepsilon^{4\gamma} < \frac{\zeta^*(z, z')}{\varepsilon^2}$$

gerektirmesi yazılır. Bu durumda

$$[\zeta^*(T^n(\kappa_0), (T^{n+1}(\kappa_0)). \zeta^*(T^n(v_0), T^{n+1}(v_0)))]^\gamma < \frac{\zeta^*(z, z')}{\varepsilon^2} \leq \zeta^*(T^{n+1}(\kappa_0), T^{n+1}(v_0))$$

eşitsizliği çelişki oluşturur.

Bu nedenle, $z' = z$ olmalıdır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 17: (U, ζ^*) tam çarpımsal bir metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ sürekli bir dönüşüm olsun. U daki farklı her κ, v nokta çifti için

1. $\zeta^*(T\kappa, Tv) < \zeta^*(\kappa, v)$
2. $\zeta^*(T\kappa, Tv) < [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^{\frac{1}{2}}$
3. $\zeta^*(T\kappa, Tv) < [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^{\frac{1}{2}}$

şartlarından en az biri sağlansın. Bu durumda $\kappa_0 \in U$ için $\{T^n \kappa_0\}_{n=0}^\infty$ dizisi U 'da bir z limit noktasına sahipse z , T 'nin tek sabit noktasıdır (Sarwar and Rome, 2014).

İspat: $\lim_{i \rightarrow \infty} T^{n_i}(\kappa_0) = z$ olacak şekilde $\{T^n(\kappa_0)\}_{n=0}^\infty$ dizisinin $\{T^{n_i}(\kappa_0)\}_{n=0}^\infty$ alt dizisini göz önüne alalım. T 'nin sürekliliğinden dolayı, $\lim_{i \rightarrow \infty} T^{n_i+1}(\kappa_0) = T(z)$ ve $\lim_{i \rightarrow \infty} T^{n_i+2}(\kappa_0) = T^2(z)$ olur.

Negatif olmayan her n tamsayısı için ya $T^n(\kappa_0) = T^{n+1}(\kappa_0)$ veya

$$\zeta^*(T^{n+1}(\kappa_0), T^{n+2}(\kappa_0)) < \zeta^*(T^n(\kappa_0), T^{n+1}(\kappa_0))$$

olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki negatif olmayan bir m tam sayısı olacak şekilde, $T^m(\kappa_0) \neq T^{m+1}(\kappa_0)$

ve

$$\zeta^*(T^m(\kappa_0), T^{m+1}(\kappa_0)) \leq \zeta^*(T^{m+1}(\kappa_0), T^{m+2}(\kappa_0))$$

dir.

Açıkça, $\kappa = T^m(\kappa_0)$ ve $v = T^{m+1}(\kappa_0)$ farklı noktalar için, (1) eşitsizliği, Teorem 17'nin sırasıyla (1), (2) ve (3) koşullarının hiçbirini sağlamaz. Hipotezden

$$\zeta^*(T^{m+1}(\kappa_0), T^{m+2}(\kappa_0))$$

$$\begin{aligned}
&< \zeta^*(T^m(\kappa_0), T^{m+1}(\kappa_0)) \zeta^*(T^{m+1}(\kappa_0), T^{m+2}(\kappa_0)) \\
&< (\zeta^*(T^m(\kappa_0), T^{m+1}(\kappa_0)) \cdot \zeta^*(T^{m+1}(\kappa_0), T^{m+2}(\kappa_0)))^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta^*(T^{m+1}(\kappa_0), T^{m+2}(\kappa_0)) \\
&< (\zeta^*(T^m(\kappa_0), T^{m+2}(\kappa_0)) \cdot 1)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\zeta^*(T^m(\kappa_0), T^{m+1}(\kappa_0)) \cdot \zeta^*(T^{m+1}(\kappa_0), T^{m+2}(\kappa_0)))^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur.

Böylece $T^m(\kappa_0) \neq T^{m+1}(\kappa_0)$ için

$$\zeta^*(T^{m+1}(\kappa_0), T^{m+2}(\kappa_0)) < \zeta^*(T^m(\kappa_0), T^{m+1}(\kappa_0))$$

yazılır. Dolayısıyla $\{\zeta^*((T^n(\kappa_0), T^{n+1}(\kappa_0)))\}_{n=0}^{\infty}$ monoton azalan ve yakınsak bir dizidir, ve

$$\begin{aligned}
\zeta^*(z, Tz) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta^*(T^{n_i}(\kappa_0), T^{n_i+1}(\kappa_0)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta^*(T^n(\kappa_0), T^{n+1}(\kappa_0)) \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta^*(T^{n_i+1}(\kappa_0), T^{n_i+2}(\kappa_0)) = \zeta^*(T(z), T^2(z))
\end{aligned}$$

dir. Limit noktalarının tekliğinden dolayı, $T(z) = z$ olduğu sonucuna varılır.

Sabit noktanın tekliği için, T 'nin $z \neq z'$ olacak şekilde bir başka sabit noktasının olduğunu kabul edelim. Teorem 14'ün ispatında olduğu gibi, bu farklı noktalar için teoremin üç koşulundan hiçbiri sağlanmaz. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 18: U bir tam çarpımsal metrik uzay olsun. $T: U \rightarrow U$ dönüşümü için, eğer U 'da ki her farklı nokta çifti için Teorem 16'nın (1), (2), (3) koşullarından en az biri sağlanıyorsa $\kappa_0 \in U$ ve $\{T^n \kappa_0\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi U 'da bir z limit noktasına sahip ve T , hem z noktasında hemde $T(z)$ noktasında sürekli ise z, T 'nin tek bir sabit noktasıdır (Sarwar and Rome, 2014).

Teorem 19: U tam çarpımsal bir metrik uzay olsun. $T: U \rightarrow U$ dönüşümü, U 'da ki her farklı nokta çifti için Teorem 16'nın (1), (2), (3) koşullarından en az birini sağlasın. Bir $\kappa_0 \in U$ için, $\{T^n \kappa_0\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi U 'da bir z noktasına yakınsıyorsa z, T 'nin tek bir sabit noktasıdır (Sarwar and Rome, 2014).

İspat: Sabit noktanın tekliği Teorem 14'e benzer şekilde yapılabilir. Sabit noktanın varlığını göstermek için, yine Teorem 14'ün ispatındaki adımlar izlenerek, Teorem 14'ün 1,2 ve 3 koşulları için α, β ve γ sabitlerini kullanmak gerekmez. Sadece Teorem 17'nin üç koşulundan en az birinin geçerliliğini göstermek yeterlidir.

Teorem 20: (U, ζ^*) tam çarpımsal bir metrik uzay ve $\forall \kappa, v \in U$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \frac{[\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv))} \quad (9)$$

olacak şekilde $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Burada $\varphi: [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olup $\varphi(x, y) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $x = y = 1$ olmasıdır. Bu durumda T 'nin U da tek bir sabit noktası vardır (Sarwar and Rome, 2014).

İspat: $\kappa_0 \in U$ keyfi bir nokta olsun. Her $n \geq 0$ için

$$\kappa_{n+1} = T\kappa_n = T^{n+1}(\kappa_0) \quad (10)$$

olacak şekilde bir $\{\kappa_n\}$ dizisi oluşturulabilir. Eğer n doğal sayısı için $\kappa_n = \kappa_{n+1}$ ise, κ_n T 'nin sabit noktasıdır, bu da ispatı tamamlar. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $\kappa_n \neq \kappa_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Bunun için:

Adım 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = 1 \quad (11)$$

olduğunu iddia ediyoruz. (9) eşitliğinde $\kappa = \kappa_n$ ve $v = \kappa_{n-1}$ alınır ve φ fonksiyonun özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) &\leq \frac{[\zeta^*(\kappa, T\kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, T\kappa_{n-1})]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(\kappa, T\kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, T\kappa_{n-1}))} \\ &= \frac{[\zeta^*(\kappa, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(\kappa, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n))} \\ &\leq [\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

elde edilir. Buradan her $n \geq 1$ için

$$\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \leq \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n-1})$$

dir. Dolayısıyla $\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})$ dizisi monoton artmayan ve 1 ile sınırlıdır. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = r$$

olacak şekilde bir $r \geq 1$ sayısı vardır.

(12) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ limit alınır ve φ 'nin sürekliliği kullanılırsa, $r \leq \frac{(r,r)^{\frac{1}{2}}}{\varphi(r,r)}$ elde edilir.

Buradan bu da $\varphi(r, r) \leq 1$ ve $r = 1$ sonucuna varılır. Böylece (11) sağlanmış olur.

Adım 2: Aşağıdaki ifadeyi ispatlayalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2}) = 1 \quad (13)$$

olduğunu göstereceğiz. (9) dan

$$\begin{aligned}
\zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_n) &\leq \frac{[\zeta^*(\kappa_{n+1}, T\kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, T\kappa_{n-1})]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(\kappa_{n+1}, T\kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, T\kappa_{n-1}))} \\
&= \frac{[\zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_{n+2}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_{n+2}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n))} \\
&\leq [\zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_{n+2}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (11) kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_n) = 1$$

bulunur. Böylece (13) ispatlanmış olur.

Adım 3: Bu adımda T 'nin periyodik bir noktası olduğunu göstereceğiz. Çelişki yoluyla T 'nin periyodik bir noktası olmadığını varsayalım. Bu durumda $\{\kappa_n\}$ birbirinden farklı noktalar dizisi olur, yani ($n \neq m$ için) $\kappa_n \neq \kappa_m$ dir. Bu durumda $\{\kappa_n\}$ çarpımsal bir Cauchy dizisidir. Kabul edelim ki $\{\kappa_n\}$ çarpımsal bir Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda $\epsilon > 1$ ve q bir tam sayı olmak üzere $m(q) > n(q) > q$ için

$$\zeta^*(\kappa_{m(q)}, \kappa_{n(q)}) > \epsilon \quad (14)$$

olur.

Her pozitif q tam sayısı için, (13) koşulunu sağlayan $n(q)$ 'dan büyük en küçük pozitif tam sayı $m(q)$ 'yu seçelim ve aşağıdaki koşul sağlansın:

$$\zeta^*(\kappa_{n(q)}, \kappa_{m(q)-1}) \leq \epsilon \quad (15)$$

(14), (15) ve çarpımsal üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\epsilon &< \zeta^*(\kappa_{m(q)}, \kappa_{n(q)}) \\
&\leq \zeta^*(\kappa_{m(q)}, \kappa_{m(q)-2}) \cdot \zeta^*(\kappa_{m(q)-2}, \kappa_{m(q)-1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{m(q)-1}, \kappa_{n(q)}) \\
&\leq \zeta^*(\kappa_{m(q)}, \kappa_{m(q)-2}) \cdot \zeta^*(\kappa_{m(q)-2}, \kappa_{m(q)-1}) \cdot \epsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

$n \rightarrow \infty$ için limit alınıp (11) ve (13) kullanılırsa

$$\epsilon < \lim_{q \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_{m(q)}, \kappa_{n(q)}) \leq \epsilon$$

bulunur.

Dolayısıyla

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_{m(q)}, \kappa_{n(q)}) = \epsilon \quad (16)$$

elde edilir.

(9) numaralı denklemde $\kappa = \kappa_{m(q)-1}$ ve $v = \kappa_{n(q)-1}$ alınırsa

$$\zeta^*(\kappa_{m(q)}, \kappa_{n(q)}) \leq \frac{[\zeta^*(\kappa_{m(q)-1}, \kappa_{m(q)}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n(q)-1}, \kappa_{n(q)})]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(\kappa_{m(q)-1}, \kappa_{m(q)}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n(q)-1}, \kappa_{n(q)}))} \quad (17)$$

olur.

$q \rightarrow \infty$ için limit alınarak (17) de (11), (16) ve φ 'nin sürekliliği kullanılırsa

$$\epsilon \leq \frac{1}{\varphi(1,1)} = 1$$

elde edilir.

Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\{\kappa_n\}$ dizisi çarpımsal bir Cauchy dizisidir. (U, ζ^*) tam çarpımsal bir metrik uzay olduğundan. U 'da öyle bir ω bulunur ki $\kappa_n \rightarrow \omega$ olur. (9) numaralı denklemde $\kappa = \kappa_n$ ve $v = \omega$ alınırsa

$$\zeta^*(\kappa_{n+1}, T\omega) \leq \frac{[\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\omega, T\omega)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\omega, T\omega))} \quad (18)$$

olur.

$\varphi(x, y) \geq 1$ olduğundan

$$\zeta^*(\kappa_{n+1}, T\omega) \leq [\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\omega, T\omega)]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

$n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (11) kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_{n+1}, T\omega) \leq [\zeta^*(\omega, T\omega)]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

olur.

Şimdi, T 'nin periyodik bir noktasının olmadığı varsayımına çelişki oluşturacak iki durumu ele alacağız.

Durum 1: Her $n \geq 2$ için, $\kappa_n \neq \omega$ ve $\kappa_n \neq T\omega$ ise, çarpımsal üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\zeta^*(\omega, T\omega) \leq \zeta^*(\omega, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+1}, T\omega)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (11) eşitsizliği kullanılırsa

$$\zeta^*(\omega, T\omega) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_{n+1}, T\omega) \quad (20)$$

olur.

(19) ve (20)'den

$$\zeta^*(\omega, T\omega) \leq [\zeta^*(\omega, T\omega)]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

Bu eşitsizlik $\zeta^*(\omega, T\omega) = 1$ olduğunda sağlanır. Bu ise $T\omega = \omega$ yani ω 'nın T 'nin sabit noktası olduğunu gösterir. Dolayısıyla bu ifade, T 'nin periyodik noktası olmadığı varsayımına aykırıdır.

Durum 2: $p \geq 2$ için $\kappa_p = \omega$ veya $\kappa_p = T\omega$ ise, T 'nin periyodik noktası olmadığından $\omega \neq \kappa_0$ olur. Aksi takdirde $\kappa_p = \omega = \kappa_0$ dır. Bu da $T^p\kappa_0 = \kappa_0$, yani κ_0 'ın T 'nin periyodik noktası olduğu anlamına gelir. Ayrıca, eğer $\kappa_p = T\omega$ ve $\omega = \kappa_0$ ise $T\kappa_0 = T\omega = \kappa_p = T^p\kappa_0 = T^{p-1}(T\kappa_0)$ olur. Bu da $T\kappa_0$ 'ın T 'nin periyodik noktası olduğunu gösterir. Her iki durumda da, T 'nin periyodik noktası olmadığı varsayımı ile çelişir.

Her $n \geq 1$ için

$$\zeta^*(T^n\omega, \omega) = \zeta^*(T^n\kappa_p, \omega) = \zeta^*(\kappa_{n+p}, \omega)$$

veya

$$\zeta^*(T^n\omega, \omega) = \zeta^*(T^{n-1}T\omega, \omega) = \zeta^*(T^{n-1}\kappa_p, \omega) = \zeta^*(T^{n-1}\kappa_p, \omega) = \zeta^*(\kappa_{n+p-1}, \omega)$$

olur.

Yukarıda ki iki eşitlikte $p \geq 2$ sabittir. Bu nedenle $\{\kappa_{n+p}\}$ ve $\{\kappa_{n+p-1}\}$, $\{\kappa_n\}$ dizisinin alt dizileridir ve ω 'ya yakınsar.

Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_{n+p}, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(\kappa_{n+p-1}, \omega) = 1$$

dir. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(T^n\omega, \omega) = 1 \quad (21)$$

olur.

$\{T^{n+1}\omega\}$ dizisi $\{T^n\omega\}$ dizisinin bir alt dizi olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(T^{n+1}\omega, \omega) = 1 \quad (22)$$

dir.

T 'nin periyodik noktası olmadığından, herhangi bir $r, s \in \mathbb{N}$ için ($r \neq s$) ve $T^r\omega \neq T^s\omega$ olur. Çarpımsal ters üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{1}{\zeta^*(T^{n+1}\omega, \omega)} \leq \frac{\zeta^*(T^{n+1}\omega, T\omega)}{\zeta^*(\omega, T\omega)} \leq \zeta^*(T^{n+1}\omega, \omega)$$

bulunur ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta^*(T^{n+1}\omega, \omega)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\zeta^*(T^{n+1}\omega, T\omega)}{\zeta^*(\omega, T\omega)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(T^{n+1}\omega, \omega) \leq 1$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^*(T^{n+1}\omega, T\omega) = \zeta^*(\omega, T\omega) \quad (23)$$

dir. Şimdi (9) dan

$$\zeta^*(T^{n+1}\omega, T\omega) \leq \frac{[\zeta^*(T^n\omega, T^{n+1}\omega) \cdot \zeta^*(\omega, T\omega)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(T^n\omega, T^{n+1}\omega) \cdot \zeta^*(\omega, T\omega))}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, (11) ve (23) kullanılarak

$$\zeta^*(\omega, T\omega) \leq \frac{[\zeta^*(\omega, T\omega)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(1 \cdot \zeta^*(\omega, T\omega))} \leq [\zeta^*(\omega, T\omega)]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bu durum ancak $d^*(\omega, T\omega) = 1$ olduğunda mümkündür ve dolayısıyla $T\omega = \omega$ olur. Yani ω , T 'nin periyodik noktasıdır. Bu, T 'nin periyodik noktası olmadığı varsayımına aykırıdır. Böylece T 'nin bir periyodik noktası olduğu sonucuna varırız. Yani, U da $p \geq 1$ için $T^p\omega = \omega$ olacak şekilde bir ω noktası vardır.

Adım 4: Burada T 'nin sabit noktasının olduğunu ispatlayacağız. T 'nin bir periyodik noktası olduğundan, bir $p \geq 1$ tamsayısı için $T^p\omega = \omega$ olacak şekilde bir $\omega \in U$ vardır. Eğer $p = 1$ ise $T\omega = \omega$ dir. Yani ω , T 'nin sabit noktasıdır. Şimdi $p > 1$ olduğunu kabul edelim. $\omega = T^{p-1}\omega$ 'nin T 'nin sabit noktası olduğunu göstereceğiz. Tersine $T^{p-1}\omega \neq T^p\omega$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda açıkça,

$$\zeta^*(T^{p-1}\omega, T^p\omega) > 1 \text{ ve } \varphi(\zeta^*(T^{p-1}\omega, T^p\omega), \zeta^*(T^{p-1}\omega, T^p\omega)) > 1$$

dir. (9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \zeta^*(\omega, T\omega) &= \zeta^*(T^p\omega, T^{p+1}\omega) = \zeta^*(T(T^{p-1}\omega), T(T^p\omega)) \\ &\leq \frac{[\zeta^*(T^{p-1}\omega, T^p\omega) \cdot \zeta^*(T^p\omega, T(T^p\omega))]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(T^{p-1}\omega, T^p\omega) \cdot \zeta^*(T^p\omega, T(T^p\omega)))} \\ &< [\zeta^*(T^{p-1}\omega, T^p\omega) \cdot \zeta^*(T^p\omega, T(T^p\omega))]^{\frac{1}{2}} \\ &= [\zeta^*(T^{p-1}\omega, T^p\omega) \cdot \zeta^*(\omega, T\omega)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Burada $\zeta^*(\omega, T\omega) < [\zeta^*(\omega, T\omega)]^{\frac{1}{2}}$ olması mümkün değildir, bu nedenle şu sonuca varırız.

$$\zeta^*(\omega, T\omega) \leq \zeta^*(T^{p-1}\omega, T^p\omega) \quad (24)$$

elde edilir. (9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \zeta^*(T(T^{p-2}\omega), T(T^{p-1}\omega)) \\ & \leq \frac{[\zeta^*(T^{p-2}\omega, T^{p-1}\omega) \cdot \zeta^*(T^{p-1}\omega, T(T^{p-1}\omega))]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(T^{p-2}\omega, T^{p-1}\omega) \cdot \zeta^*(T^{p-1}\omega, T(T^p\omega)))} \\ & < [\zeta^*(T^{p-2}\omega, T^{p-1}\omega) \cdot \zeta^*(T^{p-1}\omega, T(T^{p-1}\omega))]^{\frac{1}{2}} \\ & = [\zeta^*(T^{p-2}\omega, T^{p-1}\omega) \cdot \zeta^*(T^{p-1}\omega, (T^p\omega))]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\zeta^*(T^{p-1}\omega, (T^p\omega)) \leq \zeta^*(T^{p-2}\omega, T^{p-1}\omega) \quad (25)$$

elde edilir. Bu şekilde (24) ve (25)'de olduğu gibi devam edilerek

$$\begin{aligned} \zeta^*(\omega, T\omega) & < \zeta^*(T^{p-1}\omega, (T^p\omega)) < \zeta^*(T^{p-2}\omega, T^{p-1}\omega) < \zeta^*(T^{p-3}\omega, T^{p-2}\omega) < \dots \\ & < \zeta^*(\omega, T\omega) \end{aligned}$$

bulunur. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\omega = T^{p-1}\omega$, T 'nin bir sabit noktasıdır.

Adım 5: Bu adımda sabit noktanın tek olduğunu göstereceğiz. T 'nin sabit noktasının tek olmadığını kabul edelim. a ve $b \in U$, T 'nin farklı iki sabit noktası yani $Ta = a$ ve $Tb = b$ olsun. Bu durumda (9) kullanılarak

$$\zeta^*(a, b) \leq \frac{[\zeta^*(a, Ta) \cdot \zeta^*(b, Tb)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\zeta^*(a, Ta) \cdot \zeta^*(b, Tb))} = \frac{[\zeta^*(a, a) \cdot \zeta^*(b, b)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi([\zeta^*(a, a) \cdot \zeta^*(b, b)])} = 1$$

bulunur. Bu da $a = b$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla T 'nin tek bir sabit noktası vardır

ARAŞTIRMA BULGULAR

Bu bölümde, ilk olarak Chatterjea ve Zamfirescu dönüşümlerinin metrik uzay ve çarpımsal metrik uzayda sabit nokta sonuçlarını ispatlayacağız. Daha sonra çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzaylarda Chatterjea dönüşümü ve Hardy Rogers tipi dönüşümünün tek bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz.

Kannan daraltan dönüşümünün sabit noktası

İlk olarak metrik uzaylarda Kannan daraltan dönüşümünün sabit noktasını inceleyeceğiz.

Teorem 21: (U, ζ) tam metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm alalım. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ ve $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq \beta[\zeta(\kappa, T\kappa) + \zeta(v, Tv)]$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T 'nin tek bir sabit noktası vardır (Kannan, 1968).

Çarpımsal metrik uzaydaki benzer sonuç aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Teorem 22: (U, ζ^*) tam çarpımsal metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm alalım. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ ve $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^\beta$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T 'nin tek bir sabit noktası vardır (Došenović *et al.* 2016).

Teorem 23: Teorem 21 ve Teorem 22 eşdeğerdir (Došenović *et al.* 2016).

İspat: Durum 1: Teorem 22'nin hipotezleri sağlansın. Bu durumda.

$$\zeta(T\kappa, Tv) = \ln \zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \beta[\ln \zeta^*(\kappa, T\kappa) + \ln \zeta^*(v, Tv)] = \beta[\zeta(\kappa, T\kappa) + \zeta(v, Tv)]$$

olur. Böylece Teorem 21 sağlanır.

Durum 2: Şimdi ise Teorem 21'in hipotezlerinin sağlandığını kabul edelim.

$$\begin{aligned} \zeta^*(T\kappa, Tv) &= e^{\zeta(T\kappa, Tv)} \leq e^{\zeta(\kappa, T\kappa)^\beta} \cdot e^{\zeta(v, Tv)^\beta} \\ &= (\zeta^*(\kappa, T\kappa)^\beta) \cdot (\zeta^*(v, Tv)^\beta) = [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^\beta \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 23 sağlanır.

Chatterjea dönüşümünün sabit noktası

Teorem 24: (U, ζ) tam metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm alalım. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ ve $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ için

$$\zeta(T\kappa, Tv) \leq \beta[\zeta(\kappa, Tv) + \zeta(v, T\kappa)]$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T 'nin tek bir sabit noktası mevcuttur (Chatterjea, 1972).

Çarpımsal metrik uzaydaki benzer teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 25: (U, ζ^*) tam çarpımsal metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm alalım. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ ve $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^\beta$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T 'nin tek bir sabit noktası vardır (Došenović *et al.* 2008).

Teorem 26: Teorem 24 ve Teorem 25 eşdeğerdir.

İspat: Durum 1: Teorem 25'in hipotezleri sağlansın. Bu durumda

$$\zeta(T\kappa, Tv) = \ln \zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \beta[\ln \zeta^*(\kappa, Tv) + \ln \zeta^*(v, T\kappa)] = \beta[\zeta(\kappa, Tv) + \zeta(v, T\kappa)]$$

olur. Dolayısıyla Teorem 24 sağlanır.

Durum 2: Şimdi Teorem 24'ün hipotezleri sağlansın.

$$\begin{aligned} \zeta^*(T\kappa, Tv) &= e^{\zeta(T\kappa, Tv)} = e^{\zeta(\kappa, Tv)^\beta} \cdot e^{\zeta(v, T\kappa)^\beta} \\ &= (\zeta^*(\kappa, Tv)^\beta) \cdot (\zeta^*(v, T\kappa)^\beta) = [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^\beta \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 26 sağlanır.

Zamfirescu dönüşümünün sabit noktası

Teorem 27: (U, ζ) tam metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm alalım. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ ve $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ için

1. $\zeta(T\kappa, Tv) \leq \alpha \zeta(\kappa, v)$
2. $\zeta(T\kappa, Tv) \leq \beta[\zeta(\kappa, T\kappa) + \zeta(v, Tv)]$
3. $\zeta(T\kappa, Tv) \leq \gamma[\zeta(\kappa, Tv) + \zeta(v, T\kappa)]$

şartlarından en az biri sağlanıyorsa T 'nin tek bir sabit noktası vardır (Zamfirescu, 1972).

Çarpımsal metrik uzaydaki benzer sonuç aşağıdaki gibidir.

Teorem 28: (U, ζ^*) tam çarpımsal metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm alalım. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ ve $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$

1. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \zeta^*(\kappa, v)^\alpha$
2. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^\beta$
3. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^\gamma$

şartlarından en az birinin sağlanması durumunda T 'nin tek bir sabit noktası vardır (Došenović et al. 2008).

Teorem 29: Teorem 27 ve Teorem 28 eşdeğerdir.

İspat: Durum 1: Teorem 28'in 1.hipotezi sağlansın. Bu durumda

$$\zeta(T\kappa, Tv) = \ln \zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \alpha [\ln \zeta^*(\kappa, v)] = \alpha [\zeta(\kappa, v)]$$

olur. Dolayısıyla Teorem 27 sağlanır.

Şimdi Teorem 27'nin 1.hipotezi sağlansın.

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) = e^{\zeta(T\kappa, Tv)} = e^{\zeta(\kappa, v)^\alpha} = \zeta^*(\kappa, v)^\alpha$$

olur. Bu ise Teorem 28'in sağlandığını gösterir.

Durum 2: Teorem 28'in 2.hipotezi sağlansın. Bu durumda

$$\zeta(T\kappa, Tv) = \ln \zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \beta [\ln \zeta^*(\kappa, T\kappa) + \ln \zeta^*(v, Tv)] = \beta [\zeta(\kappa, T\kappa) + \zeta(v, Tv)]$$

olur. Böylece Teorem 27 sağlanır.

Şimdi ise Teorem 27'nin 2.hipotezi sağlansın.

$$\begin{aligned} \zeta^*(T\kappa, Tv) &= e^{\zeta(T\kappa, Tv)} = e^{\zeta(\kappa, T\kappa)^\beta} \cdot e^{\zeta(v, Tv)^\beta} \\ &= (\zeta^*(\kappa, T\kappa)^\beta) \cdot (\zeta^*(v, Tv)^\beta) = [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^\beta \end{aligned}$$

olur. Buradan da Teorem 28 sağlanır.

Durum 3: Teorem 28'in 3.hipotezi sağlansın. Bu durumda

$$\zeta(T\kappa, Tv) = \ln \zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \beta [\ln \zeta^*(\kappa, Tv) + \ln \zeta^*(v, T\kappa)] = \beta [\zeta(\kappa, Tv) + \zeta(v, T\kappa)]$$

olup Teorem 27 sağlanır.

Şimdi Teorem 27'nin 3.hipotezi sağlansın.

$$\begin{aligned} \zeta^*(T\kappa, Tv) &= e^{\zeta(T\kappa, Tv)} = e^{\zeta(\kappa, Tv)^\beta} \cdot e^{\zeta(v, T\kappa)^\beta} \\ &= (\zeta^*(\kappa, Tv)^\beta) \cdot (\zeta^*(v, T\kappa)^\beta) = [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^\beta \end{aligned}$$

eşitliğinden Teorem 28 sağlanır. Böylece Teorem 29'un ispatı tamamlanmış olur.

Çarpımsal Dikdörtgen b -Metrik Uzayda Chatterjea dönüşümünün sabit noktası

A.Mary Priya Dharsini ve arkadaşları 2020 yılında çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzayda çarpımsal Kannan daraltan dönüşümünün sabit noktasını incelemişlerdir. Bizde bu kısımda çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzayda çarpımsal Chatterjea dönüşümünün sabit noktasının varlığını ispatlayacağız.

Teorem 30: (U, ζ^*, s) tam çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm alalım. Eğer $\forall \kappa, v \in U, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ ve $s \geq 1$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^\beta$$

oluyorsa T 'nin tek bir sabit noktası vardır (Dharsini *et al.* 2020).

Teorem 31: (U, ζ^*, s) tam çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm alalım. Eğer $\forall \kappa, v \in U, \gamma s < \frac{1}{2}, \gamma s(1 + s) < 1$ ve $s \geq 1$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^\gamma \quad (26)$$

oluyorsa T 'nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat: κ_0, U da keyfi bir nokta ve U 'da $\{\kappa_n\}$ dizisini

$$\kappa_n = T\kappa_{n-1} = \dots T^n \kappa_0 \quad (27)$$

olarak alalım. (26) ve (27) den

$$\begin{aligned} \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) &= \zeta^*(T\kappa_{n-1}, T\kappa_n) \\ &= \{\zeta^*(\kappa_{n-1}, T\kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, T\kappa_{n-1})\}^\gamma \\ &= \{\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_n)\}^\gamma \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^{\gamma s} \cdot 1^\gamma \\ &= \{\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n) \cdot 1 \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^{\gamma s} \cdot 1 \\ &= \{\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^{\gamma s} \end{aligned}$$

olur.

$$\zeta_n^* = \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})$$

eşitliği kullanılarak işlemlere devam edildiğinde

$$\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \zeta_n^* \cdot \zeta_n^{*-s\gamma} = \zeta_{n-1}^{s\gamma} = \zeta_n^* \leq \{\zeta_{n-1}^*\}^{\frac{s\gamma}{1-s\gamma}} = \zeta_n^* \leq \{\zeta_{n-1}^*\}^\varphi$$

$$\zeta_n^* \leq \{\zeta_0^*\}^{\varphi^n} \quad (28)$$

elde edilir.

$n \geq 2$ için $\kappa_0 = \kappa_n$ olduğunda, (28) kullanılarak

$$\begin{aligned} \zeta_0^* &= \zeta^*(\kappa_0, \kappa_1) \\ &= \zeta^*(\kappa_0, T\kappa_0) \\ &= \zeta^*(\kappa_n, T\kappa_n) \\ &= \zeta^*(\kappa_0, \kappa_{n+1}), \\ &= \zeta_n^* \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\zeta_0^* \leq \{\zeta_0^*\}^{\varphi^n}$$

bulunur. Bu sonuç bir çelişkidir. Bu nedenle $\zeta_0^* = 1$ olmalıdır. (Yani $\kappa_0 = \kappa_1$ dolayısıyla κ_0 , T 'nin bir sabit noktasıdır. Bu durumda $m, n \in \mathbb{N}$ için $\kappa_n \neq \kappa_m$ varsayımını yeniden ele alıyoruz. Şimdi, $\zeta_0^*(\kappa_n, \kappa_{n+2}) = p_n^*$ olarak tanımlansın. (26) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2}) &= \zeta^*(T\kappa_{n-1}, T\kappa_{n+1}) \\ &= \{\zeta^*(\kappa_{n-1}, T\kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+1}, T\kappa_{n-1})\}^{\gamma} \\ &= \{\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_{n+2}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_n)\}^{\gamma} \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_{n+2})\}^{s\gamma} \\ &\quad \times \{\zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_n)\}^{\gamma} \end{aligned}$$

olur.

$$\zeta_n^* = \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})$$

eşitliği kullanılarak işlemlere devam edildiğinde

$$\begin{aligned} \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2}) &= \{\zeta_{n-1}^*\}^{s\gamma} \cdot \{\zeta_{n+1}^*\}^{s\gamma} \cdot \{\zeta_n^*\}^{s\gamma} \\ &\leq \{\zeta_0^* \varphi^{n-1}\}^{s\gamma} \cdot \{\zeta_0^* \varphi^{n+1}\}^{s\gamma} \cdot \{\zeta_0^* \varphi^n\}^{s\gamma} \\ &= \{\zeta_0^{*s\gamma \varphi^{n-1}}\} \cdot \{\zeta_0^{*s\gamma \varphi^{n+1}}\} \cdot \{\zeta_0^{*s\gamma \varphi^n}\} \\ &= \{\zeta_0^{*s\gamma \varphi^{n-1} + s\gamma \varphi^{n+1} + s\gamma \varphi^n}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \zeta^*_{0}^{s\gamma\varphi^n\left(\frac{1}{\varphi}+\varphi+1\right)} \right\} \\
&= \left\{ \zeta^*_{0}^{s\gamma\varphi^n\left(\frac{1}{\varphi}+\varphi+1\right)} \right\} \\
&= \left\{ \zeta^*_{0}^{s\gamma\varphi^{n-1}(1+\varphi+\varphi^2)} \right\} \\
&= \left\{ \zeta^*_{0}^{\varphi^{n-1}.\lambda} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2}) = \left\{ \zeta^*_{0}^{\varphi^{n-1}.\lambda} \right\} \quad (29)$$

bulunur ve $\lambda = s\gamma(1 + \varphi + \varphi^2)$ dir. Şimdi, $\{\kappa_n\}$ dizisine göre $\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+q})$ nun tek ve çift olma durumunu ele alalım. $q = 2p + 1$ olduğunda (28) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2p+1}) &\leq \left\{ \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_{n+2}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_{n+2p+1}) \right\}^S \\
&\leq \left\{ \zeta^*_n \cdot \zeta^*_{n+1} \right\}^S \\
&\times \left\{ \zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_{n+3}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+3}, \kappa_{n+4}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+4}, \kappa_{n+2p+1}) \right\}^{S^2} \\
&\leq \left\{ \kappa_n \cdot \kappa_{(n+1)} \right\}^S \cdot \left\{ \kappa_{(n+2)} \cdot \kappa_{(n+3)} \right\}^{S^2} \\
&\times \left\{ \kappa_{(n+4)} \cdot \kappa_{(n+5)} \right\}^{S^3} \dots \left\{ \zeta^*_{(n+2p)} \right\}^{S^p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2p+1}) \\
&\leq \left\{ \zeta^*_{0}^{\varphi_n} \cdot \zeta^*_{0}^{\varphi_{n+1}} \right\}^S \cdot \left\{ \zeta^*_{0}^{\varphi_{n+2}} \cdot \zeta^*_{0}^{\varphi_{n+3}} \right\}^{S^2} \cdot \left\{ \zeta^*_{0}^{\varphi_{n+4}} \cdot \zeta^*_{0}^{\varphi_{n+5}} \right\}^{S^3} \dots \left\{ \zeta^*_{0}^{\varphi_{n+2p}} \right\}^{S^p} \\
&\leq \left\{ \zeta^*_{0}^{s\varphi^n} \cdot \zeta^*_{0}^{s\varphi^{n+1}} \cdot \zeta^*_{0}^{s^2\varphi^{n+2}} \cdot \zeta^*_{0}^{s^2\varphi^{n+3}} \dots \zeta^*_{0}^{s^p\varphi^{n+2p}} \right\} \\
&\leq \left\{ \zeta^*_{0}^{(s\varphi^n + s^2\varphi^{n+2} + \dots)} \cdot \zeta^*_{0}^{(s\varphi^{n+1} + s^2\varphi^{n+2} + \dots)} \right\} \\
&\leq \left\{ \zeta^*_{0}^{s\varphi^n(1+s\varphi^2+s^2\varphi^4+\dots)} \cdot \zeta^*_{0}^{s\varphi^{n+1}(1+s\varphi^2+s^2\varphi^4+\dots)} \right\} \\
&\leq \left\{ \zeta^*_{0}^{s\varphi^n(1+s\varphi^2+s^2\varphi^4+\dots)} \cdot \zeta^*_{0}^{s\varphi^{n+1}(1+s\varphi^2+s^2\varphi^4+\dots)} \right\} \\
&= \left\{ \zeta^*_{0}^{(s\varphi^n + s\varphi^{n+1})(1+s\varphi^2+s^2\varphi^4+\dots)} \right\} = \left\{ \zeta^*_{0}^{(s\varphi^n + s\varphi^{n+1})(1-s\varphi^2)^{-1}} \right\} \\
&= \left\{ \zeta^*_{0}^{\frac{(s\varphi^n + s\varphi^{n+1})}{1-s\varphi^2}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle,

$$\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2q+1}) \leq \left\{ \zeta_0^* \frac{(s\varphi^n + s\varphi^{n+1})}{1-s\varphi^2} \right\} \quad (30)$$

olur.

Şimdi $q = 2p$ olsun. (28) ve (29) kullanılarak

$$\begin{aligned} \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2p}) &\leq \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_{n+2}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_{n+2p})\}^S \\ &\leq \{\zeta_n^* \cdot \zeta_{n+1}^*\}^S \\ &\quad \times \{\zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_{n+3}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+3}, \kappa_{n+4}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+4}, \kappa_{n+2p})\}^{S^2} \\ &\leq \{\zeta_n^* \cdot \zeta_{n+1}^*\}^S \cdot \{\zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_{n+3})\}^{S^2} \\ &\quad \times \{\zeta^*(\kappa_{n+4}, \kappa_{n+5})\}^{S^3} \dots \{\zeta^*(2p-4, \kappa_{2p-3})\}^{S^{q-1}} \\ &\quad \times \{\zeta^*(\kappa_{n+2p-2}, \kappa_{n+2p})\}^{S^{p-1}} \end{aligned}$$

bulunur. Bu işlemlere devam edilirse

$$\begin{aligned} &\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2p}) \\ &\leq \left\{ \zeta_0^* s\varphi^n \cdot \zeta_0^* s\varphi^{n+1} \cdot \zeta_0^* s^2\varphi^{n+2} \cdot \zeta_0^* s^2\varphi^{n+3} \dots \zeta_0^* s^{p-1}\varphi^{2p-4} \cdot \zeta_0^* s^{p-1}\varphi^{2p-3} \cdot \zeta_0^* s^{p-1}\lambda\varphi^{n+2p-3} \right\} \\ &\leq \left\{ \zeta_0^* s\varphi^{n(1+s\varphi^2+s^2\varphi^4+\dots)} \cdot \zeta_0^* s\varphi^{n+1(1+s\varphi^2+s^2\varphi^4+\dots)} \cdot \zeta_0^* s^{p-1}\lambda\varphi^{n+2p-3} \right\} \\ &\leq \zeta_0^* s\varphi^{n\left(\frac{1+\varphi}{1-s\varphi^2}\right)} \cdot \zeta_0^* s^{p-1}\lambda\varphi^{n+2p-3} \leq \zeta_0^* s\varphi^{n\left(\frac{1+\varphi}{1-s\varphi^2}\right)} \cdot \zeta_0^* \lambda(s\varphi)^{2m}\varphi^{n-3} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+2p}) \leq \zeta_0^{s\varphi^{n\left(\frac{1+\varphi}{1-s\varphi^2}\right)}} \cdot \zeta_0^* \lambda\varphi^{n-3} \quad (31)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\varphi \leq \frac{1}{s}$ dir.

(30) ve (31)'den her $p > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+p}) \rightarrow 1$ olur. Böylece, $\{\kappa_n\}$ çarpımsal Cauchy dizisidir. (U, ζ^*) tam uzay olduğundan dolayı $\kappa_n \rightarrow \kappa$ olacak şekilde $\kappa \in U$ vardır. Şimdi T nin bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \zeta^*(\kappa, T\kappa) &\leq \{\zeta^*(\kappa, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+1}, T\kappa)\}^S \\ &= \{\zeta^*(\kappa, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(T\kappa_n, T\kappa)\}^S \end{aligned}$$

olur. (26) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \zeta^*(\kappa, T\kappa) \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot (\zeta^*(\kappa_n, T\kappa) \cdot \zeta^*(\kappa, T\kappa_n))^{\gamma}\}^s \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa, \kappa_n)\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, T\kappa) \cdot \zeta^*(\kappa, T\kappa_n)\}^{\gamma s} \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa, \kappa_n)\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa) \cdot \zeta^*(\kappa, \kappa) \cdot \zeta^*(\kappa, T\kappa)\}^{\gamma s^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa, \kappa_{n+1})\}^{\gamma s}
\end{aligned}$$

elde edilir. İşlemlere devam edilirse

$$\begin{aligned}
\zeta^*(\kappa, T\kappa)^{1-\gamma s^2} & \leq \{\zeta^*(\kappa, \kappa_n)\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa)\}^{\gamma s^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa, \kappa)\}^{\gamma s^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa, \kappa_{n+1})\}^{\gamma s} \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa, \kappa_n)\}^{s+\gamma s^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa, \kappa)\}^{\gamma s^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa, \kappa_{n+1})\}^{\gamma s} \\
& = \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa)\}^{s+\gamma s^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa, \kappa)\}^{\gamma s^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa, \kappa_{n+1})\}^{\gamma s} \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa)\}^{\frac{s+\gamma s^2}{1-\gamma s^2}} \cdot \{\zeta^*(\kappa, \kappa)\}^{\frac{\gamma s^2}{1-\gamma s^2}} \cdot \{\zeta^*(\kappa, \kappa_{n+1})\}^{\frac{\gamma s}{1-\gamma s^2}} \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^{\frac{s}{1-\gamma s^2}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $\zeta^*(\kappa, T\kappa) = 1$ yani $T\kappa = \kappa$ olur. Böylece κ , T 'nin bir sabit noktasıdır. Son olarak sabit noktanın tekliği için, T 'nin $\kappa \neq \kappa'$ olacak şekilde bir başka sabit noktasının olduğunu kabul edelim.

$$\zeta^*(\kappa, \kappa') \leq \zeta^*(T\kappa, T\kappa') \leq [\zeta^*(\kappa, T\kappa') \cdot \zeta^*(\kappa', T\kappa)]^{\gamma} = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $\zeta^*(\kappa', \kappa) = 1$, yani $\kappa' = \kappa$ olduğunu gösterir. Bu nedenle T 'nin tek bir sabit noktası mevcuttur.

Çarpımsal Dikdörtgen b -Metrik Uzayda Hardy-Rogers dönüşümünün sabit noktası

Teorem 32: (U, ζ^*, s) tam çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay ve $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. $r + 2p + 2sq < 1$, $sr + p(1 + s) + sq(1 + s) < 1$ ve $s \geq 1$ olmak üzere $\forall \kappa, v \in U$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq [\zeta^*(\kappa, v)]^r [\zeta^*(\kappa, T\kappa) \cdot \zeta^*(v, Tv)]^p [\zeta^*(\kappa, Tv) \cdot \zeta^*(v, T\kappa)]^q$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T 'nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat: κ_0 , U da keyfi bir nokta ve U 'da $\{\kappa_n\}$ dizisini

$$\kappa_n = T\kappa_{n-1} = \dots T^n \kappa_0$$

olarak alalım. Buradan

$$\begin{aligned}
& \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \zeta^*(T\kappa_{n-1}, T\kappa_n) \\
& \leq [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^r [\zeta^*(\kappa_{n-1}, T\kappa_{n-1}) \cdot \zeta^*(\kappa_n, T\kappa_n)]^p [\zeta^*(\kappa_{n-1}, T\kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, T\kappa_{n-1})]^q \\
& = [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^r [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^p [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_n)]^q \\
& = [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^r [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^p [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_{n+1}) \cdot 1]^q
\end{aligned}$$

olur. Çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzayın üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \\
& \leq [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^r [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^p [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^{sq} \\
& \leq [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^r [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^p \cdot [\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^p [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n) \cdot 1 \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^{sq} \\
& \leq [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^r [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^p \cdot [\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^p [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^{sq} [\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^{sq}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \leq [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^{r+p+sq} [\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^{p+sq}$$

yazılır. Buradan

$$[\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})]^{1-p-sq} \leq [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^{r+p+sq}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın $1/1 - p - sq$ kuvveti alınır

$$\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \leq [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^{\frac{r+p+sq}{1-p-sq}}$$

elde edilir. $\lambda = \frac{r+p+sq}{1-p-sq}$ olmak üzere

$$\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \leq [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^\lambda$$

dır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) & \leq [\zeta^*(\kappa_{n-1}, \kappa_n)]^\lambda \leq \{[\zeta^*(\kappa_{n-2}, \kappa_{n-1})]^\lambda\}^\lambda \\
& \leq [\zeta^*(\kappa_{n-2}, \kappa_{n-1})]^{\lambda^2}
\end{aligned}$$

olup bu işlem böyle devam ettirilirse

$$\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \leq [\zeta^*(\kappa_0, \kappa_1)]^{\lambda^n}$$

olur. Böylece her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned}
\zeta^*(\kappa_n, \kappa_m) & \leq \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_{n+1}, \kappa_{n+2})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_m)\}^s \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_{n+3}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+3}, \kappa_{n+4}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+4}, \kappa_m)\}^{s^2} \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_{n+2}, \kappa_{n+3})\}^{s^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa_{n+4}, \kappa_{n+5})\}^{s^3} \dots \{\zeta^*(\kappa_{m-1}, \kappa_m)\}^{s^{m-n}} \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa_0, \kappa_1)\}^{s\lambda^n} \cdot \{\zeta^*(\kappa_0, \kappa_1)\}^{s^2\lambda^{n+2}} \cdot \{\zeta^*(\kappa_0, \kappa_1)\}^{s^3\lambda^{n+4}} \dots \{\zeta^*(\kappa_0, \kappa_1)\}^{s^{m-n}\lambda^{m-1}} \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa_0, \kappa_1)\}^{s\lambda^n + s^2\lambda^{n+2} + s^3\lambda^{n+4} + \dots + s^{m-n}\lambda^{m-1}} \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa_0, \kappa_1)\}^{s\lambda^n(1+s\lambda^2+s^2\lambda^4+\dots+s^{m-n-1}\lambda^{m-n-1})} \\
& \leq \{\zeta^*(\kappa_0, \kappa_1)\}^{\frac{s\lambda^n}{1-s\lambda^2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $m, n \rightarrow \infty$ için limit alınır $\zeta^*(\kappa_n, \kappa_m) \rightarrow 1$ olur. Yani $\{\kappa_n\}$, b -çarpımsal dikdörtgen Cauchy dizisidir. U tam uzay olduğundan $\kappa_n \rightarrow \kappa^*$ olacak şekilde bir $\kappa^* \in U$ vardır. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*) &\leq \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa_{n+1}, T\kappa^*)\}^s \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(T\kappa_n, T\kappa^*)\}^s\end{aligned}$$

yazılır. Hardy-Rogers dönüşümünün özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*) &\leq \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa^*)\}^r \\ &\quad \times \{\zeta^*(\kappa_n, T\kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*)\}^p \{\zeta^*(\kappa_n, T\kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa^*, T\kappa_n)\}^q\}^s \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa^*)\}^{rs} \\ &\quad \times \{\zeta^*(\kappa_n, T\kappa_n) \cdot \zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*)\}^{ps} \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, T\kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa^*, T\kappa_n)\}^{qs} \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_n)\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa^*)\}^{rs} \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \cdot \zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*)\}^{ps} \\ &\quad \times \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa^*, \kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*)\}^{qs^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_{n+1})\}^{qs}\end{aligned}$$

bulunur. İşlemlere böyle devam edilirse

$$\begin{aligned}\zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*) &\leq \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_n)\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}^s \cdot \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa^*)\}^{rs} \\ &\quad \times \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa^*, \kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa^*, \kappa_{n+1})\}^{ps^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*)\}^{ps} \\ &\quad \times \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa^*, \kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*)\}^{qs^2} \cdot \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_{n+1})\}^{qs} \\ &= \{\zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*)\}^{(1-sp-s^2q)} \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa^*)\}^{(s+sr+s^2p+s^2q)} \cdot \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa^*)\}^{(s^2p+s^2q)} \cdot \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_{n+1})\}^{(s+s^2p+qs)} \\ &= \zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*) \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa_n, \kappa^*)\}^{\frac{(s+sr+s^2p+s^2q)}{(1-sp-s^2q)}} \cdot \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa^*)\}^{\frac{(s^2p+s^2q)}{(1-sp-s^2q)}} \cdot \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa_{n+1})\}^{\frac{(s+s^2p+qs)}{(1-sp-s^2q)}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $\zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*) \rightarrow 1$ olup $T\kappa^* = \kappa^*$ olur. Yani κ^* noktası T 'nin sabit noktasıdır.

Şimdi bu sabit noktanın tekliği için, T 'nin $\kappa^* \neq \kappa'$ olacak şekilde bir başka sabit noktasının olduğunu kabul edelim. O halde

$$\begin{aligned}\zeta^*(\kappa^*, \kappa') &= \zeta^*(T\kappa^*, T\kappa') \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa')\}^r \cdot \{\zeta^*(\kappa^*, T\kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa', T\kappa')\}^p \{\zeta^*(\kappa^*, T\kappa') \cdot \zeta^*(\kappa', T\kappa^*)\}^q \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa')\}^r \cdot \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa^*) \cdot \zeta^*(\kappa', \kappa')\}^p \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa') \cdot \zeta^*(\kappa', \kappa^*)\}^q \\ &\leq \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa')\}^r \cdot \{1\}^p \{\zeta^*(\kappa', \kappa^*)\}^{2q} \\ &= \{\zeta^*(\kappa^*, \kappa')\}^{1-2q-r} \leq 1\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\zeta^*(\kappa', \kappa^*) = 1$ olur. Yani $\kappa' = \kappa^*$ dır. Bu da T 'nin sabit noktasının tek olduğunu gösterir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Sonuç 1: (U, ζ^*) çarpımsal tam metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ ve $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \{\zeta^*(\kappa, Tv) \zeta^*(v, T\kappa)\}^\beta$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümünün tek bir sabit noktasının olduğu söylenir.

Sonuç 2: (U, ζ^*) tam çarpımsal bir metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U$ ve $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ için

1. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \zeta^*(\kappa, v)^\alpha$
2. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \{\zeta^*(\kappa, T\kappa) \zeta^*(v, Tv)\}^\beta$
3. $\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \{\zeta^*(\kappa, Tv) \zeta^*(v, T\kappa)\}^\gamma$

şartlarından en az birinin sağlanması durumunda T dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğu söylenir.

Sonuç 3: (U, ζ^*, s) tam çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U, \gamma s < \frac{1}{2}, \gamma s(1+s) < 1, s \geq 1$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \{\zeta^*(\kappa, Tv) \zeta^*(v, T\kappa)\}^\gamma$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğu söylenir.

Sonuç 4: (U, ζ^*, s) tam çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U, r + 2p + 2sq < 1, sr + p(1+s) + sq(1+s) < 1, s \geq 1$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \{\zeta^*(\kappa, v)\}^r \{\zeta^*(\kappa, T\kappa) \zeta^*(v, Tv)\}^p \{\zeta^*(\kappa, Tv) \zeta^*(v, T\kappa)\}^q$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğu söylenir.

Yukardaki sonuçlardan hareketle aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarının tekliği söylenebilir.

Sonuç 5: (U, ζ^*, s) bir tam çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U, r + 2p < 1, 0 < p < 1, s(r+p) + p < 1, s \geq 1$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \{\zeta^*(\kappa, v)\}^r \{\zeta^*(\kappa, T\kappa) \zeta^*(v, Tv)\}^p$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T 'nin tek bir sabit noktası vardır.

Sonuç 6: (U, ζ^*, s) bir tam çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay, $T: U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall \kappa, v \in U, p + sq < \frac{1}{2}, p(1 + s) + sq(1 + s) < 1, s \geq 1$ için

$$\zeta^*(T\kappa, Tv) \leq \{\zeta^*(\kappa, T\kappa) \zeta^*(v, Tv)\}^p \{\zeta^*(\kappa, Tv) \zeta^*(v, T\kappa)\}^q$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümünün tek bir sabit noktasının olduğu söylenir.

Bulgular kısmında ispatladığımız teoremlerden ve yukarıda verdiğimiz sonuçlardan hareketle araştırmacılara aşağıdaki öneriler tavsiye edilebilir.

1-Bulgular kısmında tek bir dönüşüm için elde edilen temel sonuçlar iki dönüşüm için (değişmeli dönüşümler, zayıf değişmeli dönüşümler) incelenebilir.

2-Çok değerli çarpımsal dönüşümler için farklı metrik uzaylardaki teoremler incelenebilir.

3-Konveks çarpımsal dikdörtgen b -metrik uzay kavramı tanımlanıp Picard iterasyonundan farklı iterasyon metodlarında farklı çarpımsal dönüşümlerin sabit noktalarına uygun şartlar altında yakınsayabileceği araştırılabilir.

KAYNAKÇA

- Agarwal, R. P., Meehan, M. and O'Regan, D., 2001. Fixed Point Theory and in partially Applications, Cambridge University Press.
- Agarwal, R. P., El Gebeily, M. A. ve O'Regan, D., 2008. Generalized contractions in partions in partially ordered metric spaces. *Applicable Analysis*, 87, 109–116.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D.R., 2009. Fixed point theory for Lipschitziantype mappings with applications, doi 10.1007/978-0-387-75818-3.
- Agarwal, R. P., Karapinar, E., Samet, B., 2016. An essential remark on fixed point results on multiplicative metric spaces. *Fixed Point Theory Appl.* 21.
- Ali, M.U., Kamaran, T., 2017. A. Kurdi, Fixed point theorems in b-multiplicative metric spaces, *U.P. B Sci. Bull.,series A*, 79(3), 107-116.
- Aydi, H., Karapinar, E. and Lakzian, H., 2012. Fixed point results on a class of generalized metric spaces, *J. Math. Sci.* 1, 6-46.
- Bashirov, A. E., Kurpinar, E. M. ve Ozyapıcı, A., 2008. Multiplicative calculus and its applications, *J. Math. Anal. App.*, 337, 36–48.
- Bashirov, A. E. ve Rıza, M., 2011. On complex multiplicative differentiation. *TWMS J. App. Eng. Math.*, 1, 75–85.
- Bashirov, A. E. ve Norozpour, S., 2017. On complex multiplicative integration. *TWMS J. App. Eng. Math.*, 7, 82–93.
- Bashirov, A. E., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. ve Özyapıcı, A., 2011. On modeling with multiplicative differential equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 26, 425–438.
- Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, *Lecture Notes in Mathematics*.
- Berinde, V., 2007. A convergence theorem for Mann iteration in the class of Zamfirescu operators, *An. Univ. Vest Timi. Ser. Mat. Inform.*, 45, 33–41.
- Boyd, D. W. and Wong, J. S., 1969. On linear contractions. *Proc. Am. Math. Soc.* 20, 458- 464.
- Branciari, A., 2000. A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces, *Publ. Math. Debrecen.* (57) 31-37.
- Chatterjea, S. K., 1972. Fixed point theorems. *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 25, 727-730.
- Clement B.A., 2016. Higher order Banach Contraction Principle in Rectangular Multiplicative b-Metric space, *Communicated*.
- Dhage, B. C., 1999. On common fixed points of pairs of coincidentally commuting mappings in D-metric spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* 30(4), 395–406.
- Dharsini, A.M.P., Prakasam, A.L.M. and Pritha, A.J.S., 2020. Fixed point theorem in multiplicative rectangular b- metric space, *Malaya Journal of Matematik*, Vol. S, No. 1, 348-350.
- Došenović, T., Postolache, M. and Radenović, S., 2016. On multiplicative metric spaces: Survey, *Fixed Point Theory Appl.*, 2016:92.
- Florack, L. ve van Assen, H., 2012. Multiplicative calculus in biomedical image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42(1), 64–75.
- F. Gu L. M. Cui, and Y. H. Wu, Some fixed point theorems for new contractive type mappings. *J. Qiqihar Univ.* 19, 85–89 (2003)
- Hardy, G. E. and Rogers, T. D., 1973. “A generalization of a fixed point theorem of Reich,”*Canadian Mathematical Bulletin*,vol.16,pp. 201–206.
- He, X., Song, M. ve Chen, D., 2014. Common fixed points for weak commutative mappings on a multiplicative metric spaces. *Fixed Point Theory Appl.* 2014 (2014),

doi:10.1186/1687-1812-2014-48, 9 pages.

- I.A. Bakhtin, The contraction mapping principle in almost metric spaces, *Funct. Anal. Unianowsk, Gos. Ped. Inst.* 30 (1989), 26-37.
- Kannan, R., 1968. Some results on fixed points. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 60, 71-76.
- K. P. R. Sastry, G. A. Naidu, K. K. M, Sharma, I. Laxmi Gayatri, Common fixed point for compatible mappings on 2-metric spaces. *Glob. J. Math. Sci., Theory Pract.* 2(3), 173–179 (2010)
- Maddox, I. J., 1970. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Meir, A. and Keeler, E., 1969. A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 28, 326-329.
- Naraghirad, E., Wong, N.C. and Yao, J.C., 2013. Approximating fixed points of α -nonexpansive mappings in uniformly convex banach spaces and CAT(0) spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, 57.
- Özavşar, M. and Çevikel, A. C., 2017. Fixed points of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces. *Journal of Engineering Tecnology and Applied Sciens* 2(2), 65-79
- Özavsar, M. and Cevikel, A. C., 2012. Fixed point of multiplicative contraction mappings on multi plicative metric space. arXiv:1205.5131v1 [matn.GN].
- Picard, E. (Charles), 1890. *Jour. de Math.*, (4) 6, 145-210.
- S. Czerwick, Contraction Mappings in b-Metric Spaces, *Acta Math. Inf. Univ. Ostraviensis*, 1 (1993), 5-11.
- Sarwar, M., 2014. Badshah-e-Rome: Some unique fixed point theorems in multiplicative metric space. arXiv:1410.3384v2 [math.GM]
- Shanjit, L., Rohen, Y. ve Murthy, P. P., 2016. Some fixed point theorems of r-weakly commuting mappings in multiplicative metric spaces. *Gazi University Journal of Science*, 29(4), 855–867.
- Shukla, S., Altun, I. and Sen, R., 2013. Fixed point theorems and asymptotically regular mappings in partial metric spaces. *International Scholarly Research Notices*.
- Shukla, S., 2016. Some Critical remark on multiplicative metric spaces and fixed point results, *J. Adv. Math. Stud.* 9 (3), 454-458.
- Shoaib, A., Saleemullah, M., 2020. Some fixed point theorems in b-multiplicative metric space, *J. Appl. Eng. Math.* 10 (4), 846-856.
- Singxi, S. L., Tiwari, B. M. L. and Gupta, V. K., 1980. Common fixed points of commuting mappings in 2-metric spaces and an application, *Math. Nachr.* 96, 293-297.
- Song, Y., Promluang, K., Kumam, P. and Cho, Y. J., 2016. Fixed point theorems and iterative approximations for monotone nonexpansive mappings in ordered Banch spaces, *Fixed Point Theorem Appl.*, 73.
- Stanley, D., 1999. A multiplicative calculus. *PRIMUS IX*(4), 310-326.
- Suzuki, T., 2009. Subrahmanyams fixed point theorem, *Nonlinear Analysis*, 71.1678–1683
- Suzuki, T., 2008. A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 136, no. 5, pp. 1861-1869.
- Uzer, A., Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus. *Comput. Match. Appl.* 60 (2010), 2725-2737.
- Xu , H.K., 1991. Inequality in Banach spaces with applications, *Nonlinear Anal.*, 16 (1991) 1127–1138.
- Yildirim, I., 2010. ‘New approach methods for common fixed points of asymptotically nonexpansive mappings.’ *Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 1-35.
- Zamfirescu, T., 1972. Fix point theorems in metric spaces, *Archiv der Mathematik*,

Volume 23, Issue 1, pp 292-298.

- Z. Mustafa, B. Sims, Some remarks concerning D-metric spaces. Proceedings of International Conference on Fixed Point Theory and Applications, Yokoham Publishers, Valencia Spain, July 13-19, (2004), 189198. MR 2140217
- Z. Mustafa, Z, B. Sims, A new approach to a generalized metric spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 7(2) (2006), 289297. MR2254125 (2007f:54049)



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Fatih Avşar
Eğitim	
Lise:	Ardahan Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans:	Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Yüksek Lisans:	Atatürk Üniversitesi
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Orta
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	