

ALTIN-HESSİAN YAPILAR

Çağrı KARAMAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Aydın GEZER
2013
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALTIN-HESSİAN YAPILAR

Çağrı KARAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ERZURUM
2013**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

ALTIN-HESSİAN YAPILAR

Doç. Dr. Aydın GEZER danışmanlığında, Çağrı KARAMAN tarafından hazırlanan bu çalışma 18/01/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği (3/3) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Aydın GEZER

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN

İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirilerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ALTIN-HESSİAN YAPILAR

Çağrı KARAMAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın GEZER

Bu tezde, ilk olarak bölgesel ayrıştırılabilir Riemannian manifoldu üzerinde bölgesel ayrıştırılabilir Altın-Hessian yapısı oluşturulmuştur. Daha sonra ise holomorfik Norden manifoldları üzerinde holomorfik Altın-Norden-Hessian yapısı oluşturulmuştur.

2013, 40 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ayrıştırılabilir ve holomorfik tensör, Altın yapı, Hessian metrik, pür tensör.

ABSTRACT

Master Thesis

GOLDEN-HESSIAN STRUCTURES

Çağrı KARAMAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın GEZER

The aim of the thesis is two-fold. Firstly, to construct a locally decomposable Golden-Hessian structure on locally decomposable Riemannian manifolds. Finally, to construct a holomorphic Golden-Norden-Hessian structure on holomorphic Norden manifolds.

2013, 40 pages

Keywords: Decomposable and holomorphic tensors, Golden structure, Hessian metric, pure tensor.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER'e en içten dileklerle saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Murat İŞCAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Çağrı KARAMAN

Ocak - 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Hessian Manifold	3
2.2. Hessian Manifold Örnekleri	9
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	20
3.1. Tachibana Operatörü	22
3.1.1. 1-form'a uygulanan $\phi\phi$ –operatörü	23
3.1.2. $0, s, s \geq 2$, tipli tensör alanına uygulanan $\phi\phi$ –operatörü.....	24
3.2. Altın Manifoldlar.....	26
3.2.1. Altın Manifoldların İntegrallenebilirliği	27
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	31
4.1. Bölgesel Ayrıştırılabilir Altın-Hessian Manifoldlar.....	31
4.2. Holomorfik Altın-Norden-Hessian Manifoldlar	33
5. SONUÇ	39
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	41

SİMGELER DİZİNİ

I	Birim Afinor Alanı
$\bar{\nabla}$	Burulmasız Riemannian-Hessian Konneksiyonu
∇	Burulmasız Riemannian Konneksiyonu
Γ_{ij}^k	$\mathbf{g}$ nin Cristoffel Sembolü
R_{ijk}^m	$\mathbf{g}$ nin Eğrilik Tensörü
$\bar{\Gamma}_{ij}^k$	$\mathbf{h}$ nin Cristoffel Sembolü
g	Pseudo-Riemannian Metriği
h	Pseudo-Riemannian-Hessian Metriği
$\overset{c}{\otimes}$	Pür Çarpım
ϕ_ϕ	Tachibana Operatörü
L_X	$\mathbf{X}$ Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	$\mathbf{X}$ Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev

1. GİRİŞ

Altın oran teorisi matematiğin modern dallarından birisidir (Hoggat 1969). Bir doğru parçasının (AB) Altın Oran'a uygun biçimde iki parçaya bölünmesi gerektiğinde, bu doğru öyle bir noktadan (C) bölünmelidir ki; küçük parçanın (AC) büyük parçaya (CB) oranı, büyük parçanın (CB) bütün parçaya (AB) oranına eşit olsun.

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AB}{CB}$$

Bu problem Euclidean Elementleri 'nden ortaya çıkmıştır. Modern bilimde bu problem altın oran problemi olarak bilinir. Altın oran probleminin çözümü $x^2 = x + 1$ cebirsel denkleminin çözümüdür. Bu eşitliğin kökü olan altın oran

$$\mu = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \dots$$

sayısı matematikte, biyolojide, mimarlıkta, doğada ve bir çok alanda uygulaması olan irrasyonel bir sayıdır. Son birkaç yıl içerisinde altın oran modern fiziksel araştırmalarda ve atom fiziğinde önemli rol oynamıştır (Heyrovska 2005). Altın oran aynı zamanda matematiksel olasılık teorisinde, dört boyutlu manifoldların topolojisinde ve Cantorian Uzay zamanı problemlerinde kullanılmıştır (Marek-Crnjac 2006).

Altın oran ve uygulamaları hızlı bir şekilde gelişmektedir. Bu bağlamda, diferensiyel geometride altın oran uygulaması üzerine yapılan çalışmalar büyük bir ilgi çekmiştir. Altın yapı olarak adlandırılan bir Riemannian manifoldu üzerindeki yeni bir yapı Crasmareanu and Hretcanu (2008) tarafından oluşturulmuştur. Bu yapı altın orandan esinlenerek yapılmıştır.

Riemaniann-Hessian yapıları ünlü bilim adamları tarafından yoğun olarak çalışılmıştır. Riemaniann-Hessian yapılar, afin diferensiyel geometri ve homojen uzaylar gibi önemli pür matematik alanları ile bağlantılı olmasının yanısıra, statik teoride, modelleme ve optimizasyon sistemlerinde ve ekonomik teoride uygulamaları bulunmaktadır. Riemaniann-Hessian yapılar üzerinde yapılan son derleme çalışmalar, Duistermaat (2001), Shima and Yagi (1997) tarafından yapılmıştır. Shima and Yagi (1997) $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ şeklindeki Riemaniann-Hessian metriği ile verilen $\mathbb{R}^n$ Euclidean uzayında çalışmışlardır. Burada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty$ sınıfından bir fonksiyondur.

Udrişte and Bercu (2005) pseudo Riemann-Hessian metriğini kullanmışlardır. n -boyutlu (M_n, g) pseudo Riemann manifoldu ve Hessian'ı regüler, diferensiyellenebilir f fonksiyonu verildiğinde, Udrişte and Bercu (2005), $h = \nabla^2 f$ ile bağlantılı M_n de pseudo Riemann-Hessian metriğini tanımladılar ve bu yeni (M_n, h) pseudo Riemann-Hessian manifoldunun özelliklerini araştırdılar. Burada ∇ , g nin Levi-Civita konneksiyonudur.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Hessian Manifold

(M_n, g) , g metrik tensörüne sahip Riemannian manifold olsun. $f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ fonksiyonunun gradienti olan $gradf$, aşağıdaki şekildedir:

$$gradf = (g^{ij}\partial_i f)\partial_j$$

Koordinat sistemine göre

$$g(gradf, X) = (g^{ij}\partial_i f)X^k g_{jk} = Xf = (df)X$$

yazılır.

$f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ fonksiyonunun Hessianı, g nin Levi-Civita konneksiyonuna göre

$$h = \nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$$

şeklindeki ikinci mertebeden kovaryant türevidir. Yani $h \in \mathfrak{F}_2^0(M_n)$ tensör alanıdır.

$\nabla_Y f = Yf = (df)Y$ olduğundan

$$\begin{aligned} h(Y, X) &= (\nabla(\nabla f))(Y, X) = (\nabla(df))(Y, X) \\ &= X((df)(Y)) - (df)(\nabla_X Y) = XYf - (\nabla_X Y)f \end{aligned}$$

olup, h nin simetrik tensör alanı olduğunu görülür. Ayrıca,

$$g(\nabla_x(\text{grad}f), Y) = h(Y, X)$$

yazılabilir.

Tanım 2.1.1: (M_n, g) Riemannian manifoldu üzerindeki $f: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise bu durumda Hessian $h = \nabla^2 f$, M_n üzerinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe pseudo-Riemannian Hessian metriği ve $(M_n, h = \nabla^2 f)$ ikilisine de pseudo-Riemannian Hessian manifoldu denir (Udriște and Bercu 2005).

Tanım 2.1.2: Riemannian Hessian manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}h = 0$ şartını sağlayan $\bar{\nabla}$ burulmasız afin konneksiyona Riemannian Hessian konneksiyonu denir. O halde $(M_n, h, \bar{\nabla})$ üçlüsü Riemannian Hessian uzayını oluşturur.

Teorem 2.1.1: Γ_{ij}^p , Christoffel sembolleri ve R_{ijk}^m , g Riemannian metriği tarafından üretilmiş eğrilik tensör alanlarının bileşenleri olsun. h^{pk} , h pseudo-Riemannian Hessian metriğinin kontravaryant bileşenleri ise, o zaman $(M_n, h, \bar{\nabla})$ uzayının $\bar{\nabla}$ Riemannian Hessian konneksiyonunun katsayıları,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2}h^{pk}[(\nabla_k \nabla_i \nabla_j f) - (R_{ikj}^m + R_{jki}^m)\nabla_m f]$$

formülü ile verilir (Udriște and Bercu 2005).

İspat: Eğer $f: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise, bu fonksiyona iki kez kovaryant türev uygulanmış hali,

$$\nabla^2 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^m \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) dx^i \otimes dx^j$$

şeklinde gösterilir. Burada

$$\nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_{,i}$$

gösterimi kabul edilirse,

$$\begin{aligned}\nabla_i \nabla_j f &= h_{ij} = f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^m f_{,m} \\ \nabla_k \nabla_i \nabla_j f &= f_{,ijk} = \frac{\partial f_{,ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^m f_{,mj} - \Gamma_{kj}^m f_{,im}\end{aligned}\quad (2.1)$$

ifadeleri yazılabilir. O zaman Teorem $h_{pk} = f_{,pk}$ ve $h^{pk} = f^{,pk}$ olmak üzere,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2} f^{,pk} [f_{,ijk} - (R_{ikj}{}^m + R_{jki}{}^m) f_{,m}]$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi ispat için,

$$2h_{sk}\bar{\Gamma}_{ij}^s = \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \quad (2.2)$$

eşitliğinde h_{ij} değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} f_{,m} - \Gamma_{ij}^m \frac{\partial f_{,m}}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} f_{,m} - \Gamma_{ij}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^m} \right) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} f_{,m} - \Gamma_{ij}^m (h_{km} + \Gamma_{km}^l f_{,l})\end{aligned}$$

olup

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} f_{,m} - \Gamma_{ij}^m h_{km} - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l f_{,l} \quad (2.3)$$

eşitliği elde edilir. Benzer olarak h_{jk} ve h_{ik} (2.2) dekleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} 2h_{sk} \bar{\Gamma}_{ij}^s &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^j \partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i} f_{,m} - \Gamma_{jk}^m h_{im} - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l f_{,l} \\ &+ \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} f_{,m} - \Gamma_{ik}^m h_{jm} - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l f_{,l} \\ &- \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} f_{,m} + \Gamma_{ij}^m h_{km} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l f_{,l} \end{aligned} \quad (2.4)$$

eşitliği elde edilir. Burada (2.1) denkleminde,

$$\begin{aligned} f_{,ijk} &= \frac{\partial f_{,ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^m f_{,mj} - \Gamma_{kj}^m f_{,im} \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} f_{,m} - \Gamma_{ij}^m h_{km} - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l f_{,l} - \Gamma_{ki}^m f_{,mj} - \Gamma_{kj}^m f_{,im} \end{aligned}$$

şeklinde olup

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} = f_{,ijk} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} f_{,m} + \Gamma_{ij}^m h_{km} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l f_{,l} + \Gamma_{ki}^m f_{,mj} + \Gamma_{kj}^m f_{,im} \quad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) denklemini (2.4) denkleminde yerine yazılırsa ve $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ olup

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^j \partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}$$

eşitliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
2h_{sk}\bar{\Gamma}_{ij}^s &= f_{,ijk} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} f_{,m} + \Gamma_{ij}^m h_{km} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l f_{,l} + \Gamma_{ki}^m h_{mj} \\
&+ \Gamma_{kj}^m h_{im} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i} f_{,m} - \Gamma_{jk}^m h_{im} - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l f_{,l} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} f_{,m} \\
&- \Gamma_{ik}^m h_{jm} - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l f_{,l} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} f_{,m} + \Gamma_{ij}^m h_{km} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l f_{,l}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
2h_{sk}\bar{\Gamma}_{ij}^s &= f_{,ijk} + 2\Gamma_{ij}^m h_{km} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^m - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{kj}^m + \Gamma_{kl}^m \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{il}^m \Gamma_{kj}^l \right) f_{,m} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ji}^m - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ki}^m + \Gamma_{kl}^m \Gamma_{ji}^l - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{ki}^l \right) f_{,m}
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$2h_{sk}\bar{\Gamma}_{ij}^s = f_{,ijk} + 2\Gamma_{ij}^m h_{km} + (R_{kij}^m + R_{kji}^m) f_{,m}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı h^{kp} ile kontraksiyona alınır ve eğrilik tensörünün $R_{ijk}^m = -R_{jik}^m$ özelliği kullanılırsa,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \frac{1}{2} h^{kp} (f_{,ijk} + 2\Gamma_{ij}^m h_{km} - (R_{ikj}^m + R_{jki}^m) f_{,m})$$

eşitliği elde edilir. Son olarak $2\Gamma_{ij}^m h_{km}$ ifadesi parantez dışına alınır,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2} h^{kp} [f_{,ijk} - (R_{ikj}^m + R_{jki}^m) f_{,m}]$$

veya

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2} f^{,pk} [f_{,ijk} - (R_{ikj}{}^m + R_{jki}{}^m) f_{,m}]$$

ifadesi elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.1.1: $(M_n, h = \nabla^2 f)$ manifoldu üzerinde alınan $f: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için $\bar{\nabla}^2 f$ Hessian'ı,

$$k_{ij} = (\bar{\nabla}^2 f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \bar{\Gamma}_{ij}^p \frac{\partial f}{\partial x^p}$$

şeklinde olur. Burada $\bar{\Gamma}_{ij}^p$ değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ \Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2} f^{,pk} [f_{,ijk} - (R_{ikj}{}^m + R_{jki}{}^m) f_{,m}] \right\} f_{,p} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^p f_{,p} - \frac{1}{2} f^{,pk} [f_{,ijk} - (R_{ikj}{}^m + R_{jki}{}^m) f_{,m}] f_{,p} \end{aligned}$$

olup buradan da

$$k_{ij} = h_{ij} - \frac{1}{2} f^{,pk} [f_{,ijk} - (R_{ikj}{}^m + R_{jki}{}^m) f_{,m}] f_{,p} \quad (2.6)$$

eşitliği elde edilir (Udriște and Bercu 2005). Bu ise $k = \bar{\nabla}^2 f$ şeklinde yeni bir metriktir ve $(M_n, k = \bar{\nabla}^2 f)$ yeni bir Riemannian Hessian manifoldu olur.

Sonuç 2.1.2: (2.6) eşitliğinde $k_{ij} = h_{ij}$ alınır,

$$f_{,ijk} - (R_{ikj}{}^m + R_{jki}{}^m) f_{,m} = 0 \quad (2.7)$$

olur. Burada manifold $(M_n, g) = (\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$ alınırsa $\Gamma_{ij}^p = 0$ olduğundan ve uzayın flat olmasından dolayı $R_{ijk}^m = 0$ olup (2.7) eşitliğinden,

$$f_{,ijk} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} = 0 \quad (2.8)$$

elde edilir. (2.8) eşitliğinde integral alınırsa,

$$f(x) = a_{ij}x^i x^j + b_i x^i + c$$

fonksiyonu elde edilir (Udrişte and Bercu 2005).

Sonuç 2.1.3: M_n Riemannian manifoldu olsun. Eğer g Euclidean metriği ise konneksiyon katsayıları sıfır olup, yani $\Gamma_{ij}^p = 0$ olup Hessian metriği

$$h_{ij} = (\nabla^2 f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

şeklinde olur (Shima and Yagi 1997).

2.2. Hessian Manifold Örnekleri

Örnek 2.2.1: $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ şeklindeki Euclidean metriği ile verilen

$$M = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 > 0, \dots, x^n > 0\}$$

n -boyutlu reel afin uzayı olsun. Burada fonksiyon

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}, f(x^1, \dots, x^n) = -\ln x^1 - \dots - \ln x^n$$

olarak seçilirse,

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{-1}{x^i}$$

ve

$$h_{ij} = f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\delta_{ij}}{x^i x^j}$$

eşitlikleri elde edilir. O zaman Hessian metriği

$$\left((\nabla^2 f(x^1, \dots, x^n))_{ij} \right) = \left(\frac{\delta_{ij}}{x^i x^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x^1)^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{(x^n)^2} \end{pmatrix}, (i, j = 1, \dots, n)$$

şeklinde olup $x^1 > 0, \dots, x^n > 0$ olduğundan pozitif tanımlıdır. Böylece $(\mathbb{R}_+^n, \nabla^2 f)$ bir Hessian manifoldudur.

Burada $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ olduğundan $\Gamma_{ij}^p = 0$ ve uzayın flat olmasından dolayı $R_{ijk}{}^l = 0$ olup, $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun katsayıları,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2} h^{kp} [f_{,ijk} - (R_{ikj}{}^m + R_{jki}{}^m) f_{,m}]$$

denklemine göre

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \frac{1}{2} h^{pk} \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} \quad (2.9)$$

şeklinde olur. Burada

$$\begin{aligned}
h_{ij}h^{ij} = \delta_i^i = n &\Rightarrow \frac{\delta_{ij}}{x^i x^j} h^{ij} = n \Rightarrow \delta_{ij} h^{ij} = n x^i x^j \\
&\Rightarrow \delta^{ij} \delta_{ij} h^{ij} = n \delta^{ij} x^i x^j \Rightarrow h^{ij} = \delta^{ij} x^i x^j
\end{aligned}$$

olup

$$h^{ij} = \delta^{ij} x^i x^j \quad (2.10)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca $i = j = k$, ($i = 1, \dots, n$) olduğunda,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} = \frac{-2}{(x^i)^3} \quad (2.11)$$

olur. En az iki indis birbirinden farklıysa (2.11) eşitliği sıfıra eşit olur. O zaman (2.10) ve (2.11) eşitliği (2.9) da yerine yazılırsa,

$$\bar{\Gamma}_{ii}^p = \frac{1}{2} \delta^{pi} x^p x^i \frac{-2}{(x^i)^3} \quad (2.12)$$

elde edilir. $p \neq i$ olduğunda $\bar{\Gamma}_{ij}^p = 0$ olur. Ama $p = i$ olursa, $i = j = k = p$ olup (2.12) denklemi

$$\bar{\Gamma}_{ii}^i = \frac{1}{2} (x^i)^2 \frac{-2}{(x^i)^3} = \frac{-1}{x^i}$$

şeklinde olur. O halde $\bar{\nabla}$ konneksiyon katsayıları $i = j = k = p$ için sıfırdan farklı diğer durumlar için sıfırdır.

Burada $(\mathbb{R}_+^n, h, \bar{\nabla})$ üçlüsü Riemannian Hessian Uzayını oluşturur. Gerçekten, $k \neq i$ veya $k \neq j$ için

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_k h_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x^k} h_{ij} - \bar{\Gamma}_{ki}^m h_{mj} - \bar{\Gamma}_{kj}^m h_{im} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^m f_{,m} \right) - \bar{\Gamma}_{ki}^m h_{mj} - \bar{\Gamma}_{kj}^m h_{im}
\end{aligned}$$

şeklinde olup $\bar{\nabla}_k h_{ij} = 0$ olur. Ayrıca $i = j = k = p$ için ise

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_k h_{ij} &= \frac{-2}{(x^i)^3} - \left(-\frac{1}{x^i} \frac{1}{(x^i)^2} \right) - \left(-\frac{1}{x^i} \frac{1}{(x^i)^2} \right) \\
&= \frac{-2}{(x^i)^3} + \frac{2}{(x^i)^3} = 0
\end{aligned}$$

olup tüm $i, j, k, p = 1, \dots, n$ için $\bar{\nabla}_k h_{ij} = 0$ ve $(\mathbb{R}_+^n, h, \bar{\nabla})$ Riemannian Hessian uzayıdır.

Ayrıca $(\mathbb{R}_+^n, h, \bar{\nabla})$ uzayının eğrilik tensörü sıfırdır. Yani flat afin uzay olur. Gerçekten,

$$\bar{R}_{ijk}{}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{\Gamma}_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{\Gamma}_{ik}^l + \bar{\Gamma}_{im}^l \bar{\Gamma}_{jk}^m - \bar{\Gamma}_{jm}^l \bar{\Gamma}_{ik}^m$$

olup $i = j = k = l = m$, $(i, j, k, l, m = 1, \dots, n)$ için

$$\bar{R}_{ijk}{}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{-1}{x^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{-1}{x^i} \right) + \frac{1}{(x^i)^2} - \frac{1}{(x^i)^2} = 0$$

olur.

$(\mathbb{R}_+^n, h = \nabla^2 f)$ manifoldu için, f fonksiyonunun iki kez kovaryant türevi alınır,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{-1}{x^i} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\delta_{ij}}{x^i x^j}$$

olup

$$(\bar{\nabla}^2 f)_{ij} = k_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

yazılır. $i \neq j$ için $k_{ij} = 0$ ve $i = j$ için,

$$k_{ij} = \frac{1}{(x^i)^2} - \left(\frac{-1}{x^i}\right) \left(\frac{-1}{x^i}\right) = 0$$

elde edilir. Yani tüm $i, j = 1, \dots, n$ için $k_{ij} = 0$ olur. Bu ise

$$\bar{\nabla}(\bar{\nabla}f) = 0$$

olur ki bu da $\bar{\nabla}f$ 1-formunun Riemannian-Hessian konneksiyonuna göre paralel taşınması anlamına gelir (Udrişte and Bercu 2005).

Örnek 2.2.2: $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ Euclidean metriği ile verilen $M = \mathbb{R}^n$ şeklindeki n -boyutlu reel afın uzayında fonsiyon

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}, f(x^1, \dots, x^n) = e^{x^1} + \dots + e^{x^n}$$

olarak seçilirse,

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} = e^{x^i}, \quad h_{ij} = f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \delta_{ij} e^{x^i}$$

elde edilir. O halde Hessian metriği

$$\left((\nabla^2 f(x^1, \dots, x^n))_{ij} \right) = (\delta_{ij} e^{x^i}) = \begin{pmatrix} e^{x^1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{x^n} \end{pmatrix}, (i, j = 1, \dots, n)$$

şeklinde olup pozitif tanımlıdır. Böylece $(\mathbb{R}^n, \nabla^2 f)$ bir Hessian manifoldu olur.

Burada $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ olduğundan $\Gamma_{ij}^p = 0$ ve uzayın flat olmasından dolayı $R_{ijk}{}^l = 0$ olup, $\bar{\nabla}_h$ konneksiyonunun katsayıları,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2} h^{kp} [f_{,ijk} - (R_{ikj}{}^m + R_{jki}{}^m) f_{,m}]$$

denklemine göre

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \frac{1}{2} h^{pk} \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} \quad (2.13)$$

şeklinde olur. Burada

$$\begin{aligned} h_{ij} h^{ij} = \delta_i^i = n &\Rightarrow \delta_{ij} e^{x^i} h^{ij} = n \Rightarrow \delta_{ij} h^{ij} = n e^{-x^i} \\ &\Rightarrow \delta^{ij} \delta_{ij} h^{ij} = n e^{-x^i} \Rightarrow h^{ij} = \delta^{ij} e^{-x^i} \end{aligned}$$

olup

$$h^{ij} = \delta^{ij} e^{-x^i} \quad (2.14)$$

olur ve $i = j = k$ için,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} = e^{x^i} \quad (2.15)$$

olur. En az iki indis birbirinden farklıysa (2.15) eşitliği sıfıra eşit olur. O halde (2.14) ve (2.15) eşitliği (2.13) te yerine yazılırsa,

$$\bar{\Gamma}_{ii}^p = \frac{1}{2} \delta^{pi} e^{-x^p} e^{x^i} \quad (2.16)$$

elde edilir. $p \neq i$ olduğunda $\bar{\Gamma}_{ij}^p = 0$ olur. Ama $p = i$ olursa, $i = j = k = p$ olup (2.16) denklemi

$$\bar{\Gamma}_{ii}^i = \frac{1}{2} e^{-x^i} e^{x^i} = \frac{1}{2}$$

şeklinde olur. O halde $\bar{\nabla}$ konneksiyon katsayıları $i = j = k = p$ için sıfırdan farklı ve $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}$, diğer durumlar için sıfırdır.

Burada

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k h_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x^k} h_{ij} - \bar{\Gamma}_{ki}^m h_{mj} - \bar{\Gamma}_{kj}^m h_{im} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^m f_{,m} \right) - \bar{\Gamma}_{ki}^m h_{mj} - \bar{\Gamma}_{kj}^m h_{im} \end{aligned}$$

şeklinde olup $\bar{\nabla}_k h_{ij} = 0$ olur. Ayrıca $i = j = k = p$ için ise

$$\bar{\nabla}_k h_{ij} = e^{x^i} - \frac{1}{2} e^{x^i} - \frac{1}{2} e^{x^i} = 0$$

olup tüm $i, j, k, p = 1, \dots, n$ için $\bar{\nabla}_k h_{ij} = 0$ ve $(\mathbb{R}_+^n, h, \bar{\nabla})$ Riemannian Hessian uzayıdır.

$(\mathbb{R}_+^n, h, \bar{\nabla})$ Riemannian Hessian uzayını flat afin uzaydır. Gerçekten,

$$\bar{R}_{ijk}{}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{\Gamma}_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{\Gamma}_{ik}^l + \bar{\Gamma}_{im}^l \bar{\Gamma}_{jk}^m - \bar{\Gamma}_{jm}^l \bar{\Gamma}_{ik}^m$$

olup $i = j = k = l = m$, $(i, j, k, l, m = \overline{1, n})$ için

$$\bar{R}_{ijk}{}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

olur (Udrişte and Bercu 2005).

Örnek 2.2.3: $M = \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$g(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 1 + 4(x^1)^2 & -2x^1 \\ -2x^1 & 1 \end{pmatrix}$$

metriği verilmiş olsun. Burada $(\mathbb{R}^2, g)$ Riemannian manifoldudur. Çünkü $g(x^1, x^2)$ metriği simetrik ve pozitif tanımlıdır. O halde konneksiyon katsayıları,

$$g^{-1}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2x^1 \\ 2x^1 & 1 + 4(x^1)^2 \end{pmatrix}$$

ve

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right]$$

olmak üzere, $i = j = k = 1$ için,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial x^1} g_{11} - \frac{\partial}{\partial x^1} g_{11} \right] + \frac{1}{2} g^{12} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} g_{12} + \frac{\partial}{\partial x^1} g_{12} - \frac{\partial}{\partial x^2} g_{11} \right] \\ &= \frac{1}{2} (8x^1) + \frac{1}{2} 2x^1 (-2 - 2) = 0 \end{aligned}$$

olur ve benzer şekilde,

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$$

olur. Son olarak, $i = j = 1$ ve $k = 2$ için,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} g^{21} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial x^1} g_{11} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{11} \right] + \frac{1}{2} g^{22} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} g_{12} + \frac{\partial}{\partial x^1} g_{12} - \frac{\partial}{\partial x^2} g_{11} \right] \\ &= \frac{1}{2} 2x^1 (8x^1) + \frac{1}{2} (1 + 4(x^1)^2) (-2 - 2) \\ &= -2 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca tüm $i, j, k, l = 1, 2$ için eğrilik tensörü $R_{ijk}{}^l = 0$ olacaktır.

Burada bütün konneksiyon katsayıları sıfır olmadığı için diferensiyellenebilir fonksiyon yardımıyla kovaryant türevle elde edilecek olan metrik sadece kısmi türevlerle ifade edilmeyecektir. Yani fonksiyon,

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x^1, x^2) = 100[x^2 - (x^1)^2]^2 + (1 - x^1)^2$$

şeklinde seçilirse, (Rosenbrock's Function)

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = 400(x^1)^3 + 2x^1 - 400x^1x^2 - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x^2} = 200[x^2 - (x^1)^2]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} = 1200(x^1)^2 - 400x^2 + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2} = 200$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} = -400x^1$$

eşitlikleri elde edilir. Burada,

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$$

olduğundan dolayı,

$$f_{,12} = h_{12} = -400x^1, \quad f_{,21} = h_{21} = -400x^1 \quad \text{ve} \quad f_{,22} = h_{22} = 200$$

olur. Ancak $\Gamma_{11}^2 = -2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f_{,11} = h_{11} &= \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} - \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) \\ &= 1200(x^1)^2 - 400x^2 + 2 - [(-2)200[x^2 - (x^1)^2]] \\ &= 800(x^1)^2 + 2 \end{aligned}$$

şeklinde olur. O halde Hessian metriğini,

$$\left(\left(\nabla_g^2 f(x^1, x^2) \right)_{ij} \right) = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 800(x^1)^1 + 2 & -400x^1 \\ -400x^1 & 200 \end{pmatrix}, (i, j = 1, 2)$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada $\det(h_{ij}) = 400$ olduğunda metrik pozitif tanımlıdır ve $(\mathbb{R}^2, \nabla^2 f)$ bir Riemannian Hessian manifoldudur. O halde konneksiyon katsayıları,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2} h^{kp} [f_{,ijk} - (R_{ikj}{}^m + R_{jki}{}^m) f_{,m}]$$

olmak üzere, $R_{ikj}{}^m = 0$ ve $f_{,ijk}$ için, $(i, j, k = 1, 2)$

$$\begin{aligned} f_{,111} &= \frac{\partial}{\partial x^1} h_{11} - (\Gamma_{11}^1 h_{11} + \Gamma_{11}^2 h_{12}) - (\Gamma_{11}^1 h_{11} + \Gamma_{11}^2 h_{12}) \\ &= 1600x^1 - 2(-2)(-400x^1) = 0 \end{aligned}$$

$$f_{,112} = \frac{\partial}{\partial x^2} h_{11} - \Gamma_{21}^l h_{l1} - \Gamma_{21}^l h_{l1} = 0$$

$$\begin{aligned} f_{,121} &= \frac{\partial}{\partial x^1} h_{12} - (\Gamma_{11}^1 h_{12} + \Gamma_{11}^2 h_{22}) - \Gamma_{12}^l h_{l1} \\ &= -400 - (-2)200 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{,211} &= \frac{\partial}{\partial x^1} h_{12} - \Gamma_{12}^l h_{l1} - (\Gamma_{11}^1 h_{12} + \Gamma_{11}^2 h_{22}) \\ &= -400 - (-2)200 = 0 \end{aligned}$$

$$f_{,221} = \frac{\partial}{\partial x^1} h_{22} - \Gamma_{12}^l h_{l2} - \Gamma_{12}^l h_{l2} = 0$$

$$f_{,212} = \frac{\partial}{\partial x^2} h_{21} - \Gamma_{22}^l h_{l1} - \Gamma_{21}^l h_{l2} = 0$$

$$f_{,122} = \frac{\partial}{\partial x^2} h_{12} - \Gamma_{21}^l h_{l2} - \Gamma_{22}^l h_{l1} = 0$$

$$f_{,222} = \frac{\partial}{\partial x^2} h_{22} - \Gamma_{22}^l h_{l2} - \Gamma_{22}^l h_{l2} = 0$$

olup,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^p = \Gamma_{ij}^p$$

elde edilir. Yani h metriği ile g metriğinin konneksiyon katsayılar aynı oldu. O halde $(\mathbb{R}^2, h = \nabla^2 f)$ manifoldunun eğrilik tensörü,

$$\bar{R}_{ijk} = 0$$

olacaktır.

$(\mathbb{R}^2, h = \nabla^2 f)$ manifoldunda f fonksiyonuyla tekrar metrik oluşturulursa,

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k$$

olup

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \\ &= h_{ij} \end{aligned}$$

olacaktır ki bu da üretilen her Hessian metriğin aynı olması demektir (Udriște and Bercu 2005)

3. MATERYAL ve YÖNTEM

M_n n -boyutlu C^∞ - sınıfından bir manifold olsun. M_n üzerindeki (r, s) tipli tüm C^∞ - sınıfından tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülü $\mathfrak{F}_s^r(M_n)$ ile gösterilir. Burada r , kontravaryant derecesi, s kovaryant derecesi ve $F(M_n)$ ise M_n üzerindeki C^∞ - sınıfından fonksiyonların cebiridir.

Tanım 3.1: $\varphi \in \mathfrak{F}_1^1(M_n)$, M_n üzerinde bir afinor alanı olsun, keyfi $X_1, X_2, \dots, X_s \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ ve $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r \in \mathfrak{F}_1^0(M_n)$ için aşağıdaki şartları sağlayan (r, s) tipli t tensör alanına φ ' ye göre pür tensör alanı denir.

$$\begin{aligned}
 t(\varphi X_1, X_2, \dots, X_s; \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) &= t(X_1, \varphi X_2, \dots, X_s; \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) \\
 &\vdots \\
 &= t(X_1, X_2, \dots, \varphi X_s; \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) \\
 &= t(X_1, X_2, \dots, X_s; {}'\varphi \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r) \\
 &= t(X_1, X_2, \dots, X_s; \xi^1, {}'\varphi \xi^2, \dots, \xi^r) \\
 &\vdots \\
 &= t(X_1, X_2, \dots, X_s; \xi^1, \xi^2, \dots, {}'\varphi \xi^r)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada $'\varphi, X \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ ve $\xi \in \mathfrak{F}_1^0(M_n)$ için,

$$({}'\varphi \xi)(X) = \xi(\varphi X) = (\xi \circ \varphi)(X)$$

ile tanımlanan φ ' nin eşlenik operatörüdür.

$x^1, x^2, \dots, x^n$; M_n de lokal koordinat sistemi olmak üzere, (3.1) de

$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, X_s = \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}$ ve $\xi^1 = dx^{j_1}, \dots, \xi^r = dx^{j_r}$ alındığında, pür tensör alanı φ_j^i ve $t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$ bileşenlerinin terimleriyle aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} t_{m i_2 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \varphi_{i_1}^m &= t_{i_1 m \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \varphi_{i_2}^m = \dots = t_{i_1 i_2 \dots m}^{j_1 \dots j_r} \varphi_{i_s}^m \\ &= t_{i_1 \dots i_s}^{m j_2 \dots j_r} \varphi_m^{j_1} = t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 m \dots j_r} \varphi_m^{j_2} = \dots = t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 j_2 \dots m} \varphi_m^{j_r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Vektör, kovektör ve skaler alanlar, pür tensör alanları olarak kabul edilir.

(3.1) den, eğer K ve L nin her ikisinde (r, s) tipli pür tensör alanı ise, burada $K + L$ ve fK ($f \in F(M)$) nında pür tensör alanı olduğu kolayca görülür. φ afinor alanına göre M_n üzerindeki tüm (r, s) tipli bütün pür tensör alanlarının modülü $\mathfrak{J}_s^r(M_n)$ ile gösterilir. λ pozitif tam sayı olsun. Eğer K ile L sırasıyla (p_1, q_1) ve (p_2, q_2) tipli pür tensör alanları ise, K ve L nin tensör çarpımı vasıtasıyla,

$$K \overset{C}{\otimes} L = (K_{j_1 \dots j_{q_1}}^{i_1 \dots m_\lambda \dots i_{p_1}} L_{s_1 \dots m_\lambda \dots s_{q_2}}^{r_1 \dots r_{p_2}})$$

şeklinde ve bu da bir pür tensör alanıdır. Kolaylık olması açısından, sadece $K \in \mathfrak{J}_1^1(M_n)$ ve $L \in \mathfrak{J}_2^0(M_n)$ olması durumunu ispatlamak yeterlidir. Gerçekten $X, Y \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ için,

$$(K \overset{C}{\otimes} L)(\varphi X, Y) = K(L(\varphi X, Y)) = K(L(X, \varphi Y)) = (K \overset{C}{\otimes} L)(X, \varphi Y)$$

olur.

$K \in \mathfrak{J}_{q_1}^{p_1}(M_n)$ ve $L \in \mathfrak{J}_{q_2}^{p_2}(M_n)$ nin pür çarpımı ($\overset{C}{\otimes}$ veya " $\circ$ " ile gösterilir.), $\mathbb{R}$ reel sayıları üzerindeki cebir üzerinde verilen $\mathfrak{J}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{J}_s^r(M_n)$ direk toplama işlemi,

$$\overset{C}{\otimes}: (K, L) \rightarrow (K \overset{C}{\otimes} L) = \begin{cases} K_{j_1 \dots j_{q_1}}^{i_1 \dots m_\lambda \dots i_{p_1}} L_{s_1 \dots m_\lambda \dots s_{q_2}}^{r_1 \dots r_{p_2}} & \lambda \leq p_1, q_1 \text{ (}\lambda \text{ sabit pozitif tamsayı)} \\ K_{j_1 \dots m_\mu \dots j_{q_1}}^{i_1 \dots i_{p_1}} L_{s_1 \dots s_{q_2}}^{r_1 \dots m_\mu \dots r_{p_2}} & \mu \leq p_1, q_1 \text{ (}\mu \text{ sabit pozitif tamsayı)} \\ 0 & p_1 = 0, p_2 = 0 \\ 0 & q_1 = 0, q_2 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

3.1. Tachibana Operatörü

Tanım 3.1.1: $\mathfrak{S}_s^r(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{S}_s^r(M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebiri ve $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan M_n üzerindeki $\phi_\varphi: \mathfrak{S}_s^r(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ dönüşümüne Tachibana operatörü veya ϕ_φ -operatörü denir (Salimov *et al.* 2008).

- a) ϕ_φ sabit katsayılarla göre lineerdir,
- b) Her (r, s) için, $\phi_\varphi: \mathfrak{S}_s^r(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_{s+1}^r(M_n)$,
- c) Her $K, L \in \mathfrak{S}^*(M_n)$ için, $\phi_\varphi(K \overset{C}{\otimes} L) = (\phi_\varphi K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} (\phi_\varphi K)$,
- d) Her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için, $\phi_{\varphi X} Y = -(L_Y \varphi) X$, (burada L_Y, Y ye göre Lie türevidir.)
- e) Her $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için,

$$\phi_{\varphi X}(\iota_Y \omega) = (d(\iota_Y \omega))(\varphi X) - (d(\iota_Y(\omega \circ \varphi)))(X) = (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X(\iota_Y \omega)$$

dir. Burada, $\iota_Y \omega = \omega(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$ dir.

Teorem 3.1.1: Tanım 3.1.1 den

$$\phi_{\varphi X} Y = [\varphi X, Y] - \varphi[X, Y]$$

elde edilir.

Her $f, g \in F(M_n)$ için,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

olduğundan $\phi_{\varphi X}Y$ nin, X de lineer olduğu fakat, Y de olmadığı görülür.

Buradan,

$$\begin{aligned}\phi_{\varphi(fX)}Y &= [f\varphi X, Y] - \varphi[fX, Y] \\ &= f[\varphi X, Y] - (Yf)\varphi X - \varphi(f[X, Y]) + \varphi(Yf)X \\ &= f([\varphi X, Y] - \varphi[X, Y]) \\ &= f\phi_{\varphi X}Y\end{aligned}$$

$$\phi_{\varphi X}(gY) = g(\phi_{\varphi X}Y) + ((\varphi X)g)Y - (Xg)\varphi Y$$

elde edilir. $\phi_{\varphi X}Y$ için sırasıyla $(\phi_{\varphi}Y)X$ yazacağız.

3.1.1. 1-form'a uygulanan ϕ_{φ} -operatörü

$\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ olsun. Tanım 3.1.1 i kullanarak, keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için,

$$\begin{aligned}(\phi_{\varphi}\omega)(X, Y) &= (\phi_{\varphi X}\omega)Y \\ &= \phi_{\varphi X}(\iota_Y\omega) - \omega(\phi_{\varphi X}Y) \\ &= (\varphi X)(\iota_Y\omega) - X(\iota_{\varphi Y}\omega) + \omega((L_Y\varphi)X) \\ &= (L_{\varphi X}\omega - L_X(\omega \circ \varphi))Y\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $\omega \circ \varphi$ 1-formu,

$$(\omega \circ \varphi)Y = (\varphi^* \omega)Y = (\omega \overset{C}{\otimes} \varphi)Y = \omega(\varphi Y)$$

şeklinde tanımlanır. $(\phi_\varphi \omega)(X, Y) = (L_{\varphi X} \omega - L_X(\omega \circ \varphi))Y$ eşitliğinden doğal çatıya göre,

$$(\phi_\varphi \omega)_{ij} = \varphi_i^m \partial_m \omega_j - \partial_i (\omega_m \varphi_j^m) + \omega_m \partial_j \varphi_i^m$$

bileşenlerine sahip olduğu görülür.

3.1.2. $(0, s)$, $s \geq 2$, tipli tensör alanına uygulanan ϕ_φ -operatörü

Teorem 3.1.3.1: $\omega \in \mathfrak{J}_s^0(M_n)$ olsun. Buradan,

$$\phi_{\varphi X}(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) = (\varphi X)(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - X(\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s))$$

dir.

İspat: $\omega_{Y_2, \dots, Y_s}$, $\omega_{Y_2, \dots, Y_s}(Y_1) = \omega(Y_1, \dots, Y_s)$ ile verilen 1-form olsun. Öyleki Tanım

3.1.1 in (e) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \phi_{\varphi X}(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) &= \phi_{\varphi X}(\omega_{Y_2, \dots, Y_s}(Y_1)) \\ &= (\varphi X)(\iota_{Y_1} \omega_{Y_2, \dots, Y_s}) - X(\iota_{\varphi Y_1} \omega_{Y_2, \dots, Y_s}) \\ &= (\varphi X)(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - X(\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s)) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\omega \in \mathfrak{J}_s^0(M_n)$, $s \geq 2$ için Teorem 3.1.3.1 göz önüne alındığında,

$$(\phi_\varphi \omega)(X, Y_1, \dots, Y_s) = \phi_{\varphi X}(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - \sum_{\lambda=1}^s (Y_1, \dots, \phi_{\varphi X} Y_\lambda, \dots, Y_s)$$

$$\begin{aligned}
&= (\varphi X)(\omega(Y_1, \dots, Y_s)) - X(\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s)) + \sum_{\lambda=1}^s \varphi(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda} \varphi)X, \dots, Y_s) \quad (3.3) \\
&= (L_{\varphi X} \omega - L_X(\omega \circ \varphi))(Y_1, \dots, Y_s)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $\omega \circ \varphi$ tensör alanı

$$\begin{aligned}
(\omega \circ \varphi)(Y_1, \dots, Y_s) &= \omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s) \\
&\vdots \\
&= \omega(Y_1, \dots, \varphi Y_s)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.3.1: $\omega \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ ve

$$\omega(\varphi X, Y) = \omega(X, \varphi Y)$$

olsun. Teorem 3.1.3.1, $\omega(\varphi X, Y) = \omega(X, \varphi Y)$ ve $\phi_{\varphi X} Y = -(L_Y \varphi)X$ olarak alındığında,

$$\begin{aligned}
(\phi_\varphi \omega)(X, Y, Z) &= \phi_{\varphi X}(\omega(Y, Z)) - \omega(\phi_{\varphi X} Y, Z) - \omega(Y, \phi_{\varphi X} Z) \\
&= (\varphi X)(\omega(Y, Z)) - X(\omega(\varphi Y, Z)) + \omega((L_Y \varphi)X, Z) + \omega(Y, (L_Z \varphi)X) \\
&= (L_{\varphi X} \omega - L_X(\omega \circ \varphi))(Y, Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $\omega \circ \varphi$ tensör alanı

$$(\omega \circ \varphi)(X, Y) = \omega(\varphi X, Y)$$

şeklindedir.

3.2. Altın Manifoldlar

Yano (1963) , M_n n -boyutlu C^∞ -manifold ve $f \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olmak üzere $f^3 + f = 0$ eşitliğini sağlayan f -yapıları kavramını tanımlamıştır. Daha sonra Goldberg and Yano (1970) bu kavramı genelleştirerek

$$Q(f) = f^d + a_d f^{d-1} + \dots + a_2 f + a_1 I = 0$$

eşitliğini sağlayan d dereceli polinomsal yapıyı tanımlamıştır. Burada $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ ve $I \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olup birim tensördür.

M_n , n -boyutlu C^∞ -manifold ve $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olsun. Eğer polinomsal $X^2 - X - 1 = 0$ yapısı $\varphi^2 - \varphi - I = 0$ eşitliğini sağlayan φ yapısı için minimal polinomsal ise, bu durumda φ , M_n üzerinde altın yapı olarak adlandırılır. Ayrıca (M_n, φ) ikilisine Altın (Golden) manifold denir. Bu yapı Johannes Kepler (1571-1630) tarafından tanımlanan Altın Oran'dan esinlenerek oluşturulmuştur. Bu sayı $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin çözümü olan $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \dots$ sayısıdır.

Tanım 3.2.1: Her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere (M_n, g)

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y) \quad (3.4)$$

olacak şekilde φ altın yapı ile bağlantılı Riemannian manifoldu olsun. (Hretcanu ve Crasmareanu 2009). Eğer (3.4) eşitliğinde X yerine φX yazılırsa (3.4) denklemini

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(\varphi^2 X, Y) = g((\varphi + I)X, Y) = g(\varphi X, Y) + g(X, Y)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada (3.4) ile tanımlanan Riemannian metriği φ ile uyumludur ve (M_n, φ, g) üçlüsüne Altın-Riemannian manifoldu denir. Böyle Riemannian metriklerden pür metrikler olarak da bahsedilebilir (Isan and Salimov 2009).

3.2.1. Altın Manifoldların İntegrallenebilirliği

Teorem 3.2.1.1: (M_n, φ, g) Altın-Riemannian manifoldu olsun. Bu durumda $\phi_\varphi g = 0$ ise φ integrallenebilirdir (Gezer *et al.* 2012).

Sonuç 3.2.1.1: (M_n, φ, g) Altın-Riemannian manifoldu olsun. $\phi_\varphi g = 0$ şartı $\nabla \varphi = 0$ şartına denktir. Burada ∇ , g nin Levi-Civita konneksiyonudur (Gezer *et al.* 2012).

Tanım 3.2.1.1: g pozitif tanımlı Riemannian metriğine sahip M_n manifoldu üzerinde her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$g(FX, Y) = g(X, FY)$$

ve

$$F^2 = I$$

olacak şekilde (1,1) tipli F tensör alanı alınır, bu F yapısına hemen hemen çarpım (product) yapı denir. (M_n, F, g) üçlüsüne hemen hemen çarpım Riemannian manifoldu denir.

Tanım 3.2.1.2: $t \in \mathfrak{S}_q^p(M_n)$ olmak üzere eğer t pür tensörü $\phi_\varphi t = 0$ eşitliğini sağlarsa t ye ϕ -tensör denir. Eğer (1,1) tipli φ tensörü kompleks bir yapı ise ϕ -tensörüne analitik tensör (holomorfik tensör) denir. Eğer φ çarpım yapı ise bu durumda ϕ -tensörüne ayrıştırılabilir tensör denir (Tachibana 1960).

Teorem 3.2.1.2: (Hretcanu and Crasmareanu 2009) Eğer φ , M_n üzerinde bir altın yapı ise bu durumda

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - I) \quad (3.5)$$

M_n üzerinde hemen hemen çarpım yapısıdır. Tersine M_n üzerinde her hemen hemen çarpım F yapısı aşağıdaki gibi verilen M_n üzerindeki iki altın yapıya indirgenebilir:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}F), \varphi_2 = \frac{1}{2}(I - \sqrt{5}F)$$

İspat: $F^2 = I$ yani $F, (M_n, g)$ Riemannian manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım yapı olsun. O zaman hemen hemen çarpım yapıdan elde edilen

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}F), \varphi_2 = \frac{1}{2}(I - \sqrt{5}F)$$

her iki yapı da altın yapıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 &= \frac{I + 2\sqrt{5}F + 5I}{4} = \frac{\sqrt{5}F + 3I}{2} = \frac{1}{2}(3I + \sqrt{5}\frac{2\varphi_1 - I}{\sqrt{5}}) \\ &= \frac{1}{2}(2I + 2\varphi_1) = \varphi_1 + I \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\varphi_2^2 - \varphi_2 - I = 0$ olduğuda gösterilebilir.

Tersine $\varphi, (M_n, g)$ Riemannian manifoldu üzerinde altın yapı olsun. O zaman altın yapı tarafından indirgenmiş $F = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - I)$ yapısı hemen hemen çarpım yapısıdır.

Gerçekten,

$$F^2 = \frac{4\varphi^2 - 4\varphi + I}{5} = \frac{4(\varphi^2 - \varphi) + I}{5} = \frac{5I}{5} = I$$

elde edilir.

Eğer bir g Riemannian metriği hemen hemen F çarpım yapısına göre pürse bu durumda g Riemannian metriği φ altın yapıya göre pürdür. Gerçekten,

$$g(FX, Y) = g(X, FY)$$

olup ve $F = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - I)$ eşitliğinden,

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - I)X, Y\right) = g\left(X, \frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - I)Y\right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}g(\varphi X, Y) - \frac{1}{\sqrt{5}}g(X, Y) = \frac{2}{\sqrt{5}}g(X, \varphi Y) - \frac{1}{\sqrt{5}}g(X, Y)$$

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

olduğu görülür.

Ayrıca basit bir hesaplama ile

$$\phi_F g = \frac{2}{\sqrt{5}}\phi_\varphi g \quad (3.6)$$

elde edilebilir. Gerçektende, $F = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - I)$ için

$$\begin{aligned} (\phi_F g)(X, Y, Z) &= (FX)(g(Y, Z) - X(g(FY, Z))) + g((L_Y F)X, Z) + g(Y, (L_Z F)X) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - I)X(g(Y, Z) - X(g(\frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - I)Y, Z))) \\ &\quad + g((L_Y(\frac{2}{\sqrt{5}}(2\varphi - I)X), Z) + g(Y, (L_Z(\frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - I)X))) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}[(\varphi X)(g(Y, Z) - X(g(\varphi Y, Z))) + g((L_Y \varphi)X, Z) \\ &\quad + g(Y, (L_Z \varphi)X)] \end{aligned}$$

olup (3.6) eşitliği elde edilir.

(M_n, F, g) , g pür metriği ile verilen hemen hemen çarpım Riemannian manifoldu olsun. Eğer $\phi_F g = 0$ ise bu durumda hemen hemen F çarpım yapısının integrallenebilir olduğu gösterilmiştir (Salimov *et al.* 2007). Böylece Teorem 3.2.1.1 den ve (3.6) eşitliğinden aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 3.2.1.1: (M_n, φ, g) Altın-Riemannian manifold ve F , φ ile bağlantılı hemen hemen çarpım yapı olsun. Eğer $\phi_F g = 0$ ise φ altın yapısı integrallenebilirdir (Gezer *et al.* 2012).

İntegallenebilir φ altın yapısıyla verilen (M_n, φ, g) Altın-Riemannian manifolduna bölgesel Altın-Riemannian manifoldu denir. Eğer bölgesel Altın-Riemannian manifoldunun g metriği, x^c nin fonksiyonları olan g_{ab} , $x^{\bar{c}}$ nin fonksiyonları olan $g_{\bar{a}\bar{b}}$ ve $g_{a\bar{b}} = 0$ olmak üzere

$$ds^2 = g_{ab}(x^c)dx^a dx^b + g_{\bar{a}\bar{b}}(x^{\bar{c}})dx^{\bar{a}} dx^{\bar{b}}, \quad a, b, c = 1, \dots, m, \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = m+1, \dots, n$$

şeklinde ise bu M_n manifolduna bölgesel ayrıştırılabilir Altın-Riemannian manifold denir. Ayrıca F çarpım yapısıyla bağlantılı olan bölgesel Riemannian manifoldunun bölgesel ayrıştırılabilir olması için gerek ve yeter şart F nin, g nin Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır (Yano 1965; Yano and Kon 1984).

$\phi_F g = 0$ olması $\nabla F = 0$ olmasına denktir (Salimov *et al.* 2007). Buradan aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 3.2.1.2: (M_n, φ, g) Altın-Riemannian manifold olsun. M_n manifoldunun bölgesel ayrıştırılabilir Altın-Riemannian manifold olması için gerek ve yeter şart, $\phi_F g = 0$ olmasıdır. Burada F hemen hemen altın yapısıyla bağlantılıdır (Gezer *et al.* 2012).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Bölgesel Ayırıştırılabilir Altın-Hessian Manifolds

Teorem 4.1.1: (M_n, F, g) bölgesel ayırıştırılabilir Riemannian manifoldu olsun ve ∇ , g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere f , $\nabla^2 f$ Hessian'ının regüler olduğu düzgün bir fonksiyon olsun. Eğer df tam 1-formu ayırıştırılabilirse φ hemen hemen F çarpım yapısıyla bağlantılı altın yapı olmak üzere $(M_n, \varphi, \nabla^2 f)$ üçlüsü Altın-Hessian manifoldunu oluşturur.

İspat: df tam 1-formu ayırıştırılabilir olsun. (3.3) ve (3.5) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
 (\phi_F(df))(X, Y) &= (FX)((df)(Y)) - X((df)(FY)) + (df)((L_Y F)(X)) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{5}} [\varphi(X)((df)(Y)) - X((df)(\varphi Y)) + (df)([Y, \varphi X] - \varphi[Y, X])] \\
 &= \frac{2}{\sqrt{5}} [\varphi(X)((df)(Y)) - X((df)(\varphi Y)) \\
 &\quad + (df)(\nabla_Y \varphi X - \nabla_{\varphi X} Y - \varphi(\nabla_Y X - \nabla_X Y) - \nabla_X \varphi Y + \nabla_Y \varphi X)] \\
 &= \frac{2}{\sqrt{5}} [(\nabla_{\varphi X} df)(Y) - (\nabla_X df)(\varphi Y) - (df)(\nabla \varphi)(Y, X) \\
 &\quad + (df)(\nabla \varphi)(X, Y)] = 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir. (3.5) ten eğer $\nabla F = 0$ ise $\nabla \varphi = 0$ yazılabilir. O zaman (4.1) eşitliği

$$(\nabla^2 f)(Y, \varphi X) = (\nabla^2 f)(\varphi Y, X)$$

şeklinde ifade edilir. Yani $(M_n, \varphi, \nabla^2 f)$ üçlüsü Altın-Hessian manifoldudur.

Teorem 4.1.2: (M_n, F, g) bölgesel ayrıştırılabilir Riemannian manifoldu olsun ve ∇ , g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere f , $\nabla^2 f$ Hessian'ının regüler olduğu düzgün bir fonksiyon olsun. Eğer df tam 1-formu ayrıştırılabilirse φ hemen hemen F çarpım yapısıyla bağlantılı altın yapı olmak üzere $(M_n, \varphi, \nabla^2 f)$ üçlüsü bölgesel ayrıştırılabilir Altın-Hessian manifoldunu oluşturur.

İspat: (M_n, F, g) bölgesel ayrıştırılabilir Riemannian manifoldu olsun. O zaman

$$(\nabla^2 f)(Y, \varphi X) = (\nabla^2 f)(\varphi Y, X)$$

eşitliğinden,

$$(\nabla^3 f)(\varphi X, Y, Z) = (\nabla^3 f)(X, \varphi Y, Z) \quad (4.2)$$

yazılabilir. Ricci denklemini kullanarak (4.2) den

$$\begin{aligned} (\nabla^3 f)(X, \varphi Y, Z) &= \nabla_Z(\nabla_{\varphi Y}(\nabla_X f)) \\ &= \nabla_{\varphi Y}(\nabla_Z(\nabla_X f)) - (df)(R(Z, \varphi Y)X) \\ &= (\nabla^3 f)(X, Z, \varphi Y) - (df)(R(Z, \varphi Y)X) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ve

$$\begin{aligned} (\nabla^3 f)(\varphi X, Y, Z) &= \nabla_Z(\nabla_Y(\nabla_{\varphi X} f)) \\ &= \nabla_Y(\nabla_Z(\nabla_{\varphi X} f)) - (df)(R(Z, Y)\varphi X) \\ &= (\nabla^3 f)(\varphi X, Z, Y) - (df)(R(Z, Y)\varphi X) \end{aligned} \quad (4.4)$$

eşitlikleri yazılabilir. g nin R eğrilik tensörü hemen hemen F çarpım yapısına göre pürdür (Salimov *et al.* 2007). O zaman R eğrilik tensörü hemen hemen F çarpım yapısıyla bağlantılı olan φ altın yapısına göre de pürdür. O halde (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden,

$$(\nabla^3 f)(Z, \varphi X, Y) = (\nabla^3 f)(Z, X, \varphi Y) \quad (4.5)$$

yazılır. Yani $\nabla^3 f$ tensör alanı tüm argümanlara göre pürdür. Burada $\nabla^3 f$, M_n üzerinde yüksek mertebeden Hessian yapılarıdır (Kumar 2005).

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi h)(X, Z_1, Z_2) &= \varphi(X)(h(Z_1, Z_2)) - X(h(\varphi Z_1, Z_2)) - h(\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) \\ &\quad + h((\nabla \varphi)(X, Z_1), Z_2) + h(Z_1, (\nabla \varphi)(X, Z_2)) - h(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) \\ &\quad + h(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) + h(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) \\ &= (\nabla_{\varphi X} h)(Z_1, Z_2) - (\nabla_X h)(\varphi Z_1, Z_2) + h((\nabla \varphi)(X, Z_1), Z_2) \\ &\quad + h(Z_1, (\nabla \varphi)(X, Z_2)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

yazılır. (4.6) da $h(Z_1, Z_2) = \nabla_{Z_1} \nabla_{Z_2} f$ ve $\nabla \varphi = 0$ yerlerine yazılırsa, (4.5) ten dolayı,

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi h)(X, Z_1, Z_2) &= (\phi_\varphi h)(X, Z_2, Z_1) = (\nabla_{\varphi X}(\nabla^2 f))(Z_2, Z_1) - (\nabla_X(\nabla^2 f))(Z_2, \varphi Z_1) \\ &= (\nabla^3 f)(Z_2, Z_1, \varphi X) - (\nabla^3 f)(Z_2, \varphi Z_1, X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\phi_\varphi h = 0$ ise, $\bar{\nabla}$, h nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\bar{\nabla} \varphi = 0$ yazılabilir.

4.2. Holomorfik Altın-Norden-Hessian Manifolds

Φ_c , M_{2k} manifoldu üzerinde $\Phi_c^2 - \Phi_c - \frac{3}{2}I = 0$ denklemini sağlayan (1,1) tipli bir tensör alanı olsun. Bu durumda Φ_c , M_{2k} üzerinde hemen hemen kompleks altın yapı

olarak adlandırılır ve (M_{2k}, Φ_c) ikilisine hemen hemen kompleks altın manifold denir (Crasmareanu and Hretcanu 2008). Eğer φ hemen hemen kompleks yapı ise

$$\Phi_c = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}\varphi) \quad (4.7)$$

M_{2k} üzerinde hemen hemen kompleks altın yapıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \Phi_c^2 &= \frac{I + 2\sqrt{5}\varphi - 5I}{4} = \frac{1}{4}(-4I + 2\sqrt{5}\frac{2\Phi_c - I}{\sqrt{5}}) \\ &= \frac{1}{4}(-6I + 4\Phi_c) = \Phi_c + \frac{3}{2}I \end{aligned}$$

olur.

Tersine Φ_c hemen hemen kompleks altın yapı olsun. O halde Φ_c hemen hemen kompleks altın yapısı tarafından indirgenen $\varphi = \frac{1}{2}(2\Phi_c - I)$ yapısı hemen hemen kompleks yapıdır. Gerçekten,

$$\varphi^2 = \frac{4\Phi_c^2 - 4\Phi_c + I}{5} = \frac{4(\Phi_c^2 - \Phi_c) + I}{5} = -I$$

olur.

φ hemen hemen kompleks yapısı ile verilen (M_{2k}, g) pseudo-Riemannian manifoldunda eğer g pseudo-Riemannian metriği φ ye göre pür ise bu manifolda hemen hemen Norden manifold denir. Iscan and Salimov (2009) hemen hemen Norden manifoldunun holomorfik Norden manifoldu olması için gerek ve yeter şartın g metriğinin holomorf olması gerektiğini yani $\nabla_g \varphi = 0 \Leftrightarrow \phi_\varphi g = 0$ olduğunu göstermiştir.

Hemen hemen kompleks altın yapı ve hemen hemen kompleks yapı birbirleriyle bağlantılı olduğu için hemen hemen kompleks yapı teorisinde kullanılan ϕ -operatörü metodu hemen hemen kompleks altın yapılarda da kullanılabilir. Böylece bu bölümde hemen hemen kompleks altın yapıların integrallenme şartı verilecektir.

(M_{2k}, g) , her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_{2k})$ için

$$g(\Phi_c X, Y) = g(X, \Phi_c Y) \quad (4.8)$$

olacak şekilde Φ_c hemen hemen kompleks altın yapı ile bağlantılı pseudo-Riemannian manifold olsun. O zaman (M_{2k}, Φ_c, g) üçlüsüne hemen hemen kompleks Altın-Norden manifoldu denir.

M_{2k} , hemen hemen Φ_c kompleks altın yapısıyla verilen hemen hemen kompleks altın Norden manifold olsun. Hemen hemen Φ_c kompleks altın yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart $\nabla \Phi_c = 0$ olacak şekilde ∇ burulmasız afin konneksiyon olmasıdır. Aynı zamanda Φ_c nin integrallenebilmesi $N_{\Phi_c} = 0$ şartına denktir. Ayrıca pseudo-Riemannian manifoldu üzerindeki hemen hemen kompleks altın yapının integrallenebilmesi için başka bir yeterli şart aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 4.2.1: (M_{2k}, Φ_c, g) hemen hemen kompleks Altın-Norden manifold olsun. Bu durumda,

a) Eğer $\phi_{\Phi_c} g = 0$ ise Φ_c integrallenebilirdir.

b) ∇ , g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, $\phi_{\Phi_c} g = 0$ ise $\nabla \Phi_c = 0$ yazılabilir.

İspat: (4.8) ve ∇ , g ile bağlantılı Riemannian kovaryant türev operatörü olmak üzere, $\nabla g = 0$ olmasından dolayı tüm $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$$g(X, (\nabla_Z \Phi_c)Y) = g((\nabla_Z \Phi_c)X, Y) \quad (4.9)$$

yazılabilir. (4.8), (3.3) ve $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ denklemlerinden,

$$\begin{aligned} (\phi_{\Phi_c} g)(X, Z_1, Z_2) &= -g(\nabla_X \Phi_c)Z_1, Z_2) + g(\nabla_{Z_1} \Phi_c)X, Z_2) \\ &\quad + g(Z_1, (\nabla_{Z_2} \Phi_c)X) \end{aligned} \quad (4.10)$$

ve buradan

$$\begin{aligned} (\phi_{\Phi_c} g)(Z_2, Z_1, X) &= -g(\nabla_{Z_2} \Phi_c)Z_1, X) + g(\nabla_{Z_1} \Phi_c)Z_2, X) \\ &\quad + g(Z_1, (\nabla_X \Phi_c), Z_2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

yazılabilir. (4.10) ve (4.11) den ise

$$(\phi_{\Phi_c} g)(X, Z_1, Z_2) + (\phi_{\Phi_c} g)(Z_2, Z_1, X) = 2g(X, \nabla_{Z_1} \Phi_c)Z_2) \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) denkleminde $\phi_{\Phi_c} g = 0$ yazılırsa $\nabla \Phi_c = 0$ elde edilir.

Eğer g pseudo-Riemannian metriği hemen hemen Φ_c kompleks altın yapısına göre pürse, bu durumda g pseudo-Riemannian metriği hemen hemen φ kompleks yapıya göre pürdür. (4.7) yardımıyla

$$\phi_{\Phi_c} g = \frac{2}{\sqrt{5}} \phi_{\varphi} g \quad (4.13)$$

yazılabilir. Buradan, Teorem 4.2.1 ve (4.13) eşitliklerinden aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Önerme 4.2.1: (M_{2k}, Φ_c, g) hemen hemen Altın-Norden manifold ve φ , Φ_c ile bağlantılı hemen hemen kompleks yapı olsun. Eğer $\phi_{\varphi} g = 0$ ise hemen hemen Φ_c

kompleks altın yapısı integrallenebilirdir. Ayrıca $\phi_\varphi g = 0$ ise $\nabla\varphi = 0$ yazılabilir. Buradan hareketle aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 4.2.2: (M_{2k}, Φ_c, g) hemen hemen Altın-Norden manifold olsun. (M_{2k}, Φ_c, g) üçlünün holomorfik Altın-Norden manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\phi_\varphi g = 0$ olmasıdır, burada φ hemen hemen kompleks altın yapı ile bağlantılı hemen hemen kompleks yapıdır.

f , (M_{2k}, φ, g) holomorfik Norden manifoldu üzerinde holomorfik bir fonksiyon olsun. Yani $\phi_\varphi(df) = 0$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1.1 deki benzer ispatla $h = \nabla^2 f$ Hessian metriğinin Φ_c yapısına göre pür olduğu söylenebilir. Buradan hareketle aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 4.2.3: (M_{2k}, φ, g) holomorfik Norden manifold olsun ve ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $f, \nabla^2 f$ Hessian'ının regüler olduğu düzgün bir fonksiyon olsun. Ayrıca Φ_c , hemen hemen φ kompleks yapısıyla bağlantılı olan hemen hemen kompleks altın yapı olsun. Eğer f holomorfik ise $(M_{2k}, \Phi_c, h = \nabla^2 f)$ üçlüsü hemen hemen kompleks Altın-Norden-Hessian manifoldunu oluşturur.

Φ_c kompleks altın yapısı için Teorem 4.1.2 yardımıyla, (4.13) eşitliğinden ve Önerme 4.2.2 den aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 4.2.4: (M_{2k}, φ, g) holomorfik Norden manifold olsun ve ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $f, \nabla^2 f$ Hessian'ının regüler olduğu düzgün bir fonksiyon olsun. Ayrıca Φ_c , hemen hemen φ kompleks yapısıyla bağlantılı olan hemen hemen kompleks altın yapı olsun. Eğer f holomorfik ise $(M_{2k}, \Phi_c, h = \nabla^2 f)$ üçlüsü holomorfik Altın-Norden-Hessian manifoldunu oluşturur.

(M_{2k}, φ, g) Kahler manifoldu için, g Hermit metriğinin R eğrilik tensörünün tüm argümanları hemen hemen φ kompleks yapısına göre pür değildir (Yano and Kon 1984). Buradan aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.2.1: (M_{2k}, φ, g) Kahler manifoldu için, g Hermit metriğinin R eğrilik tensörü hemen hemen φ kompleks yapısıyla bağlantılı hemen hemen Φ_c kompleks altın yapısına göre de pür değildir. Bu yüzden $(M_{2k}, \Phi_c, h = \nabla^2 f)$ üçlüsü (4.3) ve (4.4) denklemlerine göre Kahler manifoldu üzerinde hiçbir zaman holomorfik Altın-Norden-Hessian manifoldunu oluşturmaz.

5. SONUÇ

Sunulan bu tezde ilk olarak bölgesel ayrıştırılabilir Riemannian manifoldları üzerinde bölgesel ayrıştırılabilir Altın –Hessian yapılar kuruldu.

İkinci olarak hemen hemen kompleks yapılardan elde edilen hemen hemen kompleks altın yapıların integrallenebilirliği için başka bir yeterli şart sunuldu. Ayrıca bir hemen hemen kompleks Norden manifoldun holomorfik Altın-Norden manifoldu olması için gerek ve yeter şart verildi.

Üçüncü olarak holomorfik Norden manifoldları üzerinde holomorfik Altın-Norden-Hessian manifoldların kurulduğu ancak Kahler manifoldlar üzerinde holomorfik Altın-Norden-Hessian manifoldunun asla kurulamayacağı gösterildi.

KAYNAKLAR

- Crasmareanu M. and Hretcanu C., 2008. Golden differential geometry. *Chaos Solitons Fractals* 38, no. (5), 1229-1238.
- Duistermaat J., 2001. On Hessian Riemannian structures, *Asian J. Math.*, (5) , 79-91.
- Gezer A. and Cengiz N. and Salimov A.A., 2012. On integrability of Golden Riemannian structures. *Turkish J. Math.* DOI: 10.3906 / mat-1108-35.
- Goldberg S.I. and Yano K., 1970. Polynomial structures on manifolds. *Kodai Math. Sem. Rep.* (22), 199-218.
- Heyrovska R., 2005 The Golden ratio ionic and atomic radii and bond lengths. *Mol Phys.* (103):877.82.
- Hoggat V. E., 1969 Fibonacci and Lucas numbers. Palo Alto, CA: Houghton-Mi- in.
- Hretcanu C. and Crasmareanu M., 2007. On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with golden structure. *An. Stiins. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.)*, (53), suppl. 1, 199-211.
- Hretcanu C. and Crasmareanu M., 2009. Applications of the golden ratio on Riemannian manifolds. *Turkish J. Math.* 33, no. (2), 179-191.
- Iscan M. and Salimov A.A., 2009. On Kahler-Norden manifolds. *Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.)* 119, no.(1), 71-80.
- Kumar R. D., 2005. Higher order Hessian structures on manifolds, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 115 (3), 259-277.
- Marek-Crnjac L., 2006 The Golden mean in the topology of four-manifolds in conformal field theory in the mathematical probability theory and in Cantorian spacetime. *Chaos, Solitons& Fractals*, 28(5), 1113.8.
- Salimov A.A. and Iscan, M. and Etayo F., 2007. Paraholomorphic B-manifold and its properties. *Topology Appl.* 154, no.(4), 925-933.
- Salimov, A.A., (2010). On Operators Associated with Tensor Fields. *J. Geom.* 99 (1-2), 107-145.
- Shima H., 1981. Hessian manifolds and convexity, in "Manifolds and Lie Groups", *Progress in Mathematics*, vol. 14, Birkhauser, 385-392.
- Shima H. and Yagi K., 1997. Geometry of Hessian manifolds, *Differ. Geom. Appl.*, 7 (3), 277-290.
- Tachibana S., 1960. Analytic tensor and its generalization, *Tôhoku Math. J.* 12 (2), 208-221.
- Udriște C. and Bercu G., 2005. Riemannian Hessian metrics, *An. Univ. Bucur.* 55, (1), 189-204.
- Yano K., 1963. On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$, *Tensor, N.S.* (14), 99-109.
- Yano K., 1965. Differential geometry on complex and almost complex spaces. *International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 49 A Pergamon Press Book. The Macmillan Co., New York.
- Yano K. and Kon M., 1984. Structures on manifolds. *Series in Pure Mathematics*, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Çağrı KARAMAN 1988 yılında Kars'ta dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Kars'ta tamamladı. Lise öğrenimini Kars Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2007 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında mezun oldu. 2011 yılında aynı bölümde yüksek lisansa başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.