



**β -UYUMLU KESİRLİ TÜREV İLE
MODELLENEN BAZI FİZİKSEL VE BİYOLOJİK
PROBLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

Sadullah BULUT
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Dr. Öğrt. Üyesi Mesut KARABACAK
2021
(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**β -UYUMLU KESİRLİ TÜREV İLE MODELLENEN BAZI FİZİKSEL VE BİYOLOJİK
PROBLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

(Exact Solutions Of Some Physical And Biological Problems Modeled With β -Compatible
Fractional Derivative)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sadullah BULUT

Danışman: Dr. Öğrt. Üyesi Mesut KARABACAK

Erzurum
Ocak, 2021

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Sadullah BULUT tarafından hazırlanan “ β –Uyumlu Kesirli Türev İle Modellenen Bazı Fiziksel ve Biyolojik Problemlerin Tam Çözümleri” başlıklı çalışması 12/ 01/ 2021 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı, Matematik Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Atatürk Üniversitesi

.....

Danışman: Dr. Öğrt. Üyesi Mesut KARABACAK

Atatürk Üniversitesi

.....

Jüri Üyesi: Dr. Öğrt. Üyesi Muhammed YİĞİDER

Erzurum Teknik Üniversitesi

.....

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Dr. Öğrt. Üyesi Mesut KARABACAK danışmanlığında sunulan “ β -Uyumlu Kesirli Türev İle Modellenen Bazı Fiziksel Ve Biyolojik Problemlerin Tam Çözümleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	0	30
Kuramsal Temeller	13	30
Materyal ve Yöntem	9	35
Bulgular	6	20
Tartışma	0	20
Tezin Geneli	7	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Sadullah BULUT	Dr. Öğrt. Üyesi Mesut KARABACAK
14.1.2021	14.1.2021
İmza:	İmza:

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Akademik kariyerime başladığım günden itibaren büyük özveriyle bana destek olan, değerli bilgileri ve tecrübeleriyle ışık tutan Sayın Dr. Öğrt. Üyesi Mesut KARABACAK'a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Bu çalışmam süresince maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan ve bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi başta ailem ve Emine YILDIZ olmak üzere tüm sevdiklerime en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca TÜBİTAK BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞINA 2210/A kapsamında verdiği destek için teşekkürlerimi sunarım.

Sadullah BULUT

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

β -UYUMLU KESİRLİ TÜREV İLE MODELLENEN BAZI FİZİKSEL VE BİYOLOJİK PROBLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ

Sadullah BULUT

Danışman: Dr. Öğrt. Üyesi Mesut KARABACAK

Amaç: Bu tezde, daha önce tam çözümleri bulunmuş olan bazı fiziksel ve biyolojik problemleri modelleyen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler tekrar ele alınıp mevcut çözümlerinin farklı yaklaşımla doğrulanması sunulmuştur.

Yöntem: Öncelikle literatürde bulunan türev tanımları verilmiş ve β -uyumlu kesirli türevinin diğer türev tanımlarından farkı anlatılmıştır. Daha sonra ise $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yöntemi açıklanmış olup ele alınan denklemler β -uyumlu kesirli türev ile yeniden tanımlanarak $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yöntemiyle tam çözümleri elde edilmiştir.

Bulgular: Atangana'nın β -uyumlu kesirli türevi yardımıyla tanımlanan uzay-zaman kesirli Fitzhugh-Nagumo, Dodd-Bullough Mikhailov, $(2 + 1)$ Boyutlu Kübik Klein – Gordon ve Phi-Four denklemlerinin β 'ya bağlı tam çözümleri elde edilmiştir. Bulunan bu çözümlerle daha önce literatürde bulunan tam çözümlerin $\beta = 1$ için uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca farklı kesirli β değerleri için ise tam çözümler grafikleştirilmiştir.

Sonuç: Atangana'nın β -uyumlu kesirli türevi diğer kesirli türev tanımlarında olduğu gibi kesirli integrallere ihtiyaç duymadığı için yapılan matematiksel işlemlerin kısaldığı ve kolaylaştığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Atangana'nın β -uyumlu Kesirli Türevi, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım Yöntemi, Sinirsel iletim, Uzay-Zaman Kesirli Diferansiyel Denklemler

Ocak 2021, 55 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

EXACT SOLUTIONS OF SOME PHYSICAL AND BIOLOGICAL PROBLEMS MODELED WITH β -COMPATIBLE FRACTIONAL DERIVATIVE

Sadullah BULUT

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mesut KARABACAK

Purpose: In this thesis, it has been presented reviewing and validating of existing solutions with a different approach nonlinear partial differential equations modeling some physical and biological problems that has been found their exact solutions before.

Method: First of all, derivative definitions in the literature were given and the difference of β -conformable fractional derivative from other derivative definitions was explained. Then $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method was explained and the exact solutions of equations discussed were obtained by redefining with β -conformable fractional derivative by $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method.

Findings: The exact solutions of the space-time fractional Fitzhugh-Nagumo, Dodd-Bullough Mikhailov, $(2 + 1)$ Dimensional Cubic Klein-Gordon and Phi-Four equations defined with the help of β -conformable fractional derivative of Atangana were obtained depending on β . It was seen that these solutions were compatible with the exact solutions found in the literature before for $\beta = 1$. In addition, exact solutions for different fractional β values were plotted.

Results: Since the β -conformable fractional derivative of Atangana does not require fractional integrals as in other fractional derivative definitions, it has been observed that the mathematical operations performed shorten and become easier.

Keywords: β - conformable Fractional Derivative of Atangana, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion Method, Neural transmission, Space-Time Fractional Differential Equations

January 2021, 55 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ.....	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	3
Temel Tanım ve Teoremler.....	3
Kesirli Türevlerin Sınıflandırılması	5
Hareketli Dalga Çözümlerinin Türleri Ve Soliton-Solitary Dalga Teorisine Fiziksel Bakış.....	12
MATERYAL ve METOT	17
İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemin Çözüm Durumları	17
$\left(\frac{G'}{G}\right)$ - Açılım Metodu	20
ARAŞTIRMA BULGULARI	23
Fitzhugh-Nagumo Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu İle Çözümü	23
(2+1) Boyutlu Kübik Klein–Gordon Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu İle Çözümü....	28
Dodd-Bullough-Mikhailov Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu İle Çözümü.....	32
Phi-Four Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu İle Çözümü	37
TARTIŞMA VE SONUÇ	42
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	45

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Kesirsel hesabın tarihçesinin şeması.....	1
Şekil 2. Gamma fonsiyonunun grafiği	3
Şekil 3. 1834 yılındaki Russel'in gözlemlediği solitary su dalgalarının 1995 yılında Edinburgh yakınlarındaki Union Kanalı'nda tekrar canlandırılması.....	13
Şekil 4. $u(x, t) = \delta \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$ fonksiyonunun $\delta = 5$, $v = 1$ ve $k = 1$ değerleri için grafiği	13
Şekil 5. Bir solitary dalgasının hareketi	14
Şekil 6. $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t)$, $-10 \leq x \leq 10$	15
Şekil 7. $u(x, t) = e^{- x-t }$, $-2 \leq x \leq 2$	15
Şekil 8. $u(x, t) = \cos(x - t)$, $-\pi \leq x \leq \pi$	16
Şekil 9. $u(x, t) = e^{(- x-ct)^{\frac{1}{6}}}$, $c = 1$, $-2 \leq x \leq 2$	16
Şekil 10. Fitzhugh-Nagumo denkleminin $\lambda = 6$; $\mu = 3$; $\varphi = -1$; $\gamma = -2$; $\beta = 0.6$ değerleri için $u_2(x, t)$ çözümünün grafiği	27
Şekil 11. (2+1) cKG denkleminin $y = 1$; $\lambda = 6$; $\mu = 4$; $\varphi = -3$; $\gamma = 1$; $\beta = 0.5$; $k = 2$; $l =$ -2 ; $p = 6$; $b = -1$ değerleri için $u_2(x, t)$ çözümünün grafiği	31
Şekil 12. Dodd-Bullough-Mikhailov denkleminin $m = 2$; $\lambda = 2$; $\mu = 3$; $\varphi = -3$; $\gamma =$ 4 ; $\beta = 0.9$ değerleri için $v_2(x, t)$ çözümünün grafiği	37
Şekil 13. Phi-Four denkleminin $m = 3$; $\lambda = 6$; $\mu = 3$; $c = -6$; $n = -5$; $\beta = 0.5$; değerleri için $u_6(x, t)$ çözümünün grafiği	41

SİMGELER DİZİNİ

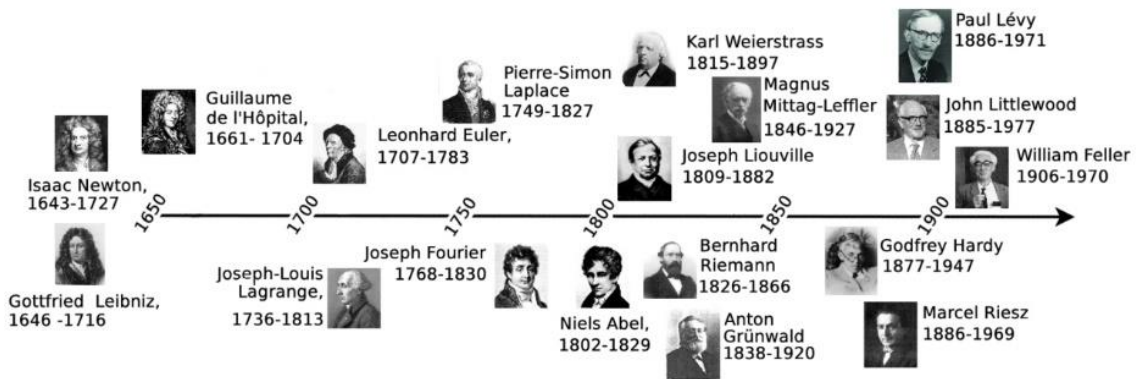
$\Gamma(.)$	Gamma Fonksiyonu
$\beta(m, n)$	Beta Fonksiyonu
Σ	Toplam Sembolü
J^α	Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}^c D_a^\alpha$	Caputo Türev Operatörü
T_α	Uyumlu Kesirli Türev Operatörü
${}^A D_x^\beta$	Atangana'nın β -uyumlu Kesirli Türev Operatörü



GİRİŞ

Fen bilimlerinde ve mühendislikte yapılan son yıllardaki çalışmalar, birçok sistemin dinamiklerinin doğrusal olmayan diferansiyel denklemler aracılığıyla daha doğru bir şekilde tanımlanabileceğini göstermiştir. Mühendislik, fizik, biyoloji, difüzyon, kaos teorisi, elektromanyetizma ve diğerleri bu sistemlere verilebilecek belli başlı örneklerdir. Bu sistemlerin modellenmesinde karşımıza çıkan doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması kolay değildir. Doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin farklı yöntemlerle bulunması birçok araştırmacının ana hedefi olmuştur. Bu çözümlerin bulunması için güçlü yöntemler oluşturulmuş ve geliştirilmiştir. Ancak bazı modellemelerde tamsayı mertebeli türevin bazen yeterli olmadığı görülmüştür. Gelişigüzel mertebeden integral ve türevlerin incelenmesi ve uygulamaları ile ilgilenen matematiksel analiz alanı olan kesirli hesap, son yıllarda pek çok disiplin tarafından büyük ilgi görmüştür. Kesirli hesap kullanılarak birçok fiziksel sistemin davranışının daha doğru bir şekilde tanımlanabileceği bulunmuştur.

Kesirli hesap G.W. Leibniz ve L. Euler'in bazı tahminlerinden başlayıp şimdiye kadar aşamalı olarak geliştirildiği için eski bir konudur ancak yeni bir konu olarak da düşünülebilir. Çünkü sadece 1970'li yıllardan beri, kesirli hesap özel konferansların ve bilimsel incelemelerin konusu olmuştur.



Şekil 1. Kesirsel hesabın tarihçesinin şeması

Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan analitik ve nümerik yöntemlerden bazıları Cole-Hopf dönüşümü (Salas and Gomez 2010), tanh fonksiyonu metodu (Wazwaz 2008), ters saçılma dönüşümü metodu (Ablowitz and Clarkson 1991), Mellin dönüşüm yöntemi (Butera and Paula 2014), Hirota metodu (Hirota 1971), Chebyshev dalgacık yöntemi (Saeed *et al.* 2015), Backlund dönüşüm metodu (Rogers and Shadwick 1982), ilk

integral yöntemi (Javeed *et al.* 2018), $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yöntemi (Wang 2008), artık kuvvet serisi yöntemi (Jaber and Ahmad 2018), varyasyonel iterasyon yöntemi (Jafari and Tajadodi 2010), exp-fonksiyonu yöntemi (Mohyud-Din 2017), spektral kolokasyon yöntemi (Li and Zhao 2019), Tikhonov düzenleştirme yöntemi (Xiong and Xue 2019), Green fonksiyon yaklaşım yöntemi (Henandez-Martinez *et al.* 2016), homojen denge yöntemi (Zhaosheng 2004) ve F-açılım yöntemi (Abdou 2007) şeklinde sıralanabilir. Literatürdeki bu yöntemler arasında kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması için en çok kullanılanları $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntem ve üstel fonksiyon yöntemidir.

$\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yöntemi Wang tarafından 2008 yılında literatüre kazandırılmıştır. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yönteminin mantığı; verilen lineer olmayan bir diferansiyel denklemin çözümlerinin polinom şeklinde elde edilmesine dayanır. Bu polinomun derecesi homojen denge bağıntısı ile hesaplanır. Bu yöntemin diğer yöntemlerden farkı, Riccati denklemi yerine ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemin kullanılmasıdır.

Bu çalışmada uzay-zaman kesirli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri incelenmiştir. Tez dört ana başlık altında sunulmuş olup birinci bölümde tezde kullanılan temel kavramlar, ikinci bölümde kullanılan yöntem, üçüncü bölümde çözüm yönteminin uygulandığı uzay-zaman kesirli Fitzhugh-Nagumo, Dodd-Bullough Mikhailov, (2+1) Boyutlu Kübik Klein-Gordon ve Phi-Four denklemleri ve dördüncü bölümde sonuç kısmı ele alınmıştır.

KURAMSAL TEMELLER

Temel Tanım ve Teoremler

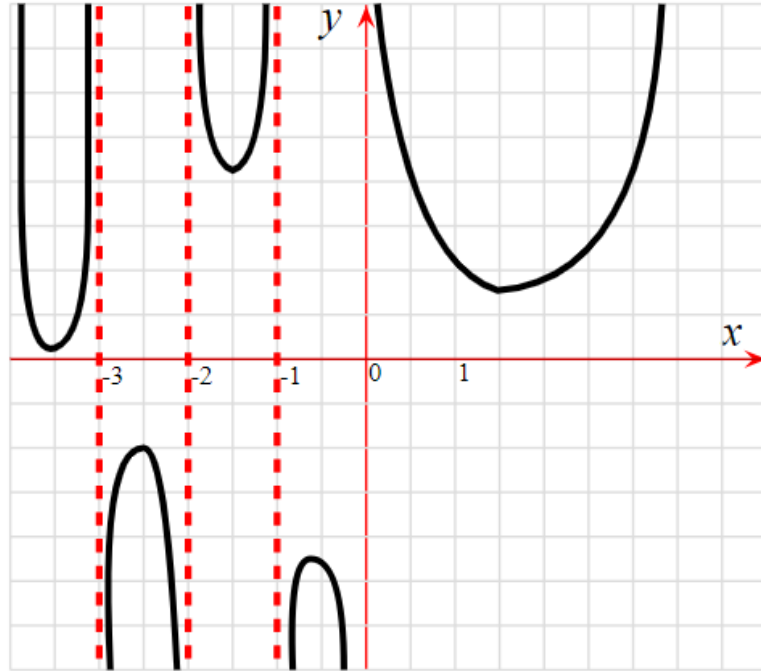
Tanım 1. (Gamma fonksiyonu): $z \in \mathbb{C}$, ve $z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$$

şeklindeki Euler integrali ile tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir ve Γ ile gösterilir. Gamma fonksiyonunun kesirli mertebeden türev ve integralin ortaya çıkışında önemli bir rolü vardır. Basit bir biçimde ifade edilirse pozitif tamsayılar için kullanılan faktöriyel işleminin tüm reel sayılara genelleştirilmesidir. Gamma fonksiyonunun sık kullanılan özelliklerinden birkaç tanesi aşağıda verilmiştir.

- i. $\Gamma(1) = 1$
- ii. $z \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\Gamma(z) = (z-1)!$
- iii. $z \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dir.

Şekil 2’de sıfır noktası civarında gamma fonksiyonunun davranışı gösterilmektedir. Gamma fonksiyonu pozitif bölgede her noktada tanımlı olmasına karşın, negatif tamsayı değerlerinde sonsuza yakınsamaktadır (Arfken and Weber 1995).



Şekil 2. Gamma fonksiyonunun grafiği

Tanım 2. (Beta Fonksiyonu): $m, n > 0$ için;

$$\beta(m, n) = \int_a^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir (Arfken and Weber 1995).

Tanım 3. (Riemann-Liouville kesirli integrali): $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun. $a \leq x \leq b$ için $f \in L_1[a, b]$ fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali J^α

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

gibi tanımlanır.

Tanım 4. (Riemann-Liouville Türevi): $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun. $m-1 < x \leq m$ için olmak üzere f fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D^m [J_a^{m-\alpha} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left[\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right]$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999).

Tanım 5. (Caputo Türevi): $m-1 < x \leq m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $x > 0$, $f \in C_{-1}^m$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonun α . mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev operatörü

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = (J_a^{m-\alpha} D^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt$$

biçiminde tanımlanır (Caputo 1967).

Tanım 6. (Weyl Türevi): f fonksiyonu, $(0, \alpha)$ açık aralığında tanımlı olsun.

$$D^\alpha(f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^\infty \frac{f(t)}{(1-x)^{\alpha+1-n}} dt$$

ifadesi Weyl türevi olarak adlandırılır.

Tanım 7. (Hadamard Türevi): f fonksiyonu, $(0, \alpha)$ açık aralığında tanımlı olsun.

$$D^\alpha(f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x \frac{d^n}{dx^n} \right)^n \int_0^x \left(\log \left(\frac{x}{t} \right) \right)^{n-\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}$$

ifadesi Hadamard türevi olarak adlandırılır.

Tanım 8. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. f nin α mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \forall t > 0, \alpha \in (0,1)$$

ile tanımlıdır. Bu limit mevcutsa f fonksiyonuna α mertebeden diferansiyellenebilir denir (Khalil *et al.* 2014).

Tanım 9. $a \in \mathbb{R}$ ve $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun β -uyumlu türevi

$${}_0^A D_x^\beta \{f(x)\} = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x)}{\varepsilon}, & 0 \leq x \quad 0 < \beta \leq 1 \\ f(x), & 0 \leq x \quad \beta = 0 \end{cases}$$

ifadesiyle tanımlanır (Atangana 2015).

Tanım 10. f fonksiyonu x ve t değişkenli bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonun x 'e göre β -uyumlu türevi

$${}_0^A D_x^\beta \{f(x, t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}, t\right) - f(x, t)}{\varepsilon}$$

ifadesiyle tanımlanır (Atangana 2015).

Kesirli Türevlerin Sınıflandırılması

Türev kavramının kullanışlılığından dolayı birçok araştırmacı bu kavramın üzerinde durmuştur. Bu nedenle, literatürde türev olarak adlandırılan birçok operatör vardır. Bu aşamada sorulması gereken sorular şunlardır: "Türev nedir? Hangi operatör kesirli türev olarak adlandırılabilir? "Bu bölümde kesirli türevler olarak yorumlanabilen operatörlerin formülasyonunun altında yatan kavramlar tartışılacaktır. Bir operatörün kesirli türev olarak adlandırılabilmesi için karşılaması gereken bazı kriterlerin sağlanmaya çalışıldığı bir makalede yazarlar, operatörün uyması gereken kriterleri açıklamıştır (Ortigueira and Machado 2015). Herhangi bir kesirli türevin, kesirli olmadan önce türevlerin bazı temel özelliklerini karşılaması gerekir.

Bu bölümde, belirli bir operatörün kesirli türev olarak adlandırılması için yerine getirilmesi gereken kriterler verilmiştir. G bir operatör olmak üzere, bu durumda aşağıdaki özellikler geçerliyse G kesirli türev olarak adlandırılır:

1. Seçilen bir x değeri için bir fonksiyonun G değeri, o x değerinin civarındaki fonksiyonun değişim oranını ifade eder.

2. Sıfır dereceden $G(f)$, f fonksiyonunu verir.

3. G operatörü doğrusaldır, yani:

$$G(af(t) + bg(t)) = aG(f) + bG(g)$$

4. G operatörü altında f fonksiyonu bir sabitle çarpımı sağlar, yani:

$$G(af) = aG(f)$$

5. G operatörü altında f ve g fonksiyonları toplam kuralını sağlar, yani:

$$G(f + g) = G(f) + G(g)$$

6. G operatörü altında f ve g fonksiyonları çıkarma kuralını sağlar, yani:

$$G(f - g) = G(f) - G(g)$$

7. G operatörü çarpım kuralını sağlar, yani f ve g fonksiyonları için, $h(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(h(x)) = G(f(x))g(x) + f(x)G(g(x))$$

8. G operatörü zincir kuralını sağlar, yani f ve g fonksiyonları için, $h(x) = f(g(x))$ fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(h(x)) = G(f(x))g'(x) = f'(x)G(g(x))$$

9. f fonksiyonunun ters fonksiyonu g varsa, yani $g(f(x)) = x$ ve $f(g(y)) = y$, o zaman g fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(g) = \frac{l(t, \beta)}{G(f(g))}$$

10. Herhangi bir (sıfıra eşit olmayan) f fonksiyonu için $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(h(x)) = -\frac{G(f(x))}{(f(x))^2}$$

11. G operatörü bölüm kuralını sağlar, yani g fonksiyonunun sıfır olmadığı her durumda

$$G\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{G(f)g - G(g)f}{(g)^2}$$

12. $G(f(x))$ açık bir aralıkta pozitif ise, bu durumda f bu aralıkta artandır.

13. $G(f(x))$ açık bir aralıkta negatif ise, bu durumda f bu aralıkta azalandır.

14. G operatörü açık bir aralıkta $G(f(x)) = 0$ olsun, bu durumda f bu aralıkta sabittir.

15. G operatörü yukarıdaki kriteri ve D ters operatörünü sağlar ise, bu durumda D kesirli bir integraldir.

16. G operatörü derece tam sayı olduğunda sıradan türevlerle aynı sonuçları verir.

Literatürde yaygın olarak kullanılan kesirli operatörleri (Caputo ve Riemann-Liouville) sınıflandırmak için yukarıdaki kriterler göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Caputo kesirli operatörü aşağıdaki kriterleri sağlamaz:

1. Seçilen bir x değeri için bir fonksiyonun G değeri, o x değerinin civarındaki fonksiyonun değişim oranını ifade eder.

2. G operatörü zincir kuralını sağlar, yani f ve g fonksiyonları için, $h(x) = f(g(x))$ fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(h(x)) = G(f(x))g'(x) = f'(x)G(g(x))$$

3. f fonksiyonunun ters fonksiyonu g varsa, yani $g(f(x)) = x$ ve $f(g(y)) = y$, bu durumda g fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(g) = \frac{l(t, \beta)}{G(f(g))}$$

4. Herhangi bir (sıfıra eşit olmayan) f fonksiyonu için $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(h(x)) = -\frac{G(f(x))}{(f(x))^2}$$

Riemann-Liouville kesirli operatörü ise aşağıdakileri sağlamaz:

1. Seçilen bir x değeri için bir fonksiyonun G değeri, o x değerinin civarındaki fonksiyonun değişim oranını ifade eder.

2. G operatörü zincir kuralını sağlar, yani f ve g fonksiyonları için, $h(x) = f(g(x))$ fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(h(x)) = G(f(x))g'(x) = f'(x)G(g(x))$$

3. f fonksiyonunun ters fonksiyonu g varsa, yani $g(f(x)) = x$ ve $f(g(y)) = y$, o zaman g fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(g) = \frac{l(t, \beta)}{G(f(g))}$$

4. Herhangi bir (sıfıra eşit olmayan) f fonksiyonu için $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ fonksiyonunun x 'e göre G 'si:

$$G(h(x)) = -\frac{G(f(x))}{(f(x))^2}$$

5. G operatörü derece tam sayı olduğunda sıradan türevlerle aynı sonuçları verir.

Bu nedenle, hem Riemann – Liouville hem de Caputo operatörlerinin türev olmadıkları ve bu durumda kesirli türev değil, ancak kesirli operatörler oldukları sonucuna varılabilir (Atangana 2015).

Teorem 1. β -uyumlu kesirli türev, (1-16) özellikleri sağlar.

İspat:

Tanım gereği 2. özelliğin sağlandığı açıktır. Yani $\beta = 0$ için

$${}_0^A D_x^0 f(x) = f(x)$$

sağlanır.

f ve g 'nin $[a, b]$ de diferansiyel ve β -türevlenebilir olsun, μ ve α da iki gerçel sayı olsun, o halde tanım gereği

$${}_0^A D_x^\beta (\mu f(x) + \alpha g(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mu f + \alpha g) \left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - (\mu f + \alpha g)(x)}{\varepsilon}$$

yazılarak yeniden düzenlenirse,

$$\mu \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f \left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - f(x)}{\varepsilon} + \alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g \left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - g(x)}{\varepsilon}$$

ifadesi elde edilir ve son olarak istenen sonuç

$${}_0^A D_x^\beta (\mu f(x) + \alpha g(x)) = \mu {}_0^A D_x^\beta (f(x)) + \alpha {}_0^A D_x^\beta (g(x))$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu sonuç, β -uyumlu kesirli türevin 3. özelliği sağlamış olduğunu gösterir. Ayrıca burada $\mu = 1$ ve $\alpha = 0, 1, -1$ için β -uyumlu kesirli türev 4. 5. ve 6. özellikleri de sağlamış olur.

7. özelliğin ispatı için tanım kullanılırsa

$${}_0^A D_x^\beta (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f \left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) g \left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} \right) - f(x)g(x)}{\varepsilon}$$

olup ifadenin payı aşağıdaki gibi yeniden düzenleyerek

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)g\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x)g\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) + f(x)g\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x)g(x)}{\varepsilon}$$

ortak parantezlere alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x)}{\varepsilon} g\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) + f(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - g(x)}{\varepsilon}$$

elde edilir. Sürekli bir fonksiyon için limitin özelliklerini kullanarak, istenen sonuç

$${}_0^A D_x^\beta (f(x) \cdot g(x)) = {}_0^A D_x^\beta (f(x)) g(x) + f(x) {}_0^A D_x^\beta (g(x))$$

biçiminde elde edilip 7. özelliğin sağlandığı gösterilmiş olur.

Tekrar tanımdan hareketle

$${}_0^A D_x^\beta ((f \circ g)(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - (f \circ g)(x)}{\varepsilon}$$

yazılıp sadelik için

$$h = \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$${}_0^A D_x^\beta ((f \circ g)(x)) = \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x + h) - (f \circ g)(x)}{h}$$

yazılır. Bununla birlikte f ve g 'nin zincir kuralı ile birlikte türevlenebilir olduğunu göz önüne alırsak aşağıdakiler elde edilir:

$${}_0^A D_x^\beta ((f \circ g)(x)) = \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + h) - f(g(x))}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h + x) - g(x)}{h}$$

g türevlenebilir olduğundan

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

yazılır.

$$h = \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \quad \varepsilon = h\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$$

ifadesi tekrar yerine yazılırsa

$${}_0^A D_x^\beta ((f \circ g)(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x)}{\varepsilon} g'$$

tanımdan 8. özelliğin ispatı

$${}_0^A D_x^\beta ((f \circ g)(x)) = {}_0^A D_x^\beta (f(g(x))) g'(x)$$

biçiminde tamamlanmış olur.

f fonksiyonunun ters fonksiyonunun g olduğunu varsayalım, yani $g(f(x)) = x$ ve $f(g(y)) = y$, bu durumda

$${}_0^A D_x^\beta ((f \circ g)(x)) = {}_0^A D_x^\beta (x) = \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$$

olup 8. özellik de göz önüne alınırsa ifade

$${}_0^A D_x^\beta f(x) = \frac{l(x, \beta)}{{}_0^A D_x^\beta [g(f(x))]} \quad , \quad l(x, \beta) = \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{2-2\beta}$$

şeklini alıp 9. özelliğin ispatı tamamlanmış olur. 10. özellik için ise yine tanımdan hareketle

$$\begin{aligned} {}_0^A D_x^\beta f^{-1}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{-1}\left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f^{-1}(x)}{\varepsilon} \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x)}{\varepsilon \left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) f(x)} \\ &= -\frac{{}_0^A D_x^\beta f(x)}{f^2(x)} \end{aligned}$$

adımları takip edilirse ispat tamamlanmış olur. Daha önceki özelliklerde yapıldığı gibi tanımdan hareket edersek

$${}_0^A D_x^\beta \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g^{-1})\left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\alpha}\right) - (f \cdot g^{-1})(x)}{\varepsilon}$$

olup 7 ve 10. özellikler de kullanılıp

$${}_0^A D_x^\beta \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{{}_0^A D_x^\beta f(t) g(t) - {}_0^A D_x^\beta (g(t)) f(t)}{g^2(x)}$$

elde edilir.

${}^A_0D_x^\beta(f(x))$ açık bir aralıkta pozitif olduğunu varsayalım ve $x_1 > x_2$ olsun. Tanımdan hareketle

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x_1 + \varepsilon \left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x_2)}{\varepsilon} > 0$$

$\varepsilon > 0$ olduğundan

$$f\left(x_1 + \varepsilon \left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x_2) > 0$$

yazılır ve her iki tarafın limiti alınır

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(x_1 + \varepsilon \left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x_2) = f(x_1) - f(x_2) > 0$$

bulunur ki bu da fonksiyonun artan olduğunu gösterir.

${}^A_0D_x^\beta(f(x))$ açık bir aralıkta negatif olduğunu varsayalım ve $x_1 > x_2$ olsun. Tanımdan hareketle

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x_1 + \varepsilon \left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x_2)}{\varepsilon} < 0$$

$\varepsilon > 0$ olduğundan

$$f\left(x_1 + \varepsilon \left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x_2) < 0$$

yazılır ve her iki tarafın limiti alınır

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(x_1 + \varepsilon \left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x_2) = f(x_1) - f(x_2) < 0$$

bulunur ki bu da fonksiyonun azalan olduğunu gösterir.

${}^A_0D_x^\beta(f(x))$ açık aralıkta sıfır olduğunu varsayalım ve $x_1 > x_2$ olsun. Tanımdan hareketle

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x_1 + \varepsilon \left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x_2)}{\varepsilon} = 0$$

olup ifadenin eşitliği sağlaması için

$$f\left(x_1 + \varepsilon\left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x_2) = 0$$

olduğu açıktır. Bu durumda her tarafın limiti alınır

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(x_1 + \varepsilon\left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0$$

olur.

Hareketli Dalga Çözümlerinin Türleri Ve Soliton-Solitary Dalga Teorisine Fiziksel Bakış

Dalga; frekansı, boyu ve genliği ile karakterize edilen fiziksel bir olgu olup ayrıca enerjinin bir konumdan diğerine aktarılmasını sağlayan titreşime verilen isimdir. Suda ilerleyen yüzey dalgaları en bilinenleri olmasına rağmen ses, ışık, sinirler arası iletim ve atomun taneciklerinin hareketleri de dalga özellikleri gösterir. Mekaniksel dalgalardan olan ses dalgası ilerleyebilmek için bir ortama ihtiyaç duyarken elektromanyetik dalgalar boşlukta bile yayılabilir. Ayrıca ortamın özellikleri bir dalganın yayılmasında etkilidir.

Lineer olmayan dalgalar aşağıdaki iki temel özelliği sağlarsa soliton olarak tanımlanabilir (Wadati 2001).

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

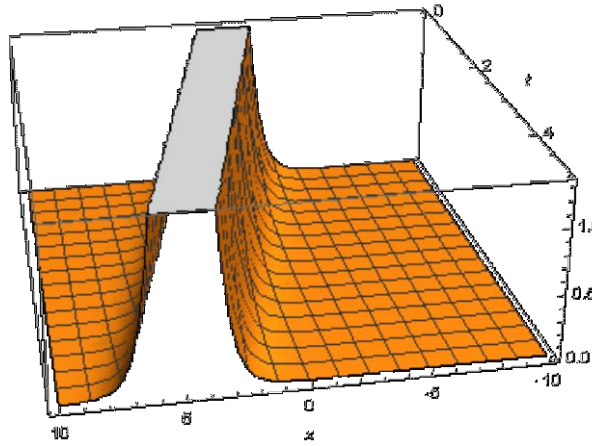
İlk özellik, solitary dalga şartıdır ve 1844'te İskoç John Scott Russell bu dalgaları gözlemleyen ilk bilim insanı olmuştur. Bu gözlem sırasında dalga, orijinal kimliğini korurken uzun süre su kanalı boyunca ilerliyordu. Russell'ın kendi sözleriyle: “Dar bir kanalda bir çift at tarafından çekilen bir botu izliyordum. Bot aniden durunca bir miktar su aniden ileriye doğru büyük bir hızla, yuvarlak düzgün ve iyi tanımlı bir su yığını şeklinde ve hızında bir azalma olmadan hareketini yol boyunca devam ettirdi. At sırtında bu dalgayı takip ettim. Saatte 8-9 mil hızla 30 feet uzunluğundaki ve 1,5 feet yüksekliğindeki ilk orijinal şeklini koruyarak yuvarlanıyordu. Yüksekliği giderek azalıyordu ve 1-2 millik bir taptan sonra onu kanalın dönemeçlerinde kaybettim.” şeklinde ifade etmiştir. Russell'ın gözlemlediği solitary su dalgalarının 1995 yılında Edinburgh yakınlarındaki Union Kanalı'nda tekrar canlandırılması Şekil 3'te gösterilmiştir.



Şekil 3. 1834 yılındaki Russel'in gözlemlediği solitary su dalgalarının 1995 yılında Edinburgh yakınlarındaki Union Kanalı'nda tekrar canlandırılması

Bu keşiften sonra Russell, laboratuvarında solitary dalgalarını elde edebilmek için su tankları oluşturup deneyler yapmış ve solitary dalgalar hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır (Falkovich 2007).

(i) Solitary dalgaları $u(x, t) = \delta \text{sech}^2(k(x - vt))$ şekline sahiptir. Burada k dalga sayısı olmak üzere, dalganın hızı v , dalganın genliği ise δ ile ifade edilmiştir.



Şekil 4. $u(x, t) = \delta \text{sech}^2(k(x - vt))$ fonksiyonunun $\delta = 5$, $v = 1$ ve $k = 1$ değerleri için grafiği

(ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgaı üretir.

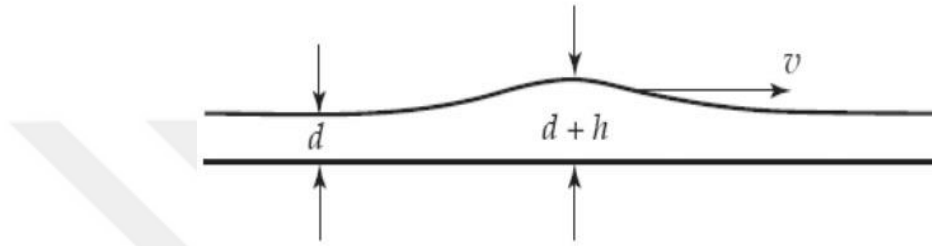
(iii) Normal dalgalardan farklı olarak solitary dalgalar kesinlikle birleşmezler. Bundan dolayı farklı genliklere sahip solitary dalgalar birbirleri ile çarpıştıktan sonra, bu dalgalar

birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar bu durumda düzleşerek veya dikleşerek sönme hareketi yaparken solitary dalgalar kararlıdır ve uzun mesafelere hareket edebilirler.

(iv) Bir kanalda hareket eden bir solitary dalga

$$v = \sqrt{g(d + h)}$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Burada g yerçekimi ivmesi olmak üzere, dalganın yüksekliğini h ve suyun derinliği ise d ile ifade edilmiştir. Bundan dolayı dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır.

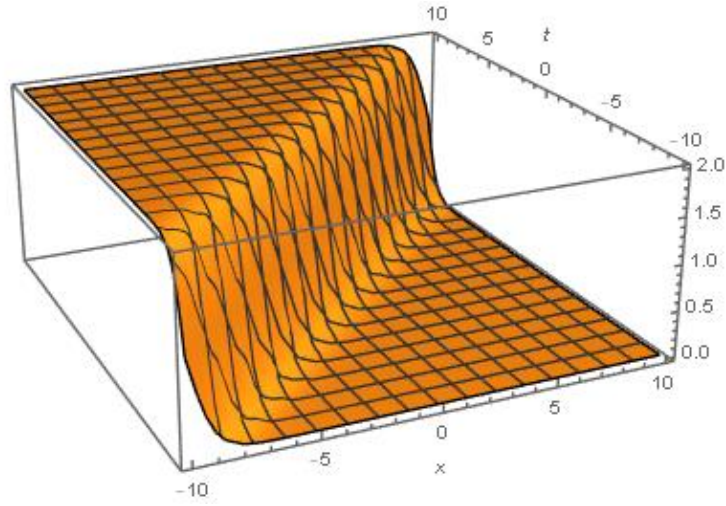


Şekil 5. Bir solitary dalgasının hareketi

Dolayısıyla daha büyük genlikli solitary dalgası daha hızlı hareket eder. Yani solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olup bu özellik normal dalgalardan farkını oluşturur. Bu durumu günlük hayattan örneklerdirsek biri düşük biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda bunları kulağımız aynı anda duyacaktır. Bu durum sesin normal dalgalarla iletildiğine işaret olup eğer bu iletim sırasında solitary dalgalar kullanılsaydı, yüksek sesin daha önce duyulması gerekirdi. Ses dalgalarında durum böyleyken insanın sinirsel iletimini sağlayan sinapslar arasındaki iletim ise normal dalgalarla yapılamaz. Kısaca örneklendirmek gerekirse elimize aldığımız bir çay bardağının sıcaklığını kademeli olarak hissederken kor halinde bir sobaya dokunduğumuzda sıcaklığı ani hissederken refleks olarak elimizi çekeriz. Bu iletimi sağlayan sinapslar bir nevi solitary dalga oluşturup normal dalgalardan daha hızlı bir şekilde sıcaklık algısını beynimize iletir.

Kink Dalgalar:

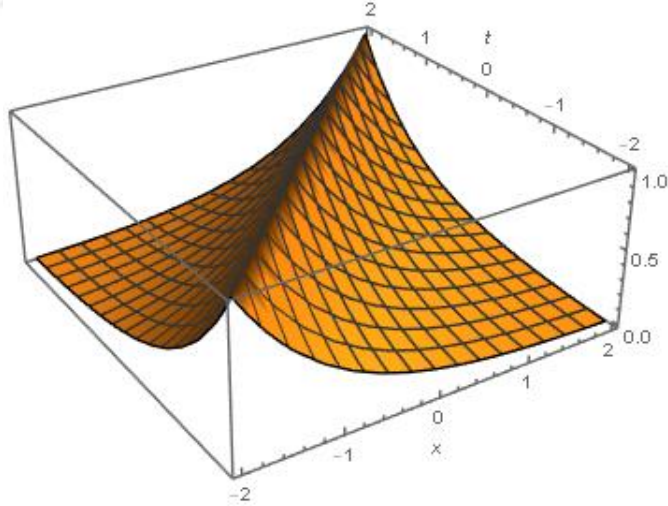
Kink dalgaları, azalarak veya artarak bir asimptotik durumdan diğerine hareket eden dalgalardır. Kink çözümleri sonsuzda bir sabite yaklaşır (Wazwaz 2009).



Şekil 6. $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t)$, $-10 \leq x \leq 10$

Peakon Dalgalar:

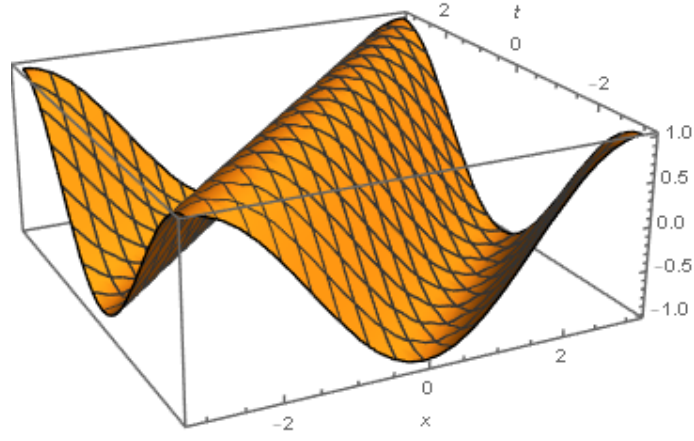
Peakon pik yapmış tek dalga çözümleridir. Bu durumda ilerleyen dalga çözümleri pikin zirve köşesi dışında her yerde düzgündür. Peakon boyutsal türevlerin işaret değiştirdiği noktalardır. Bu yüzden peakonlar $u(x, t)$ çözümünün birinci türevinde sonlu sıçrama noktasına sahiptir. Peakonlar da çarpıştıktan sonra şekillerini ve hızlarını koruyan solitonlardır. Peakonlar araştırmalar sonucu iki kısma ayrılmıştır: Üstel olarak sönen ve periyodik peakonlar (Wazwaz 2009).



Şekil 7. $u(x, t) = e^{-|x-t|}$, $-2 \leq x \leq 2$

Periyodik Dalgalar:

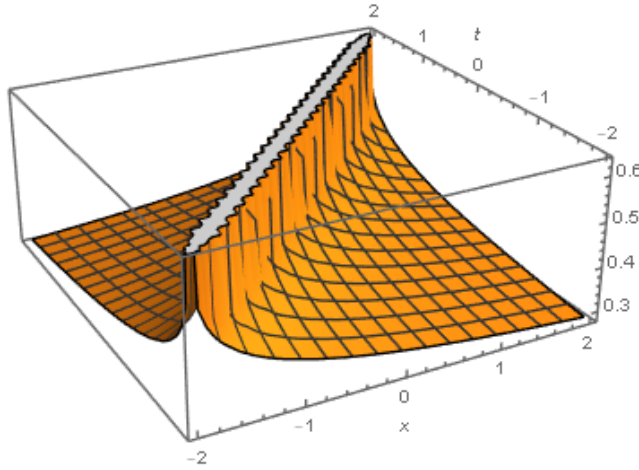
$u(x, t) = \cos(x - t)$ gibi periyodik olan hareketli dalga çeşitleridir. Standart dalga denklemi olan $u_{xx} = u_{tt}$ çözüldüğünde periyodik çözümler elde edilir. Bilindiği gibi bu denklem lineerdir ve bu denklemin bir d'Alambert çözümü mevcuttur (Wazwaz 2009).



Şekil 8. $u(x, t) = \cos(x - t)$, $-\pi \leq x \leq \pi$

Cuspon Dalgalar:

Cusponlar diğer bir çeşit soliton çözümler olup zirvelerinde cusponlar oluşur. Peakonlar tersine tepe noktasında türev sadece işaret değiştirir ve bir cuspon sıçrama noktasındaki türevler ıraksaktır (Wazwaz 2009).



Şekil 9. $u(x, t) = e^{-(|x-ct|)^{1/6}}$, $c = 1$, $-2 \leq x \leq 2$

MATERYAL ve METOT

İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemin Çözüm Durumları

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (1)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada λ ve μ keyfi katsayılar olmak üzere (1)'in yardımcı denkleminin kökleri $\Delta > 0$ için

$$\Phi_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \quad \Phi_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}$$

şeklindedir. $G(\xi)$ ifadesi ise

$$G(\xi) = c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}$$

şeklinde elde edilir. $G(\xi)$ ifadesinin ξ 'ye göre türevini alıp

$$G'(\xi) = c_1 \Phi_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 \Phi_2 e^{\Phi_2 \xi}$$

aşağıdaki düzenlemeler sırasıyla yapılırsa

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_1 \Phi_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 \Phi_2 e^{\Phi_2 \xi}}{c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_1 \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \right) e^{\Phi_1 \xi} + c_2 \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \right) e^{\Phi_2 \xi}}{c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\frac{-\lambda c_1}{2} e^{\Phi_1 \xi} + c_1 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{\Phi_1 \xi} + \frac{-\lambda c_2}{2} e^{\Phi_2 \xi} - c_2 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{\Phi_2 \xi}}{c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\frac{-\lambda}{2} (c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}) + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (c_1 e^{\Phi_1 \xi} - c_2 e^{\Phi_2 \xi})}{c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{(c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}) \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{c_1 e^{\Phi_1 \xi} - c_2 e^{\Phi_2 \xi}}{c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}} \right) - \frac{\lambda}{2} \right]}{c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{c_1 e^{\Phi_1 \xi} - c_2 e^{\Phi_2 \xi}}{c_1 e^{\Phi_1 \xi} + c_2 e^{\Phi_2 \xi}} \right) - \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{c_1 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} - c_2 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}}{c_1 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}} \right) - \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) - c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)}{c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right] - \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{(c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 - c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{(c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 - c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2}$$

bulunur. Burada $c_1 + c_2 = \varphi$ ve $c_1 - c_2 = \gamma$ olarak kabul edilirse

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \gamma \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{\varphi \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \gamma \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2}$$

elde edilir.

$\Delta < 0$ için ise yardımcı denklemin kökleri

$$\Phi_1 = \frac{-\lambda + i\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \quad \Phi_2 = \frac{-\lambda - i\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}$$

olur. $G(\xi)$ ifadesi ise

$$G(\xi) = e^{\frac{(\Phi_1 + \Phi_2)\xi}{2}} \left[c_1 e^{\frac{(\Phi_1 - \Phi_2)\xi}{2}} + c_2 e^{\frac{(\Phi_2 - \Phi_1)\xi}{2}} \right]$$

şeklinde elde edilir. Φ_1 ve Φ_2 değerleri yerine yazılırsa

$$G(\xi) = e^{\frac{-\lambda \xi}{2}} \left[c_1 e^{\frac{(i\sqrt{4\mu - \lambda^2})\xi}{2}} + c_2 e^{\frac{(-i\sqrt{4\mu - \lambda^2})\xi}{2}} \right]$$

bulunur. $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ Euler özdeşliği kullanılırsa

$$G(\xi) = e^{\frac{-\lambda\xi}{2}} \left[c_1 \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) \right] + c_2 \left[\cos\left(-\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + i\sin\left(-\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) \right] \right]$$

$$G(\xi) = e^{\frac{-\lambda\xi}{2}} \left[(c_1 + c_2)\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + i(c_1 - c_2)\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) \right]$$

elde edilir. Burada $c_1 + c_2 = \varphi$ ve $i(c_1 - c_2) = \gamma$ olarak kabul edilirse

$$G(\xi) = e^{\frac{-\lambda\xi}{2}} \left[\varphi\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) \right]$$

bulunur. $G(\xi)$ ifadesinin ξ 'e göre türevi alınır

$$G'(\xi) = \frac{-\lambda}{2} e^{\frac{-\lambda\xi}{2}} \left[\varphi\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) \right] + e^{\frac{-\lambda\xi}{2}} \left[-\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \varphi\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \gamma\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) \right]$$

olur. $G'(\xi)$ ve $G(\xi)$ ifadeleri birbirine oranlanırsa ve gerekli sadeleştirme yapılır

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)}{\gamma\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \varphi\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)} \right]$$

elde edilir.

Son olarak ise $\Delta = 0$ için ise yardımcı denklemin kökleri

$$\Phi_1 = \frac{-\lambda}{2} \quad \Phi_2 = \frac{-\lambda}{2}$$

olup

$$G(\xi) = (c_1 + c_2\xi)e^{\frac{-\lambda\xi}{2}}$$

şeklinde elde edilir. $G(\xi)$ ifadesinin ξ 'e göre türevi alınır

$$G'(\xi) = c_2 e^{\frac{-\lambda\xi}{2}} - \frac{\lambda}{2} (c_1 + c_2\xi) e^{\frac{-\lambda\xi}{2}}$$

bulunur. $G'(\xi)$ ve $G(\xi)$ ifadeleri birbirine oranlanırsa ve gerekli sadeleştirme yapılır

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_2}{c_1 + c_2\xi} - \frac{\lambda}{2}$$

elde edilir. Burada $c_1 + c_2 = \varphi$ ve $c_1 - c_2 = \gamma$ olarak kabul edilirse

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\frac{\varphi + \gamma}{2}}{\frac{\varphi + \gamma}{2} + \frac{\varphi - \gamma}{2} \xi} - \frac{\lambda}{2}$$

ifadesi elde edilir. Δ 'ın durumlarına göre bulunan yukarıdaki $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ ifadeleri

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu > 0 \\ \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu < 0 \\ \frac{\frac{\varphi + \gamma}{2}}{\frac{\varphi + \gamma}{2} + \frac{\varphi - \gamma}{2} \xi} - \frac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu = 0 \end{array} \right.$$

şeklinde toplu olarak yazılabilir (Malik *et al.* 2012).

$\left(\frac{G'}{G}\right)$ - Açılım Metodu

x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$F\left(u, {}^A_0D_t^\beta u, {}^A_0D_x^\beta u, {}^A_0D_t^{2\beta} u, {}^A_0D_x^{2\beta} u, {}^A_0D_t^{3\beta} u, {}^A_0D_x^{3\beta} u, \dots\right) = 0 \quad (2)$$

lineer olmayan uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada F, u 'nun bir polinomudur, $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyondur ve ${}^A_0D_x^\beta u, {}^A_0D_t^\beta u$ türevleri $u(x, t)$ fonksiyonunun x 'e ve t 'e göre β mertebeli Atangana'nın uyumlu kesirli türevleridir.

(2) denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için k ve m sıfırdan farklı sabitler ve $u(x, t) = u(\xi)$ olacak şekilde

$$\xi = \frac{k}{\beta} \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta + \frac{m}{\beta} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta \quad (3)$$

dalga dönüşümü verilsin. (3) dalga dönüşümü ve Tanım 10 göz önüne alınırsa

$${}^A_0D_x^\beta \{u(x, t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u\left(x + \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}, t\right) - u(x, t)}{\varepsilon}$$

sadelik için

$$h = \varepsilon \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \quad \varepsilon = h \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$$

dönüşümü yapıp

$${}_0^A D_x^\beta \{u(x, t)\} = \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}$$

şeklinde düzenleme yapılırsa

$${}_0^A D_x^\beta \{u(x, t)\} = \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

elde edilir. Aynı şekilde

$${}_0^A D_t^\beta \{u(x, t)\} = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

olduğu açıktır. $u(x, t) = u(\xi)$ kabul edildiği için ve zincir kuralı kullanılıp

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\xi)}{\partial x} = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = u' \frac{m}{\beta} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} \end{aligned}$$

bulunur. (2) denklemindeki β mertebeli Atangana'nın uyumlu kesirli türevleri

$${}_0^A D_x^\beta \{u(x, t)\} = \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} u' \frac{m}{\beta} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} = mu'$$

$${}_0^A D_t^\beta \{u(x, t)\} = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} u' \frac{k}{\beta} \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} = ku'$$

şeklinde edilip (2) uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminde

$$F(u, ku', mu', k^2 u'', m^2 u'', k^3 u''', m^3 u''', \dots) = 0 \quad (4)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir.

$G = G(\xi)$ olmak üzere

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (5)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini sağlayan fonksiyon olup (4) adi diferansiyel denkleminin çözümü polinom cinsinden

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \quad (6)$$

şeklinde yazılır. Burada λ ve μ keyfi sabitler, n ise homojen denge bağıntısından elde edilecek

pozitif bir tamsayıdır. Dengeleme bağıntısı ise en büyük mertebeli türeve sahip terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en büyük dereceli lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^s$ olmak üzere

$$D \left[\frac{d^q u}{d\xi^q} \right] = n + q \quad D \left[u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r} \right)^s \right] = np + s(n + r) \quad (7)$$

$$n + q = np + s(n + r)$$

ifadelerinin eşitlenmesiyle n değerinin bulunmasıdır.

(6) ifadesi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'e göre polinom olup (4) denklemi yerine yazılıp elde edilen denklemde aynı dereceli terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle $a_0, a_1, \dots, a_n, m$ ve k bilinmeyenlerinden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen sabitler bulunur. Bulunan bu sabitler (6) ifadesinde yerine yazıldıktan sonra, (3) dalga dönüşümü ve daha önce elde edilen ikinci mertebeden lineer diferansiyel denkleminin çözüm durumları kullanılarak (2) uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin hareketli dalga çözümleri elde edilir.

ARAŞTIRMA BULGULARI

Uyumlu kesirli türev, sıfır noktasındaki herhangi bir türevlenebilir fonksiyonun türevinin sıfıra eşit olması zayıflığına sahiptir (Yépez-Martínez and Gómez-Aguilar 2018). Atangana " uyumlu kesirli türev " in yeni bir versiyonu olan β -uyumlu kesirli türevi önermiştir ve bu öneri uyumlu kesirli türev eksikliğinden kurtulmamıza imkan vermiştir. β -uyumlu kesirli türevi, geleneksel türevlerin özelliklerini sağlar. Atangana ve Baleanu β -uyumlu kesirli türevi kullanarak analitik olarak Hunter Saxton denklemini çözdü (Atangana and Baleanu 2016). Bu bölümde β -uyumlu kesirli türeviyle ifade edilen uzay-zaman kesirli Fitzhugh-Nagumo, Dodd-Bullough Mikhailov, (2+1) Boyutlu Kübik Klein–Gordon ve Phi-Four denklemlerine $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu sırasıyla uygulanmış ve her bir denklemden elde edilen tam çözümler incelenmiştir. Ayrıca elde edilen tam çözümler bazı kesirli β değerleri için Mathematica 12.0 programında grafikleştirilmiştir.

Fitzhugh-Nagumo Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu İle Çözümü

Bu bölümde genellikle sinir uyarılarının iletimini modellemek için kullanılan lineer olmayan önemli bir reaksiyon-difüzyon denklemi olan uzay-zaman kesirli Fitzhugh-Nagumo denkleminin solitary dalga çözümleri elde edilecektir. Ayrıca bu denklem Mathematica adlı bilgisayar yazılımı yardımıyla devre teorisi, biyoloji ve popülasyon genetiği alanlarında da matematiksel modeller olarak ele alınmıştır. Fitzhugh-Nagumo modelinin çözümlerini elde etmek için yapılmış farklı sayısal veya analitik yöntemler içeren birçok çalışma vardır. Li ve Guo, Fitzhugh-Nagumo modelinin kesin çözümlerini elde etmek için ilk integral yöntemini kullanmıştır (Li and Guo 2006). Abbasbandy, Fitzhugh-Nagumo denkleminin yaklaşık analitik çözümlerini elde etmek için homotopi analiz yöntemini kullanmıştır (Abbasbandy 2008). Hariharan ve Kannan, Fitzhugh-Nagumo denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için Haar dalgacık yöntemini kullanmıştır (Hariharan and Kannan 2010). Ayrıca Kumar ve ark. kesirli mertebeden Fitzhugh-Nagumo denkleminin sayısal sonuçlarını değerlendirmek için q-homotopi analizi yaklaşımı ve Laplace dönüşümü yaklaşımının birleşiminden oluşan yeni bir yöntem sunmuştur (Kumar *et al.* 2018).

$${}_0^A D_t^\beta u - {}_0^A D_x^{2\beta} u = u(1-u)(u-b) \quad -1 \leq b \leq 1 \quad (8)$$

şeklindeki ifade edilen Fitzhugh-Nagumo denklemini $b = 1$ için göz önüne alalım. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu başlığında (2) uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin (3) dalga dönüşümü ve Tanım 10 göz önüne alınarak nasıl adi diferansiyel denkleme indirgendiğinin anlatıldığı adımlar burada takip edilirse (8) numaralı uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemden

$$ku' - m^2 u'' = u(1 - u)(u - 1) \quad (9)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. (9) denkleminde en büyük mertebeli terim ' u'' ' ve en büyük dereceli lineer olmayan terim ' u^3 ' arasında (7) deki dengeleme bağıntısı kullanılırsa ($q = 2, p = 3, s = 0$)

$$n + 2 = 3n \quad 2n = 2 \quad n = 1$$

bulunur. Bulunan $n = 1$ değeri (6) da yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^1 a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) \quad (10)$$

elde edilir. Burada $G(\xi)$ fonksiyonu daha önce de açıklandığı gibi ikinci mertebeden lineer olan bir adi diferansiyel denklemin çözümü olduğu unutulmamalıdır. Ayrıca $u(\xi)$ fonksiyonu $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesinin bir polinomu olduğu açıktır. İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi (1) ve bölümün türevini kullanarak

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = \frac{G''G - (G')^2}{(G)^2}, \quad G'' = -\lambda G' - \mu G \quad (11)$$

$$= \frac{(-\lambda G' - \mu G)G - (G')^2}{(G)^2} = -\lambda \left(\frac{G'}{G}\right) - \mu - \left(\frac{G'}{G}\right)^2$$

bulunur. (10) ifadesi (11) den yararlanarak (9) numaralı adi diferansiyel denklemde yerine yazılıp $\left(\frac{G'}{G}\right)$ kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 = ba_0 - a_0^2 - ba_0^2 + a_0^3 - k\mu a_1 - m^2 \lambda \mu a_1$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 = -(-b + k\lambda + m^2 \lambda^2 + 2m^2 \mu + 2a_0 + 2ba_0 - 3a_0^2)a_1$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 = -a_1(k + 3m^2 \lambda + a_1 + ba_1 - 3a_0 a_1)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 = a_1(-2m^2 + a_1^2)$$

elde edilir. Buradaki her bir ifadenin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözümleri

$$a_1 \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{\lambda}, a_0 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}, k \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{2\lambda}, m \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$a_1 \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{\lambda}, a_0 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}, k \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{2\lambda}, m \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$a_1 \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{\lambda}, a_0 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}, k \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{2\lambda}, m \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$a_1 \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{\lambda}, a_0 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}, k \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{2\lambda}, m \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar (10) ifadesinde yerine yazılıp $u(\xi)$ fonksiyonları elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlardaki $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi daha önceki bölümde Δ 'nın durumlarına göre bulunmuş olup $\Delta = 0$ için (8) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ fonksiyonunun katsayıların paydası tanımsız olduğu için bulunamaz. $\Delta > 0$ için ise (8) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ çözüm fonksiyonları sırasıyla

$$\xi = \frac{1}{\beta} \left(\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{2\lambda} \right) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\beta} \left(\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{2\lambda} \right) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\beta} \left(\left(-\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{2\lambda} \right) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{\beta} \left(\left(-\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{2\lambda} \right) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right)$$

olmak üzere

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$- \left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{\lambda} \right) \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + \gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)}{\varphi \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + \gamma \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}$$

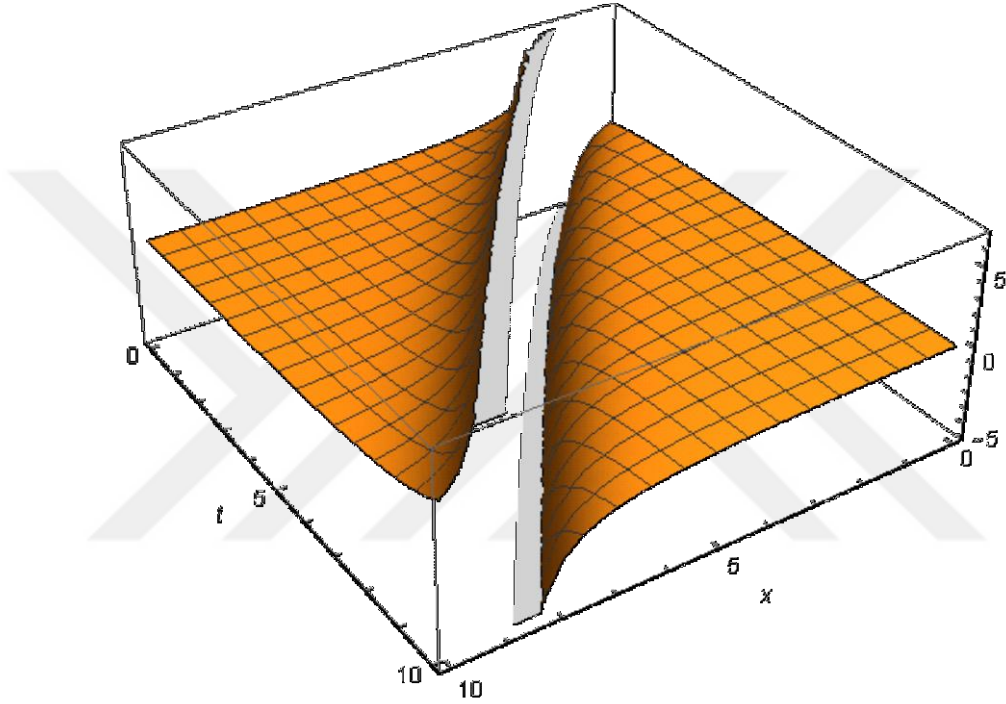
$$- \left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{\lambda} \right) \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1 \right) + \gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1 \right)}{\varphi \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1 \right) + \gamma \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1 \right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$- \left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{\lambda} \right) \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2 \right) + \gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2 \right)}{\varphi \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2 \right) + \gamma \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2 \right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_4(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{\lambda} \right) \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_3\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_3\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_3\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_3\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

olur.



Şekil 10. Fitzhugh-Nagumo denkleminin $\lambda = 6; \mu = 3; \varphi = -1; \gamma = -2; \beta = 0.6$ değerleri için $u_2(x, t)$ çözümünün grafiği

$\Delta < 0$ için ise (8) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ çözüm fonksiyonları sırasıyla

$$u_5(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(-\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}}}{\lambda} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_6(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(-\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_7(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(-\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_8(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(-\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_3\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_3\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_3\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_3\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

tam çözümleri elde edilmiş olur.

(2+1) Boyutlu Kübik Klein–Gordon Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu İle Çözümü

cKG denklemi; kristallerdeki dislokasyonun yayılması, temel parçacıkların davranışı ve Josephson kavşaklarındaki akımların yayılması dahil olmak üzere birçok farklı doğrusal olmayan fenomeni modellemek için kullanılır. (2+1) Boyutlu Kübik Klein–Gordon denklemini

$${}_0^A D_x^{2\beta} u + {}_0^A D_y^{2\beta} u - {}_0^A D_t^{2\beta} u + pu + b u^3 = 0 \quad (12)$$

göz önüne alalım. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu başlığında (2) uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin (3) dalga dönüşümü ve Tanım 10 göz önüne alınıp nasıl adi diferansiyel denkleme çevrildiği anlatılmıştır. (12) denkleminde u fonksiyonu x , y ve t bağımsız değişkenlerine bağlı olduğu için (3) dalga dönüşümü

$$\xi = \frac{k}{\beta} \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + \frac{m}{\beta} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + \frac{l}{\beta} \left(y + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \quad (13)$$

şekline dönüşür. (13) dalgı dönüşümü ve Tanım 10 göz önüne alınıp (12) uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemden

$$(m^2 + l^2 - k^2)u'' + pu + bu^3 = 0 \quad (14)$$

adi diferansiyel denkleml elde edilir. (14) denkleminde en büyük mertebeli terim ‘ u'' ’ ve en büyük dereceli lineer olmayan terim ‘ u^3 ’ arasında (7) deki dengeleme bağıntısı kullanılırsa ($q = 2, p = 3, s = 0$)

$$n + 2 = 3n \quad 2n = 2 \quad n = 1$$

bulunur. Bulunan $n = 1$ değeri (6) da yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^1 a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (15)$$

elde edilir. (15) ifadesi (11) den yararlanarak (14) numaralı adi diferansiyel denklemden yerine yazılıp $\left(\frac{G'}{G} \right)$ kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\left(\frac{G'}{G} \right)^0 = pa_0 + ba_0^3 - k^2\lambda\mu a_1 + l^2\lambda\mu a_1 + m^2\lambda\mu a_1$$

$$\left(\frac{G'}{G} \right)^1 = a_1(p - k^2\lambda^2 + l^2\lambda^2 + m^2\lambda^2 - 2k^2\mu + 2l^2\mu + 2m^2\mu + 3ba_0^2)$$

$$\left(\frac{G'}{G} \right)^2 = 3a_1(-k^2\lambda + l^2\lambda + m^2\lambda + ba_0a_1)$$

$$\left(\frac{G'}{G} \right)^3 = a_1(-2k^2 + 2l^2 + 2m^2 + ba_1^2)$$

elde edilir. Buradaki her bir ifadenin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözümleri

$$a_0 \rightarrow \frac{\sqrt{p}\lambda\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)}, a_1 \rightarrow \frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)},$$

$$m \rightarrow -\frac{\sqrt{2p + (k^2 - l^2)(\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$a_0 \rightarrow -\frac{\sqrt{p}\lambda\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)}, a_1 \rightarrow -\frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)},$$

$$\begin{aligned}
m &\rightarrow -\frac{\sqrt{2p + (k^2 - l^2)(\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \\
a_0 &\rightarrow \frac{\sqrt{p}\lambda\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)}, a_1 \rightarrow \frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)}, \\
m &\rightarrow \frac{\sqrt{2p + (k^2 - l^2)(\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \\
a_0 &\rightarrow -\frac{\sqrt{p}\lambda\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)}, a_1 \rightarrow -\frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)}, \\
m &\rightarrow \frac{\sqrt{2p + (k^2 - l^2)(\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar (15) ifadesinde yerine yazılarak $u(\xi)$ fonksiyonları elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlardaki $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi daha önceki bölümde Δ 'nın durumlarına göre bulunmuş olup $\Delta = 0$ için (12) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ fonksiyonunun katsayıların paydası tanımsız olduğu için bulunamaz. $\Delta > 0$ için ise (12) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ çözüm fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{\beta} \left(k \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta - \frac{\sqrt{2p + (k^2 - l^2)(\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + l \left(y + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right) \\
\xi_1 &= \frac{1}{\beta} \left(k \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + \frac{\sqrt{2p + (k^2 - l^2)(\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + l \left(y + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right) \\
u_1(x, t) &= \frac{\sqrt{p}\lambda\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \\
&+ \left(\frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \right) \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + \gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)}{\varphi \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + \gamma \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right] \\
u_2(x, t) &= \frac{\sqrt{p}\lambda\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \\
&+ \left(\frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \right) \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1 \right) + \gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1 \right)}{\varphi \cosh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1 \right) + \gamma \sinh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1 \right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]
\end{aligned}$$

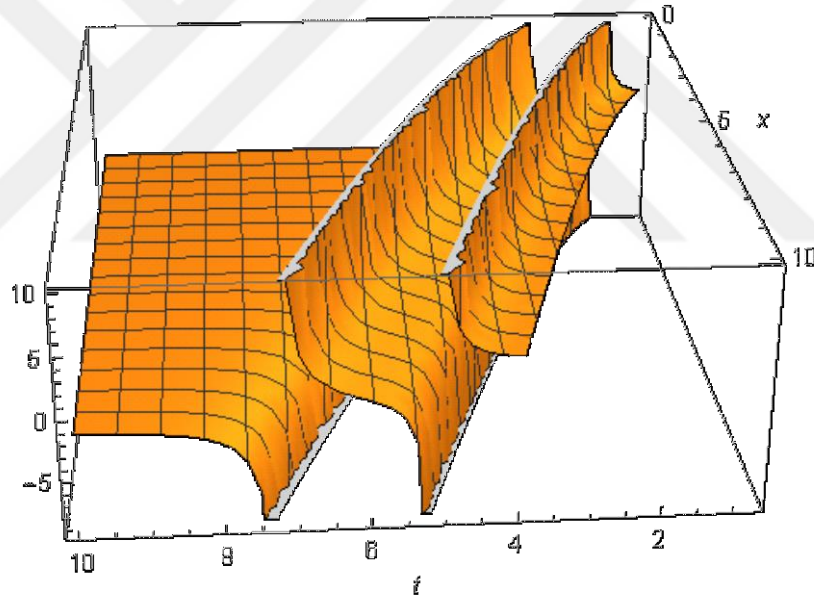
$$u_3(x, t) = -\frac{\sqrt{p}\lambda\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)}$$

$$+ \left(-\frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \right) \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_4(x, t) = -\frac{\sqrt{p}\lambda\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)}$$

$$+ \left(-\frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \right) \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi_1\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi_1\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi_1\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi_1\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

şeklinde bulunur.



Şekil 11. (2+1) cKG denkleminin $y = 1; \lambda = 6; \mu = 4; \varphi = -3; \gamma = 1; \beta = 0.5; k = 2; l = -2; p = 6; b = -1$ değerleri için $u_2(x, t)$ çözümünün grafiği

$\Delta < 0$ için (12) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ çözüm fonksiyonları ise sırasıyla

$$u_5(x, t) = \frac{\sqrt{p\lambda}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} - \frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_6(x, t) = \frac{\sqrt{p\lambda}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} - \frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_7(x, t) = \frac{\sqrt{p\lambda}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} - \frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_8(x, t) = \frac{\sqrt{p\lambda}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} - \frac{2\sqrt{p}\sqrt{-b(\lambda^2 - 4\mu)}}{b(\lambda^2 - 4\mu)} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

olur.

Dodd-Bullough-Mikhailov Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu İle Çözümü

Ziber ve Sabat tarafından geliştirilen Dodd-Bullough denklemi; katı hal fiziği, doğrusal olmayan optik ve kuantum alan teorisi gibi birçok bilimsel uygulamada önemli bir rol oynar. Son yıllarda Dodd-Bullough denklemi için birçok araştırma çalışması yapılmıştır. Dodd-Bullough'un üç boyutlu unimodüler afin uzayda iki boyutlu afin kürenin içsel geometrisini belirlediği gösterilmiştir. Bununla birlikte Dodd-Bullough denkleminin doğrusal olmayan iki boyutlu SL (3, R) sigma modeli ile ilişkili olduğu da gösterilmiştir. Dodd-Bullough denklemini

çözmek için, birçok matematikçi bazı yöntemler öne sürmüş ve farklı çözüm formülleri elde etmiştir. Dodd-Bullough-Mikhailov denklemini

$${}_0^A D_{xt}^{2\beta} v + e^v + e^{-2v} = 0 \quad (16)$$

göz önüne alalım. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu başlığında (2) uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin (3) dalga dönüşümü ve Tanım 10 göz önüne alınıp nasıl adi diferansiyel denkleme çevrildiğinin anlatıldığı adımlar burada takip edilirse (16) numaralı uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemden

$$kmv'' + e^v + e^{-2v} = 0 \quad (17)$$

adi diferansiyel denkleme dönüşür. (17) denkleminde $u = e^v$, $v = \ln u$ dönüşümü yapılırsa

$$v' = \frac{u'}{u}$$

olup v'' ifadesini bulmak için bölümün türevi kullanırsa

$$v'' = \frac{u''u - (u')^2}{u^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifade (17) denkleminde yerine yazılıp

$$km \left(\frac{u''u - (u')^2}{u^2} \right) + u + u^{-2} = 0$$

denklemini u^2 ile genişletirsek

$$kmuu'' + km(u')^2 + u^3 + 1 = 0 \quad (18)$$

elde edilir. (18) denkleminde en büyük mertebeli terim ' uu'' ' ve en büyük dereceli lineer olmayan terim ' u^3 ' arasında (7) deki dengeleme bağıntısı kullanılırsa ($q = 1$, $p = 3$, $s = 1$, $r = 2$)

$$n + n + 2 = 3n \quad 2n + 2 = 3n \quad n = 2$$

bulunur. Bulunan $n = 2$ değeri (6) da yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^2 a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + a_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \quad (19)$$

elde edilir. (19) ifadesi (11) den yararlanarak (18) numaralı adi diferansiyel denklemde yerine yazılıp $\left(\frac{G'}{G}\right)$ kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 = 1 + a_0^3 + km\lambda\mu a_0 a_1 - km\mu^2 a_1^2 + 2km\mu^2 a_0 a_2$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 = km\lambda^2 a_0 a_1 + 2km\mu a_0 a_1 + 3a_0^2 a_1 - km\lambda\mu a_1^2 + 6km\lambda\mu a_0 a_2 - 2km\mu^2 a_1 a_2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{G'}{G}\right)^2 &= 3km\lambda a_0 a_1 + 3a_0 a_1^2 + 4km\lambda^2 a_0 a_2 + 8km\mu a_0 a_2 + 3a_0^2 a_2 - km\lambda\mu a_1 a_2 \\ &\quad - 2km\mu^2 a_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{G'}{G}\right)^3 &= 2kma_0 a_1 + km\lambda a_1^2 + a_1^3 + 10km\lambda a_0 a_2 + km\lambda^2 a_1 a_2 + 2km\mu a_1 a_2 + 6a_0 a_1 a_2 \\ &\quad - 2km\lambda\mu a_2^2 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 = kma_1^2 + 6kma_0 a_2 + 5km\lambda a_1 a_2 + 3a_1^2 a_2 + 3a_0 a_2^2$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^5 = a_2(4kma_1 + 2km\lambda a_2 + 3a_1 a_2)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^6 = a_2^2(2km + a_2)$$

elde edilir. Buradaki her bir ifadenin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözümleri

$$a_0 \rightarrow -\frac{m(\lambda^2 + 2\mu)}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}, a_1 \rightarrow -\frac{6m\lambda}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}},$$

$$a_2 \rightarrow -\frac{6m}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}, k \rightarrow \frac{3}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}$$

$$a_0 \rightarrow \frac{(-1)^{1/3}m(\lambda^2 + 2\mu)}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}, a_1 \rightarrow \frac{6(-1)^{1/3}m\lambda}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}, a_2 \rightarrow \frac{6(-1)^{1/3}m}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}},$$

$$k \rightarrow -\frac{3(-1)^{1/3}}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}$$

$$a_0 \rightarrow -\frac{(-1)^{2/3}m(\lambda^2 + 2\mu)}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}, a_1 \rightarrow -\frac{6(-1)^{2/3}m\lambda}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}},$$

$$a_2 \rightarrow -\frac{6(-1)^{2/3}m}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}, k \rightarrow \frac{3(-1)^{2/3}}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar (19) ifadesinde yerine yazılıp $u(\xi)$ fonksiyonları elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlardaki $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi daha önceki bölümde Δ 'nın durumlarına göre bulunmuş

olup $\Delta = 0$ için (17) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ fonksiyonunun katsayıların paydası tanımsız olduğu için bulunamaz. $\Delta > 0$ için ise (17) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ çözüm fonksiyonları sırasıyla

$$\xi = \frac{1}{\beta} \left(\left(-\frac{3(-1)^{1/3}}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \right) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + (m) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\beta} \left(\left(\frac{3(-1)^{1/3}}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \right) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + (m) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\beta} \left(\left(\frac{3(-1)^{2/3}}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \right) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + (m) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right)$$

olmak üzere

$$u_1(x, t) = -\frac{m(\lambda^2 + 2\mu)}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} - \frac{6m\lambda}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right] - \frac{6m}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

$$u_2(x, t) = -\frac{m(\lambda^2 + 2\mu)}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} - \frac{6m\lambda}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right] - \frac{6m}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_1\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

$$u_3(x, t) = -\frac{m(\lambda^2 + 2\mu)}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}$$

$$-\frac{6m\lambda}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

$$-\frac{6m}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2\right)}{\varphi \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi_2\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

olur. $\Delta < 0$ için (17) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ çözüm fonksiyonları ise sırasıyla

$$u_4(x, t) = -\frac{m(\lambda^2 + 2\mu)}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}$$

$$-\frac{6m\lambda}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)}{\varphi \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

$$-\frac{6m}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)}{\varphi \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

$$u_5(x, t) = -\frac{m(\lambda^2 + 2\mu)}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}$$

$$-\frac{6m\lambda}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)}{\varphi \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

$$-\frac{6m}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)}{\varphi \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

$$u_6(x, t) = -\frac{m(\lambda^2 + 2\mu)}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}}$$

$$-\frac{6m\lambda}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right)}{\varphi \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$-\frac{6m}{(m^3(\lambda^2 - 4\mu)^3)^{1/3}} \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right)}{\varphi \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_2\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]^2$$

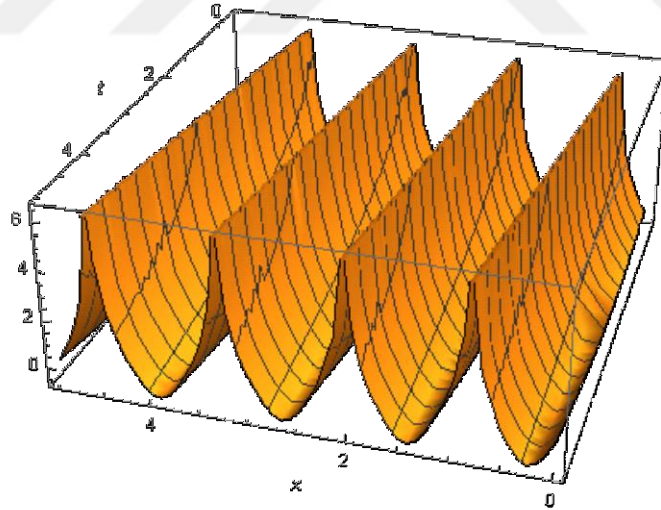
şeklinde bulunulur. (16) numaralı denklemde $v = \ln u$ dönüşümü uygulandığı için (16) numaralı denklemin tam çözümleri

$$v_1(x, t) = \ln(u_1(x, t)) \quad v_2(x, t) = \ln(u_2(x, t))$$

$$v_3(x, t) = \ln(u_3(x, t)) \quad v_4(x, t) = \ln(u_4(x, t))$$

$$v_5(x, t) = \ln(u_5(x, t)) \quad v_6(x, t) = \ln(u_6(x, t))$$

elde edilir.



Şekil 12. Dodd-Bullough-Mikhailov denkleminin $m = 2; \lambda = 2; \mu = 3; \varphi = -3; \gamma = 4; \beta = 0.9$ değerleri için $v_2(x, t)$ çözümünün grafiği

Phi-Four Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu İle Çözümü

Klein-Gordon denkleminin belirli bir formu olan ve parçacık ve nükleer fizikte kullanılan Phi-Four

$${}_0^A D_t^{2\beta} u - {}_0^A D_x^{2\beta} u - u + u^3 = 0 \quad (20)$$

denklemini göz önüne alalım. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu başlığında (2) uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin (3) dalga dönüşümü ve Tanım 10 göz önüne alınıp nasıl adi diferansiyel denkleme çevrildiğinin anlatıldığı adımlar burada takip edilirse (20) numaralı uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemden

$$(k^2 - m^2)u'' - u + u^3 = 0 \quad (21)$$

adi diferansiyel denklem elde edilir. (21) denkleminde en büyük mertebeli terim ' u'' ' ve en büyük dereceli lineer olmayan terim ' u^3 ' arasında (7) deki dengeleme bağıntısı kullanılırsa ($q = 2, p = 3, s = 0$)

$$n + 2 = 3n \quad 2n = 2 \quad n = 1$$

bulunur. Bulunan $n = 1$ değeri (6) da yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^1 a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) \quad (22)$$

elde edilir. (22) ifadesi (11) den yararlanarak (21) numaralı adi diferansiyel denklemde yerine yazılıp $\left(\frac{G'}{G}\right)$ kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 = -a_0 + a_0^3 + k^2\lambda\mu a_1 - m^2\lambda\mu a_1$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 = a_1(-1 + k^2\lambda^2 - m^2\lambda^2 + 2k^2\mu - 2m^2\mu + 3a_0^2)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 = 3a_1(k^2\lambda - m^2\lambda + a_0a_1)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 = a_1(2k^2 - 2m^2 + a_1^2)$$

elde edilir. Buradaki her bir ifadenin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözümleri

$$a_0 \rightarrow -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, a_1 \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, k \rightarrow -\frac{\sqrt{-2 + m^2\lambda^2 - 4m^2\mu}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$a_0 \rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, a_1 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, k \rightarrow -\frac{\sqrt{-2 + m^2\lambda^2 - 4m^2\mu}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$a_0 \rightarrow -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, a_1 \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, k \rightarrow \frac{\sqrt{-2 + m^2\lambda^2 - 4m^2\mu}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$a_0 \rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, a_1 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, k \rightarrow \frac{\sqrt{-2 + m^2\lambda^2 - 4m^2\mu}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar (22) ifadesinde yerine yazılıp $u(\xi)$ fonksiyonları elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlardaki $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi daha önceki bölümde Δ 'nın durumlarına göre bulunmuş olup $\Delta = 0$ için (20) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ fonksiyonunun katsayıların paydası tanımsız olduğu için bulunamaz. $\Delta > 0$ için ise (20) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ çözüm fonksiyonları sırasıyla

$$\xi = \frac{1}{\beta} \left(\left(-\frac{\sqrt{-2 + m^2\lambda^2 - 4m^2\mu}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + (m) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\beta} \left(\left(\frac{\sqrt{-2 + m^2\lambda^2 - 4m^2\mu}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta + (m) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^\beta \right)$$

olmak üzere

$$u_1(x, t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$+ \left(-\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) + \gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right)}{\gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) + \gamma \sinh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_2(x, t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$+ \left(-\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1 \right) + \gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1 \right)}{\gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1 \right) + \gamma \sinh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1 \right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_3(x, t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}$$

$$+ \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) + \gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right)}{\gamma \cosh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) + \gamma \sinh \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_4(x, t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{\varphi \sinh\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)}{\gamma \cosh\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \sinh\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

bulunur. $\Delta < 0$ durumunda ise (20) numaralı uzay-zaman kesirli diferansiyel denkleminin $u(x, t)$ çözüm fonksiyonları sırasıyla

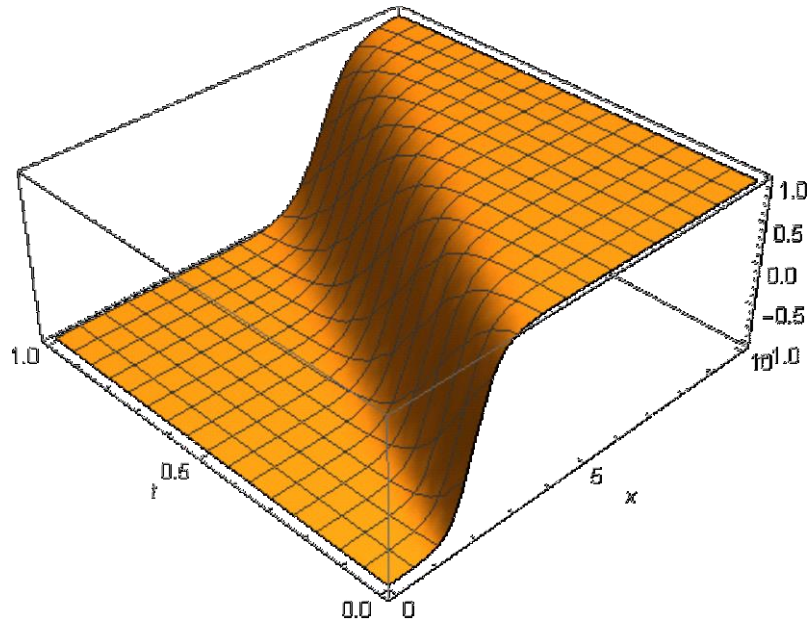
$$u_5(x, t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_6(x, t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_7(x, t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$u_8(x, t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} + \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{-\varphi \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)}{\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi_1\right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \right]$$

elde edilir.



Şekil 13. Phi-Four denkleminin $m = 3; \lambda = 6; \mu = 3; c = -6; n = -5; \beta = 0.5$; değerleri için $u_6(x, t)$ çözümünün grafiği

TARTIŞMA VE SONUÇ

Yapılan bu tez çalışmasında son dönemde birçok araştırmacının dikkatini çeken uzay-zaman kesirli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılımı yöntemi incelenmiştir. Literatürde mevcut olan kesirli türev tanımları incelenip diğerlerine göre daha güncel olan ve kesirli integraller olmadan türev tanımından hareketle elde edilen Atangana'nın β -uyumlu kesirli türevi kullanılmıştır. Böylece hem $\beta = 1$ için önceki çalışmalardaki sonuçlara ulaşılmış olup hem de $0 < \beta \leq 1$ aralığında farklı kesirli β değerleri için farklı tam çözümler elde edilmiştir. Elde edilen bu tam çözümlerin doğruluğu Mathematica 12.0 programında test edilmiştir.

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için tek bir yöntemin olmadığı ve her yöntemin araştırmacıların deneyimine bağlı olarak avantajları ve dezavantajları olduğu görülmüştür. Ayrıca tüm teorilerin probleme bağlı olduğu söylenebilir, yani bazı yöntemler belirli problemler için iyi sonuçlar verirken diğer problemlerde kullanışlı olmayabilir. Bu nedenle, literatürde yaygın kullanılan bazı yöntemleri, muhtemel yeni tam çözümleri aramak veya mevcut çözümleri farklı yaklaşımla doğrulamak için daha önce çözülmemiş doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulamak önemlidir.

- Abbasbandy, S., Zakaria, F. S., 2008. Soliton solutions for the fifth-order KdV equation with the homotopy analysis method. *Nonlinear Dynamics*, 51(1-2), 83-87.
- Abdou, M. A., 2007. The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 31(1), 95-104.
- Ablowitz, M. J., Ablowitz, M. A., Clarkson, P. A., Clarkson, P. A., 1991. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering* (Vol. 149). Cambridge university press.
- Abuasad, S., Hashim, I.S.H.A.K., 2018. Homotopy decomposition method for solving higher-order time-fractional diffusion equation via modified beta derivative. *Sains Malaysiana*, 47(11), 2899-2905.
- Aly R. Seadawy., Khalid K. Ali., R.I. Nuruddeen., 2019. A variety of soliton solutions for the fractional Wazwaz-Benjamin-Bona- Mahony equations. *Results in Physics*, 2234-2241.
- Arfken G.B., Weber H.J., 1995. *Mathematical Methods for Physicist*, Fourth Edition, Academic Press.
- Atangana, A., 2015. *Derivative with a new parameter: Theory, methods and applications*. Academic Press.
- Atangana A., Baleanu D., 2016. Alsaedi A. Analysis of time-fractional Hunter-Saxton equation: a model of neumatic liquid crystal. *Open Phys.* 14(1):145–149.
- Atangana, A., Doungmo-Goufo, E.F., 2015. Solution of diffusion equation with local derivative with new parameter. *Thermal Science*. 231-238.
- Atangana, A., Alqahtani, R.T., 2016. Modelling the spread of river blindness disease via the caputo fractional derivative and the beta-derivative. *Entropy*, 18(2), 40.
- Butera, S., Di Paola, M., 2014. Fractional differential equations solved by using Mellin transform. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(7), 2220-2227.
- Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent— II. *Geophysical Journal International*, 13(5), 529-539.
- Deng, X., Zhao, M. and Li, X., 2009. Travelling wave solutions for a nonlinear variant of the PHI-four equation, *Mathematical and Computer Modelling*, 49, 617–622
- Feng, Z., 2004. Comment on “On the extended applications of homogeneous balance method”. *Applied Mathematics and Computation*, 158(2), 593-596.
- Guo, S., Zhou, Y., 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to the Whitham-Broer-Kaup-Like equaitons and coupled Hirota-Satsuma KdV equaitons, *Applied Mathematics and Computation*, 215, 3214-3221.
- Hariharan, G., Kannan, K., 2010. Haar wavelet method for solving some nonlinear parabolic equations. *Journal of mathematical chemistry*, 48(4), 1044-1061.
- Hernandez-Martinez, E., Valdés-Parada, F., Alvarez-Ramirez, J., Puebla, H., Morales-Zarate, E., 2016. A Green's function approach for the numerical solution of a class of fractional reaction–diffusion equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 121, 133-145.
- Hirota, R., 1971. Exact solution of the Korteweg—de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters*, 27(18), 1192.
- Jaber, K. K., Ahmad, R. S., 2018. Analytical solution of the time fractional Navier-Stokes equation. *Ain Shams Engineering Journal*, 9(4), 1917-1927.
- Jafari, H., Tajadodi, H., 2010. He's variational iteration method for solving fractional Riccati differential equation. *International Journal of Differential Equations*, 2010.
- Javeed, S., Saif, S., Waheed, A., Baleanu, D., 2018. Exact solutions of fractional mBBM equation and coupled system of fractional Boussinesq-Burgers. *Results in Physics*, 9, 1275-1281.

- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Kumar, D., Singh, J., Baleanu, D., 2018. A new numerical algorithm for fractional Fitzhugh–Nagumo equation arising in transmission of nerve impulses. *Nonlinear Dynamics*, 91(1), 307-317.
- Li, H., Guo, Y., 2006. New exact solutions to the Fitzhugh–Nagumo equation. *Applied Mathematics and Computation*, 180(2), 524-528.
- Li, S., Zhou, Z., 2019. Fractional spectral collocation method for optimal control problem governed by space fractional diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 350, 331-347.
- Machado, J.T., Galhano, A.M., Trujillo, J.J. 2014. On development of fractional calculus during the last fifty years. *Scientometrics*, 98(1), 577-582.
- Malik, A., Chand, F., Kumar, H., Mishra, S. C., 2012. Exact solutions of the Bogoyavlenskii equation using the multiple $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(9), 2850-2859.
- Meng, F., 2013. A New Approach for Solving Fractional Partial Differential Equations. *Journal of Applied Mathematics*
- Mohyud-Din, S. T., Bibi, S., 2017. Exact solutions for nonlinear fractional differential equations using exponential rational function method. *Optical and Quantum Electronics*, 49(2), 64.
- Oldham, K.B., Spanier, J., 1974. *The Fractional Calculus*. Academic Press. New York.
- Ortigueira, M.D. Machado, J.T. 2015. What is a fractional derivative?. *Journal of computational Physics*, 293, 4-13.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, California.
- Rogers, C., Shadwick, W.F., 1982. *Bäcklund transformations and their applications*. Academic press.
- Saeed, U., Iqbal, M. A., 2015. Modified Chebyshev wavelet methods for fractional delay-type equations. *Applied Mathematics and Computation*, 264, 431-442.
- Salas, A. H., Gómez S, C. A., 2010. Application of the Cole-Hopf transformation for finding exact solutions to several forms of the seventh-order KdV equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010.
- Wadati, M. 2001. Introduction to solitons. *Pramana*, 57(5-6), 841-847.
- Wang, M., Li, X., Zhang, J. 2008. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of non-linear evolution equations in mathematical physics. *Phys. Lett. A* 372, 417- 423.
- Wazwaz, A. M., 2008. The tanh method for travelling wave solutions to the Zhiber–Shabat equation and other related equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(3), 584-592.
- Wazwaz, A.M., 2009. *Partial differential equations and solitary waves theory*. Springer.
- Xiang, C., 2012. A note on exact travelling wave solutions for nonlinear PHI-four equation, *Applied Mechanics and Materials*, 4569-4572.
- Xiong, X., Xue, X., 2019. A fractional Tikhonov regularization method for identifying a space-dependent source in the time-fractional diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 349, 292-303.
- Yépez-Martínez, H., Gómez-Aguilar, J.F., 2018. Fractional subequation method for Hirota–Satsuma-coupled KdV equation and coupled mKdV equation using the Atangana’s conformable derivative. *Waves in Random and Complex Media*

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Sadullah BULUT
Doğum tarihi:	17 Eylül 1994
Doğum Yeri:	Köprübaşı/Trabzon
Uyruğu:	T.C.
Adres:	Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi
Tel:	05456050161
E-mail:	sadullah.bulut@erzurum.edu.tr
Eğitim	
Lise:	Hasan Sadri Yetmişbir Anadolu Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Eğitim Fakültesi
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Ens, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Orta