

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ İTERASYON
METOTLARIYLA ELDE EDİLMESİ**

Hükmi KIZILTUNÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2007

Her hakkı saklıdır

Doç. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, *Hükmî KIZILTUNÇ* tarafından hazırlanan bu çalışma 24.12.2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

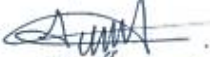
Başkan: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

İmza : 

Üye: Prof. Dr. Muhammet KAMALI

İmza : 

Üye: Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

İmza : 

Üye: Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza : 

Üye: Doç. Dr. Sezgin AKBULUT

İmza : 

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

(imza)

Prof. Dr. Mehmet ERTUĞRUL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ İTERASYON METOTLARIYLA ELDE EDİLMESİ

Hükmi KIZILTUNÇ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezgin AKBULUT

Bu tezde, E genişlemeyen P çekmesine sahip bir reel düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi olmak üzere $T, S : K \rightarrow E$, $F_T \cap F_S := \{x \in K : Sx = Tx = x\} \neq \emptyset$ olacak şekilde genişlemeyen iki dönüşüm olsun.

Uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ olmak üzere

$$x_{n+1} = P\left((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n SP\left[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n\right]\right), \quad x_1 \in K, \quad n \geq 1,$$

şeklinde oluşturulan iterasyon yöntemi için şu sonuçlar elde edildi: (a) Eğer E nin duali E^* , Kadec-Klee özelliğine sahip ise $\{x_n\}$ dizisi bir $x^* \in F_T \cap F_S$ noktasına zayıf yakınsar. (b) Eğer T ve S , (A) şartını sağlarsa $\{x_n\}$ dizisi bir $x^* \in F_T \cap F_S$ noktasına kuvvetli yakınsar. (c) T ve S dönüşümleri ortak kararlıdır.

2007, 58 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, Mann, Ishikawa ve Noor iterasyonları, Genişlemeyen dönüşümler, T -kararlı ve ortak kararlı.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

**OBTAINING WITH ITERATION METHODS OF FIXED POINTS OF
NONEXPANSIVE MAPPINGS**

Hükmi KIZILTUNÇ

Ataturk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

In this thesis, suppose that K is a nonempty closed convex subset of a real uniformly convex Banach space E with P as a nonexpansive retraction. Let $T, S : K \rightarrow E$ be two nonexpansive non-self maps with $F_T \cap F_S := \{x \in K : Sx = Tx = x\} \neq \emptyset$. Also suppose that $\{x_n\}$ is generated iteratively by

$$x_{n+1} = P\left((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n SP\left[(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n\right]\right), \quad x_1 \in K, \quad n \geq 1,$$

where $\{\alpha_n\}$ and $\{\beta_n\}$ are real sequences in $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ for some $\varepsilon \in (0, 1)$. It is proved that (a) If the dual E^* of E has the Kadec-Klee property, then $\{x_n\}$ weak converges to some $x^* \in F_T \cap F_S$. (b) If T and S satisfies condition (A) , then $\{x_n\}$ is strong converges to some $x^* \in F_T \cap F_S$. (c) T and S mappings are common stable.

2007, 58 pages

Keywords: Fixed point, Mann, Ishikawa ve Noor iteration, Nonexpansive mappings, T -stable and common stable.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarım ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Sezgin AKBULUT'a, hocam Sayın Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR'e, ayrıca A.B.D.'deki Indiana Üniversitesi'nden Sayın Prof. Dr. B. E. RHOADES'e ve Suudi Arabistan'daki King Abdul Aziz Üniversitesi'nden Sayın Prof. Dr. Naseer SAHAHZAD'a en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Başta Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN'a, tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Ahmet IŞIK'a ve Matematik Bölümünün tüm öğretim elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güvenden dolayı aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Hükmi Kızıltunç

Aralık 2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Genel Kavramlar	4
2.2. Sabit Nokta Kavramı.....	9
2.3. Dönüşümlerin Sabit Noktaları.....	17
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	27
3.1. Mann, Ishikawa ve Noor İterasyonlarının Yakınsamaları	31
3.2. Genişlemeyen Dönüşümlerin İncelenmesi.....	35
3.3. T – Kararlılık (T – Stability)	37
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	39
4.1. Genişlemeyen Dönüşümlerin Yakınsamaları.....	39
4.2. Temel Sonuçlar	43
4.3. Genişlemeyen Dönüşümlerin Ortak Kararlılığı	50
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	52
KAYNAKLAR	55

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$
F_T	T dönüşümünün sabit noktaların kümesi
$R(T)$	T dönüşümünün değer kümesi
$D(T)$	T dönüşümünün tanım kümesi
$T, S : K \rightarrow E$	T ve S , K dan E ye tanımlı dönüşümler
$D(x_0; r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$D'(x_0; r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı delik yuvar
$\overline{D}(x_0; r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$\dim(X)$	X uzayının boyutu
E^*	E nin duali
F	Cisim ($F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$)
c_0	Sıfıra yakınsayan diziler kümesi
$(N, \ \cdot \)$	Normlu uzay
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
P	Retraction (Çekme)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.2.4.1.	T bir daraltan (contraction) dönüşüm	12
Şekil 2.2.11.1	Dönüşümler arasındaki bağlantı	15

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1.1.1. Mann, Ishikawa ve Noor İterasyonlarının Yakınsamaları	32
Çizelge 3.1.1.2. Mann, Ishikawa ve Noor İterasyonlarının Yakınsamaları	33
Çizelge 3.1.2.1. Fonksiyonel Denklemlerin Sabit Nokta Formülasyonu.....	35

1. GİRİŞ

“Sabit Nokta Teorisi” çalışmaları 19. yüzyıl başlarına dayanmaktadır. Matematikte sabit nokta teorisi, adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını, tekliğini ve bir integral denklemde çözümün varlığını göstermek amacıyla kurulmuştur. Bunun yanında pratik sonuçlarının ve uygulamalarının oldukça iyi bilinmesinden dolayı tıp (tomografi, yeniden görüntü oluşturma), haberleşme (telekomünikasyon, interpolasyon, ekstrapolasyon, quantizer tasarlama, sinyal sentezleri, filtre sentezleri) ve ekonomi başta olmak üzere, daha bir çok alanda yoğun olarak uygulanmıştır.

Genel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teori, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teoridir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları, 1909-1913 yılları arasında L. E. J. Brouwer ile başlamıştır. Analize giriş derslerinden de çok iyi bilinen en basit sabit nokta teoremi: “ $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir dönüşüm ise, f nin $[a, b]$ aralığında bir sabit noktası vardır” şeklindedir. Brouwer bu teoremi, 1912 yılında, $\mathbb{R}^n$ üzerine şu şekilde genişletmiştir : “ $B, \mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $f: B \rightarrow B$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir”. Brouwer Sabit Nokta Teoremi, ekonomi biliminde (iktisat) Nobel ödülü alan John Nash’ın makalelerinde temel bir matematiksel malzemedir. Yine ekonomistlere göre Brouwer Sabit Nokta Teoremi, kesin bir ekonomik dengenin hesaplanması için yardımcı olabilir.

Bir sabit noktanın varlığı hakkındaki en basit sonuç Banach Teoremi’dir. Bazı matematikçiler bu teoremi, “daraltan (büzülme) dönüşüm teoremi” olarak da adlandıırırlar. “Daralma ilkesi” olarak bilinen bu teorem, ilk olarak 1920 li yılların

başlarında, S. Banach tarafından “ (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad 0 \leq k < 1$$

ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir” şeklinde ortaya konulmuştur. Bu teorem, S. Banach’ın doktora tezinin bir kısmı olarak belirlenmiş ve ispatı yapılmıştır. Bundan sonraki aşamalarda Banach’ın sabit nokta teoremi, matematiğin birçok dalındaki varlık problemlerinin çözümünde, kullanışlı ve kolaylık sağlayan bir unsur olmuştur.

1930 yılında da J. Schauder, Brouwer Sabit Nokta Teoremi’ni geliştirerek “ X bir Banach uzayı, K, X in boş olmayan herhangi bir kompakt konveks alt kümesi ve $f: K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, f en az bir sabit noktaya sahiptir” ifadesini ispat etmiştir.

Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini de göstermektedir.

Daha sonra 1950 de F. E. Browder, 1965 de W. A. Kirk, 1968 de R. Kannan, 1974 de L. B. Ćirić ve daha pek çok kişi bu temel sonuçları genelleştirerek bazı yeni sonuçlar elde etmişlerdir. 1979’dan günümüze kadar, G. Jungck, B. E. Rhoades, S. Sessa gibi pek çok araştırmacı, birden fazla dönüşümün ortak sabit noktaları üzerine çok sayıda çalışma yapmıştır. Ayrıca Troy Hicks ve B. E. Rhoades (1979), (1992), Shie Park (1980), ve B. E. Rhoades (1983), (1996), metrik uzaylardaki genel prensipleri kullanarak sabit nokta ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Yine B. E. Rhoades (1991)’de, özel durumlar olarak, diğer yazarların bir çok sayıdaki sabit nokta teoremlerini içeren genel prensipleri göstermiştir. Bu gösterimin amacı ise Hausdorff uzaylardaki dönüşümler için iki genel sabit nokta teoremini kurmak ve daha sonra bu teoremlerin özel durumları olan Chung, Rani (1992) ve Popa’ nın (1983) sonuçlarını göstermektir.

Kısaca özetlemek gerekirse, bir T operatörünün sabit noktası, $Tx = x$ denkleminin bir çözümüdür. Kesin daraltan dönüşümler için Banach Teoremi, sonlu boyutlu bir uzayda herhangi sürekli bir dönüşüm için Brouwer Teoremi, sonsuz boyutlu Banach uzaylarına Brouwer sonucunun genelleştirmesi olan Schauder Teoremi, sabit nokta teorisindeki temel teoremlerdir.

Sunulan bu tezde, Banach uzayda sabit nokta teorisi, detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak hem pür matematikteki temel tanım ve kavramlar hem de sabit nokta ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. İkinci olarak, daha önce tanımlanan çeşitli fonksiyon sınıfları için sabit nokta teoremleri verilmiştir. Ayrıca lipschitzian, genişlemeyen, daraltan ve kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlar altında var olduğu incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak, bir dönüşümün sabit nokta ya da noktalarını bulmak için kullanılan çeşitli iterasyon metotları verilmiştir. Bunların en önemlileri 1-adım, 2-adım, 3-adım ve n -adım iterasyonları olarak da bilinen Mann, Ishikawa, Noor ve multistep iterasyon metotlarıdır. İkinci olarak, kararlılık (stability) tanımlanarak, kararlılık üzerine yapılan önemli çalışmalardan bazıları özetlenmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, kendi üzerine olmayan (nonself-map) ve genişlemeyen iki dönüşümün ortak sabit noktası, ikinci olarak da bu iki dönüşümün ortak kararlılığı (common stability) incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu kısımda, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

2.1.1. Tanım (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

$$i. \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$ii. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$iii. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartları sağlanıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir ve (X, d) ya da X ile gösterilir.

2.1.2. Tanım (Cauchy Dizisi): $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

2.1.3. Tanım (Tam Metrik Uzay): $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \rightarrow x \in X$ ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

2.1.4. Tanım (Kompakt Metrik Uzay): $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

2.1.5. Tanım (Süreklilik Dönüşümü): $X=(X,d)$ ve $Y=(Y,\rho)$ iki metrik uzay, $f:X\rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0\in X$ olsun. Her bir $\varepsilon>0$ sayısı için,

$$d(x,x_0)<\delta \text{ olduğunda } \rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

veya denk bir ifade ile,

$$f(D(x_0;\delta))\subseteq D(f(x_0);\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f , X in her noktasında sürekli ise, f ye X de süreklidir denir (Bayraktar 2000).

2.1.6. Tanım (Topolojik Uzay): X boş olmayan bir küme ve τ , X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

i. $X,\emptyset\in\tau$ dur.

ii. τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi, τ ya aittir.

iii. τ ya ait sonsuz sayıda kümenin birleşimi, τ ya aittir.

şartları sağlanıyorsa τ ya X için bir topoloji ve (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

2.1.7. Tanım (Yarı Sürekli Fonksiyon): X bir topolojik uzay ve $f:X\rightarrow\mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $t\in\mathbb{R}$ için, $f^{-1}(-\infty,t)$ kümesi X de açık ise, f ye X üzerinde üstten yarı sürekli fonksiyon denir. Eğer $-f$ fonksiyonu üstten yarı sürekli ise, bu durumda f ye alttan yarı sürekli fonksiyon denir (Maddox 1988).

2.1.8. Tanım (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+:L\times L\rightarrow L$ ve $\cdot:F\times L\rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A) L , $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x,y\in L$ için $x+y\in L$ dir,

G2. Her $x,y,z\in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir,

G3. Her $x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta\in L$ vardır,

G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha.x \in L$ dir,

L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir,

L3. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir,

L4. $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir,

L5. $1.x = x$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay adı verilir.

2.1.9. Tanım (Konveks Küme): L bir reel lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konvektir denir.

2.1.10. Tanım (Normlu Uzay): N , bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \| : N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

$$N1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N2. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in F)$$

$$N3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) norm, $(N, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

2.1.11. Tanım (Banach Uzayı): N normlu lineer uzay olsun. N , $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir.

N nin reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

2.1.12. Tanım (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı): L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle \rangle : L \times L \rightarrow F$ fonksiyonu

$$I1. \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$I2. \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad (\alpha \in F)$$

$$I3. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$I4. \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı (veya ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayı $(L, \langle \rangle)$ ile veya kısaca L ile gösterilir.

2.1.13. Tanım (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\| \cdot \|$, iç çarpım normu olsun.

$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise X e Hilbert uzayı denir.

Bu tanımdan anlaşılmaktadır ki Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır.

2.1.14. Tanım (Sınırlı Lineer Operatör): N ve N' normlu uzay ve $T : N \rightarrow N'$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|Tx\| \leq K \|x\|$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa T ye sınırlı (lineer operatör) denir.

2.1.15. Tanım (Cebirsel Dual): X bir reel lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm reel değerli lineer fonksiyonların kümesini $L(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $L(X, \mathbb{R}) = \{T : T : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineer}\}$ olsun. $\forall x \in X$ ve $T_1, T_2 \in L(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $L(X, \mathbb{R})$ bir reel lineer uzay oluşturur. Bu $L(X, \mathbb{R})$ uzayına X in cebirsel duali denir ve X' ile gösterilir.

2.1.16. Tanım (Topolojik Dual): X bir normlu lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonların kümesini $C(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(X, \mathbb{R}) = \{T : T : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineer ve sürekli}\}$ olsun. $\forall x \in X$ ve $T_1, T_2 \in C(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $C(X, \mathbb{R})$ bir lineer uzay oluşturur. Bu $C(X, \mathbb{R})$ uzayına X in topolojik duali denir ve X^* ile gösterilir

Burada X^* , $\|T\| = \sup\{|T(x)| : \|x\| \leq 1\}$ normuna göre normlu lineer uzaydır. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X^* daima bir Banach uzaydır. Bu X^* uzayına bazen X in eşi veya eşleniği adı da verilir.

Yukarıdaki tanımlardan da anlaşılacağı gibi X^* topolojik dual uzayı, X' cebirsel dual uzayının bir alt uzayı olduğu açıktır. Sonlu boyutlu uzayların topolojik dualleri ile cebirsel dualleri aynı olur.

2.1.17. Tanım (Kuvvetli Yakınsaklık): X , bir normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

ya da kısaca $x_n \xrightarrow{k} x$ ile gösterilir. Burada x e $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir.

2.1.18. Tanım (Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun.

Eğer, her $f \in X^*$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya

$$x_n \xrightarrow{z} x$$

ya da $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır. Burada x elemanına, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

2.1.19. Teorem (Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Bu durumda,

- (a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.
- (b) (a) nın tersi genel olarak doğru değildir.
- (c) $\dim(X) < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir.

2.2. Sabit Nokta Kavramı

2.2.1. Tanım (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir.

O halde, $Tx = x$ ($x \in X$) denkleminin çözümü, T nin bir sabit noktasıdır ve T nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Örneğin,

1. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = T(x) = x^2 + 5x + 4$ ise $F_T = \{-2\}$;
 2. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = x^2 - x$ ise $F_T = \{0, 2\}$;
 3. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = x + 2$ ise $F_T = \emptyset$ ve
 4. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = x$ ise $F_T = \mathbb{R}$
- olur.

X herhangi bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ olacak şekilde $T^n(x)$ i tanımlayabiliriz. $T^n(x)$, T altındaki x in n . iterasyonu olarak adlandırılır.

$T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılır:

1. Keyfi $n \in \mathbb{N}$ için $F_T \subset F_{T^n}$ dir.
2. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_{T^n} = \{x\}$ ise $F_T = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ bir dönüşüm ve $T(1) = 3$, $T(2) = 2$ ve $T(3) = 1$ olsun. Bu durumda $F_{T^2} = \{1, 2, 3\}$ dür. Ancak $F_T = \{2\}$ dir.

Şimdi vereceğimiz örnekler, bazı özel dönüşümlerin sabit noktalarının olup olmaması ile ilgilidir.

2.2.1.1 Örnek: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \rightarrow X$ şeklindeki özdeş dönüşümü için X in her bir noktası bir sabit noktadır.

2.2.1.2. Örnek: $X = [0, 2]$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$, $Tx = 2 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümün sabit noktası $x = 1$ dir.

2.2.1.3. Örnek: $X=[0,1]$, $Y=[2,3]$ olmak üzere herhangi bir $T:X \rightarrow Y$ dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur.

2.2.1.4. Örnek: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $T:X \rightarrow X$, $T(x,y) = (x,0)$ olarak tanımlanan fonksiyon için, $(x,0)$ şeklindeki noktalar sabit noktalardır.

2.2.1.5. Örnek: $T:(0,1] \rightarrow (0,1]$, $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Böyle bir dönüşüm için tek sabit nokta, $x=0$ noktası olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dir.

2.2.1.6. Örnek: $T:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$ dönüşümünün $\mathbb{R}$ de hiçbir sabit noktası yoktur.

2.2.2. Tanım (Lipschitzian Dönüşüm): (X,d) bir metrik uzay ve $T:X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için,

$$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y) \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine de Lipschitz sabiti denir.

Yukarıdaki tanıma göre her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her

$\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x,y) < \delta = \varepsilon$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\leq kd(x,y) \\ &< k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \end{aligned}$$

yazılır. Yani T düzgün süreklidir.

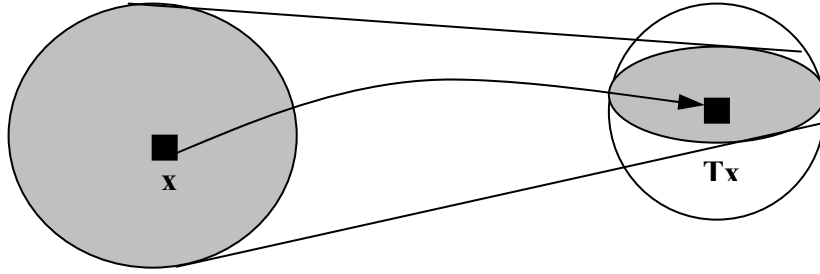
2.2.3. Örnek: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 3x$ olsun. Bu halde,

$$d(Tx, Ty) = |3x - 3y| = 3|x - y| = 3d(x, y), \quad (k = 3)$$

$k \geq 3$ için T Lipschitz şartını sağlar.

2.2.4. Tanım (Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (contraction) denir.

Geometrik olarak bunun anlamı, herhangi iki x ve y noktasının, birbirlerine kendilerinden daha yakın görüntülere sahip olmaları demektir.



Şekil 2.2.4.1. T bir daraltan (contraction) dönüşümdür.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktalara sahip olması gerekmez. Örneğin, $X = (0, 1]$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünü alalım. Burada T dönüşümü daraltan dönüşümdür fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm, düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün sürekli. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm olamaz. Buna karşın, T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n bir daraltan dönüşüm olabilir.

2.2.5. Örnek: $T : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ olmak üzere $T(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$ olarak tanımlansın.

T fonksiyonu $x=1$ de süreksizdir ve dolayısıyla daraltan dönüşüm olamaz. Diğer taraftan, $T^2 : \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$, $T^2(x) = 0$ olup daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca $x=0$, T nin tek sabit noktasıdır.

Eğer bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümü, (X, d) tam metrik uzayında daraltan dönüşüm olarak tanımlanmış ise bu dönüşümün $x_0 \in X$ sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir (Banach Daralma Prensibi).

2.2.6. Tanım (Kesin Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

2.2.7. Örnek: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoreminden

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani,

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

olarak bulunur.

Bu dönüşümlerin sabit noktasını garanti etmek için çalışılan uzayın kompakt (tıkız) olması yeterli olacaktır.

2.2.8. Tanım (Genişlemeyen Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

2.2.9. Örnek: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = x + 1$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |x + 1 - y - 1| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat T ne daraltan ne de kesin daraltan dönüşümdür.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaların var olması gerekmez. Bunun için ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerine bazı ek koşullar konulması gereklidir.

Genişlemeyen dönüşümler, esas itibariyle daraltan dönüşümlerden farklıdır. Çünkü, genişlemeyen bir T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi boştan farklı olsa bile Picard iterasyonu (3. bölümde bahsedilecektir) yakınsak olmayabilir.

2.2.10. Tanım (Zayıf Kesin Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, sürekli, azalmayan, pozitif değerli ve $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y))$$

şartı sağlanıyorsa, T ye zayıf kesin daraltan dönüşüm (weakly contractive) denir (Rhoades 2001).

2.2.11. Dönüşümler Arasındaki Bağlantı

Yukarıdaki dönüşümler göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir:

$$T - \text{daraltan} \Rightarrow T - \text{kesin daraltan} \Rightarrow T - \text{genişlemeyen} \Rightarrow T - \text{lipschitzian}$$



Şekil 2.2.11.1 Dönüşümler arasındaki bağlantı

Zayıf kesin daraltan dönüşümler, daha sonra verilecek olan Banach daralma ilkesini sağlayan dönüşümlerle kesin daraltan dönüşümler arasında yer alır (Rhoades 2001).

2.2.12. Tanım (Sabit Nokta Özelliği): X bir Banach uzayı, K da X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olsun. Eğer, her $T: K \rightarrow K$ genişlemeyen dönüşümü boş olmayan bir sabit nokta kümesine sahip ise K ya sabit nokta özelliğine (fixed point property-f.p.p.) sahiptir denir.

2.2.13. Tanım (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan $\forall x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Aksoy ve Khamsi 1990).

2.2.14. Örnek: $X = \mathbb{R}^n$; $\|x\| = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) Euclidean normuna göre düzgün konveks, fakat $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ normuna göre düzgün konveks değildir.

2.2.15. Tanım (Düzgün Lipschitzian Dönüşüm): X bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L \|x - y\|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa T ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

2.2.16. Tanım (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir Banach uzayı, $K \subseteq X$ ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$$

olduğunda $k_n \rightarrow 1$ olacak şekilde bir $\{k_n\} \subset \mathbb{R}^+$ dizisi varsa T ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir.

2.2.17. Tanım (Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, K da X in boş olmayan alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F_T \neq \emptyset$ ve $\forall x \in K$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise T ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

$F_T \neq \emptyset$ olması durumunda, genişlemeyen bir dönüşüm, quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin; $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, $T: X \rightarrow X$ ve

$$Tx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{2} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{şeklinde tanımlanan fonksiyon, quasi-genişlemeyen}$$

dönüşümdür, ancak genişlemeyen dönüşüm değildir.

2.2.18. Tanım (Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay ve K da X in boş olmayan alt kümesi ve $T:K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F_T \neq \emptyset$, $\forall x \in K$ ve $\forall n \geq 1$ için

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n) \|x - p\|$$

olacak şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{r_n\} \in [0, \infty)$ dizisi varsa bu T dönüşümüne asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

2.3. Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Lipschitzian, nonexpansive, contractive ve contraction gibi dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde, bazılarının var olduğunu gördük. Hatta bu sabit noktaların sayısı birden fazla olabilmektedir. O halde “hangi tür dönüşümlerin sabit noktaları var ve bu sabit noktalar hangi koşullar altında tek olur?” sorusu ile karşılaşılır. Bu soruyu daha detaylı olarak cevaplamak için aşağıdaki teorem ve örnekleri verebiliriz.

2.3.1. Teorem : $[a, b]$, $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f:[a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

İspat: Her $x \in [a, b]$ için, $T(x) = x - f(x)$ olacak şekilde bir $T:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda, T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise, $T(a) \leq 0$ olur. Benzer şekilde, $f(b) \leq b$ ise $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c) = 0$ olacağından, $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ vardır.

2.3.2. Teorem (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): B , $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (yani $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda, $f:B \rightarrow B$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Giriş kısmında Brouwer Teoreminin herhangi bir Banach uzayı (sonsuz boyutlu uzay) için genişletilemeyeceğini söylemiştik. Bunu bir örnekle izah edelim.

2.3.3. Örnek: B, c_0 Banach uzayında bir kapalı birim küre olsun. $x = (x_1, x_2, \dots) \in B$ için

$$T: B \rightarrow B, T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \dots)$$

şeklinde tanımlansın. $\forall x, y \in B$ için

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$$

olduğundan T süreklidir. Ancak, $Tx = x$ denkleminin B de bir çözümü yoktur.

Bu örnek bize Brouwer Teoremi'nin bazı sonsuz boyutlu uzaylarda başarısız olduğunu gösterir.

2.3.4. Teorem (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi ve $f: K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: K kompakt olduğundan $f(K)$ ön-kompaktır. Dolayısıyla da total sınırlıdır. Bu yüzden, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in K$ için

$$\min_{1 \leq i \leq N_n} \|f(x) - y_i\| < \frac{1}{n}$$

olacak şekilde $\{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\} \subseteq f(K)$ vardır. Her bir i için

$$a_i(x) = \max \left\{ \frac{1}{n} - \|f(x) - y_i\|, 0 \right\}$$

olarak tanımlayalım. Böylece her bir $x \in K$ için $a_i(x) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $i \in \{1, 2, \dots, N_n\}$ vardır. Schauder operatörü olarak adlandırılan, $P_n: K \rightarrow K$

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)}$$

operatörünü gözönüne alalım. Burada $\{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\}$ elemanlarının bir konveks kombinasyonu $P_n(x)$ olduğundan $P_n(x) \in K$ dir. Ayrıca, f sürekli olduğundan a_i fonksiyonlarının her biri de süreklidir.

Şimdi, $K_n = \text{conv}(\{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\})$ olsun. Bu durumda, $K_n, \{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\}$ vektörleri tarafından gerilen sonlu boyutlu Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir. Üstelik $P_n : K_n \rightarrow K_n$ dir. Brouwer teoremine göre P_n dönüşümlerinin her biri $x_n \in K_n \subseteq K$ sabit noktasına sahiptir. K kompakt olduğundan $\{x_n\}$ dizisi, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in K$ ya yakınsayan bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisine sahiptir. Herhangi n için

$$\begin{aligned} \|P_n(x) - f(x)\| &= \left\| \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)(y_i - f(x))}{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)} \right) \right\| \\ &\leq \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_n} a_i(x) \right] \bigg/ \sum_{i=1}^{N_n} a_i(x) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\|x_{n_k} - f(x)\| \leq \|P_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\| + \|f(x_{n_k}) - f(x)\|$$

olduğundan $k \rightarrow \infty$ için eşitsizliğin sol tarafı $\|x - f(x)\|$ e giderken sağ tarafı 0 a gider.

Yani,

$$\|x - f(x)\| \leq 0 \Rightarrow x = f(x)$$

olur. Dolayısıyla x, f nin bir sabit noktasıdır.

2.3.5. Teorem (Banach Daralma İlkesi): (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T , bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0 , X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$

olsun. $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu dolayısıyla da $x \in X$ e yakınsadığını ve bu x in $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. O halde $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \\ &\leq kd(x_{n+p-1}, x_{n-1}) = kd(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \leq k^2 d(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \leq \dots \\ &\leq k^n d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = k^n d(x_p, x_0) \\ &\leq k^n (d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)) \\ &\leq k^n (kd(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)) \\ &= k^n (d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + kd(x_{p-1}, x_{p-2})) \\ &\leq k^n [d(x_{p-2}, x_0) + kd(x_{p-2}, x_{p-3}) + k^2 d(x_{p-2}, x_{p-3})] \\ &\vdots \\ &\leq k^n (d(x_1, x_0) + kd(x_1, x_0) + k^2 d(x_1, x_0) + \dots) \\ &= k^n d(x_1, x_0)(1 + k + k^2 + k^3 + \dots) \\ &= k^n d(x_1, x_0) \left(\frac{1}{1-k} \right) (n \rightarrow \infty \text{ için}) \end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

elde edilir. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(x_{n+p}, x_n) \rightarrow 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \rightarrow x$ dolayısıyla da $x_{n+1} \rightarrow x$ dir. T dönüşümü, sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \rightarrow Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminde $n \rightarrow \infty$ için $x = Tx$ elde edilir.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y , T nin başka bir sabit noktası olsun. Yani, $Ty = y$ dir. O halde, y başka bir çözüm ise

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olur. Bu da $d(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü,

$$\begin{aligned} d(x, y) \leq kd(x, y) &\Rightarrow d(x, y) - kd(x, y) \leq 0 \\ &\Rightarrow d(x, y)[1 - k] \leq 0 \end{aligned}$$

olur. $k < 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dir. Dolayısıyla hem $1 - k > 0$ hem de $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $d(x, y)[1 - k] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d(x, y) = 0$ olması gerekir. Bu da $x = y$ demektir.

Euler ve Cauchy'nin, f nin sürekli ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olması durumunda

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

şeklindeki bir diferansiyel denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine yaptıkları çalışmada Banach Daralma İlkesi temel malzeme olmuştur (Aksoy ve Khamsi 1990).

2.3.6. Örnek: $X = \mathbb{R}$, $K = [0, 1] \subset X$, $T: K \rightarrow K$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{3}$ olarak seçelim. Daraltan dönüşümden,

$$\begin{aligned} x_1 &= Tx_0 = \frac{1}{6} \\ x_2 &= Tx_1 = T^2x_0 = \frac{1}{18} \\ x_3 &= Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = \frac{1}{48} \\ &\vdots \\ x_n &= Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^n x_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde bir dizi elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0,1]$ dir. Bilinen sabit nokta tanımını bu örneğe uygularsak,

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow x = 0$$

olur. Yani, sabit nokta yine $0 \in [0,1]$ olarak bulunur. Ancak bu sabit nokta tanımı her dönüşüm için kolay sonuç vermeyebilir. Bu sebeple, bir dönüşümün sabit noktasının bulunmasında iterasyon metodları kullanılır. Bunun için bir örnek 3. bölümde verilecektir.

2.3.7. Teorem: (X, d) bir tam metrik uzay, $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olmak üzere $T: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi ve Kırk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla,

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0 , T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu ise $y = x_0$ olmasını gerektirir.

2.3.8. Teorem: (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x_0$$

dir (Khamsi ve Kırk 2001).

İspat: T nin bir sabit noktasının olduğunu göstermek kolaydır. Bunun için,

$$\phi(x) = d(x, Tx), \quad x \in X$$

şartını sağlayan bir $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda ϕ sürekli ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden ϕ , bir $x_0 \in X$ noktasında minimum değerini alır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\phi(Tx_0) = d(Tx_0, T^2x_0) < d(x_0, Tx_0) = \phi(x_0)$$

çıkar. Bu ise $x_0 = Tx_0$ olmasını gerektirir.

Şimdi $x \in X$ noktası ve $(d(T^n x, x_0))$ dizisi verilsin. Şayet $T^n x \neq x_0$ ise,

$$d(T^{n+1}x, x_0) = d(T^{n+1}x, Tx_0) < d(T^n x, x_0)$$

olur. Bu nedenle $(d(T^n x, x_0))$ dizisi kesin azalandır. Sonuç olarak $n \rightarrow \infty$ için

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n x, x_0)$$

limiti vardır ve $r \geq 0$ dır. Ayrıca X kompakt olduğu için $(T^n x)$ dizisi, yakınsak bir

$(T^{n_k} x)$ alt dizisine sahiptir. $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k} x = z$ diyelim. $(T^n x)$ dizisi azalan olduğundan,

$$r = d(z, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(T^{n_k} x, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(T^{n_k+1} x, x_0) = d(Tz, x_0)$$

olur. Eğer $z \neq x_0$ ise, bu durumda

$$d(Tz, x_0) = d(Tz, Tx_0) < d(z, x_0)$$

dir. Bu ise $(T^n x)$ in herhangi yakınsak alt dizisinin x_0 noktasına yakınsadığını gösterir.

O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x_0$ dır.

2.3.9. Teorem: (X, d) bir tam metrik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere $T: D(x_0, r) \rightarrow X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Eğer

$$d(Tx_0, x_0) < (1 - k)r$$

ise, bu durumda T dönüşümü $D(x_0, r)$ diskinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Agarwal, Meehan ve O'Regan 2001).

İspat: $d(Tx_0, x_0) < (1-k)r_0$ olmak üzere $0 \leq r_0 < r$ şartını sağlayan bir r_0 vardır.

Göstereceğiz ki $T : \overline{D(x_0, r_0)} \rightarrow \overline{D(x_0, r_0)}$ dir. Eğer için, $x \in \overline{D(x_0, r_0)}$ ise,

$$\begin{aligned} d(Tx, x_0) &\leq d(Tx, Tx_0) + d(Tx_0, x_0) \\ &\leq kd(x, x_0) + (1-k)r_0 \leq r_0 \end{aligned}$$

olur. Banach sabit nokta teoreminden dolayı T nin $\overline{D(x_0, r_0)} \subset D(x_0, r)$ da bir tek sabit noktası vardır.

2.3.10. Örnek: $X = [a, b]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T , $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için,

$$|T'x| \leq k < 1$$

ise, T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (x, y)$ olmak üzere,

$$|Tx - Ty| = |T'(c)(x - y)| \leq k|x - y|$$

olur. Böylece Banach daralma ilkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

2.3.11. Örnek: $X = (0, 1]$ ve $T : X \rightarrow X$, $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümü verilsin. Ayrıca X kümesi üzerinde alışılmış metrik tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| = \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}d(x, y)$$

olacağından, T bir daraltan dönüşümdür. Fakat T nin, X de bir sabit noktası yoktur.

Çünkü sabit noktanın tanımı gereği $Tx = x$ den $\frac{x}{2} = x \Rightarrow 2x = x \Rightarrow x = 0$ olur. Burada

$x = 0 \notin (0, 1] = X$ olduğundan dolayı T nin X de bir sabit noktası yoktur.

Aşağıdaki örnekte ise, bir tam metrik uzay üzerinde tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olması gerekmediği gösterilmiştir.

2.3.12. Örnek: $X = \{x \geq 0 : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi ve bu küme üzerinde $d(x, y) = |x - y|$ metriği verilsin. $T : X \rightarrow X$, $T(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$ dönüşümü her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartını sağlar. Çünkü bu dönüşümün $\forall x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= |T(x) - T(y)| \\ &= \left| \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} \right| \\ &= \left| \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} \right) \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \right) \right| \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left| \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right|} = \frac{|(x - y)(x + y)|}{\left| \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right|} \\ &= \frac{|x + y|}{\left| \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right|} |x - y| \end{aligned}$$

olur. Burada $\forall x, y \in \mathbb{R} (x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0)$ için $\frac{|x + y|}{\left| \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right|} < 1$ olacağından dolayı

$$= \frac{|x + y|}{\left| \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right|} |x - y| \leq |x - y| = d(x, y)$$

olur ki bu da $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartının sağlandığını yani genişlemeyen dönüşüm olduğunu gösterir. Ayrıca her $x \in X$ için, $T(x) = (x^2 + 1)^{1/2} \neq x$ olduğundan T nin sabit noktası yoktur.

Yine tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

2.3.13. Örnek: $X = [1, \infty)$ kümesi üzerinde $d = |x - y|$ metriği verilsin ve $T : X \rightarrow X$, dönüşümü $Tx = x + \frac{1}{x}$ olarak tanımlansın. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= |Tx - Ty| = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| \frac{x^2 y - x - xy^2 + y}{xy} \right| \\ &= \left| \frac{xy(x - y) - x + y}{xy} \right| \\ &\leq \frac{|x - y||xy - 1|}{|xy|} \end{aligned}$$

olur. Burada $\forall x, y \in X = [1, \infty)$ için $\frac{|xy - 1|}{|xy|} \leq 1$ olacağından dolayı

$$\leq \frac{|x - y||xy - 1|}{|xy|} < |x - y|$$

olur ki bu da $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ şartının sağlandığını gösterir. O halde, T bir daraltan dönüşüm değildir fakat kesin daraltan bir dönüşümdür deriz. Burada T nin bir sabit noktası olmadığına dikkat edelim.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, tezin temel kısmında kullanacağımız bazı kavramların tarihsel gelişimi incelenmiş ve bazı tanım, teorem ve örnekler verilmiştir.

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları vardır. Bunlardan bazıları Picard iterasyon metodu, Kirk iterasyon metodu, Krasnoselskij iterasyon metodu, Figueiredo iterasyon metodu, Halpern iterasyon metodu, Wittmann iterasyon metodu ve Cesaro anlamında Ergodic tipli iterasyon metodu olarak bilinen iterasyon metotlarıdır. Ayrıca son zamanlarda 1-adım, 2-adım, 3-adım iterasyonları olarak da bilinen Mann, Ishikawa, Noor iterasyon metotları ve Rhoades'ün n -adım iterasyon metodu sıkça kullanılmaktadır.

Şimdi bu iterasyon metotlarından bazılarını verelim:

X herhangi bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $T^n(x)$ i herhangi bir $x \in X$ için $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. $T^n(x)$ e, x in T altındaki n . iterasyonu denir. T^n ($n \geq 1$) dönüşümü de T nin n . iterasyonu olarak adlandırılır. Notasyonları basitleştirmek için $T(x)$ yerine Tx kullanılacaktır (Berinde 2006).

Picard iterasyon metodu: (X, d) bir metrik uzay, K da X in kapalı bir alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ dönüşümü en az bir sabit noktaya sahip olsun. Picard iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). Picard iterasyonu, bazen ardışık yaklaşıklıkların dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

Picard iterasyonu, quasi-contractive operatörlerin bir sınıfı için Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsar (Berinde 2004).

Krasnoselskij iterasyon metodu: $(N, \|\cdot\|)$ reel normlu uzay ve $T: N \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. Krasnoselskij iterasyonu, $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955).

Kirk iterasyon metodu; X keyfi bir Banach uzayı ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \dots + \alpha_n T^n x_n \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $k \geq 1$ tamsayı ve $i = 0, 1, 2, \dots, k$ için $\alpha_i \geq 0$ ve $\alpha_1 > 0$ olmak üzere

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$$

dir.

Bu (3.3) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu, $k = 0$ için Picard iterasyonuna, $k = 1$ için de Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk 1971).

Mann iterasyon metodu: W. R. Mann tarafından 1953 yılında kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan bir çok dönüşümün bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermek için kullanılmıştır. Mann iterasyon metodu, X keyfi bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $p_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$p_{n+1} = (1 - \alpha_n)p_n + \alpha_n T p_n, \quad n \geq 1 \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\} \in (0,1)$ dir (Mann 1953).

(3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonundaki $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu Mann iterasyonu açık olarak Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

W. R. Mann'ın bulmuş olduğu sonuçlar 1971 yılında Franks ve Marzec tarafından, aynı şekilde Franks ve Marzec'in sonucu ise 1974 yılında B. E. Rhoades tarafından genişletilmiştir.

Yine 1974 yılında B. E. Rhoades, ilk olarak herhangi bir kapalı ve sınırlı aralığın kendi üzerine dönüşümü (self-map) için Mann iterasyonunun, dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Ishikawa iterasyon metodu: 1974 yılında S. Ishikawa tarafından kurulmuş ve yakınsama durumu için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda bir Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümleri için yakınsamanın kurulabilmesinde yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Ishikawa iterasyonu ilk olarak, bir Hilbert uzayın konveks ve kompakt alt kümesinin kendi üzerine Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümü için bir sabit noktaya kuvvetli yakınsamasını kurmak için kullanıldı (Berinde 2006). Ishikawa iterasyon metodu ise, X keyfi bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan konveks alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$ dir (Ishikawa 1974).

Bu (3.5) eşitliği ile verilen iterasyonda, $\beta_n = 0$ alınması durumunda Ishikawa iterasyonunun Mann iterasyonuna indirgendiği aşikar olmasına rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

Son zamanlarda bazı yazarlar T yerine onun n . iterasyonu olan T^n yi alarak sırasıyla yenilenmiş Mann iterasyonu ve yenilenmiş Ishikawa iterasyonu olarak adlandırdıkları yeni iterasyonlar kullandılar.

Noor iterasyon metodu: 2000 yılında M. A. Noor tarafından kurulmuştur. Bu iterasyon ise, X keyfi bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan konveks alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $u_1 \in B$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n T v_n, \\ v_n &= (1 - \beta_n)u_n + \beta_n T w_n, \\ w_n &= (1 - \gamma_n)u_n + \gamma_n T u_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(\alpha_n), (\beta_n)$ ve $(\gamma_n) \in (0, 1)$ dir (Noor 2000).

Noor, çözümler yenileyen değişik teknikler kullanarak Hilbert uzaylardaki çeşitli eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini çalışmak için 3-adım (Noor) iterasyonunu analiz etmiş ve tanıtmıştır.

Xu ve Noor, düzgün olarak konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesinde kendi üzerine tanımlanmış asimptotik olarak genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktası için Noor iterasyonunun yakınsaklığını çalışmışlardır.

Noor, Rassias ve Huang bir reel düzgün smooth Banach uzayında kendi üzerine tanımlanmış bir pseudocontractive dönüşümün sabit noktası için Noor iterasyonunun yakınsaklığını ispatlamışlardır.

n -adım iterasyon (multistep iteration) metodu: 2004 yılında, B. E. Rhoades ve Ş. M. Şoltuz tarafından kurulmuştur. Bu iterasyon ise, X keyfi bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan konveks alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $k_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere n -adım iterasyonu, $p \geq 2$ için

$$\begin{aligned} t_n^{p-1} &= (1 - \beta_n^{p-1})k_n + \beta_n^{p-1}Tk_n, \\ t_n^i &= (1 - \beta_n^i)k_n + \beta_n^i T t_n^{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, p-2; \\ k_{n+1} &= (1 - \alpha_n)k_n + \alpha_n T t_n^1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\{\alpha_n\} \subset (0, 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve

$$\{\beta_n^i\} \subset [0, 1), \quad 1 \leq i \leq p-1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^1 = 0$$

dir (Rhoades and Şoltuz 2004).

B. E. Rhoades ve Ş. M. Şoltuz, 2003-2004 yıllarında dönüşümlerin çeşitli sınıfları için Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının, Mann iterasyonu yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir. Mesela, belli şartları sağlayan Banach uzaylarda, sürekli ve kuvvetli pseudocontractive operatör, sürekli ve kuvvetli accretive operatör, asymptotically pseudocontractive dönüşüm, asymptotically genişlemeyen dönüşüm, lipschitzian kuvvetli pseudocontractine dönüşüm ve kuvvetli ardışık pseudocontractive dönüşüm gibi daha bir çok dönüşüm örnek olarak verilebilir.

3.1. Mann, Ishikawa ve Noor İterasyonlarının Yakınsamaları

Özdemir ve Akbulut, 2006 yılında keyfi bir Banach uzayın kapalı, konveks bir alt kümesinde tanımlanan Lipschitzian operatörlerinin özel bir sınıfı için Mann, Ishikawa

ve Noor iterasyonlarının yakınsamalarının denk olduğunu göstermişlerdir. Aşağıdaki örnek bununla ilgilidir:

3.1.1. Örnek: $X = \mathbb{R}$, $K = [0, 2] \subset X$ ve $Tx = \frac{2}{x+1}$ olacak şekilde $T : K \rightarrow K$ dönüşümü tanımlansın. T , $L \leq 1$ Lipschitz sabitli $T : K \rightarrow K$ Lipschitzian bir dönüşüm olduğu ve $x^* = 1 \in K$ sabit noktasına sahip olduğu açıkça görülür. $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, $\beta_n = \frac{1}{n+1}$ ve $\gamma_n = \frac{1}{n+1}$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri seçelim. Ayrıca $p_1 = x_1 = u_1 = 0.1 \in K$ olsun. Dolayısıyla bu çalışmadaki iterasyonların denklik şartları sağlanmış olur. Mann, Ishikawa ve Noor iterasyonlarının bir kaç adımı aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3.1.1.1. $p_1 = x_1 = u_1 = 0.1 \in K$ başlangıç noktaları için iterasyonların yakınsamaları

	<u>Mann İterasyonu</u>	<u>Ishikawa İterasyonu</u>	<u>Noor İterasyonu</u>
$n = 1$	0.1	0.1	0.1
$n = 2$	0.9590909	0.6478261	0.7155459
$n = 3$	0.9796879	0.8044693	0.8446285
$n = 4$	0.9873310	0.8714129	0.8983083
$n = 5$	0.9911398	0.9071817	0.9267462
$n = 6$	0.9933581	0.9289299	0.9439700
$n = 7$	0.9947829	0.9433176	0.9553407
$n = 8$	0.9957620	0.9534205	0.9633149
$n = 9$	0.9964688	0.9608368	0.9691638
$n = 10$	0.9969988	0.9664715	0.9736051
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n = 100$	0.9999098	0.9989281	0.9991564
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n \rightarrow \infty$	1	1	1

Aynı şartlar altında, eğer $p_1 = x_1 = u_1 = 2.0 \in K$ olarak seçilirse aşağıdaki çizelge elde edilir.

Çizelge 3.1.1.2. $p_1 = x_1 = u_1 = 2.0 \in K$ başlangıç noktaları için iterasyonların yakınsamaları

	<u>Mann İterasyonu</u>	<u>Ishikawa İterasyonu</u>	<u>Noor İterasyonu</u>
$n = 1$	2.0	2.0	2.0
$n = 2$	1.333333	1.391304	1.387097
$n = 3$	1.174603	1.223495	1.219731
$n = 4$	1.110879	1.149243	1.146236
$n = 5$	1.078198	1.108717	1.106315
$n = 6$	1.058894	1.083740	1.081787
$n = 7$	1.046394	1.067063	1.065444
$n = 8$	1.037761	1.055275	1.053908
$n = 9$	1.031506	1.046579	1.045408
$n = 10$	1.026805	1.039947	1.038930
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n = 100$	1.000810	1.001291	1.001256
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n \rightarrow \infty$	1	1	1

2007 yılında ise Ş. M. Şoltuz, quasi-contractive operatörler için Krasnoselskij, Mann, Ishikawa, Noor ve n -adım iterasyonlarının denk olduğunu ispatlamıştır.

Materyal ve Yöntem başlığı altında kullanacağımız bazı iterasyon metotlarını vermiştik. Şimdi, fonksiyonel denklemlerin sabit nokta formülasyonunu (ya da formüllenmesini) bir örnek ile izah edelim. Bu örneği vermemizin asıl amacı, uygulamalı matematikte kullanılan bazı önemli fonksiyonel denklemlerin, nasıl sabit nokta problemlerine eşdeğer olarak çevirebildiğini şekilsel olarak göstermektir. Bu da, kısmen de olsa sabit

nokta iterasyon yöntemlerinin çalışılmasında bizim ilgimizi artırmakta ve motive etmektedir.

3.1.2. Örnek:

$$x^5 - x - 1 = 0 \quad (3.8)$$

polinom denklemini düşünelim. Bu denklem bir çok farklı yollarla $x = Tx$ şeklinde yazılabilir. Biz burada sadece 3 tanesi üzerinde duracağız. Bunlar,

- i. $x^5 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = x^5 - 1,$
- ii. $x^5 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^5 = x + 1 \Rightarrow x = \sqrt[5]{x+1},$
- iii. $x^5 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^5 + 4x^5 - 4x^5 - x - 1 = 0$
 $\Rightarrow 5x^5 - 4x^5 - x - 1 = 0$
 $\Rightarrow 5x^5 - x = 4x^5 + 1$
 $\Rightarrow x(5x^4 - 1) = 4x^5 + 1$
 $\Rightarrow x = \frac{4x^5 + 1}{5x^4 - 1}$

olsun. (3.8) denkleminin $[1, \infty)$ aralığında bir tek çözüme sahip olduğunu göstermek kolaydır. O halde $x \in [1, \infty)$ için,

$$T_1(x) = x^5 - 1, \quad T_2(x) = \sqrt[5]{x+1}, \quad T_3(x) = \frac{4x^5 + 1}{5x^4 - 1}$$

olarak tarif edelim. Herhangi bir $x_0 \in [1, \infty)$ başlangıç yaklaşımı (değeri) için T_1 ile ilişkili olarak Picard iterasyonu, yakınsak olmadığı halde T_2 ve T_3 durumları için yakınsaktır. Aslında, T_2 nin bir daraltan (ya da $\frac{1}{5}$ -daraltan) olduğunu göstermek kolaydır. Bu durum doğrulanabildiği için T_3 iterasyon fonksiyonu Newton algoritması

(ya da Newton-Raphson yöntemi olarak da bilinen $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ şeklinde

tanımlanması) ile elde edilmiş olur. Aşağıdaki tablo, sırasıyla T_1 , T_2 ve T_3 iterasyon fonksiyonları ile tanımlanan bu 3 iterative (tekrarlı) yöntemleri için ilk iterasyonları gösterir ve belli bir x_0 başlangıç tahminleri (değerleri) için,

Çizelge 3.1.2.1.

$x_{n+1} = T_1 x_n$	$x_{n+1} = T_2 x_n$	$x_{n+1} = T_3 x_n$
$x_0 = 1$	$x_0 = 1$	$x_0 = 1$
.....		
$x_1 = 0$	$x_1 = 1.149$	$x_1 = 1.25$
$x_2 = -1$	$x_2 = 1.165$	$x_2 = 1.178$
$x_3 = -2$	$x_3 = 1.167$	$x_3 = 1.168$
$x_4 = -33$	$x_4 = 1.167$	$x_4 = 1.167$
$x_5 = -39135394$	$x_5 = 1.167$	$x_5 = 1.167$
$x_{n+1} = T_1 x_n$	$x_{n+1} = T_2 x_n$	$x_{n+1} = T_3 x_n$
$x_0 = 1.167$	$x_0 = 10$	$x_0 = 10$
		$x_1 = 8$
		$x_2 = 6.401$
$x_1 = 1.164$	$x_1 = 1.615$	$x_3 = 5.121$
$x_2 = 1.141$	$x_2 = 1.212$	$x_4 = 4.098$
$x_3 = 0.936$	$x_3 = 1.172$	$x_5 = 3.282$
$x_4 = -0.282$	$x_4 = 1.168$	$x_6 = 2.632$
$x_5 = -1.002$	$x_5 = 1.167$	$\vdots$
		$x_{12} = 1.168$
		$x_{13} = 1.167$

elde edilir.

3.2. Genişlemeyen Dönüşümlerin İncelenmesi

Şimdi, genişlemeyen dönüşümler kullanılarak yapılan bazı çalışmalardan bahsedelim.

3.2.1. Teorem: X düzgün konveks Banach uzayı, K da X in boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ bir genişlemeyen operatör olsun. Bu durumda T en az bir $x^* \in K$ sabit noktasına sahiptir (Berinde 2006).

3.2.2. Tanım ((D) Şartı): X Banach uzayı, K da X in boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ genişlemeyen bir operatör olsun. Eğer her $x \in K$ için

$$\|x - Tx\| \geq \varphi\left(\inf\{\|x - z\| : z \in F_T\}\right)$$

olacak şekilde $\varphi(r) > 0$ ve $\varphi(0) = 0$ şartlarını sağlayan azalmayan bir $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu varsa, bu T dönüşümüne K üzerinde (D) şartını sağlıyor denir (Berinde 2006).

3.2.3. Teorem: X düzgün konveks Banach uzayı, K , X in boş olmayan kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ genişlemeyen bir operatör olsun. Eğer T , (D) şartını sağlarsa, herhangi bir $x_1 \in K$ için Mann iterasyonu F_T nin bir noktasına yakınsar (Berinde 2006).

3.2.4. Teorem: (X, d) tam metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve α, β ve γ , $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 0.5$ ve $0 \leq \gamma < 0.5$ şartlarını sağlayan reel sayılar olsun. Eğer, $\forall x, y \in X$ için

$$(z_1) \quad d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y);$$

$$(z_2) \quad d(Tx, Ty) \leq \beta [d(x, Tx) + d(y, Ty)];$$

$$(z_3) \quad d(Tx, Ty) \leq \gamma [d(x, Ty) + d(y, Tx)];$$

şartlarından en az biri doğru ise bu durumda T , bir Picard operatörüdür (Berinde 2006).

3.2.5. Teorem: X , $d(x, y) = \|x - y\|$ metriği ile keyfi bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$, $(z_1) - (z_3)$ şartlarını sağlayan bir operatör olsun. Bu durumda $x_0 \in K$, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ için

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n$$

olarak tanımlanan $\{x_n\}$ Mann iterasyonu T nin bir tek sabit noktasına kuvvetli yakınsar (Berinde 2006).

3.3. T – Kararlılık (T – Stability)

Bu kısımda, tezin araştırma bulguları bölümünde kullanacağımız bazı tanım ve teoremler verilecektir.

X bir normlu uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $x_{n+1} = f(T, x_n)$ olmak üzere X deki noktaların bir $\{x_n\}$ dizisini oluşturalım (Örneğin, $f(T, x_n)$, Tx_n fonksiyon iterasyonu olabilir). Farz edelim ki $\{x_n\}$, T nin bir x^* sabit noktasına yakınsaktır. $\{y_n\}$, X de keyfi bir dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_n = \|y_{n+1} - f(T, y_n)\|$ olsun.

3.3.1. Tanım (Kararlılık-Stability) : Eğer $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p \right)$ ise $x_{n+1} = f(T, x_n)$ iterasyon yöntemi T – kararlı olarak adlandırılır (Rhoades and Şoltuz 2006).

T – kararlı dönüşümler üzerine ilk sonuç Banach daralma prensibi için Ostrowski tarafından ispatlandı. Harder ve Hicks (1988), çeşitli kesin daraltan şartlar için fonksiyon iterasyonunun T – kararlı olduğunu gösterdiler.

Rhoades (1990; 1993), her iki makalede de, iterasyon yöntemlerinin birkaç sabit noktası için T – kararlılığını inceledi. Osilike, Rhoades (1993)’ün bazı sonuçlarını genelleştirdi. Yine Osilike, “eğer T bir X Banach uzayının kendi üzerine bir dönüşümü ise $0 \leq a < 1$ için $L > 0$ olacak şekilde $\|Tx - Ty\| \leq L\|x - Tx\| + a\|x - y\|$ eşitsizliğinin sağlanır olduğunu dolayısıyla da Mann iterasyonunun, Ishika iterasyonunun ve Kirk iterasyonunun (Kirk 1971) T – kararlı” olduğunu gösterdi.

Osilike (1995), Rhoades’ün çalışmalarında kullandığından daha genel olan bir kesin daraltan şart kullanarak kararlılık tanımı için Mann ve Ishikawa iterasyonlarının kararlı olduğunu gösterdi. Yine Osilike, $p, q > 1$ olmak üzere q -düzgün smooth veya p -

düzgün konveks Banach uzayları ve $\|Tx - Ty\| \leq kM(x, y)$, $0 \leq k < 1$, $x, y \in X$ eşitsizliğini sağlayan T dönüşümleri için Mann iterasyonunun kararlı olduğunu gösterdi.

Osilike (1996), $q > 1$ olmak üzere ya q -düzgün smooth Banach uzaylar veya Lipschitz kuvvetli pseudocontractive ya da Lipschitz kuvvetli accretive için Mann iterasyon yönteminin T -kararlı olduğunu gösterdi. Osilike, bu sonuçları keyfi Banach uzaylar için Ishikawa iterasyonuna genişletti. Osilike'nin Ishikawa iterasyonu için bu genişletmesi, Osilike (1997) de ortaya çıktı. Osilike, $F_T \neq \emptyset$ olacak şekilde ϕ -kuvvetli pseudocontractive, T Lipschitzian ve keyfi bir X reel Banach uzayı için Ishikawa iterasyonunun T -kararlı olduğunu gösterdi. Zhou (1999) da, eğer X bir reel düzgün konveks uzay ise T sınırlı görüntüye sahip bir sürekli kuvvetli pseudocontraction olduğunu dolayısıyla Mann iterasyonun T -kararlı olduğunu gösterdi. Zhou, T kuvvetli accretive veya m -accretive dönüşümler için benzer sonuçlara sahip olduğunu gösterdi. Osilike, kararlılığın tanımında, eğer $\sum \varepsilon_n < \infty$ olması $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x^*$ olmasını gerektiriyor ise o zaman bu iterasyon yöntemini hemen hemen T -kararlı olarak adlandırmıştır. Osilike, eğer X keyfi bir reel Banach uzayı, $F_T \neq \emptyset$ ve $\langle Tx - Ty, j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2 - \phi(\|x - y\|)\|x - y\|$ olacak şekilde T Lipschitzian ise Ishikawa iterasyonunun yakınsak ve hemen hemen T -kararlı olduğunu gösterdi.

3.3.2. Teorem: X bir normlu uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca Mann ve Ishikawa iterasyonlarında tanımlanan $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ ve $\{\beta_n\} \subset [0, 1)$ dizileri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \quad (3.9)$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. (3.9) u sağlayan her $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ ve $\{\beta_n\} \subset [0, 1)$ dizileri için Ishikawa iterasyonu T -kararlıdır.
- ii. (3.9) u sağlayan her $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ dizileri için Mann iterasyonu T -kararlıdır (Rhoades and Şoltuz 2006).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı bulgulara yer verilecektir.

İlk olarak, 3. bölümde ifade edilen dönüşümlerden genişlemeyen dönüşümler alınarak bu dönüşümlerin asıl tanımında bulunan kendi üzerine olma (self-map) tanımlılığı yerine, Banach uzaylarda kendi üzerine olmayan (nonself-map) ve genişlemeyen iki dönüşüm alıp, bu dönüşümler üzerinde de çekme (retraction) kullanılarak genişlemeyen dönüşümlerin bir ortak sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsamaları elde edilmeye çalışılmıştır.

Genişlemeyen dönüşümlerin yaklaşık sabit noktaları için iterative teknikleri, [Ishikawa 1976, Reich 1979, Senter 1974, Tan ve Xu 1993, Zeng 1998] yazarları tarafından Mann iterasyon metodu ya da Ishikawa iterasyon metodu kullanılarak çalışılmıştır.

İkinci ve son olarak da, ortak kararlılık (common stability) ile ilgili yeni bir tanım yapılarak yukarıda belirtilen kendi üzerine olmayan ve genişlemeyen iki dönüşümün ortak kararlılığı incelenmiştir. Ayrıca ortak kararlılık ile ilgili teoremler ve ispatları verilmiştir.

4.1. Nonself Genişlemeyen Dönüşümlerin Yakınsamaları

Şimdi, ispatlarımızda kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri verelim.

4.1.1. Tanım (Çekme-Retraction): E bir reel Banach uzayı ve K da E nin bir alt kümesi olsun. Her $x \in K$ için $Px = x$ olacak şekilde $P: E \rightarrow K$ sürekli dönüşümü varsa K ya da E nin bir retractı (çekilmesi) denir. Eğer $P: E \rightarrow E$ dönüşümü $P^2 = P$ şartını sağlıyorsa P ye retraction (çekme) denir.

P dönüşümü bir çekme ise o zaman P nin görüntü kümesindeki her y için $Py = y$ dir.

4.1.2. Tanım (Demiclosed): E bir reel Banach uzayı, $T : E \rightarrow E$ bir dönüşüm ve x^* , T nin bir sabit noktası olsun. Eğer, E deki $\{x_n\}$ dizisi, x^* a zayıf ve $\{Tx_n\}$ dizisi p ye kuvvetli yakınsadığında $Tx^* = p$ oluyorsa T ye p de demiclosed'tır denir.

4.1.3. Tanım (Kadec-Klee Özelliği): E , bir reel Banach uzayı olsun. Eğer E de her $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \rightarrow x$ zayıf ve $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ kuvvetli yakınsaması $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olmasını gerektiriyorsa E Banach uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir denir (Goebel and Kirk 1990).

4.1.4. Tanım ((A) Şartı): $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olmak üzere $S, T : K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Eğer her $x \in K$ için

$$\max \{\|x - Sx\|, \|x - Tx\|\} \geq f(d(x, F_T \cap F_S)) \quad (4.1)$$

ise S ve T dönüşümleri (A) şartını sağlıyor denir. Burada $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(0) = 0$ ve $f(r) > 0$ şartlarını sağlayan bir dönüşümdür (Shahzad 2005).

Öncelikle çalışmamızda elde ettiğimiz bulguları özetleyelim: Farz edelim ki E , genişlemeyen P çekmesine sahip bir reel düzgün konveks Banach uzay, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $F_T \cap F_S := \{x \in K : Sx = Tx = x\} \neq \emptyset$ olmak üzere $T, S : K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Yine farz edelim ki $\{x_n\}$,

$$x_{n+1} = P((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n SP[(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n]), \quad x_1 \in K, \quad n \geq 1,$$

iterasyonu ile üretilsin. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, uygun bir $\varepsilon \in (0, 1)$ için $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ da reel dizilerdir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar ispatlanmıştır:

(a) Eğer E nin E^* duali, Kadec-Klee özelliğine sahip ise o zaman $\{x_n\}$ bir $x^* \in F_T \cap F_S$ noktasına zayıf yakınsar.

(b) Eğer T ve S , (A) şartını sağlarsa o zaman $\{x_n\}$ bir $x^* \in F_T \cap F_S$ noktasına kuvvetli yakınsar.

(c) T ve S dönüşümleri ortak kararlıdır (common stable).

Tan ve Xu (1993), bir düzgün konveks Banach E uzayının boş olmayan kapalı, konveks ve sınırlı alt kümeleri üzerinde tanımlanan genişlemeyen ve kendi üzerine dönüşümlerin sabit noktaları için yenilenmiş Ishikawa iterasyon yöntemini tanıttılar. Shahzad (2005), genişlemeyen ve kendi üzerine olmayan dönüşümler için Tan ve Xu (1993)' nun sonuçlarını genelleştirdi. Daha kesin olarak Shahzad (2005) aşağıdaki teoremleri ispatladı.

4.1.5. Teorem: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, Kadec-Klee özelliğine sahip olan E^* , E nin duali, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve genişlemeyen çekilmesi olsun. Ayrıca, $T: K \rightarrow E$ genişlemeyen dönüşümü için $F_T \neq \emptyset$ ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da reel diziler olarak verilsin. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini

$$x_{n+1} = P((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n TP[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n]) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Naseer Shahzad 2005, [Teorem 3.5]).

4.1.6. Teorem: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, Kadec-Klee özelliğine sahip olan E^* , E nin duali, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $S, T: K \rightarrow K$ genişlemeyen iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olarak verilsin. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n] \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi S ve T nin bir ortak sabit noktasına zayıf yakınsar (Naseer Shahzad 2005, [Teorem 4.1]).

Yukarıdaki teoremden T ve S , düzgün konveks bir Banach uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir K alt kümesinden kendi üzerine dönüşümlerdir. Ancak, $K \subset E$ olmak üzere $T: K \rightarrow E$ olarak tanımlanırsa (4.3) iterasyon formülü iyi tanımlı olmayabilir. Bu (4.3) iterasyon formülünü iyi tanımlı yapabilmek içinde bir çekmeye (retraction) ihtiyaç duyulmaktadır.

K , reel düzgün konveks Banach E uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve E genişlemeyen çekmeye sahip olsun. $S, T: K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm olmak üzere [Shahzad 2005, Concluding remarks (4)] de verilen problem için

$$x_{n+1} = P\left((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n SP\left[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n\right]\right), \quad x_1 \in K, \quad n \geq 1 \quad (4.4)$$

iterasyon şemasını teşkil edelim. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[0,1]$ da diziler ve P de E nin K üzerine bir genişlemeyen çekmesidir. Biz bu tez çalışmasında (4.4) ile verilen kendi üzerine olmayan ve genişlemeyen iki dönüşümün bir ortak sabit noktası için zayıf ve kuvvetli yakınsama teoremlerini ispatladık. Aşıkardır ki, eğer S ve T , kendi üzerine iki dönüşüm ise o zaman (4.4) iterasyonu (4.3) iterasyon şemasına indirgenir.

Şimdi ise daha sonra vereceğimiz teoremlerin ispatlarında kullanacağımız bazı lemmaları verelim.

4.1.7. Lemma: E , düzgün konveks Banach uzayı ve $\{\alpha_n\}$, uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da bir dizi olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, $r \geq 0$ için $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq r$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq r$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)y_n\| = r$ olacak şekilde E de iki dizi olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ dır (Schu 1991).

4.1.8. Lemma: E bir Banach uzayı, $p > 1$ ve $R > 1$ olsun. Bu durumda E nin düzgün konveks olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in B(0, R) = \{x \in E : \|x\| \leq R\}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \leq \lambda \|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p - W_p(\lambda)g(\|x-y\|)$$

olacak şekilde sürekli, kesin artan, konveks ve $g(0)=0$ şartını sağlayan bir $g:[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonunun var olmasıdır. Burada $W_p(\lambda)=\lambda(1-\lambda)^p+\lambda^p(1-\lambda)$ olarak alınmıştır (Xu 1991).

4.1.9. Lemma: $\{\lambda_n\}$ ve $\{\sigma_n\}$, $\lambda_{n+1}\leq\lambda_n+\sigma_n$, $\forall n\geq 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n<\infty$ olacak şekilde negatif olmayan reel diziler olsun. Bu durumda $\lim_{n\rightarrow\infty}\lambda_n$ limiti vardır. Üstelik, $j\rightarrow\infty$ iken $\lambda_{n_j}\rightarrow 0$ olacak şekilde $\{\lambda_n\}$ nin bir $\{\lambda_{n_j}\}$ alt dizisi varsa o zaman $n\rightarrow\infty$ için $\lambda_n\rightarrow 0$ olur (Tan ve Xu 1993).

4.1.10. Lemma: E bir refleksive Banach uzayı ve duali E^* da *Kadec-Klee* özelliğine sahip olsun. $\{x_n\}$, E de sınırlı bir dizi ve $x^*, y^* \in \omega_w(x_n)$ olsun (burada $\omega_w(x_n)$, $\{x_n\}$ nin zayıf w -limiti olarak tanımlanmaktadır). Ayrıca her $t\in[0,1]$ için $\lim_{n\rightarrow\infty}\|tx_n+(1-t)x^*-y^*\|$ mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x^*=y^*$ dır (Kaczor 2002).

4.1.11. Lemma: E , bir düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T:K\rightarrow E$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $I-T$, 0 (sıfır) da demiclosed'tır (Browder 1968).

4.2. Temel Sonuçlar

Biz bu bölümde elde ettiğimiz temel teoremlerimizi ve ispatlarını verdik.

4.2.1. Teorem: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi ve genişlemeyen çekilmesi olsun. Ayrıca $T, S:K\rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm, $x^*\in F_T\cap F_S=\{x\in K:Tx=Sx=x\}\neq\emptyset$ ve uygun bir

$\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$$

limiti vardır.

İspat: $\{x_n\}$ dizisinin teşkilinden

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|P((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n SP[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n]) - x^*\| \\ &\leq \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n SP[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n] - x^*\| \\ &\leq \|(1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n((1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n - x^*)\| \\ &\leq \|(1-\alpha_n)(x_n - x^*)\| + \|\alpha_n((1-\beta_n)(x_n - x^*) + \beta_n(Tx_n - Tx^*))\| \\ &= \|(1-\alpha_n)(x_n - x^*)\| + \alpha_n \|(x_n - x^*)(1-\beta_n + \beta_n)\| \\ &= \|x_n - x^*\| (1-\alpha_n + \alpha_n) \\ &= \|x_n - x^*\| \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \|x_n - x^*\| \leq \|x_{n-1} - x^*\| \dots \leq \|x_1 - x^*\| = M, \quad M \in \mathbb{R}$$

yazılır. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olur. 4.1.9. Lemmaya göre $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ limiti vardır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2.2. Teorem: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $T, S : K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm, $F_S \cap F_T \neq \emptyset$ ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\|$$

dır.

İspat: $x^* \in F_T \cap F_S$ olsun. 4.2.1. Teorem'den dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ vardır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = r$ olsun. Eğer $r = 0$ ise o zaman S ve T nin sürekliliklerinden dolayı teorem doğrudur. Şimdi $r > 0$ olduğunu düşünelim. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\|$$

olduğunu göstereceğiz. $y_n = P[(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n]$ olsun. $\{x_n\}$ sınırlı olduğundan her $n \geq 1$ için $x_n - x^*, y_n - x^* \in B(0, R) = \{x \in E : \|x\| \leq R\}$ olacak şekilde $R > 0$ vardır.

4.1.8. Lemmadan

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\|^2 &= \|P[(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n] - x^*\|^2 \\ &\leq \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n - x^*\|^2 \\ &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n - x^* + \beta_n x^* - \beta_n x^*\|^2 \\ &\leq \beta_n \|(x_n - x^*)\|^2 + (1 - \beta_n) \|(x_n - x^*)\|^2 \\ &= \|(x_n - x^*)\|^2, \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^*\| \leq r$ dir. Yine 4.1.8. Lemma kullanılarak

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|P((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n SP[(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n]) - x^*\|^2 \\ &\leq \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n SPy_n - x^*\|^2 \\ &\leq \|(1 - \alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n(y_n - x^*)\|^2 \\ &= \|\alpha_n(Sy_n - x^*) + (1 - \alpha_n)(x_n - x^*)\|^2 \\ &= \alpha_n \|y_n - x^*\|^2 + (1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\|^2 - W_2(\alpha_n)g(\|Sy_n - x_n\|) \\ &= \alpha_n \|x_n - x^*\|^2 + (1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\|^2 - W_2(\alpha_n)g(\|Sy_n - x_n\|) \\ &= \|x_n - x^*\|^2 (\alpha_n + 1 - \alpha_n) - W_2(\alpha_n)g(\|Sy_n - x_n\|) \\ &= \|x_n - x^*\|^2 - W_2(\alpha_n)g(\|Sy_n - x_n\|). \end{aligned} \tag{4.5}$$

olur. Burada $W_2(\alpha_n) = \alpha_n(1 - \alpha_n)^2 + \alpha_n^2(1 - \alpha_n) \geq \varepsilon\varepsilon^2 + \varepsilon^2\varepsilon = 2\varepsilon^3 \geq \varepsilon^3$ (her n ler için $\varepsilon \leq \alpha_n \leq 1 - \varepsilon$ olduğuna dikkat edilmelidir) olduğu görülmüştür. Bu (4.5) eşitsizliği

$$\varepsilon^3 \sum_{n=1}^{\infty} g(\|Sy_n - x_n\|) \leq \|x_1 - x^*\|^2 < \infty$$

olduğunu gösterir. Bu yüzden $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\|Sy_n - x_n\|) = 0$ olur. g , sıfırda sürekli ve kesin artan olduğundan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sy_n - x_n\| = 0$$

olur. S genişlemeyen olduğundan

$$\|x_n - x^*\| \leq \|x_n - Sy_n\| + \|y_n - x^*\|$$

dir. Burada $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ alınarak

$$r \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^*\|$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\| &= \|P[(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n] - x^*\| \\ &\leq \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n - x^*\| \\ &= \|x_n - x^*\|, \end{aligned}$$

olur. Bu da $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^*\| \leq r$ olmasını gerektirir. Bu yüzden $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^*\| = r$ olur.

Dolayısıyla da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\beta_n(Tx_n - x^*) + (1 - \beta_n)(x_n - x^*)\| = r$$

dir. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x^*\| \leq r$ ve 4.1.7. Lemma'dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x^*\| = 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|Sx_n - x_n\| &\leq \|Sx_n - Sy_n\| + \|Sy_n - x_n\| \\ &\leq \|x_n - y_n\| + \|Sy_n - x_n\| \\ &\leq \|Tx_n - x_n\| + \|Sy_n - x_n\| \end{aligned}$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\| = 0$ bulunur. Böylece de ispat tamamlanır.

4.2.3. Lemma: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $T, S : K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm, $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $t \in [0,1]$ ve $u, v \in F_T \cap F_S$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|tx_n + (1-t)u - v\|$$

limiti vardır.

İspat: $\{x_n\}$ sınırlı olduğundan $\{x_n\} \subset C = B_R(0) \cap K$ olacak şekilde $R > 0$ vardır. O halde C , E nin boş olmayan kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesidir. Temel olarak [Tan ve Xu 1993] nun fikrini takip edelim. $a_n(t) = \|tx_n + (1-t)u - v\|$ olsun. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(0) = \|u - v\|$ dir. 4.2.1 Teorem'inden $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - v\|$ vardır. Genelliği bozmaksızın $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\| = r > 0$ ve $t \in (0,1)$ olduğunu düşünebiliriz. $R_n : C \rightarrow C$,

$$R_n x = P((1-\alpha_n)x + \alpha_n SP[(1-\beta_n)x + \beta_n Tx]), x \in C$$

ile tanımlansın. O zaman

$$\begin{aligned} \|R_n x - R_n y\| &= \|P((1-\alpha_n)x + \alpha_n SP[(1-\beta_n)x + \beta_n Tx]) - P((1-\alpha_n)y + \alpha_n SP[(1-\beta_n)y + \beta_n Ty])\| \\ &\leq \|(1-\alpha_n)x + \alpha_n SP[(1-\beta_n)x + \beta_n Tx] - ((1-\alpha_n)y + \alpha_n SP[(1-\beta_n)y + \beta_n Ty])\| \\ &\leq \|(1-\alpha_n)(x-y)\| + \|\alpha_n (SP[(1-\beta_n)x + \beta_n Tx] - SP[(1-\beta_n)y + \beta_n Ty])\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x-y\| + \|\alpha_n ((1-\beta_n)x + \beta_n Tx - (1-\beta_n)y - \beta_n Ty)\| \\ &= (1-\alpha_n)\|x-y\| + \alpha_n \|(x-y)(1-\beta_n + \beta_n)\| \\ &= \|x-y\|(1-\alpha_n + \alpha_n) \\ &= \|x-y\| \end{aligned}$$

olur.

$$\Gamma_{n,m} = R_{n+m-1} R_{n+m-2} R_{n+m-3} \dots R_n, \quad m \geq 1$$

ve

$$b_{n,m} = \|\Gamma_{n,m}(tx_n + (1-t)u) - (t\Gamma_{n,m}x_n + (1-t)u)\|$$

olsun. O halde her $p \in F_T \cap F_S$ için

$$\Gamma_{n,m}x_n = x_{n+m}, \Gamma_{n,m}p = p \text{ ve } \|\Gamma_{n,m}x - \Gamma_{n,m}y\| \leq \|x - y\|$$

olur. 4.2.1. Teorem ve [Ishikawa 1976]'nın 2.3. Teoremi'ni kullanarak $\lim_{n,m \rightarrow \infty} b_{n,m} = 0$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} a_{n+m} &= \|tx_{n+m} + (1-t)u - v\| \\ &\leq b_{n,m} + \|\Gamma_{n,m}(tx_n + (1-t)u) - v\| \\ &= b_{n,m} + \|\Gamma_{n,m}(tx_n + (1-t)u) - \Gamma_{n,m}v\| \\ &\leq b_{n,m} + a_n \end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} b_{n,m} + \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2.4. Teorem: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, Kadec-Klee özelliğine sahip olan E^* , E nin duali, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $T, S: K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi S ve T nin bir ortak sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: 4.2.1. Teoreminden, $\{x_n\}$ nin sınırlı olduğu söylenir. E reflektive olduğundan

$\{x_n\}$ nin bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi bir $x^* \in K$ ya zayıf yakınsar. 4.2.2. Teorem'ini kullanarak

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - Sx_{n_j}\| = 0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - Tx_{n_j}\| \quad \text{elde ederiz.} \quad 4.1.11. \quad \text{Lemmadan,}$$

$(I - S)x^* = 0 = (I - T)x^*$ yazılabilir. Yani $Sx^* = x^* = Tx^*$ dır. Dolayısıyla $\{x_n\}$, x^* a

zayıf yakınsar. Farz edelim ki $\{x_n\}$ nin bir başka $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi bir y^* ya zayıf yakınsasın. Bu durumda, $y^* \in K$ ve bu yüzden $x^*, y^* \in \omega_w(x_n) \cap F_T \cap F_S$ dir. 4.2.3. Lemma kullanılarak her $t \in [0,1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|tx_n + (1-t)x^* - y^*\|$$

limiti vardır. Şimdi 4.1.10. Lemma, $x^* = y^*$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\omega_w(x_n)$ bir tektir ve bu yüzden $\{x_{n_i}\}$, S ve T nin bir ortak sabit noktasına zayıf yakınsar.

Şimdi kuvvetli yakınsama teoremi ile ilgili iki sonuç vereceğiz.

4.2.5. Sonuç: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $T, S: K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde tanımlayalım. Farz edelim ki T , (A) şartını sağlasın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi S ve T nin bir ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

4.2.6. Teorem: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $T, S: K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde tanımlayalım. Farz edelim ki $S(K) \cap T(K)$, X in kompakt bir alt kümesinde içersin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi S ve T nin bir ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

4.3. Ortak Kararlılık (Common Stability)

Birden fazla dönüşümün ortak kararlılığını incelemek için kullanacağımız bu ifade ilk kez bizim tarafımızdan tanımlanmıştır (Kızıltunç, Özdemir ve Akbulut 2007).

Burada ortak kararlılık ile ilgili tanıımı verdikten sonra yukarıda bahsedilen T ve S dönüşümlerinin ortak kararlılığını göstereceğiz.

E normlu uzay, K da E nin boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T_i : K \rightarrow E$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) olmak üzere $\bigcap_{i=1}^m F_{T_i} \neq \emptyset$ olsun. $x_{n+1} = f(T_1, T_2, T_3, \dots, T_m, x_n)$ olmak üzere K daki noktaların bir $\{x_n\}$ dizisini oluşturalım. Farz edelim ki $\{x_n\}$, T_i lerin bir x^* ortak sabit noktasına yakınsaktır. $\{y_n\}$, X de keyfi bir dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_n = \|y_{n+1} - f(T_1, T_2, T_3, \dots, T_m, y_n)\|$ olsun.

4.3.1. Tanım (Ortak Kararlılık): Eğer $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p \right)$ ise $x_{n+1} = f(T_1, T_2, T_3, \dots, T_m, x_n)$ iterasyon yöntemi ortak kararlılık (common stability) olarak adlandırılır (Kızıltunç, Özdemir ve Akbulut 2007).

Aşağıdaki negatif olmayan dizi her $n \in \mathbb{N}$ için iyi tanımlıdır.

$$\varepsilon_n := \|x_{n+1} - P((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n SP[(1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n])\| \quad (4.6)$$

4.3.2. Teorem: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $T, S : K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0, 1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde

tanımlayalım. Eğer $\{x_n\}$ dizisi S ve T nin bir ortak sabit noktasına yakınsıyor ise bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ dır.

İspat: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \in F_T \cap F_S$ olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$ olur. Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x^*\| = 0$ olmasını gerektirir. O halde,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x_{n+1} - P((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n SP[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n])\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x^*\| + \|P((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n SP[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n]) - x^*\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x^*\| + \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n SP[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n] - x^*\| \\
&= \|x_{n+1} - x^*\| + \|(1-\alpha_n)x_n + x^*(\alpha_n - 1) + \alpha_n (SP[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n] - x^*)\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x^*\| + \|(1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n (P[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n] - Px^*)\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x^*\| + \|(1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n ((1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n - x^*)\| \\
&= \|x_{n+1} - x^*\| + \|(1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n ((1-\beta_n)(x_n - x^*) + \beta_n (Tx_n - Tx^*))\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x^*\| + (1-\alpha_n)\|(x_n - x^*)\| + \alpha_n \|(1-\beta_n)(x_n - x^*) + \beta_n (Tx_n - Tx^*)\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x^*\| + (1-\alpha_n)\|(x_n - x^*)\| + \alpha_n \|(1-\beta_n)(x_n - x^*) + \beta_n (x_n - x^*)\| \\
&= \|x_{n+1} - x^*\| + (1-\alpha_n)\|(x_n - x^*)\| + \alpha_n \|(1-\beta_n + \beta_n)(x_n - x^*)\| \\
&= \|x_{n+1} - x^*\| + (1-\alpha_n + \alpha_n)\|(x_n - x^*)\| \\
&= \|x_{n+1} - x^*\| + \|(x_n - x^*)\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için $\|x_{n+1} - x^*\| + \|(x_n - x^*)\| \rightarrow 0$ olur.

4.3.3. Sonuç: E , reel düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $T, S: K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. (4.4) iterasyon yöntemi ortak kararlıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde ise çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar verilecektir.

İlk olarak, K , E uzayının kapalı konveks alt kümesi olmak üzere $T, S: K \rightarrow K$ şeklindeki genişlemeyen dönüşümler yerine $T, S: K \rightarrow E$ şeklindeki dönüşümlerle çalışılmıştır. Bu dönüşümler için iterasyon dizileri teşkil edilmiş ve uygun şartlar altında bu iterasyon dizilerinin, S ve T nin ortak sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsamaları incelenmiştir.

Bulunan sonuçlar şunlardır :

5.1. Sonuç: E , genişlemeyen P çekmesine sahip reel uniformly konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T, S: K \rightarrow E$, $F_T \cap F_S := \{x \in K : Sx = Tx = x\} \neq \emptyset$ olacak şekilde genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ olmak üzere

$$x_{n+1} = P\left((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n SP\left[(1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n\right]\right), x_1 \in K, n \geq 1,$$

şeklinde oluşturulan iterasyon yöntemi için aşağıdaki sonuçlar elde edildi:

- (a) Eğer E nin duali E^* , Kadec-Klee özelliğine sahip ise $\{x_n\}$ dizisi bir $x^* \in F_T \cap F_S$ noktasına zayıf yakınsar.
- (b) Eğer T ve S , (A) şartını sağlarsa $\{x_n\}$ dizisi bir $x^* \in F_T \cap F_S$ noktasına kuvvetli yakınsar.

Bu sonuçların ayrıntılı ifadeleri ise şu şekildedir :

5.1.1. Sonuç: E , reel uniformly konveks Banach uzayı, Kadec-Klee özelliğine sahip olan E^* , E nin duali, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $T, S: K \rightarrow E$ genişlemeyen

iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi S ve T nin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

5.1.2. Sonuç: E , reel uniformly konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $T, S: K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde tanımlayalım. Farz edelim ki T , (A) şartını sağlasın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi S ve T nin bir ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

5.1.3. Sonuç: E , reel uniformly konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $T, S: K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde tanımlayalım. Farz edelim ki $S(K) \cap T(K)$, X in kompakt bir alt kümesinde içerilsin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi S ve T nin bir ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İkinci ve son olarak da, ortak kararlılık (common stability) ile ilgili yeni bir tanım yapılarak yukarıda belirtilen kendi üzerine olmayan ve genişlemeyen iki dönüşümün ortak kararlı oldukları ispatlanmıştır.

5.2. Sonuç: E , reel uniformly konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve genişlemeyen çekmesi olsun. $F_T \cap F_S \neq \emptyset$ olacak şekilde $T, S: K \rightarrow E$ genişlemeyen iki dönüşüm ve uygun bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ da diziler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ dan başlayarak $\{x_n\}$ dizisini (4.4) şeklinde

tanımlayalım. Eğer $\{x_n\}$ dizisi S ve T nin bir ortak sabit noktasına yakınsıyor ise o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ dır. Yani, T ve S dönüşümleri ortak kararlıdır (common stable).

KAYNAKLAR

- Agarwal, R. P., Meehan M. and Donal O'Regan., 2001. Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press.
- Aksoy, A. G. and Khamisi, M. A., 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory. ISBN 0-387-97364-8.
- Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Berinde, V., 2004. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators, Fixed Point Theory and Applications, Volume (2004), Issue 2, Pages 97-106.
- Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics.
- Boyd, D. W. and Wong J. S. W., 1969. On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 458-464.
- Browder F. E., 1968. Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 74, 660-665.
- Cauchy, A. L., 1884. Leçon sur les calculs differentiel et integral, Vol. 1 and 2, Paris.
- Chidume, C. E. and Moore, C., 1999. Fixed point iteration for pseudocontractive maps, Proc. Amer. Math. Soc., 127, 1163-1170.
- Chidume, C. E. and Zegeye, H., 1999. Approximation of the zeros of m -accretive operators, Nonlinear Analysis, 31, 81-96.
- Ciric, L. B. 1974. A generalization of Banach's Contraction Principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273.
- Ciric, L. B., 1998. Quasi contraction nonself mappings on Banach spaces, Bull. Acad. Serbe Sc. Arts Natur. Sci. Math 23, 25-31.
- Goebel, K. and Kirk, W. A., 1990. Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Pres, Cambridge.
- Harder, A. and Hicks, T., 1988. Stability result for fixed point iteration procedures, Math. Japonica, 33, 693-706.
- Hicks, T. L. and Rhoades B. E., 1979. A Banach type fixed point theorem, Math. Japonica, 24, 327-330.

- Ishikawa S., 1974. Fixed points by a new iteration method, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 147-150.
- Ishikawa S., 1976. Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 59, 65-71.
- Jachymski, J., 1995. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 25, 925-37.
- Jungck, G., 1976. Commuting mappings and fixed points, *Amer. Math. Monthly*, 83, 261-263.
- Kaczor W., 2002. Weak convergence of almost orbits of asymptotically nonexpansive commutative semigroups, *J. Math. Anal. Appl.*, 272, 565-574.
- Kasahara, S. and Rhoades B. E., 1978. Common fixed point theorems in compact metric spaces, *Math. Japonica*, 23, No: 2, 227-229.
- Khamsi, M. A. and Kirk W. A., 2001. *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*.
- Kiziltunc, Ozdemir and Akbulut, 2007. On common fixed points of two non-self nonexpansive mappings in Banach spaces, *Chiang Mai J. Sci.*, 34(3) : 281-288.
- Kirk, W. A., 1971. On successive approximation for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Glasgow Math. J.*, 6-9.
- Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, *Uspehi Mat. Nauk.*, 10, 123-127.
- Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*.
- Maddox, I. J., 1988. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Pres.
- Mann W. R., 1953. Mean value methods in iteration, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 506-510.
- Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 251, 217-229.
- Osilike, M. O., 1995. Stability results for fixed point iteration procedure, *J. Nigerian Math. Soc.*, 14/15, 17-29.
- Osilike, M. O., 1996. A stable iteration procedure for quasi-contractive maps, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 27, 25-34.
- Osilike, M. O., 1997. Stability of the Ishikawa iteration method for quasi-contractive maps, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 28, 1251-1265.

- Özdemir, M. and Akbulut S., 2006, On the equivalence of some fixed point iterations, Kyungpook Math. Journal, 46, 211-217.
- Picard, E. (Charles), 1890. Jour. de Math., (4) 6, 145-210.
- Reich S., 1979. Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 67, 274-276.
- Rhoades, B. E., 2001. Some theorems on weakly contractive maps, Nonlinear Analysis, 47, 2683-2693.
- Rhoades, B. E. and Saliga, L., 2001. Some fixed point iteration procedures, II, Nonlinear Analysis Forum, 6(1), 193-217.
- Rhoades, B. E., 2002. Common fixed point theorems for nonself quasi-contraction mappings, Varahmihir Journal of Mathematical Sciences, Vol. 2 No:1, 11-14.
- Rhoades, B. E. and Şoltuz, S. M., 2006. The equivalence between the T -stabilities Mann and Ishikawa iterations, J. Math. Anal. Appl., 318, 472-475.
- Schu J., 1991. Weak and strong convergence of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Bull. Austral. Math. Soc., 43, 153-159.
- Senter H. F., W. G. Dotson, 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 375-380.
- Shahzad N., 2005. Approximating fixed points of non-self nonexpansive mappings in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 61, 1031-1039.
- Singh, B. and Chauhan, M. S., 1996. On common fixed point of four mappings, Bull. Cal. Math. Soc. 88, 451-456.
- Singh, S. L. and Mishra S. N., 1997. Remarks on Jachymski's fixed point theorems for compatible maps, Indian J. Pure Appl. Math. 611-615.
- Şenol, F., 1996. Fixed Point Theory in Metric Spaces, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
- Tan K. K., Xu H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process, J. Math. Anal. Appl., 178, 301-308.
- Xu H. K., 1991. Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Anal., 16, 1127-1138.
- Yılcı, İ., 1999. Mappings and Their Fixed Points, Hacettepe Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.

- Zeng L. C., 1998. A note on approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process, *J. Math. Anal. Appl.*, 226, 245-250.
- Zhou, H. Y., 1999. Stable iteration procedures for strong pseudocontractions and nonlinear equations involving accretive operators without Lipschitz assumption, *J. Math. Anal. Appl.*, 230, 1-10.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Erzurum'un Pasinler ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Pasinler'de, lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 1994 yılında kayıt yaptırdığı Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1998 yılında mezun oldu. 1999 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı. 1999-2002 yılları arasında Erzurum ili Pasinler ilçesinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2002 yılında yüksek lisansını tamamlayarak aynı üniversitede Doktora programına kayıt oldu. Halen Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.