



**ALTERNATİF BİR İSPAT YÖNTEMİ OLARAK
SÖZSÜZ İSPATLAR: LİSE ÖĞRENCİLERİNİN
İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNİN
İNCELENMESİ**

Kübra POLAT

Doktora Tezi

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Levent AKGÜN

2018

(Her Hakkı Saklıdır)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

**ALTERNATİF BİR İSPAT YÖNTEMİ OLARAK SÖZSÜZ İSPATLAR: LİSE
ÖĞRENCİLERİNİN İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ**
(Proofs Without Words as an Alternative Proof Method: Investigating of High School
Students' Proof Skills)

DOKTORA TEZİ

Kübra POLAT

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Levent AKGÜN

Erzurum
Mart, 2018

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Kübra POLAT tarafından hazırlanan “Alternatif Bir İspat Yöntemi Olarak Sözsüz İspatlar: Lise Öğrencilerinin İspat Yapabilme Becerilerinin İncelenmesi” başlıklı çalışması 29/03/2018 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Levent AKGÜN
Atatürk Üniversitesi

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Alper ÇILTAŞ
Atatürk Üniversitesi

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi M. Hanifi ERCOŞKUN
Atatürk Üniversitesi

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi M. Fatih ÖÇAL
Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi


.....

.....

.....

.....

.....

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

26 Nisan 2018



Prof. Dr. Mustafa SÖZBİLİR

Enstitü Müdürü

ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Doktora Tezi olarak sunduğum “ALTERNATİF BİR İSPAT YÖNTEMİ OLARAK SÖZSÜZ İSPATLAR: LİSE ÖĞRENCİLERİNİN İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ” başlıklı çalışmanın tarafımdan, bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını ve yararlandığım eserleri kaynakçada gösterdiğimi beyan ederim.

☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☒ Tezim 1 (bir) yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

29 / 03 / 2018

Kübra POLAT

TEŞEKKÜR

Gerek tez çalışmamın gerekse doktora eğitimimin her aşamasında ilgisini, desteğini, deneyimlerini ve hoşgörüsünü her zaman hissettiğim tanımaktan onur duyduğum, değerli ve sevgili hocam Dr. Öğr. Üyesi Levent AKGÜN'e

Tez İzleme komitesi toplantılarında görüşleri ve yardımları ile bana ışık tutan kıymetli hocalarım Doç. Dr. Alper ÇİLTAS, Dr. Öğr. Üyesi M. Hanifi ERÇOŞKUN, Doç. Dr. Tefvik İŞLEYEN ve Prof. Dr. Yasin SOYLU'ya, ayrıca tez jürimde yer alarak çalışmama katkıda bulunan Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ ve Dr. Öğr. Üyesi M. Fatih ÖÇAL'a

Çalışmam için gerekli izinleri veren Sivas İl Milli Eğitim Müdürlüğü'ne ve uygulamamı yapmış olduğum okuldaki öğrencilere ve personele

Sonsuz teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunuyorum.

Kübra POLAT

ÖZ

DOKTORA TEZİ

ALTERNATİF BİR İSPAT YÖNTEMİ OLARAK SÖZSÜZ İSPATLAR: LİSE ÖĞRENCİLERİNİN İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Kübra POLAT

Mart, 2018, 222 sayfa

Amaç: Bu çalışmada amaç lise öğrencilerinin sözsüz ispat yapabilme süreçlerini inceleyerek, sözsüz ispatların lise öğrencilerinin matematiksel ispat becerileri üzerine etkisini belirlemek ve lise matematik öğretmeninin ve lise öğrencilerinin sözsüz ispatlara ilişkin görüşlerini belirlemektir.

Yöntem: Araştırma 2016-2017 eğitim öğretim yılında Sivas iline bağlı bir ilçede bulunan bir devlet okulunda 9. sınıfta okuyan 25 öğrenci ile yürütülmüştür. Çalışmada karma araştırma yöntemleri kullanılmıştır. Uygulama öncesi öğrencilerin ispat becerilerini belirleyebilmek için araştırmacı tarafından hazırlanmış ispat beceri testi kullanılmıştır. Uygulama sonrası ispat beceri testi tüm sınıfa uygulanmış ve sürecin ayrıntılarını belirleyebilmek için seçilen dört öğrenci ile bireysel sözsüz ispat etkinlikleri yürütülmüş ve öğrencilerden sözsüz ispatlarla ilgili görüş alınmıştır. Ayrıca sürece ilişkin öğretmen ile de görüşme yapılmıştır. Verilerin tamamı elde edildikten sonra nicel veriler SPSS 17.00 paket programı kullanılarak, nitel veriler ise içerik analiz tekniği ile analiz edilmiştir.

Bulgular: Araştırmanın sonunda sözsüz ispatların, öğrenciye formüllerin nereden geldiğini anlama, formüllerin doğruluğuna ilişkin ikna olma, etkinliklerden keyif alma, matematiğin diğer kavramlarıyla ilişki kurma, daha önce öğrenmiş oldukları kuralları kullanma ve matematiksel kavramları anlama gibi imkanlar sağladığı görülmüştür.

Sonuç: Uygulama öncesi ve uygulama sonrası yapılan ispat beceri testinden alınan puanların bağımlı örneklem t-testi ile analizi sonucu, sözsüz ispatların ispat becerisi üzerinde olumlu etkisi olduğu sonucu elde edilmiştir. Ayrıca sözsüz ispatların sınıfta uygulanabilirliği açısından gerek öğretmen gerekse öğrenciler olumlu görüş bildirmişlerdir.

Anahtar Kelimeler: İspat, ispat öğretimi, ispat yöntemleri, sözsüz ispatlar, Boero modeli, sezgisel yapılandırılmış örnekler

ABSTRACT

Ph. D. DISSERTATION

PROOFS WITHOUT WORDS AS AN ALTERNATIVE PROOF METHOD: INVESTIGATING OF HIGH SCHOOL STUDENTS' PROOF SKILLS

Kübra POLAT

March, 2018, 222 pages

Purpose: This study aims to investigate high school students' processes of making proofs without words and to determine the effect of proofs without words on their mathematical proof skills. Additionally, it aims to determine high school mathematics teacher's and students' perspectives regarding proofs without words.

Method: The study was conducted with 25 ninth-grade students from a state school in a district of Sivas, Turkey during the 2016-2017 academic year. Mixed research methods were used in the study. A proof skill test developed by the researcher was used to determine the students' proof skills prior to the study. After the implementation, the proof skill test was given to the entire classroom. Four selected students solved activities of individual proofs without words to determine the details of the process. Then, their perspectives regarding proofs without words were obtained. In addition, the teachers was interviewed regarding the process. After obtaining the data, the quantitative data were analyzed using the SPSS 17.00 software and the qualitative data were analyzed using the content analysis technique.

Findings: The results of the study revealed that proofs without words enable students to understand where the formulas come from; to be convinced about the correctness of the formulas; to enjoy the activities; to relate mathematics to other concepts; to integrate multiple topics of mathematics; to use previously learned rules; to understand mathematical concepts; and to exchange ideas with their peers.

Results: The results of the dependent samples t-test of the students' scores on the proof skill tests before and after the implementation indicated that proofs without words positively affect students' proof skills. In addition, both teachers and students expressed positive perspectives regarding the applicability of proofs without words in classrooms.

Keywords: Proof, proof teaching, proof methods, proofs without words, Boero's model, heuristic worked examples

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZ.....	iv
ABSTRACT	v
TABLolar DİZİNİ.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
BİRİNCİ BÖLÜM.....	1
Giriş	1
Araştırmanın Problem Durumu ve Önemi	1
Araştırmanın Amacı	10
Araştırmanın Varsayımları	10
Araştırmanın Sınırlılıkları	11
Araştırmadaki Tanımlar.....	11
İKİNCİ BÖLÜM	12
Kuramsal Çerçeve ve İlgili Araştırmalar	12
Matematiksel İspat ve İspat Öğretimi.....	12
Matematiksel ispat fonksiyonları.	22
Matematiksel ispat süreci.	26
Formal ve informal yönüyle matematiksel ispat.	28
Görselleştirme.....	32
Görselleştirme ve matematik eğitimindeki yeri.	33
Görselleştirme ve ispatın birlikte kullanımı.	34
Sözsüz İspatlar.....	40
Sözsüz ispatların gerçek ispatlar olup olmadığına dair görüşler.....	43
Sözsüz ispatın matematik eğitimindeki yeri.	47
Boero Modeli.....	57
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM.....	64
Yöntem	64
Araştırmanın Modeli	64

Nicel boyut.	65
Nitel boyut.....	66
Araştırma Grubu	68
Araştırmacının rolü.	70
Veri Toplama Araçları.....	71
İspat beceri testi.....	71
Bireysel sözsüz ispat etkinlikleri.....	72
Yarı yapılandırılmış görüşme formu.....	72
Video kayıtları ve yarı yapılandırılmış gözlem formu.	73
Verilerin Toplanması.....	73
Uygulama Süreci	74
Pilot uygulama.	74
Asıl uygulama	77
Verilerin Analizi	83
Nicel verilerin analizi.....	83
Nitel verilerin analizi.....	85
Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği	91
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM.....	95
Bulgular ve Yorum	95
Nicel Verilere Ait Bulgular ve Yorumlar	95
Nitel Verilere Ait Bulgular ve Yorumlar.....	96
Gözlem verilerine ait bulgular ve yorumlar.	96
Sınıf içi etkinliklerden elde edilen sözsüz ispat aşamalarına ait bulgular ve yorumlar. .	99
Bireysel sözsüz ispat etkinliklerine ait bulgular ve yorumlar.	107
Öğretmen görüşlerine ait bulgular ve yorumlar.	139
Öğrenci görüşlerine ait bulgular ve yorumlar	142
BEŞİNCİ BÖLÜM.....	147
Sonuç- Tartışma ve Öneriler.....	147
Sonuç ve Tartışma	147
Nicel bulgulara ait sonuç ve tartışma.	147
Nitel bulgulara ait sonuç ve tartışma.....	147
Öneriler	157

KAYNAKLAR.....	160
EKLER	173
EK-1. Resmi İzin Yazıları.....	173
EK-2. Veli İzin Formu	175
EK-3. İspat Beceri Testi.....	176
EK-4. Bireysel Sözsüz İspat Etkinlikleri	180
EK-5. Öğrenci Görüşme Formu	187
EK-6. Puanlama Cetveli.....	189
EK-7. Gözlem Formu.....	191
EK-8. Etkinlikler	193
ÖZGEÇMİŞ	208



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Sözsüz İspat İçin Yurt İçinde ve Yurt Dışında Kullanılan İfadeler	42
Tablo 2. Araştırmaya Katılan Öğrenci Sayısı.....	69
Tablo 3. Araştırmaya Katılan Öğrencilere Ait Özellikler	69
Tablo 4. İspat Beceri Testi Pilot Uygulama	75
Tablo 5. Asıl Uygulama İçin Etkinliklerde Yapılan Değişiklikler.....	76
Tablo 6. Uygulama Süreci	78
Tablo 7. İspat Beceri Testi Puanlama Cetveli	85
Tablo 8. Veri Analizi İçin Kullanılan Modele Ait Kodlar	87
Tablo 9. Çalışmanın Nitel Boyutunun Güvenirlik ve Geçerlik Stratejileri	93
Tablo 10. Veri Setinin Basıklık ve Çarpıklık Değerleri	96
Tablo 11. Gözlem Verilerine Ait Bulgular.....	97
Tablo 12. Birinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları.....	109
Tablo 13. İkinci ve Üçüncü Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları	113
Tablo 14. Dördüncü Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları.....	115
Tablo 15. Beşinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları.....	118
Tablo 16. Altıncı Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları.....	121
Tablo 17. Yedinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları	124
Tablo 18. Sekizinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları.....	127
Tablo 19. Dokuzuncu Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları	131
Tablo 20. Onuncu Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları	134
Tablo 21. On Birinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları.....	136
Tablo 22. On İkinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları	139
Tablo 23. Öğretim Programında İspatlara Yer Verilmesi İle İlgili Görüşler	140
Tablo 24. Öğretmenin Öğrencilerinin İspat Becerileri İle İlgili Görüşleri.....	140
Tablo 25. Öğretmenin İspat Becerisinin Geliştirilmesi İle İlgili Görüşleri	141
Tablo 26. Öğretmenin Ortaöğretim Programında Sözsüz İspatlara Yer Verilip Verilmemesi İle İlgili Görüşleri.....	141
Tablo 27. Öğretmenin Öğrencilerdeki Olumlu Yönler İle İlgili Görüşleri	142
Tablo 28. Öğretmenin Öğrencilerdeki Olumsuz Yönler İle İlgili Görüşleri	142
Tablo 29. Sözsüz İspatlara Orta Öğretim Programında Yer Verilmesine İlişkin Öğrenci Görüşleri	143
Tablo 30. Sözsüz İspatlarda Zorlanılan Noktalara İlişkin Öğrenci Görüşleri	144

Tablo 32. Öğrencilerin Sözsüz İspatları Anladığında ve Anlamadığında Yaşamış Olduğunu Duyguya İlişkin Görüşleri.....	145
Tablo 33. Öğrencilerin Kendi Başlarına Sözsüz İspat Yapıp Yapamayacaklarına İlişkin Görüşleri	146



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. İspat şemalarının sınıflandırılması	16
Şekil 2. Tek tamsayıların toplamına dair sözsüz ispat.....	19
Şekil 3. 12×23 işlemi için alan modeli	34
Şekil 4. Görsel sunum ve görsel ispat örneği	36
Şekil 5. Pisagor Teoremi	39
Şekil 6. Şematik olmayan ispat	41
Şekil 7. Şematik ispat	41
Şekil 8. Tümevarımsal ispat	42
Şekil 9. Kenar uzunlukları n ve $n+1$ olan dikdörtgenin alanının diyagramı	45
Şekil 10. Tamsayıların toplamı için doğrudan ispat örneği.....	45
Şekil 11. Farklı alanlardan sözsüz ispat örnekleri	48
Şekil 12. İlk n tamsayının toplamının formülünü veren sözsüz ispat.....	49
Şekil 13. Tamsayıların toplamı ile ilgili formülün sözsüz ispatı.....	51
Şekil 14. Tamsayıların toplamı ile ilgili bir formülü hacimle gösteren sözsüz ispat örneği	54
Şekil 15. Diziler ve seriler ile ilgili teoremin ispatını üçgenle gösteren sözsüz ispat örneği ...	55
Şekil 16. Tamsayıların toplamına ilişkin formülü üçgenlerle gösteren sözsüz ispat örneği	55
Şekil 17. Araştırma yöntemi.....	65
Şekil 18. Dersin işleniş şeması	78
Şekil 19. Öğrencilerin verilen üçgenlerle yeni bir üçgen oluşturmaları	79
Şekil 20. Öğrencilerin oluşturduğu üçgen örnekleri.....	80
Şekil 21. Araştırmacı ve öğretmenin öğrencilerin yapmış oldukları şekilleri incelemesi.....	80
Şekil 22. Öğrencilerin verilen üçgenlerle oluşturdukları dikdörtgen	80
Şekil 23. Araştırmacı ve öğretmenin öğrencileri yönlendirmesi	81
Şekil 24. Öğrenci çalışma kağıtlarından bir örnek	81
Şekil 25. Sözsüz ispat süreci aşamaları	91

BİRİNCİ BÖLÜM

Giriş

Bu bölümde araştırmanın problem durumu, amacı, önemi, varsayımları, sınırlılıkları ve araştırmadaki tanımlar verilmiştir.

Araştırmanın Problem Durumu ve Önemi

Matematik eğitiminde ispatın kullanılması matematik eğitimcileri tarafından her zaman savunulmuştur. Akıl yürütme ve ispatın gerek Türkiye’de gerekse yurt dışında matematik öğretim programlarının geliştirmeyi hedeflediği beceriler arasında yer alması bunu gözler önüne sermektedir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Bu yüzden de ispat, okul öncesinden 12. sınıfa kadar bütün seviyelerde matematik öğretim programının bir parçası haline getirilmeye çalışılmaktadır (NCTM, 2000).

“İspat, en genel anlamda bir ifadenin doğruluğu ile ilgili delillerdir” (Rodd, 2000, s. 225). Bilim gözlemle, deneyle sonuca ulaşırken matematik deneylerle değil akıl yürütme ile sonuca ulaşmaktadır (Umay ve Kaf, 2005). Akıl yürütme ve ispatın alanyazında birlikte ve birbirinin tamamlayıcısı olarak ele alındığı ve ispatın akıl yürütmenin daha alt ve özelleşmiş hali olarak görüldüğü (Arslan, 2007) göz önüne alındığında matematiğin ispat ile sonuca ulaşacağı söylenebilir.

Matematikte ve matematik eğitimindeki rolü yıllarca tartışılmış ve sonunda pek çok uzmanın matematiğin temel unsurlarından olduğu konusunda hem fikir olunan ispat kavramının, matematikteki anlamının ne olduğuna yönelik alanyazında oldukça fazla tartışmanın olduğu görülmektedir. Aşağıda gerek yurt içinde gerek yurt dışındaki alanyazında yer alan ispat kavramının tanımlarından bazılarına yer verilmiştir:

- “İspat, daha önceden her birinin geçerliği ispatlanmış aksiyom ve teoremlere dayandırılmış ifadeler dizisidir.” (Morash, 1987, s. 149)
- “İspat, tanımlar ve aksiyomlar aracılığıyla fikirlerin açıklık kazandığı final aşamasıdır.” (Hanna, 1991, s. 55)

- “Matematiksel ispat, muhakeme edilmiş delillerin kullanılmasıyla bazı ifadelerin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir başka bir deyişle ispat iyi düşünülmüş savları kullanarak ifadenin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir.” (Almeida, 1996, s. 660)
- “Matematiksel ispat bir dizi geçerli sonuçlardır.” (Hanna ve Sidoli, 2007, s. 75)
- “İspat; önermelerin ilişkisine dayanan mantıksal bir çıkarımdır.” (Altun, 2014, s. 98)
- “İspat; bir dizi mantıksal hükümlerle önermenin doğru ya da yanlış olduğunu göstermedir.” (Konyalıoğlu, 2015, s. 43)

Yapılan tanımlara göre; aksiyom ve teoremlere ve ikna etmeye dayalı olmak üzere iki yönü olan ispat, hem matematiğin inşasında hem de matematiği anlayabilmek ve yorumlayabilmek açısından önemli roller üstlenmektedir (Strausova ve Hasek, 2012). Matematiğin anlama, açıklama ve var olan ilişkileri inşa etmesi ancak ispat ile mümkün olmaktadır. Dolayısıyla ispatsız matematik olamayacağından matematiğin temel elemanı ispattır diyebiliriz (Ball, Hoyles, Jahnke ve Hadar, 2002).

Mantıkçılık, formalist ve sezgicilik gibi birbirinden farklı felsefe okullarının benimsediği görüşlere göre matematikte bir ispatın geçerliğine dair farklı ölçütler ortaya konulmuştur. Mantıkçılar ve formalistler matematiği formal sistemlerin bilimi olarak kabul etmişler ve bir önermenin geçerliğinin uygun bir sistem içerisinde gösterilmesi gerektiğini vurgulamışlardır. Sezgiciler ise matematiksel aktivitelerin aksiyomlar ve teoremlerden ziyade iç gözlemsel yapılardan (*intro-spective construction*) oluştuğunu savunmuşlardır. İlerleyen yıllarda gerek matematikçiler gerekse matematik eğitimcileri matematiğin en önemli yönünün formal ispatlarla doğruya ulaşmak ve tümdengelimsel akıl yürütme olup olmadığını sorgulamaya başlamışlar ve nihayetinde matematiğin formal sistemlerden daha fazlası olduğunu savunmuşlardır. Matematikçilere göre bir ispatın biçimsel olarak üstünlüğü konunun anlaşılmasına ve ispatın doğruluğuna ilişkin ikna olmaya çok az katkı sağlamaktadır (Hanna, 1989).

İspat kavramının genel olarak Platon felsefesi çerçevesinde şekillendiği söylenebilir. Platonizm felsefesine göre matematiksel nesneler soyut birimlerdir ve bu felsefeye göre ispat sürecinde teoremler var olan tanım ve daha önceden doğruluğu gösterilmiş teorem ve aksiyomlardan hareketle elde edilmektedir. Özellikle mantıkçıların temel kaygısı matematiğin aksiyomatik yapıdan uzaklaşmasıdır. Formalist felsefe ispatın sadece aksiyomatik sistemlerle olabileceğini iddia etmektedir. Ancak ispatın özellikle sosyal boyutunun ele alınmasıyla kimileri ispatın ikna etme özelliğine kimisi deneysel olarak ele alınmasına değinerek formalist

felsefenin görüşünü kabul etmemişlerdir (Lee, 2002). Nitekim ispat tanımlarına bakıldığı zaman ispatın iki yönünün olduğu görülmektedir. Bir tarafta teoremler ve aksiyomlardan hareketle bir ifadenin doğruluğunu göstermek varken diğer tarafta ispatın ikna edici olması vardır (Miller, 2012).

İspatın sınıftaki rolü ve araştırmalardaki rolü birbirinden farklıdır. Matematik araştırmalarında ispatın ikna edici olması gerekirken sınıflarda ikna etme öğrenciler için önemli değildir. Çünkü öğrenciler genellikle öğretmenlerinin söylediklerine kolayca ikna olabilirler. Öğrencilerin öğretmenlerine güvenmeleri sevindiricidir fakat şüphenin belli bir derecesi bilgiyi güçlendirecek itici bir güçtür (Hersh, 1993). Çünkü sınıfta bir teoremin ispatının yapılması ancak teoremin niçin doğru olduğunu göstermesiyle birlikte öğrenciye anlama yetisi sağlayabilir (Strausova ve Hasek, 2012). Hanna (2000)'e göre bir ispat hem ikna edici hem de gerçek matematiksel anlamayı sağlayacak biçimde bir matematikçi tarafından meşrulaştırıldığında geçerli olmaktadır.

Almeida (1996)'a göre öğrencilerin çoğu matematiksel ispatta deneysel yöntemleri kullanırken, çok azı tümdengelsel yöntemleri kullanmaktadır. Bu durumda kimi öğrenci Pisagor teoreminin doğruluğuna örneklerle ikna olurken kimi öğrenci ancak tümdengelsel ispatla teoremin doğruluğuna ikna olmaktadır. Özellikle tanımlara dair kavramsal bilgi düzeyinde olmayan bireyler tümdengelsel yöntemleri seçmemektedirler (Doruk, 2016). Dolayısıyla matematiksel anlamının sadece tümevarımsal ve tümdengelsel ispat ile olması mümkün değildir. Eğer öğrencilerde ispata yönelik yeterlik kazandırmak istiyorsak ispat öğretimine açıklayıcı ispatları yerleştirmeliyiz (Gierdien, 2007).

Yapılan araştırmalara bakıldığında, öğrenciler (Hawro, 2007; Özer ve Arıkan, 2002; Uğurel ve Moralı, 2010; Urhan ve Bülbül, 2016; Şimşek, Şimşek ve Dünder, 2013; Weber, 2001), öğretmen adayları (Gökkurt, Soylu ve Şahin, 2014; Öçal ve Güler, 2010; Jones, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Ünveren, 2010) ve öğretmenler (Bayazıt, 2017; Knuth, 2002) ispat yapmada zorluk yaşamaktadırlar. Bu zorlukların neler olduğuna, nasıl ortadan kaldırılabileceğine yönelik pek çok araştırma yapılmış halen de yapılmaya devam edilmektedir. Buna karşın Türkiye’de ispat ile ilgili görüşlerin alındığı araştırmalar incelendiğinde ispata yönelik görüşlerin genel olarak olumlu olduğu (Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki, 2011; Cansız Aktaş ve Aktaş, 2013; Güler ve Dikici, 2012; Köğce, 2012) bununla beraber ne olumlu ne olumsuz (Kayagil, 2012) ve olumsuz görüşlerin (Moralı vd., 2006; Turgut, Yenilmez ve Uygan, 2013) de olduğu görülmüştür.

Morash (1987, s. 146) pek çok lisans öğrencisinin almış oldukları dersler hakkında dersi anladıklarını fakat ispat yapamadıklarını belirtmelerinin çok şaşırtıcı bir durum olarak

görülmemesi gerektiğini nihayetinde matematikçilerin teoremleri ispatlamak ya da keşfetmek için soyutlanmış bir ömür geçirdiklerini belirtmektedir.

Mevcut matematik öğretim programına göre öğrencilere kazandırılması istenen matematiksel süreç becerilerinden matematiksel akıl yürütme ile pek çok davranışın yanında “Matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme” becerisi de kazandırılması istenen beceriler arasındadır (MEB, 2013). Ancak Uğurel ve Moralı (2010)’nın Fen lisesi öğrencileriyle yapmış oldukları çalışmada öğrencilerin bir ispatı yapmak için hangi ispat yönteminin uygun olacağına dair herhangi bir düşüncelerinin ve araştırmalarının olmadığı görülmüştür.

Öğrencilerin pek çoğunun birbirinden ayrı özellikleri olmasına rağmen genellikle ispatlar öğrencilere değişmez ve kesin formatta sunulmaktadır (Lockhart, 2009, s. 18). Halbuki öğrenme ve öğretme sürecinin anlamlı olabilmesi için öğrencilerin ilgi, öğrenme ihtiyacı, hazır bulunuşluk düzeyi, öğrenme stili gibi bireysel farklılıklarının tespit edilmesi ve öğretim yöntem ve teknikleri belirlenirken bu farklılıkların göz önünde bulundurulması gerekmektedir (MEB, 2018). Bu bağlamda düşünüldüğünde öğrencilere kullanabilecekleri alternatif ispat yöntemlerinin sunulması, hem zengin öğrenme ortamları oluşturmuş olacak hem de bir ispatı yapmak için başvurulabilecek alternatif yollar sunulmasıyla öğrenciye farklı bakış açıları kazandırılmış olacaktır.

Diyagramlar ve diğer görsel sunumlar matematiğin her alanında her daim kullanılmıştır (Hanna ve Sidoli, 2007). Günümüzde de görsel argümanların yeni sonuçların keşfi ve daha fazla formal ispat üretimi için yardımcı olduğu geniş ölçüde anlaşılmıştır (Bardelle, 2009). Cebirsel formüller ya da sadece diyagramlar tüm bilgileri direkt verme gücüne tek başlarına sahip olamazlar. Her ikisinin de güçlü olan tarafları birlikte kullanıldığında ispatı somutlaştırmak kolaylaşmaktadır (Rinvold ve Lorange, 2013). Brown (2008, s.137)’a göre matematik zengin bir alandır ve bir şeyi ispatlamanın pek çok yolu vardır. Dolayısıyla matematikte sadece sözel ve sembolik ispatların kullanılması doğru değildir.

“Görselleştirme; zihinden geometri yapma, şekillerin zihinsel görüntülerini oluşturma ve hayalinde görüntüler üzerinde çalışmayı, şekillerin farklı perspektiften nasıl görüleceğini, içermektedir.” (Van de Walle, 2014/2010, s. 429) “Ayrıca görselleştirme, görsel bilgileri temsil etme, dönüştürme, üretme, iletişim kurma, belgeleme ve yansıtma kabiliyetlerini içermekle beraber,” (Hershkowitz, 1990, s. 75) matematiksel bir fikri iletmek, açıklamak veya ikna etmek için bir araç olup şekil veya diğer görsel sunumları kullanmaktır (Hanna ve Sidoli, 2007). Rodd (2000)’un belirttiği üzere bir ifadenin doğruluğu için ispatlar delil olarak

sayılırken kendi inancımız başka araçlarla doğrulanabilir. Brown (2008, s. 26) “görsel sunumları kullanarak sonuçtan emin olacağımızı ve geometrik resimlerin ispattan bağımsız olarak sonuçlara inanmamız için güçlü sebepler sunduğunu belirtmektedir.” Nitekim kimi öğrenciler matematiksel ifadenin doğruluğuna ikna olmak için görsel sunumları kendiliğinden kullanmaktadırlar (Flores, 2000). Healy ve Hoyles (2000)’un çalışmasında da bu tip öğrencilerin cebirsel açıklamalardan ziyade görsel sunumlarla ikna oldukları görülmüştür.

Görsel bir sunumun pek çok bilgiyi etkili biçimde içinde bulundurması ve bu bilgileri etkili biçimde sunabilmesi (Allwein ve Barwise, 1996, s. 3) ve görselleştirmenin matematiksel bilginin şekillendirilmesinde etkili olması (Borwein ve Jörgenson, 2002) sebebiyle matematik eğitiminde önemli role sahip olduğu açıktır (Casselman, 2000). Bilgi hem sözel hem de sözel olmayan yollarla sunulabildiğinden, sadece cümleleri kullanarak akıl yürütmek kısıtlayıcı olabilmektedir (Hanna ve Sidoli, 2007). Dolayısıyla matematiksel bilginin sadece formal argümanlar aracılığıyla iletilebileceğini söylemek görselleştirme gibi unsurlar olduğu müddetçe yanlıştır (Rodd, 2000).

Mudaly (2013) “görmek inanmaktır” sözünün çok eskilere dayandığını ve bir şeylerin doğruluğuna inanabilmek ve doğruluğunu kabul edebilmek için onun açık ve görülebilir olması gerektiğini belirtmektedir. Nitekim görsel sunumlar soyut kavramlara somutluk kazandırmaktadır (Flores, 2000). Böylelikle görsel kavramları algılama yeteneğimizin yeterince güçlü olduğu düşünüldüğünde matematik eğitiminde görselleştirmeden faydalanmak gerekmektedir (Miller, 2012). Fakat diyagramatik akıl yürütme becerisi için görselleştirme merkezde olmasına rağmen matematik öğretim programında diagramatik akıl yürütme becerilerini geliştirecek geometri dışında herhangi bir ders bulunmamaktadır (Karras, 2012). Halbuki cebirde de geometrik temsillerin kullanılması özellikle son yıllarda tekrardan ele alınmış ve öğrencilerin problem çözmede görselleştirme, uzamsal akıl yürütme ve geometrik modelleri kullanmaları geometri öğretiminin bileşenlerinden biri olarak kabul edilmiş ve özellikle sayısal ve cebirsel ilişkileri açıklamak için geometrik modellerin kullanılması önerilmiştir (Flores, 2000). Nitekim matematiksel bilgiyi yapılandırma süreçleri çoklu temsillerle desteklenmelidir (MEB, 2018).

Bardelle (2009) öğrencilerin herhangi bir konu ile karşılaştıklarında kullanabilecekleri tekniklerin, araçların ve teoremlerin farkında olmamalarının sebebini öğrencilerin görselleştirmeye çok az çalışmasına bağlamaktadır. Öğrencilerin görselleştirmeyi kullanabilmeleri ise derslerde görselleştirme etkinlikleriyle karşılaşmaları ve görselleştirmeyi kullanmaya teşvik edilmeleriyle mümkündür (Rodd, 2000). Alsina ve Nelsen (2010)

matematiksel başarı için görselleştirme yeteneğinin gerekliliğinden bahsetmektedir. O halde öğrencileri görsel etkinliklerle daha fazla karşı karşıya getirmek önemlidir.

Görselleştirmenin ispat üzerinde etkileri hususunda fikir birliği olmamasına rağmen matematiksel anlamada önemli bir yardımcı araç olduğu evrensel olarak kabul edilmektedir. Bununla beraber daha fazla matematiksel başarı için görselleştirmenin daha iyi yollarla nasıl kullanılacağı hususunda boşluklar mevcuttur (Hanna ve Sidoli, 2007). Gerek görselleştirmenin matematik eğitimindeki rolü gerekse öğrencilerin ispatta zorlanmaları göz önüne alındığında görselleştirme ile birlikte adı geçen tekniklerden birisi olan sözsüz ispatlar ispat öğretiminde alternatif bir yöntem olarak görülebilir.

Sözsüz ispatlar son yıllarda bulunmuş yenilikler değildir (Alsina ve Nelsen, 2010; Bell, 2011). Ancak özellikle son on yılda yeni matematik araştırmalarında ve matematik eğitimi uygulamalarında sözsüz ispatlara ilgi hızla artmaktadır. Sözsüz ispatlar tümdengelsel adımların şekil, diyagram ve grafiklere dayandırılmış halidir. Bu ise ispatı anlamamanın resimlerin okunmasıyla mümkün olduğu anlamına gelmektedir. Alanyazında sözsüz ispatlar söz olmayan, sadece diyagramlara dayalı, belki sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler olan ve yapılandırılması okuyucuya bırakılmış olan ispatlar olarak ifade edilmektedir (Bardelle, 2009). Ayrıca sözsüz ispat, özel bir matematiksel ifadenin niçin doğru olduğunu hatta matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ispatlarken nasıl ele alınacağını görmemize yardımcı olacak diyagram veya resimler (Alsina ve Nelsen, 2010) ve geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller dışında hiçbir kelime içermeyen ispatlardır (Gierdien, 2007). Yani sözsüz ispat, kelimeler olmadan matematiksel bir ifadenin ispatını resimleyen matematiksel çizimlerdir (Bell, 2011).

Sözsüz ispatların ilköğretimden üniversiteye kadar matematikte önemli roller üstlendiği düşünülmektedir (Alsina ve Nelsen, 2010). Sözsüz ispatları anlamak için yapılan tartışmalar, açıklamalar, farklı matematiksel fikirler arasında bağlantılar bulmayı dolayısıyla da kavramayı geliştirmek için fırsatlar sunmaktadır (Gierdien, 2007). Örneğin bir dikdörtgen prizmanın yüzey alanının formülü unutulduğunda, prizmanın açılımını düşünmek bu prizmanın yüzey alanının formülünü hatırlamaya yardımcı olacaktır (Van De Walle, 2014/2010, s. 26). O halde öğrencilerin sözsüz ispatlarla tanıştırılmasıyla öğrenci ispatın kendisini unutsa bile görsel olarak ispatı hatırlamasına imkan verilmiş olmaktadır.

Gierdien (2007)'e göre sözsüz ispattaki bir resim veya şekil açıklandığında ispat kanıtlayıcı ispattan açıklayıcı ispata dönüşmektedir. Bu süreçte de yani sözsüz ispatlar açıklayıcı ispata dönüşürken bilgi transferi olmaktadır. Matematiksel bilgisi iyi olan öğrenci ispat oluşturmada daha iyidir ve bir ispatın doğru olup olmadığına dair daha iyi hüküm

verebilir (Hilbert, Renkl, Kessler ve Reiss, 2008). Nitekim uygun matematiksel bilgiye sahip olan öğrenci sözsüz ispattaki çizimi ve anlamı görecektir, ispatı anlayacak ve ispattaki her bir aşamayı doğrulayarak görsel ispat yeteneğini geliştirecektir (Sigler, Segal ve Stupel, 2016).

Nesnelerin manipüle edilmesi ve değerlendirilmesi, ispat için yol göstericidir (Hanna, 2000). Gerçekten sözsüz ispatlar, resmin altında yatan matematiksel gerçeğin ne olduğunu keşfetmesi için okuyucuya verilmiş bir yapboz gibidir. Sözsüz ispatlar, iletişim ve matematiksel düşünmeyi canlandırmaya yarayan araçlardır (Doyle, Kutler, Miller ve Schueller, 2014). İspata bu açılardan bakıldığında ise sözsüz ispatlar matematik eğitiminde değerli araçlar olarak görülmektedir (Miller, 2012).

Bir öğrencinin sözsüz ispatı tanımlaması, gözlemlemesi, genellemesi, sözsüz ispata dair tahminde bulunması ve ispattan sonuç çıkarmaya çalışması matematiksel süreç becerileridir. Aynı zamanda öğrencinin sözsüz ispatta ne gördüğünü açıklamaya çalışması matematiksel fikirleri farklı sunuşlar aracılığıyla nasıl ilişkilendirebileceğini görebilmesine yardımcı olmaktadır. Sözsüz ispatlar formal ispatlarla beraber verildiği zaman öğrencinin hem ispat yapma yeteneği gelişmektedir hem de öğrenci matematiksel bir problemi nasıl daha iyi muhakeme edeceğini öğrenmektedir (Bell, 2011).

Düşüncelerini argümanlar ortaya koyarak savunan bireyler yetiştirilmesi birey için olduğu kadar toplumsal yapı için de önemli olup toplumun gelişmesi ve devamlılığı için hayati değer taşımaktadır (MEB, 2018). Türkiye’de ortaokul öğrencilerinin matematiksel sonuçları keşfetmesine yönelik etkinliklere yer verilmesi istenmesine rağmen öğretim programında ispata ayrıca değinilmemiştir. Ancak akıl yürütme becerisi içerisinde öğrencilerden matematiksel çıkarımların doğruluğunu ve geçerliğini savunmaları ile mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma davranışları beklenmektedir (MEB, 2013). 2013 yılında uygulanan ortaöğretim matematik dersi öğretim programında ispat kavramı 9. sınıfta “Denklem ve Eşitsizlikler” konusunda $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olmadığını ispatı ile öğrencilerin karşısına çıkmaktaydı. Daha sonra yine 9. sınıfta Pisagor teoremi ile üçgende Sinüs ve Kosinüs teoremlerinin ispatlarına da programda yer verilmekteydi. 11. sınıfta ise “Mantık” konusunda, aksine örnek verme, olmayana ergi ile ispat, doğrudan ispat, çelişki yoluyla ispat ve tümevarım yöntemi ile ispat öğretim programında yer almaktaydı. Dolayısıyla 2013 yılında uygulanan ortaöğretim matematik öğretim programına göre Türkiye’de öğrencilerin ispatla formal olarak tanışmaları 9. sınıfta olmaktadır. Ancak Aylar (2014)’a göre ortaöğretim programlarında ispat 9. sınıfta ele alınmış olsa da, bu konu sadece bir konu başlığı olarak sınırlı kalmakta, öğretim sürecine içselleştirilmemektedir. Yenilenen matematik dersi öğretim programında ise ispat kavramı sadece açıklama boyutunda ele

alınmış olup, öğrenciler 9. sınıfta hiçbir formal ispatla karşılaşmamaktadırlar. 11. sınıfta ise Kosinüs teoreminin, Pisagor teoreminden ve Sinüs teoreminin, iki kenarının uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının ölçüsü verilen üçgenin alanından yararlanılarak elde edilmesi istenmektedir. Ayrıca programda teoremlerin elde edilmesinde model çeşitliliğine yer verilmesi istenmektedir (MEB, 2018). Bu anlamda ispat süreci becerileri kazandırmak için informal ispatların önem kazandığı söylenebilir.

Eğitim sisteminde ispata ani biçimde geçiş yapılmasının ve nasıl ispat yazacağını bilmeyen öğrenciden ispat yapmasını beklemek öğrencilerin ispatta başarılı olmasını engellemektedir (Moore, 1994). Genellikle bir varsayımı ispatlamak kolay bir görev değildir. Özellikle ispata yeni başlayan öğrenciler için bir ispatı tamamlamak ancak belli rehberlikle mümkün olabilir (Mudaly, 2013). Özellikle ispat becerisini yeni kazanmaya çalışan öğrenciler için ispat sürecinde kontrolü kaybetmek mümkündür. Dolayısıyla gerek öğretmenin rehberliği gerekse ispatı küçük parçalara bölerek vermek ispat öğretimi için önemlidir (Heinze ve Reiss, 2004).

Öğrencilerin ispatta zorlanmalarının başlıca nedenleri; ispat yapmanın bir sistematığının veya bir formülünün ve bir ispat yapmak için genellikle tek bir doğru cevabın olmaması ve öğrencilerin ispata nasıl başlayacaklarını kestirememeleridir (Bell, 2011; Morash, 1987, s. 146). Strausova ve Hasek (2012) ise öğrencilerin ispatta zorlanmalarının sebeplerini ortaöğretim kurumlarında kullanılan kitaplara bağlamaktadır. Mevcut kitaplarda cebirsel ispatların hakim olması ve sadece statik resimlerin olması dinamik görsellerin kullanılmaması ve en önemlisi de öğrencinin ispata ilgisini sağlamak için motivasyonlarının sağlanamamasının öğrencilerin ispatta zorlanmalarına sebep olduğu ileri sürülmektedirler. Nitekim Hanna (1989) anlama, önemli olduğunu düşünme, bağdaştırma, ikna edici olma özelliklerinin ispat hakkında pozitif motivasyon unsurları olduğunu belirtmektedir. Taştepe (2012)'nin ispat kavramını kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelediği, Taştepe, Yavuz ve Baştürk (2015)'ün soyut matematik ders kitaplarındaki ispatları Balacheff'in taksonomisi bağlamında incelediği çalışmalarda, ders kitaplarının ispatta önemli bir yere sahip olduğu, rehber olduğu, farklı ispatları görebilme fırsatı sunduğu ancak kitaplarda genelde klasik ispat yöntemlerine yer verildiği yeni ispat türlerinin kullanılmadığı belirtilmektedir. Ayrıca öğrencilerin tercih ettikleri ispat yönteminin kitaplardaki ispat yöntemi ile aynı olduğunun görülmesi öğrencilerin ispat anlamında çok özgün olamadıklarını göstermektedir. Nitekim İmamoğlu (2010)'nun birinci ve son sınıf öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerini incelediği çalışmasında birinci sınıf öğrencilerinin son sınıf öğrencilerine kıyasla daha yaratıcı ispat yöntemlerine yöneldiği sonucuna ulaşmış olması öğrenimleri boyunca

öğrencileri farklı ispat yöntemlerini kullanmaya yönlentemediğimizin bir göstergesi sayılabilir. Matematiksel kavram ve terimleri zihinde oturtmada önemli bir adım olan ispat öğretiminde teorem-ispat dizgesinden öteye geçilmeyerek geleneksel bir yaklaşım izlenmesi, ispatı farklı öğretim kademesindeki her bireyin zorlandığı bir kavram haline getirmektedir (Öztürk, 2016).

Öğrencilere ispatın ikna edici, insan ürünü ve matematik yapmanın bir parçası olduğunun (Harel ve Sowder, 1998) öğretilmesi öğrencilerin ispat yapmaya karşı önyargılarını azaltabilir. Dolayısıyla öğretmenler de ispat öğretiminde büyük rol üstlenmektedir. Altıparmak ve Öziş (2005) insanda doğuştan var olan ispat ve muhakeme yeteneklerinin doğru stratejiler uygulanmadığı takdirde yok olacağı bunun için de en önemli görevin öğretmenlere düştüğünü ifade etmektedir. Öğrencilerin matematiği ve mantıksal düşünceyi daha iyi anlaması için öğretmenlerin farklı ispat yöntemlerini kullanması ve öğrencilerine konuları açıklama ve tartışma fırsatı vermesi gerektiğini belirtmektedir. Ancak Güler (2013) öğretmen adaylarıyla yapmış olduğu çalışmada öğretmen adaylarının ispat yöntemini belirleme, ispat yöntemini kullanma ve ispat yönteminin neden kullandığını açıklayabilmede güçlük yaşadıklarını ve bunların sonucu olarak da ispatta takip edilecek adımların netleştirilemediğini ve ispatın tamamlanamadığını belirtmektedir. Benzer şekilde Doruk (2016), Demir (2017) ve Sağır (2013) öğretmen adaylarının uygun ispat yöntemi seçmede yetersiz olduklarını sonucuna ulaşmıştır. Demiray (2013) ise ortaokul öğretmen adaylarının tümevarım ve doğrudan ispatı kullanabildiklerini ancak diğer ispat yöntemlerinde başarısız olduklarını ifade etmektedir. Güler, Özdemir ve Dikici (2012) ise öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım adımları arasındaki ilişkiyi tam olarak kavrayamadıklarını belirtmektedirler. Halbuki araştırmacılar öğretmenlerin konuya uygun ispatları seçerek, kendi öğretim ve değerlendirme yöntemleriyle beraber öğretimi organize etmelerini tavsiye etmektedirler. Ancak bunun yapılabilmesi için daha fazla araştırmanın yapılması bir gerekliliktir (Strausova ve Hasek, 2012). Dolayısıyla bu çalışma başarılı biçimde yürütülüp başarılı biçimde sonuçlandığı takdirde alanyazındaki bu boşlukların doldurulması ve öğrencilerin ispat becerilerini geliştirmeye yardımcı alternatif bir ispat yöntemi olarak “sözsüz ispatlar” gerek öğretmen yetiştirme programlarına gerekse matematik öğretim programına dahil edilmesi için önemli bir kaynak olacaktır.

Bir konuda henüz yeni olan öğrenciler için sezgisel yapılandırılmış örneklerin (*heuristic-worked-examples*) pozitif etkilerinin olduğu belirtilmektedir. Çünkü çözüm adımlarını içererek öğrenciye rehberlik eden bu örnekler öğrenciye çözüm adımlarını doğru seçmede, neler yapacağına karar vermede ve akıl yürütmeye yardımcı olmaktadır (Zöttl, Ufer ve Reiss, 2010). Sözsüz ispatlarda yer alan çizim ve diyagramlar teoremin niçin doğru

olduğunu anlamamıza ve ispata nasıl başlayacağımızı görmemize yardımcıdırlar (Gierdien, 2007; Kobayashi, 2010; Sigler vd., 2016). Dolayısıyla bu çalışmada öğrencilerin ispat öğretimini geliştirmek için Heinze ve Reiss (2004)'in, Boero modelinden (1999) öğrencilere ispat öğretimi için uyarladıkları modelin aşamalarına göre oluşturulan sezgisel yapılandırılmış örnekler ile ispat öğretimine alternatif bir yaklaşım olan sözsüz ispatlar beraber kullanılmıştır. Sözsüz ispat etkinlikleri, Heinze ve Reiss (2004)'in öğrencilere ispat öğretimi için oluşturdukları modelinin aşamalarına uygun olarak hazırlanmış problem, çözüm adımları ve final çözümünden oluşan etkinlikler, bir dönem boyunca öğretmen rehberliğinde öğrencilere yaptırılmıştır.

Sözsüz ispatlar matematik eğitiminde faydalı araçlar olarak görülmesine rağmen özellikle ortaöğretim öğretim programında uygulamaya yönelik çok az çalışmaya rastlanmıştır. Sözsüz ispatlarda pek fazla deneysel çalışma bulunmaması, yapılan pek çok çalışmaya rağmen öğrencilerin halen ispatta zorlanmaları ve sözsüz ispatların matematik eğitimi için değerli araçlar olarak görülmesi göz önünde bulundurulduğunda, alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatların lise öğrencilerinin ispat becerileri üzerindeki etkisinin ve sözsüz ispatların lisede uygulanabilirliğinin araştırılması planlanmıştır. Bunun için aşağıdaki alt problemlere cevap bulmak üzere araştırma yapılmıştır.

- Sözsüz ispatların lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine etkisi nedir?
- Lise öğrencilerinin sözsüz ispat yapabilme süreçleri nasıldır?
- Matematik öğretmenin ve lise öğrencilerinin sözsüz ispatlara ilişkin görüşleri nelerdir?

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı; lise öğrencilerinin sözsüz ispat yapabilme süreçlerini inceleyerek, sözsüz ispatların lise öğrencilerinin matematiksel ispat becerileri üzerine etkisini belirlemek ve lise matematik öğretmenin ve lise öğrencilerinin sözsüz ispatlara ilişkin görüşlerini belirlemektir.

Araştırmanın Varsayımları

- Araştırmacı ve dersi yürüten öğretmen araştırma konusu hakkında yeterli donanıma sahiptir.
- Gerek araştırmacının sormuş olduğu sorular gerekse öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar karşılıklı olarak doğru biçimde anlaşılmıştır.

- Öğrencilerin gerek etkinliklerde gerekse bireysel görüşmelerde kendilerini doğru biçimde ifade ettikleri düşünülmüştür.

Araştırmanın Sınırlılıkları

- Bu araştırmada hazırlanan etkinlikler var olan sözsüz ispatlarla sınırlıdır. Araştırmacının 9.sınıf konularının tamamına ait sözsüz ispat bulması mümkün olmamıştır.
- Araştırma İç Anadolu Bölgesi'ndeki bir devlet okulunda öğrenim gören öğrencilerle sınırlıdır.

Araştırmadaki Tanımlar

- **Matematiksel İspat (Formal boyut):** İspat, daha önceden her birinin geçerliği ispatlanmış aksiyoim ve teoremlere dayandırılmış ifadeler dizisidir (Morash, 1987)
- **Matematiksel İspat (İnformal boyut):** Muhakeme edilmiş delillerin kullanılmasıyla bazı ifadelerin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir başka bir deyişle iyi düşünülmüş savları kullanarak ifadenin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir (Almeida, 1996).
- **Sözsüz İspat (Proof Without Words):** Söz olmayan, sadece diyagramlara dayalı, sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler içeren, yapılandırılması okuyucuya bırakılmış ispatlar (Bardelle, 2009).
- **Yapılandırılmış Örnekler (Worked Examples):** Bir problemi, problemin çözümünün adım adım yönergesini (prosedür) ve çözümün kendisini barındıran örnekler (Reiss, Heinze, Renkl ve Gross, 2008)
- **Sezgisel Yapılandırılmış Örnekler: (Heuristic Worked Examples):** İspat süreci ve ispat çıktısını ayırt edebilmek ve ispat sürecine vurgu yapabilmek için yapılandırılmış örneklerle problem çözme öğretimini birleştirerek oluşturulmuş ve varsayımın doğru ve ayrıntılı ispatını sunan örnekler (Reiss ve Renkl, 2002).

İKİNCİ BÖLÜM

Kuramsal Çerçeve ve İlgili Araştırmalar

Bu bölümde; çalışmanın kuramsal çerçevesini oluşturan matematiksel ispat ve ispat öğretimi, görselleştirme, sözsüz ispatlar başlıklarına ve çalışmanın analiz sürecinde kullanılan Boero modeli başlığına yer verilmiştir.

Matematiksel İspat ve İspat Öğretimi

Dünyada çocuklara yeni fikirler ve kavramlar çeşitli yollarla öğretilmeye çalışılmakta ve pek çok eğitimci farklı öğretim yöntemlerini savunmaktadırlar. Farklı öğretim yöntemlerini savunanlar her bir konunun öğretiminin farklı yöntemlerle ve farklı materyallerle gerçekleştirilebileceğini dile getirmektedirler. Bu nedenle de öğretmenlerin öğretim yöntemlerine karşı bilinçli olması beklenmektedir. Elbette ki bu düşünüldüğünden daha zordur. Kimi öğrenci görsellerle daha iyi öğrenirken kimi öğrenci sözlü olarak daha iyi öğrenmektedir. Dünyanın dört bir yanında bu durumla karşı karşıya kalan öğretmenler ve araştırmacılar tüm öğrencilerin ihtiyaçlarına ve yeteneklerine uygun öğretim şeklini bulmaya çalışmaktadırlar. Ancak bütün öğrencilerde işe yarayacak bir yöntem olsaydı araştırmacılar farklı öğretim deneyleri yürütmezlerdi. Nitekim günümüzde bu konu halen araştırılmaktadır (Lane, 2004). Belki de matematik eğitiminde en zor ve en ilginç araştırma alanlarından biri, öğrencilerin matematiksel ispatı daha derin anlamalarını nasıl sağlayacağımız ve ispat tekniklerini nasıl geliştireceğimiz ile ilgilidir (Marrades ve Gutierrez, 2000).

Geleneksel olarak matematik; cebir ve geometri olmak üzere iki ana başlık altında öğretilmektedir. Türkiye’de geometri, cebir ve trigonometri birleştirilerek tümleşik matematiğe geçilmiştir. Böylelikle öğrenciler, matematiği bir bütün olarak görmeye, cebir ve geometriyi problem çözmede kullanabilmeye teşvik edilmektedir. Halbuki uzun yıllar boyunca cebir, geometri ve trigonometrinin ayrıştırıldığı sınıflardaki öğrenciler geometri ve cebiri ilişkilendirmede daha az olanağa sahip olmuşlardır. Dolayısıyla öğrenciler bu alanları birbirinden ayrı birimler olarak görmekteydiler. Fakat bu alanlar birbiriyle yakından ilişkili olup öğrencinin bu iki alan arasındaki ilişkiyi fark etmesi matematik öğrenimi açısından önemlidir (Lane, 2004).

Cebir; nicelik, ölçme, sayısal değişkenler ve sayısal işlemlerle ilgili bir alan iken, geometri; uzay, uzaysal ölçme ve uzaysal nesne özellikleri ile ilgili bir alandır. Tümdengelimsel ispat fikri ise geçmişte sadece geometri öğretimi için vurgulanırken matematiğin diğer alanlarında vurgulanmamıştır. Günümüzde ise bu durum değişmiştir ve ispat öğretimi pek çok ülkede ve pek çok nesil için matematik öğretim programının ana hedefi haline getirilerek tüm matematik derslerinde ve tüm öğrencilere öğretilmesi tavsiye edilmiştir (Ball vd., 2002; Coe ve Ruthven, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Lee, 2002; Reiss, Hellmich ve Reiss, 2002).

Akıl yürütme, doğrulama ve matematiksel ispat matematiğin temel bileşenleri olarak düşünülmektedir (Strausova ve Hasek, 2012). Nitekim gerek National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) gerekse Milli Eğitim Bakanlığı öğretim programında matematiksel akıl yürütme ve ispat okul matematiğinin temel unsurları arasında gösterilmektedir (NCTM, 2000; MEB, 2013).

Matematiksel ispat tanımları, formal boyut ve sosyo-kültürel boyut bağlamında iki grupta toplanmaktadır (Dede, 2013). Bu iki boyut sonraki başlıklar altında incelenmiştir. En genel anlamıyla matematiksel ispat, bir önermenin mutlak doğru olduğunun gösterimidir (Hilbert vd., 2008). Düşüncelerimizi standart, ortak bir yolla paylaşmak için ispata ihtiyaç duyulmaktadır ve ispatlar, matematiksel bilgi üretiminin hedef ürünü ve matematiksel düşüncenin gruplandırılmış şeklidirler. Ayrıca ispatlama formal bir aktivitedir (Doyle vd., 2014). İspat, matematik pratiğinin en üst seviyesi olarak görülmekte (Tall, Yevdokimov, Koichu, Whiteley, Kondratieva ve Cheng, 2011) ve çoğu matematikçi tarafından okullarda yapılan ispat öğretimi yaklaşımları eleştirilmekte ve ispat öğretimi ve öğrenimi için yeni yollar araştırmalarla ortaya çıkarılmaya çalışılmaktadır (Hanna, 2000). Matematiğin temel araştırma konularından birisi de tümdengelimsel matematiksel ispatın öğrenciler tarafından matematiksel önermeleri gerekçelendirme için kullanıp kullanılmadığı ya da kullanılıyorsa ne ölçüde kullanıldığının ortaya çıkarılmasıdır (Rodd, 2000).

Alibert (1988)'in matematik, fizik ve kimya öğrencileriyle yapmış olduğu çalışmasında, öğrencilerin ispat hakkındaki genel algıları, ispatın öğretmen tarafından yapılan formal bir egzersiz olduğu yönündedir. Bu görüş, ispatın öğrenci tarafından anlaşılmasını engellemektedir. Ayrıca matematiksel sonuçların matematikçiler tarafından formal ispatlar olarak sunulması yanlış bir şekilde ispatın özel bir eğitime gereksinim olduğunu düşündürmektedir. Bu durum ise öğrencide zihinsel aktiviteyi azaltmaktadır (Battista ve Clement, 1995).

Gerçekten pek çok öğrenci için ispat anlamaksızın yapılan bir ritüeldir ve araştırmalar öğrencilerin basit ispatları dahi yapamadıklarını göstermektedir (Ball vd., 2002; Harel ve Sowder, 2007). İspatın anahtar rolü, matematiksel anlamayı artırma olmasına rağmen asıl zorluk, bu amaç için ispat kullanımının en etkili yollarını bulmaktır. Bunun için ilk adım, öğrencilerimizle ispatın fonksiyonlarını tartışmak, ispatın önemine ve sınırlarına dikkat çekmek olabilir. Ayrıca öğrenciyi ispat yapması için motive edebilmek için açıklamanın ve keşfetmenin eğlencesi ve coşkusundan faydalanmak gerekmektedir ki bu öğretmen için zor bir görevdir (Hanna, 2000). Öğrencilere ispatı, matematiksel ifadelerin doğruluğunu diğer insanlara göstermenin ve teoremin niçin doğru olduğunu anlamaları için onlara yardımcı olmanın bir yolu olarak göstermek, ispatın öğrenciler tarafından anlaşılması ve öneminin kavranması açısından önemlidir (Alibert ve Thomas, 1991).

Fawcett (1938, s. 104) yapmış olduğu çalışmada öğrencilerin kendi fikirleri ve araştırmalarıyla kendi geometri kitaplarını oluşturmaları için bir deney grubu oluşturmuştur. Öğrenciler kitaplardaki tanım ve teoremleri kullanmadan kendi tanım ve teorem ispatlarıyla kendi kitaplarını oluşturmuşlardır. Öğrenciye ispat oluşturma sorumluluğu verilerek, ispatlanmış önermeden ziyade ispat yöntemine vurgu yapılmıştır. Öğretmen eğitimciden ziyade moderatör gibi davranarak iki yıl boyunca öğrencinin kendi öğrenmesine izin vermiştir. Sonuç olarak öğrencilerin gerek ispat testinde gerekse kritik düşünme becerilerini başkalarına aktarma becerisinde ilerleme gösterdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Böylelikle bilginin üretiminde öğrencinin başrol olması yönünde öğretim programları oluşturulmaya çalışılmıştır (Coe ve Ruthven, 1994). Nitekim öğretmenler öğrencilerine öğrenmeleri için fırsat verirse kendi eğitimlerinde söz sahibi olacak olan öğrenciler matematiksel süreçlere dahil olacak ve matematik çalışmalarına daha ilgili ve bağlanmış olacaktır (Lane, 2004).

Farklı seviyelerdeki öğrencilerin ispat kavramı birbirinden farklıdır (Harel ve Sowder, 2007). Örneğin ortaokuldaki bir öğrenci Pascal üçgeninin her satırının ikinin kuvvetine eşit olduğunu birkaç satırdaki sayıları toplayarak ispatlayabilirken; lise öğrencisi tamsayılar için olan binom açılımını uyarlayarak rasyonel ve irrasyonel sayılar için ispatlayabilir. Her iki durumda da öğrenen kendisi ikna olduğu için ilgili durumun ispatlandığını düşünmektedir (Almeida, 1996). Bu nedenle farklı seviyelerde ispat yeteneğini geliştirmeye yarayacak öğrenme ortamları oluşturarak etkili öğretim stratejileri oluşturmak bir gerekliliktir (Aylar, 2014; Ball vd., 2002).

Coe ve Ruthven (1994)'in yapmış oldukları çalışmada; öğrencilerin varsayımları test edebildikleri; fakat varsayımı neden yaptıklarına dair açıklama ve gerekçelendirme yapamadıkları, matematiksel sisteme yerleştiremedikleri, en cömert yorumda bile sadece iki

tane öğrencinin tümdengelimli ispat yapabildiği, geriye kalanların deneysel ispat yapabildikleri görülmüştür. Yani; öğrencilerin çoğu bir kuralı ya da örneği test ederek doğrulamaya çalışmışlardır. Nitekim incelenen çalışmalar deneysel ispatın her düzeyde öğrenciye yayılmış durumda olduğunu göstermektedir. Fakat kimi araştırmacılara göre, bu durum herhangi bir kaos oluşturmaz; çünkü matematiksel düşünme teorisine göre her öğrenci tümdengelimli akıl yürütmeyi yüksek seviyede göstermeyebilir (Almeida, 1996; Harel ve Sowder, 2007).

Ball vd. (2002) çalışmalarında, öğrencilere çeşitli sayıda paralar vermiş ve iki para aldıkları takdirde ne kadar paraları olacağını sormuşlardır. Öğrencilere bulmuş oldukları cevaplar dışında başka cevap olup olmadığı sorulduğunda, öğrenciler daha fazla cevap bulamadıkları için tüm sonuçları bulduklarını söylemişlerdir. Çıkan sonuca binaen, öğrencilerin sonlu çözümü olan bir problem üzerinde çalışırken sonuçların eksikliğini sorgulayacak matematiksel yetenekleri olmadığını ifade etmişler ve deneysel akıl yürütmenin öğrenciler için yeterli olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Elbette ki; doğaları gereği bazı görevler öğrencilerin deneysel argümanlar (ölçme, görsel delil bulma gibi) oluşturmalarını artırmaktadır. Ancak öğrencileri deneysel akıl yürütmenin ötesine taşımada öğretmenlere büyük rol düşmektedir (Boero, 1999). Tartışma, yargılama ve anlamlandırmanın teşvik edildiği ortamda yetişen bireylerin, böyle bir ortamda yetişmeyen bireylere göre tümdengelimli düşünmeye geçebilmesi daha olasıdır. Aksi takdirde, erken dönemden itibaren deneysel düşünmeye teşvik edilen bireylerin daha ileriki dönemlerde de deneysel düşünmesi kaçınılmazdır. Ancak bireylerdeki deneysel ispat şeması devamlı olmak durumunda değildir (Güner, 2012). Öğrencilerin birden fazla ispat şemasına sahip olabileceği (Harel ve Sowder, 1998) gibi geçirdiği deneyimlerle ispat şemalarının değişmesi de olasıdır.

İspat şemaları öğrencilerin matematikteki bilişsel düzeylerini ve zihinsel yeteneklerini yansıtmaktadır. İspat şeması, bir kişinin ispat kavramını tanımlamasıdır ve bir şeyin aslını anlaması, ikna olabilmesi ve başkalarını ikna etmesi gibi eylemlerin tamamı kişinin ispat şemalarını oluşturmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Harel ve Sowder, 2007). İspatlama sürecini ve ispat şemalarını öğrenci merkezli olarak nitelendiren Harel ve Sowder (2007) ispat şemalarını dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana şemaya ayırmıştır (Harel ve Sowder, 1998; s. 245-258).

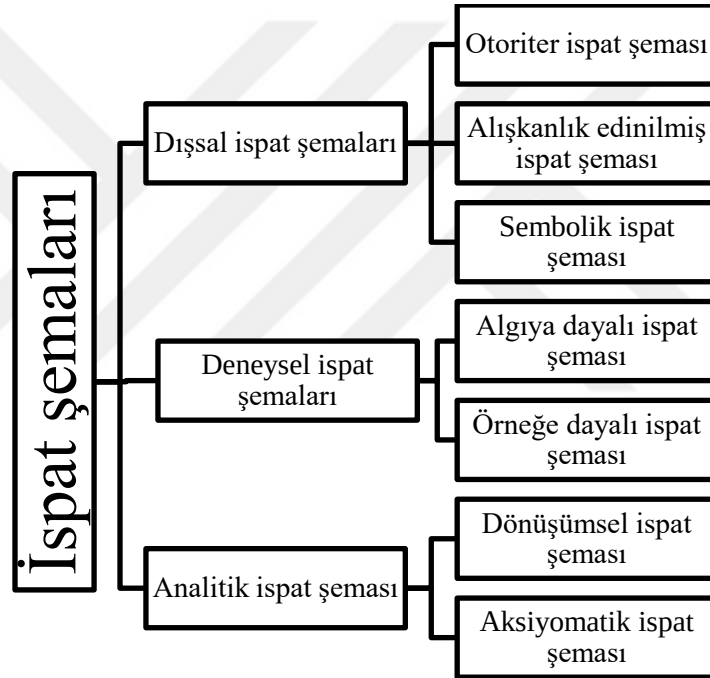
“Dışsal ispat şemaları; otoriter ispat şeması, alışkanlık edinilmiş ispat şeması ve sembolik ispat şeması olmak üzere üç alt şemaya ayrılmıştır. Bu şemaya sahip bireyler

problemleri çözmek için sadece formülleri kullanmaktadırlar. Yaratıcılıktan ve keşiften ziyade ezberlemenin başarıyı getireceğine inanmaktadırlar.” (s. 245)

“*Deneysel ispat şeması*; örneğe dayalı ispat şeması ve algısal ispat şeması olmak üzere iki alt şemaya ayrılmıştır. Bu ispat şemasına sahip bireyler varsayımları test etmek veya çürütmek için fiziksel gerçekleri veya duyuşsal deneyimleri kullanmaktadırlar. İspat, genellikle örneklere dayandırılmaktadır.”(s. 252)

“*Analitik ispat şeması*; dönüşümsel ve aksiyomatik ispat şemaları olarak alt başlıklara ayrılmış olan bu şemaya sahip bireyler mantıksal çıkarımlar aracılığıyla varsayımlarını doğrulamaktadır.” (s. 258)

İspat şemaları Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 1. İspat şemalarının sınıflandırılması (Harel ve Sowder, 1998, s. 245)

Öğrencilerin öğretmenler tarafından yapılan ispatları defterlerine geçirmesi, öğrenciye ispatı derinlemesine anlama yerine bir ispatı izleme becerisi kazandırabilir. Öğrenciler ispat problemlerinde matematiksel düşünme ile meşgul olup, ispat üzerine tartışmaları, argüman üretmeleri ve kendi düşüncelerini ortaya koymaları sağlanmalıdır (Altun, 2014, s. 336). Argüman; bir önermeye veya fikre karşı sunulan sebepler olarak tanımlanırken; argümantasyon, gerekçelere şekil verme, tümevarım yapma, sonuç çıkarma ve tartışmaları söyleme olarak tanımlanmaktadır (Boero, 1999). Fakat pek çok öğrenci deneysel fikirlerini destekleyen matematiksel argümanlar belirlemeden ve matematiksel delil üretme stratejisinden yoksundur (Reiss vd., 2008). Argümantasyon süreci ile ispat süreci arasında yapısal benzerlikler mevcuttur. Argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasında yapısal

bütünlük bulunan öğrencilerin ispat yapmada daha başarılı oldukları görülmüştür (Doruk, 2016; Urhan ve Bülbül, 2016). Dolayısıyla argümantasyon kültürünün erken dönemlerden itibaren matematik sınıflarında olması gerekmektedir (Ball vd., 2002).

Öğrenciler genellikle öğretmenlerinin söylediğine kolayca ikna olur ve bu durumu sorgulamaz ve doğrulamaya çalışmaz. Ayrıca öğrencilerin çoğunun matematiksel ispatları sevmedikleri, ispatı zor ve kullanışsız buldukları ve teoremlerin kökenine veya ispatlarına dair herhangi bir meraklarının olmadığı bilinmektedir. Bu durum öğrencilere formal ispatı öğretme çabalarını ne yazık ki boşa çıkarmaktadır. (Battista ve Clements, 1995; Mudaly, 2013; Strausova ve Hasek, 2012).

Öğrenme ilkesi iki temel fikre dayanmaktadır. Birincisi matematiği anlayarak öğrenmek esastır, ikincisi öğrenciler matematiği anlayarak öğrenebilirler. Öğrenme, öğrencilerin kendilerinin ve başkalarının fikirlerini değerlendirmelerine imkan verecek şekilde sınıfta geliştirilmektedir ve öğrenciler; matematiksel varsayım oluşturma, bu varsayımları test etme ve akıl yürütme becerilerini geliştirmek için teşvik edilmektedir (Van De Walle, 2014/2010, s. 20). Varsayımda bulunma özellikle ispat yapma süreci için gerekli ve önemlidir (Heinze, Cheng, Ufer, Lin ve Reiss, 2008). Nitekim varsayımda bulunma ve akıl yürütme yeteneklerinin geliştirilmesi eğitimin önemli amaçları arasındadır. Bu yetenekler bütün alanlar için önemli iken matematikte ayrı bir yeri vardır. Nitekim matematiksel ispat birden fazla akıl yürütmeyi aynı anda kullanabilmektir (Reiss vd., 2008).

Akıl yürütme ve matematiği anlamının bir parçası olarak öğrencilerin ispat inşa etmesinin bir gereklilik olduğunun belirtildiği NCTM (2000)'de tüm öğrencilerin akıl yürütmeyi ve ispatı matematiğin zorunlu ve güçlü bir parçası olarak tanımasını, matematiksel varsayımları araştırarak varsayımda bulunmasını, matematiksel argümanı ve ispatı geliştirebilme ve değerlendirebilme, uygun akıl yürütme ve ispat çeşidini seçme ve kullanma becerisine sahip olması gerektiği belirtilmektedir. Nitekim MEB (2013) öğretim programında da matematiksel akıl yürütme ve ispat başlığı altında öğrencilerin;

- Matematikte ve günlük yaşantısında mantığa dayalı genellemeler ve çıkarımlarda bulunma
- Matematikteki ve matematik dışındaki çıkarımlarının, duygu ve düşüncelerinin doğruluğunu/geçerliliğini savunma
- Düşüncelerini açıklarken matematiksel modeller, kurallar ve ilişkileri kullanma
- Bir (matematiksel) durumu analiz ederken matematiksel ilişkileri kullanma
- Matematikteki ilişkileri açıklama

- Farklı stratejiler kullanarak kestirimlerde bulunma ve bunu mantıksal gerekçelerle savunma
- Genel ilişkileri özel durumlara uygulayabilme
- Modelleri, önermeleri, özellikleri ve ilişkileri kullanarak yaptığı matematiksel çıkarımı açıklayabilme
- Matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengelimini etkin olarak kullanabilme
- Matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme

davranışlarının geliştirilmesi hedeflenmektedir.

İspat yapılırken amaç, iddianın her durumda doğru olduğunun gösterilmesidir ve iddianın bütün şartlarda genellenebilirliği gösterildiği takdirde ispat tamamlanmış olur. İddianın bütün şartlarda genellenebilirliğini gösterebilmek için tümevarım, tümdengelim, model kullanarak genelleme yapmak, bilinen özel bir kabul ile genele ulaşma gibi farklı matematiksel ispat yöntemleri vardır (Baki, 2015, s. 37; Dede, 2013, s. 26). Bu ispat yöntemleri aşağıda gösterilmiştir.

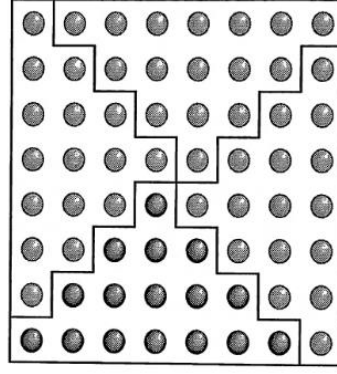
Tümevarım yöntemi: Matematiksel ispatlarda kullanılan tümevarım yöntemi $n=0$ ya da $n=1$ için iddianın doğruluğu göstererek $n=k$ için doğruluğu kabul edip $k+1$ için doğruluğu göstermektir. Matematiksel önermelerin bir kısmı bu yöntemin uygulanmasına uygun olabilirken bir kısmı uygun olmamaktadır.

Tümdengelim yöntemi: Bazı teoremlerin ifadesi genelden hareketle özel bir hükmün doğrulanmasını gerektirmektedir. Bu durumda genel doğru kabul edilerek özel durum doğrulanmaya çalışılır. Tümdengelim yönteminin doğrudan ve dolaylı ispat olmak üzere iki çeşidi mevcuttur.

Doğrudan ispat: En temel ispat çeşidi olup doğru olduğu gösterilmek istenen iddia, doğruluğu kanıtlanmış başka ifadelerle doğrulanır.

Dolaylı ispat: Teoremin kendisi yerine teoremin doğruluğunu gösteren başka bir önermenin doğruluğu ispatlanır. Bu ispat kendi içinde olmayana ergi yöntemi, çelişki bulma yöntemi, aksine örnek verme olmak üzere üçe ayrılmaktadır.

Model kullanarak genelleme yapmak: Kimi durumlarda sayılar yerine çeşitli nesneler kullanılarak iddianın modeller yardımı ile gösterilmesi mümkündür (Şekil 2).



$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$

Şekil 2. Tek tamsayıların toplamına dair sözsüz ispat (Nelsen, 1993, s. 72)

Bilinen özel bir kabul ile genele ulaşma: Bilinen bir özellikten yararlanarak iddiaların doğruluğu gösterilebilir. Örneğin “bir pozitif tamsayının çarpma işlemine göre tersinin bu sayıyla toplamı en az ikidir” iddiasının doğruluğunu göstermek için $(x - 1)^2 \geq 0$ eşitsizliği kullanılabilir. Dolayısıyla $(x - 1)^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$ işlemleri yapılarak ispat tamamlanır.

Matematikte ispat önemli aktivitelerdendir. Öyle ki; matematiğe ispatlama bilimi olarak da bakılmaktadır (Hilbert vd., 2008). İspat ile matematiksel bilginin oluşturulması, anlaşılması ve genişletilmesi sağlanmaktadır. Bu nedenle ispat matematiğin kalbidir (Hanna, 2000; Rav, 1999; Rinvold ve Lorange, 2013). İspat, sadece matematiğin kalbi değil aynı zamanda matematiksel anlamanın sağlanması için gereklidir. Yani ispat, matematiğin merkezidir ve matematik eğitiminin anahtar bileşenlerinden, yeni fikirlerin ve matematiksel yöntemlerin en önemli kaynaklarından (Ball vd., 2002; Mudaly, 2013).

Öğrencilerin ispat yetenekleri, ispat yöntemleri bilgisi ve bilimsel akıl yürütme alanındaki yetenekleri ile ilgili bilgi edinmek amacıyla Reiss vd. (2002) yedinci ve sekizinci sınıftaki öğrencilerle çalışmışlardır. Öğrenciler yedinci sınıf boyunca geometrik ispat ve argümantasyon üzerine yoğun bir eğitim aldıktan sonra; öğrencilere temel yeterlikleri, gerekçelendirme, akıl yürütme ve ispat yeterlikleri değerlendirilmek üzere araştırmacılar tarafından geliştirilmiş test uygulanmıştır. Sonuç olarak öğrencilerin matematiksel önerme ve kavram bilgisinde kısmen iyi oldukları; ancak ispatı anlama ve akıl yürütmede yeterli olmadıkları görülmüştür.

Öğrencilerin ispatı anlamaları sağlandığı takdirde, öğrencilerin ispata karşı olumsuz düşünceleri değiştirilebilir. Öğrencilerin ispatı anlayabilmelerini sağlamak için ispatla uğraşmalarına imkan vermek gerekmektedir. İspatı anlayabilmek önemli bir yetenektir ancak; bir ispatı anlamak için öğrencinin matematik başarısının yüksek olması gerekmemektedir.

Teoremler matematiğin esas unsurları olduğu için herkesin teoremlerin ispatlarını anlama kapasitesi vardır (Uğurel, Morali, Karahan ve Boz, 2016).

İspatın, öğrencilerin kavram ve teoremleri etkili biçimde öğrenmelerine yardımcı olduğu bilinmesine ve Türkiye’de ve dünyada ispat ile ilgili çalışmalar mevcut olmasına rağmen öğrenciler matematiksel ispat süreci ile ilgili zorluklar yaşamaktadırlar ve öğrencilerin ispatı yapabilmeleri için yeterince bilgileri olmadığı söylenebilir (Birinci, 2010; Keçeli Bozdağ, 2012; Çoşkun, 2009; Demiray, 2013; Gravina, 2008; İmamoğlu, 2010; Güner ve Topan, 2016; İpek ve Akkuş İspir, 2011; Lee, 2002; Polat ve Akgün, 2016; Reiss vd., 2008; Uğurel vd., 2016; Urhan ve Bülbül, 2016). Bu duruma açıklık getirebilmek adına matematik eğitiminde ispat öğretimi ve öğrencilerin zorlandıkları noktalar yapılan çalışmalar doğrultusunda ele alınmıştır.

Neredeyse yüzyıl önce de Poincare öğrencilerin ispat yapmada çok zayıf olduklarını raporlamıştır. Günümüzde de hala farklı eğitime rağmen bu problemin üstesinden gelinebilmiştir (Hilbert vd., 2008). Öğrencilerin ispat üretme ve anlamasındaki ciddi zorluklar yaşamasının ana sebeplerinden biri, öğretmenlerin öğrencilerinin gözünde ispatın ne teşkil ettiğini dikkate almamasıdır. Gerekçelendirme ve ispatın öğrencilerin gözünde ne teşkil ettiğini sözle düzeltmekten ziyade öğrencileri ispatlarla ikna ederek etkileyebiliriz (Harel ve Sowder, 1998).

Gerek öğretmenin gerekse öğrencinin gözünde ispatın ne teşkil ettiğinin ispata yaklaşım açısından önemli olduğu çeşitli araştırmalarda vurgulanmıştır. Bunun yanında bir ispatı yapabilmek için gerekli olan öğrenci yeterlikleri ile ilgili araştırmalar da bulunmaktadır.

Heinze ve Reiss (2004) sekizinci sınıf öğrencileriyle yaptıkları çalışmada bilişsel ve bilişsel olmayan faktörlerin, öğrencinin ispat yeteneğini nasıl etkilediği ile ilgili olarak “temel yeterlik, tartışmacı yeterlik (bir adım tartışma) ve tartışmacı yeterlik (birkaç tartışma adımını birleştirme)” olmak üzere üç yeterlik seviyesi belirlemişlerdir.

Reiss vd. (2002) ortaokul öğrencileriyle yapmış oldukları çalışmada, ispat yapabilmek için matematiksel kavramlar ve önermeler hakkında uygun seviyede bilgiye gereksinim olduğunu ve kendi çalışmalarındaki öğrencilerde yeterli bilginin mevcut olduğunu ancak öğrencilerin bu bilgileri ispat bağlamında kullanabilmeleri için daha farklı yeteneklere sahip olmaları gerektiğini ifade etmişlerdir. Çalışmanın sonucunda öğrencideki temel matematiksel bilgi, ispat yöntemleri bilgisi ve bilimsel akıl yürütme becerisindeki farklılıklar, öğrencilerin ispattaki başarı farklılıklarını açıklayan sebepler olarak belirtilmiştir. Ayrıca öğrencilerin yanlış çözümleri belirlemesinin, doğru çözümleri belirlemesinden daha zor olduğu sonucuna

ulaşmışlardır. Bu durumun sebebi ise; öğrencilerin ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmemeleri ve ispatları öğrenmek için düşünce sürecine girmek yerine sadece ispatları ezberlemeleridir (Doruk ve Kaplan, 2013a). Derslerde yanlış bir ispat sunularak ispatta nasıl bir yanlışlığın olduğunun belirlenmesi ile ilgili etkinlikler yapılması, öğrencilerin ispatlara yönelik bilgilerinin artması açısından önemlidir (Doruk, 2016).

Öğrenci açısından farklılıklar dışında ispat başarısını etkileyen unsurların mevcut olduğu bilinmektedir. Örneğin; öğrencinin kavramsal anlaması, bilimsel düşünme sürecindeki baskı ve çekinme gibi sınırlamalar ispat oluşturma sürecini etkilemektedir (Heinze vd., 2008).

Okullarda öğrencilerin matematiksel ispat yapmada yaşadıkları sorununun iki temel nedeni bulunmaktadır. Bu temel nedenlerden ilki, öğrencilerin ispat sürecinde devamlı olarak deneysel argümanlar, görsel deliller kullanmasıdır. Bu argümanların belli aşamalarda kullanılması faydalı iken bütün aşamalarda kullanılması sıkıntı doğurmaktadır. İkinci neden ise, öğrencilerin akıl yürütmelerinin doğasıdır. Yani öğrenciler bir ifadenin geçerli olduğundan emin olmak için yeterli örnek bulmaktadırlar. Ancak bu ispatın ilk aşamaları için yol gösterici olabilecekken, bütün aşamalarda olmaması gerekmektedir (Boero, 1999).

Ball vd. (2002)'nin öğrencilerle yapmış oldukları çalışmada tanımları bilen öğrencilerin mantıksal argüman oluşturabildikleri görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin ispatta zorlanmalarının başka bir sebebi; matematiksel tanımları ve ispata nasıl başlayacaklarını bilmemeleridir. İspata nasıl başlayacağını bilmeyen öğrenci de yalnızca örnek vererek açıklama yapabilmektedir (Harel ve Sowder, 1998; Moore, 1994).

Öğrencilerin ispat yapmada zorlanmalarının sebepleri, mantıksal erginliğin eksikliği, ispatın gerekliliğini anlamama olarak gösterilirken bunlar öğrencilerin zorlanma sebebini açığa çıkarmada tam bir resim sunmamaktadır (Harel ve Sowder, 2007). Öğrencilerin ispatta başarısız olma sebeplerinin ortaya çıkarılması çok kolay olmamakla beraber bu durumun sebeplerinden birisi de kurumlarda kullanılan kitaplardır. Çünkü bu kitaplarda genellikle cebirsel ispatlar bulunmaktadır (Strausova ve Hasek, 2012).

Öğrenme ortamı da; öğrencinin ispat yeteneğinin gelişmesinde rol oynayan bir diğer sebeplerdendir (Heinze vd., 2008). Öğrenme çevresinin özellikleri öğrencilerin ispattaki yeteneğinin gelişmesi için önemlidir. İspat yapabilmeye etkili bir öğrenme için, öğrencilere iyi organize edilmiş öğrenme fırsatları sunan, sınıf tabanlı bir öğrenme çevresi oluşturulmalıdır (Reiss vd., 2008).

Cheng ve Lin (2006) Tayvan'da yapmış oldukları çalışmada geometri derslerindeki ispatları henüz öğrenen 9. sınıf öğrencilerinin çoğunun ispatın önemli unsurlarını fark

etmelerine rağmen ispatı tamamlayabilmek için gerekli birkaç adımı kaçırdıkları sonucuna ulaşmışlardır ve bu durumu düzeltebilmek için okuma ve renklendirme (RC) diye isimlendirdikleri bir strateji önermişlerdir.

Moore (1994) Georgia Üniversitesi'ndeki öğrencilerle yapmış olduğu çalışmada, üniversite öğrencilerinin ispat yapmadaki bilişsel zorluklarını sorgulamış ve öğrencilerin ispatta zorlanmasında “kavramı anlama, matematiksel dil ve notasyon ve ispata başlama” olmak üzere üç ana sebep ortaya çıkarmıştır. Ayrıca çalışmada genel olarak ispata ani biçimde geçiş yapılmasının ve nasıl ispat yazacağını bilmeyen öğrencinin ispat yapmasını beklemenin öğrencilerin ispatta başarılı olmasını engellediği belirtilmiştir. Çalışmada öğrenciler ispatı bulduklarını, nasıl ilerleyeceklerini bildiklerini fakat bunu nasıl ifade edeceklerini bilmediklerini belirtmişlerdir. Bu durumda ispatı nasıl yazacaklarını anlamayan öğrenciler ispatı ezberlemektedirler.

Battista ve Clements (1995) öğrencilerin ispat yapabilme becerilerini geliştirebilmek için neler yapılabilir sorusuna cevap verebilmek için Piaget ve Van Hiele'nin görüşlerini incelemişler ve bu iki görüş doğrultusunda öğrencilerin ispat yapma becerilerini geliştirme ve bu gelişimde öğrencinin nerede olacağına dair değerlendirme yapmaya çalışmışlardır. Piaget öğretim programını düşünmeksizin ispat yapma becerisini geliştirebilmeyi açıklarken Van Hiele öğretim programını düşünerek süreci analiz etmiştir. Piaget'e göre öğrencilerin ispat oluşturma becerisinin geliştirilmesi üç aşamadan geçmektedir. Van Hiele ise geometrik düşünmenin beş seviyede geliştiğine vurgu yapmaktadır. Her iki görüşte de öğrencilerin hiyerarşik olarak üst seviyelere ulaştıktan sonra aksiyomatik sistemle çalışabileceklerini, dolayısıyla lise öğrencileri için aksiyomatik sisteme dayalı etkinliklerin çok da verimli olmayacağı savunulmaktadır. Nitekim Türkiye'de ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin oldukça düşük seviyede olduğunu gösteren çalışmalar mevcuttur (Çoşkun, 2009; Yılmaz, Turgut ve Alyeşil Kabakçı, 2008). Hatta Türkiye'de ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının da düşünme düzeylerinin beklenen seviyede olmadığı görülmüştür (Oral ve İlhan, 2012).

Matematiksel ispat fonksiyonları.

Gerek Türkiye'de gerekse yurt dışında ispat öğretiminin öneminden ötürü, araştırmacılar tarafından öğrencilerin ispat şemaları, ispatın rolü, ispat fonksiyonları ortaya çıkarılarak ispat öğretimine yön verilmeye çalışılmıştır (Balacheff, 1988; Bell, 1976; Çontay, 2017; De Villiers, 1990; Doruk, 2016; Hanna, 2000; Harel ve Sowder, 1998; Ören, 2007).

İspat fonksiyonları ile ilgili çalışmalar incelendiğinde ispatın fonksiyonlarının farklı başlıklar altında toplandığı görülmektedir. Örneğin De Villiers (1990) ispat fonksiyonlarını, doğrulama (*verification/conviction*), açıklama (*explanation*), sistematikleştirme (*systematisation*), keşfetme (*discovery*), iletişim (*communication*) olarak belirtmişken, Bell (1976) ispat fonksiyonlarını doğrulama (*verification/justification*), açıklama (*illumination*) ve sistematikleştirme (*systematisation*) olarak belirtmiştir. Hanna (2000) ise ispat fonksiyonlarına yukarıda verilenlere ek olarak “*deneysel teoremin kuruluşu, varsayım dizisinin veya bir tanımın açıklanması ve bilinen bir gerçeğin yeni bir çerçeveye birleştirilmesi ve bu gerçeğin farklı bir perspektiften görülmesi*” fonksiyonlarını eklemiştir.

- Doğrulama (*verification/conviction/justification*): Bir önermenin doğruluğunu gösterme ile ilgili olan bu fonksiyon en çok bilinen ispat fonksiyonlarından biridir. Pek çok matematikçi için bir varsayımın geçerliği ancak bir ispatla sağlanabilmektedir (Dede, 2014, s. 51; De Villiers, 1990, s. 18).
- Açıklama (*explanation/illumination*): Bu fonksiyon önermenin niçin doğru olduğuna dair öngörü sunmaktadır ki esasında bu fonksiyon ispatın geçerliğini etkilememekle birlikte estetik açıdan ispatı etkilemektedir. İyi bir ispat bir önermenin niçin doğru olduğuna dair ön görüş sunabilmelidir (Bell, 1976). Deneysel doğrulamalar ikna etme açısından yeterli olsa da bir önermenin niçin doğru olduğunu yeterli biçimde açıklayamamaktadır. Pek çok matematikçiye göre anlamayı sağlayan ispatın bu fonksiyonu doğrulama fonksiyonundan daha önemlidir (De Villiers, 1990; s. 19). Matematik araştırmalarında ispatın ilk rolü ikna edici olmasıdır okul düzeyinde ispatın ilk rolü açıklayıcı olmasıdır (Hersh, 1993).
- Sistematikleştirme (*systematisation*): Aksiyomların, temel kavram ve teoremlerin ve bunlardan elde edilen sonuçların tümdengelsel sistem içerisinde organizasyonu olarak tanımlanan bu fonksiyon karakteristik olarak en matematiksel olan fonksiyon olarak düşünülmektedir (Bell, 1976).
- Keşfetme (*discovery*): Yeni sonuçların keşfi veya icadı olarak tanımlanan ispatın bu fonksiyonuna az rastlanmaktadır. Matematik, sadece önceden keşfedilen sonuçları doğrulamak için bir araç değildir. Matematikte sezgiler, deneysel yöntemler veya tümdengelsel akıl yürütme ile yeni keşifler yapılabilmektedir (De Villiers, 1990, s. 21).
- İletişim (*communication*): Matematiksel bilginin yayılması anlamına gelen bu fonksiyonun önemi pek çok matematikçi tarafından belirtilmiştir. Matematiksel

sonuçların, profesyonel matematikçiler arasında, öğrenciler arasında ya da öğretmen ve öğrenci arasında yayılması ispatın iletişim fonksiyonu sayesinde olmaktadır. Bu fonksiyon ispatın sosyal tarafına dikkat çekmektedir (Hanna, 2000; De Villiers, 1990, s. 22).

İspat fonksiyonlarının her birinin ayrı ayrı önemli olmasına karşın, ispatın en temel işlevi inancımız için temel sağlamasıdır. Fakat ispatın önemli fonksiyonlarından olan ve teoremin niçin doğru olduğunu anlamamızı sağlayan açıklama fonksiyonuna yeterince önem verilmemektedir. Bu durumun sebepleri, ispata genel olarak pedagojik perspektiften ziyade felsefi perspektiften bakılması (Coe ve Ruthven, 1994), ispatın açıklama ve genelleme aşamalarının önermenin geçerliğini etkilemeyerek sadece ispatı estetik yönden etkilemesi (Baki, 2015, s. 38) ve çoğunluğun ispatın sadece doğrulama fonksiyonunu yerine getirmesi görüşüne sahip olmasıdır (Mudaly, 2013). Esasında ispat öğretimi niçin sorusuna argümanlar bulmanın içine yerleştirilebilir (Ball vd., 2002). Dolayısıyla pedagojik olarak bir ispatın niçin doğru olduğunu anlamamızın önemli olduğu söylenebilir. Nitekim ispat bir açıklama biçimi ve anlamayı nakleden bir araçtır (Mudaly, 2013).

Bir ispatın bütün fonksiyonları yansıtmaması ummamıza rağmen her bir fonksiyonun aynı derecede matematik eğitimiyle alakalı olmaması sebebiyle, eğitimde ispat fonksiyonlarına aynı derecede ağırlık verilmemektedir. Ancak matematik dünyasına giren her öğrencinin temel fonksiyon olan açıklama ile tanışması gerekmektedir. Çünkü bir ispat hem ikna edici hem de gerçek matematiksel anlamayı sağlayacak biçimde bir matematikçi tarafından meşrulaştırıldığında geçerli olmaktadır (Hanna, 2000) ve matematiksel anlamının sadece tümevarımsal ve tümdengelimsel ispat ile olması mümkün değildir. Eğer öğrencilerde ispata yönelik yeterli kazandırmak istiyorsak ispat öğretimine açıklayıcı ispatları yerleştirmeliyiz. (Gierdien, 2007). Nitekim bir ispatı diğer bir ispata karşı tercih edilebilir yapan unsurun ne olduğu sorusu ucu açık bir sorudur. Fakat ispatın açıklayıcı olması tercih edilmesine sebeptir (Doyle vd., 2014).

Huang (2005) çalışmasında Hong Kong ve Shanghai'deki öğretmenleri incelemiş ve öğretmenlerin çoğunun teoremleri görsel olarak doğruladığını ve böylelikle ispatın hem keşfetme hem de doğrulama fonksiyonunun gerçekleştiğini belirtmiştir. Çalışmasında incelemiş olduğu öğretmenlerin, öğrencileri ispat için teşvik ettiklerini, açık uçlu sorularla öğrencilerin kritik yöne odaklanmalarını sağlayarak ispatı yapılandırmalarına yardım ettiklerini belirtmiştir. Nitekim bu öğrencilerin sekizinci sınıfta bir teoremi açıklayabildikleri ve şayet öğretmen öğretimi uygun biçimde organize ederse belli yollarla ispatı yapabildikleri görülmüştür. Dolayısıyla bir ispatın geçerliği sadece aksiyomatik bileşenlerle sunulmasına ve

yazılı formda olmasına değil aynı zamanda kavramsal ilişkilerin mantıksal uyumuna da bağlıdır. Bu da kişileri sadece teoremin doğru olduğuna ikna etmez; aynı zamanda onlara ispatın niçin doğru olduğunu açıklar (Huang, 2005).

Lise öğretim programı çeşitli düşünme seviyeleri için uygun olup öğrenci için sağlanacak öğretim ortamı öğrencilerin görsel doğrulamayı kullanmasına ve deneysel düşünmesine olanak vermelidir. Çünkü bu tip düşünme geometrik düşünmenin daha üst seviyeleri için temeldir. Öğretim programında öğrenciden fikirlerini doğrulamaları ve açıklamaları istenmelidir. Böylelikle öğrencinin bu noktadaki eksikliklerini yavaş yavaş anlaması sağlanarak düşüncelerini iyileştirebilmesi için fırsatlar verilmiş olur. Bu da öğrencilerin formal ispat bileşenlerini kullanmaya başlayabilmeleri için bir adımdır (Battista ve Clements, 1995). Lise döneminde birey soyut düşünme dönemindedir ve bu yıllar ispat tekniklerinin geliştirilmesine uygun bir dönemdir. Özellikle geometrik şekillerle ispatların kullanımı bu dönemde önemli yer tutmaktadır (Altıparmak ve Öziş, 2005).

Sınıflarda ispat kullanımını geliştirebilmek için matematik eğitimcilerinin ispat öğrenmenin rolünü kavraması gerekmektedir. Bir matematikçi için bir durumun doğruluğunu bilmek tek başına yeterli olmamaktadır. Matematikçi iddiasının neden doğru olduğunu araştırmayı istemektedir. Esasında açıklama fonksiyonu gerek öğretici gerekse öğrenen için önemlidir. Elbette ki ispatın hangi fonksiyonunun daha önemli olduğunu tartışmaktan ziyade özellikle ispata yeni başlayan öğrenciler için ispatın önemini kavratmak açısından ispatın açıklama fonksiyonunun gücünden faydalanmanın önemli olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerin tümdengelimsel akıl yürütmenin doğasını öğrenmesi, bir sonucun doğruluğunun ortaya koyulup koyulamayacağını anlaması açısından önemlidir. Fakat ispat sınıfta en büyük katkıyı öğretmen ispatları kullanarak anlamayı aktarabiliyorsa yapabilmektedir. Dolayısıyla en iyi ispat, teoremi anlamaya yardım eden ispattır. Teoremin sadece doğruluğunu değil niçin doğru olduğunu gösteren ispat hem ikna edicidir hem de ileriki keşifler için önemlidir (Hanna, 2000). Nitekim sözsüz ispatlarda da böyledir.

İspat kavramı ne yazık ki öğretmenlerde de yeterince iyi değildir. Öğretmenler ispatın doğrulama rolünü kabul etseler de pek çoğunda deneysel ispat şeması baskındır (Harel ve Sowder, 2007). Zaten öğrencilerin çoğunun bir teoremi ispatlamayı, deneysel test etme olarak düşüncelerinin sebebi; öğretmenlerin öğrenciler ispatı anlamadığında örnek vermeyi anlatma olarak kullanmasıdır. Nitekim Demir (2017) öğretmen adaylarının özel bir durumdan veya birkaç sayısal değer ile elde edilen sonucu ispat olarak kabul etmesini ispat sürecinde en çok yapılan muhakeme hatalarından biri olarak belirtmektedir. Güler ve Ekmekçi (2016) öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmada elde ettikleri bulgulara göre, öğretmen adaylarının

ispatların doğru olduğuna karar vermede iyi olduklarını fakat ispatın neden doğru olduğunu açıklayamadıklarını ve cevaplarını yeterli argümanlarla destekleyemediklerini belirtmektedirler. Özellikle öğretmen adayları geometrik modellerin kullanıldığı ispatlarda, varsayımı belirleme ve aktarma noktasında cebirsel ispatlara oranla daha fazla zorlanmaktadır (Güler ve Temizyürek, 2015). Bu durumun bir sonucu olarak öğretmenlerin ispata yaklaşımının öğrencilerin ispata yaklaşımını etkileyeceği bir gerçektir (Hanna, 2000).

Matematiksel ispat süreci.

Profesyonel bir matematikçi için ispatın iki temel yönü vardır. Bunlardan ilki, kişisel yönüdür ki; matematikçi aşikar hipotezlerle ulaştıklarını araştırmacı olarak başkalarına açıklamaktadır. Burada fikirlerin mantıksal yapısını göstermek için akıl yürütmenin tümdengelsel zincirini oluşturmak esastır. Diğeri ise; ispatın müşterek bir yönüdür ki burada diğr matematikçilerin düşünceleri ve fikir paylaşımları yer almaktadır. Yani bu bağlamda, ispat başkalarını ikna etmeye çalışırken kendini de ikna etme aracıdır. Bu da ispatın sosyal yönüdür. Ancak genel olarak öğrencilere ispatın bitiş ürünü olarak sunulması, ispatın oluşturulması esnasında öğrencinin aktif rol oynamaması sadece bilginin pasif bir alıcısı olması ispatın anlaşılmasını engellemekte ve öğrencilerin ispatın, matematik için fonksiyonel bir araç olduğu hakkında yetersiz bir değerlendirme yapmalarına sebep olmaktadır (Alibert ve Thomas, 1991; Coe ve Ruthven, 1994; Harel ve Sowder, 2007).

Matematiksel ispat genellikle üç aşamada tamamlanmaktadır (Baki, 2015, s. 38):

- Birinci aşamada iddianın doğruluğu araştırılır ki buna doğrulama aşaması denir.
- İkinci aşamada ise iddianın niçin doğru olduğunun açıklaması yapılır ve bu açıklama aşamasıdır.
- Üçüncü aşamada ise genelleme koşulları kontrol edilerek soyutlama yapılır ve bu aşamada ispat için yapılanlar matematiksel dil kullanılarak en kısa yoldan soyutlaştırılır.

İspat süreci ve bu sürecin bir çıktısı olan ispatı birbirinden ayırmak gerekmektedir. Bir teoremin ispat süreci bazen yılları almaktadır ve bu süreç başarıya ulaşan ya da ulaşamayan unsurları kapsamaktadır. Genel olarak da süreçteki çabaların hiç biri final ürününde görülmemektedir. Dolayısıyla ispat öğrenimi ve öğretimi sadece doğru bir ispat sunmakla kısıtlanmamalıdır. Sürecin çıktısından ziyade ispat sürecinin vurgusunu yapmak daha önemlidir. Başarılı bir ispat öğretimi ise tüm ispat sürecini kapsamalıdır. Yani öğrenci ilk deneyimden başlayarak hipotezi genelleme ve son olarak ispatın tamamını yazma sürecinde

aktif olmalıdır. Bir ispat yapılırken gözlemlemek ya da ispatın aynısını yazmak öğrenme süreci için yeterince faydalı değildir (Heinze ve Reiss, 2004). Nitekim Birinci (2010) ispat yapılırken süreçten çok nesnelerden yararlanıldığı, bu durumun da ispat sürecinden kopmaya neden olduğunu çalışmasında belirtmiştir.

İspat öğrenimini desteklemek için öğrencinin ispat aşamalarına ve ispat sürecine karşı farkındalıklarını arttırmak makuldür. Dolayısıyla ispat problemlerinin altına yerleştirilmiş matematiksel içerik öğretimi ve öğrencinin ispat sürecinde açıklamaya teşvik edilmesi öğrenme çevreleri oluşturulurken dikkat edilmesi gereken hususlardandır (Reiss vd., 2008). Nitekim öğrencilerin, matematiksel ispatın hangi basamaklar dahilinde gerçekleştiğini bilmemeleri ve ispatın geleneksel format dışında sunulduğunda geçerli olmadığını düşünmeleri matematiksel ispatta zorlanmalarına neden olmaktadır (Çalışkan, 2012).

İspat, var olan kuralları kullanarak yeni bir bilgi elde etme süreci olarak görülürse; bir ispatta sonuçtan çok süreçte yapılanlar önemlidir diyebiliriz (Cheng ve Lin, 2006). Ancak süreç olarak ispat ve sonuç olarak ispat arasındaki ilişki ile ilgili yeterli araştırma mevcut değildir ve ispat öğretimi sürecinin daha derin anlaşılması için deneysel araştırmalara ihtiyaç vardır (Ball vd., 2002).

Matematikçiler için matematiksel sonuçların geçerli olması için gerekli olarak görülen ispatın, öğrenciler için bu anlama geldiği söylenememektedir (Battista ve Clements, 1995). Pek çok öğrenci için ispat, zaten bilinen gerçekleri doğrulamak için kullanılmaktadır (Harel ve Sowder, 2007). Schoenfeld'e (1985) göre öğrencilere sezgisel olarak açık olan argümanları doğrulatmak öğrenciler için ispatın gereksiz olduğu algısına sebep olmaktadır. Daha açık biçimde ifade edecek olursak; doğru olduğu anlatılan bir şeyi doğrulamak öğrenciye anlamsız gelmektedir. Halbuki ispat tüm matematik öğrenenler için normal bir aktivite olmalıdır (Akt., Coe ve Ruthven, 1994). Öğrencilere ispatın gerekliliği için ispat etkinlikleri, varsayım yapabilme, delil ve argüman sunarak çelişkileri giderme ve hipotez üretme imkanları gibi alternatif yaklaşımlar sunulabilir (Battista ve Clement, 1995). İspat sürecinin öğrenciye keşfetme ve buluş sağlamaması öğrencide ispatın işlevsiz olduğu inancına sebep olmaktadır (Hilbert vd., 2008).

İspatlanacak ifade, toplumun diğer üyeleriyle etkileşimi sonucu değişebilir. Dolayısıyla bir önermenin keşfi ispattan önce olmak zorunda değildir. Yani ispat bir önermenin keşfini mümkün kılabilir (Lee, 2002). Keşfetme ve ispat birbirinden farklı fakat birbirini destekleyen iki kavramdır. Bu iki kavramın her ikisi de matematik başarısı için gereklidir. Bir problemin keşfi ile problemin yapısı ve alt bölümleri kavranırken, problemin bağlantıları açıklığa kavuşmamaktadır. Bir önermenin doğruluğu keşifle açıklığa kavuşsa da

gerekçelendirilmeye ihtiyacı vardır. Bunu da kabul edilen ilkelerle ispat sağlayabilir (Hanna, 2000). Kabul edilebilir bir ispat için, öğrenci verilenlerle gerekli tüm bilgileri fark etmeli, uygun özellikleri kullanarak tündengelimsel adım sürecini ilerleterek gerekli bilgileri kullanmalı ve verilenlerle istenen sonuca ulaşmalıdır (Cheng ve Lin, 2006).

İspat; araştırma, matematiksel kavram bilgisini kullanma, sezgisel stratejileri problem durumuna uygulayabilme, varsayımları belirleme, mantıksal argümanları organize etme, verilenleri çözümlemek ve gerekli dönüşümleri organize etmek gibi bir dizi zihinsel aktiviteyi gerektirmektedir. İspat öğretimindeki başarısızlığın sebebi de bu karmaşık sürecin fark edilmemesidir (Ball vd., 2002; Heinze vd., 2008; Reiss vd., 2008). Matematikte ispatın doğasını anlamak da bu zihinsel aktivitelerin gerçekleştirilmesine eşittir (Reiss vd., 2008). Bu karmaşık süreçte öğretmen öğrencilere yol gösterici olmalıdır (Heinze ve Reiss, 2004).

Formal ve informal yönüyle matematiksel ispat.

Sosyolojik açıdan ele alındığında, ispat süreci birbirinden ayrı fakat birbirine bağlı üç aşamadan oluşmaktadır. Bunlar; ispatı yapılacak konunun ortaya konulması, ispatın organizasyonu ve ispatın diğer insanlara açıklanmasıdır. Dolayısıyla bir ispatı diğer insanlara açıklamak, sadece ispatı sunmak değildir. Matematikçi başkalarını ikna etmeye çalışmalıdır (Lee, 2002).

İspat düşüncesinin gelişimine yönelik farklı sınıflandırmalar yapılmıştır. Örneğin Blum ve Kirsch (1991) çalışmalarında, preformal ispat (formal olmayan) ve formal ispat tanımlarını kullanmışlardır. Formal olmayan ispatlar, sanıldığı gibi aksine formal ispatlardan daha kolay ispatlar değildir. Çünkü sezgisel temel kavramları, matematiğin temel fikirlerini kullanabilmeyi gerektirmektedir. Formal olmayan ispatlar, geçerli ve kesin olan fakat formal olarak ortaya konulmayan ispatlardır. Bu ispatlarda teoremin doğruluğu sezgisel olarak ortaya konulmaktadır.

İspat tanımları incelendiğinde ispat ile ilgili olarak iki görüşün olduğu görülmektedir. İlk görüş, teorem ve aksiyomlardan hareketle bir ifadenin doğruluğunu göstermeyi esas alırken; diğer görüş, hiçbir form olmadan sadece ikna etme özelliğini esas almaktadır (Miller, 2012). Öncelikle değer anlayışımız ne olursa olsun, ispatın tanımının “tam anlamıyla emin olmanın yolu” olduğunu kabul etmemiz gerekmektedir (Mudaly, 2013).

İspat, doğrulama, aydınlatma ve sistematikleştirmeye hizmet eden matematiksel bir süreç olarak ele alınırsa; bir öğrencinin matematiği öğrenmeye başladığı andan itibaren ispatla tanışması gerekmektedir. Elbette ispatla yeni tanışan öğrenciler için ispat, anlaşılması güç aşamalar ve soyut formlar içermemelidir. Yapılan araştırmalarla öğrencilerin genel olarak

informal ispatları kullandığı görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin öğrenme durumlarına uygun informal ispatlar da öğretimde yer almalıdır (Keçeli Bozdağ, 2012; Coe ve Ruthven, 1994; Reiss vd., 2002).

İnformal ispatlar, aksiyom ve postulatların mantıksal adımlarla biçimsel olarak birleştirilmediği ispatlar olarak tanımlanırken, formal ispatlar matematiksel teoremlerden türetilen bir dizi aksiyom olarak tanımlanmaktadır (Lakatos, 1978, Akt., Miller, 2012).

1970 ve 1980 yılları arasında matematik eğitimcileri sınıflarda ispatın formal yönünün vurgulanarak, matematiksel anlama yönünün ihmal edildiğini belirtmişler ve ispatın matematik öğretim programındaki yerini eleştirmişlerdir. Pek çok araştırma neticesinde, ispatın matematiğin önemli konularından olduğu ve matematiksel yeterlik için gerekli olduğu sonucuna ulaşılmıştır ancak; ispatın formal ispat ile aynı anlamda kullanılmaması özellikle vurgulanmıştır (Battista ve Clements, 1995; Reiss vd., 2002).

Öğrencilerin matematik veya geometriye girişlerinin aksiyomatik ele alınışlar ya da formal ispatlar olmaksızın informal biçimde olmasında herhangi bir sakınca yoktur. Akıl yürütmeyi, çıkarım yapmayı ya da tümdengelim teşvik edecek etkinlikler öğretime dahil edilmesi gerekirken; yapılandırılmış formal ispatlar her seviyede öğretime dahil edilmemelidir. Özellikle ispat kavramı yeni gelişen öğrencilerde, kavramların gelişmesi için öğrencilere ilk olarak informal biçimde problem çözme ve uygulamalı araştırma etkinliklerinin yaptırılması tavsiye edilmektedir (Harel ve Sowder, 1998). Çünkü öğrencilerin çoğu aksiyomatik sistemin anlamını ve rolünü açık biçimde anlamış değildir ve ispatlara karşı kayıtsız ve teorem ispatı konusunda kendilerine güvensizdirler (Shaughnessy ve Burger, 1985).

İspatın, fikirleri düzeltme, farklı sunuşlar arasında geçiş yapma, diyagramların manipülasyonuna ve diyagramlar üzerinde karalamalar yapma gibi problem çözme sürecinin parçası olarak sunulması ispat öğretim süreci için önemlidir (Ball vd., 2002). Ayrıca formal ispattan kaçınmak, ispatın öğrenci tarafından anlamlı kullanımına neden olmaktadır (Battista ve Clement, 1995). Tymoczko informal ispatların daha ikna edici olduğunu ve yeni keşiflere yol açtığını belirtmektedir (Hanna, 1989). Doruk (2016) kişilerin kendilerini ve başkalarını matematiksel bir ifadenin doğruluğuna ikna ederken sevmedikleri yapı yerine informal yapıları ikna edici bulmalarını beklenen bir durum olarak ifade etmektedir.

Öncelikle fikirlerin doğrulanmasına odaklanılarak, öğrencilerin görsel ve deneysel temeller inşa etmelerini sağlamak, öğrencilerin formal ispatın gerekliliğini anlamaları açısından önemlidir. Ancak pek çok matematik dersinin işleniş biçimi ve matematik ders

kitaplarının içeriği bize matematikçilerin sadece aksiyomlara dayalı tümdengelsel ve mantıksal akıl yürütmenin olduğu formal ispatı kullandıklarına inanmamıza yol açmaktadır. Halbuki matematikçiler de doğruyu ilk başta sezgisel olarak veya doğadaki gözlemlerle bulmaktadırlar (Battista ve Clements, 1995).

Dolayısıyla ispatta yeni olan öğrenciler için, üst seviyelerde ispat becerisi beklemek çok doğru olmayabilir. Çünkü ğrenciler ilk önce özel bir durumu, resim çizme gibi maniplasyonlar aracılığıyla ispatlar; daha sonra daha fazla özel durum kullanarak zihinlerindeki eylemleri görselleştirir ve sonunda genelleme yapabilirler (Semadeni, 1980, Akt., Harel ve Sowder, 1998). Nitekim ğrencilerin çoğu genel matematiksel akıl yürütmeyi ve cebirsel sembollerini aynı anda kullanamamaktadırlar. Bunun için özel örneklere ihtiyaç duymaktadırlar. Görsel sunumlar kullanılarak öğrencilerin değişkenleri sembolik olarak kullanmaya başlamalarından önce akıl yürütme yetenekleri geliştirilebilir. Böylelikle daha sonra kullanacakları cebirsel terimlere de somut olarak anlam kazandırılmış olur. Özellikle değişkenlerin sembolik olarak kullanılmasına henüz giriş yapmış öğrenciler için sembollerin manipülasyonun ne anlama geldiğinin somutlaştırılması önemlidir. Görsel sunumlar, cebirsel manipülasyonların adımlarını anlamaları için öğrencilere rehberlik etmektedirler. Elbetteki buradan görsel sunumların bu yeteneği kazanmış olanlar için önemli olmadığı anlamı çıkmamalıdır. Sonrasında bu sunumlar yeni keşifler için de ilham kaynağıdır (Flores, 2000).

Cabri temelli geometri öğretiminin etkisini inceleyen Marrades ve Gutierrez (2000) 16 tane on beş yaşlarında ğrenci ile bir ğretim deneyi yürütmüşler ve yazılımların öğrencinin soyut gereklendirme ve formal ispatları anlamalarına yardımcı olacağını, ortaöğretim ğrencilerinin deneysel düşünmeden varsayım ve gereklendirme yapabilmeye geçişinin çok yavaş olduğunu, dolayısıyla bu seviyede öğrenciler için deneysel yöntemler sağlanması gerekliliğinden bahsetmektedirler.

Yaygın yaklaşımlara ek olarak, ispat oluşturmak hatta ispatı anlamak için alternatif yaklaşımlar kullanmak faydalı olabilir (Uğurel vd., 2016). İspatı; ispatın sunulması, ispat yaratma, bulma ve bir ispatın anlaşılması veya öğrenilmesi diye ayırırsak ispat öğrenme için sadece cümlesel ispatların kullanılmasının gerekli olduğunu düşünemeyiz. Yani bir ispatın somutlaştırılması için sadece kelimeler yeterli olmamaktadır. Cebirsel formüller ya da sadece diyagramlar tüm bilgileri direkt verme gücüne tek başlarına sahip olamazlar. Her ikisinin de güçlü olan tarafları birlikte kullanıldığında ispatı somutlaştırmak kolaylaşmaktadır (Rinvold ve Lorange, 2013). Brown (2008, s.137)’a göre matematik zengin bir alandır ve bir şeyi ispatlamanın pek çok yolu vardır. Dolayısıyla matematikte sadece sözel ve sembolik ispatların kullanılması doğru değildir.

Bir kavramın informal şekilde anlaşılmadan yazılı biçimde de anlaşılması pek mümkün değildir. Tanımları kullanma yeteneği informal kavram imajlarına ve formal tanımlar bilgisine bağlı olmaktadır. Yani öğrenciler örneklerle, diyagramlarla ve grafiklerle kavram imajlarını geliştirmektedirler. Başka bir deyişle öğrenciler formal sözel tanımları anlayabilmek için informal kavram imajlarına ihtiyaç duymaktadırlar (Moore, 1994). Özellikle ispat kavramına giriş olarak somut modellerin kullanıldığı, görselliği ve fiziksel hareketi içeren informal ispat etkinliklerine de yer verilmelidir (Doruk, Kıymaz, Horzum ve Morkoyunlu, 2014). Nitekim Güler ve Temizyürek (2015), Ünveren (2010), Yılmaz (2015) ve Yılmaz ve Çiltaş (2015) yapmış oldukları çalışmalarda modellerin ispat becerisi ve ispata yönelik tutum üzerindeki olumlu etkisinden bahsetmektedirler.

Elbette ki formal ve informal ispat uygulamaları arasında denge kurulması çok kolay değildir. Ancak öğretmenlerin bu dengeyi kurabilmesi için farklı ispat uygulamalarını bilmesi gerekmektedir. Okul matematiğinde ispat pratiklerinin farklı seviyeleri olduğuna göre, geleceğin matematik öğretmenlerinin bu konuda eğitilmiş olması gerekmektedir. Esasında matematik öğretmenleri zaten formal matematiksel ispat ile çalışmak durumundadır. Fakat sadece formal ispatlar üzerine odaklanmak, öğretmenlerin öğrencileri için alternatif uygulamalar yapmalarına engel olabilmektedir. Halbuki öğrenciler matematiksel yapı ve ilişkileri anlamak için informal matematik ile akıl yürütmektedirler (Almeida, 1996). Nitekim bir sınıf etkinliğinin değeri formal ve informal akıl yürütmeyi içererek anlamayı sağlamasına göre belirlenebilir (Hanna, 1989).

Matematiksel akıl yürütme öğrenilebilirdir ve akıl yürütme kapasitesinin gelişmesinde öğretmen önemli bir rol üstlenmektedir. Öğretmenlerin, öğrencilerin matematiksel akıl yürütmeleri için fırsat ve ihtiyaç oluşturacak matematiksel görevler seçmesi önemlidir (Ball vd., 2002). Fakat öğrencilerine ispatı öğretecek öğretmen adayları ispatta henüz yeterliğe sahip değilken öğretmen olduklarında ispat öğretimine başlamaktadırlar (Jones, 2000).

Öğretmenlerden ispat öğretimi için alternatif yöntemler beklenmesine rağmen öğretmen adaylarına bu konu ile ilgili pek fazla eğitim verilmemektedir (Karras, 2012). Güler ve Ekmekçi (2016) öğretmen adaylarının ispat becerilerini incelemiş oldukları çalışmalarında, öğretmen adaylarının sözel, cebirsel ve sözsüz ispatlarda genellikle yapılan işlemlere odaklandıkları, ispat yöntemi ve mantığını anlamakta güçlük çektikleri sonucuna ulaşmışlardır.

Önceleri öğrencilerin zihin yapıları arasındaki fark yeterince bilinmediği için öğrenenin doğasına yeterince hitap edilememekteydi. Şimdilerde ise daha fazla öğrenciye ulaşabilmek esastır (Hanna, 2000). Bu anlamda diğer konularda olduğu gibi ispatlarda da

öğrenciye çeşit sunulması, öğrencilerin doğasına hitap edebilmemizi sağlayarak öğrenciler için zor ve sıkıcı olan ispatları eğlenceli ve yapılabılır kılmamızı sağlayabilir.

Matematik eğitiminde ispata yaklaşım, öğrencilerin formal matematiksel ispat yeteneklerini geliştirmek yerine; matematiksel ispatı anlamalarını sağlamak olarak değişmiştir. Hedeflerdeki bu değişikliğin sebebi ise, lise öğrencilerinin aniden formal ispat yöntemleriyle ispata başlamalarıdır (Marrades ve Gutierrez, 2000). Gerçekten pek çok matematik öğretmeni, erken dönemlerde öğrenciler için aritmetik kavramlar, hesaplamalar, algoritmalara odaklanırlarken, öğrenciler ortaöğretime geldiklerinde öğrencilerden aniden ispatları anlamaları ve hatta ispat yazmaları istenmektedir (Ball vd., 2002). Halbuki öğrencilerin ispatın kavramsal çerçevesini anlamaları için yardıma ihtiyaçları vardır (Reiss, vd., 2008). Aylar ve Şahiner (2016) ortaokul öğrencilerinin ispat sürecini inceleyen çalışmalarında, soyut düşüncenin gelişiminin başladığı ortaokul döneminde de ispatı uygun düzeyde ve erken yaş grupları için dahil etmenin önemine değinmektedirler. Nitekim araştırmanın sonucunda, öğrencilerde örnek vererek doğrulama yapma eğilimi azalmış fakat devam etmiştir. Dolayısıyla erken dönemde öğrencilerin sadece deneysel doğrulama yapmalarının önüne geçilebilir.

Kimi eğitimcilere göre tümdengelimsel ispat öğrencilere öğretilmemelidir. Çünkü sezgisel teknikler, doğrulamada (justification) ispattan daha faydalıdır. Açıklama, araştırma ve informal doğrulama, sezginin kullanılmasını sağladığı için formal ispatlara göre daha kıymetlidir ve ispata göre bu eylemler daha fazla matematiksel kavrayış ve kıvraklık sağlamaktadır (Hanna, 2000). Nitekim Coe ve Ruthven (1994) ispatı, zihinsel ve formal ispat olarak ayırmaktadır ve zihinsel ispatı; teoremi anlamamız için olan ispat, formal ispatı; anladığımızı başkalarının anlaması için yazıya döktüğümüz ispat olarak ele almaktadır. Dolayısıyla ispatın formal ve informal argümanların geniş bir dizisinin olduğu düşünülürse ispatın bu iki yönünün de önemi göz önüne alınmalıdır (Reiss vd., 2002).

Görselleştirme matematik eğitiminin önemli konuları arasında yer alıp, ispat becerisini geliştirmek için kullanılmaktadır.

Görselleştirme

Bu başlık altında görselleştirmenin matematik eğitimindeki yeri ve ispat ile birlikte kullanımına değinilmiştir.

Görselleştirme ve matematik eğitimindeki yeri.

Hadamard matematiksel düşüncenin görsel olduğunu kelimelerin ise araya girdiğini söylemiştir (Borwein ve Jörgenson, 2002). Duval (1999) ise görselleştirmeyi, matematikte anlamamanın temeli olarak nitelendirmiştir.

Görsel düşünme matematikçiler için her zaman önemli olmuştur fakat 1980'lerin sonu ile 1990'ların başından itibaren öğrenciler için matematiksel deneyimlerin ayrılmaz parçası olarak öğretimde yerini almaya başlamıştır. Görselleştirme, zihinden geometri yapmayı, şekillerin zihinsel görüntülerini oluşturmayı ve hayalinde görüntüler üzerinde çalışmayı (farklı perspektiften nasıl görüneceği, çeşitli dönüşümlerin sonuçlarını tahmin etmeyi) içermektedir. Dolayısıyla bir şekil hakkında düşünme, şekli zihinsel olarak dönüştürme ve manipüle etmeyi gerektiren herhangi bir etkinlik öğrencinin görselleştirme becerisine katkıda bulunmaktadır (Van De Walle, 2014/2010, s. 429).

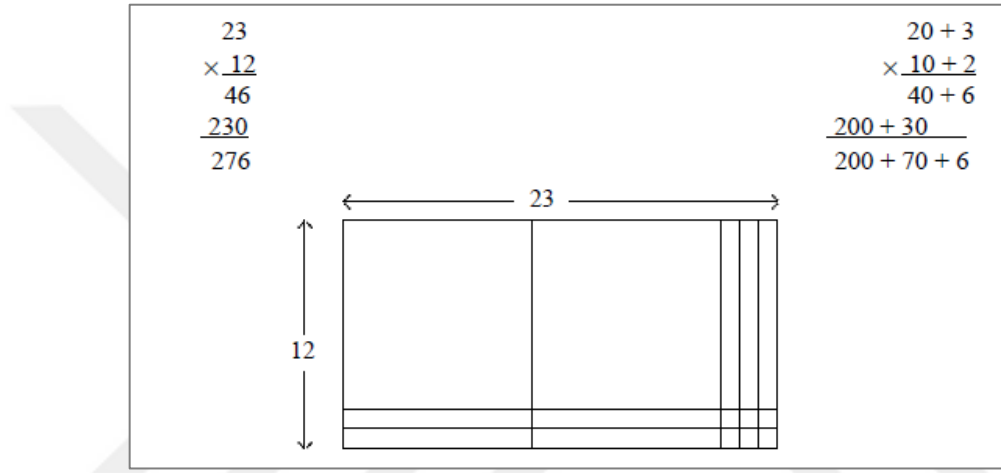
Görselleştirme, matematiksel bir fikri iletmek, açıklamak ve keşif için iyi bir araçtır (Giaquinto, 2007; Hanna ve Sidoli, 2007) ve matematik başarısı için öğrenenin görselleştirme becerisinin iyi olması gerekmektedir (Alsina ve Nelsen, 2010).

Görselleştirmenin, matematiksel sonuçları geliştirmede, problem çözmek için basit, şık ve güçlü yaklaşımlar sunmada ve matematiğin farklı alanları arasında bağlantı kurabilmede, öğrencilere yardımcı birer araç olduğunun ortaya çıkarılmasıyla matematik eğitiminde önemli bir konuma sahip olmuştur. Ayrıca farklı öğrenme stillerine önem verilmesi, görselleştirmeye de önem verilmesine sebep olmuştur (Thornton, 2001). Nitekim öğrenme teorilerinin çoğu, anlamamanın fikirler arasında bağlantı kurmayla olabileceğini söylemektedir (Coe ve Ruthven, 1994). Özdemir ve Kaplan (2014)'nın öğretmen adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelendiği çalışmada, farklı öğrenme stillerine sahip matematik öğretmeni adaylarının, matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin birbirinden farklı olduğu sonucuna ulaşılmıştır ve farklı öğrenme stillerine hitap edebilecek öğretim yöntemleri kullanılması tavsiye edilmiştir.

Mudaly (2013) formal ispatın dışında matematiksel anlamayı sağlamada, görselleştirmenin rolünün ne olduğu sorusuna cevap bulmak için deneysel bir çalışma yapmıştır. Çalışma henüz ispatla karşılaşmamış olan 17 tane 9. sınıf öğrencisi ile yapılmıştır. Çalışma için seçilen soru Viviani teoremi üzerine temellendirilmiş olup, öğrencilerden Viviani teoremini kullanmaları beklenmiştir. Öğrencilerin çoğu teoremi doğru kullanamamıştır. Daha sonra öğrenciler Sketchpad programıyla varsayımlarını denemiş fakat varsayımlarının yanlış olduğunu görmüşlerdir. Çalışmada matematiksel ispatın önemine

vurgu yapılırken dinamik keşfin, lise öğretim programının vazgeçilmez bir parçası olduğu belirtilmiştir.

Flores (2000) görsel sunumların cebirsel düşünmeye etkisini tartıştığı ve ortaokul ve lise birinci sınıftaki öğrenciler için görsel sunum örnekleri verdiği çalışmasında, öğrencilerin soyut olan kavramları somutlaştırması için görselliğin olumlu etkisinin yanında çarpma, toplama, paranteze alma, çarpanlara ayırma gibi soyut olan matematiksel eylemlerin de görsellikle somutlaştırılabileceğini belirtmiştir. Bu duruma örnek olarak çalışmasında Şekil 3'te verilmiş olan görseli incelemiş ve iki basamaklı çarpma işleminin görsel sunumunu vermiştir.



Şekil 3. 12×23 işlemi için alan modeli

Sigler vd. (2016) öğrenciye herhangi bir görevin çizimi verildiği zaman bir sonraki aşamada öğrencinin yaşadığı zorlukların azaldığını ifade etmektedirler. Görselleştirmenin gücü kabul edilmiş olmasına rağmen asıl zorluk, bunların matematik öğretim programına, anlamayı en iyi destekleyecek biçimde nasıl entegre edileceğidir (Hanna, 2000; Hanna ve Sidoli, 2007).

Görselleştirmenin önemi ile ilgili gerek yurt içinde gerek yurt dışında pek çok çalışma mevcuttur (Duval, 1999; Flores, 2000; Healy ve Hoyles, 1999; Rodd, 2000; Şan, 2012; Tekin ve Konyalıoğlu, 2010; Uysal Koğ ve Başer, 2012). Bu çalışmalara göre görselleştirme matematik eğitiminde ve matematiği anlamada önemli bir araçtır.

Görselleştirme ve ispatın birlikte kullanımı.

Pek çok matematikçi görsel sunumları ve bunların matematiksel ispatlara olan potansiyel katkılarını araştırmaktadır (Bardelle, 2009; Hanna, 2000). “Bir resim bin kelimeden iyidir” atasözü pek çok kültürde yaygın olarak söylenmektedir (Casselman, 2000).

Özellikle yirmi yıldır görsel sunumların matematiksel ispatlara katkısı araştırılmaktadır. Araştırmalarda, görsel sunumlar matematiksel bir ifadeye fikir ya da delil sunmakla beraber; matematiksel ifadeyi gerekçelendirmek için ne ölçüde kullanılır sorusuna cevap bulunmaya çalışılmıştır (Hanna ve Sidoli, 2007). Flores (2000)'a göre “sayısal ilişkilerin geometrik sunumları cebirsel fikirlerin açıklanmasında önemli bir araçtır. Bu ilişkiler hakkında düşünen öğrenci, ilişkileri açıklamak için dili kullanmakta ve ilişkileri harflerle ifade edebilmeyi öğrenmektedir. Dolayısıyla bu sunumlar genelleme ve gerekçelendirme için bir araç olarak cebiri kullanmayı öğrenen öğrenciler için rehber niteliğindedir” (s. 13).

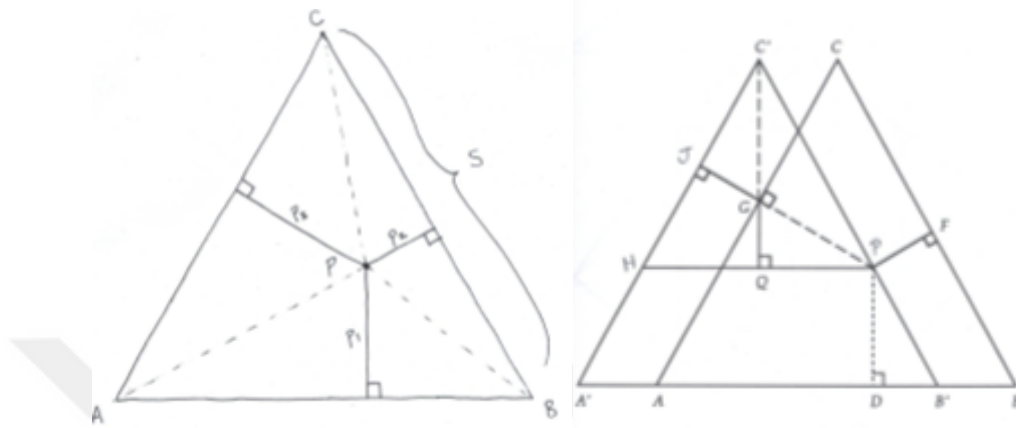
Resimler ve diyagramlar matematiğin özelliklerini anlama sürecinde önemli rol oynamaktadırlar. Dahası resimler veya diyagramlar bir teoremin veya matematiksel bir ifadenin görsel ispatı olarak kullanılabilirler (Strausova ve Hasek, 2012). Görsel ispatlar matematik eğitimi için değerli araçlardır (Borwein ve Jörgenson, 2002; Miller, 2012).

İspat ile görsel unsurları birleştirmek öğrencilerin ispatla ilgili sorunlarını aşmalarına ve ispatı daha iyi anlamalarına sebep olabilir (Uğurel vd., 2016). Teoremler genellikle formal biçimde ispatlanmaktadır. Halbuki diyagramlar üzerinde geometrik işlemler yapılarak insanların farklı bir ispat yolunu kullanmaları sağlanabilmektedir. Diyagramların bilgiyi depolama, algısal çıkarımları destekleme gibi avantajları mevcuttur ve diyagramların bulunduğu ispatlar, ispatın anlaşılmasını kolaylaştıracak sezgisel görüş sağlamaktadırlar. Ayrıca cebirsel ispatlara nazaran bu tip ispatlar daha kolay anlaşılmalıdır (Jamnik, Bundy ve Green, 1997).

Resimleri yeterince açıklayıcı bulduğunu ve resimlerin ispatın tamamlayıcısı olduğunu ifade eden Davis (1993), resimlerin sözlü olarak açıklanması gerektiğini belirtmektedir. Her ne kadar modern matematiksel ispatta cümlesel formül üzerine odaklanılsa da bilgi hem sözel hem sözel olmayan yollarla sunulabildiğinden cümlesel mantık ile anlam çıkarmaya sıkı sıkıya bağlılık kısıtlayıcı olabilmektedir. Bu görüşü kabul eden araştırmacılar “Hyperproof” denilen interaktif bir program geliştirmişlerdir. Bu program, öğrencilerin dikkatini cümlesel yapıdan ziyade, ispatın kapsamına yönlendirmek üzere tasarlanmıştır ve bu programla hem görsel hem de cümlesel bilgi beraber manipüle edilerek ispat inşa etme ve mantıksal akıl yürütme öğretilmeye çalışılmıştır (Hanna ve Sidoli, 2007).

Bu noktada şu ayrımı ifade etmek önemlidir. Özellikle geometrik sonuçların ispatında görsellerden faydalanılmaktadır. Görselliğin sezgisel rolü hem matematikçiler hem de matematik eğitimcileri tarafından anlaşılmıştır (Bardelle, 2009). Ancak bazı görseller sadece bir yardım aracıdır, anlamayı sağlamak için önemli role sahiptir fakat başlı başına bir ispat

değildir. Bu görseller teoremdaki değişkenlerin anlamını içerirken, denklemler olmaksızın teoremin geçerliği hakkında çok az şey söyleyebilmektedir. Ancak görsel ispatlarda durum böyle değildir. Bu ispatlar herhangi bir söze ve denkleme ihtiyaç olmaksızın teoremi açıklığa kavuşturmaktadır. Örneğin Şekil 4'teki şekillerden ilki teoremin anlaşılması için görsel bir araçken ikinci şekil bir görsel ispat örneğidir (Miller, 2012).



Şekil 4. Görsel sunum ve görsel ispat örneği

Görsel bir sunumun, görsel bir ispat olabilmesi için statik bir resimden daha fazlasını içermesi gerekmektedir. Yani görsel bir sunumun; dinamik, yol gösterici, gözlemciye sunulan fikirleri araştırması için destekleyici ve açık olması gerekmektedir. Resmin tek başına statik olması ve sıralanmamış sunumlar içermesinden dolayı bu ispatlar ispatın formal standartlarına karşı başarısız olabilmektedirler (Doyle vd., 2014). Dolayısıyla görselleştirilmiş bir etkinliğin olduğu gibi sunulmasından ziyade, aşama aşama sunmakla öğrenenlerin öğrenme süreçlerine katkı sağlanabilir. Yani statik bir gösterimden ziyade nedensel düşünmeyi geliştirmek için öğrencinin süreçteki aşama aşama varılan noktaların neler olduğunu görebilmesi, gerek irdeleme gerekse genelleme yapabilmek için motivasyon aracıdır (Şan, 2012).

Rinvold ve Lorange (2011), Barwise ve Etchemendy'nin (1994) görsel akıl yürütme ve cümlesel formal mantık kurallarını birleştirdikleri "Hyperproof" adlı programla yaptıkları çalışmadan esinlenerek, yazılı sembollerin ve cümlesel akıl yürütmenin yanında; görsel yöntem, konuşma, dokunma ve motor eylemleri de içeren multimodal ispat kavramını ortaya koymuşlardır. Sezgisel bir ispat çeşidi olarak gördükleri multimodal ispat ile deneysel bir çalışma yürütmüşlerdir. Özellikle formal alt yapısı iyi olmayan öğrencilere ispat öğretmenin zor olduğunu; görsel ve sayıları temsil eden nesnelerle ispat yapmanın öğrencilerde sezgisel düşünmeyi ve anlamayı sağlayacağını belirtmişlerdir. Bu durumu test etmek için beş tane öğretmen adayından görsel olarak temsil edilen sayı modellerini araştırmalarını istemişlerdir. Öğrencilerin cebirsel düşünme biçimleri kısmen sembolik olmasına rağmen, multimodal ispatlamanın öğrenciler için uygun olduğu ve bu tür ispat faaliyetlerinin ispat öğrenmede

potansiyele sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca çalışmada matematik eğitiminde farklı ispat formlarının kullanıldığı deneysel çalışmalarla daha iyi öğretim yaklaşımlarının geliştirilmesinin mümkün olabileceği belirtilmiştir.

Görsel bir ispatı anlamak veya oluşturmak resimleri inşa etmeyi (resimleri sökmek, tersine çevirmek, üst üste koymak, taşımak gibi) ve onlardan bilgi edinmeyi gerektirmektedir. Bütün bu işlemler anlaşılır adımlarla elde edilirse bir ifadenin görsel bir ispatı oluşturulmuş olmaktadır. Şayet görsel ispatlar öğrenci tarafından anlaşılırsa, cebirsel ispatlara nazaran öğrenciye daha fazla deneyim zenginliği sağlamakta ve kavramaya yardımcı olmaktadır. Nitekim bazı görsel ispatların öğrenci tarafından anlaşılması zordur (Rinvold, 2013). Bu zorluk görsel ispatların, resim, sözlü metin ve sembolik ifadeler arasındaki sürekli etkileşim gerektirmesinden ve pek çok öğrencide de bu koordinasyonun eksik olmasından, temel matematiksel bilgi eksikliğinden, şekilsel sunumların kullanımı ile ilgili bilgi eksikliğinden, şekilsel kavramların kavramsal ve algısal doğası arasındaki çatışmadan ve matematiksel ispatın yeterince anlaşılmasından kaynaklanmaktadır (Bardelle, 2009). Gerçekten öğrenciler ispat üretmek için kendi matematiksel bilgilerini nasıl kullanacaklarını bilmemektedirler (Moore, 1994).

Elbette ki görselleştirme matematik için önemlidir. Ancak unutmamak gerekir ki bazı durumlarda bir resim bir metnin üretebileceğinden daha büyük sorun üretebilmektedir. Bu konuda yapılan araştırmalar neticesinde matematik eğitiminde görsel sunumları tavsiye eden araştırmacılar, diyagramların kimi zaman yanlış yönlendirdiğini fark etmişlerdir. Ancak bütün bunlara rağmen, diyagramlar ve görsel sunumlar gerek teoremlerin ispatında gerekse ispata yaklaşım için etkili biçimde kullanılmaktadır. Çünkü bilinmektedir ki görsel sunumlar matematik öğretim programının ana bileşenleri arasında yer alarak bilginin yanında kavramayı getirmektedir. Özellikle son yıllarda görsel ispatlar geleneksel ispatlara alternatif olarak düşünülmektedir (Hanna, 2000; Hanna ve Sidoli, 2007). Esasında en formal tekniklerin dahi hatalara ve eksik akıl yürütmelere açık olduğu düşünülürse; görselliğin hata ihtimali kazandırdığı yetkinliklere kıyasla geçerli bir argüman olarak düşünülmemelidir (Şan, 2012).

Görsel ispatlar yanlış yorumlanabilmesi, bu nedenle de yanlış anlam çıkarılmasına neden olmalarından ötürü kimi araştırmacılar için, kesin kanıtlar için doğru argümanlar olarak görülmemektedir. Ancak yeni sonuçların keşfi, daha fazla formal ispat üretimi ve matematik problemlerine yaklaşım için yardımcı araçlar olduğu anlaşılmıştır. Bu nedenle görsel ispatlar matematik teoremlerine yaklaşımı geliştirmeye fırsatlar sunması açısından eğitimsel bakış açısıyla da dikkate alınmaktadır (Bardelle, 2009).

Görsel ispatlarda yer alan şekil veya resimlerin, ortaöğretim öğrencileri tarafından açıklanmasının istenmesi ispatın basite indirgenerek öğrenciye sevdirmeye yollarından biridir (Gierdien, 2007). Ayrıca matematiksel kavramları öğretirken, görsel ispatları kullanmak ve öğrenciden görsel ispattaki resmi açıklamalarını istemek öğrencilerin sebep gösterme yeteneklerinin gelişmesine yardımcı olabilir ve formal bir ispata nasıl başlayacaklarını anlamaları için yol gösterebilir (Bell, 2011).

Arslan (2007) ilköğretim öğrencilerinin görsel ispatlar yardımıyla matematiksel kavramları daha etkili öğrendiği sonucunu elde etmiştir. Borwein ve Jörgenson (2002) yapmış oldukları çalışmada, görsel sunumların matematiksel bilginin oluşumuna katkısı olduğu ve bir imajın görsel ispat oluşturabileceği konusunda olumlu görüş bildirmişlerdir.

Öğrencileri esnek düşünmeye ve matematiksel varlıkların alternatif sunumları arasındaki ilişkiyi araştırmaya teşvik etmek önemlidir. Öğrencilerin alternatif düşünme yollarını tartışmaları ve görselden sembolîge geçiş yapabilmeleri için teşvik edilmeleri görsel düşünmede etkili olan bireyler olabilmeleri açısından önemlidir (Thornton, 2001). Nitekim farklı temsilleri kullanmayan öğrencilerin matematikteki konuları tam anlamıyla anlayabildiği söylenemez. Öğrencilerin devamlı olarak çalıştığı cebirsel temsillerin dışındaki temsillerle karşılaşması, problemler karşısında düşünmesine yardımcı olur. Fakat devamlı olarak cebirsel temsillerin kullanıldığı bir öğretimde, öğrenci de bu eğilimde olmaktadır ve ne yazık ki öğretimdeki araştırmaları dikkate almadan cebirsel temsilleri imtiyazlı kılan öğretmenler, öğrencilerinin problem çözme esnasında ilişki ve bağlantı kurabilmesini engellemektedirler (Duval, 1999).

Matematiksel uygulamalara bakış açısının değişmesi nedeniyle diyagramatik mantık matematik eğitiminde yeni bir araştırma alanı olarak yerini almıştır. Matematiksel uygulamanın resmi doğası değişmeye de matematiği öğrenmek için görsel veya diyagramatik muhakeme gibi yeni araçların geliştirilmesi gerekmektedir. Diyagramatik muhakemenin eğitimde kullanılması öğretmenlerin ve öğrencilerin matematiksel kavramları anlamasına dair öngörü ve öğrencilerin matematik hakkında iletişim kurabilme yeteneği kazanmalarını sağlamaktadır (Karras, 2012).

Matematik öğretim programındaki ve matematik felsefesindeki değişim, ispatın sınıftaki fonksiyonu ve rolünde de değişimi beraberinde getirmiştir. Bu yeni algıyla ispatın kabul edilebilirliği için sosyal sürecin bir gereksinimi olarak pratik olması ve öğrenciyi ikna etmesi gerekmektedir (Almeida, 1996). Elbette ki bu görüş geçmişte olduğu gibi günümüzde de tartışılmaktadır. Örneğin Hanna (1989) ispatların formal geçerliğinin farklı seviyelerde

olabileceğini buna rağmen informal ispatlarında aynı derecede kabul edilmesi gerektiğini belirtmektedir.

Görsel ispatlar ile ilgili olarak tartışmalar halen sürse de görsel ispatların geçmişi uzun bir tarihe dayanmaktadır. “Fikirleri görmek” ifadesi profesyonel olmayan matematikçiler için kulağa tuhaf gelebilir. Ancak matematik tarihi, görsele temellendirilmiş pek çok gelişmeyi işaret etmektedir. Örneğin Carl Friedrich Gauss cebirin temel teoreminin ilk ispatında bir diyagram kullanmıştır (Borwein ve Jörgenson, 2002).

Matematikçi Zhou Bi Suan Jing matematiğin en temel sonuçlarından olan Pisagor teoremini Şekil 5’deki görsel ispat ile sunmuştur. Pisagor Teoreminin pek çok ispatı için halen bu resim kullanılmaktadır (Miller, 2012). Nitekim bu görsel kullanılarak Hint matematikçi Bhaskara tarafından Pisagor Teoremi kök hesaplamayla ispatlanmıştır (Bell, 2011).



Şekil 5. Pisagor Teoremi (Zhou Bi Suan Jing)

Benzer şekilde Bernard Bolzano, ara değer teoremini geometrik bir diyagrama dayalı olarak ispatlamış ve başlangıçta kabul görmemiş olsa da sonraki buluşlar için ışık saçmış ve nihayetinde Cauchy ve Weierstrass gibi diğer matematikçiler tarafından bu teorem yeniden keşfedilmiş ve nihayetinde formal bir ispat elde edilmiştir (Brown, 2008, s. 26).

Görsel sunumlar ispatlara uzun yıllar önce girmiş ve bir teoremin ispatını kolaylaştırmakla kalmamış aynı zamanda ispatlanması gereken teorem için esin kaynağı olmuş ve ispatın yorumlanabilmesi için çeşitli yaklaşımlar sunmuştur (Hanna ve Sidoli, 2007). Örneğin denklemleri çözme durumunda kalarak bugünkü anlamda cebire yönelen İslam dünyasının ilk büyük matematikçisi Harezmi ikinci dereceden denklemlerin köklerini bulmada görsellikten faydalanmıştır ve denklemleri geometrik yaklaşımlarla çözmüştür. Bu da, o zamana kadar sözel olarak yapılan cebirin sembolleştirilmesinin ilk örneklerinden sayılmaktadır (Altun, 2014, s. 187; Baki, 2015, s. 120).

Antik köklerine rağmen görsel ispatlar modern matematikte de halen kullanılmaktadır (Alsina ve Nelsen, 2010; Doyle vd., 2014; Miller, 2012;). Özellikle 2000’li yıllardan itibaren

görsel ispatlara ilgi yeni matematik araştırmalarında ve matematik eğitimi uygulamalarında hızla artmıştır (Bardelle, 2009).

Sözsüz İspatlar

Alanyazında görsel ispat ve sözsüz ispat kavramlarının farklı biçimlerde kullanıldığı çalışmaların olduğu görülmektedir. Kimi araştırmacılar bu iki kavramı eş anlamlı olarak kullanırken; kimi araştırmacılar bu iki ispatı farklı ispatlar olarak nitelendirmektedirler. Örneğin; Doyle vd. (2014) görsel ispatların kelimeler ve açıklayıcı olmayan cümleler içerebileceğini ifade etmişlerdir. Bu tanıma göre de her sözsüz ispatın görsel ispat olarak nitelendirilemeyeceğini, ancak pratikte yayınlanmış bütün sözsüz ispatların görsel ispatlar olarak kabul edildiğini belirtmişlerdir. Doyle vd. (2014) böyle bir ayrım yaparken, çoğu araştırmacı bu ayrımı yapmamaktadır. Sigler vd. (2016) sözsüz ispatları, ispatlanması gereken iddiayı ve birkaç veya tek bir çizimi içeren ispatlar olarak tanımlamışlar ve sözsüz ispatları, sözlü gerekçelendirmenin olmadığı matematiksel ifadelerin yer aldığı ispatlar olarak belirtmişlerdir.

Bardelle (2009), görsel ispat ve diyagramatik ispat ifadelerini kullanmış ve bu ispatları söz olmayan, sadece diyagramlara dayalı, sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler içeren, yapılandırılması okuyucuya bırakılmış ispatlar olarak tanımlamıştır. Nitekim sözsüz ispatlarda öğrenciden teorem veya ifadenin doğruluğunu göstermesi yerine ispatı kelimelerle doldurması, yani açıklaması istenmektedir. Sözsüz ispatların açıklanması için bir takım işlemlere tabi tutulması gerekmektedir (Gierdien, 2007). Ayrıca sözsüz ispatların tam olarak anlaşılması için kimi zaman bir takım açıklamalara ihtiyaç duyulmaktadır (Miller, 2012).

Sözsüz bir ispat; matematiksel bir fikri, eşitliği veya teoremi göstermek için görsel sunumların kullanıldığı bir ispattır. Sözsüz ispatlar; geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller dışında hiçbir kelime içermemektedirler. Ancak bu ispatlar okuyucuyu yönlendirmek amacıyla görsel ipucu sağlayan birkaç denklem, ok veya gölgelendirmeler barındırabilmektedir (Gierdien, 2007). Gerçekten Uğurel vd. (2016)'nin matematik başarısı yüksek öğrencilerle yapmış oldukları çalışmada, sözsüz ispatlardaki renklendirmelerin adımlar arasındaki geçişi anlamaları için öğrenciye büyük oranda yardımcı olduğu belirtilmektedir.

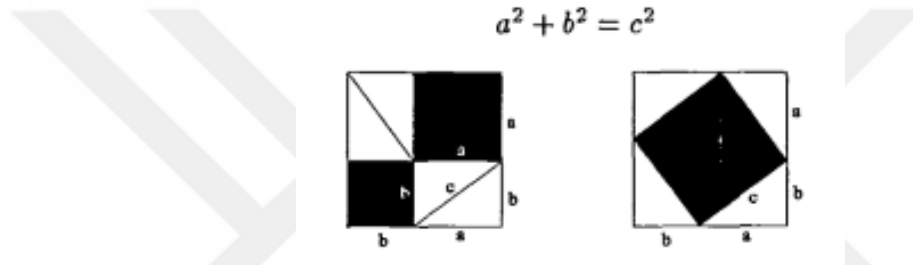
Alsina ve Nelsen (2010) “sözsüz ispat nedir” sorusunun cevabının çok basit olmadığını ifade etmişlerdir ve sözsüz ispatları; matematiksel bir ifadenin niçin doğru

olduğunu ve hatta doğruluğunu ispatlarken nasıl ele alınacağını görmemize yardımcı olacak diyagram veya resimler olarak tanımlamışlardır.

Bell (2011)'e göre sözsüz ispat; kelime ve resmi bir argüman olmadan matematiksel bir ifadenin ispatını resimleyen matematiksel bir çizimdir.

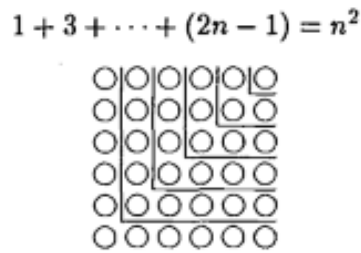
Jamnik vd. (1997) sözsüz ispatları, diyagramatik ispatlar olarak ifade etmişler ve bu ispat çeşitleri ile ilgili bir taksonomi ortaya koymuşlardır. Diyagramatik ispatlar; şematik olmayan ispatlar, şematik olan ispatlar ve tümevarımsal ispatlar olarak sınıflandırılmaktadır.

- *Şematik olmayan ispatlar*; genel durumu ispatlamak için tümevarıma ihtiyaç duyulmayan, diyagramda yapılan basit geometrik manipülasyonlarla durumun ispatlanabildiği ispatlardır. (Şekil 6)



Şekil 6. Şematik olmayan ispat

- *Şematik ispatlar*, somut durumların her birinde teoremi ispatlamak için tümevarımsal adımlara gerek olmazken; somut olarak çizilemeyen n. boyutun durumu için tümevarıma gereksinim duyulan ispatlardır. (Şekil 7)



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

Şekil 8. Tümevarımsal ispat

Tablo 2.1. de yurt içinde ve yurt dışında sözsüz ispatlar için kullanılan ifadelere yer verilmiştir. Yurt içinde ve yurt dışındaki kaynaklar göz önüne alındığında; sözsüz ispat için kullanılan ifadeler birbirinden farklılık göstermesine rağmen incelendiğinde, birbirinin aynı olan ispatların farklı isimlerde verildiği görülmüştür (Polat ve Demircioğlu, 2016). Tablo 1 sözsüz ispatlar için kullanılan ifadeleri göstermektedir.

Tablo 1. Sözsüz İspat İçin Yurt İçinde ve Yurt Dışında Kullanılan İfadeler

Kullanılan İfadeler	Kaynaklar
Proof Without Words	Gierdien (2007), Bell (2011), Yassin (2013), Karras (2012), Nelsen (1993, 2000)
Visual Proof	Goldoni, (2002), Alsina ve Nelsen (2001), Bardelle (2010), Strausova ve Hasek (2012), Çağlayan (2015), Johson (1993)
Proof By Picture	Britz vd (2014), Bayer (2009); Brown (1997); Kobayashi (2010)
Proofs and Pictures	
Pictorial Proof	
Diagrammatic Proofs	Jamnik, Bundy, Green (1997)
Sözsüz İspat	Uğurel, Moralı ve Karahan (2011)
Görsel İspat	Dede ve Karakuş (2014), Tekin ve Konyalıoğlu (2010)
Resimli İspat	Ufuktepe (2009)

Sözsüz ispatların yer aldığı makale, ilk kez 1975 yılında Mathematics Magazine dergisinde Rufus Isaacs tarafından yayımlanmıştır. 1976 yılında sözsüz ispatlar basılmaya devam etmiştir. Okuyucuların sözsüz ispatlara yapmış oldukları yorumlardan dolayı sözsüz ispatlara karşı ilginin arttığı fark edilmiş, böylelikle birkaç yıl boyunca Mathematics Magazine dergisinde sözsüz ispatlar basılmaya devam etmiştir. On yıl sonra da The College Mathematics dergisinde sözsüz ispatlar basılmaya başlanmıştır. Mathematics Magazine ve

The College Mathematics, bu ispatları toplu biçimde yayınlayana kadar bu ispatlar toplu biçimde sunulmamıştı. Roger Nelsen 1987 yılında kendi sözsüz ispatını yayımladıktan sonra editörler tarafından sözsüz ispat makalelerine hakemlik yapması istenmiştir. Nelsen yıllarca gelen sözsüz ispatları biriktirdikten sonra, ilk kitabı olan *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking* (1993) basılmıştır. Böylelikle Nelsen'in kitabı sözsüz ispatların yer aldığı koleksiyon olarak alanyazında yerini almıştır. Sonrasında Nelsen'in sözsüz ispatların yer aldığı ikinci kitabı olan *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking* (2000) ve Claudi Alsina ile birlikte yazmış oldukları *Mat Made Visual* (2006) ve *When Less Is More* (2009) kitapları basılmıştır (Alsina ve Nelsen, 2010; Doyle vd., 2014; Miller, 2012). Yazılı materyallerin yanında sözsüz ispat örnekleri çeşitli web sitelerinde de mevcuttur ve bazı interaktif sözsüz ispatlar internette erişilebilirdir (Bell, 2011; Strausova ve Hasek, 2012).

Sözsüz ispatların gerçek ispatlar olup olmadığına dair görüşler.

Pek çok kitap ispatı, doğru olduğu bilinen ifadeleri ve mantığı kullanarak, yeni bir ifadenin doğruluğunu gösteren bir dizi ifade olarak tanımlamaktadır. Fakat bu tanımdan ayrılan, yoruma açık ispat tanımları da mevcuttur. Bu tanımlara göre ispat reddedilemez, genellenebilir ve geniş bir kitleyi ikna edici özelliklere sahiptir (Miller, 2012).

Matematik alanında ispat ve ispat yöntemlerine yönelik net ve üzerinde ortak kanaate sahip olunan bir yaklaşımın olmayışı, eğitim alanyazınında da ispat olarak kabul edilip edilmeyeceği tartışılan ispat adlandırılmalarının varlığına zemin oluşturmaktadır. Sözsüz ispatlar buna örnektir (Aylar, 2014). Sözsüz ispatlar gerçek midir değil midir sorusu pek çok çalışmada tartışılmıştır (Alsina ve Nelsen, 2001; Bardelle, 2009; Gierdien, 2007; Miller, 2012; Nelsen, 1993). Nelsen (1993) “*Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*” isimli kitabında sözsüz ispatlarla ilgili olarak aşağıdakileri ifade etmiştir:

“Elbette ki “sözsüz ispatlar” gerçek ispatlar değildir. Peki, sözsüz ispatlar gerçek ispatlar değilse nedir? Bu kitaptan da görüleceği üzere bu sorunun basit ve kısa bir cevabı yoktur. Ama genel olarak sözsüz ispatlar, özel bir matematiksel ifadenin niçin doğru olduğunu hatta bir matematiksel ifadenin doğruluğunu kanıtlarken nasıl ele alınacağını görmemize yardımcı olacak diyagram veya resimlerdir.”(vi)

Almeida (1996) ispatların kabul edilebilirliğinin bir gereksinimi olarak sınıfta pratik olması gerektiğini ileri sürmektedir. Lochart (2009) ise iyi bir ispatın, bir matematiksel argümanı açık, ayrıntılı ve şık biçimde açıklaması gerektiğini söylemektedir. Hanna (1989) ispatların formal geçerliklerinin farklı seviyelerde olabileceğini fakat bu ispatların aynı derecede kabul edilebilir olmasını engelleyemeyeceğini belirtmektedir.

Sözcüklerin olmadığı bir ispatın gerçek ispat olup olmadığına dair tartışmalar vardır (Gierdien, 2007). Brown (1997)’a göre görsel sunumlar da geleneksel ispatlar gibi ikna edici ve açıklayıcı olabildiğine göre geleneksel ispatlarla aynı seviyede ispat oluşturabilirler. Rodd (2000) görselleştirmenin epistemik boyutunu ele alarak, sözsüz ispatların geometrik doğruları keşfetme aracı olduğunu, bir varsayımın sözle ifade edilebileceğini ancak uygun bir görsel sunumla gösterildiği takdirde daha iyi anlaşılabilirliğini ve sözsüz ispatların öğrenciye direkt bilgi sağladığını ve bu bilginin de genel, tartışılmaz ve güvenilir olduğunu belirtmiştir.

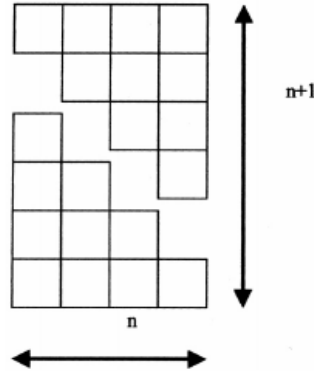
Formalist felsefeye göre, bir ifade teori içinde ispatlandıysa sonuç mutlak ve aksiyomlardan mantıksal biçimde ilerlemek kusursuz bir doğrulama işlemidir. Dolayısıyla formal bir yapı olmadan geçerlilik garanti edilemez. Bu yüzden bu felsefeye göre sözsüz ispatlar, ispat olarak kabul edilmez (Miller, 2012). Rinvold ve Lorange (2011)’a göre pür matematikte sözsüz ispatlar formal ispat yöntemlerinden sayılmamaktadır fakat çeşitli argümanlar bu durumun gelecekte değişebileceğini göstermektedir.

Borwein ve Jörgenson (2002), sözsüz ispatların kabul edilebilir olması için “güvenirlik, tutarlık ve tekrar edilebilirlik” olmak üzere üç şartın gerekliliğinden bahsetmişlerdir. *Güvenirlik*; sonuçların her bir incelemede değişmez olması, *tutarlılık*; ispat yollarının diğer bilinen gerçeklerle, inançlarla ve ispatlarla tutarlı olması, *tekrar edilebilirlik*; ispatın başkalarınca teyit edilebilmesi olarak tanımlanmaktadır. Statik bir görsel sunumla bütün bu şartların sağlanması zordur fakat bazı görsel sunumlar bu gereklilikleri sağlayabilmektedirler.

Baroque felsefesi ispatı, belli formal sınırların bulunduğu delil tipi olarak yorumlarken, Romantik felsefe ispatı, inandırıcı, akla uygun delil olarak yorumlamaktadır. Dolayısıyla Romantik felsefeye göre, sözsüz ispatlar ispat olarak kabul edilirken; Baroque felsefesine göre bu durum sorgulanabilir (Doyle vd., 2014).

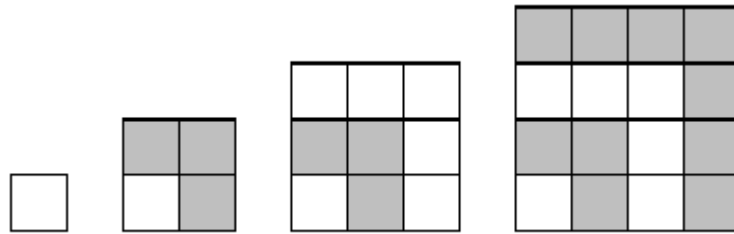
Rodd (2000) çalışmasında, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1)$ önermesinin tümevarımla, örnek sayılar kullanılarak, görselleştirme ile ve zaten bilinen bir gerçek olduğunu ifade ederek doğrulanabileceğini, ancak bu durumlardan hangisinin matematiksel bilgi sağladığını ve hangisinin ispat olduğunu tartışmıştır. Sırasıyla bu doğrulama biçimlerini formal ispat, deneysel genelleme, görselleştirme (Şekil 9) ve delil gösterme olarak ifade etmiştir. Formal ispatın, matematiksel bir sonucu öğrenmenin bir yolu olduğunu, fakat bu ispatla her zaman anlamının sağlanamayacağını; deneysel genellenmenin, anlamlandırma sağlayabileceğini, ancak doğruluğu garantilemediğini; görselleştirmenin, sembolik ispattan bağımsız,

matematiksel bilgi edinmenin farklı bir yolu olduğunu ve delil göstermenin matematiksel olarak yetersiz olduğunu belirtmiştir.



Şekil 9. Kenar uzunlukları n ve $n+1$ olan dikdörtgenin alanının diyagramı

Balacheff (1988) ispatın en temel formunun doğrudan gösterim olduğunu belirtmiştir. Doğrudan ispata en temel örnek olarak tamsayıların toplamı ile ilgili diyagramı sunmuş (Şekil 10) ve bu formdaki ispatların, ispatı yapan kişinin zihnindeki gerekçeleri tanımlayabilmesi için, diyagramı anlama yeteneğine sahip olmasına bağlı olduğunu ifade etmiştir. Pragmatik ve kavramsal ispat kavramlarını kullanarak pragmatik ispatı, eylem ve gösterimlere başvuran ispat olarak, kavramsal ispatı ise pragmatik ispatın aksine eylem içermeyen, özelliklere ve özelliklerin birbiri ile ilişkisine dayanan ispatlar olarak tanımlamıştır.



Şekil 10. Tamsayıların toplamı için doğrudan ispat örneği (Balacheff, 1988; s 216)

Doyle vd. (2014) “proof without words and beyond ” isimli makalelerinde bu konu ile ilgili olarak, bazı sözsüz ispatların özel bir durumu resmettiğini belirtmektedirler. Ancak tek bir sayısal durumu sınamayı ispat olarak kabul etmezken, niçin özel bir resimsel durumu sınamanın da ispat olarak kabul edilemeyeceğini, yani bir örnek vermek ispat sayılmazken tek bir durumu resmeden görsel, ispat sayılabilir mi? sorusuna cevap olarak; genel bir olguya dayanmayan şeyin ispat olamayacağını belirtmişlerdir. Buna karşın Brown (2008, s. 26) ise bir resmin sezgisel ve özel bir durum olduğu ve bu nedenle genel bir teori oluşturamadığı görüşünü reddetmektedir. Resimlerin sezgisellikten daha fazlası olduğunu ve ispatlama ve gerekçelendirmede büyük rolü olduğunu, kısacası resimlerin teoremleri ispatlayacağını söylemektedir.

Sözsüz bir ispat deneysel doğrulamadır, çünkü öğrencilere aksiyomlar dizisi ya da önceden ispatlanmış teoremleri kullanarak varsayımlarının doğruluğunu test ettirmekten ziyade, bir durumu veya birkaç durumu inceleyerek varsayımlarının doğruluğunu test etme fırsatı vermektedir. Fakat sözsüz ispatlar diğer ispatlara nazaran daha fazla görsel/algısal kanı sağlamaktadır. Harel ve Sowder'ın "algısal ispat şeması" deneysel ispat şemasının bir çeşididir ve sözsüz ispat fikrine benzemektedir. Sözsüz ispatlar özellikle öğrencilerin matematiksel ilişkileri analiz edip açıklamasında yardımcıdır (Öner, 2006).

Miller (2012) tek bir durumu gösteren sözsüz ispatların, tüm sayılara genellenebilir olduğu görüşüne sahiptir. Bu görüşe dayanak olarak, Platonizm felsefesinde matematiksel doğruların etkili biçimde keşfedilmesinin önemine değinmektedir ve sözsüz ispatlar eğer matematiksel doğruyu nitelikli delillerle tespit edebiliyorsa, ispat olarak düşünülebileceğini ifade etmektedir. Ayrıca bir resim özel bir durumu temsil etse bile beyinlerimizin genel doğruyu keşfetmek için gerekli enstrümanları sağlayabileceğini ve tamsayılar örneğindeki gibi, özel durumu görmekle beynimiz tekrar imkanını görebileceğini ve diyagramın beynimizin olası ilişkileri genişletmesine imkan verebileceğini söylemektedir. Benzer şekilde Flores (2000) resimlerin özel bir durumu resmetmelerine rağmen genel muhakemeyi kolaylaştıracak unsurlar içerdiğini belirtmektedir.

Sözsüz ispatlarda bazı sınırlandırmalarla ifadenin doğruluğu açıklanmaya çalışılmaktadır. Örneğin $n=5$ durumu için işlemler yapılır. Platonizm felsefesi matematiksel doğruyu kendi aklımızla keşfetmeye izin verdiğinden, formal mantıksal ifadeler gerektirmeyen sözsüz ispatlar geçerli ispatlar sayılabilirler. Ancak sözsüz ispatlardaki tek bir durum sınırlaması görselleştirme sürecini olumsuz etkilemektedir (Gierdien, 2007).

Güler ve Ekmekçi (2016) öğretmen adaylarına çeşitli sözsüz ispatları örnekleri verdikleri ve verilen sözsüz ispatların doğruluğuna ilişkin sorular sordukları çalışmalarında, verilen tek sayıların toplamı ile ilgili sözsüz ispatın doğru olduğunu düşünen öğretmen adayları, ardışık tek sayılar ile birim kareler arasındaki ilişkiyi kurabilmiş ve oluşan geometrik şeklin alanının bu toplamın kuralı olduğunu belirterek cevaplarını gerekçelendirebilmişlerdir. Ancak bir öğretmen adayı bu sözsüz ispatın yanlış olduğunu düşünmüş ve gerekçe olarak da verilen şeklin sadece şekildeki sayıların toplamını örneklediğini vurgulamıştır.

Jamnik vd. (1997) ise bu duruma karşılık diyagramatik muhakeme ve tümdengelim (DIAGramatic reasONing and Deduction) diye isimlendirdikleri DIAMOND sistemiyle bilgisayarlar tarafından yapılan bir genelleştirme mekanizması bulmaya çalışmışlardır. Sistem otomatik olarak tüm n 'ler için genel ispatı örneklerden genelleyeabilmektedir. Dolayısıyla tek bir durumun örneklendiği diyagramların kullanıldığı bir teoremin ispatını

anlamak için, ortaöğretim temel matematik bilgisi yeterliyken ve bu basit diyagramın sadece hangi teoremi temsil ettiğini değil aynı zamanda sunulan teoremin ispatını da kolaylıkla anlayabilecekken diyagramların gücünden faydalanmak yerinde olacaktır.

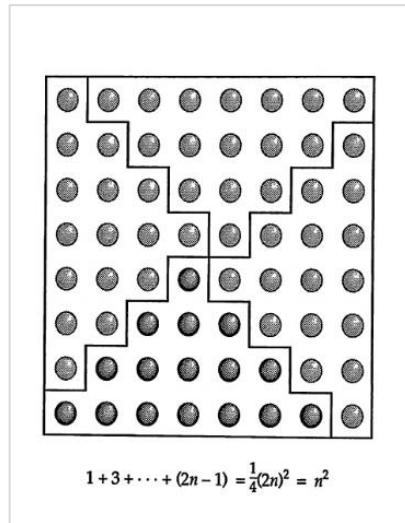
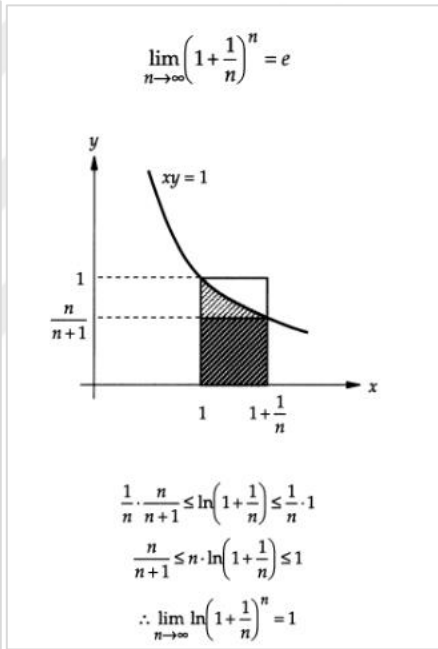
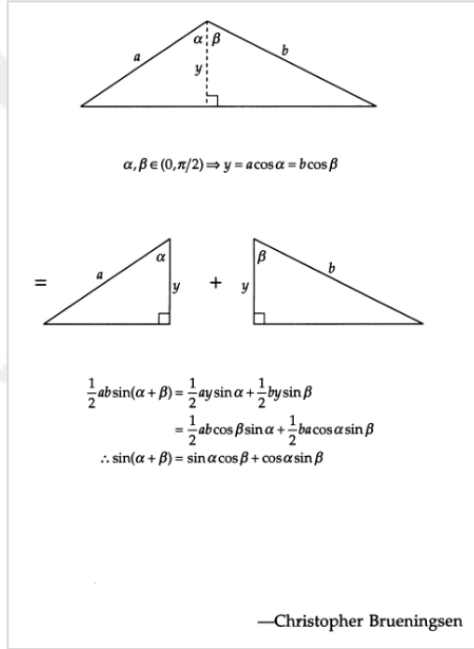
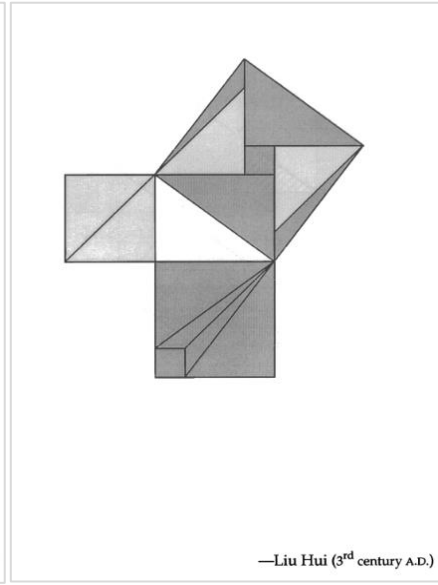
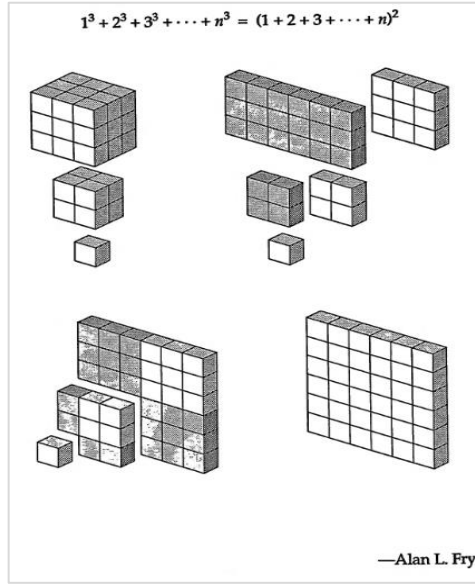
Sözsüz ispatın matematik eğitimindeki yeri.

Matematiksel gerçekleri bilme ve bunların ispatlarını anlama eşit öneme sahiptir (Kondratieva, 2011). Matematiksel ispat için pek çok teoreme aşına olunmalı ve bu teoremleri kullanabilme becerisine sahip olunmalıdır. Doğrulamanın yapılması için ispatın her aşamasında uygun matematiksel ifadenin kullanılması gerekmektedir (Sigler vd., 2016).

Geometrik ispatta ve cebirsel ispatta soyut olan matematiksel kavramların kağıt ve kalemle öğrencilere açıklanması zor olmaktadır (İpek ve Akkuş İspir, 2011). Problem çözmede ya da matematiksel sonuçların gösterilmesinde ise görsel yöntemler okullarda nadir olarak kullanılmaktadır (Thornton, 2001).

Geometri genelde resimlerle uğraştığından sözsüz ispatlara eğilim gösteren bir alandır (Miller, 2012). Ancak sözsüz ispatlar matematiğin pek çok alanında; geometrik teoremlerin ispatında, sayılar teorisinde, trigonometride, genel matematik eşitsizliklerinde, matematik tarihinde kullanılmaktadır (Alsina ve Nelsen, 2010; Bell, 2011).

Şekil 11’de farklı alanlardan sözsüz ispat örnekleri gösterilmiştir.

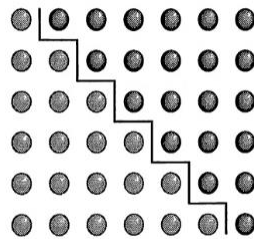


Şekil 11. Farklı alanlardan sözsüz ispat örnekleri (Nelsen, 1993; Nelsen, 2000)

Doğal sayılar ile ilgili pek çok teoremden sayılar nesneleri olarak kullanılarak kavrama sağlanabilmektedir. Sözsüz ispatlarda noktalar, kareler, küpler veya kolayca sayılabilen nesneler sayıların yerine kullanılmaktadır (Alsina ve Nelsen, 2010). Esasında ispatın amacı, matematiksel sonuçları aydınlatmaksa, nokta resimleri (*Dot Picture*) sonucu farklı bir ışık altında göstermektedir. Örneğin; dikdörtgensel dizilişle çarpma işleminin sayılarının ilişkisi şekillendirilmekte ve bu dizilişin çarpanlara dönüştürülebileceği gösterilmektedir. En sezgisel ve güzel sözsüz ispatlar tamsayı ilişkilerinin yer aldığı ispatlardır. Çünkü tamsayılar bir şeyleri saymak için kullanılarak nokta ya da somut nesnelerle kolayca gösterilebilmektedir. Özellikle düşünülerek dizildiğinde ortaya çıkan modeller kolayca görülmektedir. Matematiksel varlıkları kendi başlarına nesneler olarak kullanma kapasitesi cebirsel düşünmenin özüdür (Thornton, 2001; Miller, 2012).

Ayrıca öğrencilerin cebirsel düşüncelerini geliştirmenin yollarından birisi de ilginç sayısal ilişkilerin geometrik temsillerini kullanmaktır. Bu temsillerin kullanılması, sadece işlemsel yaklaşımla düşünülen sayıların ilişkisel yaklaşımla düşünülmesine yol açar. Dolayısıyla geometrik temsillerle öğrencilerin;

- Problem durumundan ilişki çıkaracakları ve bu ilişkileri cebirsel semboller kullanarak ifade edebilecekleri,
- Cebirsel problem çözümünde kullandıkları işlemleri açıklayabilecekleri,
- Sayıları bir cevaba ulaşmak için sadece işlemden ziyade matematiksel nesneler olarak düşünebilecekleri,
- Sorunun cevabı yerine sürece ve yöntemle odaklanabilecekleri,
- Sayılar ve harfler kullanılarak sembolize edilmiş matematiksel yöntem hakkında farkındalık kazanabilecekleri,
- Varsayımları, tahminleri ve sonuçları yazabilecekleri bir bağlam sağlanmaktadır (Flores, 2000, s. 10).



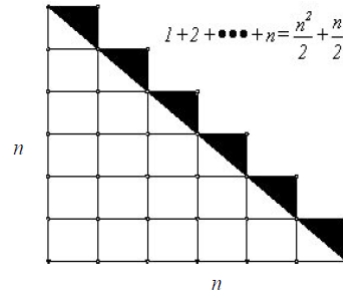
$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Şekil 12. İlk n tamsayının toplamının formülünü veren sözsüz ispat (Nelsen, 1993, s. 69)

Şekil 12’de görüldüğü üzere $n \times (n + 1)$, dikdörtgenin alanını verirken; bu alanın yarısı, ilk n tamsayısının toplamının formülünü vermektedir. Bu formülün tümevarımla yapılmış ispatı, sadece formülün doğruluğunu gösterebilir. Formülün neden doğru olduğunu göstermez (Miller, 2012). Bu konu ile ilgili olarak Rodd (2000) çalışmasında, ilk n tamsayısının toplamının tümevarımla yapılmış ispatı ile ilgili olarak on yedi yaşındaki bir öğrencinin ispatı akıcı biçimde yapabilmesine karşılık; bu ispatın önermenin niçin ve nasıl doğru olduğuna dair herhangi bir bilgi sağlamadığını ifade ettiğini belirtmiştir. Benzer şekilde on dört yaşındaki bir öğrencinin de ispatta ne yapıldığını kolaylıkla anladığını ancak ne anlama geldiğini anlamadığını ifade ettiği yine aynı çalışmada belirtilmiştir.

Tümevarımsal ispatlar, formülün niçin doğru olduğu hakkında bilgi vermezler ve ispatın yapılabilmesi için formülün bilinmesi gerekmektedir (Bayer, 2009). İspatın doğru olmayan bir ifade için gösterilmesinin mümkün olmaması gerekirken (Coe ve Ruthven, 1994) tümevarımsal ispatlarda öğrenciye yanlış bir ifade verilse de öğrenci formülün doğrusunu bilmiyorsa yanlış ifadeyi ispatlamaya başlamaktadır. Bu durum öğrencilerdeki tümevarımsal ispatların, doğrulama basamağının garanti olduğuna dair kavram yanılgıları olmasından kaynaklanmaktadır (Güler vd., 2012). Ayrıca öğrencilere hatalı cebirsel işlemler içeren, bu nedenle de yanlış sonuca ulaştıran bir cevap ispat olarak sunulduğunda öğrenciler bu cevabı ispat olarak kabul etmektedirler (Aylar, 2014). Halbuki sözsüz ispat görevleri içeren etkinliklerle tümevarım yönteminin doğru kullanımı geliştirilebilir (Bardelle, 2009).

Sözsüz ispatları açıklamaya çalışan öğrenci, ispatın içindeki aşıkır olmayan matematiksel fikirleri kullanmak durumunda kalmaktadır. Yani sözsüz ispatlarda görülmeyen gömülü matematik vardır. Bu duruma örnek verecek olursak örneğin tamsayıların toplamı ile ilgili formülde öğrenci $\frac{1}{2}$ nin nereden geldiğini bilememektedir. Bu formül ile ilgili Şekil 13’te verilen sözsüz ispat öğrencinin bu durumu anlamasına yardımcı olmaktadır. Tümevarımsal olarak yapılan ispatın aksine, bu ispatta yüksekliği ve taban uzunluğu n olan özel bir üçgenin alanı kullanılarak ispata geometrik olarak gerekçelendirme yapılmaktadır. Sözsüz ispatlarda iyi bir resim mevcutsa, öğrenen matematiksel ifadenin doğruluğunu görebilmiş ve süreci görselleştirerek muhakeme ve tanımlama zincirlerini oluşturmuş olacaktır. Öğrencinin sözsüz ispatlarda ne gördüğünü açıklamasıyla tanımlama, tahmin, betimleme, sonuç çıkarma, gözlemlleme, genelleme gibi görselleştirme süreç becerilerini kullanmış olur. Öğrencinin ispat ile ilgili kendi açıklamalarını yapmasıyla kendi görselleştirme ürününü oluşturmuş olmaktadır (Gierdien, 2007).



Şekil 13. Tamsayıların toplamı ile ilgili formülün sözsüz ispatı

Öğrenciler sözsüz ispatı anlamak için, aynı anda birden çok cebirsel bilgiyi kavramak zorundadır (Casselmann, 2000). Nitekim iyi bir problem birden çok konuyu bütünleştirebilen problemdir (Van De Walle, 2014/2010, s. 32). Sözsüz ispat görevleriyle öğrenci birden çok konuyu bütünleştirebilmektedir.

Genel matematikteki ispatlar, doğaları gereği resim olmadan manipüle edilebilirler (Miller, 2012). Ancak öğrencilerin bir resmi açıklayabilmesi, geometri, trigonometri ve cebir arasındaki ilişkileri görebilmesi, aynı problemin pek çok çözümünün ve ispatının var olduğunu bilmesi ve alan, uzunluk gibi kavramları modellerle ilişkilendirilebilmesi görsel düşüncelerini desteklemektedir (Gierdien, 2007; Kondratieva, 2011; Thornton, 2001). Modeller matematiksel muhakemenin gelişmesine katkı sağlamaktadırlar (Strausova ve Hasek, 2012).

Bardelle (2009) Piemonte Orientale Üniversitesi'nde okuyan ikinci ve üçüncü sınıf matematik öğrencilerine, sözsüz ispat ve formal ispatları sunarak, her iki ispatta öğrencilerin yaşamış oldukları süreci karşılaştırmıştır. Araştırmada Pisagor teoremi ve geometrik serilerle ilgili sözsüz ispat öğrencilere sunulmuştur. Pisagor teoreminin sözsüz ispatında öğrenciler pek fazla zorlanmamıştır. Çünkü Pisagor teoremi görsellikle daha ilgilidir ve geometrik serilerin sözsüz ispatına nazaran öğrencilerin aşına olduğu bir ispattır. İspatta yer alan, altı dik üçgenin özel bir düzeninin olduğu fark edilince, başka bir öncüle gerek duyulmamaktadır. Ancak öğrenciler yine de resmin yeniden düzenlemesiyle ilgili zorluk yaşamışlardır. Araştırmanın sonucunda da öğrenciler bu tür ispatları zor bulduklarını ifade etmişlerdir. Özellikle anlamlı adımlar dizisinden oluşan bir ispatı durgun bir obje olarak çizmek öğrencilere zor gelmiştir. Bu ispatlarda okuyucu için hangi sırayla inşayı yapacağı ve hangi bilgileri seçerek alacağını belirlemek karmaşık bir süreçtir (Bardelle, 2009). Benzer şekilde Güner ve Topan (2016)'ın ilköğretim matematik öğretmen adaylarıyla yapmış olduğu çalışmada adayların geometrik ispat becerileri incelenmiştir. Araştırmada öğretmen adaylarının üçgenin iç açıları toplamının ve Pisagor teoreminin ispatı gibi aşına oldukları ispatlarda, diğer ispatlara nazaran daha fazla

geçerli ispat yazabildikleri görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının ispata dair yaşamış oldukları deneyimler ile ispat becerileri arasında doğru orantı olduğu şeklinde yorumlanmıştır.

Sözsüz ispatlarda, gözlemci neyin önemli olduğunu ya da neyin önemli olmadığını, ilişkileri neye göre sıralaması gerektiğini saptamak durumundadır (Borwein ve Jörgenson, 2002). Dolayısıyla bu ispatların derslerde kullanılması, öğrenciye ispat becerisinin yanında muhakeme yapabilme, sonuca ulaşabilmesi için değerlendirme ve matematiksel bilgiyi kullanabilme olanağı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bell (2011) sınıfında sözsüz ispatları nasıl kullandığını ortaya koyduğu çalışmasında, öğrencilere web sitelerinde mevcut olan interaktif ya da interaktif olmayan sözsüz ispatları kullanarak tartışma ortamı oluşturmuştur. Öğrencilerin sözsüz ispatları tartışmasını sağlayarak, matematiksel ifadelerin nasıl ispatlandığı hakkında kendi fikirlerini geliştirmelerine fırsatlar sunmuştur. Böylelikle de öğrencilerin ispat sürecini anlamaya çalışmıştır. Sözsüz ispatların öğrencinin ispat yazma yeteneğini geliştirdiğini ve matematiksel bir problemi nasıl daha iyi muhakeme edeceğini öğrettiğini belirtmiştir. Öğrenciden bir şeklin açıklanmasının istenmesi, öğrencinin özel parçaları kullanmasını gerektirdiğinden muhakeme yeteneğini de geliştireceğini belirtmiştir. Sözsüz ispatlar, sadece sonuca götüren, düşünce zinciri oluşturamayan formal ispatların zayıf noktasını ortadan kaldırmaktadır. Sözsüz ispatlar özellikle öğrenci açısından formal ispatlara nazaran daha çekici ve kabul edilebilirdir (Strausova ve Hasek, 2012).

Öğrencilerin varsayımda bulunabilmeleri, matematiksel ifade ile ilgili açıklama yapabilmeleri, matematiğin temel yönlerinden biri olan iletişim için önemlidir. Öğrenciler fikirlerini açıklarken, ispatı açıklarken en üst iletişim yeteneklerini kullanırlar ve farkında olmadan matematik kelime haznelerini genişletirler (Lane, 2004). Ayrıca bir konuyu anlamamanın en önemli adımı, figürleri veya eşitlikleri dili kullanarak açıklamaktır. İşlem adımlarını sözel olarak ifade etmek, çizimler veya somut başka sunumlar kullanmak öğrencilerin semboller arasında bağlantı kurmalarına yardımcı olmaktadır (Flores, 2000). İspatın yapıldığı bağlam ve form ne olursa olsun ispat matematikçilerin doğrulama, iletişim, açıklama, sistematikleştirme ve keşfetme için kullandıkları temel araçlardandır (Mudaly, 2013). Dolayısıyla ispat matematiksel iletişimde önemlidir (Tall vd., 2011).

Bir ispatın diğer insanlar için faydalı olacağını bilmemize rağmen, bir ispatı keşfederken yaşamış olduğumuz kişisel tatmin ve manevi keyif içsel motivasyon faktörüdür (Mudaly, 2013) ve motivasyon öğrencinin ispata ilgisi için anahtar faktörlerden birisi olarak görülmektedir (Strausova ve Hasek, 2012).

Sigler vd. (2016) ispatı, standart ispat, şık (elegant proof) ispat ve sözsüz ispat olmak üzere üç ana grup altında sınıflandırmıştır ve çeşitli görevleri farklı ispat yöntemlerine göre çözmüşlerdir. Çalışmada matematiğin ayrılmaz parçası olan estetiğin öneminden ve sözsüz ispatların da estetik ispatlar olduğundan bahsetmişlerdir. “İspat, esasında estetik fonksiyona hizmet etmektedir ve bu durum insan zihninin tatmin olmasıyla ilişkili olduğundan önemlidir. Nitekim matematikçiler tarafından kısa ve maksimal ispatlar estetik ispatlar olarak kabul edilmektedir.” (Baki, 2015, s. 47) Mc Allister (2005) “bir ispatın çok uzun ve karmaşık olmasının, bireyin tüm adımları tek bir zihinsel imajda algılayabilmesine engel olduğunu belirtmektedir.” (s. 22) Ayrıca tek bir eylemde zihinsel kavrama sağlayabilen ispatın, teoremin niçin doğru olduğuna dair gerçek anlama sağlayabileceğini ve sözsüz ispatların da bu tip ispatlar olduğunu ifade etmektedir.

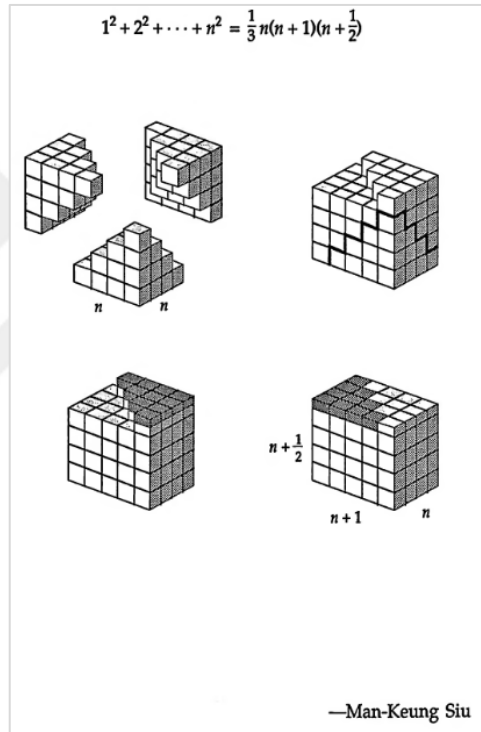
Dinamik sözsüz ispatlarla ilgili olarak Strausova ve Hasek (2012) çeşitli ispat fonksiyonlarını karşılayan dinamik sözsüz ispatları incelemiş ve eğitimdeki önemine dikkat çekmişlerdir. Sözsüz ispatların sınıflarda kullanımıyla, öğrencilerin öğrenme sürecinde aktif olacaklarını, aktif ilişkilendirme yapabileceklerini, tartışma yeteneklerinin gelişeceğini ve edindikleri bilgileri uygulama yeteneği kazanabileceklerini ifade etmişlerdir. Çalışmada ispatın keşfetme (discovery), inanma (conviction) ve doğrulama (verification) fonksiyonunu karşılayan dinamik sözsüz ispat örnekleri verilmiş ve kitaplarda yer alan cebirsel ispatlar, dinamik olan ve dinamik olmayan sözsüz ispatlar karşılaştırılarak iyi bir ispat öğretimi için ispat çeşitliliğinden faydalanılması tavsiye edilmiştir.

İpek ve Akkuş İspir (2011)’in öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları dinamik yazılımlar ile ilgili çalışmada, öğretmen adayları geometrik şekil ve nesneler kullanarak trigonometrik eşitliklerin ispatlanmasını daha ikna edici ve açıklayıcı bulduklarını belirtmişlerdir. Ayrıca öğretmen adayları cebirsel problemleri ispatlamak için geometrik şekiller kullanmışlardır. Örneğin x^2 ’yi göstermek için kare kullanmışlardır. Öğretmen adayları, çalışmada kullanılan dinamik görsel ispatların, ispatı açık biçimde görmelerini sağladığını ve şeklin bütününe görmenin teoremi ve formülü anlamayı kolaylaştırdığını belirtmişlerdir.

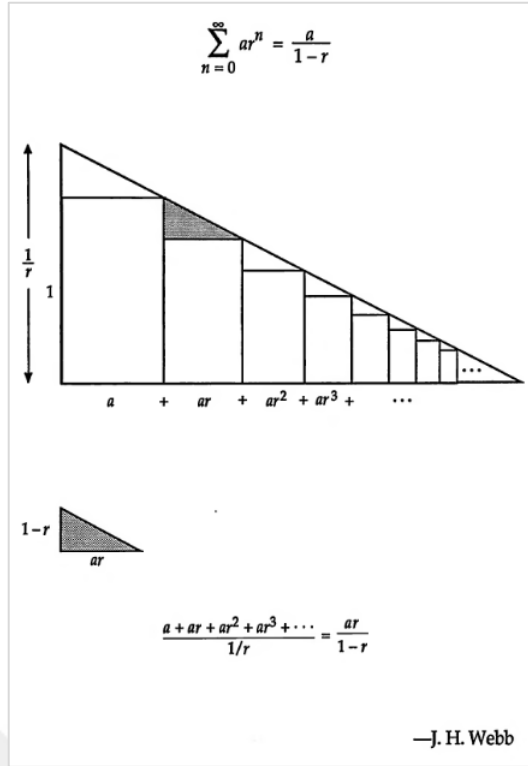
Bardelle (2009)’nin geometrik serilerle ilgili sözsüz ispatın yer aldığı çalışmasında, sözsüz ispatı anlamayan öğrencilere çeşitli ipuçları vermesine rağmen öğrencilerin çoğu çizimi yapılandıramamıştır. Bunun sebebi; öğrencilerin matematiksel ispat kavramını yeterince anlamamaları, sözsüz ispatı anlamayı bir süreç olarak görmemeleri ve sözsüz ispattaki resimleri sadece basit birer araç olarak düşünmeleridir. Farklı matematiksel ifadelerin farklı sunuş biçimleriyle gösterilmesi anlamayı artırmaktadır. Fakat öğrenciler ilgili

konuya dair bilgileri iyi olsa da konu yeni bir araçla sunulduğunda başarısız olmaktadır. Yani bildikleri bir konuyu kullanamamaktadırlar. Ayrıca ispatın sınıftaki asıl amacının anlamayı sağlamak olduğu düşünüldüğünde, öğrencilerin kavramları, yöntemleri ve uygulamaları anlamasını artırmak için ispatlar ayrıntılandırılabilir, kısaltılabilir ya da değişik şekillerde sunulabilir (Hersh, 1993).

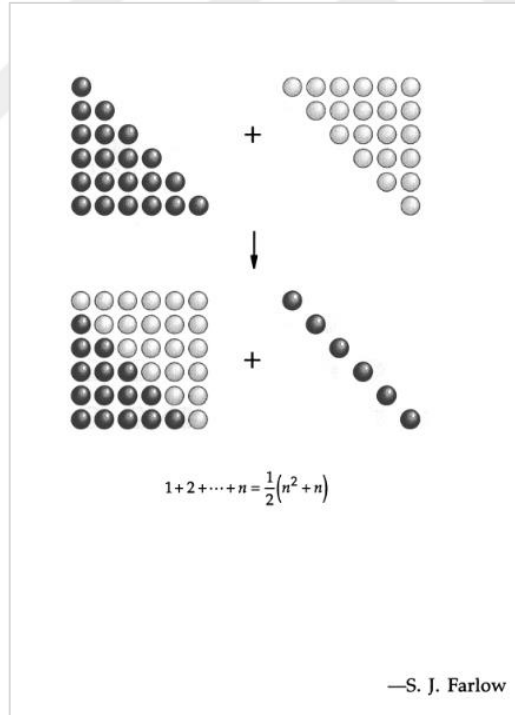
Sözsüz ispatlarla, öğrenciler matematiksel fikirleri farklı sunuşlar aracılığıyla nasıl ilişkilendireceğini görebilmektedirler. Tamsayıların toplamına ilişkin formülün bir üçgenle açıklanabilmesi, diziler ve seriler ile ilgili bir teoremin üçgenlerle ilişkilendirilmesi ya da tam sayıların karesinin toplamının hacim kullanılarak gösterilmesi öğrencinin farklı alanlarda ilişkilendirme yapabilmesine imkan vermektedir (Gierdien, 2007).



Şekil 14. Tamsayıların toplamı ile ilgili bir formülü hacimle gösteren sözsüz ispat örneği



Şekil 15. Diziler ve seriler ile ilgili teoremin ispatını üçgenle gösteren sözsüz ispat örneği



Şekil 16. Tamsayıların toplamına ilişkin formülü üçgenlerle gösteren sözsüz ispat örneği

Sözsüz ispatlar matematikte yeni araçlar olmamasına (Bell, 2011) ve ilköğretimden üniversiteye kadar ispat öğretiminde önemli rolleri olmasına rağmen (Alsina ve Nelsen, 2010) alanyazında sözsüz ispatlarla ilgili araştırmalar genellikle konunun temel bilgileri, tarihi veya örnekler (Alsina ve Nelsen, 2010; Bayer, 2009; Brown, 1997; Flores, 2000; Kobayashi, 2010; Miller, 2012) üzerinedir. Özellikle Türkiye’de öğretim uygulamalarına dayalı sınıf

çalışmaları, katılımcı performansları, sözsüz ispat ile ilgili görüşler, sözsüz ispatların ispatlama becerisine etkileri ile ilgili çalışmalar oldukça az sayıdadır (Demircioğlu ve Polat, 2015; Demircioğlu ve Polat, 2016; Uğurel vd., 2016).

Gierdien (2007) çalışmasında, sözsüz ispatların öğretime nasıl entegre edilebileceği, sözsüz ispatların öğrencilerin matematiksel süreç becerileri ve görselleştirme becerilerine ne gibi katkılar sağlayacağını teorik olarak sunmuştur. Sözsüz ispatları süreç ve ürün bağlamında incelemiş ve final resmini ürün olarak, sözsüz ispatı anlamak için çeşitli teknikleri kullanmayı süreç olarak değerlendirmiştir.

Demircioğlu ve Polat (2015) sözsüz ispat ile ilgili deneyim yaşamış olan ortaöğretim matematik öğretmenliği son sınıfta okuyan öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmada, öğretmen adaylarının sözsüz ispatın etkili olduğu ve olmadığı yerlere ilişkin görüşlerini almışlardır. Öğretmen adayları, sözsüz ispatlarla bilgilerin kalıcı olduğunu, matematiksel formül/ifadelerin daha iyi kavrandığını, konular arası ilişki kurulduğunu, yeni bilgiler öğrendiklerini; sözsüz ispatların ifadeleri somutlaştırdığını, merak duygusu uyandırdığını, güven kazandırdığını, zevkli olduğunu, verimli olduğunu ve ileride sözsüz ispatları öğretim yöntemi olarak da kullanabileceklerini ifade etmişlerdir.

Demircioğlu ve Polat (2016) ortaöğretim matematik öğretmenliğinde okuyan öğretmen adaylarının sözsüz ispatlarda yaşamış oldukları zorlukları ortaya çıkarmaya yönelik yapmış oldukları çalışmada, öğretmen adaylarının sözsüz ispatlarla en fazla zorlandıkları noktaların, verilen şekilleri anlayamama, sözsüz ispatlarda yeterince açıklama olmaması, sözsüz ispat ile cebirsel ispat arasında ilişki kuramama, alan bilgisi eksikliği ve kaynak sıkıntısı olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca sözsüz ispatların öğrenciyi zorlayabildiği fakat öğrencilerin uzamsal görselleştirme ve uzamsal muhakeme becerisini geliştirilebildiği belirtilmiştir.

Yassin (2013) diziler ve seriler ünitesinde sözsüz ispatları kullanmanın öğrenci başarısına etkisini incelemiş ve 89 öğrenciyi iki gruba ayırarak deneysel bir çalışma yürütmüştür. Çalışmanın neticesinde, sözsüz ispatlar kullanılarak dersin işlendiği grubun başarısı ile diğer grubun başarısı arasında anlamlı bir fark çıktığını belirtmiştir.

Uğurel vd. (2016) fen lisesinde okuyan üç öğrenci ile yapmış oldukları nitel çalışmada; öğrencilerle sözsüz ispatlarla ilgili çalışmalar yaptıktan belli bir süre sonra öğrencilerden kendi sözsüz ispatlarını oluşturmalarını istemişler ve bu doğrultuda “temel modifikasyon, ileri modifikasyon ve tümevarımsal temel çizim” olmak üzere üç ardışık kategori açığa çıkarmışlardır. Bu kategorilerin sözsüz ispat analizlerinde kullanılabileceğini

belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenciler sözsüz ispatları “eğlenceli, zevkli, pratik, entelektüel, orijinal, şık” bulduklarını ifade ederek sözsüz ispatlarla ilgili olumlu görüş bildirmişlerdir. Geometri ve matematiği birlikte kullandıkları fark eden öğrenciler problem çözme, yaratıcılık ve görselleştirme becerilerinin geliştiğini ve sözsüz ispatların geniş uygulama alanlarına sahip olduğunu gördüklerini belirtmişlerdir.

Karras (2012) tez çalışmasında öğretmen yetiştirme programının son sınıfında okuyan bir grup gönüllü öğretmen adayına lise öğretim programında yer alan belli teoremlerin sözsüz ispatını vermiş ve onlardan şekillerden akıl yürüterek teoremleri açıklamalarını istemiştir. Daha sonra bu sonuçları Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre analiz etmiştir. Yapılan analizlere göre sözsüz ispat bulma sürecinin “görsel ispatın ne olduğunu fark etme, ispat planı tasarlama ve bir çözüm geliştirme” olmak üzere üç aşamadan oluştuğunu ortaya çıkarmıştır.

İspat öğretiminde kullanılabilecek ve ispatın bir süreç olduğuna yönelik vurgu yapan Öztürk (2016), İSMAT modelini oluşturmuş ve bu modele göre tasarlanmış öğrenme ortamı oluşturarak ispat öğretimini gerçekleştirmiştir. Modelin yedi aşaması olup, bu aşamalar “problem durumunu anlama, yapı oluşturma, oluşturulan yapı üzerinde çalışma ve varsayımda bulunma, ilişkiyi önerme olarak ifade etme, ispatlama, ispatın tutarlılığını inceleme ve ispatı formal hale dönüştürme” olarak belirlenmiştir. Çalışmanın sonucunda, bu modele göre yapılan ispat öğretiminin, muhakeme becerisinde, matematik dil ve notasyonun doğru kullanımında, ispatın rolüne ilişkin görüşlerinde olumlu etkileri olduğu sonucu elde edilmiştir. Bu çalışmada da ispat öğretiminde süreç vurgusu yapan Boero modeline göre tasarlanmış öğrenme ortamı oluşturulmuştur.

Boero Modeli

İspat sürecinin ve ispat çıktısının birbirinden ayırt edilmesi gerekmektedir. İspat süreci ve ispat çıktısını farklılaştırmak için Boero (1999) bir model tanımlamıştır. Bu model farklı aşamalara bölünmüş olup, bir ispatın oluşturulması esnasında deneysel-tümevarımsal ve varsayımsal-tümdengelimsel adımların birleştirilmesidir (Heinze ve Reiss, 2004).

Teoremlerin kültürüne girmek, varsayım üretmek ve teorik bilgi unsurlarını dikkate alarak ürettiğimiz varsayımları ispatlamak gibi belirli yetkinlikleri geliştirmektir. İspatta henüz yeni olan öğrencilerin teoremlerle yüzleşmesini yönetebilmek için epistemolojik ve bilimsel analizlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bahsedilen bu analiz için varsayım üretimi ve matematiksel ispat yapısı safhalar olarak adlandırılmıştır (Boero, 1999).

Boero ispat safhalarını, “varsayım üretme (production of a conjecture)”, “metinsel paylaşımlara göre önermenin ifadesi (formulation of the statement according to shared textual conventions)”, “varsayımın esaslarının araştırılması (exploration of the content (and limits of validity) of the conjecture)”, “tümdengelimsel zincir içinde teorik argümanların seçimi ve tutarlı biçimde birbirine bağlanması (selection and enchaining of coherent, theoretical arguments into a deductive chain)”, “geçerli matematiksel standartlara göre kabul edilmiş argümanları ispata bağlama (organization of the enchainded arguments into a proof that is acceptable according to current mathematical standards)” ve “formal ispata yaklaşma (approaching a formal proof)” olmak üzere altıya ayırmıştır (Boero, 1999).

1. *Varsayım üretme*: Bu safha; problem durumunun açıklanması, kuralın hangi şartlar altında olduğunun, üretilen varsayımın akla yatkınlığı ve gerekli argümanların tespitini içermektedir. Bu safha matematikçilerin yaptığı işin şahsi yönüdür (Boero, 1999) ve matematik topluluklarıyla paylaşılmaz ancak diğer matematikçilerin tartışmaları üzerine temellendirilebilir (Reiss vd., 2008).
2. *Metinsel paylaşımlara göre önermenin ifadesi*: Bu safha daha sonraki yapılacakların tamamı için temel olacak varsayımın ifade edilmesidir. Sonraki süreçlerde revize edilebilir (Reiss vd., 2008).
3. *Varsayımın esaslarının araştırılması*: Bu safha hipotez ve tez arasındaki sezgisel ve anlamsal detaylar, teori ile ilişkili uygun argümanların belirlenmesi ve bu argümanlar arasındaki olası bağlantıların önceden düşünülmesini içermektedir (Boero, 1999). Bu safha da birinci safha gibi matematikçilerin yaptığı işin şahsi yönüdür (Reiss vd., 2008).
4. *Tümdengelimsel zincir içinde teorik argümanların seçimi ve tutarlı biçimde birbirine bağlanması*: Bu safha genellikle matematikçilerin yapmış oldukları çalışmayı meslektaşlarına informal yollarla özetledikleri safhadır.
5. *Geçerli matematiksel standartlara göre kabul edilmiş argümanların ispata bağlanması*: Bu safha, yayım için yazılı metnin oluşturulduğu safhadır. Bu safha için matematiksel standartların mutlak olmadığı ifade edilebilir. Örneğin günümüzdeki bir makale ile 18. yy da yazılmış makale karşılaştırıldığında veya lise öğretim programındaki bir bölüm ile üniversitedeki bir bölüm karşılaştırıldığında farklı olabildiklerini görebiliriz.
6. *Formal ispata yaklaşma*: Bu safha, matematikçilerin teoremlerinde bazen eksik olabilmektedir bazen de yalnızca ispatın belli kısımları ile ilgili olabilmektedir.

Bu safhalar belli bir sırayla verilmiş olmalarına rağmen, doğrusal olma şartı bulunmamaktadır. Örneğin beşinci safha olan yani argümanların ispata bağlanması safhasında sıkıntı çıktığı takdirde problem durumunun yeniden açıklanması ve yeni bir ifade ile hipotezin desteklenmesi gerekebilmektedir (Boero, 1999).

Matematikçilerin ve öğrencilerin ispat süreci birbirinden oldukça farklıdır. Matematikçiler zengin ve serbest biçimde argümantasyon yapabilirken; öğrencilerde bu durum söz konusu değildir (Boero, 1999). Boero modeli, uzmanların ispat sürecine yönelik olması sebebiyle; Heinze ve Reiss (2004), Boero modelini öğrencilerin ispat sürecine uyarlamak için değişiklikler yapmışlardır. Heinze ve Reiss (2004) Boero'un altı safha (phase) olarak ifade ettiği ispat sürecini beş evre olarak (stage) ifade etmişlerdir.

1. Evre: Bu evre, problem durumunun açıklanması ve varsayımı destekleyecek iddiaların tanımlanmasıdır. Geometri derslerinde bir çizimin araştırılması bu rolü oynamaktadır. Sözsüz ispatlarda öğrenciden resmin açıklanması istenerek bu evre ile ispat sürecine giriş yapılmaktadır.
2. Evre: Bu evre metinsel kurallara göre varsayımın ifade edilmesidir. Öğrenci bu evrede varsayımı açık ve net biçimde ifade edebiliyorsa bu evre başarılı biçimde geçilmiş anlamına gelmektedir.
3. Evre: Bu evrenin amacı varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenerek olası ispat stratejilerinin kabataslak planlanmasıdır. Bu evre “varsayıma referans, varsayımın araştırılması, daha fazla bilgi toplanması ve bir ispat fikri oluşturma” olmak üzere dört alt kategoriye ayrılmıştır. Bu alt kategorilerden en az üç tanesinin gözlenmesi bu evrenin başarılı biçimde geçtiğini göstermektedir.
4. Evre: Bu evre bir önceki evrenin unsurlarını kapsamaktadır. Üçüncü evre iddiaların belirlenerek ispatın kabataslak planlanmasıyla sona ermektedir. Bu evrede ise taslaktaki varsayımlar tümdengelimsel zincir içinde birleştirilmek durumundadır. Bu evrede hem öğretmen hem de öğrenci sürece katkıda bulunuyorsa, evrenin başarılı biçimde geçtiği söylenebilir.
5. Evre: Bu evre okul matematiğindeki ispat sürecinin son evresidir. Bu evrede geçmişe dönük genel değerlendirme bulunmaktadır. Eğer bütün iddia adımları ifade edilmiş ve sürece dönük özet mevcutsa bu evrenin başarılı biçimde geçtiği söylenebilir. Sözsüz ispat sürecinde öğretmen bu evrenin başarılı biçimde geçmesi için öğrenciden genel değerlendirme isteyebilmektedir.

Hilbert vd. (2008) sınıflardaki ispatın yüksek seviyede olmasının gerekli olmadığını ve Boero modelinin beşinci ve altıncı safhalarının, daha önceden çözülmemiş ispatlar için

olduğunu düşünerek bu evreleri çalışmalarına dahil etmemişler ve sezgisel örnekler kullanarak öğretmen adaylarının ispat sürecini incelemişlerdir.

Öğrenciler, ispatın birbirini izleyen bir dizi mantıksal adım içerisinde verilenden istenene ulaşma işlemi olduğunu kavrayamamakta ve bunu ispat sürecine aktaramamaktadırlar (Uğurel ve Moralı, 2010; Urhan ve Bülbül, 2016). Halbuki başarılı bir ispat öğretimi tüm ispat sürecini kapsamalıdır (Heinze ve Reiss, 2004). Heinze ve Reiss (2004) öğrencilerin ispat sürecinde ihmal edilen veya edilmeyen evreleri tespit etmek için deneysel bir çalışma yürütmüşlerdir. Araştırmada öğrencilerden geometrik bir şekil çizmeleri ve gözlemlediklerini rapor etmeleri istenmiştir. Daha sonra varsayım tartışılmış ve sonunda varsayımın açıkça ifade edilmesi sağlanmıştır. Varsayımın ispatlanması için öğrencilerin fikir vermesi istenmiştir. Eğer ki öğrenciler fikir veremezse, öğretmen ipuçlarıyla onları yönlendirmiştir. Daha sonra ispat adım adım organize edilerek sonuca ulaşılmıştır. Öğrencilerin genellikle üçüncü evrede, yani varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenerek olası ispat stratejilerinin kabataslak planlanması evresinde, yetersiz oldukları görülmüştür. Dolayısıyla ispat sürecini planlayan ve kontrol eden öğretmenlerin ispat sürecinin evrelerinin başarılı biçimde geçilmesini sağlayabilmesi ispat öğretimi için önemlidir.

Rinvold ve Lorange (2011), Nelsen'in sözsüz ispatları bütünsel olarak sınırlı rehberlikle verdiğini, geleneksel ispatların ise adım adım verildiğini ve formüllerin numaralandırılması ve uygulanan teoremlerin adlarının yol gösterici olduğunu ve bu tarz rehberliklerin dikkatleri yöneltmenin önemli bir yolu olduğunu belirtmektedirler.

Heinze ve Reiss (2004)'e göre çoğu öğrenci ispat sürecinde kontrolü kaybetmektedir. Dolayısıyla ispatta iyi olmayan ya da henüz ispat etkinliklerine yeni giriş yapmakta olan öğrenciler için ispat küçük parçalara bölünebilir. Ayrıca Karaoğlu'nun (2010) öğretmen adaylarının ispat performanslarını arttırmaya yönelik yapmış olduğu çalışmada, ispatı tamamlayamayan öğretmen adaylarına anahtar nokta ve fikirlerin verilmesiyle ispat performanslarının artmış olduğu göz önüne alındığında, ispat becerisini arttırmak için öğrencilerin çeşitli unsurlarla desteklenmesi gerektiği söylenebilir.

Boero modelini uyarlayarak öğrencilerin ispat sürecini inceleyen araştırmacılar çalışmalarında sezgisel yapılandırılmış örnekler (Heuristic-Worked examples) kullanmışlardır. İspata henüz yeni başlayan öğrenciler için sözsüz ispat etkinlikleri bu örnekler formatında oluşturulmuştur. Sezgisel yapılandırılmış örnekler açıklanmadan önce bu örneklerin temelini oluşturan yapılandırılmış örnekler (Worked examples) açıklanmıştır.

Bir problemin çözümünü sunan, yapılandırılmış örnekler özellikle son yıllarda yoğun olarak araştırılan konular arasındadır. Bu örnekler bir problemin çözümünün adım adım yönergesi (prosedür) ve çözümün kendisinden oluşmaktadır (Reiss *vd.*, 2008). Daha açık biçimde ifade edecek olursak yapılandırılmış örnekler problem, çözüm adımları ve problemin çözümünden oluşmaktadır (Heinze *vd.*, 2008; Hilbert *vd.*, 2008).

Beceri edinimlerinin erken dönemlerinde öğrenciler problemin çözümü için gerekli prensibi belirlemede yetersizlerdir, dolayısıyla problemi doğru olmayan stratejilerle çözmeye çalışmaktadırlar. Bu stratejiler problemi çözmede işe yarasa dahi matematiksel prensipleri anlamada yetersiz kalmaktadır. Ayrıca bu stratejiler çalışan hafızada bilişsel kaynakları işgal etmektedir. Bu da anlama süreci ve problem çözme şemasını genelleyebilmek için yetersiz kaynak anlamına gelmektedir (Reiss *vd.*, 2008). Beceri edinimlerinin erken dönemlerinde problem çözme etkinlikleri çok fazla çalışan bellek kapasitesi gerektirmektedir. Özellikle yapılandırılmış örneklerin ilk beceri edinimlerinde kullanılması, becerinin kazanılmasında etkilidir. (Hilbert *vd.*, 2008; Paas ve Gog, 2006; Renkl ve Atkinson, 2003; Sweller, 2008).

Yapılandırılmış örnekler bir uzmanın problem çözme modelini sağlamakta ve dolayısıyla analogik transfer kullanılarak benzer problemlerin nasıl çözüleceği görülebilmektedir. Böylelikle çözüm adımları taklit edilerek benzer sorular çözülebilmektedir (Zöttl *vd.*, 2010). Dolayısıyla bu tip örneklerle çalışan öğrenci çözüm adımlarını anlayabilmektedir (Hilbert *vd.*, 2008). Sweller bu tip örneklerin etkililiğini bilişsel yük teorisiyle açıklamaktadır. Bu teoriye göre problem çözerken bilişsel kaynakların çoğu doğru çözüm adımlarını bulmak için kullanılmaktadır. Yapılandırılmış örneklerin kullanılmasıyla öğrenci çözüm adımlarını düşünmek zorunda kalmaz ve bilişsel yükü azalmış olur böylelikle de çözümü daha iyi anlayabilir (Paas, Tuovinen, Tabbers ve Van Gerven, 2003; Sweller, 2008).

Öğrenenden yapılandırılmış örneklerin çözüm adımlarının arkasındaki mantığı açıklamasını istemek, öğrencide bilişsel yükü uyarmaktadır. Öğrencilerin bir kavrama ait farklı tanımları farklı şemalar halinde düzenlemesi şemalar arasında kolayca hareket etmelerine engel olmakta ve öğrencinin bilişsel olarak fazla yüke maruz kalmasına sebep olmaktadır. Ayrıca bilgi yapılarının organizasyonunun düzgün yapılması, bilişsel yükü azaltmaktadır. Deneyimin artmasıyla bazı elemanlar aynı şemada sınıflandırılacak ve çalışan hafızada tek bir eleman gibi davranacaktır dolayısıyla da hem etkileşim elemanlarının sayısı hem de bilişsel yük azalacaktır. Uzunca bir süre bilişsel yükün eğitimle değiştirilemeyeceği düşünülmüştür fakat daha sonraları bazı tekniklerin bilişsel yükü azaltmada başarılı olduğu görülmüştür (Moore, 1994; Paas ve Gog, 2006).

Yapılandırılmış örnekler öğrencinin bilişsel kaynakları yeterli kullanabilmesine yardımcı olmaktadır (Heinze vd., 2008). Dolayısıyla bu örnekler ispat öğretimi için kullanılabilir (Hilbert vd., 2008). Ayrıca bu örnekleri bilgisayardaki simülasyonlara benzetebiliriz. Nasıl ki simülasyonlar bir süreci göstermektedir, problem çözme sürecinde de amaç problemin nasıl çözüleceğini öğretmektir (Sweller, 2008). Dolayısıyla bu örneklerin ispat problemlerinde kullanılması öğrencilere ispat sürecini ve ispat aşamalarını öğretebilmemizde katkı sağlayabilir.

İspat süreci ve ispat çıktısını ayırt edebilmek ve ispat sürecine vurgu yapabilmek adına Reiss ve Renkl (2002) yapılandırılmış örneklerle, Schoenfeld'in (1985) problem çözme öğretimini birleştirerek matematiksel ispat ve argümantasyon alanında “sezgisel yapılandırılmış örnekleri (heuristik-worked-examples)” geliştirmişlerdir.

Sezgisel yapılandırılmış örnekler, öğrencilere problem çözme süreçlerinde yardımcı olacak özel bir süreç içererek (Heinze vd., 2008), varsayımın doğru ve ayrıntılı (gayri resmi) bir ispatını sunmaktadır. Yani daha önce bahsedilen ispatlama modelinin adımları olan varsayım üretilmesi, varsayımın ifade edilmesi, varsayımın araştırılması ve uygun argümanların tümdengelimsel bir zincir içerisinde seçilmesi ve birleştirilmesini içermektedir. Sezgisel yapılandırılmış örneklerde öğrenci açıklama yapması için teşvik edilmektedir. Bunlara ek olarak öğrencinin ispat aşamalarını gerçekleştirebilmesi için matematiksel içeriği anlaması gerekmektedir. (Hilbert vd., 2008).

Sezgisel yapılandırılmış örneklerin öğrencilerin matematiksel anlamasını arttırdığına yönelik deneysel çalışmalar mevcuttur (Heinze vd., 2008; Hilbert vd., 2008; Zöttl vd., 2010).

Heinze vd. (2008) Almanya ve Tayvan'da 7., 8. ve 9. sınıflarda okuyan öğrencilerle yapmış oldukları çalışmada, tek adımlı ve çoklu adımlı ispatlar arasındaki farklara değinmişler ve öğrencilere 9. sınıfın ilk döneminde iki veya daha fazla özelliğe ihtiyaç duyulan ispat problemleri ile tümdengelimsel ispatların öğretildiğini belirtmişlerdir. Araştırmacılar çoklu adım ispatlarında yetersiz olan öğrencilerin ispat yeteneklerini geliştirmenin en etkili yolunun anahtar fikri ve sonuçları görselleştirmek ve dolayısıyla bilişsel yükü düşürmek olduğunu belirtmişlerdir. Nitekim Raman (2003)'a göre bir ispat anahtar fikirlerden ibarettir ve anahtar fikirler ispatın neden geçerli olduğuna dair inanç sağlayan unsurlar arasındadır. Yeşilyurt Çetin (2017)'nin matematik öğretmeni adaylarıyla yaptığı çalışmada ise, anahtar fikirlerin öğretmen adaylarının ispatı sezgisel olarak anlamalarına, ispata başlamalarına ve ispatı tamamlamalarına yardımcı olduğu belirtilmiştir. Beitlich, Obersteiner ve Reiss (2015)'e göre sezgisel yapılandırılmış örnekler, ispat oluşturmak için gerekli anahtar fikir ve argüman bulma sürecinde öğrenene yardımcıdırlar.

Sözsüz ispatlarda yer alan belli ipuçları ispat sürecine rehberlik etmektedir (Sigler vd., 2016). Dolayısıyla ispatta henüz yeterliğe ulaşmamış öğrencilerin, sözsüz ispatları, ispat süreci adımlarına uygun olarak çözmeleri ispat yeteneklerini geliştirebilir.

Reiss vd. (2008), 243 tane sekizinci sınıf öğrencisiyle yürüttükleri deneysel çalışmalarında, sezgisel yapılandırılmış örneklerin özellikle düşük ve orta başarıdaki öğrencilerde daha büyük ilerlemeler kaydettiği sonucuna ulaşmışlardır. Yüksek başarılı öğrencilerde ise bu sonuca ulaşılamamıştır. Düşük ve orta başarılı öğrencilerin testlerde yüksek başarılı öğrencilerden daha iyi sonuç aldıkları görülmüştür. Dolayısıyla sezgisel yapılandırılmış örneklerin zor öğrenme süreçleri ve daha düşük başarıdaki öğrenciler için uygun olduğu söylenebilir.

Sezgisel yapılandırılmış örnekler, öğrenmeyi ve ispat yeteneğini geliştirmektedir. Yani bu örnekler öğrenenin ispatlama yeteneği ve ispatlama hakkındaki kavramsal bilgisinde gelişmeye yol açmaktadır (Hilbert vd., 2008; Reiss vd., 2008). Örneklerde yer alan öğrencinin doldurması gereken boşluklar öğreneni içeriğe yönlendirmektedir ve bu yüzden de ispat yeteneği edinmelerine yardımcı olmaktadır ancak kimi durumlarda bu boşluklar öğreneni ispat konusundan başka tarafa da çekebilmektedir (Hilbert vd., 2008).

Sezgisel yapılandırılmış örnekler, gelecek vadeden konular arasındadır. Bu örnekler daha önceden algoritmik çözümlü matematik problemlerinde kullanılırken; şimdilerde sezgisel bilgiyi de öğretilbileceği gösterilmiştir. Gelecekteki çalışmalarda bu örneklerin matematiğin diğer alanlarında kullanılmasının avantajlı olup olmadığı, hangi eğitim şekilleriyle bütünleştirilebileceği araştırılabilir. Özellikle süreç merkezli öğrenme fırsatları sunan bu örneklerin ispat performansını etkilediği düşünülmektedir (Reiss vd., 2008).

Sezgisel yapılandırılmış örneklerde, öğrenciler problem durumunu açıklamak, varsayımı ifade etmek, varsayımı açıklamak, uygun matematiksel savları belirlemek ve kaba bir ispat fikri oluşturmak üzere düşündürülmektedir. Dolayısıyla öğrenciler uygun savları seçerek tümdengelsel zincire entegre ettikten sonra savları bir ispatta organize etmek durumundadır. Öğrencilerin çizim yapmaları, geometrik cisimlerin kenar ve açılarını ölçmeleri, varsayımda bulunmaları, ispat sürecinin sonunda genel bir değerlendirme yapmaları istenerek öğrencinin kendi matematiksel etkinliğini yapması sağlanmaktadır. Bütün bunlar öğrencide ispat yapılandırmasını ve ispat sürecinde koordinasyonun gelişmesini sağlamaktadır (Heinze vd., 2008).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Yöntem

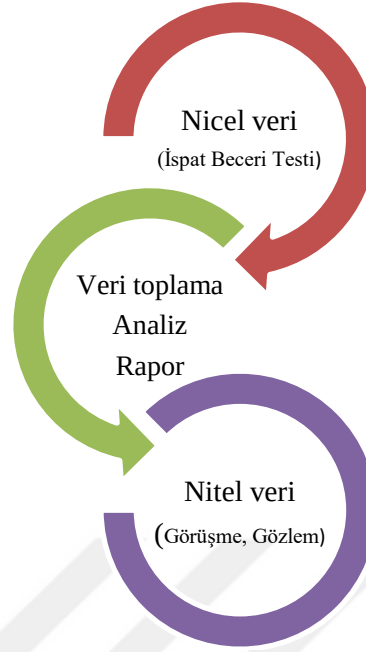
Bu bölüm; araştırmanın modeli, araştırma grubu, veri toplama araçları ve verilerin toplanması, uygulama süreci, verilerin analizi ve araştırmanın geçerlik ve güvenirliği alt başlıkları ile açıklanmıştır.

Araştırmanın Modeli

“Model bir sistemin temsilcisi olup yalnızca “önemli” görülen değişkenleri içine alacak şekilde gerçek durumun özetlenmiş halidir.” (Karasar, 2006, s.76) “Araştırma modeli ise, araştırmacının sorularını cevaplamak veya hipotezlerini test etmek amacıyla araştırmacı tarafından kasıtlı olarak geliştirilen bir plandır.” (Büyüköztürk, 2007, s.1) Bu çalışmada 9. sınıf öğrencilerinin alternatif bir ispat yöntemi olan, sözsüz ispatlarla, ispat becerilerinin ve ispat yapma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda araştırma, ispat becerilerinin incelenmesi yönüyle nicel, ispat yapma sürecinin incelenmesi yönüyle de nitel bir çalışmayı gerekli kılmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada birbirlerinin eksiklerini tamamlaması açısından nitel ve nicel yöntemlerin birlikte kullanıldığı, özellikle son yıllarda sıklıkla tercih edilen karma araştırma yaklaşımının kullanılması uygun görülmüştür.

Karma araştırma yaklaşımında birçok desen mevcuttur. Yakınsayan paralel karma yöntemler, açımlayıcı sıralı karma yöntemler, keşfedici sıralı karma yöntemler, sosyal bilimlerde yaygın biçimde kullanılan desenlerdir.

“Açımlayıcı sıralı karma yöntemlere göre, ilk olarak nicel veriler elde edilir, sonrasında nicel verilerden elde edilen sonuçları nitel araştırmayla daha derin bir şekilde inceleyip açıklamak için nitel veriler elde edilir.” (Creswell, 2016/2014, s.15) Bu çalışmada da önce nicel veriler toplanmıştır daha sonra bu nicel verileri ve ispat sürecini incelemek üzere nitel veriler toplanmıştır. Bu yönüyle bu çalışmanın açımlayıcı sıralı karma yöntemlere dahil edilmesi uygun görülmüştür. Şekil 17 ile bu tez çalışmasının araştırma yönteminin genel düzeni sunulmuştur. Bir sonraki alt başlıkta karma araştırmaların içerdiği, nitel ve nicel boyuta kısaca değinilerek; yapılmış olan bu çalışmanın nitel ve nicel boyutu ayrı ayrı açıklanmaya çalışılmıştır.



Şekil 17. Araştırma yöntemi

Nicel boyut.

Nicel araştırmaların temel prensibi, elde edilmiş olan bulguların sayısal değerlerle ifade edilmesidir (Ekiz, 2003, s. 93). Daha ayrıntılı bir şekilde açıklayacak olursak, nicel araştırmalarda, olgunun açıklanması için sayısal verilerin toplanması ve bu verilerin istatistiksel yöntemler kullanılarak analiz edilmesi gerekir (Muijs, 2004, s. 1). Sayılar ve istatistik, bilgiyi anlamlandırma, dünyada olup biteni anlama ve karar vermeye yardımcıdırlar. Doğru sayıların doğru yolla kullanılması verilecek kararların kalitesinde artışa neden olabilmektedir (Agresti ve Finlay, 2009; Kenny, 1987, s. 2).

Araştırmacının neden-sonuç ilişkilerini belirlemeye çalışırken kendi kontrolüyle, gözlemek istediği verilerin üretildiği araştırma modeli, deneysel modellerdir. Yani özetle araştırmacı gözlemek istediklerini bizzat kendisi üretmektedir ki bu da esasında kuram geliştirme yolunda atılmış bir adımdır (Karasar, 2006, s. 87). Deneysel modellerde esas olan deneydir ve yapısal olarak okuldaki fen derslerinde yaptığımız deneylere benzemektedirler (Muijs, 2004, s. 13).

Deneysel modeller; denek sayısına, değişken sayısına ve deneme koşullarına göre farklı şekillerde sınıflandırılmıştır. McMillan ve Schumacher (2006, s. 263) sahip oldukları farklı özelliklere göre deneysel modelleri “Deneme Öncesi”, “Gerçek Deneme”, “Yarı Deneme” olmak üzere üç farklı türe ayırmışlardır. Deneme öncesi deneysel desenlere basit veya zayıf modeller de denilmektedir. Bu modellere kontrol grubunun eksikliğinden ötürü

daha zayıf modeller olarak bakılmaktadır (Hancock ve Mueller, 2010, s. 346). Bu desen deneysel araştırmaların bazı özelliklerini yerine getirmemekle beraber bu desenle elde edilen verilerin geçersiz ya da değersiz olduğu anlamına gelmemektedir. Deneme öncesi deneysel desenlerin sıkça kullanılan üç çeşidinden söz edilebilir. Bunlar tek grup son test modeli, tek grup ön test/ son test modeli, karşılaştırmalı eşitlenmemiş gruplar son test modelidir (Metin, 2014, s. 56).

Bu çalışmada öğretim programında her sözsüz ispatın karşılığı olan formal ispatın olmaması ve herhangi iki grup arasında karşılaştırma yapmaktan ziyade öğrencilerin sözsüz ispatlarla ders işleme sürecinin sonunda, sözsüz ispatları anlama ve sözsüz ispat çözme süreçlerinde meydana gelen gelişimi ve değişimi incelemek esas alındığından tek grup ile çalışılmış ve 9. sınıf öğrencileri için tek grup ön test/son test modeli kullanılmıştır.

Bu modelde çalışmada bulunan tek bir deney grubuna uygulama öncesi bilgilerini ölçmek amacıyla ön test yapılmaktadır. Son test ise deneysel müdahale yapıldıktan sonra yine aynı gruba yapılmaktadır. Elde edilen veriler ön test ve son test sonuçları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark gösteriyorsa, farkın deneysel müdahaleden kaynaklandığı kabul edilmektedir (Tanrıöğen, 2009, s. 36).

Çoğu zaman bir öğretim programı yeniliği ya da yeni bir yöntemin değeri ile ilgili raporlar araştırmacının bir grup üzerindeki bağımlı değişkeni ölçtüğünü ortaya koymaktadır (Cohen, Manion ve Morrison, 2000, s. 212). Yeni bir eğitim modülünün geliştirilip uygulandığı araştırmaların doğası gereği tek gruplu deneysel desen tercih edilmektedir (Creswell, 2012, s. 310). Bu anlamda araştırmada etkisi araştırılan hususun sözsüz ispat becerisi olması sebebiyle ve deney sürecinde öğrenciler için hazırlanan öğretim ortamı ve öğretim materyalleri ile bu konuda eğitim alan grup ile almayan grup arasında farkın oluşmasının doğal bir sonuç olması sebebiyle kontrol grubun olduğu bir desen tercih edilmemiştir (Cohen vd., 2000, s. 213). Nitekim bu çalışmada amaç iki grubun deneysel müdahale sonucu karşılaştırılmasından ziyade tek gruptaki öğrencilerin deneysel müdahaleden önce ve sonra almış oldukları ön test ve son test puanlarını karşılaştırarak sözsüz ispatlara karşı yaklaşımları arasındaki farkı sayısal olarak ortaya koymaktır.

Nitel boyut.

Nicel yöntemlerin avantajlarının yanında dezavantajları mevcuttur. Bazı olgular nitel yöntemler kullanılarak daha iyi açıklanabilmektedir. Gerek bir problemin derinlemesine incelenmesinde, gerekse sürecin ayrıntılı biçimde betimlenmesinde nicel yöntemler yüzeysel kalırken; nitel yöntemler bilgi sağlama açısından daha üstündür (Muijs, 2004, s. 9).

Öğrencilerin sözsüz ispatları çözme sürecini derinlemesine incelemek ve gerek öğretmen gerekse öğrencilerin süreç hakkındaki görüşlerini alabilmek adına bu çalışmada nitel boyuta ağırlık verilmiştir.

Creswell (2013, s. 43) nitel araştırmaların görünüşte basit bir yaklaşım olarak görülmesine karşın kolaylıkla tespit edilecek bir tanımının olmadığını ve bu durumun da araştırmacıların nitel araştırmayla ilgili olarak yerleşik bir tanım geliştirme endişesiyle alakalı olduğunu ifade etmektedir. Genel bir ifade ile nitel araştırma yapı itibarıyla başkalarını dinleyerek onların yapmış oldukları açıklamaları yorumlayıp yeniden anlatabilmektir (Glesne, 2011/2013, s. 23).

Nitel araştırmada veriler, alan çalışmasında yani kendi ortamında elde edilmektedir. Araştırmacı etkinliklerin içinde bulunarak ilk elden gözlem yaparak verilerini elde etmektedir (Patton, 2002/2014, s. 4). Bu da araştırmacının gerek ortam gerekse katılımcılarla etkileşim içinde olması anlamına gelmektedir. Nitel araştırmacılar, nitel yaklaşımları farklı boyutlarıyla birbirinden ayıran çeşitli sınıflandırmalar yapmışlardır. Bu çalışmada nitel araştırmalarda çok yaygın bir model olan durum çalışması (case study) kullanılmıştır. Durum çalışmaları nitelikli araştırma yapmanın en yaygın yollarından biridir (Stake, 2005, s. 443).

Durum çalışmasına ilişkin alanyazında çeşitli tanımlamalar verilmektedir. Bu tanımlara yer verilerek bu çalışmanın neden durum çalışması olduğuna açıklık getirilmeye çalışılmıştır. Esasında bir çalışmanın durum çalışması olduğuna karar vermek çok kolay değildir. Buna karar verebilmek için durum çalışması tanımına ve durum çalışması çeşitlerine kısaca değinilmiştir.

Durum çalışmasını Creswell (2013/2013) “araştırmacının gerçek yaşam, güncel sınırlı bir durum ya da durumlar hakkında çoklu bilgi kaynaklarıyla (örneğin gözlemler, mülakatlar, görsel-işitsel materyaller ve doküman ve raporlar) detaylı ve derinlemesine bilgi topladığı bir durumun betimlenmesi ya da durum temalarının ortaya konduğu nitel yaklaşım olarak tanımlamaktadır (s. 97).” Kısacası durum çalışması sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesidir (Merriam, 2009/2013, s. 40). İki tanımdan da görüldüğü üzere durum çalışmasında bir durumun derinlemesine betimlenmesi söz konusudur.

Yin (2003, s. 13) ise durum çalışmasına ait iki farklı teknik tanım yapmaktadır. Bunlardan ilkinde göre durum çalışması, ampirik (deneysel) bir araştırma türüdür. Yani olgu ve içeriğin keskin sınırlarla ayrıştırılamadığı durumlarda, özel durumları incelemek için kullanılan yaklaşımdır. İkincisine göre ise; durum çalışması, kendi başına bir araştırma türüdür. Yani durum çalışması kendi içinde verilerin toplanmasından rapor edilmesine kadar

tüm basamakları içine alan bir araştırma yaklaşımıdır. Durum çalışmaları araştırma boyutlarına göre çeşitli şekillerde sınıflandırılmıştır. Araştırmanın amacına uygun olarak tasarlanan bu tür çalışmalar alanyazında farklı başlıklar altında ele alınmıştır (Güler, Halıcıoğlu ve Taşgın, 2013, s. 305).

Bu çalışmada Yin (1984)'in yapmış olduğu bütüncül tek durum çalışmaları, iç içe geçmiş tek durum çalışmaları, bütüncül çoklu durum çalışmaları ve iç içe geçmiş çoklu durum çalışmalarından, bütüncül tek durum çalışması ele alınmıştır. Bu durum çalışması çeşidinde incelenecek olan durum tek kişi ya da tek gruptur. Bir teorinin test edilmesinde, aşırı uç olarak nitelendirilebilecek olayların incelenmesinde ve orijinal vakaların incelenmesinde olmak üzere üç farklı biçimde uygulanabilir (Akt., Yıldırım ve Şimşek, 2013, s. 326).

Yapılmış olan bu çalışmada, var olan bir ispat modeline göre sözsüz ispatları çözen öğrencilerin bu modeldeki ispat sürecinin aşamalarını yaşayıp yaşamadığını incelemek esas alındığından ve incelenecek olan grubun aynı ortamda ve aynı durumda olması sebebiyle bu çalışmanın bütüncül tek durum çalışmaları içerisinde incelenebileceği söylenebilir.

Yin (2003) durum çalışmalarını amaçlarına göre, tanımlayıcı durum çalışması (*descriptive case study*), açıklayıcı durum çalışması (*explanatory case study*) ve araştırmacı durum çalışması (*exploratory case study*) olmak üzere üç türe ayırmaktadır. Tanımlayıcı durum çalışmasına göre; araştırmacı önceden belirlenmiş bir durum üzerine araştırma sorularıyla belli bir çerçeve doğrultusunda betimlemeler yapmaktadır. Diğer bir ifadeyle, bu çalışmalarda teoriye göre araştırma soruları seçilmektedir ve araştırmacı çalışma boyunca teorik çerçeveyi takip etmektedir (Güler vd., 2013, s. 309). Bu tez çalışmasında da öğrencilerin ispat sürecini inceleyen modelin teorik çerçevesi takip edilerek sözsüz ispat çözme süreçleri ele alınmıştır. Bu anlamda bu çalışmanın amacına göre, tanımlayıcı durum çalışması içerisinde ele alınması uygun görülmüştür.

Yin (2003)'e göre araştırmalar tek bir amaç için yapılabileceği gibi birden fazla amaç için de yapılabilmektedir. Yapılan bu tez çalışması var olan modelin yeni bir konuya uyarlanması açısından keşfedici durum çalışması içine de dahil edilebilir. Keşfedici durum çalışmaları henüz açıklığa kavuşturulamamış durumları açıklamak ve herhangi bir olguyu farklı bakış açılarıyla değerlendirmek için kullanılabilir. Bu tür çalışmalar daha sonra yapılacak araştırmalar için bir taslak niteliğindedir (s. 15).

Araştırma Grubu

Bu araştırma 2016-2017 eğitim-öğretim yılında, İç Anadolu Bölgesinin bir iline bağlı ilçesinde bulunan bir devlet okulunda yürütülmüştür. Araştırmanın çalışma grubunu 9. sınıfta

okuyan 25 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın 9. sınıflarla yürütülmesindeki sebep; konunun içeriğidir. İspat konusuna henüz giriş yapmakta olan öğrencilerin, alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlarla karşılaşmaları ve sezgisel yapılandırılmış örnekler formatında hazırlanmış sözsüz ispat etkinlikleriyle, ispata adım adım ulaşarak ispatın yapısına dair beceri edinmelerini sağlamak amacıyla 9. sınıflarla çalışılmıştır. Rastgele seçilen araştırma grubu okuldaki iki şubeden biridir. Gerekli yasal izinler İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden alınmıştır. Ayrıca öğrencilerin her birinin ailesinden çalışmaya katılabilmeleri için izin alınmıştır.

Örneklemenin en temel iki türü olasılıklı ve olasılıksız örneklemedir. Genelleme amacı olmayan çoğu nitel araştırmada olasılıksız örnekleme seçilen yöntemdir. Bu örnekleme yönteminin en yaygın biçimi olan, amaca yönelik örneklemede araştırmacının keşfetmek, anlamak ve iç gözü kazanmak istediği ve çok şeyi öğrenebileceği örneklem seçilmektedir (Merriam, 2009/2013, s. 76). Bu araştırmanın nitel boyutunda derinlemesine bilgi edinebilmek için; öğrencinin kendini ifade etme yeteneği, derse ilgisi ve dersteki etkinliklere katılımı, başarı puanları ve yazılı sınav notları dikkate alınarak, dört öğrenci bireysel görüşmeleri yapmak üzere çalışmaya dahil edilmiştir. Araştırma grubuna ait özellikler Tablo 2 ile verilmiştir.

Tablo 2. *Araştırmaya Katılan Öğrenci Sayısı*

	Katılımcılar (Nitel Boyut)	Katılımcılar (Nitel Boyut)
Kız	14	1
Erkek	11	3
Toplam	25	4

Tablo 3 ile araştırmanın nitel boyutundaki verileri elde etmek için amaçlı örnekleme yöntemine göre seçilmiş araştırma grubunun özellikleri verilmiştir. Araştırma grubundaki öğrencilerin kimlikleri gizli tutulmuş olup kullanılan isimler öğrencilerin gerçek isimleri değildir.

Tablo 3. *Araştırmaya Katılan Öğrencilere Ait Özellikler*

Katılımcılar (Nitel Boyut)	1. Yazılı Sınav Notu	2. Yazılı Sınav Notu	Okul Başarı Puanı
Yunus	85	98	87
Can	35	80	74
Mehtap	20	72	80
Ferit	15	60	79

Tablo 3 de görüldüğü üzere, okul başarı puanı ve yazılı sınav notlarına göre; Yunus sınıfın en başarılı öğrencisidir. Derse etkin katılım ve etkinliklerde sorulan sorulara cevap verme bakımından da başarılıdır. Bütün bunlar göz önüne alınarak araştırmanın nitel boyutu için Yunus çalışmaya dahil edilmiştir.

Can sınıftaki etkinliklere aktif katılmayıp çekimser durmasına rağmen, yapılan gözlemlerde etkinliklerde yer alan sorular için doğru tespitlerde bulunduğu fark edilmiştir. Yapılan ön test ve son testteki sorulara vermiş olduğu cevaplarla da dikkat çekmiş ve çalışmaya dahil edilmiştir.

Mehtap etkinliklerin başında ders ile ilgili olarak olumsuz duygularını dile getirmiş ancak birkaç etkinlik sonrasında gözle görülür biçimde etkinliklere aktif olarak katılmış ve dersten keyif aldığını dile getirmiştir. Ayrıca matematik dersini yapamadığını ve anlamadığını dile getirmesinin ardından etkinliklere ilgisi artmıştır. Yazılı puanında da gözle görülür bir iyileşme olduğu dikkati çekmiş ve çalışmaya dahil edilmiştir.

Ferit araştırma grubu içinde en düşük ortalamaya sahip öğrenci olmasına rağmen derslere katılımda ve etkinliklerdeki sorulara verilen cevapların niteliği iyi olarak görülmüş ve çalışmaya dahil edilmiştir.

Araştırmada, öğrencilerin sözsüz ispatları çözme ve anlama süreçleri incelenmek istendiğinden kendini ifade edebilen, ispat sürecine aktif olarak katılan ve çalışmaya katılmaya gönüllü olan öğrenciler araştırmanın nitel sürecine dahil edilmiştir. Araştırma grubundaki öğrencilerin matematik dersi notlarına bakıldığında bir öğrenci dışında diğerlerinin çok başarılı olduğu söylenemez. Ancak çalışmanın yapıldığı devlet okulu da ortalama bir başarıya sahip olup, çalışılan sınıftaki öğrencilerin de akademik başarı açısından vasat denilebilecek seviyede oldukları söylenebilir. Bu bağlamda, gerek okulun gerekse öğrencilerin başarılı olmama durumlarının ispatın sadece akademik başarı açısından iyi denilebilecek öğrenciler için değil bütün öğrenciler için öğretilebilecek bir konu olduğunu gösterebilmek adına önemli olduğu söylenebilir.

Araştırmacının rolü.

Çalışmada 2014-2015 eğitim- öğretim döneminde İç Anadolu Bölgesi'nde bulunan bir devlet üniversitesinde açılmış olan “Alan Eğitiminde Araştırma Projesi” dersi kapsamında bir dönem boyunca sözsüz ispat çalışmalarına katılmış matematik öğretmeni adaylarından Milli Eğitime atananlara ulaşılmıştır. Bunlar arasından bir kişi gönüllü olarak çalışmaya dahil edilmiştir. Böylelikle öğretmenin ders içerisinde yapılacak olan etkinliklerle ilgili yeterli donanıma sahip olduğu söylenebilir. Araştırmacı ve dersin öğretmeni pilot çalışmayı birlikte

yürütmüş olup asıl uygulama için yapılacak değişiklikler ve yeniliklere birlikte karar vermişlerdir.

Derslerin her birinde veri kaybına engel olmak adına kamera kullanılacağı, dersin öğretmeni ve okul müdürüne bildirilmiştir. Araştırmacı çalışmada bazı etkinliklerde yalnızca gözlemci olarak bulunurken; bazı etkinliklerde dersin öğretmeni ile birlikte etkinlikleri yürütmüştür. Dersin öğretmeni ve araştırmacının birlikte yürüttüğü derslerde öğrencilerin daha aktif olarak derse katıldığı gözlemlenmiştir. Bunun sebebinin, araştırmacının ispat sürecinin aşamaları hakkında daha fazla bilgiye sahip olmasından ötürü öğrencileri ispat sürecinde daha iyi yönlendirebilmesi; öğretmenin de sınıftaki öğrencilerin hangi konuda ne kadar bilgi sahibi olduklarını bildiğinden öğrencileri sorularla daha iyi yönlendirebilmesi olduğu düşünülmektedir.

Veri Toplama Araçları

Her bir yöntem ampirik (deneysel) gerçekliğin farklı bir yönünü açığa çıkaracağı için veri toplamanın çoklu yöntemlerle gerçekleştirilmesi araştırmaya yarar sağlayacaktır (Patton, 2002/2014, s. 556). Daha önce de belirtildiği üzere bu çalışmada karma araştırma yöntemi kullanılmış olup nitel ve nicel veriler elde edilmeye çalışılmıştır.

İspat beceri testi.

Çalışmanın nicel boyutunda, deneysel araştırma çeşitlerinden biri olan zayıf deneysel model kullanılmış olup; tek gruba ispat beceri testi ön test ve son test olarak yapılmış ve araştırmanın nicel verileri toplanmıştır. Öğrencilerin, sözsüz ispatı anlama ve çözme becerilerine ilişkin veri toplamayı amaçlayan veri toplama aracı, çalışmanın başında ve sonunda ön test ve son test olarak uygulanmış olup bu çalışma için araştırmacılar tarafından oluşturulmuştur. Bu veri toplama aracında toplam on tane açık uçlu soru yer almaktadır. Çalışmanın uygulama sürecinde geometri ve trigonometri ile ilgili sözsüz ispat etkinlikleri kullanılmasına rağmen, araştırmacı tarafından hazırlanan ve çalışmada ön test ve son test olarak kullanılan veri toplama aracında cebirsel, geometrik ve trigonometrik sözsüz ispatlara yer verilmiştir.

İspat beceri testinde yer alan 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10. sorular, 9. sınıf öğretim programı konularına uygun olması, 3, 5 ve 8. soruların ise 9. sınıf öğrencilerinin seviyelerine uygun olması sebebiyle, sözsüz ispatların yer aldığı çeşitli kaynaklardan seçilmiştir (Alsina ve Nelsen, 2006; Mudaly, 2013; Nelsen, 1993; Nelsen, 2000). İspat beceri testi Ek 2’de sunulmuştur. İspat beceri testinde kullanılan sözsüz ispatlar uygulama sürecindeki sınıf

etkinliklerinde kullanılan sözsüz ispatlardan farklı olacak şekilde seçilmiştir. Böylelikle öğrencilerin derste yapılmış sözsüz ispat etkinliklerini hatırlayarak son testte yer alan sözsüz ispatlara cevap vermelerinin önüne geçilmeye çalışılmıştır. Ön testin eğitim-öğretim döneminin başında son testin ise eğitim-öğretim döneminin sonunda uygulanmış olması sebebiyle iki test arasındaki zaman aralığının yeteri kadar uzun olduğu söylenebilir. Ayrıca ön test ve son testte kullanılan ölçme araçlarının farklı olmasının sonucu etkileyebileceği için aynı ölçme aracı kullanılmıştır (Merriam, 2009/2013, s. 175).

Bireysel sözsüz ispat etkinlikleri.

Davis (1993) sözsüz ispatların; sezgisel olarak görülebilen düzlem ve katı cisimler geometrisinin tüm sonuçlarını, geometrik veya görsel temele sahip yüksek matematik teoremlerini, pür veya uygulamalı matematik sonuçlarının grafiksel sunumlarını göstermek için kullanılabileceğini belirtmektedir. Öğrencilerin sözsüz ispat çözme sürecini incelemek için yapılan bireysel görüşme soruları, Davis (1993)'in tanımlamış olduğu sözsüz ispat özelliklerine göre seçilmiştir. Çalışmanın 1, 2, 3 ve 10. soruları görsel temele sahip yüksek matematik teoremlerine; 4, 5, 8, 11 ve 12. sorular düzlem ve katı cisimler geometrisine; 6, 7 ve 9. sorular da pür veya uygulamalı matematiğin grafiksel sunumlarına örnek teşkil eden sözsüz ispatlardır. Bireysel sözsüz ispat etkinlikleri Ek 3'te sunulmuştur.

Yarı yapılandırılmış görüşme formu.

Görüşme, nitel araştırmalar için önemli veri toplama araçlarından olup yapılandırılmış, yarı yapılandırılmış ve yapılandırılmamış görüşme olmak üzere üç çeşidi vardır. Bu araştırmada, çok fazla deneysel araştırmanın olmadığı sözsüz ispatlar konusunun sınıfta uygulanabilirliği hususunda gerek öğretmenin gerekse öğrencilerin görüşleri alınmıştır. Görüşme soruları yarı yapılandırılmış olup, araştırmacı; öğrencilerin ve öğretmenin vermiş olduğu cevaplara göre, soruların sorulma biçiminde veya farklı sorulara yer vermede esnek davranmıştır. “Nitekim *yarı yapılandırılmış görüşmede*; araştırmacı soruları önceden hazırlamaktadır, fakat bireyler, koşullar ve verilen cevaplara göre bazı esneklikler sağlanabilmektedir.” (Çepni, 2014, s. 172)

Öğrenciler ile yapılan görüşmedeki soruların boyutlarını; “derslerde sözsüz ispat etkinliklerine yer verilip verilmemesi, sözsüz ispat ile ilgili öğrencilerin zorlandığı noktalar, öğrencilerin etkinliklere dair olumlu ya da olumsuz bulduğu durumlar ve öğrenciye sözsüz ispat etkinlikleriyle ispat sürecinde rehberlik edilmesine dair görüşler” oluşturmaktadır.

Öğretmen ile yapılan görüşmedeki soruların boyutlarını; “ öğrencilerin ispat becerisi, sözsüz ispatların öğrencinin ispat becerisine katkısı, sözsüz ispat ile ilgili öğretmenin zorlandığı noktalar, öğretmenin sözsüz ispat etkinliklerine dair olumlu ya da olumsuz bulduğu durumlar, derslerde sözsüz ispat etkinliklerine yer verilip verilmemesi” oluşturmaktadır. Görüşme soruları Ek 4’te verilmiştir.

Video kayıtları ve yarı yapılandırılmış gözlem formu.

Olayların doğal ortamında nasıl vuku bulduğuna açıklık getirmede etkili olan veri toplama aracı; gözlemdir. *Gözlem* ile insanların ne yaptığını izleyerek, ne söylediğini dinleyerek olaylar daha iyi anlaşılmasına çalışılmaktadır. Gözlem; yapılandırılmış, yarı yapılandırılmış ve yapılandırılmamış gözlem olmak üzere üç grupta incelenmektedir. Yarı yapılandırılmış gözlemlerde ise biri yapılandırılmış diğeri yapılandırılmamış iki bölüm mevcuttur (Çepni, 2014, s. 179).

Bu çalışmanın asıl uygulamasında kullanılmak üzere, pilot çalışmada yapılan gözlemler, ispat ve sözsüz ispat alanyazını dikkate alınarak gözlem çizelgesi oluşturulmuştur (Bardelle, 2010; Bell, 2011; Gierdien, 2007; Hanna, 2000; Hanna ve Sidoli, 2007; Miller, 2012). Gözlem çizelgesi; ispat fonksiyonları, bilişsel beceriler, sosyal beceriler, öğretmenin rolü, olumsuz öğrenci tepkileri ve sınıfın fiziksel ortamı boyutları ele alınarak oluşturulmuştur. Oluşturulmuş olan bu gözlem formu, veriler toplanmadan önce dört uzman tarafından değerlendirilmiştir ve bazı alt boyutların anlaşılmasının güç olmasından; bazı alt boyutların da birbiriyle aynı anlama geldiğinin düşünülmesinden dolayı yeniden düzenlemeye gidilmiştir. Örneğin “öğrenciler sözsüz ispatlar sayesinde ilişki kurabilmektedirler” maddesi ile “öğrenciler birden çok konuyu bütünleştirebilmektedirler” maddesi tek bir maddede sunulmuştur. Buna ek olarak, “öğrenciler sözsüz ispatlarla görülmeyeni görebilme fırsatı bulabilmektedirler” maddesinin tam olarak anlaşılmasından ötürü; madde “öğrenciler sorunun içindeki gömülü matematiği keşfetmek için çizim, diyagram ve karalamalar yapmaktadırlar” olarak değiştirilmiştir.

Her etkinlikte araştırmacı katılımcı gözlemci olarak bulunmuş ve her bir etkinlik kamera ile kayıt altına alınmıştır ve sonrasında bu kayıtlar transkript edilerek veriler elde edilmiştir.

Verilerin Toplanması

Merriam (2009/2013, s. 15) nitel araştırmalarda, araştırmacının veri toplamada ve veri analizinde başrol olduğunu ve araştırmanın amacını anlamak için anında tepki verebilen ve

adapte olan kişinin veri toplama ve veri analizinde en ideal araç olduğunu belirtmektedir. Yani; araştırmacının kendisi, birincil veri toplama ve analiz aracıdır ve araştırmacının sürecin içinde bizzat kendisinin sorgulama stratejisini kullanması araştırmada betimleyici sonuçlar elde etmeye olanak sağlamaktadır. Bu çalışmada, araştırmacının bizzat kendisi veri toplamanın ve veri analizin tüm aşamalarında bulunmuştur.

Nitel araştırmacılar, başka araştırmacılar tarafından geliştirilen araçları veya ölçekleri kullanmaya eğilimli değildirler ve çoklu veri kaynaklarıyla verilerini toplamaya çalışırlar (Merriam, 2009/2013, s. 185). Bu çalışmanın nitel boyutunda durum çalışması modeli kullanılmış olup; bu modelde sıklıkla kullanılan görüşme, gözlem, her derse ait video kaydı, bireysel sözsüz ispat etkinliklerinde öğrencilerin yapmış oldukları çözümlerin yer aldığı kağıtlar, çoklu veri toplama araçları kullanılmıştır.

Sözsüz ispat süreci aşamalarını ortaya çıkarabilmek için, bir dönem boyunca yapılan etkinliklerin video kayıtları, gözlem notları ve uygulama sonrasında dört öğrenciyle yapılan bireysel sözsüz ispat etkinliklerinden nitel veriler elde edilmiştir. Bireysel sözsüz ispat etkinliklerinden sonra, öğrenciler ve öğretmen ile uygulama sürecindeki sözsüz ispat etkinlikleri hakkındaki düşünceleri, yaşadıkları süreç ve deneyimler hakkındaki görüşleri ve sözsüz ispatlarda zorlandıkları veya zorlanmadıkları noktalar, sürece dair olumlu ya da olumsuz düşünceleri ile ilgili olarak görüşme yapılmış olup; bu görüşmeler ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir.

Çalışmanın nicel verileri ise uygulamadan önce dönem başında ve uygulama sonrasında yapılan ispat beceri testi ile elde edilmiştir.

Uygulama Süreci

Araştırmanın uygulama süreci, pilot uygulama ve asıl uygulama olarak ele alınmış olup; araştırma sürecine dair ayrıntılara yer verilmiştir.

Pilot uygulama.

Araştırmanın asıl uygulamasında karşılaşılabilecek olumsuzlukları önceden görebilmek, ortaya çıkan sorunları giderebilmek ve veri toplama araçlarındaki eksiklikleri en aza indirebilmek adına asıl uygulamaya başlamadan önce pilot uygulama yapılmıştır. Araştırmanın pilot uygulaması, 2015-2016 eğitim-öğretim yılı ikinci döneminde asıl uygulamadaki gibi 9. sınıf öğrencileriyle yapılmıştır. Okulun mevcut iki şubesinden biri rastgele seçilmiş olup; şubede bulunan 29 öğrenci ile pilot çalışma yürütülmüştür. Pilot çalışmanın başında öğrencilere ispat beceri testi yapılmıştır. Sonrasında toplam yedi tane olan

etkinlik, öğretim programında konu sırası geldikçe uygulanmıştır. Asıl uygulamadakinden farklı olarak pilot uygulamada öğrencilerle bireysel olarak sözsüz ispat etkinlikleri yapılmamıştır. Ancak sürece dair görüş alabilmek adına; bireysel olarak yaşadıkları süreç, etkinlikler ile ilgili görüşleri alınmıştır. Pilot çalışmada uygulanan ispat beceri testi ile ilgili olarak araştırmacı bazı değişikliklere gitmiştir. Tablo 4 bu değişiklikleri göstermektedir.

Tablo 4. *İspat Beceri Testi Pilot Uygulama*

Soru	Pilot uygulamada ulaşılan sonuçlar	Asıl uygulamada yapılanlar
Üçgenin iç açıları toplamı	Öğrencilerin çoğu bu soruya cevap verememiştir. Öğrenciler bu ifadenin bir kural olduğunu ve ispatlanması gereken bir konu olarak düşünmediklerini ifade etmişlerdir. Öğrenciler örnek vererek ispatlamışlardır. Örneğin bir açısı 60 ise $3.60=180^\circ$ dir.	Bu soruya asıl uygulamada yer verilmemiştir.
Pisagor Teoremi	Verilen sözsüz ispat anlaşılmamıştır.	Uğurel ve diğerlerinin (2016) çalışmasında, aynı alanların aynı renklerde verilmesinin; öğrencinin Pisagor teoremini ve özdeşliklerin görsel modelini oluşturmada yardımcı olduğuna yönelik sonuç dikkate alınarak, asıl uygulamada şeklin orijinal halinden ziyade renklendirilmiş, ne yapıldığına dair ipuçları içeren ve daha anlaşılır basit düzeyde bir sözsüz ispat kullanılmıştır.
4-5 Yamuk-Paralelkenar alan bağıntısı	Paralelkenarın ve yamuğun alan bağıntısı ilköğretim kazanımlarında yer almasına rağmen bu soruya hiçbir öğrenci cevap verememiştir. Cevap veren öğrenciler sadece formülü sözel olarak açıklayabilmişlerdir.	Bu soruya asıl uygulamada yer verilmemiştir.
6 Kosinüs teoremi	Öğrenciler çemberde kuvvet özelliğinin kullanıldığı bu soruya dair herhangi bir şey yapamamışlardır.	Kosinüs teoreminin, Pisagor teoremi kullanılarak ispatlandığı sözsüz ispat kullanılmıştır.
7-8 Modelleme	Modelleme sorularına öğrencilerin aşıkardığı, öğrencilerin çoğunun modelleme sorularını yanıtlayabildikleri görülmüştür.	Bu sorular asıl uygulamada aynen kullanılmıştır.
9 Viviani teoremi	Öğrenciler, soruya evin üçgen şeklindeki adanın merkezine inşa edilmesi gerektiği yönünde cevap vermişlerdir. Viviani teoremini kullanamamışlardır.	Bu soru asıl uygulamada aynen kullanılmıştır.
10- Tamsayı toplam 11 formülü	Öğrenciler formüle ulaşamamışlardır. Ancak çeşitli yorumlar yapabilmışlerdir. Öğrencilerle derinlemesine görüşüldüğünde sonuca ulaşabilecekleri düşünülmüştür.	Bu sorulara asıl uygulamanın bireysel sözsüz ispat etkinlikleri kısmında yer verilmiştir.
12 Diziler-seriler	İfadenin ispatına dair öğrenciler herhangi bir şey yapamamışlardır. Bu nedenle sözsüz ispatın verilip öğrencinin ifadeye ulaşmasının istenmesinin yerinde olacağı düşünülmüştür.	Asıl uygulamada sözsüz ispat verilerek, öğrencinin sözsüz ispatı açıklaması istenmiştir.
13 Alan bağıntısı	Bu soru derste yapılmış etkinliklerde sözsüz ispat olarak verilmiştir. Öğrenciler, metinsel ifadeden sözsüz ispata geçiş yapamamışlardır.	Bu soruya asıl uygulamada yer verilmemiştir.

Asıl uygulamada pilot uygulamadan farklı olarak yeni etkinlikler kullanılmış olup; bazı etkinliklerde farklılıklara gidilmiştir. Pilot uygulamadaki etkinliklerde yapılan değişiklik ile ilgili açıklamalar Tablo 5’te verilmiştir.

Tablo 5. *Asıl Uygulama İçin Etkinliklerde Yapılan Değişiklikler*

Etkinlik adı	Pilot uygulama	Etkinlikte yapılan değişiklik
Üçgenin iç açılarının toplamı 180°	Bu etkinlikte, üçgenin iç açılar toplamının 180° olduğunun ispatı origami ile yapılmıştır. Öğrencilerin bu etkinliğe çok ilgi göstermeleri sebebi ile, diğer etkinliklerde öğrencilere manipüle edecekleri şekillerin verilerek etkinliklerin yapılmasına karar verilmiştir.	Etkinlikte yapı olarak herhangi bir değişikliğe gidilmemiştir.
Üçgen eşitsizliği		Etkinlikte herhangi bir değişikliğe gidilmemiştir.
Pisagor teoremi	Etkinlik pilot uygulamada çalışma kağıdı olarak verilmiştir. Ayrıca öğrencilerin yamuğun formülünü bilmediklerinin görülmesi sebebiyle formül öğrencilere öğretmen tarafından verilmiştir.	Asıl uygulamada üçgenler öğrencilere verilerek yamuk ve kare oluşturmaları istenmiştir.
Viviani teoremi	Dönme ve ötelemenin kullanıldığı sözsüz ispatlara yer verilmiştir. Etkinlikte öğrenci kısmen yönlendirilmiştir. Asıl uygulamada öğrencinin daha çok yönlendirilmesine karar verilmiştir.	Pilot uygulamada öğrencilerin etkinlikte çok zorlandığı görülmüştür ve bu nedenle her bir aşama ayrıntılı biçimde öğrencilere sorularak, öğrencilerin ispata ulaşmaları sağlanmıştır. Ayrıca asıl uygulamada yansımanın kullanıldığı sözsüz ispata da yer verilmiştir.
Öklid teoremi	Pilot uygulamada bu etkinliğe yer verilmemiştir.	
Sinüs teoremi		Etkinlikte herhangi bir değişikliğe gidilmemiştir.
Alan bağıntıları		Etkinlikte herhangi bir değişikliğe gidilmemiştir.
Kosinüs teoremi	Öğrenciler, çemberde kuvveti hatırlamadıkları için kullanamamışlardır. Bu konu ile ilgili olarak kuvvet konusunun lemma olarak verilmesi durumunda kosinüs teoreminin kolay takip edilebileceği ile ilgili alanyazına ulaşılmıştır (Doyle vd., 2014) ve asıl uygulamada bu bilgi öğrencilere verilmiştir.	Asıl uygulamada çemberde kuvvet ile ilgili bilgi öğrencilere hatırlatma olarak verilmiştir.

Asıl uygulama

Araştırmanın asıl uygulaması 2016-2017 eğitim-öğretim yılı ikinci döneminde bir devlet okulunun 9. sınıfında okuyan 25 öğrenci ile yürütülmüştür. Öğrencilere dönemin başında ispat beceri testi uygulanmıştır. Sonrasında öğrencilere bir dönem boyunca, 9. sınıf öğretim programının konularına uygun olarak sırası geldikçe sözsüz ispat etkinlikleri uygulanmıştır. Etkinlikler önceki bölümlerde ayrıntılı biçimde açıklanmış olan sezgisel yapılandırılmış örnekler formatında tasarlanmıştır. (Ek 7)

Uygulama süreci sekiz konu ile ilgili olarak toplam on altı etkinlikten oluşmaktadır. Etkinlikler bittikten yaklaşık bir hafta sonra tekrar ispat beceri testi uygulanmıştır. İspat beceri testi uygulandıktan sonra, toplam dört öğrenci ile bireysel görüşmeleri yapmak üzere tarih belirlenmiş ve görüşmenin yapılacağı sınıf ayarlanmıştır. Bireysel görüşmeler okulun içinde yer alan ve kullanılmayan bir sınıfta yapılmıştır.

Her gün iki öğrenci ile görüşülmüştür ve her bir öğrenci ile yapılan görüşme yaklaşık 90 dakika sürmüştür. Bu 90 dakikalık görüşmenin, 60 dakikasını, bireysel sözsüz ispat etkinlikleri oluştururken; geriye kalan 30 dakikasını, öğrencinin sözsüz ispat etkinlikleri hakkındaki düşünceleri, yaşadıkları süreç ve deneyimler hakkındaki görüşleri ve sözsüz ispatlarda zorlandıkları veya zorlanmadıkları noktalar, sürece dair olumlu ya da olumsuz düşüncelerine dair görüşleri oluşturmaktadır.

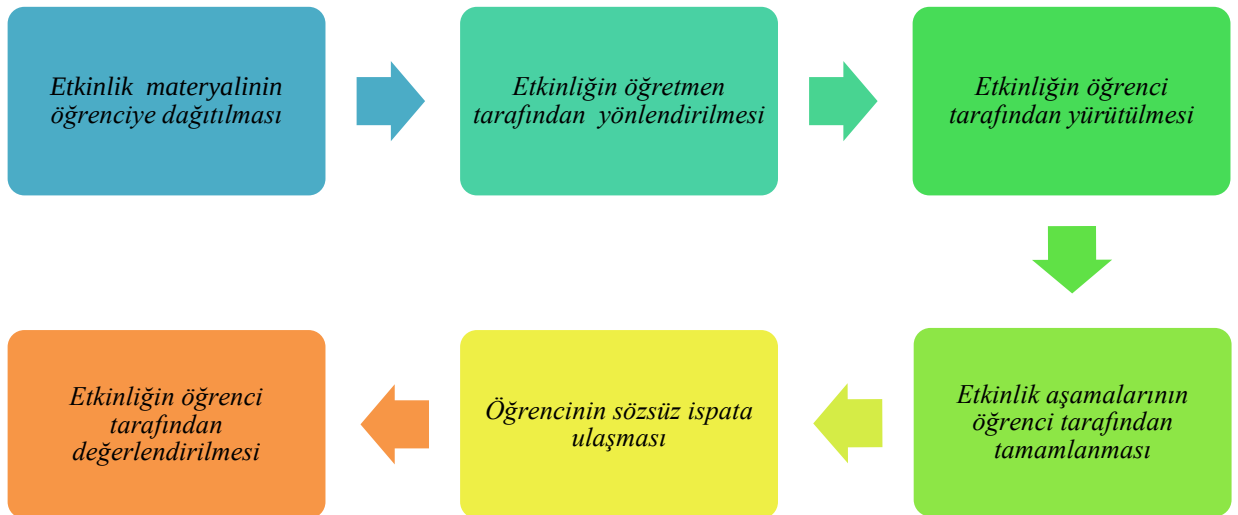
Uygulama, sözsüz ispat ile ilgili konunun öğretim programında sırasının gelmesine bağlı olduğu için uygulama dönem boyunca her hafta yapılamamış olup bazen bir haftada iki kez bazen de son etkinliğin uygulandığı tarihten birkaç hafta sonra yapılabilmektedir. Böylelikle araştırmacı her etkinlikten sonra çekilen videoyu transkript edebilmiş ve bir sonraki etkinlik için yapılacakları tekrardan gözden geçirme fırsatı bulabilmiştir. Her etkinliğin ardından, öğrenciden etkinlik hakkındaki görüşleri alınarak etkinlikler iyileştirilmeye çalışılmıştır. Örneğin; Kosinüs teoreminin yer aldığı sözsüz ispat etkinliğinde öğrencilerin özdeşliklerin formülünü bilmediklerini ve çok zorlandıklarını belirtmesi üzerine özdeşliklerle ilgili bilgiler öğrencilere hatırlatılmıştır. Benzer şekilde Pisagor teoreminin yer aldığı sözsüz ispat etkinliğinde öğrenciler yamuğun alan formülünde zorlandıklarını belirtmişlerdir. Bu durumlar ileriki etkinliklerde göz önünde bulundurulmuştur.

Uygulama sürecinin haftalara göre işlenen konuları ve bu konulara ait kazanımları Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6. *Uygulama Süreci*

Tarih	Etkinlik	Temel kazanımlar
14.02.17	Ön test	
21.02.17	Üçgende iç açılar toplamı	Bir üçgenin iç açılarının toplamının 180° dış açılarının toplamının 360° olduğunu gösterir.
02.03.17	Üçgen eşitsizliği	Uzunlukları verilen üç doğru parçasının hangi durumlarda üçgen oluşturduğunu belirler.
07.04.17	Pisagor teoremi	Dik üçgende Pisagor teoremini ispatlar ve uygulamalar yapar.
12.04.17	Öklid teoremi	Bir dik üçgende dik kenarlar, yükseklik ve yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalardan herhangi ikisinin uzunluğu verildiğinde diğerinin uzunluğu ile ilgili bağıntıyı kullanır.
28.04.17	Kosinüs teoremi	Üçgende Kosinüs teoremini ispatlar ve uygulamalar yapar.
02.05.17	Alan bağıntısı	Üçgenin alanını veren bağıntıları oluşturur ve uygulamalar yapar.
03.05.17	Viviani teoremi	Eşkenar üçgen içerisinde alınan bir noktadan kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı ile üçgenin yüksekliği arasındaki ilişkiyi keşfeder.
23.05.17	Sinüs teoremi	Üçgende sinüs teoremini ispatlar ve uygulamalar yapar.
25.05.17	Son test	
29.05.17	Bireysel görüşmeler	
30.05.17	Bireysel görüşmeler	
31.05.17	Bireysel görüşmeler	

Uygulama sürecinde 40 dakikalık bir dersin işleniş şeması Şekil 18’de sunulmuştur.



Şekil 18. Dersin işleniş şeması

Alan bağıntılarıyla ilgili sözsüz ispat etkinliğinin yer aldığı dersin işleniş, uygulama sürecindeki derslerin işlenişine örnek olarak sunulmuştur. Bu etkinlikte öğrencilere üçer tanesi eş olmak üzere, toplam altı tane üçgen verilmiştir ve öğrencilerden bu üçgenleri

kullanarak yeni bir üçgen ve sonrasında da bir dikdörtgen oluşturmaları istenmiştir. A, araştırmacıyı, Ö, dersin öğretmenini Ö1, Ö2... sınıftaki öğrencileri temsil etmektedir.

Öğrencilere çalışma kağıtları dağıtılmıştır. Verilen sözsüz ispatı incelemeleri istenmiştir.

A: Şekilde ne görüyorsunuz?

Ö1: : Üçgenin içinde bir sürü yükseklik geçmiş.

Ö2: Altı tane küçük üçgenlerden üçgen var. Yarıçap ve çember var.

A: O çemberin adı neydi?

Ö3: İç teğet çember

A: Evet; yarıçapı r olan iç teğet çember. Bir eşitlik var. Sonra dikdörtgen oluşmuş. Şimdi üçgenlerin hepsini kullanarak üçgen oluşturalım.



Şekil 19. Öğrencilerin verilen üçgenlerle yeni bir üçgen oluşturma

Öğrencilerden kimisi, bireysel olarak istenen üçgeni oluşturmaya çalışmış kimisi de arkadaşlarıyla birlikte üçgeni oluşturmaya çalışmışlardır. Öğrenciler üçgen oluşturmada zorlanmışlardır. Çoğu öğrenci verilen üçgenleri kullanarak yeni bir üçgen oluşturabilirken; bazı öğrenciler üçgen oluşturmamışlardır. Şekil 20’de bu duruma örnek verilmiştir:



Şekil 20. Öğrencilerin oluşturduğu üçgen örnekleri

Araştırmacı ve öğretmen sınıfta dolaşarak öğrencilerin üçgen oluşturma sürecine katılmışlardır. Öğrencilerin tamamı üçgeni oluşturduktan sonra, çalışma kağıdındaki diğer yönergeye geçilmiştir.

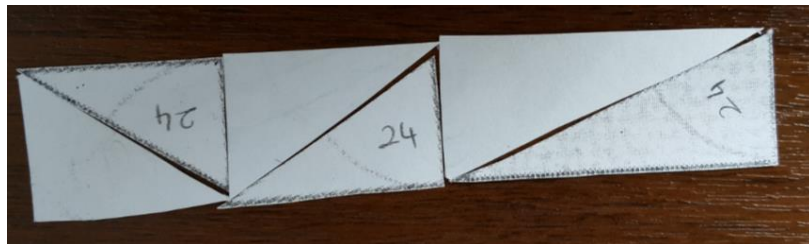


Şekil 21. Araştırmacı ve öğretmenin öğrencilerin yapmış oldukları şekilleri incelemesi

A: Şimdi bu üçgenlerin hepsiyle dikdörtgen oluşturun.

Ö4: Şimdi bunu yapmamızı isteyecek (etkinlik kağıdındaki dikdörtgeni kastediyor).

Öğrenciler bu şekli oluşturmada da zorlanmışlardır. Ancak şekli oluştururken keyif almışlardır. Sonuç olarak, öğrencilerin etkinlik süreci araştırmacı ve öğretmen tarafından incelenerek; bütün öğrenciler istenen şekli oluşturmaya kadar beklenmiştir.



Şekil 22. Öğrencilerin verilen üçgenlerle oluşturdukları dikdörtgen



Şekil 23. Araştırmacı ve öğretmenin öğrencileri yönlendirmesi

A: Oluşturmuş olduğunuz üçgen ve dikdörtgenin alanı hakkında ne söylersiniz?

Ö2: Eşitler. Aynı şekilleri kullandık çünkü.

Ö: Peki, oluşturduğunuz dikdörtgenin alanını söyleyiniz.

Ö2: $(x + y + z).r$

$$A = (x + y + z).r$$

Şekil 24. Öğrenci çalışma kağıtlarından bir örnek

Ö: Peki r dediğiniz nedir?

Ö2: Üçgenin yarıçapı.

Ö5: İç teğet çemberin yarıçapı.

A: Üçgenin alan formülü neydi?

Ö4: üçgenin alanı = $\frac{\text{üçgenin tabanı} \times \text{üçgenin yüksekliği}}{2}$

A: Şimdi yeni bir formül de bulduk. Neymiş bu formül? $x + y + z$ dediğimiz nedir?

Ö2: Kenarların toplamı

Ö: Peki, kenarların toplamı dediğiniz ne?

Ö2: Çevre

Ö: Bu üçgenin çevresi ne?

Öğrenciler: $2x+2y+2z$

Ö: Ama biz $x + y + z$ diyoruz. Bu ne?

Ö6: Çevrenin yarısı

A: Formülümüz nedir o zaman?

Öğrenciler: Çevrenin yarısı ile yarıçapın çarpımı

Ö: Evet arkadaşlar bu da başka bir alan formülü

Ö3: O zaman çevrenin yarısını biliyorsam alanı bulurum.

Ö: Sadece onu değil ayrıca iç teğet çemberin yarıçapını biliyorsan bulursun. Şimdi sizden bu etkinliği değerlendirmenizi istiyorum.

Ö7: Ben şekilleri birleştirirken zorlandım bir de farklı yoldan yazarken zorlandım. İlk defa gördüğüm formüller olduğu için sanırım.

Ö2: Yeni bir alan formülü bulduk ve bence eğlenceliydi.

Ö8: Bence kolaydı bu etkinlik. Hoşuma gitti.

Ö9: Bence çok zordu anlayamadım.

Ö10: Zorlandığım konular oldu alan formüllerini unutmuşum. Ama etkinliği sevdim kağıtları birleştirmek güzeldi.

Ö11: Evet hocam dikdörtgen falan yapmak da çok eğlenceliydi.

Ö12: Yeni alan formülü öğrendik bunlar işimize yarar sınavlarda falan.

Ö13: Hatırlamamız gereken yerleri önceki sınıflardan bilgilerimizi de hatırlamış olduk. Ayrıca da yeni şeyler öğrendik.

Ö14: Benim de değişik şekillerde alan formülü bulmak çok hoşuma gitti.

Alan bağıntıları ile ilgili sözsüz ispat etkinliğinde öğrencilere çalışma kağıtları ve çalışma kağıtlarında kullanacakları üçgenler dağıtılmıştır. Öğrencilere araştırmacı ve öğretmen tarafından çalışma kağıdında yer alan yönergeler söylenmiş ve öğrenciler bu yönergeleri uygulamışlardır. Öğrenciler bu süreçte ispat aşamalarından geçmişlerdir ve sözsüz ispata ulaşmışlardır. Etkinlik bittikten sonra etkinlik öğrenciler tarafından değerlendirilmiştir.

Verilerin Analizi

Yapılan bu çalışmada, karma yöntem kullanılması sebebiyle nitel ve nicel olmak üzere iki tür veri elde edilmiştir. Bu nedenle veri analizi, nitel veri analizi ve nicel veri analizi olmak üzere ayrı ayrı sunulmuştur.

Nicel verilerin analizi.

Bu araştırmada önceki bölümlerde bahsedildiği üzere zayıf deneysel model kullanılmıştır. Bu konu ile ilgili ayrıntılar, araştırmanın modeli başlığıyla ele alınmış olup bu bölümde, nicel verilerin analizi hakkındaki bilgilere yer verilmiştir. İstatistik ile ilgili kaynaklarda, parametrik ve parametrik olmayan (nonparametric) olmak üzere iki farklı istatistik çeşidi yer almaktadır.

“Parametrik testler ile örnek birim değerleriyle hesaplanan istatistiğin değeriyle, bu istatistiğin bilgi ürettiği anakütle parametresinin önceden bilinen değeri arasındaki farklılığın, istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı belirlenmeye çalışılmaktadır.” (Kalaycı, 2010, s.73) Parametrik testlerde karşılanması gereken varsayımlar; verilerin aralıklı olması, normal dağılıma sahip olması ve birden fazla grup varsa grupların varyanslarının eşit olmasıdır (Can, 2014, s.81). Normalliği değerlendirmenin grafiksel ve istatistiksel yolları vardır. Grafiksel yollardan Q-Q grafiği yaygın olarak kullanılmaktadır. İstatistiksel yollardan ise basıklık ve çarpıklık katsayılarına göre normallik değerlendirilmektedir (Çokluk, Şekercioğlu ve Büyüköztürk, 2012, s.16). Yapılan analizler sonucu verilerin normal dağılım göstermediği görülmüştür. Normal dağılım göstermeyen veriler, veri dönüştürme işlemleriyle yeniden düzenlenerek işleme sokulabilirler (Büyüköztürk, 2011; Can, 2014; Çokluk vd., 2012). Veri dönüştürmede uygulanacak yöntem, orijinal verinin dağılım şekline göre değişmektedir. Veri dağılımında pozitif çarpıklık varsa karekök; aşırı pozitif çarpıklık varsa logaritmik dönüşüm yapılması uygundur. Negatif dağılımlarda ise negatif dağılım, pozitif dağılıma çevrildikten sonra uygun olan iki dönüşümden biri uygulanabilir (Büyüköztürk, 2011, s. 43). Bu çalışmada veri setinin aşırı pozitif çarpık olduğu görülmüş ve logaritmik dönüşüm uygulandıktan sonra, yeni veri setinin istatistiksel yollardan olan basıklık ve çarpıklık değerlerine ve grafiksel yollardan Q-Q grafiğine bakılarak normal dağılıma sahip olduğu görülmüştür. Grup sayısı, grupların birbiri ile ilişkisi ve karşıladığı varsayımlara göre kullanılacak testler değişmektedir. Bu çalışmada tek örneklem grubu olduğu için ve parametrik testlerin varsayımları karşılandığı için bağımlı örneklem t testi kullanılarak analiz yapılmıştır. Bağımlı örneklem t testinde aynı örneklem grubu üzerinde analizler yapılarak; aynı grubun farklı zaman dilimlerindeki başarılarını ölçmekteyiz (Kalaycı, 2010, s.77).

Araştırma sürecinde nicel verilerin analizi SPSS 17.00 paket programı aracılığıyla yapılmıştır. Veriler araştırmacı tarafından hazırlanan toplam on tane açık uçlu sorunun olduğu ispat beceri testi ile sağlanmıştır.

Çalışmanın nicel verilerini elde etmek için kullanılan sorular açık uçlu olup, öğrencilerin kullanılan ispat modelinin aşamalarını geçirip geçirmemelerine göre araştırmacılar tarafından puanlama cetveli oluşturulmuştur. Tablo 7’da Heinze ve Reiss (2004)’in modelinin ispat aşamalarına uygun olarak oluşturulmuş puanlama cetveli yer almaktadır. Bu puanlama cetveli iki ayrı uzman tarafından birlikte oluşturulmuştur. Ayrıca başka bir uzman tarafından puanlama cetveli ayrıca oluşturulduktan sonra her iki puanlamanın birbiriyle benzer olduğu görülmüştür. Bu puanlama cetveli Ek 5’de sunulmuştur. Sorularda modelin birinci aşaması olan “şeklin incelenmesi” aşamasında ve beşinci aşaması olan “sonuca ulaşabilme” aşamasında davranışın kısmen gözlenmesi durumu olduğu için “davranış gözlemlenmiştir, davranış kısmen gözlemlenmiştir ve davranış gözlemlenmemiştir” olmak üzere üç durum söz konusu olmuştur. Diğer aşamalar için ise “davranış gözlemlenmiştir ve davranış gözlemlenmemiştir” olmak üzere iki durum bulunmaktadır.

Ayrıca ispat beceri testinde yer alan 4. Soru, öğrencilerin Viviani teoremini kullanmasını gerektiren bir sorudur. Bu nedenle bu soruda öğrencinin ispat aşamalarından geçmesi beklenmemektedir. Dolayısıyla öğrencinin Viviani teoremini kullanarak soruya doğru biçimde cevap vermesi durumunda tam puan alabilmektedir. 8. soru diziler ve serilerin limiti ile ilgili bir sorudur ve öğrenciden şekli doğru biçimde açıklayıp, yapılanları fark etmesi ve bulunan sonuç için genelleme yapabilmesi beklenmektedir. Bu nedenle sonuca ulaşabilme aşaması, genelleme yapabilme olarak belirtilmiştir. Thales teoreminin sözsüz ispatının yer aldığı 10. Soruda, araştırmacı modelin aşamalarını vermiştir. Pilot uygulama sonucunda öğrencilerin özetleme aşamasına dair hiçbir şey yapamadıkları görülmüş ve asıl uygulamada bu aşamaya dair bir cevap istenmemiştir.

Tablo 7. İspat Beceri Testi Puanlama Cetveli

Soru	Gözlenen Davranış	Davranış Gözlendi ise	Davranış kısmen gözlendi ise	Davranış gözlemlenmedi
1.soru	Şekil ile ilgili açıklamayı doğru biçimde yapma	2	1	0
	Pisagor teoremini fark etme	2	0	
	Alan kavramına yönelme	2	0	
	Sonuca ulaşabilme	4	2	0
2.soru	Köşe açısını doğru biçimde belirleme	2	0	
	İstenen varsayımı ifade etme	2	0	
	Açılarla ilgili özellikleri kullanabilme	2	0	
	Sonuca ulaşabilme	4	2	0
3.soru	Model kavramını doğru anlama(geometrik şekilleri kullanacağını düşünme)	2	0	
	Modelleri kullanarak varsayımın ifade edilmesi	2	0	
	Şekilleri öteleme	2	0	
	Modellemeyi tamamlama	4	2	0
4.soru	Viviani teoremini kullanarak soruyu doğru biçimde yanıtlama	10	0	
5.soru	Dikdörtgenlerin eşliğini ve kareleri fark etme	2	0	
	a ve b uzunluklarını şekle doğru biçimde yerleştirme	2	0	
	Büyük karenin alanının $(a+b)^2$, her bir karenin alanının sırasıyla a^2 ve b^2 olduğunu fark etme	2	0	
	Sonuca ulaşabilme	4	2	0
6.soru	$15^\circ 75^\circ 90^\circ$ üçgenini belirleme	2	0	
	$A=\frac{1}{8}c^2$ varsayımını ifade etme	2	0	
	Alanlar arasındaki ilişkiyi fark etme	2	0	
	Sonuca ulaşabilme	4	2	0
7.Soru	Şekli doğru biçimde açıklama	2	0	
	Kosinüs teoremini fark etme	2	0	
	Pisagor teoremini uygulama	2	0	
	Sonuca ulaşabilme	4	2	0
8.Soru	Şekli doğru biçimde açıklama	2	0	
	Karelerin alanları ile ilgili varsayımı fark etme	2	0	
	Toplamının bütüne oranı ile ilgili varsayımı fark etme	2	0	
	Genelleme yapabilme	4	2	0
9.Soru	Şekli doğru biçimde açıklama	2	0	
	Şekillerin karenin içine taşındığını ve alanlar arasındaki ilişkiyi fark etme	2	0	
	Karelerin kenarlarını harflendirme	2	0	
	Sonuca ulaşabilme	4	2	0
10.soru	Şekli doğru biçimde açıklama	2	0	
	Thales teoremini fark etme	2	0	
	Alan kavramını fark etme	2	0	
	Sonuca ulaşabilme	4	2	0

Nitel verilerin analizi.

Bu çalışmada, önceki bölümlerde bahsedildiği üzere nitel çalışmalarda çok yaygın bir model olan durum çalışması (case study) kullanılmıştır. Durum çalışmasında analiz, durumun ve ortamın detaylı betimlemesini yapmaya bağlıdır (Creswell, 2013/2013, s. 199). Bu konu ile ilgili ayrıntılar araştırmanın modeli başlığıyla ele alınmış olup, bu bölümde nitel verilerin analizi hakkındaki bilgilere yer verilmiştir. Araştırmada nitel veriler, ders sürecinde

yapılan gözlemler, video kayıtları ve uygulama bittikten sonra öğrencilerin sözsüz ispatları çözme sürecini incelemek ve ders süreci hakkındaki görüşlerini almak amacıyla yapılan bireysel görüşmelerle elde edilmiştir. Görüşme ve video kayıtları ayrı ayrı metin belgeleri haline getirilerek araştırmanın nitel veri seti elde edilmiştir. Yapılandırılmış gözlem formları ise her ders için doldurularak puanlaması yapılmıştır.

Nitel analiz, verileri bulgulara çevirme işlemidir. Başka bir deyişle verinin anlamını dışarı aktarma sürecidir ve bu işlemin herhangi bir formülü yoktur (Patton, 2002/2014, s. 432; Merriam, 2009/2013, s. 167). Nitel veri analiz süreci farklı araştırmacılar tarafından farklı şekilde ve farklı isimlerle sınıflandırılmaktadır. Bu çalışmada Strauss ve Corbin (1990)'in önermiş olduğu betimsel analiz ve içerik analiz süreçleri temel alınarak veri analizi gerçekleştirilmiştir.

Betimsel analiz tekniği, içerik analiz tekniğine kıyasla daha yüzeysel olup; olguları derinlemesine incelemek için içerik analiz tekniği kullanılmaktadır. İçerik analiz tekniğinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Betimsel analiz tekniğiyle özetlenen veriler, içerik analiz tekniği ile daha derin bir işleme tabi tutularak; betimsel yaklaşımla fark edilmeyen kavram ve temalara ulaşmaya çalışılmaktadır (Çepni, 2014, s. 184). Merriam (2009/2013, s. 195) ise bütün nitel veri analizlerinin içerik analizi olduğunu; çünkü bu aşamadaki görüşmelerin, alan notlarının, belgelerin içeriğinin analiz edilmesi olduğunu ifade etmektedir. Esasında bu çalışmanın verilerinin analizinde kullanılacak olan çerçeve daha önceden öğrencilerin ispat süreci için hazırlanmış Boero modelinden uyarlanmış bir çerçevedir. Bu çalışmada bu çerçeve öğrencilerin sözsüz ispat çözme süreçlerine uyarlanmış olup içerik analiziyle yeni kategorilere ve süreçteki farklılıklara ulaşmaya çalışılmıştır.

Uygulama sürecinde kamera ile kayıt altına alınan derslerin metin haline getirilmiş şekli, farklı uzmanlar tarafından incelenerek sözsüz ispat süreci ortaya konulmaya çalışılmıştır. Sürecin temel aşamaları modelle ortaya konulmuş olduğundan, veriler; sözsüz ispat sürecinde bu aşamaların hangisinin gerçekleştiğine, hangisinin gerçekleşmediğine ya da hangi farklı aşamaların gerçekleştiğine yönelik sonuç elde edebilmek üzere analiz edilmiştir. Aşağıda uygulama sürecinin derslerinden birinin, bahsedilen modele göre analizi verilmiştir.

Tablo 8. *Veri Analizi İçin Kullanılan Modele Ait Kodlar*

Boero modeli	Heinze ve Reiss'in modeli
- Varsayım üretme ➤ Problem durumunun açıklanması ➤ Kurala uygunluğun hangi şartlarda olduğunun tespiti ➤ Üretilen varsayımın akla yatkınlığı ➤ Gerekli argümanların tespiti	- Problem durumunun açıklanması ➤ Varsayıma destek çıkacak iddiaların tanımlanması ➤ Çizimlerin araştırılması
Metinsel paylaşımlara göre önermenin ifadesi	Metinsel paylaşımlara göre varsayımın ifade edilmesi
- Varsayımın esaslarının araştırılması ➤ Hipotez ve tez arasındaki bağlantılar hakkındaki sezgisel ve anlamsal detaylar ➤ Uygun argümanların belirlenmesi ve aralarındaki olası bağlantıların önceden düşünülmesi	- Varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi ve olası ispat stratejilerinin kabataslak planlanması ➤ Varsayıma referans ➤ Varsayımın araştırılması ➤ Daha fazla bilgi toplama ➤ İspat fikri oluşturma
Tümdengelsel zincir içinde teorik argümanların seçimi ve tutarlı biçimde birbirine bağlanması	- Bir önceki evrenin unsurlarının kombinasyonu ➤ Tümdengelsel zincir içinde varsayımların kombinasyonu
- Geçerli matematiksel standartlara göre kabul edilmiş argümanları ispata bağlama ➤ Yayımlar için ispatı yazılı metin haline getirme	Süreç hakkında geçmişe dönük genel değerlendirme
Formal ispata yaklaşma	Bu aşama tüm matematik derslerinde oluşmaz.

Burada Ö dersin öğretmenini ve A araştırmacıyı, Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 derse katılan öğrencileri temsil etmektedir. Koyu yazılmış kısımlar öğrencinin modele uygun olarak geçirmiş olduğu aşamaları temsil etmektedir. Analizde doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

A: *Burada toplam üç satırdan oluşan bir şekil görüyorsunuz. Her zaman yaptığımız gibi inceleyin ve ne gördüğünüzü bana söyleyin.*

Ö1: *Burada bir tane dik üçgen var ya CDB ye eşitmiş. Bu üçgenler aynı üçgenler. (şeklin incelenmesi)*

A: *Güzel. Burada üçgenlerin eşliğini gördün.*

Ö2: *Burada CDB üçgenini kesip çıkarmış. Sonra diğerinin yüksekliği ile birleştirmiş. Dışta kalan tarafı da onun köşesiyle birleştirmiş. Sonrası zor. Tamam, CAE üçgeninin yüksekliğini bulmuş.*

A: *Yüksekliği ne yapmış burada?*

Ö2: *Çevirmiş. (şeklin incelenmesi)*

Ö: *Çevirmiş mi? Taşımış mı?*

Ö2: *Evet taşımış. Sonra kesik parçayı almış. Birbirine eşitlemiş. (şeklin açıklanması)*

A: Neyi eşitlemiş?

Ö2: $CD^2 = AD \cdot DB$ (metinsel ifadenin incelenmesi)

Ö1: Bu üçgenlerle yamuk oluşturmuşlar. İkisinin çarpımı alanı sanırım. (şeklin açıklanması)

A: Başka neler söyleyebilirsiniz?

Ö2: Burada Öklid bağıntısı var. (varsayımı fark etme)

A: Aferin bunu fark etmen güzel.

Ö: DAC, DCB, DEF açılarını tartışalım

Öğrenciler açıların hangisi olduğunu tespit ettiler.

Ö2: Eşittir. Aynı üçgenler kullanılmıştı çünkü. (varsayımı gösterebilmek için uygun iddiaların belirlenmesi)

Ö: Güzel. Peki CA ve EF doğrularının birbirine göre durumu hakkında ne söylersiniz?

Ö3: Z kuralı var (varsayımı gösterebilmek için uygun iddiaların belirlenmesi)

A: Güzel. Şeklin ikinci kısmına bakalım: dediniz ki yüksekliği taşımış. Sizce taşıma hakkı var mı?

Ö4: Hocam z kuralı var ya.

A: z kuralı yüksekliği taşımamı nasıl sağlar?

Ö4: Bilmem.

Ö: Ben iki paralel doğru arasındaki dik doğruyu başka noktalara taşıyabilir miyim?

Ö2: Evet taşırız. Fark etmez ki. (varsayımı gösterebilmek için uygun iddiaların belirlenmesi)

A: ACE ve ACF üçgenlerinin alanları hakkında ne söylersiniz? Üçgenin formülünü düşünün ve inceleyin.

Ö2: Yükseklikler ortak. Kenar da aynı. O zaman bu üçgenlerin alanları eşittir. (varsayımı gösterebilmek için uygun iddiaların belirlenmesi)

A: CDE ve ADF üçgenlerinin alanlarını tartışınız.

Ö1: Onlar da mı eşit olur?

A: Neden?

Ö1: *ACD üçgeni ikisinde de var. (varsayımı gösterebilmek için uygun iddiaların belirlenmesi)*

A: Yani?

Ö1: *Büyük üçgenlerin alanı eşit. Aynı üçgenden var. O zaman diğer üçgen de eşit olur. (varsayımı gösterebilmek için uygun iddiaların belirlenmesi)*

A: Aferin sana. *DE ve CD kenarları ve DF ve DB kenarları arasındaki ilişkiyi açıklar mısınız?*

Ö1: *Eşit mi?*

A: Neden?

Ö5: *O üçgeni döndürdüğümüz için aynı kenar oldu. (varsayımı gösterebilmek için uygun iddiaların belirlenmesi)*

Ö: *Şimdi bu bulduğunuz eşitlikleri alan formülüyle bulduğunuz eşitlikte yazınız.*

Öğrenciler bu aşamayı da yaptılar. Öklid bağıntısının eşitliğini yazdılar. (**Gerekli işlemin yapılması**) Öğrencilerden bulmuş oldukları eşitliği tartışmaları istendi.

Ö1: *Şeklin en başındaki eşitliği verdi. (Yapılanların özetlenmesi)*

A: *Üçgenimiz nasıl bir üçgen?*

Öğrenciler: *Dik üçgen. (Yapılanların özetlenmesi)*

A: *CD dediğim ne?*

Öğrenciler: *Yükseklik (Yapılanların özetlenmesi)*

A: *Burada bir özellik var. Bunu sözel olarak ifade etmenizi istiyorum.*

Ö1: *CD nin karesi AD ile BD nin çarpımına eşit. (Yapılanların özetlenmesi)*

A: Yani?

Ö2: *Yüksekliğin böldüğü parçalar derim. (Yapılanların özetlenmesi)*

A: *Daha açık ifade eder misin?*

Ö2: *Yüksekliğin karesi böldüğü parçaların çarpımına eşittir. (Yapılanların özetlenmesi)*

Öğrenciler şekli doğru biçimde açıklayabilmişler (**Şeklin incelenmesi**) ve şekille beraber metinsel ifadeye yönelmişler ve bu sayede Öklid bağıntısı varsayımını fark etmişlerdir (**Varsayımı fark etme**). Ayrıca öğrenciler yüksekliğin taşınma sebebini, alanların

eşitliğini ve kenarlarının eşitliğini fark etmişlerdir. Öğrencilerin kenarların birbirine paralel olduğunu gerekçelendirmeleri istendiğinde, açılarının eşitliğinden ve z kuralından gerekçelerini sunmuşlardır (*Varsayımın doğrulanması için iddiaların belirlenmesi*). Daha önce öğrenmiş oldukları alan formülünü kolaylıkla uygulamışlar (*Gerekli işlemlerin yapılması*) ve son olarak yapılanları bütüncül olarak özetleyebilmişlerdir (*Yapılanların özetlenmesi*).

Çalışmada kullanılan modele uygun olarak belirlenen aşamalar “*şeklin incelenmesi, varsayımın açık ve net şekilde ifade edilmesi, varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi, gerekli işlemlerin yapılması ve yapılanların özetlenmesi*” olarak ifade edilmiştir. Her bir aşamaya ait alt aşamalar mevcut olup bu aşamalar sırasıyla birinci aşama, ikinci aşama, üçüncü aşama, dördüncü aşama ve beşinci aşama olarak belirtilmiştir.

Birinci aşamanın alt aşamaları; “*şeklin doğru biçimde açıklanması, şekil ve metinsel paylaşımların beraber açıklanması ve metinsel paylaşıma odaklanma ve şekle dair yeterli olmayan açıklama*” olarak, ikinci aşamanın alt aşamaları; “*varsayımı fark etme, varsayımı fark etmeme*” olarak, üçüncü aşamanın alt aşaması; “*yapılanları gerekçelendirme*” olarak, dördüncü aşamanın alt aşaması; “*işlemi tamamlama, işlemi eksik yapma ve işlemi tamamlamayama*” olarak, beşinci aşamanın alt aşamaları ise “*hangi teoremin niçin doğru olduğunu anlama, şekil ve metinsel paylaşımların bütüncül olarak açıklanması*” olarak belirlenmiştir.

Uygulama sürecinin bahsedilen modele göre analizi sonucu ortaya çıkan aşamalar Şekil 25 ile verilmiştir.



Şekil 25. Sözsüz ispat süreci aşamaları

Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Diğer araştırma çeşitlerinde olduğu gibi karma araştırmalarda da geçerlik ve güvenirlilik temel ve en önemli hususlardandır (Creswell ve Clark, 2011/2014, s. 252). Dolayısıyla her araştırmacıdan, kullanılan veri toplama araçlarının ve araştırma deseninin geçerlik ve güvenirliliğini test etme konusunda titiz ve dikkatli olması beklenmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013, s. 289). Nitel ve nicel aşamaların yer aldığı karma yöntem araştırmalarında, her iki aşama için yapılacak geçerlik ve güvenirlilik kontrollerine yer vermek gerekmektedir.

Karma araştırmalarda geçerlik; verilerin toplanması, analiz edilmesi, araştırmacının nicel ve nitel aşamaları birleştirmesi ile varılan yorumlar ve çıkan sonuçlardaki hususları tanımlayan stratejileri kullanmadır (Creswell ve Clark, 2011/2014, s. 252). Karma araştırmalar için çeşitli geçerlik türleri tanımlanmıştır. Bunlar; iç-dış geçerlik, paradigmatik geçerlik, eş ölçülebilir karma geçerlik, zayıf yönleri azaltma geçerliği, sıralı geçerlik, dönüşüm geçerliği, örneklem birleştirme geçerliği, politik geçerliktir. Örnek birleştirme geçerliği, nitel ve nicel örneklem arasındaki ilişkiden nitelikli çıkarımlar elde etme anlamına gelmektedir. Örneğin araştırmanın nicel bölümü için örneklem kısmen büyük ve rastgele seçilmiş olabilir. Ancak meseleleri daha derinlemesine incelemek için küçük bir örneklemle

çalışılmış olabilir (Johnson ve Christensen, 2012/2014, s. 273). Bu çalışmada da, nicel bölüm için örneklem kısmen büyük ve rastgele iken, süreci daha derinlemesine inceleyebilmek için nitel kısımda öğrencinin kendini ifade etme yeteneği, derse ilgisi ve dersteki etkinliklere katılımı, başarı puanları ve yazılı sınav notları dikkate alınarak dört öğrenciyle bireysel sözsüz ispat etkinlikleri ve görüşmeler yapılarak, örneklem birleştirme geçerliği sağlanmaya çalışılmıştır.

Karma araştırmanın, açıklayıcı sıralı deseninde nitel ve nicel veri tabanları ayrı ayrı incelenmektedir. Nicel bulgularla nitel bulguların takibi planlanarak; katılımcılara yöneltilecek genel ve açık uçlu olan nitel sorular oluşturulmaktadır ve her aşamada analiz işlemleri birbirinden bağımsız olmaktadır (Creswell, 2014/2016, s. 224). Bu çalışmada da karma yöntemin açıklayıcı desenine göre analiz işlemleri nitel ve nicel aşamalar olmak üzere yapılmıştır ve birbirinden bağımsız olan bu aşamaların geçerlik ve güvenilirliği ayrı ayrı incelenmiştir.

Patton (2002/2014, s. 542) kaliteyi yargılamanın ölçüt gerektirdiğini ve verilen yargının kaliteli olmasının da ölçütlere bağlı olduğunu ifade etmektedir. Nitel araştırmalarda en önemli eleştirilerden birisi, güvenilirlik konusunun nicel araştırmalardaki gibi tanımlarının ve yöntemlerinin olmayışıdır. Ancak doğası gereği nitel ve nicel araştırmaların farklı olması geçerlik ve güvenilirliğe karşı alınan önlemleri birbirinden farklı kılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013, s. 289). Bu farklılık kavramlara verilen isimlerde bile değişikliğe neden olmuştur. Örneğin nitel araştırmada kullanılan inanılabilirlik, nakledilebilirlik, güvenilirlik ve doğrulanabilirlik kavramları, nicel araştırmalarda kullanılan iç geçerlik, dış geçerlik, güvenilirlik ve nesnellik kavramları yerine kullanılmıştır (Merriam, 2009/2013, s. 201).

Nitel bir araştırmanın yapısı gereği geçerlik ve güvenilirliğini değerlendirmek için çok net ölçütler geliştirmek çok olasılıklı görülmesine de, nitel araştırmalarda da geçerlik ve güvenilirliği sağlamak için kullanılabilecek stratejiler bulunmaktadır (Merriam, 2009/2013, s. 202). Geçerlik ve güvenilirlik nitel araştırmalarda iç içe geçmiş durumdadır. Özellikle üçgenleme (çeşitleme) gibi bazı kavramlar hem geçerlikte hem güvenilirlikte öne çıkmaktadır (Çepni, 2014, s. 237). Ayrıca insan davranışlarının durağan olmamasından dolayı nitel araştırmaların tekrarlanması ile aynı sonuca ulaşılamayabilir. Bu nedenle nitel araştırmalarda ulaşılan sonuçların verilerle tutarlılığına bakılmaktadır. Bu yüzden nitel araştırmalarda güvenilirlik kavramı, güvenilirlik ve tutarlılık olarak ele alınmaktadır (Merriam, 2009/2013, s. 212). Bütün bunlar göz önünde bulundurularak Tablo 9'de çalışmanın nitel boyutunun güvenilirlik ve geçerliği ayrı ayrı verilmesinden ziyade güvenilirlik ve geçerliği sağlamak için kullanılan stratejilere birlikte yer verilmiştir.

Tablo 9. Çalışmanın Nitel Boyutunun Güvenirlik ve Geçerlik Stratejileri

Geçerlik- Güvenirlik	Kullanılan strateji	Açıklama
	Zengin, yoğun betimleme	Çalışmaya dair pek çok ayrıntı betimlenerek, okuyucuya aktarılmaya çalışılmıştır. Araştırmacı; ortamı ve katılımcıları ayrıntılı biçimde tanımlamış ve katılımcı görüşmelerinden, araştırma dokümanlarından doğrudan alıntılara yer vermiştir.
	Üçgenleme	Araştırmada çoklu veri kaynaklarından ve yöntemlerinden faydalanılmıştır (yöntem üçgenlemesi). Veri sunumlarında grafikler, tablolar, istatistiksel işlemler ve nitel çözümlemelerden faydalanılmıştır (analiz üçgenlemesi). Farklı araştırmacılar tarafından analizler yapılmış olup fikir birliğine varılan noktalar sonuç olarak sunulmuştur (araştırmacı üçgenlemesi)
	Araştırmacının ön yargılarını açıklaması	Araştırmacı kendi kabullerini ve varsayımlarını açıklamaya özen göstermiştir.
	Uzman incelemesi	Gerek tez izleme komitesi gerekse araştırmanın danışmanı tarafından, çalışmanın başından itibaren veri toplama araçları, veri analizi ve veri bulguları incelenerek dönütler verilmiştir. Bunun yanında araştırmacı çalışmada yer almayan uzmanlarla da görüşerek; bu uzmanlar tarafından veri toplama araçları ve bulgular incelenmiştir.
	Veri toplama süreçlerine uygun ve yeterli katılım	Çalışmada kaç kişi ile mülakat yapılacağı önceden belirlenmemiş olup, görüşmeler yapılmaya ve bazı sonuçlara ulaşılmaya başlandıktan sonra görüşme yapılacak kişilerin sayısı netleştirilmiştir. Verilerin belli bir doyuma geldiğini düşünen araştırmacı, görüşmeleri dört kişiden sonra sonlandırmaya karar vermiştir.
	Amaçlı örnekleme	Nitel araştırmalarda genel doğrudan ziyade, derinliğe ulaşmaya çalışılmasından ötürü araştırmacı, yaptığı gözlemler ve araştırma ile ilgili kişisel deneyimleri sonucu süreç hakkında daha derin bilgiler alabileceği küçük, tesadüfi olmayan maksatlı örnekleme belirlemiş ve bu örneklem ile görüşmelerini yapmıştır. 3.2.1 de katılımcıların belirlenmesi ile ilgili bilgiler ayrıntılı biçimde verilmiştir.
	Uzun süreli katılım ve sürekli gözlem	Araştırmacı bir dönem boyunca uygulamanın yapılmadığı haftalarda dahi ara ara uygulamanın yapılacağı sınıfta derslere katılmış, araştırılacak grupla iletişim kurmuş ve böylelikle onların güvenliğini kazanmıştır. Ayrıca araştırmada önemli yere sahip olan öğretmen ile gerek pilot çalışmada gerekse asıl uygulamada sık sık görüşülerek uzun süreli etkileşim sağlanmıştır.
	Veriler, analizler ve yorumların başka araştırmacıya sunulması	Veriler, analizler ve yorumlar uzman kişiler tarafından incelenmiş olup araştırma süreci, araştırmacının dışında kişiler tarafından da kontrol edilmiştir. Ayrıca çalışmanın verileri olan video kayıtları, öğrenci dokümanları gerektiğinde delil olarak sunulmak üzere depolanmıştır.
	Araştırmacının pozisyonu	3.2.2 de ayrıntılı biçimde açıklanmıştır.
	Şeffaflık	Araştırma stratejisi, verilerin nasıl toplandığı ve analizlerin nasıl yapıldığı yöntem başlığı altında detaylı biçimde anlatılarak şeffaflık sağlanmaya çalışılmıştır.

Nicel çalışmaların geçerlik güvenirliğini test etmek için, nitel çalışmalara kıyasla daha net kriterler mevcuttur. Geçerlik, çalışmanın sonuçlarında edinilen çıkarımın konuyu ne kadar yansıttığıdır ve iç ve dış geçerlik olmak üzere iki tür geçerlikten söz edilmektedir. Güvenirlik ise, çalışmanın bulgularının ne kadar tekrarlanabileceğini açıklamaktır (Çepni, 2014, s. 234).

Bu çalışmanın, ölçme aracını oluşturan ispat beceri testi soruları, pilot çalışmada aynı okulun 9. sınıfta okuyan öğrencilerine uygulandıktan sonra ve araştırmacılar tarafından gözden geçirilerek son şekli verilmiştir. Testin sorularının öğrenci seviyesine uygun sözsüz ispatlardan seçilmesi ve gerek cebir gerekse geometri sorularına yer verilerek konuları yeterince kapsamayı sağlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca uygulama esnasında öğrencilerin kopya çekmeleri engellenerek alacakları puanların gerçek puanları yansıtmasına özen gösterilmeye çalışılmıştır. Testin sorularının açık uçlu sorular olması sebebiyle şans başarısının önüne geçilmiştir. Açık uçlu soruların puanlama ölçeği çalışmanın analizinde kullanılmış olan modelin aşamalarına göre oluşturulmuş olup uzmanlar tarafından değerlendirilmiştir. Yapılan çalışmanın tek gruplu desen olmasından ötürü geçerliği tehdit eden unsurlar mevcuttur. Tarih, olgunlaşma, test etme, enstrümantasyon ve regresyon hatası tek gruplu ön test-son test deseninde geçerliği tehdit eden unsurlar arasındadır (Johnson ve Christensen, 2012/2014, s. 252). Özellikle tek gruplu modellerin geçerlikleri konusunda önemli eleştiriler olmasına rağmen bu çalışmada sözsüz ispatların sınıf ortamına taşınabilmesine ve öğrencilerin bu konuya yaklaşımlarını inceleyebilmek adına bu desenin kullanılması uygun görülmüştür. Her sözsüz ispata karşılık formal bir ispatın olmaması ve konunun yapısı nedeniyle bir kontrol grubu oluşturulamamıştır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Bulgular ve Yorum

Bu araştırmada lise öğrencilerinin ispat becerileri incelenmeye çalışılmış olup bir dönem boyunca alternatif ispatlar olarak düşünülen sözsüz ispatların yer aldığı etkinliklerle ders işlenmiştir. Öğrencilerin sözsüz ispatları çözme becerilerindeki gelişimi incelemek üzere dönemin başında ispat beceri testi yapılmıştır. Sonrasında bir dönem boyunca sözsüz ispat etkinliklerinin olduğu derslerde, gözlemler yapılarak gözlem verileri ve etkinlik çalışma kağıtlarına öğrencilerin yazmış olduklarıyla da dokümanlar elde edilmiştir. Dönem sonunda ispat beceri testi tekrar uygulanmış ve yöntem kısmında ayrıntılı biçimde açıklanmış olan kriterlere göre dört öğrenci seçilmiş ve bu seçilen öğrencilerle birebir olarak sözsüz ispat etkinlikleri yapılmıştır. Sonrasında sürecin geneli hakkında her bir öğrenciden ayrı ayrı görüş alınmıştır. Böylelikle süreç hakkında veriler elde edilmiştir.

Araştırmanın modeli başlığında bahsedildiği üzere, çalışmada karma araştırma yöntemi kullanılmış olup, çalışmanın verileri hem nitel hem nicel olmak üzere iki türdür. Nitel ve nicel verilerin analiz süreci önceki bölümde ayrı ayrı açıklanmış olup, bu bölümde de nitel ve nicel verilerin bulguları ayrı ayrı sunulmuştur.

Nicel Verilere Ait Bulgular ve Yorumlar

Bu bölümde araştırmanın nicel bölümünde kullanılan ispat beceri testi puanlarına göre, elde edilen veriler analiz edilerek, uygulama sürecinde gerçekleştirilen öğretimin etkililiği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Öncelikle çalışmada yer alan grubun uygulama öncesi ve uygulama sonrası ispat beceri testinden aldıkları puanların normal dağılım gösterip göstermediğine bakılmıştır. Veri setinin normal dağılım göstermediği ve verilerin dağılımının yüksek düzeyde pozitif çarpık olduğu görülmüştür. Bu nedenle logaritmik dönüşüm yapılarak yeni veri seti elde edilmiştir. Elde edilen veri setinin normal olup olmadığını belirlemek için Q-Q grafiği ve basıklık ve çarpıklık değerlerine bakılmıştır. Q-Q grafiği köşegenler odağında doğru bir çizgi şeklindeyse, noktalar doğrunun yakınındaysa verilerin normal olduğu varsayılmaktadır. Basıklık ve çarpıklık değerleri ∓ 1 arasında ise grubun normal olduğu kabul edilir.

(Büyüköztürk, 2011). Elde edilen yeni verilerin analizi sonucu basıklık ve çarpıklığa ilişkin veriler Tablo 10 da verilmiştir.

Tablo 10. Veri Setinin Basıklık ve Çarpıklık Değerleri

	Basıklık	Çarpıklık	S.S
Ön test	-.951	.207	.352
Son test	.009	-.536	.228

Tablo 10’da görüldüğü üzere ön testte ve son testte basıklık ve çarpıklık değerleri ∓ 1 aralığındadır. Dolayısıyla verilerin normal dağılıma sahip olduğu söylenebilir.

Uygulama öncesi ispat beceri testinden alınan puanların ortalaması uygulama sonrası alınan puanların ortalamasından yüksektir ($\bar{X}_{\text{öntest}} = 3.72, SH_{\text{öntest}} = .699; \bar{X}_{\text{son test}} = 20.20, SH_{\text{son test}} = 2.022$). Bağımlı örneklem t-testine göre öğrencilerin ön test ve son testten almış oldukları puanlar arasında anlamlı fark vardır. ($t(24) = -9.883, p < .05$) Yani bu durumda sözsüz ispatların öğrencilerin ispat becerisi üzerinde etkisi olduğu söylenebilir. Öğrencilerin ispat beceri testinden almış oldukları puanlar arasında anlamlı fark olsa da, öğrencilerin yapılan testlerden çok yüksek not alamadıkları görülmüştür. Ancak uygulama öncesi ispat beceri testinde öğrencilerin sözsüz ispata dair herhangi bir uğraşlarının olmadığı görülmüştür. Uygulama sonrasında yapılan testte ise öğrenciler sonuca ulaşamamaları da ispat aşamalarından bazılarını geçirmişlerdir ki bu durum olumlu olarak görülebilir.

Nitel Verilere Ait Bulgular ve Yorumlar

Bu çalışmada öğrencilerin sözsüz ispat yapabilme sürecini incelemek üzere, nitel verilere ihtiyaç duyulmuştur. Bir dönem boyunca yapılan gözlemler, öğrencilerin sınıf içi sözsüz ispat etkinliklerinde kullanmış oldukları çalışma kağıtları, bireysel sözsüz ispat etkinliklerinin video kayıtları ve öğrenciler ve öğretmen ile yapılmış görüşmelerle nitel veriler elde edilmiştir.

Gözlem verilerine ait bulgular ve yorumlar.

Araştırmacı bir dönem boyunca sözsüz ispat konularının öğretim programında yerinin gelmesi üzerine sözsüz ispat etkinliklerinde katılımcı gözlemci olarak bulunmuştur. Gözlem verilerine ait bulgular iki alt başlıkla açıklanmıştır. Birinci alt başlığı, ilgili alanyazın incelenerek hazırlanmış olan, yapılandırılmış gözlem formu sonucu edinilen bulgular oluşturmaktadır. İkinci alt başlığı ise derste yapılan sözsüz ispat etkinliklerinde öğrencinin geçirmiş olduğu ispat süreci aşamalarına dair bulgular oluşturmaktadır.

Gözlem formu “ispat fonksiyonları, bilişsel beceriler, sosyal beceriler, öğretmenin rolü ve olumsuz öğrenci tepkileri ve sınıfın fiziksel ortamı” olmak üzere altı kategori altında oluşturulmuştur (Ek 6). Sınıfın fiziksel ortamı normal sıra düzeni olup, araştırmada bu düzene herhangi bir müdahale olmamıştır. Ayrıca sınıfta akıllı tahta gibi teknolojik donanımlar mevcuttur ve öğretmenin öğrencilerini yönlendiren, sözsüz ispatların doğru ilerlemesinde kontrolü sağlayabilen konumda olduğu ve öğrencilerin de öğretmenlerine rahatlıkla soru sorabildiği gözlemlenmiştir.

Gözlem formunun oluşturulmasında pilot çalışmada yapılan gözlemler ve alanyazında yer alan sözsüz ispat ile ilgili deneysel ve teorik çalışmalardan faydalanılmıştır. İspat fonksiyonları alt kategorisi, sözsüz ispatların ispat fonksiyonlarını ne ölçüde karşıladığına dair veri elde etmek amacıyla ve önceki bölümlerde bahsedildiği üzere ispatın açıklama, keşfetme, ikna etme, keyif alma ve öğrencide merak uyandırma boyutlarıyla ele alınmıştır (Bell, 1976; De Villiers, 1990; Hanna, 2000). Bilişsel beceriler ve sosyal beceriler alt kategorileri, ispat ve sözsüz ispatlar çalışmalarında ispatın öğrenciler üzerindeki bilişsel ve sosyal etkileri üzerine yapılandırılmıştır (Bell, 2011; Gierdien, 2007; Strausova ve Hasek, 2012). Olumsuz öğrenci tepkileri ile ilgili alt boyut ise, pilot çalışmada etkinliklerin uygulanması esnasında araştırmacının öğrencilerde gözlemlediği davranışlar üzerine yapılandırılmıştır.

Gözlem formları ile ilgili bulgular Tablo 11 ile sunulmaktadır.

Tablo 11. *Gözlem Verilerine Ait Bulgular*

Etkinlik adı	Alt kategoriler	Gözlemci notu
İç açılar toplamı	İspat fonksiyonları	Bu etkinlikte öğrenciler daha önceden sadece kural olduğunu ve ispatlanmasına gerek olmadığını düşündükleri üçgenin iç açılar toplamının 180° olduğunu keşfetmişlerdir. Öğrencilerin bu etkinlikten keyif aldıkları ve genel itibarıyla basit bir etkinlik olduğu için yönergeleri takip etmekte zorlanmadıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca pilot çalışmada öğrencilerden birisinin dik üçgende bu etkinliğin nasıl uygulayabileceğini sorması ve bunun üzerine öğrencilerin dik üçgen oluşturmaya çalışarak etkinliği dik üçgene uyarlamaya çalışması sözsüz ispatların öğrencilerde merak uyandırdığı sonucuna ulaşmamızı sağlayabilir.
	Bilişsel beceriler	Öğrencilerin daha önce öğrenmiş oldukları “bir üçgende iki iç açının toplamı bir dış açıya eşittir” kuralını bu etkinlikte doğru biçimde kullanabildikleri görülmüştür.
	Sosyal beceriler	Öğrencilerin dik üçgende iç açılar toplamını gösterebilmek için birbirleriyle fikir alışverişinde bulundukları gözlemlenmiştir.
	Olumsuz öğrenci tepkileri	Bazı öğrencilerin sorulan soruların hepsine etkinlikte verdikleri cevaplara benzer cevaplar verme eğiliminde oldukları görülmüştür.
Üçgen Eşitsizliği	İspat fonksiyonları	Öğrencilerin etkinliği anladıklarında mutlu oldukları gözlemlenmiştir.
	Bilişsel beceriler	Sözsüz ispat etkinliği tamamlandıktan sonra öğrencilerin üçgen eşitsizliğinin ilk kısmı olan iki kenarın uzunluğunun toplamının diğer kenarın uzunluğundan büyük olma şartını rahatlıkla söyleyebildikleri diğer kısmı yani iki kenarın uzunluğunun farkının diğer kenarın uzunluğundan küçük olma şartını ise söyleyemedikleri görülmüştür.
	Sosyal beceriler	Öğrencilerin etkinliğe çok aktif katılmadıkları öğretmenin derse katılmaları için öğrencileri teşvik ettiği gözlemlenmiştir.
	Olumsuz öğrenci tepkileri	Herhangi bir olumsuz öğrenci davranışı gözlemlenmemiştir.
Pisagor Teoremi	İspat fonksiyonları	Açılarıdaki diklik öğrenci tarafından fark edilmiştir. Öğrencilerin dik üçgenle ilgili olarak Pisagor teoremini bildikleri gözlemlenmiştir. Öğrenciler daha önce Pisagor teoremi ile ilgili görmüş oldukları etkinlikten bahsetmişlerdir ve teoremi doğru olarak ifade edebilmişlerdir. Özellikle üçgen materyalleriyle uğraşmaktan keyif aldıkları görülmüştür.

Tablo 11 (Devamı)

	Bilişsel beceriler	İlk kez bu etkinlikte öğrencilerin c^2 ifadesini görünce c birimli bir kareyi anladıkları gözlemlenmiştir. Dolayısıyla öğrencilerin bu etkinlikte matematik konuları arasında ilişki kurabildikleri ve cebirsel bir ifadeyi geometrik olarak ifade edebildikleri görülmüştür.
	Sosyal beceriler	Öğrencilerin bu etkinlikte gerek araştırmacıya gerekse dersin öğretmenine rahatlıkla soru sorabildikleri gözlemlenmiştir. Etkinlik yönergelerini tamamlamayan öğrencilerin tamamlayabilen arkadaşlarından yardım aldıkları görülmüştür.
	Olumsuz öğrenci tepkileri	Herhangi bir olumsuz öğrenci davranışı gözlemlenmemiştir.
Öklid Teoremi	İspat fonksiyonları	Öğrencilerin bu etkinlikte yer alan metinsel ifade ile şekil arasında bağlantı kurabildikleri ve resmi açıklarken sebep gösterebildikleri görülmüştür.
	Bilişsel beceriler	Öğrencilerin yüksekliği taşınma sebebini, alanların eşitliğini, kenarlarının eşitliğini fark edebildikleri görülmüştür. Daha önce öğrenmiş oldukları alan formülünü kolaylıkla uygulamışlardır. Öğrenciler paralellik kavramına değinmiş ve eş üçgenleri fark edebilmişlerdir. Özellikle bu etkinlikte öğrencilerin c^2 ya da $a.b$ gibi cebirsel ifadelerle karşılaştıklarında alan kavramına yöneldiği görülmüştür. Bu da öğrencilerin farklı matematiksel fikirler arasında bağlantı kurabildikleri anlamına gelmektedir. Ayrıca öğrencilerin kenarların birbirine paralel olduğunu gerekçelendirmeleri istendiğinde açıların eşitliğinden ve dolayısıyla z kuralından gerekçelerini sunmuşlardır. Bu da öğrencilerin sebep gösterebildikleri anlamına gelmektedir.
	Sosyal beceriler	Öğrencilerin bu etkinlikte şimdiye kadar yapılan etkinliklerin hepsinden daha aktif oldukları gözlemlenmiştir.
	Olumsuz öğrenci tepkileri	Öğrencilerin yamuk ve paralellik kavramlarını açıklamada zorlandıkları görülmüştür.
	İspat fonksiyonları	Öğrencilerin yönergeleri uygulayabildiklerinde mutlu oldukları ve Kosinüs teoreminin nereden geldiğini anlayabildikleri görülmüştür.
Kosinüs Teoremi	Bilişsel beceriler	Öğrenciler, bu etkinlikte Kosinüs teoremini ispatlamak için Pisagor teoremini kullanabilmişlerdir. Ayrıca öğrencilerle, bu teoremin ispatın da kullanılması gereken, çemberde kuvvet özelliği ve çemberde giriş konuları hakkında konuşulmuştur. Dolayısıyla sözsüz ispat etkinliklerinin öğrencilerin daha önce gördükleri kuralları kullanmalarına yardımcı olduğu söylenebilir.
	Sosyal beceriler	Öğrencilerin yönergeleri uygulayabildikleri ve etkinliğe katıldıkları görülmüştür.
	Olumsuz öğrenci tepkileri	Öğrencilerin cebirsel işlemleri yaparken sıkıldıkları ve zorlandıkları görülmüştür.
	İspat fonksiyonları	Öğrenciler, bu etkinlikte her şeyin bir ispatının olduğunu belirtmişlerdir. Dolayısıyla öğrencilerin bu etkinliklerle formüllerin doğruluğuna dair ikna oldukları söylenebilir.
Sinüs Teoremi	Bilişsel beceriler	Öğrencilerin burada çevre açısı ve merkez açının özelliklerini ve çapı gören çevre açısı ile ilgili özellikleri kullanmış olmaları; sözsüz ispat etkinliklerinde birden çok konuyu bütünleştirebilme ve daha önce öğrenmiş oldukları özellikleri kullanabilme fırsatı buldukları anlamına gelmektedir.
	Sosyal beceriler	Öğrenciler yönergeye uygulayabilmişlerdir.
	Olumsuz öğrenci tepkileri	Herhangi bir olumsuz öğrenci davranışı gözlemlenmemiştir.
	İspat fonksiyonları	Bu etkinlikte ispat fonksiyonlarına dair herhangi bir şey gözlemlenmiştir.
Viviani Teoremi	Bilişsel beceriler	Bu etkinlikte öğrenciler öteleme ve dönme ifadelerini kullanmışlardır. Dolayısıyla öğrencilerin bu etkinlikte daha önce karşılaştıkları kuralları veya özellikleri uygulayabilme fırsatı buldukları söylenebilir.
	Sosyal beceriler	Öğrencilerin bu etkinlikte gerek araştırmacıya gerekse dersin öğretmenine rahatlıkla soru sorabildikleri gözlemlenmiştir.
	Olumsuz öğrenci tepkileri	Öğrencilerin bu etkinlikte sıkıldıkları ve yönergeleri takip etmekte çok zorlandıkları görülmüştür. Bu etkinlikte, teoremin formal ispatı da verilmiş olup, öğrencilerden ispatı takip etmeleri istenmiştir ve öğrenciler bu ispatı anladıklarını ifade etmişlerdir. Viviani teoremi sözsüz ispat etkinliğinde çok fazla yönerge olması öğrencinin dikkatinin dağılmasına ve gösterilmek istenen özellikten uzaklaşmasına neden olmuştur.
	İspat fonksiyonları	Öğrencilerin Pisagor teoremi etkinliğindeki gibi materyallerle uğraşmaktan keyif aldıkları görülmüştür.
Alan etkinlikleri	Bilişsel beceriler	Bu etkinlikte öğrencilerin, iç teğet çemberin yarıçapını ve yarı çevreyi fark edebildikleri görülmüştür ve ispatın tamamlanması için öğrenciler üçgende benzerliği kullanmışlardır.
	Sosyal beceriler	Öğrencilerin arkadaşları ile beraber yönergeleri uygulamaya çalıştıkları gerek araştırmacıya gerekse dersin öğretmenine rahatlıkla soru sorabildikleri gözlemlenmiştir.
	Olumsuz öğrenci tepkileri	Herhangi bir olumsuz öğrenci davranışı gözlemlenmemiştir.
	İspat fonksiyonları	

Tablo 11 incelendiğinde, genel olarak sözsüz ispatların, öğrenciye formüllerin nereden geldiğini anlama, formüllerin doğruluğuna ilişkin ikna olma, etkinliklerden keyif alma, matematiğin diğer kavramlarıyla ilişki kurma, matematiğin birden çok konusunu bütünleştirebilme, daha önce öğrenmiş oldukları kuralları kullanma gibi imkanlar sağladığı söylenebilir. Ayrıca öğrencilerin kimi etkinliklerde sıkıldıkları ve zorlandıkları görülmüştür. Bunlar olumsuz öğrenci davranışı olarak ifade edilmiştir. Kimi durumlarda da öğrencilerin birbirleriyle fikir alışverişinde bulundukları ve öğretmenlerine rahatça soru sorabildikleri gözlemlenmiştir.

Sınıf içi etkinliklerden elde edilen sözsüz ispat aşamalarına ait bulgular ve yorumlar.

Bu çalışmada öğrencilerin sözsüz ispat etkinlikleriyle, ispat becerileri incelenmeye çalışılmıştır. Bunun için bir dönem boyunca araştırmacı tarafından oluşturulan sözsüz ispat etkinlikleri sınıf ortamında uygulanmış ve bu uygulamalar kamera ile kayıt altına alınmıştır. Kamera ile kayıt altına alınan dersler araştırmacı tarafından transkript edilmiş ve elde edilen bu yazılı metinler, iki araştırmacı tarafından içerik analizi teknikleriyle analiz edilmiştir. Sözsüz ispat aşamalarını belirleyebilmek için Heinze ve Reiss (2004)'in, öğrencilerin ispat sürecinin aşamalarını bulmak için Boero modelini (1999) uyarlayarak oluşturdukları modelin aşamaları temel alınmıştır. Bu iki modelle ilgili ayrıntılar kuramsal çerçeve ve nitel verilerin analizi alt başlıklarıyla açıklanmıştır. Aşağıda her aşamaya dair bulgulara yer verilerek; öğrencilerin sözsüz ispat yapabilme aşamaları ortaya konulmuştur.

Birinci aşamaya ait bulgular ve yorumlar.

Boero, modelinde ispat süreci evrelerini safha olarak ifade etmektedir. Birinci safhayı, varsayım üretme olarak isimlendirmektedir ve bu safhanın, problem durumunun açıklanması, kurala uygunlukların tespiti, kuralın hangi şartlar altında geçerli olduğunun tespiti ve gerekli argümanların tespitini içerdiğini belirtmektedir (Boero, 1999). Heinze ve Reiss (2004)'in modelinde de birinci aşama, Boero modelinde olduğu gibi problem durumunun açıklanması ve varsayımın geçerliğine destek çıkacak iddiaların tanımlanması olarak ifade edilmektedir. Geometride bir çizimin araştırılması da bu rolü oynamaktadır. Sözsüz ispat etkinliklerinde, sözsüz ispat verildikten sonra, öğrencilerden verilen görseli açıklamaları istenmiştir. Bu aşamada, öğrenciler görsele dair yeterli açıklama yapabiliyorsa birinci aşama başarılı biçimde geçirilmiş demektir. Sözsüz ispatlarda, görselin yanında varsayımın dair metinsel ifadeler yer almaktadır. Etkinlik süreçleri incelendiğinde öğrencilerin bir kısmının sadece şekli açıkladığı, bir kısmının şekli ve metinsel ifadeyi birlikte açıkladığı, bir kısmının da sadece metinsel

ifadeyi açıkladığı görülmüştür. Aşağıda ispat sürecinin birinci aşaması olarak belirtilen, şeklin incelenmesi aşamasına dair alıntılara yer verilerek bu aşamanın bulguları ortaya konulmuştur.

Öğrencilerin uygulama sürecinin başındaki etkinliklerde, sözsüz ispattaki görsele dair yeterli açıklama yapamadıkları görülmüştür. Örneğin; üçgen eşitsizliği ile ilgili sözsüz ispat etkinliğinde, öğrencilerden şekil ile ilgili açıklama istenmiş, ancak öğrencilerin yeterli açıklama yapamadıkları sadece metinsel ifadede yazanı söyleyebildikleri görülmüştür.

Ö1: Şekil, bir üçgenin kenarlarını belirtmiş. $a + b$ nin c den büyük olduğunu söylüyor. Oklarda da c kenarını belirtmiş. En büyük kenarın c , sonra b , sonra a olduğunu belirtmiş bence. **(Metinsel paylaşıma odaklanma)**

Ö2: $a+b > c$ sadece. **(Metinsel paylaşıma odaklanma)**

Ö3: Üçgeni ifade ediyor. Oklar da gidiş geliş. **(Şekle dair yeterli olmayan açıklama)**

Ö4: A açısı a ya bakıyor B açısı da b ye sadece isimlendirme gibi. **(Şekle dair yeterli olmayan açıklama)**

Görüldüğü üzere; öğrencilerin şekle dair açıklamaları yeterli değildir. İlerleyen derslerde öğrencilerin şekle ve ne yapıldığına dair yeterli açıklamalarda bulunabildikleri görülmüştür.

Ö5: $A = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a + b)^2$ bu alan büyük üçgeni kastediyor herhalde o yüzden çarpı 2 demiş. Bir de $\frac{1}{2}c^2$ var.

A: $\frac{1}{2}c^2$ dediği nedir?

Ö5: Ortadaki dik üçgen. $2 \cdot \frac{1}{2}ab$ iki tane üçgenin alanı. Bunların toplamı da hepsini kaplayan yamuğa eşitmiş. **(Şekil ve metinsel paylaşımların beraber incelenmesi)**

Yukarıda verilmiş olan alıntı Pisagor etkinliğine aittir. Görüldüğü üzere Ö3 şekle dair açıklamayı doğru biçimde yapabilmiş ve sözsüz ispatta yer alan metinsel ifade ile ilişkili olarak şekli açıklayabilmiştir.

Öğrencilerin Öklid bağıntısını gösteren sözsüz ispat örneğinde olduğu gibi metinsel ifade ile ilişki kurmadan sadece şekle dair doğru ve yeterli açıklama yapabildikleri de görülmüştür.

Ö6: Burada CDB üçgenini kesip çıkarmış. Sonra diğerinin yüksekliği ile birleştirmiş. Dışta kalan tarafı da onun köşesiyle birleştirmiş. Sonrası zor. Tamam, CAE üçgeninin yüksekliğini bulmuş.

A: Ne yapmış yüksekliği burada?

Ö6: Çevirmiş.

A: Çevirmiş mi? Taşımış mı?

Ö6: Evet taşımış. Sonra kesik parçayı almış. Birbirine eşitlemiş. (**Şeklin doğru biçimde açıklanması**)

Ö7: Büyük şekilde üçgenin yüksekliğini bulmuş. O yüksekliğe ait bir kare oluşturmuş. Yani o yüksekliğin uzunluğu kadar bir kare oluşturmuş. Yandaki şekil bu. (**Şeklin doğru biçimde açıklanması**)

İspat sürecinin aşamaları ile ilgili modeller ve sözsüz ispatlarla işlenen ders süreci göz önüne alındığında “şeklin incelenmesi” aşamasının dört alt aşaması olduğu görülmüştür. Bu aşamalar “**şeklin doğru biçimde açıklanması**”, “**şekil ve metinsel paylaşımların beraber açıklanması**”, “**metinsel paylaşım odaklanma**” ve “**şekle dair yeterli olmayan açıklama**” olarak belirlenmiştir.

İkinci aşamaya ait bulgular ve yorumlar.

İkinci aşama Boero (1999) ve Heinze ve Reiss (2004) modellerinin her ikisinde de paylaşılan metinsel ifadelerle göre varsayımın ifade edilmesi olarak belirtilmektedir. Sözsüz ispatlarda, varsayım genellikle sözsüz ispatın yanında yazılı olarak yer almaktadır. Öğrencilerin kimi zaman şekilden kimi zaman da metinsel ifadeden varsayımı çıkarabildikleri görülmüştür. Bazı durumlarda ise, öğrencilerin varsayıma dair herhangi bir paylaşımda bulunamadıkları görülmüştür.

Aşağıda ispat sürecinin ikinci aşaması olarak belirtilen varsayımın açık ve net şekilde ifade edilmesi aşamasına dair alıntılara yer verilerek bu aşamanın bulguları ortaya konulmaya çalışılmıştır.

Ö1: c açısı büyük açı büyük kenar diyor ya a ile b yi vermiş bir de diyor ya $a + b > c$. Bir tane herhalde kural vardı iki kenarın toplamı bir kenardan büyük oluyordu. Öyle bir şey vardı herhalde. Açılarda da vardı. Oklar da b ve c kenarını gösteriyor. (**Varsayımı fark etme**)

A: Şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız. Şekle bakarken birim çemberde eksenler üzerinde sinüs ve kosinüsleri düşünmüştük. Onları düşünerek bakın bir şeyler çıkarın.

Ö2: Ne görüyorum? Kosinüs formülünü. Bu şekil de herhalde onu veriyor. (**Varsayımı fark etme**)

A: Şekilde ne görüyorsunuz?

Ö3: Yamuk var 3 tane dik üçgen.

Ö4: İkizkenar dik açılı üçgen var.

Ö5: Burada eş üçgenler de var.

A: Evet. Peki, bu yazılı olarak verilen eşitlik neyi gösteriyor?

Ö4: Pisagor teoremi sanki. **(Varsayımı fark etme)**

Öğrencilerin varsayımı fark etmesi daha sonra yapacağı işlemlerde varsayıma dair farkındalığının olması açısından önemli olarak görülmektedir. Sözsüz ispat etkinliklerinde öğrenciler, öğretmenin verdiği yönergelere uyarak sözsüz ispata ulaşmışlardır. Varsayımın ne olduğuna dair herhangi bir bilginin olmaması öğrencinin sadece yaptığı işlemlere odaklanmasına sebep olmaktadır. Bunun sonucunda da öğrenci neyi ispatladığını fark edememektedir. Şekil ve metinsel ifadeleri birlikte inceleyen öğrencilerin, varsayımı daha kolay fark edebildikleri görülmüştür. Örneğin; bireysel sözsüz ispat etkinliklerinde, Can şekli ve metinsel ifadeyi birlikte inceleyen bir öğrenci olarak daha önceden görmüş olduğu varsayımları ifade edebilmiş ve sonrasında sözsüz ispatta yapılanları açıklamaya çalışmış ve sonuca daha rahat ulaşmıştır. Ancak Yunus çoğu zaman şekli ve metinsel ifadeyi birlikte incelememiş olup, sadece şekle yöneldiği durumlarda şekli yeterince açıklayamamış ve sonuca ulaşamamıştır. Özellikle varsayımın fark edilmesi aşamasının, ispat sürecinin son aşaması olan yapılanların özetlenmesi aşaması için önemli olduğu düşünülmektedir.

Üçüncü aşamaya ait bulgular ve yorumlar.

Üçüncü safhayı, Boero (1999), varsayımın esaslarının araştırılması olarak tanımlamaktadır. Bu aşamada, uzman tarafından hipotez ve tez arasındaki sezgisel ve anlamsal detaylar ve varsayıma dair uygun argümanlar belirlenmektedir. Heinze ve Reiss (2004) ise bu aşamayı varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi ve ispat stratejilerinin kabataslak belirlenmesi olarak tanımlamaktadırlar. İspat sürecinin analizi için bu aşamayı dört alt kategoride incelemişlerdir:

- 1) Varsayıma referans
- 2) Varsayımın araştırılması
- 3) Daha fazla bilgi toplanması
- 4) Bir ispat fikri oluşturma

Bu bağlamda, bu çalışmanın üçüncü aşaması, öğrencilerin yapılan işlemleri gerekçelendirdikleri ve hangi işlemi yapacaklarına karar verdikleri aşamadır ve varsayımın

geçerliğı için uygun iddiaların belirlenmesi olarak tanımlanmıştır. Bu aşama, özellikle bundan sonraki aşamalarda öğrencinin işlemleri tamamlayarak ilerleyebilmesi için önemlidir. Öğrenci bu aşamada çok aktiftir. Öğretmen, öğrencilerin sonuca ulaşması için kullanacakları bilgilere kendilerinin ulaşması için onları devamlı olarak yönlendirmektedir.

Aşağıda ispat sürecinin üçüncü aşaması olarak belirtilen varsayımın geçerliğı için uygun iddiaların belirlenmesi aşamasına dair alıntılara yer verilerek bu aşamanın bulguları ortaya konulmaya çalışılmıştır.

A: Şekli inceleyip açıklayınız. Çemberde çevre açısı merkez açısı ile ilgili özellikler vardı. Yay uzunluğu ile ilişkisi vardı. Hatırlayan var mı? Merkez açısı gördüğü yay çevre açısı gördüğü yay ile ilişkisi vardı.

Ö1: İki kat mıydı?

A: Ne neyin iki katıydı?

Ö1: Çevre açısı yayın iki katı mıydı?

A: Merkez açısı ve gördüğü yay arasında ne vardı?

Ö1: Eşitti o da sanırım. (yapılan işlemlerin gerekçelendirilmesi)

Yapılan doğrudan alıntıdan görüldüğü üzere, öğrenci sinüs teoreminin sözsüz ispatında, daha önceden görmüş olduğu konulara ait bilgileri kullanmıştır. Benzer şekilde öğrenciden, üçgenin iç açıları toplamı ile ilgili sözsüz ispat etkinliğinde, eşit olarak verilen açıların neden eşit olduğuna dair gerekçelendirme yapması istenmiştir.

A: Neden bu açıları eşit?

Ö2: Bu iki paralel bunun iç açısıyla dış açısı eşit.

A: O kurala bir şey diyorduk. Neydi?

Ö2: Z kuralıydı. Şu açı ile bu açı birbirine eşit oluyordu. (yapılan işlemlerin gerekçelendirilmesi)

Bu aşama, özellikle öğrencinin teoremin doğru olduğunu anlamasının yanında neden doğru olduğunu anlaması açısından önemlidir. Çünkü öğrenci ispatın her aşamasında neyin niçin yapıldığını açıklamaya teşvik edilerek, yapmış olduğu her işlemi neden yaptığını düşünmek zorunda kalmaktadır.

Dördüncü aşamaya ait bulgular ve yorumlar.

Dördüncü safha, Boero (1999) modelinde teorik argümanların uygun ve özel durumlarda tümdengelimsel zincir içinde bağlanması olarak tanımlanmaktadır. Heinze ve Reiss (2004) ise bu aşamayı, kendi modellerinde tanımlamış oldukları üçüncü aşamanın unsurları ile birleştirmişlerdir. Bu aşamada kesin ispatı oluşturacak varsayımların tümdengelimsel bir zincir içerisinde kombinasyonu olması gerektiğini belirtmişlerdir.

Bu çalışmanın dördüncü aşaması, gerekli işlemlerin yapılması olarak belirlenmiştir. Bir önceki aşamada da belirtildiği üzere, bu aşama bir önceki aşamada belirlenmiş işlemlerin yapıldığı aşamadır. Öğrencilerin hangi işlemi yapacaklarını doğru biçimde belirlemelerine rağmen, işlem bilgilerinin zayıf olmasından ötürü işlemleri tamamlayamadıkları, bu durumun da öğrencilerin motivasyonlarını düşürdüğü görülmüştür.

Aşağıda ispat sürecinin dördüncü aşaması olarak belirtilen, gerekli işlemlerin yapılması aşamasına dair alıntılara ve öğrenci kağıtlarından görüntülere yer verilerek bu aşamanın bulguları ortaya konulmuştur.

Ö1: Büyük karenin alanı dört tane dik üçgenin alanı ve içteki küçük karenin alanının toplamıdır.

A: Dik üçgenlerin alanı nedir?

Ö1: $\frac{a.b}{2}$. 4 tane olduğu için $4 \cdot \frac{a.b}{2} = 2 \cdot a \cdot b$

*Ö1: İçteki karenin alanı da kenarı $b - a$ olduğu için $(b - a)^2$ olur. Büyük karenin kenarı da c idi. O zaman $c^2 = (b - a)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$ olur. **(işlemi tamamlayamama)***

Öğrenci, bu kısımdan sonra işlemleri tamamlayamamıştır. Sınıfın tamamının özdeşliğin açılımında sıkıntı yaşadığı gözlemlenmiştir.

A: Oluşan yamuğun alanı ve üç tane dik üçgenin alanının toplamını karşılaştırınız.

Öğrenciler: Eşitler.

A: Neden?

Öğrenciler: Aynı şekilleri kullandık.

A: Üçgenin alan formülünü biliyorsunuz. Bu üç tane üçgenin alanını yazar mısınız?

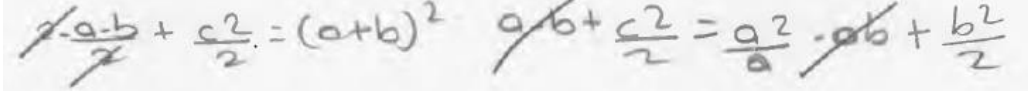
Öğrenciler: İki tanesi $\frac{a.b}{2}$ diğeri de $\frac{c^2}{2}$

A: Bu üç üçgenden ne oluşturduk?

Öğrenciler: Yamuk

A: Yamuğun alanı neydi?

Öğrenciler:


$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{(a+b)c}{4} \quad \frac{a}{b} + \frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{2}$$

Şekil 4.1. Pisagor etkinliğine ait öğrenci kağıdı

Şekilde verilen öğrenci kağıdına bakıldığında; öğrencinin yamuğun alan formülü ve özdeşliğin açılımı ile ilgili hata yaptığı görülmektedir. Bu etkinlikte dik yamuğun alanını öğrenciler hatırlamadığı için bu konuya değinilmiştir. Daha sonra öğrencilerin gerekli sadeleştirmeleri yapmaları ve Pisagor teoremine ulaşmaları sağlanmıştır. **(işlemi tamamlama)**

Beşinci aşamaya ait bulgular ve yorumlar.

Boero (1999) bu safhayı; geçerli matematiksel standartlara göre kabul edilen argümanları ispata bağlama olarak tanımlamaktadır. Heinze ve Reiss (2004) de bu aşamanın okul matematiğindeki son evre olduğunu ve süreç hakkında geçmişe dönük genel değerlendirmenin yapıldığı evre olarak tanımlamaktadırlar.

Bu çalışmada da bu aşama öğrencinin yapılanları özetlediği evre olarak tanımlanmıştır. İkinci aşamanın bulgular ve yorumlar kısmında belirtildiği üzere; özellikle varsayımın fark edilmesi aşaması, ispat sürecinin son aşaması olan yapılanların özetlenmesi aşaması için önemlidir. Öğrencinin geçmişe dönük değerlendirme yaparak yapılanları özetlemesi, hangi teoremin niçin doğru olduğuna dair farkındalığı için önemlidir.

Aşağıda ispat sürecinin beşinci aşaması olarak belirtilen, yapılanların özetlenmesi aşamasına dair alıntılara yer verilerek bu aşamanın bulguları ortaya konulmuştur.

Ö: Bu katlama işleminden sonra ne görüyorsunuz?

Ö1: Üç açısı da yan yana 180°.

Ö: Ne elde etmiş olduk?

Öğrenciler: Bir doğru.

A: Peki yapmış olduğumuz bu etkinlikte ne görmüş olduk?

Öğrenciler: Üçgenin iç açıları katlayınca bir doğru oluşturuyor.

A: Peki neyi gösterdik bu katlama işlemiyle?

Öğrenciler: Üçgenin iç açılarının toplamı 180° dir. (yapılanların özetlenmesi)

Verilmiş olan alıntı üçgenin iç açıları toplamının 180° olduğunun gösterildiği sözsüz ispat etkinliğidir. Öğretmenin etkinliğin sonunda öğrenciden ne yapıldığına dair açıklama istemesi, yapılanların farkındalığı açısından önemlidir. Sözsüz ispat etkinliklerinde, özellikle öğrenciden etkinliğin sonunda yapılanları özetlenmesi istenmiştir. Aşağıda üçgen eşitsizliğinin sözsüz ispat etkinliği ile ilgili alıntı verilmiştir.

Ö: Şu ana kadar yapmış olduklarımızı özetleyecek olan var mı? Neyi keşfettik?

Ö1: Kenarlara baktık

Ö2: Kenarlarla açılar arasındaki ilişkiye baktık.

A: Kenarlar arasındaki ilişkiyi inceledik uzunlukları. İlk başta neyi fark ettik?

Öğrenciler: iki kenarın toplamının diğer kenardan büyük olmalı.

Ö: Farkın?

Öğrenciler: Küçük olduğunu

A: O zaman üçgen oluşturma şartları neymiş arkadaşlar?

Ö3: İki kenarın toplamından küçük farkından büyük olmalıymış. (yapılanların özetlenmesi)

Yapılan etkinliklerin sonunda, öğrencinin özetleme yapması şeklin ve metinsel paylaşımın bütüncül olarak açıklanmasını ve hangi teoremin niçin doğru olduğunun anlaşılmasını sağlamaktadır. Öğrenciler ile yapılan bireysel sözsüz ispat etkinliklerinde, yapılanların özetlenmesinin, öğrencinin o ana kadar fark edemediği ayrıntıları fark etmesini sağladığı görülmüştür. Bu durum 4.2.3 alt başlığında ayrıntılı biçimde açıklanmıştır.

İspat sürecinin aşamalarına ait bulgular incelendiğinde ispat sürecinin beş aşaması tanımlanmıştır. Bu aşamalar “şeklin incelenmesi, varsayımın açık ve net şekilde ifade edilmesi, varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi, gerekli işlemlerin yapılması ve yapılanların özetlenmesidir”. Bu aşamaların da kendi içinde alt aşamaları mevcuttur. Şeklin incelenmesi aşaması, “sadece şeklin açıklanması, şekil ve metinsel paylaşımın beraber açıklanması, metinsel paylaşıma odaklanma ve şekle dair yeterli olmayan açıklama”; varsayımın açık ve net şekilde ifade edilmesi aşaması, “varsayımı fark etme ve varsayımı fark etmeme”; varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi aşaması, “yapılan işlemleri gerekçelendirme”; gerekli işlemlerin yapılması aşaması, “işlemi tamamlama, işlemi eksik yapma, işlemi tamamlayamama”; yapılanların özetlenmesi aşaması ise “hangi teoremin niçin

doğru olduğunu anlama, şeklin ve metinsel paylaşımın bütüncül olarak açıklanması” alt aşamalarına ayrılmıştır.

Bireysel sözsüz ispat etkinliklerine ait bulgular ve yorumlar.

Öğrencilerle etkinlikler uygulandıktan sonra bir araya gelinmiş ve seçilen dört öğrenciden kendi başlarına sözsüz ispatları çözmeleri istenmiştir. Böylelikle, ispat sürecinde öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar belirlenmeye çalışılmıştır.

Daha önceki bölümlerde bahsedildiği üzere, Boero (1999) uzmanların ispat sürecinin safhalarını belirlemiştir. Heinze ve Reiss (2004) bu sürecin, matematikte uzman olanlara ait olduğunu belirtmiş ve öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamaları, bu modeli yeniden uyarlayarak belirlemeye çalışmışlardır. Bu çalışmada ise; öğrencilerin sözsüz ispat çözme süreçlerindeki aşamalar incelenmeye ve diğer araştırmacıların belirlemiş oldukları aşamalardan farklı olan veya öğrencilerin geçirmedikleri, ihmal ettikleri aşamalar belirlenmeye çalışılmıştır. Bunun için, üçüncü bölümde ayrıntılı olarak açıklanmış olan kriterlere göre belirlenmiş olan dört öğrencinin, sözsüz ispat yapabilme süreci ayrıntılı biçimde incelenmiş ve sözsüz ispat çözme sürecinin aşamaları ortaya konulmuştur.

Birinci soruya ait bulgular ve yorumlar.

Bu soru; cebirsel bir eşitsizliğin sözsüz ispatının verildiği bir sorudur. Öğrencilerden sözsüz ispatın nasıl yapıldığının tartışılması istenmiştir. Görüşülen öğrencilerin cevapları incelendiğinde, öğrencilerin bir kısmının modelin aşamalarının tamamını geçirdiği bir kısmının ise aşamaların ancak birkaçını geçirebildiği bulgusuna ulaşılmıştır. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

(A: Araştırmacı; Y: Yunus; C: Can; M: Mehtap; F: Ferit)

Y: Hocam şekilde dikdörtgenin alanını bulmuş. $\frac{a}{b} \cdot bd = ad$. Diğer dikdörtgenin alanını da $\frac{c}{d} \cdot bd = bc$ bulmuş. İlk alan diğerinden küçük diyor.

A: Peki bunu nasıl demiş?

Y: Bu alan kesilmiş dolayısıyla daha küçük.

Alıntıdan görüldüğü üzere öğrenci şekli açıklamakla yetinmiş ve verilmiş olan metinsel ifade ile şeklin bağlantısını yapmamıştır. Ayrıca varsayıma dair herhangi bir ifade kullanmamıştır. Ancak alan kavramını fark etmesine rağmen, ilk dikdörtgenin alanının ikinci dikdörtgenin alanından daha küçük olduğu ile ilgili olarak alanın kesilmiş olmasını sebep

olarak sunması, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ilişkisini fark etmediğine dair bir ipucu olabilir. Öğrencinin metinsel ifade ile şekli birlikte incelememesi varsayımı fark edememesine neden olmuştur.

Aşağıda şekli ve metinsel ifadeyi birlikte inceleyerek soruyu çözen öğrenciye ait doğrudan alıntı verilmiştir. Öğrenci öncelikle metinsel paylaşımı okumuş ve açıklamıştır. Metinsel paylaşımı okuduktan sonra, içler dışlar çarpımı yapmıştır ve önermenin ikinci kısmındaki eşitsizliğin elde edildiğini görmüştür.

C: $a \cdot d$ alan. Yani bir kenarı $\frac{a}{b}$ diğer kenarı $b \cdot d$ çarparsak $a \cdot d$ olur. Aynı şekilde diğeri için de bir kenarı $\frac{c}{d}$ diğer kenarı $b \cdot d$ çarparsak $b \cdot c$ olur. $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ dikdörtgenlerin kısa kenarları $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ diğer kenarlar ikisinde de aynı. Bu iki dikdörtgenin alanında birincisi diğerinden daha küçük olur.

A: Neden?

C: Bir kenarları aynı diğer kenarı da küçük olanın alanı küçük olur. Buradaki şekilde de onu gösteriyor.

Öğrenci soruyu çözerken metinsel ifade ve şekli birlikte incelemiş olup, göstermek istenilen varsayımı fark etmiştir. Daha sonra alan kavramını fark edip, dikdörtgenlerin alanlarını bulmuştur. Öğrenci son olarak yapılanları özetlemiştir. Bu durumda öğrenci şekli ve metinsel ifadeyi birlikte açıklamış, varsayımı fark etmiş, varsayımı göstermek için alan kavramını doğru biçimde kullanıp sonuca ulaşmıştır.

Öğrencilerden bir tanesi bu soruda yer alan cebirsel ifadeler yerine sayıları kullanarak çözmeye çalışmıştır.

F: $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Şekil de öyle gösteriyor zaten. $a \cdot d$ ve $b \cdot c$ dikdörtgenlerin alanı zaten. Alanlar farklı olur. Çünkü birinin kenarı diğerinden farklıdır. Şekilden de anladık bunu. Büyük ihtimalle küçüktür.

A: Büyük ihtimalle mi kesin mi?

F: Görünüş olarak kesin ama formül kullanmadan bunu bilemeyiz.

A: Nasıl yani?

F: Sayılarla nasıl olur bilmiyorum ama görünüş olarak birinci dikdörtgenin kenarı diğer dikdörtgenin kenarından kısadır. Uzun kenarlar ise birbirine eşitmiş. Aynı harfler verilmiş. Mesela şu kenara 3 diğer kenara 2 dersek alanı 6 eder. Diğer dikdörtgende de uzun olan kenara 4 dersek diğer kenar da aynı olduğundan 3 olur ve alan 12 olur. Gerçekten daha büyük olur.

Doğrudan alıntılardan anlaşılacağı üzere, öğrenci şekli doğru biçimde açıklayabilmiş ve metinsel ifade ile şekli ilişkilendirmiştir. Sonrasında alanlar arasındaki ilişkiyi göstermek için, sayıları kullanmıştır. Öğrencinin cebirsel ifadelere sayı vererek varsayımın doğruluğuna ikna olması, cebirsel ifadelerin öğrencide birer soyut kavram olmasından kaynaklanıyor olabilir.

Mehtap ise metinsel ifade ile birlikte şekli açıklamış ve varsayımı açık ve net biçimde ifade edebilmiştir. Aşağıda bu bahsedilenle ilgili olarak doğrudan alıntı verilmiştir.

M: $a \cdot d$ $b.c$ den daha küçüktür.

A: Bu dediklerin nedir?

M: Alan.

A: Peki ne yapılmış bu ispatta?

M: $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ise $a \cdot d$ küçük ya da eşit oluyormuş $b.c$ den.

Öğrencilerin birinci soruya ait çözümleri incelendiğinde, dört öğrencinin de şekli açıklayabildiği ancak bir öğrencinin metinsel ifadeyi incelemeden şekli açıkladığı dolayısıyla hangi varsayımın gösterildiğini fark etmediği görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin sorunun çözümü ile ilgili olarak özetleme yapmasının soruya dair neler yapıldığını ve varsayımın ne olduğunu daha iyi fark etmelerine neden olduğu söylenebilir. Tablo 12 ile öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 12. Birinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması	X			
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması		X	X	X
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması				
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama				
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme		X	X	X
	Varsayımı fark etmeme	X			
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Alan kavramını kullanma	X	X	X	X
Gerekli işlemin yapılması	İşlemi tamamlama	X	X	X	X
	İşlemi eksik yapma				
	İşlemi tamamlamama				
Yapılanların özetlenmesi	Varsayımın niçin doğru olduğuna dair açıklama				X
	Şeklin ve metinsel paylaşımların bütüncül açıklanması		X	X	

Tablo 12, birinci soruya ait ispat süreci aşamalarını özetlemektedir. Öğrenciler, yapılmış olan sözsüz ispatta şekli doğru biçimde açıklayabilmişlerdir. Ancak öğrencilerden bir kısmı şekil ile varsayımın yer aldığı metinsel paylaşımı birlikte açıklarken; bir kısmı yalnızca şekli açıklayabilmiştir. Sadece şekli açıklayan öğrenci, gösterilmek istenen varsayımı fark edememiştir. Bu sözsüz ispatta, öğrencilerin tamamı alan kavramını fark etmiştir ve alan kavramı ile ilgili işlemleri doğru biçimde tamamlayabilmişlerdir. Öğrencilerden biri, soruda yapmış olduğu işlemlere dair özetleme yapmamış olup, diğer üç öğrenciden ikisi varsayımın niçin doğru olduğuna dair açıklama yapmış, biri ise şekli ve metinsel paylaşımı bütüncül biçimde özetlemiştir.

İkinci soruya ait bulgular ve yorumlar.

İkinci soru, geometrik serilerle ilgili bir sözsüz ispat sorusudur. Öğrencilerin bu soruyu gördüklerindeki ilk tepkileri, bu görselin bir fraktal olduğuna dairdi. Öğrenciler, bu soru ile ilgili olarak, gitgide küçülen dikdörtgenlerin toplamının bire eşit olduğunu, kesrin yarısının alındığını ifade edebilmişlerdir. Fakat henüz geometrik seriler hakkında herhangi bir şey bilmedikleri için formal bir ifade ve geometrik serilerin limiti ile ilgili herhangi bir şey ifade edememişlerdir. Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmeden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

Yunus ve Mehtap şeklin bir fraktal olduğunu söyleyen öğrencilerdir. Şekil ile ne yapıldığını doğru biçimde açıklayabilmişlerdir.

A: Şekilde ne yapıldığı hakkında ne söyleyebilirsin?

Y: Bu bir fraktal bunu geçen sene görmüştüm. Hep iki katı kadar küçülmüş ve bunların toplamı da bire eşitmiş.

A: Bire nasıl eşitlemiş sence.

Y: Hepsinde payda eşitlemeye mi çalışmış acaba? Ya da sadeleştirmiş?

Yunus şeklin fraktal olduğunu söyledikten sonra şekle odaklanmamıştır. Metinsel paylaşımdan cebirsel olarak biri nasıl elde edeceğini düşünmüştür.

Y: Sürekli yarısını almış.

A: Orada yazan $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$ nedir sence?

Y: İkiye bölmüş. Bir bütünüün yarısı yani. Sonra tekrar ikiye bölmüş $\frac{1}{4}$ olmuş. Sonra bunları bire eşitlemiş.

A: Bir dediğin nedir peki?

Y: Tamamı yani bütün.

A: Eşitliği genel olarak ifade etmeni istesem ne dersin?

Y: Bilmiyorum.

Mehtap ise şekli doğru biçimde açıklayabilmiştir.

M: Fraktallar. Büyük bir kareyi ikiye bölmüşler. İki eş parçaya bölmüşler yani $\frac{1}{2}$ sini almışlar. Sonra diğer dikdörtgeni iki eş parçaya bölmüş. Böyle devam etmiş.

Öğrenci şekle dair açıklama yapsa da; belirtilen metinsel paylaşım ile şekil arasında herhangi bir bağlantı kuramamıştır.

A: Eşitlik sana ne ifade ediyor?

M: Büyük dikdörtgenle diğer dikdörtgenlerin toplamı 1 e eşit.

A: Bir dediğin nedir?

M: Bir şey gelmiyor aklıma. (uzun bir müddet düşündü) tamam büyük karenin alanı. Bir birimlik bir kareyi bölmüş. Böldüğü parçaları topladığında bire eşit olacak.

Yukarıda alıntılarına yer verilen iki öğrenci de, şeklin fraktal olduğunu ifade ettikten sonra, şekil ve metinsel paylaşımı birlikte incelememişlerdir. Özellikle Yunus payda eşitleme, sadeleştirme gibi işlemlerle biri elde etmeye çalışmıştır. Öğrencinin soruya bu şekilde yaklaşması, öğrencinin varsayımı fark etmesine engel olmuştur.

Can genel olarak sorularda metinsel paylaşım ile şekli beraber inceleyerek çözmeye çalışan bir öğrencidir. Bu soruda da metinsel paylaşım ve şekli birlikte incelemiş ve sözsüz ispatla ne yapıldığını açıklamaya çalışmıştır. Sonsuzluk kavramına ve bütün ifadesine değinmiştir.

C: Yarıya böle böle gitmiş. Bu sonsuza kadar gidiyor. Küçülmüş iki kat arta arta. Bire eşitmiş. Bütünüümüz aynı hiç değişmiyor. Ne artan olacak ne eksilen. İsterse 1/ 10 milyona kadar gitsin yine bir olacak. Aynı bütünden çıkıyorlar.

Ferit de sonsuzluk kavramına ve alan kavramına değinmiştir.

F: Belirli oranda küçülte küçülte gitmiş. Şu dikdörtgenin alanı $\frac{1}{2}$ imiş şu dikdörtgenin $\frac{1}{4}$ imiş. Çeyreğin yarısı. Çeyreğinin çeyreği. Alttaki eşitlikte de bunun sayılı halini vermiş.

A: Bir dediği ne peki?

F: Karenin tamamının alanıdır. Bu kesirli ifadelerin hepsini toplayınca bir çıkıyormuş. Güzel mantıkla yapmışlar. Sonsuzun da sonu varmış.

Ferit'in kullanmış olduğu sonsuzun da sonu varmış ifadesi ile, geometrik dizinin limitinin bir olduğunu gösteren bu sözsüz ispatla, öğrencinin limit kavramını hissetmiş olduğu söylenebilir.

Üçüncü soruya ait bulgular ve yorumlar

Öğrencilerin bu soruda ne yapıldığına dair açıklama yapmaları daha kısa sürmüştür. Bunun sebebi, bir önceki soru ile bu sorunun benzer tarzda sorular olması olabilir. Öğrenciler, bu sözsüz ispat için de taralı karelerin alanları toplamının gösterildiğini söylemişler ancak bu durumu formal şekilde ifade edememişlerdir.

Y: Bir kare var ve dörde bölünmüş. Bu dört parçadan bir tanesi taranmış. Bu toplam $\frac{1}{3}$ 'e eşitmiş.

A: Nasıl yani? $\frac{1}{3}$ dediğin ne?

Y: Üç parçadan birisidir. Yani eşit üç kareden hep birini almış. Dolayısıyla da şeklin tamamının üçte birini almış olmuş.

C: Bu şekilde de yine böyle böyle gitmiş. $\frac{1}{3}$ 'e eşitlemiş. İlk başında da $\frac{1}{3}$ taralı zaten. Sonsuza kadar bu böyle gider.

F: Üstteki şeklin benzeri bu da. Bu sefer ilk şekli dörde bölmüş. Bir yanını taramış. Sonra taraya taraya gitmiş. Demek ki bunun sonu da $\frac{1}{3}$ 'e gidiyormuş.

A: Neden?

F: Taralı şekilleri aldığı için. Eğer hepsini alsaydı yine bir çıkardı.

Doğrudan alıntılarına yer verilen öğrencilerden hiç biri, alan kavramına değinmemiştir. Mehtap ise metinsel paylaşım ile şekil arasında bağlantı kurmuş, görseli ona göre yorumlamıştır.

A: Sence bu şekilde ne yapılmış?

M: Yine bir kare var. Bu sefer dört eşit parçaya bölünmüş. Bu dört eş parçanın da bir eş parçası yine dört eşit parçaya bölünmüş. Böyle devam etmiş. $\frac{1}{4}$ şu baştaki taralı karenin alanı, $\frac{1}{16}$ diğer taralı karenin alanı. Bu böyle gitmiş. Bu taralı alanların toplamı da tamamının $\frac{1}{3}$ 'ne eşit olacağı için $\frac{1}{3}$ 'e eşitlemiş.

İkinci ve üçüncü sorular diziler ve serilerle ilgili benzer sorular olmasından ötürü bu sorularda, öğrencilerin geçirmiş oldukları sözsüz ispat aşamaları birlikte verilmiştir. Tablo 13 ile öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 13. *İkinci ve Üçüncü Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları*

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması	X		X	
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması		X	X	X
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması	X			
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama				
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme		X	X	X
	Varsayımı fark etmeme	X			
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Sonsuzluk kavramını kullanma		X		X
	Alan kavramını kullanma			X	X
	Bütün-parça kavramını kullanma	X	X	X	

Tablo 13 incelendiğinde, ikinci ve üçüncü sorularda öğrencilerin üç aşama geçirdikleri görülmektedir. Şeklin incelenmesi aşamasında, bir öğrenci ya sadece şekli açıklamış ya da sadece metinsel paylaşımdan sonucu elde etmeye çalışmıştır. Yani her iki sunumla bağlantı kuramamıştır. Diğer üç öğrenci ise şekille metinsel paylaşım arasında bağlantı kurarak açıklama yapabilmişlerdir. Öğrenciler bu soruda varsayımın geçerliğini gösterebilmek için alan, parça-bütün ve sonsuzluk kavramlarına değinmişlerdir.

Dördüncü soruya ait bulgular ve yorumlar.

Bu soru, öğrencilerin dönem içinde görmüş oldukları Thales teoreminin sözsüz ispatıdır. Dönem içinde bu konu öğretim programında yer almasına rağmen; öğrencilere bu sözsüz ispat, etkinlik halinde verilmemiştir. Ancak bu sözsüz ispat, ispat beceri testinde öğrenciye yöneltilmiştir. Bu sözsüz ispat, ilk başta öğrenciye tek bir şekil ile sunulmuş ve öğrencilerden bu şekli açıklamaları istenmiştir. Öğrencilerin, bu sözsüz ispatla ilgili yeterli açıklama yapamadıkları görülmüştür. Aynı teoremin bir sonraki sözsüz ispatı, aşama aşama yapılmış bir sözsüz ispattır. Öğrenciler, her bir aşaması verilmiş sözsüz ispatı incelediklerinde şekli açıklayabilmişlerdir ve sözsüz ispatın göstermiş olduğu varsayımına ulaşabilmişlerdir. Aşamalı olarak verilmiş bu sözsüz ispattan sonra, öğrenciler bir önceki soruda verilmiş olan

sözsüz ispat ile aşamalı olarak verilen sözsüz ispatın aynı varsayımı göstermiş olduğunu fark etmişlerdir.

Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

A: Aşağıda verilmiş olan sözsüz ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve nasıl yapıldığına dair ne söyleyebilirsiniz?

Y: Bu Thales teoremiydi sanırım. Bir dikdörtgen var ikiye bölmüş köşegenle. Dikdörtgenler ve üçgenler de var. Küçük üçgenlerin alanı birbirine eşit ve büyük üçgenlerinki de birbirine. O zaman kalan dikdörtgenlerin alanı da birbirine eşit olur. Yani $a'.b = a.b'$

A: Peki sonra ne yapmış?

Y: Sadeleştirme yapmış ve $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ bulmuş.

Yunus bu soruda Thales teoremini fark eden tek öğrenciydi. Şekli inceledikten sonra, köşegenin dikdörtgeni iki eş parçaya böldüğünü söylemiştir. Ayrıca eşit alana sahip şekilleri de belirttikten sonra gerekli işlemleri yapmış ve sonuca ulaşmıştır. Ancak öğrenci varsayımın hangi şartlarda geçerli olduğunu gösteren ve sözsüz ispatın birinci kısmında verilen dik üçgene dair herhangi bir açıklama yapmamıştır.

A: Aşağıda verilmiş olan sözsüz ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve nasıl yapıldığına dair ne söyleyebilirsiniz?

C: b ve b' . b 'nin olmadığı yerler de a ve a' . Kenarları a ve b olan bir üçgen ve kenarları a' ve b' olan bir üçgen var. (Can sözsüz ispatın birinci kısmını inceledikten sonra metinsel paylaşımı incelemiştir)

C: $a'.b = a.b'$ imiş. Bu nasıl oldu ki şimdi? $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ imiş. Enteresan bir şey yapmış burada. Oranları mı aynı oluyor acaba? (Can ikinci şekli incelemiştir) $a'.b$ ve $a.b'$ dikdörtgenin alanları. Taralı alanlar yani. Kenarları yerleştirsem. Dikdörtgenin kenar uzunluğundan biri $a' + a$, diğeri $b' + b$ olacak. Bu iki taralı dikdörtgen neredeyse birbirine eşittir.

A: Neredeyse derken neyi kastediyorsun?

C: Olmak üzere demiş ya soruda ondan öyle dedim. Bu alanlar eşitmiş.

A: Nasıl anladın?

C: Öyle yazıyor.

A: Ama bu eşitliği şekil gösteriyor.

C: Bulamadım.

Can'ın vermiş olduğu cevaba benzer şekilde, Mehtap ve Ferit de, bu sözsüz ispatın nasıl yapıldığına ve neyi ispatladığına dair yeterince açıklama yapamamışlardır. Mehtap, şekli inceledikten sonra metinsel paylaşımdaki eşitliklerden bir şeyler çıkarmaya çalışmıştır ve herhangi bir sonuca ulaşamamıştır. Ferit de şekli ve metinsel paylaşımı birlikte incelemiş ancak o da herhangi bir sonuca ulaşamamıştır.

F: İkinci şekilden başlayayım. Bir dikdörtgen vermiş. Bu dikdörtgeni bölmüş.

A: Sonrasında ne yapmış?

F: Çapraz çarpım yapmış ya onun formülünü mü yapmış acaba?

A: Peki bu eşitliği nereden bulmuş sence?

F: Alan mı acaba?

A: Peki alanlarsa sence bu alanlar neden eşit olmuş?

F: Birinin taban kenarı uzun ama yüksekliği kısa. Diğerinin yüksekliği diğerinden uzun ama taban kenar uzunluğu küçük.

A: Ama bu söylediğin alanların eşitliğini garanti eder mi?

F: Bilmiyorum ki bana öyle geldi.

Tablo 14 ile öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 14. Dördüncü Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması				
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması	X	X	X	X
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması				
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama				
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme	X			
	Varsayımı fark etmeme		X	X	X
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Alan kavramını kullanma	X	X		
Gerekli işlemin yapılması	İşlemi tamamlama	X			
	İşlemi eksik yapma				
	İşlemi tamamlayamama		X	X	X

Tablo 14 incelendiğinde, bu sözsüz ispat için öğrencilerin dört aşama geçirdikleri görülmektedir. Şeklin incelenmesi aşamasında, öğrencilerin tamamı şekil ve metinsel paylaşımı birlikte incelemiş ve açıklamıştır. Ancak sadece bir öğrenci Thales Teoremi ile ilgili varsayımı fark etmiştir. Üçüncü aşama olan varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi aşamasında, iki öğrenci sözsüz ispatta, alan kavramının kullanıldığını fark etmiş ancak sadece öğrencilerden birisi gerekli işlemi yapabilmıştır. Öğrencilerin çoğu şekil ile metinsel paylaşım arasında bir bağlantı kuramadığı görülünce, aynı teoreme ait aşamalı olarak verilmiş olan sözsüz ispata geçilmiştir.

Beşinci soruya ait bulgular ve yorumlar

Bu soru bir önceki bölümde bahsedildiği üzere Thales teoreminin sözsüz ispatının aşama aşama yapılmış halidir. Öğrencilerden sadece bir tanesi bir önceki soruya cevap verebilmişken; bu sözsüz ispata öğrencilerin tamamı cevap verebilmiştir.

Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmeden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

C: Aynısı çıkmış burada da. Üçgen var. Kenarları a , b olan ve a' , b' olan. İlk baştaki küçük üçgeni almış buraya yerleştirmiş. Dikdörtgen ortaya çıkarmış. Boştaki parçaları şey yapmış. Bu üçgenler birbirine eştir.

A: Başka hangi üçgenler eş orada?

C: Büyük üçgenler de eştir. İki dikdörtgenin birbirine eş olduğunu söylüyor. Cidden eştir.

A: Nasıl yani?

C: Dikdörtgeni ortadan ikiye bölmüş. İki üçgen çıkıyor. İki üçgenin alanları da birbirine eş. Bunlar da birbirini götürür. İki dikdörtgen kalıyor bir tek. Bunların da alanlarının birbirine eşit olması gerekir.

A: Tamam bu alanların birbirine eşit olduğunu $a.b' = a'.b$ eşitliği ile ifade etmiş. Sonrasında ne yapmış?

C: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ olduğunu söylemiş. Yani a' 'yı karşıya atmış diğerini de bu tarafa.

A: Bu teoremi hatırlıyor musun?

C: Hatırlamıyorum.

A: Benzerlikte görmüştünüz. Thales Teoremi.

C: Unutmuşum.

Bu alıntıdan görüldüğü üzere, öğrenci her bir şekli sırasıyla incelediği zaman, dikdörtgenin köşegeninin dikdörtgeni iki eş parçaya böldüğünü, üçgenlerin birbirine eş üçgenler olduğunu görebilmiş ve $a.b' = a'.b$ eşitliğinin dikdörtgenlerin alanlarını temsil ettiğini fark edebilmiştir. Can şekli ve metinsel paylaşımı birlikte açıklayabilmiş, varsayımın geçerliği için uygun iddiaları belirleyebilmiş ve gerekli işlemleri yaparak eşitliği gösterebilmiştir. Ancak Can, sözsüz ispatın hangi varsayımı ispatladığını çıkaramamıştır.

Ferit de, sözsüz ispatın hangi teoreme ait olduğunu söyleyememiştir. Fakat şekli doğru biçimde açıklamış ve metinsel paylaşım ile şekli birlikte yorumlayabilmiştir.

F: Bir üçgen çizmiş. Belirli yerden dümdüz çizgi çizerek üçgenin yanında başka bir üçgen oluşturmuş. Sonra dikdörtgen oluşturmuş. Üçüncü kısımda parçaların tam tersini alıp yanına koymuş. Dördüncü kısımda şekilleri tekrar ayırmış.

A: Neden ayırmış sence?

F: Bu şeklin birbirine eşit olduğunu göstermek için ayırmış olabilir. Ayrıca üstteki formülü aynısını vermiş. Demek ki bu iki şekil arasında bağlantı var. Şekli ortadan ikiye böldüğü için oluşan iki şekil birbirine eşit. Üçgenler birbirine eşit olduğu için de diğer kalan şekiller birbirine eşit olur.

A: Peki işlemleri yaparsan ne çıkar?

F: Alanlar eşitse bu alanları vermiş zaten. $a.b' = a'.b$ o zaman sadeleştirme yaparsam ikinci eşitliği elde etmiş olurum.

Öğrencilerin Thales teoremine ait sözsüz ispat etkinliği süreçleri incelendiğinde, öğrencilerin ikinci ispat türünde ne yapıldığını daha kolay anladıkları ve ne yapıldığını açıklayabildikleri görülmüştür. Daha önce bahsedildiği üzere sözsüz ispat etkinlikleri aşamalı olarak planlanmış ve öğrenciler çalışma kâğıtlarındaki yönerge ve öğretmenin yönlendirmesiyle ispata ulaşmışlardır. Derste etkinlikler yapılırken de öğrencilerin aşama aşama ispata yaklaştıkları zaman ispatın yapılış aşamalarını daha iyi anladıkları ve özellikle ispatın sonucuna kendileri ulaştıkları için ispatı yapmaktan keyif aldıkları görülmüştür.

Öğrencinin metinsel paylaşım ve şekli birlikte incelememesi ispatı bütüncül biçimde görmesine engel olmaktadır. Öğrenciler, bu ispat sürecinde, yapılanların özetlenmesi aşamasını ihmal etmişlerdir. Dolayısıyla bu durumun, öğrencilerin sadece sürece odaklanarak; hangi varsayımı niçin gösterdiklerini fark etmelerine engel olduğu düşünülmektedir. Nitekim

Thales teoreminin sözsüz ispatının incelenmesi esnasında araştırmacı ve öğrenci arasındaki geçen diyalog bahsedilen hususa dair örnek teşkil etmektedir.

A: Şimdi şekli ve yapıları doğru biçimde açıkladın. Peki, bu sözsüz ispatın neyi gösterdiğini açıklayabilir misin?

M: Alanların eşitliğini falan mı?

A: İlk başta bir üçgen verilmişti. Bu üçgene dair bir şeyler olabilir mi?

M: Olabilir herhalde bilmiyorum ki.

A: Göstermiş olduğun $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ eşitlik sana ne ifade ediyor?

M: Alanları eşitleyip sadeleştirme yaptık. Onu ifade ediyor.

Tablo 15 ile bu soru için öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir. Yunus bir önceki soruda şekli açıklayabilmiş, varsayımı fark etmiş ve gerekli işlemleri yaptıktan sonra sonuca ulaşabilmiştir. Bu nedenle bu soru Yunus tarafından çözülmemiştir. Bu nedenle Tablo 15 ile üç öğrencinin ispat aşamasına yer verilmiştir.

Tablo 15. Beşinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması	X	X	
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması			X
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması			
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama			
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme			
	Varsayımı fark etmeme	X	X	X
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Alan kavramını kullanma	X	X	X
	Üçgenlerin eşliği fark etme	X	X	X
Gerekli işlemin yapılması	İşlemi tamamlama	X	X	X
	İşlemi eksik yapma			
	İşlemi tamamlayamama			

Tablo 15 incelendiğinde, bu soru için öğrencilerin dört aşama geçirdikleri görülmektedir. Şeklin incelenmesi aşamasında, iki öğrenci sadece şekli açıklarken; bir öğrenci şekil ve metinsel paylaşımı birlikte açıklamıştır. Öğrencilerin hiç biri varsayımı fark etmemiştir. Üçüncü aşama olan varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi

aşamasında, üç öğrenci de alan kavramını ve eş üçgenleri fark etmiş ve gerekli işlemi yapabilmışlardır.

Altıncı soruya ait bulgular ve yorumlar

Bu soru, özdeşliklerin modellemesine yönelik bir sorudur. Öğrencilerin gerek ön testte gerekse son testte bu tip sorulara daha anlamlı cevaplar verdikleri görülmüştür. Öğrenciler ortaokulda bu tip soruları gördüklerini belirtmişlerdir. Dolayısıyla öğrencilerin bu sorulara aşına olduklarını söylenebilir. Öğrencilerin bu tip sorulara aşına olmasından ötürü bu sözsüz ispat, öğrenciler tarafından doğru biçimde açıklanmıştır ve öğrenciler bu sözsüz ispatta, gerekli işlemleri yaptıktan sonra doğru sonuca ulaşabilmışlardır.

Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmeden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

Yunus bu soruda sadece şekli açıklamıştır. Sadece eşitliğin birinci kısmı ile şekli ilişkilendirmiş onun dışında eşitliğin ikinci kısmına dair herhangi bir açıklama yapmamıştır.

A: Aşağıdaki şekilde ne gördüğünü açıklayabilir misin?

Y: (cebirsel ifadeyi okudu). x^2 ve $a \cdot x$ var. a 'yı ikiye bölmüş. O zaman bir kenarı $\frac{a}{2}$ diğer kenar aynı olur zaten. En son şekilde kenarlara eklemiş böldüğü parçaları. Bu kadar başka bir şey görmüyorum.

Yunus'un aksine Can metinsel paylaşım ile şekli birlikte incelemiş ve ne yapıldığını anladığını belirten ifadeler kullanmıştır. Sonrasında araştırmacı ne yapıldığını anlatmasını istemiştir.

C: Burası x^2 oluyor. Dikdörtgeni ortadan ikiye bölmüş. Kenarları $\frac{a}{2}$ olmuş. Kenarı $\frac{a}{2}$ olan dikdörtgeni x^2 'nin yanına koymuş. Son şekilde bir kare çıkmış. Bu kare ne oluyor? Karenin şu kısmı eksik kalmış. Bu küçük karenin kenarı $\frac{a}{2}$. O zaman alanı da $(\frac{a}{2})^2$ olur.

Öğrenci bu aşamada tekrar formüle dönmüştür.

C: Bu formülde ne yapmış? Çıkarmış burada tamam doğru işte.

A: Nasıl yapmış anlatır mısın?

C: Şurada kare var bunun alanı x^2 . Alanı $a \cdot x$ olan bir dikdörtgen var. Bunu ortadan ikiye bölmüş $\frac{a}{2}$ olarak. x^2 etrafına birleştirmiş bu küçük dikdörtgenleri. Burada bir boşluk

kalmış. $\frac{a}{2}$ kenar uzunluğunda. Toplamında bu karenin alanı $(\frac{a}{2})^2$. Büyük karenin alanı $(x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$ yaparsak ilk baştaki toplam şeklin alanı kalıyor.

Can bu soruda şekli ve metinsel paylaşımı beraber incelemiş, göstermek istediği varsayımı şekille ilişkilendirmeye çalışmış, alan kavramını kullanmış, sonuca ulaşmış ve yapmış olduklarını özetleyebilmiştir.

Ferit de bu soruyu doğru biçimde açıklayarak sonuca ulaşabilen öğrencilerdendir.

F: Üstte bir formül vermiş. Bu formülü bu şekille göstermeye çalışmış. x^2 demiş. Bu birinci şekildeki karenin alanıdır. Aşağıda bir kenarı a diğer kenarı x olan bir dikdörtgen var. Bunun alanı da $a \cdot x$. Bu da yazıyor burada. İkinci kısımda kare aynı duruyor dikdörtgeni ikiye bölmüş.

Öğrenci bunları yaptıktan sonra metinsel paylaşımına tekrar dönmüştür.

F: $x + \frac{a}{2}$ nin karesini almış. Dikdörtgenleri alıp kareyle birleştirmiş. Sonra bu şekil oluşmuş. Ama tam kare olması için şu küçük boşluk kalmış. Üstteki formül de bu şeklin alanını vermiş. Bu alanlar $(x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$ imiş. Nasıl desem eşittir ya burası.

Metinsel paylaşımına geri döndükten sonra, metinsel paylaşım ile şekli eşleştirmeye çalışmıştır.

F: büyük karenin kenarı $x + \frac{a}{2}$ o zaman alanı $(x + \frac{a}{2})^2$. Ama şu küçük kare olmamalı. O zaman onu da çıkarırız.

Ferit sözsüz ispatı kendi başına herhangi bir yardım ya da yönlendirme olmadan yapabilmıştır. Ferit de Can'ın geçirmiş olduğu süreçleri geçirmiştir. Mehtap ise, araştırmacının yönlendirmesine ihtiyaç duymuş sonuca ancak o şekilde ulaşabilmıştır.

M: Özdeşlikler bu. Kare var iki tane dikdörtgen var. Bunları birleştirmiş. Kenar uzunluklarını yazsam bir şey bulabilir miyim? Burada da küçük bir kareyi çıkarmış.

A: O karenin kenar uzunluğu nedir?

M: a mı x mi? yok pardon $\frac{a}{2}$.

A: Son şekildeki karenin bir kenarı hakkında ne söylersin?

M: $x + \frac{a}{2}$

A: Bu karenin alanı nedir peki?

$$M: (x + \frac{a}{2})^2$$

A: Ama şu küçük kare var mı benim elimde?

M: Hayır yok. Büyük kare ve dikdörtgenler var.

A: O zaman bu küçük kareyi ne yapmam lazım?

M: Çıkarmam lazım. Anladım ondan eksi $(\frac{a}{2})^2$ demiş. Yukarıda bunu demişti zaten.

Tablo 16 ile bu soru için öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 16. Altıncı Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması			X	
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması		X		X
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması				
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama	X			
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme		X	X	X
	Varsayımı fark etmeme	X			
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Alan kavramını kullanma		X	X	X
Gerekli işlemin yapılması	İşlemi tamamlama		X	X	X
	İşlemi eksik yapma				
	İşlemi tamamlayamama	X			
Yapılanların özetlenmesi	Şeklin ve metinsel paylaşımların bütüncül açıklanması		X		X

Tablo 16 incelendiğinde, bu sözsüz ispat için öğrencilerin beş aşama geçirdikleri görülmektedir. Şeklin incelenmesi aşamasında iki öğrenci sadece şekli açıklarken; iki öğrenci şekil ve metinsel paylaşımı birlikte açıklamıştır. Öğrencilerin sadece biri varsayımı fark etmemiş olup, sonuca ulaşamamıştır. Diğer öğrenciler ise varsayımı fark etmişlerdir. Varsayımı fark eden üç öğrenciden ikisi, diğer aşamaları da başarılı biçimde geçebilmiş ve sonuca kendisi ulaşabilmiştir. Varsayımı fark eden bir diğer öğrenci ise, ancak araştırmacının yönlendirmesi ile sonuca ulaşabilmiştir.

Yedinci soruya ait bulgular ve yorumlar.

Bu soru, bir önceki soru gibi bir özdeşlik sorusudur. Burada $x^2 + y^2$ nin özdeşliği modellenmektedir. Sözsüz ispatta, köklü ifadenin yer alması öğrencilerde korkuya sebep olmuş olup, soruya yoğunlaşamamışlardır. Örneğin Can bu konu ile ilgili olarak;

C: Saçma bir formül daha. Kök girince zor oluyor.

ifadesini kullanmıştır.

Benzer şekilde Yunus şekli açıklayabilmiş ama kenar uzunluklarını yazamamıştır. Yunus cebirsel ifadelerden sonuca ulaşmaya çalışınca, araştırmacı şekle yönelmesini istemiştir.

A: İstersen şekille birlikte inceleyebilirsin.

Y: x^2 ve y^2 var. Burası ilk şekildeki yer. Bunlar sonraki şekle eşit. x ve y eklemiş sonra karesini almış. $2xy$ demiş. Bunu nasıl demiş acaba? Bu $x.y$ olan dikdörtgenleri almış buraya taşımış. Dikdörtgenin bir kenarı uzamış bir kenarı kısalmış kare olmuş. Burada yazan $\sqrt{2xy}$ nin karesi $2xy$ verir. Bu şekli almış açmış.

A: Taralı alanları neden çıkarmış?

Y: Onları biz eklemiştik o yüzden.

A: Peki kenar uzunluklarını nasıl bulmuş?

Öğrenci uzun bir müddet kenar uzunluklarını bulmaya çalışmıştır. Ancak sonuca ulaşamamıştır. Bu durumda öğrenci, bu sözsüz ispatta şekli metinsel paylaşım ile beraber açıklayabilmiş ve varsayımına ulaşabilmiştir. Ancak öğrenci gerekli işlemlerin yapılması aşamasında, işlemin ne olduğunu belirleyememiş dolayısıyla işlemi tamamlayamamıştır.

Benzer şekilde Mehtap isimli öğrenci de gerekli işlemleri belirleme aşamasında kalmış, sonuca ulaşamamıştır.

M: Burada bir büyük bir küçük kare var. Biri x^2 diğeri y^2 . Sonra bir dikdörtgen ekleme yapmış. Neymiş kenarları x ve y . Alanı da xy . İki tane taralı dikdörtgenden bir kare yapmış sanırım.

A: Nasıl yapmış olabilir? Mesela bu iki dikdörtgenin alanının toplamı nedir?

M: $xy + xy = 2xy$

A: Tamam devam et bakalım.

M: Sonra taralı olmayan büyük dikdörtgenle küçük dikdörtgeni birleştirmiş. Ne yapmış ki?

A: Kenarların özellikleri orada yazıldığı gibi mi?

Mehtap uzun süre düşünmüş ancak kenar uzunluklarını bulamamıştır. Diğer iki öğrenci ise, ispatın tüm aşamalarını geçirmiş ve sonuca ulaşabilmişlerdir.

C: xy den iki tane var. y^2 var. O zaman kenarının uzunluğu y . Bu karenin de bir kenarı x . Burada iki tane karenin alanları toplamını yani $x^2 + y^2$ bulmaya çalışıyor. Kenarları çarpmış iki katını almış. xy alanlı dikdörtgen oluşturmuş. Bu dikdörtgenleri toplamış. $2xy$ olur. Tamam anladım. Dikdörtgeni 90° çevirmiş. Uzun kenar $x + y + \sqrt{2xy}$ olur. Diğer kenar da $x + y - \sqrt{2xy}$ olur. Beyaz olan parçaların alanını bulmaya çalışmış. Bu taralıları ekledi. Alanları topladı. Sonra taralıları çıkardı. Çünkü en başta onları bulmaya çalışmıyordum.

F: Birinci şekle xy alanlı iki tane dikdörtgen eklenmiş. Sonra dikdörtgenleri birleştirmiş başka bir kare yapmış. Bu karenin alanı $2xy$. O zaman bir kenarı $\sqrt{2xy}$.

A: Peki, ikinci şekilden sonraki şekle neden geçmiş?

F: Tamam şunu yapmış anladım. Taralı alanı çıkarmış. Sonra şekli açmış. Fark ettim şimdi.

A: Taralı alanı neden çıkarmış?

F: Taralı alanı biz eklemiştik. Aslında biz $x^2 + y^2$ bulmaya çalışıyorduk. Kare oluşturmak için dikdörtgenleri eklemiştik. Sonra bu dikdörtgenleri birleştirdik kare yaptık. Sonra o taralı kareyi çıkardık. Sonra oluşan şeklin kenar uzunlukları da böyle olur zaten.

A: Bütün bunları neden yapmış sence?

F: $x^2 + y^2$ nin formülünü bulmak için.

Doğrudan alıntılardan görüldüğü üzere Can ve Ferit şekli metin ile birlikte açıklayabilmişler, şeklin $x^2 + y^2$ özdeşliğinin formülünü göstermeye çalıştığını fark etmişler, gerekli işlemleri yaparak oluşturulan yeni şeklin kenar uzunluklarını bulmuşlar ve yapmış olduklarını özetleyebilmişlerdir.

Tablo 17 ile bu soru için öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 17. Yedinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması				
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması		X	X	X
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması	X			
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama				
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme	X	X	X	X
	Varsayımı fark etmeme				
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Kenar uzunluklarını belirleyebilme		X		X
Gerekli işlemin yapılması	İşlemi tamamlama		X		X
	İşlemi eksik yapma				
	İşlemi tamamlayamama	X		X	
Yapılanların özetlenmesi	Şeklin ve metinsel paylaşımların bütüncül açıklanması		X		X

Tablo 17 incelendiğinde, bu sözsüz ispat için iki öğrenci ispatın bütün aşamalarını tamamlamış olduğu, iki öğrencinin ise varsayımı fark ederek ikinci aşamadan sonraki aşamalara geçemedikleri görülmektedir. Şeklin incelenmesi aşamasında bir öğrenci sadece metinsel paylaşımlara odaklanmış ve cebirsel işlemlerle eşitliği elde etmeye çalışmıştır. Araştırmacının yönlendirmesi üzerine şekli ve metinsel paylaşımı birlikte inceleyip açıklayabilmiştir. Diğer öğrenciler ise, şekli metinsel paylaşım ile beraber incelemiş ve açıklayabilmiştir. Tüm öğrenciler varsayımı fark edebilmiş ancak sadece iki öğrenci gerekli kenar uzunluklarını belirleyerek işlemi tamamlayabilmiştir. Diğer iki öğrenci ise kenar uzunluklarını yerleştirememişlerdir.

Sekizinci soruya ait bulgular ve yorumlar.

Sekizinci soru, üç boyutlu bir sözsüz ispat olup, $a^3 - b^3$ özdeşliğinin açılımını vermektedir. Öğrencilerin üç boyutlu şekillerle uğraşmaktan çekindikleri gözlemlenmiştir. Hacim kavramı yerine, alan kavramını kullandıkları, alan kavramı yerine, çevre kavramını kullandıkları ve şekle ait kenar uzunluklarını belirlemede sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Öğrencilerden birinin soruya dair hiçbir şey yapamadığı, diğer öğrencilerin ise ancak araştırmacının yönlendirmesiyle kenar uzunluklarını yerleştirebildikleri görülmüştür.

Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmeden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmaya çalışılacaktır. (A: Araştırmacı; Y: Yunus; C: Can; M: Mehtap; F: Ferit)

A: Aşağıdaki şekilde ne görüyorsun? Açıklar mısın?

Y: Kesit almışlar herhalde.

A: a^2 deyince ne canlanıyor gözünde?

Y: Alan

A: a^3 deyince ne canlanıyor gözünde?

Y: Hacim mi? Buralar a (kenarları kastediyor). Bunların çarpımı a^3 . b de aynı şekilde. $a^3 - b^3$ yapınca şu diğer şekiller kalmış elimizde. Altta yazan yazılı ifadeler de bu şekillerin hacmi herhalde. b neresi acaba? Taban da değil. Şurası $a - b$ mi acaba?

Y: Tamam bir şeyin hacmi üç kenarın çarpımıydı. Burada da bu kenarların çarpımı bunu veriyor zaten.

Yunus'un kenar uzunluklarını yazarken kendinden emin olmadığı fark edilmiştir. Şekil ve metinsel paylaşımın bağlantısı olduğunu anladıktan sonra, metinsel paylaşımda yazanlara göre şeklin kenar uzunluklarını yerleştirebilmiştir. Nitekim metinsel paylaşım ile bağlantıyı fark etmeden önce, kenar uzunluklarını doğru biçimde yerleştirememiştir. Bu yüzden araştırmacı tarafından, öğrencinin şekli tekrar incelemesi istenmiştir. Bunun üzerine öğrenci ilk şekli tekrar incelemiş ve böylelikle kenar uzunluklarını doğru biçimde yerleştirebilmiştir.

Can varsayımı fark etmiş, şekilde ne yapıldığını açıklamış ancak kenarları yerleştirmede sıkıntı yaşamıştır. Şekil ile metinsel paylaşımı doğru biçimde ilişkilendirebilmiştir. Ancak, araştırmacı tarafından hacimde üç boyutun olması gerektiği hatırlatılınca, kenar uzunluklarını yerleştirebilmiştir.

C: Üç boyutlu bir dikdörtgen prizması gibi bir şey var burada. a içinde b var. Çok uzunmuş bu da. Bunu üç parçaya bölmüş. Özdeşlik bu yine sanırım. Bu konuyu da pek sevmiyorum.

A: Ne yapmış sence?

C: İki küpü birbirinden çıkarmış.

A: Ne olmuş peki?

C: Üç parça kalmış. Bu parça şu yazana ait bu parça buna bu da diğerine. Kenar uzunluklarını yazsam bunlar çıkar herhalde. Bir yazayım. İlk prizmada alana $a^2 \cdot (a - b)$ demiş. Tamam $a - b$ burası. Diğer kenar da a^2 olur.

A: Bir kenarın uzunluğu a^2 olabilir mi? üç boyutta çalışıyorsun. a^2 deyince ne anlıyorsun?

C: Alanı anlıyorum.

A: Peki hacimde kaç boyut vardır?

C: Üç boyut.

A: O zaman senin de bana üç tane boyut söylemen gerekmez mi?

C: a^2 bir yerin alanı olacak o zaman. Tamam, burası işte. Bir kenarı a olan kare.

A: Şimdi diğer parçaları da bul.

C: Tamam burası b , burası b , burası da $a - b$. Aynı şekilde burası a , burası b burası da $a - b$. Tamam oldu işte. Gerçekten burada yazıldığı gibi.

Ferit isimli öğrenci, şekil ile metinsel paylaşımda yazanları eşleştirerek gitmiştir. Eğer metinsel paylaşım olmasa, öğrencinin kendi başına kenar uzunluklarını yerleştirmekte zorlanacağı düşünülmektedir. Ferit şekli doğru biçimde açıklayabilmiş ve metinsel paylaşımın bir özdeşliği verdiğini ifade edebilmiştir. Ancak Ferit'in de Can gibi alan, hacim ve çevre kavramları ile ilgili kavram yanılgılarına sahip olduğu görülmüştür. Aşağıda Ferit'in soru çözme sürecine ait alıntı yer almaktadır.

F: Şekilde ne görüyorum? Bir tane kare mi neydi bu? Siz söyleyin prizma mıydı? Küp tamam. Bir kenarı a imiş. Ama bunun içinde başka bir küp var. Bu küpün bir kenarının uzunluğu da b imiş. Sanırım bunlar (şekilleri kastediyor) şu küpü çıkardığımızda kalanın alanı oluyor.

A: Alan mı? 3 boyuttasın.

F: Çevre mi?

A: Değil.

F: O zaman hacim tamam. Yani buradaki formül şu şeklin hacmini veriyor. Kenarı b idi. o zaman buranın uzunluğu $a - b$. Burası a , burası b . Tamam bu şekillerin hacmi altta yazanlara eşit oluyor.

Ferit kenar uzunluklarını, metinsel paylaşımdan faydalanarak yazmıştır. Alıntıdan da anlaşılacağı üzere öğrencinin çevre, alan ve hacim kavramları ile ilgili eksiklikleri mevcuttur. Bu soru ile ilgili olarak öğrencilerin şekilde ne yapıldığını açıklayabildikleri görülmüştür. Ayrıca öğrenciler varsayımı da fark edebilmişlerdir. Gerekli işlemler aşamasında da, metinsel paylaşımların yardımı ile de olsa bir öğrenci dışında bütün öğrencilerin kenar uzunluklarını yerleştirebildikleri görülmüştür. Öğrencilerin iki boyutlu modelleme örneklerinde, üç boyutlu modelleme örneklerine göre daha iyi oldukları görülmüştür.

Tablo 18 ile bu soru için öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 18. *Sekizinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları*

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması				
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması	X	X	X	X
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması				
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama				
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme	X	X	X	X
	Varsayımı fark etmeme				
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Kenar uzunluklarını belirleyebilme	X	X		X

Tablo 18 incelendiğinde, bu sözsüz ispatta, öğrencilerin üç aşama geçirdikleri görülmektedir. Öğrencilerin tamamı, şekli ve metinsel paylaşımı birlikte açıklamış ve şeklin gösterdiği eşitliği fark ederek varsayımı fark etmişlerdir. Bir öğrenci kenar uzunluklarını yerleştiremezken diğer üç öğrenci metinsel paylaşımlar yardımıyla kenar uzunluklarını belirleyebilmişlerdir.

Dokuzuncu soruya ait bulgular ve yorumlar.

Bu soru, tamsayı ilişkileri ile ilgili bir sorudur. Öğrencilerin bu soruyu çözme süreci incelendiğinde, öğrencilerin belli sayının modellenmesinden genele geçişte zorlandıkları görülmüştür. Örneğin öğrencinin altı toptan oluşmuş bir kareyi n^2 olarak ifade edemediği görülmüştür.

Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmeden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

A: Şekilde ne görüyorsun? Açıklayabilir misin?

Y: Toplar var. Saysam mı acaba önce bunları? 21 tane burada var 21 tane de burada. o zaman $21 + 21$ diyordur. 36 mı burada. Yok değil. 6^2 mi? (ikinci şekli kastediyor) Ekleyip bu eşitliği mi bulmuş acaba? Çok karışık bu soru. İki şekli birleştirip kare oluşturmuş. (öğrenci şeklin yanında verilmiş olan fazla altı top hakkında herhangi bir şey söylememiştir)

A: Metinsel ifade de yer alan $\frac{1}{2}$ ne?

Y: Yarısını mı alıyor? Sayı versem ne çıkar? 1 desem mesela formülde de bir çıkıyor. 6'yı denesem. Sonuç 21 çıkıyor. İlk şekilde de 21 top vardı. Çevre mi bu ne acaba? Yok değil çevre. Anlamadım tam olarak.

A: Yapılanları tekrar ifade eder misin?

Y: İki tane üçgen almış birleştirmiş fazlalığı çıkararak kare yapmış. Sonra bunun yarısını almış. $(n^2 + n)$ nin yarısını bulmaya çalışmış.

Görüldüğü üzere, öğrenci genellemeye gitmekte zorlanmıştır. Öğrenciye göre şekilde altı top var ve o altı topu n olarak ifade edememektedir. Nitekim Yunus 6^2 'ni fark etmesine rağmen, n^2 ifadesine anlam verememiştir. Ancak öğrenciden yapılanları özetlemesi istendiğinde, soruda $(n^2 + n)$ nin yarısının bulunmaya çalışıldığını fark etmesi, ispatın son aşaması olan yapılanların özetlenmesi aşamasının önemli olduğunu gözler önüne sermektedir. Nitekim belli bir aşamaya gelen ve sonrasında yapılanları tekrar eden öğrencilerin sonuca yaklaştığı ya da sonuca ulaştığı diğer sözsüz ispatlarda da görülmüştür.

Yine yukarıdaki öğrenci çözümüne benzer şekilde Mehtap da şekli açıklayabilmiş ama çözümün sonunu getirememiştir.

A: Şekilde ne gördüğünü açıklar mısın?

M: Örüntü. Toplarla oluşturduğu üçgenle diğer topla oluşturduğu üçgeni toplamış ve bir sırayı çıkarmış. Sonra ne olmuş ki? Bunu yapmış.

A: Şeklin sonunda bir eşitlik vermiş. Onu da dikkate al istersen.

M: Üçgenleri topladığında bize bir kare vermiş. Bu karede bir şeyin formülünü vermiş. n dediği karenin kenarı mı?

A: Topları sayar mısın?

M: 1,2,3,4,5,6. Tamam anladım. Bu üçgenle bu üçgenin toplamı $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ ye eşitmiş. Ama burada altı tane top var.

A: n^2 dediği nedir burada sence?

M: Karenin alanı mı?

A: Fazladan çıkardığımız şu toplar nedir peki?

M: 6

A: Evet burada altı ama genel olan bir ifade için ne söylersin?

M: O zaman n deriz herhalde.

A: Güzel. Peki, $\frac{1}{2}$ dediği nedir?

M: Hiç bilmiyorum.

Görüldüğü üzere öğrenci bir takım şeyleri fark etmiş olmasına rağmen işlemi sonlandıramamıştır. Topları saymadan önce n^2 nin karenin alanı olduğunu düşünmüş, ancak araştırmacının öğrenciden topları saymasını istemesinden sonra kafası karışmış ve n^2 ve 6^2 ifadelerini ilişkilendirememiştir.

Can bu soruda formülü hatırlamış, şekli doğru biçimde açıklamış ve diğer öğrencilere göre birçok işlemi denemiş, daha doğru biçimde soruya yaklaşmış ve sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla öğrencinin formülü hatırlamış olmasının da soruya yaklaşma biçimini etkilemiş olacağı düşünülebilir. Bu yüzden, ispat aşamalarından varsayımı fark etme aşaması da yapılanların özetlenmesi aşaması gibi sonuca ulaşmak için önemli olarak görülebilir. Öğrenci formüldeki sayının değiştirilmesiyle yine sonuca ulaşabileceğini ifade edebilmiştir. Dolayısıyla öğrenci bu sözsüz ispatın $n=6$ için olan özel bir duruma işaret ettiğini fark edebilmiştir.

Bu durumda, tek bir örneğin resmedildiği sözsüz ispatla öğrencilerin ispatı tüm tamsayılarda genelleyebilip genelleyemeyeceği elbette tartışılabilir bir konudur. Nitekim öğrencilerden bir tanesi bu soruda genellemeye gidebilmişken diğer üç öğrenci genellemeye gidememiştir. Bu durum sonuç bölümünde tekrar ele alınmıştır. Sınıf uygulamalarında, öğretmenin bu konuya dair açıklamalarda bulunarak, öğrencinin formülü yapılandırmasına ve nereden geldiğine ikna olmasına yardımcı olabileceği düşünülmektedir. Aşağıda genellemeye gidebilen öğrenciye ait doğrudan alıntıya yer verilmiştir.

C: Burada iki tane üçgen var. (tabandaki ve yandaki topları saydı) bu üçgenler ikizkenar eş üçgenler. Sonra bunları birleştirmiş ortak yerler var. Şu ortadaki kısım hem siyah hem beyaz. (metinsel ifadeye baktı) ben bu formülü hatırlıyorum. Şu ikisinde de ortak olanı şuraya almış kare oluşturmuş. Şekli anladım aslında ama formülü anlamadım.

A: Şekil ile formülü beraber düşünebilirsin.

C: Son sayının karesi mi diyor acaba? n ne ki burada? Ekleyeceğimiz sayı sanırım.

A: Nasıl yani? Biraz açıklar mısın?

C: 1, 2... diye gidiyor. 6 için yapsam mesela? 21 çıkıyor.

A: 21 nedir?

C: Topların toplamı oluyor sanırım. Yoksa bir şeyin alanı mı? Bu üçgenin alanı $\frac{6.6}{2} = 18$ ve $18+18 = 36$. Ama sonuç 36 değil. Bu ne peki? Acaba şu fazla topu çıkarınca mı alan? $36 - 6 = 30$. Bu da değil. Eklenen noktayı mı bulduk? Toplam nokta 42. Bunun yarısı da 21. Tamam bu formülü bu şekilde göstermiş işte.

A: Yarısını neden almış?

C: Bir tane üçgeni bulmak için. Bunu n için yapmış. Yani sayıyı değiştirsek yine buluruz.

Ferit de şekli açıklayabilmiş ama n ifadesine anlam verememiş ve sonuca ulaşamamıştır.

F: Daireler vermiş burada. Bu dairelerden görünüş olarak bir dik üçgen yapmış. İki üçgeni toplayıp şöyle bir şekil yapmaya çalışmış. Bu kareyi oluşturması için şu fazlalığı çıkarması lazım. Bunu çıkarırsa kare oluşuyor. n dediği ne burada?

A: Genelleme ifadesi olarak kullanmış.

F: n 'ye bir kenarı dersek alanı ile kenarını toplayınca ve yarısını alınca bütün sayıların toplamını verir herhalde.

A: Bu örnek için dediğini yapabilir misin?

F: Şuraya n diyelim burası da n olur.

A: Bu örnekte n mi orası?

F: Değil. Sayalım o zaman. 6 tane. $6^2 + 6 = 42$ ve $\frac{1}{2} \cdot 42 = 21$ yani hepsinin toplamı 21 imiş.

A: Hepsi dediğin nedir?

F: Dairelerin

A: Öyle mi gerçekten?

F: 36. Alanı o zaman 21 bu şeklin.

A: Kenarı 6 dedin ama. O zaman alan 36.

F: O zaman bu 21 ne? Üçgenin alanı falan mı? Yok, o da değil. Üçgenin alanı 18. Bilmiyorum anlamadım.

Görüldüğü üzere, öğrenci şekli açıklayıp, varsayımı kısmen fark etmesine rağmen, özel örnekten genellemeye varamamıştır. Esasında öğrencinin yapmış olduğu açıklamaların birçoğu doğru olmasına rağmen sözsüz ispatta verilmiş örneği yapması istendiğinde öğrencinin kafası karışmış ve sonuca ulaşamamıştır.

Tablo 19 ile bu soru için öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 19. Dokuzuncu Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması	X		X	X
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması				
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması		X		
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama				
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme		X		
	Varsayımı fark etmeme	X		X	X
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Özelden genelleme yapıldığını fark etme		X		
Gerekli işlemin yapılması	İşlemi tamamlama		X		
	İşlemi eksik yapma	X		X	X
	İşlemi tamamlayamama				
Yapılanların özetlenmesi	Şeklin ve metinsel paylaşımların bütüncül açıklanması		X		

Tablo 19 incelendiğinde, bu soru için öğrencilerin tamamının şekli doğru biçimde açıklayabildikleri görülmektedir. Bir öğrenci sözsüz ispatın vermiş olduğu formülü hatırlayarak varsayımı fark etmiştir. Diğer öğrenciler ise varsayımı fark edememişlerdir. Öğrencilerden sadece bir tanesi soruda genellemeye gidebilmiş diğer öğrenciler ise işlemlerden bir kısmını yapmalarına rağmen genellemeye gidememişlerdir. Öğrencilerden birisi araştırmacı tarafından yönlendirilmiş ve yapılanları özetlemesi sağlanmıştır. Yapılanları özetleyen öğrenci sözsüz ispata dair varsayımı belirleyebilmiştir.

Onuncu soruya ait bulgular ve yorumlar

Bu soru, geometrik ortalama ile aritmetik ortalamanın arasındaki ilişkiyi gösteren ve öğrencilerin Öklid teoremini kullanmalarını gerektiren bir sözsüz ispattır. Ancak öğrencilerden sadece birisi bu teoremi kullanarak uzunluğun nereden geldiğini açıklayabilmiştir. Diğer öğrenciler bu uzunluğu sorgulamamışlardır.

Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmeden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

A: Şekilde ne görüyorsun? Açıklar mısın?

Y: Burada dairenin içine bir üçgen koymuş. Yüksekliği çizmiş. Burası dik herhalde.

A: Bu uzunluk neden $\sqrt{a \cdot b}$?

Y: Öklid Teoremi'nden.

A: Öklid Teoremi ne diyordu?

Y: Dik üçgende yüksekliğin karesi böldüğü parçaların çarpımıydı. Yani $a \cdot b$.

A: Diğer şekilde ne yapmış?

Y: Yarıçapını almış buraya da $\frac{a+b}{2}$ demiş.

A: Onu nasıl demiş?

Y: Çap $a + b$ olduğu için yarıçap yarısıdır.

A: bu verilen uzunluklarla ilgili ne söyleyebilirsin?

Y: Yarıçap üçgenin yüksekliğinden büyük ya da eşit oluyormuş. Biz de bunu gösterdik sanırım. Gerçekten de bu uzunluk (yarıçapı kast ediyor) diğer uzunluktan daha büyük.

Görüldüğü üzere, Yunus şekli doğru biçimde açıklayarak birinci aşamayı geçmiş, soruda verilen uzunlukların nereden geldiğini gerekçelendirebilmiş, yani hangi işlemlerin neden yapıldığını açıklayabilmiştir. Öğrenci varsayıma dair herhangi bir şey söylememiştir. Buna karşın, araştırmacı öğrenciyi verilen uzunluklarla ilgili ilişkilendirme yapmaya yönlendirmiş ve şekille gösterilmek istenene dikkat çekmeye çalışmıştır.

Özellikle varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmemesi, öğrencilerin işlemler içinde boğulmasına ve öğrencilerin sadece işlemlere yoğunlaşarak gösterilmek istenen varsayımdan kopmalarına neden olmaktadır. Nitekim sözsüz ispatlar, öğrenciye formüllerin niçin doğru olduğunu gösterme işlevini yerine getirmektedir. Ancak varsayıma dikkat

çekilmemesinin, bu işlevin yerine gelmesine engel olacağı düşünülmektedir. Bu nedenle öğrencinin sözsüz ispat çözme sürecinde yönlendirilmesi önemli olarak görülmektedir.

Can sorularda genellikle metinsel paylaşım ile şekli beraber inceleyen bir öğrencidir. Bu sorudaki süreç göz önüne alındığında, metinsel paylaşımın olması, öğrenciye varsayımın ne olduğunu fark etmesine yardımcı olmaktadır. Ayrıca öğrenciler metinsel paylaşımından bir şey çıkaramadıkları zaman şekle yönelmekte, şekilden herhangi bir şey çıkaramadıklarında da metinsel paylaşıma yönelerek, her iki paylaşımı ilişkilendirebilmektedirler. Can bu soruda tabanı ve yüksekliği verilen üçgenin alanını bulmaya çalışmış ve bir sonuç elde edememiştir.

C: Ne yapmış burada silmiş mi? Uzunluk $\sqrt{a \cdot b}$ imiş. Burası a burası b imiş. Toplamı $a + b$ yani üçgenin tabanı. Yüksekliği de $\sqrt{a \cdot b}$ imiş. Burada da bir şey vermiş. Taban uzunluğu bölü iki. Bu iki uzunluk eşit mi birbirine? Hayır değil.

A: Ne peki?

C: Birisi yarıçap. Yarım daire var. Üçgen var. Bu ne ki? Yarıçap mı?

A: Yarıçap olduğunu nasıl anlarsın?

C: Ortadan ikiye mi bölüyor ona bakarım. İki tarafın da eşit olması lazım. Tabanın yarısı bu da çap zaten tamam o zaman burası yarıçaptır.

A: Şekil ne anlatıyor sana?

Uzun süre sessizlik oldu.

A: Biraz önce uzunlukların birbirine eşit olmadığını söyledin. Peki, bu uzunluklar arasında kıyaslama yaparsan ne dersin?

C: $\sqrt{a \cdot b}$ $\frac{a+b}{2}$ den küçükmüş. Ama ne işe yarıyor bu anlamadım.

Can, Mehtap ve Ferit gerek şekle dair gerekse şeklin ulaşmaya çalıştığı sonuca dair yeterli açıklama yapamamışlardır. Metinsel olarak eşitliğin verilmemiş olması, öğrencilerin sonuca ulaşmasını ya da uzunluklar arasında kıyaslama yapması gerektiğini düşünmelerine engel olmuştur. Bu bağlamda sözsüz ispatlarda varsayımın metinsel olarak verilmesinin önemli olduğu düşünülmektedir.

Mehtap ve Ferit de Can gibi $\sqrt{a \cdot b}$ uzunluğunu gerekçelendirememiştir. Aşağıda Ferit'in ve Mehtap'ın ispat süreci ile ilgili doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

M: Çember var burada. İçine üçgen ve yükseklik çizmiş. Yükseklik $\sqrt{a \cdot b}$ imiş.

A: Nasıl demiş bunu?

M: Bilmem demiş öyleymiş demek ki.

A: Peki, sonra?

M: Yarıçapı göstermiş. Başka bir şey görmüyorum.

A: Verilmiş olan uzunlukları kıyaslarsan.

M: $\frac{a+b}{2}$ daha uzunmuş.

A: Ferit bu soruda yüksekliği $\sqrt{a \cdot b}$ olarak vermiş olması hakkında ne söyleyebilirsin?

F: Bilmiyorum nasıl yapmış. İkisini çarpıp karekök içine almış ama.

Öğrenciler verilmiş olan varsayımın, aritmetik ve geometrik ortalama ile ilgili olduğunu fark etmemişlerdir. Öğrencilerden birisi hariç diğerleri geometrik ortalamayı daha önce duymadıklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin tamamı ise aritmetik ortalamanın ne olduğunu bildiklerini ifade etmişlerdir. Aritmetik ortalama ve geometrik ortalama konularının işlendiği sırada bu tip bir etkinliğin verilmesi öğrencilerde ortalamalara dair somut bir farkındalık kazandırabilir. Bu anlamda bu sözsüz ispatta sürecin aşamaları görülememiştir.

Tablo 20 ile bu soru için öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 20. Onuncu Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Sadece şeklin açıklanması	X		X	X
	Şekil ve metinsel ifadenin birlikte açıklanması		X		
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması				
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme				
	Varsayımı fark etmeme	X	X	X	X
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Öklid Teoremini kullanarak yüksekliği bulma				
	Yarıçap uzunluğunu bulma	X		X	
Gerekli işlemin yapılması	İşlemi tamamlama				
	İşlemi eksik yapma	X	X	X	
	İşlemi tamamlayamama				X

Tablo 20 incelendiğinde, metinsel olarak varsayımın verilmediği bu soru için öğrencilerin tamamının şekli açıklayabildikleri görülmektedir. Ancak sadece öğrencilerden birisi, verilen uzunluğu Öklid Teoremini kullanarak bulmuştur. Diğer öğrenciler bahsedilen uzunluğa dair herhangi bir şey ifade etmemişlerdir. Verilmiş olan diğer uzunluğu ise tüm

öğrenciler açıklayabilmişlerdir. Öğrencilerden bu uzunlukları kıyaslamaları istenmiş ve öğrenciler ancak bu şekilde varsayıma dair açıklama yapabilişlerdir. Araştırmacının yönlendirme yapmış olmasından dolayı, gerekli işlemlerin yapılması aşaması, işlemi eksik yapma olarak nitelendirilmiştir.

On birinci soruya ait bulgular ve yorumlar.

Bu soru, 15° 75° 90° üçgeninin alanının hipotenüs uzunluğunun karesinin sekizde birine eşit olduğuna dair önermenin sözsüz ispatıdır ve dördüncü soru gibi ön test ve son testte kullanılmıştır. Ön test ve son teste öğrencilerden yazılı olarak verilen varsayımı matematiksel bir dil ile ifade etmeleri istenmiş ancak öğrencilerin bunu matematiksel olarak ifade edemedikleri görülmüştür. Bu hususun sebebini araştırmak üzere, öğrencilerin bu soruya dair ispat süreci incelenmiştir. Öğrencilerden hiç biri sözsüz ispatın nasıl yapıldığını açıklayamamıştır. Öğrencilerin bu soruda alanlar arasındaki orandan ilerleyemedikleri, aksine alan bulmak için sürekli üçgenin alan formülünü kullandıkları görülmüştür.

Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmeden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

Y: Bu kenar c. Buradaki şu iki üçgen eşittir. Taralı alan da bu üçgenlerden birinin yarısına eşittir.

A: Peki, harflendir o zaman.

Y: O zaman bu a ise bu da A olur. Büyük üçgen de 2A olur. Büyük karenin alanı da c^2 .

Öğrenci daha fazla ilerleyemeyince araştırmacı tarafından dikdörtgenlerle üçgenlerin alanlarını kıyaslaması istenmiştir. Öğrenci bunun üzerine üçgenin alanını formül kullanarak $\frac{c}{2} \cdot c \cdot \frac{1}{2} = \frac{c^2}{4}$ yazabilmiştir. Ancak öğrenci en başta taralı alanın büyük üçgenin alanının yarısına eşit olduğunu söylemesine rağmen, $\frac{c^2}{4}$ 'ün yarısının $\frac{c^2}{8}$ olduğu sonucuna ulaşamamıştır. Öğrencinin varsayımı yazamamış olması, göstermesi istenen ifadeyi matematiksel olarak görmesine engel olmuştur. Bu nedenle de sonuca ulaşamamıştır.

Can öncelikle, 15° 75° 90° üçgenini belirlemiş, varsayımı matematiksel olarak yazabilmiş ve bunu sözel olarak ifade edebilmiştir. Öğrencilerin aşamalı olarak verilen Thales teoremine yaklaşımlarından ötürü, bu soruda da sözsüz ispatın aşama aşama verilmesi düşünülmüş ve şekil parçalanmıştır. Bunun üzerine öğrenci iki büyük üçgenin birbirine eş olduğunu görmüş ve üçgenin açılarını yazmaya yönelmiştir. Böylelikle şekildeki eşkenar üçgeni fark edebilmiştir.

C: Burada bir eşkenar üçgen varmış. Bir de eş üçgenler varmış.

A: Peki eş üçgenler ise bu üçgenlerin alanları hakkında ne söylersin?

C: Aynıdır.

Bu aşamada da öğrenci kenar uzunluklarını kullanarak alana ulaşmaya çalışmış fakat daha fazla ilerleyememiştir.

C: Takıldım bir şey bulamıyorum.

Ferit de varsayımı ilk başta yanlış ifade etmesine rağmen, sonra tekrar düşünmesi istendiğinde varsayımı matematiksel olarak doğru biçimde ifade edebilmiştir. Ferit'e de soru sonrasında aşamalı olarak verilmiştir. Bunun üzerine öğrenci kağıdı ters çevirerek incelemiş ve üçgenlerin birbirinin ters çevrilmiş hali olduğunu belirtmiştir.

F: Bu iki üçgen birbirinin ters çevrilmiş hali. Demek ki bu şekillerin birbiri ile bağlantısı var. Alt taban karıştırıyor işi. Ama bu iki üçgenin alanları birbirine eşit çünkü birbirinin ters çevrilmiş hali. Şeklin tamamının alanı c^2 . Taralı üçgenin alanı da $\frac{c^2}{8}$ idi. ama hala anlamadım buraya nasıl ulaşmış.

Görüldüğü üzere Ferit, varsayıma ve ispatta gösterilmek istenenin ne olduğuna dair açıklama yapabilmiş ancak yine diğer öğrenciler gibi alanları bulmak için üçgende alan formülüne odaklanmıştır. Bu nedenle de sonuca ulaşamamıştır.

Tablo 21 ile bu soru için öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir. Öğrencilerden biri soruya dair bir şey yapamadığı için tabloda bu öğrenciye yer verilmemiştir.

Tablo 21. On Birinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması	X	X	X
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması			
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması			
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama			
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme		X	X
	Varsayımı fark etmeme	X		

Tablo 21 incelendiğinde üç öğrencinin de şekli açıklayabildiği görülmektedir. Ancak sadece iki öğrenci, varsayımı metinsel olarak yazabilmiştir. Bir öğrenci ise varsayıma dair

herhangi bir şey yapamamıştır. Sonrasında öğrenciler alanlar arasında kıyaslama yapamadıkları için sonuca ulaşamamışlardır.

On ikinci soruya ait bulgular ve yorumlar.

Bu soru, dairenin alanını gösteren bir sözsüz ispat sorusudur. Gerek şeklin açıklanması gerekse sonuca ulaşılması açısından öğrencileri çok zorlamamış olup, öğrencilerin bu sözsüz ispattan keyif aldıkları görülmüştür.

Aşağıda öğrencilerle yapılan görüşmeden doğrudan alıntılara yer verilerek bu soruya ait ispat süreci açıklanmıştır.

Yunus ve Can şekli metinsel paylaşımı dikkate alarak açıklamışlar, verilen uzunlukları gerekçelendirebilmişler ve üçgenin alan formülünü kullanarak sonuca ulaşabilmişlerdir.

A: Verilen sözsüz ispatın ne olduğunu ve nasıl yapıldığını açıklar mısın?

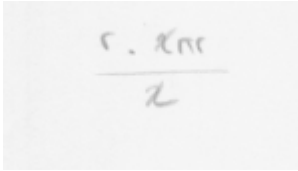
Y: $2\pi r$ neydi çevre mi alan mı?

A: Çevre.

Y: Bu birleşikmiş yavaş yavaş açmaya başlamışlar. En sonunda bir üçgen oluşmuş. Sanırım burada da üçgenin alanını bulmuş.

A: Taban uzunluğu nedir bu üçgenin?

Y: Çevredir. Yani $2\pi r$. O zaman $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$. Bu da alanıydı. Çok güzelmiş.



Şekil 4.2 Öğrenci kağıdından görüntü

C: Açmış burada şekli. Uzunluk değişmiyor yani. Sonra üçgen oluşmuş.

A: Bu üçgenin alanını bulur musun?

C: $2\pi r$ taban yükseklik yarıçap yani r çarparsak ve yarısını alırsak πr^2 olur. Bu da dairenin alanıydı. Üçgenin alanından dairenin alanını bulduk.

Ferit ilk başta, şekle farklı biçimde yaklaşmıştır. Sonrasında doğru biçimde şekli yorumlayabilmiş ancak yine de sonuca ulaşamamıştır. Üçgenin alanına yönelememiş ve dairenin alan formülünü bulamamıştır.

F: Daireler var gitgide küçülüyor. Buradan bir yarıçap çıkarmış. Sonra üst taraf doğru küçük bir üçgen çıkarmış. Ondan sonra daha büyük bir üçgen çıkarmış. Böyle gitmiş. Şekil daha da küçülmüş. Üçgen genişlemiş. Sonra bayağı büyük bir üçgen kesmiş. Son şekilde ne yapmış anlamadım. $2\pi r$ çevreydi. Çevrenin yarısı ile yarıçapın çarpımı alanına eşitmiş.

A: Peki nasıl yapmış bunu açıklayabilir misin?

F: İçinden üçgen keserek son şekle ulaşmış. (öğrenci şekli uzun bir süre inceledi.) Pardon üçgen çıkarmamış. Şekli açmış açtıkça bu hale gelmiş.

A: Uzunlukları neden bu şekilde vermiş?

F: Burası dıştaki çember olduğu için o çevresine eşittir. Bu kadar söyleyeceklerim.

Mehtap genel olarak yönlendirme sonucu sonuca ulaşabilen bir öğrencidir. Bu soruda da araştırmacı öğrenciyi yönlendirmiştir.

M: Değişik bir şeymiş bu hiç görmemiştim. Git gide açmış. $2\pi r$ çevreydi dimi?

A: Evet.

M: Açmış ve üçgen oluşturmuş sonunda.

A: Üçgenin taban uzunluğu ne?

M: Çevre çünkü onu açmış.

A: Yüksekliği ne bu üçgenin?

M: Yarıçap.

A: Alanını bulur musun?

M: $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$

A: Neyi bulmuş oldun? Bu formül neyin formülü?

M: Dairenin alanı. Çok güzelmiş ispat yapmak.

Tablo 22 ile bu soru için öğrencilerin geçirmiş oldukları aşamalar özetlenmiştir.

Tablo 22. On İkinci Soruya Ait Sözsüz İspat Süreci Aşamaları

Ana safhalar (aşama)	Alt safhalar (aşama)	Yunus	Can	Mehtap	Ferit
Şeklin incelenmesi	Şeklin doğru biçimde açıklanması				
	Şekil ve metinsel paylaşımın birlikte açıklanması	X	X	X	
	Sadece metinsel ifadenin açıklanması				
	Şekle dair yeterli olmayan açıklama				X
Varsayımın açık ve net biçimde ifade edilmesi	Varsayımı fark etme	X	X	X	
	Varsayımı fark etmeme				X
Varsayımın geçerliğini göstermek için uygun iddiaların belirlenmesi	Alan formülünü kullanabilme	X	X	X	
	Verilen uzunlukları gerekçelendirebilme	X	X	X	
Gerekli işlemin yapılması	İşlemi tamamlama	X	X	X	
	İşlemi eksik yapma				
	İşlemi tamamlamayama				X
Yapılanların özetlenmesi	Şeklin ve metinsel paylaşımların bütüncül açıklanması	X	X	X	

Tablo 22 incelendiğinde, bu sözsüz ispatta, üç öğrencinin ispatın bütün aşamalarını tamamladığı görülmektedir. Ancak bu öğrencilerden birisi araştırmacının yönlendirmesi sonucu ispat aşamalarını tamamlayabilmiştir. Bir öğrenci ise ilk başta metinsel paylaşıma odaklanmış ve şekli tamamen yanlış yorumlamıştır. Sonrasında şekli incelediğinde şekli doğru biçimde açıklamış ancak gerekli işlemleri belirleyemediği için sonuca ulaşamamıştır.

Araştırmada öğrencilere bireysel olarak çözdürülen ve sözsüz ispat süreci incelemesi amacıyla kullanılan sözsüz ispatların bulguları ve yorumları verilmeye çalışılmıştır. Bulgular ve yorumlar verilirken öğrenci çözümlerinden görüntüler ve doğrudan alıntılarla süreç açıklanmaya çalışılmıştır.

Bu alt bölümde ise, uygulama sürecine yönelik öğretmen ve öğrenci görüşlerine ait bulgular ve yorumlar verilmiştir. Sözsüz ispatların sınıf içerisinde yansımalarını ve sınıfta sözsüz ispatların gerek öğretmen gerekse öğrenci için uygulanabilirliğini görebilmek için elde edilen bulguların önemli olduğu düşünülmektedir.

Öğretmen görüşlerine ait bulgular ve yorumlar.

Uygulamaya yönelik sözsüz ispat araştırmalarının pek fazla olmaması sözsüz ispatların uygulanabilirliği hakkında çok az bilgiye sahip olmamıza neden olmaktadır. Bu

yüzden özellikle dersin uygulayıcısı olan ve öğrencileri yönlendirmede büyük rol üstlenen öğretmenin, sözsüz ispatların sınıflarda uygulanmasına yönelik görüşleri alınmıştır. Daha önceki bölümlerde belirtildiği üzere öğretmenin sözsüz ispatların ne olduğuna dair bilgisi vardır. Ancak uygulamada kullanılan sözsüz ispatlar, araştırmacı tarafından ispat süreci modelleri dikkate alınarak hazırlanmıştır.

Araştırmacının “Lise öğrencileri için öğretim programında ispata yer verilmesi ile ilgili ne düşünüyorsunuz?” sorusuna verilen cevap ve kodlar Tablo 23’deki gibidir.

Tablo 23. *Öğretim Programında İspatlara Yer Verilmesi İle İlgili Görüşler*

Kodlar	Öğretmen ifadesi
Gerekli	Yalın ispatlar
	Kalıcılık
Gerekli değil	Sınav sistemi

“Birkaç konuda ispata yer verdik. Mesela reel sayılarla ilgili iki reel sayının arasında sonsuz reel sayı olduğu ve $\sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğu ile ilgili ispat vermiştik. Çok detaya inemedik öğrenciler pek bir şey anlamadılar. Bu yüzden daha sade öğrencinin anlayacağı ispatlar olursa daha iyi olur. Ayrıca sınavlar bazında düşünüldüğünde gerekmiyor gibi geliyor ama. Neyin nereden geldiğini anlama açısından önemli ve faydalı olur. En azından bilginin kalıcılığı sağlanır.”

Öğretmenin lise öğrencileri için, öğretim programında ispata yer verilip verilmemesi ile ilgili görüşleri incelendiğinde, öğrencilerin ispatlarla ilgili pek bir şey anlamadıklarını belirttiği görülmektedir. Dolayısıyla öğretmenlerin, ispatlarla ilgili olarak detaya inemedikleri; bu nedenle de derslerde sade, öğrencilerin anlayabilecekleri ispatların kullanılmasının uygun olacağı düşünülmektedir. Bu anlamda, sözsüz ispatlar öğrencilerin seviyesine uygun hale getirildiği takdirde kullanılmasının uygun olacağı düşünülebilir. Ayrıca ispatlar, neyin nereden geldiğini anlama ve bilgilerin kalıcı olması açısından faydalı olarak görülse de sınav sisteminde yer almamasından dolayı, öğretim programında yer almaması da öğretmen tarafından ayrıca belirtilmiştir.

Araştırmacının “Sizce lise öğrencilerinin ispat becerileri nasıldır?” sorusuna verilen cevap ve kodları Tablo 24’deki gibidir.

Tablo 24. *Öğretmenin Öğrencilerinin İspat Becerileri İle İlgili Görüşleri*

Kodlar	Öğretmen ifadesi
İspatla ilgili temel kavramların eksikliği	“Tıpkı üniversitede olduğu gibi nereden başlayacaklarını bilmiyorlar. O yüzden daha önceden böyle bir temelleri olsa iyi olur. En azından formülü ezberlemek yerine bir şeyleri çıkarabilirler.”
İspata nasıl başlayacağını bilememek	

Öğretmenin lise öğrencilerinin ispat becerileri ile ilgili görüşleri incelendiğinde, öğretmen tarafından, lise öğrencilerinin ispata nasıl başlayacaklarını bilmedikleri ve öğrencilerde ispatla ilgili temel kavramların eksik olduğu belirtilmiştir. Dolayısıyla

öğrencilere öğretim programlarının da önerdiği her seviyede seviyelerine uygun ispatlarla tanıştırmak ispat fikrinin erken yaşlardan itibaren öğrencilere kazandırılması gerektiği söylenebilir.

Araştırmacının “Sizce öğrencilerin ispat becerisi nasıl geliştirilebilir?” sorusuna verilen cevap ve kodları Tablo 25’deki gibidir.

Tablo 25. Öğretmenin İspat Becerisinin Geliştirilmesi İle İlgili Görüşleri

Kodlar	Öğretmen ifadesi
Görsellik İspata başlama	“Görsel şeyler daha çok hitap edebilir. Düşünmedim aslında daha önce bu konuyu. Kabulde başlıyoruz aslında. O kabulleri fark etmemiz için bir şeyler yapılabilir belki.”

Öğretmenin öğrencilerin ispat becerisini geliştirilebilmek için neler yapılabileceği ile ilgili görüşleri incelendiğinde, öğretmen tarafından, görsellikten faydalanılması ve öğrencilerin sıkıntı yaşadıkları konu olan ispata nasıl başlayacakları ile ilgili bir şeyler yapılmasının gerektiği belirtilmiştir.

Araştırmacının “Sözsüz ispatlara ortaöğretim programında yer verilip verilmemesi ile ilgili olarak ne düşünüyorsunuz?” sorusuna verilen cevap ve kodları Tablo 26’deki gibidir.

Tablo 26. Öğretmenin Ortaöğretim Programında Sözsüz İspatlara Yer Verilip Verilmemesi İle İlgili Görüşleri

Kodlar	Öğretmen ifadesi
Olumlu İlgi çekici Eğlenceli Kalıcı	“Güzel ispatlar bence. Derse ilgisi artan öğrenciler oldu bu ispatlar sayesinde. Dersi sevdiler. Hatta bazen ispat yapsak diyorlar. Yazılıya geçtiğimizde ezber oluyor burada görsel olduğu için farklı yönlerini kullandıkları için daha kalıcı gibi geldi bana. Öğrencinin katılımını daha çok sağlıyor daha eğlenceli.”
Olumsuz Etkinliklerin hazırlanması	“Evet, uygulamak güzel olurdu. Ancak bu tarz etkinlikleri hazırlamak çok kolay bir şey değil. Ama hazır etkinlikleri uygulayabiliriz.”

Öğretmenin lisede sözsüz ispatlara yer verilip verilmemesi ile ilgili görüşleri incelendiğinde, öğretmenin, bu ispatların lisede yer alması yönünde; sözsüz ispatların öğrencilerin ispata ilgisini arttırdığı, eğlenceli olduğunda ve kalıcılığı sağladığından dolayı olumlu görüş bildirdiği görülmüştür. Ancak öğretmen, bu etkinlikleri hazırlamanın çok kolay olmadığı dolayısıyla hazır etkinlikleri daha verimli uygulayabileceklerini belirtmiştir.

Araştırmacının “Bu etkinliklerin ardından öğrencilerde olumlu bulduğunuz yönler var mıdır? Varsa örnek verebilir misiniz?” sorusuna verilen cevap ve kodları Tablo 27’deki gibidir.

Tablo 27. Öğretmenin Öğrencilerdeki Olumlu Yönler İle İlgili Görüşleri

Kodlar	Öğretmen ifadesi
İlgi	“İlgileri arttı ve farklı sorularda şu formülden mi yapıyoruz yoksa bundan mı diye soruyorlar. Yani formüllerin kendisi akıllarında daha çok kalmaya başladı. Birkaç öğrenci neyin nereden geldiğini merak etmeye başladı. Bana derslerde bunları sormaya başladılar.”
Kalıcılık	
Merak	
Sorgulama	

Öğretmenin, etkinliklerin ardından öğrencilerde olumlu bulduğu yönler; öğrencilerin formüllerin nerden geldiğini merak ettikleri, yani bir anlamda sorgulamaya başladıkları, ilgilerinin arttığı ve formüllerin daha çok akılda kaldığı olarak belirtilmiştir

Araştırmacının “Bu etkinliklerin ardından öğrencilerde olumsuz bulduğunuz yönler var mıdır? Varsa örnek verebilir misiniz?” sorusuna verilen cevap ve kodları Tablo 28’deki gibidir.

Tablo 28. Öğretmenin Öğrencilerdeki Olumsuz Yönler İle İlgili Görüşleri

Kodlar	Öğretmen ifadesi
Sıkıcı	“Kimi öğrencilerin ilgisini çektiği için geliştirdiğim verimli geçti etkinlikler ancak bazı öğrenciler için herhangi bir katkı olmadı. Öyle olunca dersten sıkıldılar. Bazı etkinliklerde daha çok sıkıldılar. Anlamadıkça ne işlerine yaramayacağını düşündüklerinde özellikle. Bazen öğrencinin etkinlik sırasında yaptığı hoşuna gidiyor ama sonrasında etkinliğe dair herhangi bir şey kazanamamış oluyorlar. Örneğin bir öğrenci kosinüste çok etkindi sonrasında formülü hatırladığını fark ettim. Ama bazılarında bu durumun böyle olmadığını gördüm.”
Anlamama	
Hatırlamama	

Öğretmenin etkinliklerin ardından öğrencilerde olumsuz bulduğu yönler hakkındaki görüşleri incelendiğinde, olumsuz yönler; kimi öğrencilerin etkinlikleri anlamadıkları için sıkıldıkları, kimi öğrencilerin etkinlik esnasında çok aktifken sonrasında etkinliğe dair herhangi bir şey hatırlamadığı olarak belirtilmiştir.

Öğrenci görüşlerine ait bulgular ve yorumlar

“Sözsüz ispatlara orta öğretim programında yer verilmesi hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?” sorusuna öğrenciler olumlu cevaplar vermişlerdir. Öğrencilerin cevapları incelendiğinde sözsüz ispatlar ile ilgili olarak “kavramsal anlama, ikna olma, zevkli olma, konuları hatırlatma” kodları oluşturulmuştur. Tablo 29 bu soruya ilişkin oluşturulan kodları ve öğrencilerin vermiş oldukları cevaplardan örnekleri içermektedir.

Tablo 29. Sözsüz İspatlara Orta Öğretim Programında Yer Verilmesine İlişkin Öğrenci Görüşleri

Kodlar	Öğrenci cevapları
Kavramsal anlama	• Bence verilmeli. Biz alanları buluyoruz ama nereden geldiğini bilmiyoruz. • Verilmelidir. Sizin yaptığınız çok mantıklı bence. Çünkü niye yaptığımız zaman bunu niye yaptık bilmiyoruz. Ama bunlarla nasıl nereden geldiklerini anlıyoruz. • İspat bize formülün nereden geldiğini öğretiyor. Bu da bizim içimizi rahatlatıyor • Ben bir şeyi yapıyorum ama neden yapıyorum anlamıyordum. Şimdi bu ispatları kullanıyoruz. Bu buradan geldi şu şuradan geldi. • Ben önceden formülleri anlamam diyordum. İspatlarını görünce nereden geldiğini anlamaya başladım ve bu sayede formülü anladım.
İkna olma	• Bunları öğrenmeliyiz ki ikna olalım. İkna edici oluyor bu ispatları yapmak. • Matematik kendini bana inandırdı. İspatları araştırmak istiyorum artık. • İspatın yazması beni ikna ediyor. İkna edici olduğu için de daha kolay oluyor benim için.
Zevkli olma	• Mantıklı şeyler bulmuşlar. Formülleri uygulayarak güzel şeyler çıkıyor. Hem zevkli de zaten. • Ben matematiği pek sevmiyorum. Bu şekilde ders eğlenceli oldu.
Konuları hatırlatma	• Konuyu hatırlayamayan öğrenciler var. Sınavlar için böyle şeyler önemli. Bazı şeyleri unutan öğrenciler için mesela ben unuttuğum çoğu şeyi hatırladım bunlarla.

Tablo 29 incelendiğinde, öğrencilerin formüllerin ya da matematiğin herhangi bir konusunun özelliğinin nereden geldiğini bilmek istediklerini ifade ettikleri görülmektedir. Öğrenciler, bir özelliğin nereden geldiğini bilmenin kendilerini ikna ettiğini belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenciler bu etkinlikleri zevkli bulmuşlardır. Öğrenciler bu ispatlardan zevk aldıklarını ifade etmelerine rağmen verilen görseldeki isteneni görmede zorlandıklarına vurgu yapmışlardır.

“Sözsüz ispatlar ile ilgili etkinlikleri yaparken zorlandığınız noktalar oldu mu? Olduysa örneklerle açıklayınız.” sorusuna verilen cevaplar incelendiğinde, öğrencilerin zorlandıkları noktalar “şekilde isteneni görme, isteneni açıklama ve işlem yapma” olarak belirlenmiştir. Tablo 30 sözsüz ispat etkinliklerinde öğrencilerin zorlanmış oldukları noktalara ilişkin oluşturulan kodları ve öğrencilerin vermiş oldukları cevaplardan örnekleri içermektedir.

Tablo 30. Sözsüz İspatlarda Zorlanılan Noktalara İlişkin Öğrenci Görüşleri

Kodlar	Öğrenci cevapları
Şekilde isteneni görme	- Görme konusunda çok zorlandım. Görmem gereken yerleri göremedim. Bazı şeyleri kolay görebildim. - Ben önceden şekillerde her şeyi göremiyordum. Mesela o kareli sorular kolaymış. Bir saat baktım anlamadım. Düşünüp bakınca anlaşılıyormuş aslında. Fazlaca bakmak gerek. Bir de fazla matematiğe girmeyeceksin o şekillerde. Formülden falan düşünürsen bulamıyorsun. - Ben üçgenlerle ilgili çoğu şeyi göremiyordum. Şimdi şu açı şöyle şu açı böyle daha rahat görüyorum.
İsteneni açıklama	Aklımda güzel düşünüyorum. Tam içimden doğru buldum dediğimde anlatma çalıştığım da karıştırıyorum.
İşlem yapma	- Ben formülleri hatırlayamadım ve bu beni zorladı. - Özellikle alanları bulurken zorlandım.

Tablo 30 incelendiğinde, öğrenciler şekillerde görmeleri gerekeni görmede zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Ancak genel olarak öğrenciler, etkinliklere yeni başladıkları zaman şekli anlamakta daha çok zorlandıklarını, sonrasında ise bu durumun kolaylaştığını, ilerleyen zamanlarda şekli daha kolay anlayabildiklerini ifade etmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin işlem ile ilgili zayıf oldukları bulgusuna ulaşılmış olup, öğrenciler de bu konu ile ilgili zorluk yaşadıklarını belirtmişlerdir.

“Sözsüz ispatların size ne gibi etkileri oldu? Örnek vererek açıklayınız.” Sorusuna, öğrenciler genel olarak sözsüz ispatların olumlu etkilerinden örnekler vermişlerdir. Öğrencilerin cevapları incelendiğinde, sözsüz ispatların etkileri olarak “görselleştirme, ilişkilendirme” kodları oluşturulmuştur. Tablo 31 bu soruya ilişkin oluşturulan kodları ve öğrencilerin vermiş oldukları cevaplardan örnekleri içermektedir.

Tablo 31. Sözsüz İspatların Etkisine İlişkin Öğrenci Görüşleri

Kodlar	Öğrenci cevapları
Görselleştirme	- Özdeşliklerde özellikle etkili oldu. Alanları görmemde de etkili oldu. - Tamamen matematik olmamalı formüllerde. Şekilli düşünmede etkisi oldu. - Örneğin a.b deyince a ve b kenarlı bir dikdörtgenin alanı geliyor aklıma. - Görsel becerime etkisi oldu. Benim şekil aklımda kalınca nasıl yapacağım da aklıma geliyor. Görseller daha çok aklımda kalıyor yani. - Mesela gözümde canlandıramıyoruz. Ama görseli olunca daha kolay yapıyoruz. Yani daha anlaşılır oluyor.
İlişkilendirme	- Önceden geometri şekildi şimdi cebir de şekil çıktı. Matematik ve cebir bağlantılıymış yani. - Bence matematik ile geometri arasında çok fark yokmuş. Yani öyle düşünmeye başladım biraz. İkisinde de aynı şeyleri kullandığımı fark ettim. Mesela matematikle ilgili ama geometri de kullanılıyor. Matematik öğrenirken geometri de öğreniyoruz. - Önceki yıllarda elmayı bölersin falan gibi şeyler söylerlerdi. Şimdi ise matematik kullanarak onunla bağlantısını yaparak bulduk. - Ben önceden bağlantı kuramazdım yazan şeylerle. Şimdi ise bağlantı kurabiliyorum.

Tablo 31 incelendiğinde, öğrencilerin sözsüz ispatların olumlu etkilerinden söz ettikleri görülmektedir. Özellikle öğrenciler, sözsüz ispatların görselleştirme becerilerine etkisi olduğundan bahsetmişlerdir. Ayrıca öğrenciler cebirsel bir ifadenin şekillerle gösterilmesinin, matematik ve geometrinin birbiriyle ilişkili olduğunu görmelerine etkisi olduğunu ifade etmişlerdir.

“Sözsüz ispatları anladığınızda ve anlamadığınızda yaşamış olduğunuz duyguyu tarif eder misiniz?” sorusuna öğrenciler anladıklarında mutlu olduklarını anlamadıklarında ise mutsuz olduklarını ifade etmişlerdir. Tablo 32 öğrencilerin yaşadıkları duygulara ait ifadeler yer almaktadır.

Tablo 32. Öğrencilerin Sözsüz İspatları Anladığında ve Anlamadığında Yaşamış Olduğunu Duyguya İlişkin Görüşleri

Kodlar	Öğrenci cevapları
Mutluluk	• Mutlu oldum. Bunun buradan geldiğini artık biliyorum. • Önce bir şeyler yapıp çıkmayıp sonra düşünüp bulunca mutlu oluyorum. • Stresim ortadan kalkıyor mutlu oluyorum. • Hocanın beni tahtaya kaldırması ve gördüğümü söylemek için can atıyorum. • Sevinç tabi. Yapabiliyorum diyorum. Bu da beni çok mutlu ediyor. Nasıl yapıldığını bilmenin mutluluğu var.
Mutsuzluk	• Görünce çok kolaymış diye kendime kızıyorum. • Korkuyorum yanlış söyleyeceğim diye dilim falan dolaşıyor. • Sanki okula boşu boşuna geliyormuşum gibi geliyor. • Anlamaya çalışıyorum. Anlamazsam üzülüyorum.

Tablo 32’de görüldüğü üzere, öğrenciler sözsüz ispatları anladıklarında mutlu olduklarını, anlamadıklarında ise mutsuz olduklarını ifade etmişlerdir.

Bununla beraber öğrencilere “kendi başınıza sözsüz ispat yapabilir misiniz?” sorusu sorulduğunda, öğrencilerin tamamı tek başlarına sözsüz ispatları yapamayacaklarını ve birinin yönlendirmesine ihtiyaç duyduklarını belirtmişlerdir. Bu anlamda ispata henüz giriş yapmış öğrenciler için sözsüz ispat etkinliklerinin bu çalışmadaki gibi sunulması öğrencinin ispat sürecini öğrenmesi açısından faydalı görülebilir. Tablo 33’de öğrencilerin sözsüz ispat etkinliklerinde biri tarafından yönlendirme yapılmasına dair istekleri ile ilgili diyalog yer almaktadır.

Tablo 33. Öğrencilerin Kendi Başlarına Sözsüz İspat Yapıp Yapamayacaklarına İlişkin Görüşleri

Kodlar	Öğrenci cevapları
Yönlendirme	• Tek başıma olunca sıkılıyorum. Bırakıyorum. Takılınca yeter diyorum bırakıyorum. Takıldığım yerlerde birisi yardım ederse devam edebiliyorum. • Hepsini olmasa da bazılarını yapabilirim. Bazıları zor bazıları kolay çünkü. Bir de benim formüllerle aram iyi değil. Formülü tam bilmediğim için nasıl bir şey olacak bilmiyorum. • Biri bana yardımcı olsun ki öyle yapabilirim. Mesela hatırlamadığım formülü hatırlatsın. • Yapamam tek başıma. Siz bana hatırlatırsanız yapabilirim.

Tablo 33 incelendiğinde, öğrencilerin yönlendirme olmazsa, sözsüz ispatları yapamayacaklarını düşündükleri görülmektedir. Genel olarak öğrencilerin formülleri ve matematiğe dair hatırlamadıkları özelliklerin biri tarafından kendilerine hatırlatılması gerektiği düşüncesine sahip oldukları bulgusuna ulaşılmıştır.

Araştırmada öğrencilere bireysel olarak çözdürülen ve sürecin incelenmesi amacıyla kullanılan sözsüz ispat etkinliklerinin ve öğrenciler ve öğretmenin sürece yönelik görüşlerinin bulguları ve yorumları verilmiştir. Bulgular ve yorumlar verilirken, öğrenci çözümlerinden görüntüler ve doğrudan alıntılarla süreç açıklanmıştır. Ayrıca bireysel sözsüz ispat etkinliklerine ait bulgular, ders gözlemleri sonucu edinilen bulgular ve öğrenci ve öğretmen görüşlerinden edinilen nitel bulgular ve nicel bulgular birlikte yorumlanarak sonuç ve öneriler verilmiştir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

Sonuç- Tartışma ve Öneriler

Araştırmanın modeli başlığında bahsedildiği üzere, bu çalışmada karma araştırma yöntemi kullanılmış olup, çalışmanın verileri hem nitel ve hem nicel olmak üzere iki türdür. Önceki bölümde de nitel ve nicel verilerin bulguları ayrı ayrı sunulmuş olup, bu bölümde de nitel ve nicel bulguların sonuçları ayrı ayrı sunulmuş ve tartışılmıştır.

Sonuç ve Tartışma

Nicel bulgulara ait sonuç ve tartışma.

Öğrencilerin ön test ve son testten almış oldukları puanlar arasında anlamlı fark olduğu görülmüştür. Yani bu durumda, sözsüz ispatların öğrencilerin ispat becerisi üzerinde etkisi olduğu söylenebilir. Fakat Healy ve Hoyles (2000)'un belirttiği üzere, ispatlama süreci karmaşık bir süreçtir ve varsayımları belirleyebilme, verilen özelliklerin ve yapıların uygun biçimde seçilip kullanılabilmesi ve mantıksal argümanlar belirlemek gibi bir dizi öğrenci yeterliği gerektirmektedir. Dolayısıyla sözsüz ispatların tek başına ispat becerisi üzerinde çok büyük etkisi olduğunu söylemek doğru değildir. Fakat Bell (2011)'e göre sözsüz ispatlar özellikle öğrencilerin ispat sürecini anlamada etkilidir. Gerçekten öğrencilerin ispat beceri testinden almış oldukları puanlar arasında anlamlı fark olsa da, öğrencilerin yapılan testlerden çok yüksek not alamadıkları görülmüştür. Ancak uygulama öncesi ispat beceri testinde, öğrencilerin sözsüz ispata dair herhangi bir uğraşlarının olmadığı; uygulama sonrasında yapılan testte ise, öğrencilerin sonuca ulaşamamasalar dahi ispat aşamalarından bir kısmını geçirmiş oldukları görülmüştür. Bu bulgu, Healy ve Hoyles (2000)'un ve Öztürk (2016)'ün çalışmalarındaki, öğrenciler geçerli ispat yapamamasalar dahi, genel ve açıklayıcı argüman üretmiş olmaları, ispata başlangıç niteliğinde muhakeme anlayışına sahip olmalarının olumlu olarak görüldüğü bulgusuyla örtüşmektedir.

Nitel bulgulara ait sonuç ve tartışma.

Bu alt başlık öğretim sürecine ve ispat süreci aşamalarına ilişkin sonuç ve tartışma alt başlıkları ile açıklanmıştır.

Öğretim sürecine ilişkin sonuç ve tartışma.

Bu alt başlıkla gözlem verileri, sınıf içi etkinlikler ve bireysel sözsüz ispat etkinliklerinde elde edilen bulguların öğretim sürecine ilişkin sonuçları tartışılmıştır.

Sözsüz ispatların, öğrenciye formüllerin nereden geldiğini anlama, formüllerin doğruluğuna ilişkin ikna olma, etkinliklerden keyif alma, matematiğin diğer kavramlarıyla ilişki kurma, matematiğin birden çok konusunu bütünleştirebilme, daha önce öğrenmiş oldukları kuralları kullanma gibi imkanlar sağladığı görülmüştür. Bu sonuçlar Almeida, (2014), Bayer (2009), Gierdien (2007), Miller (2012), Strausova ve Hasek (2012), Uğurel vd. (2016)'nin çalışmalarıyla uyumludur. Ayrıca öğrencilerin ezber ağırlıklı öğrenmelerinin önüne geçebilmek için, matematiğin birden çok konusunu bütünleştirebilme, daha önce öğrenmiş oldukları kuralları kullanabilme gibi imkanların sunulması önemlidir ki bu durum Arslan (2007)'nin çalışmasında belirtilmiştir. Dolayısıyla sözsüz ispatların öğrencilerin bilişsel becerilerine katkı sağladığı söylenebilir. Öğrencilerin etkinliklerde birbirleriyle fikir alışverişinde bulundukları, tartışabildikleri ve öğretmenlerine rahatça soru sorabildikleri gözlemlenmiştir. Dolayısıyla sözsüz ispatların öğrencilerin bilişsel becerilerinin yanında sosyal becerilerine de katkı sağladığı düşünülmektedir. Ayrıca öğrencilerin sözsüz ispatları anlamak için yapmış oldukları tartışmalar, kavramayı geliştirmek için öğrencilere fırsatlar sunmaktadır (Gierdien, 2007).

Genel olarak öğrenciler hangi işlemi yapacaklarına doğru biçimde karar verebilmelerine rağmen; öğrencilerin işlem bilgilerinin zayıf olmasından ötürü işlemleri tamamlayamadıkları görülmüştür. Bu durum olumsuz öğrenci davranışı olarak nitelendirilmiştir. Öğrencilerin işlem bilgisindeki zayıflıktan ötürü, ispatı tamamlamada motivasyonları düşmektedir. Bu sonuç Bardelle (2009), Demircioğlu ve Polat (2016) ile uyumludur. Zaimoğlu (2012) ve Aylar ve Şahiner (2016)'in ortaokul öğrencilerinin, İncikabı (2013)'nin öğretmen adaylarının ispat sürecine yönelik yapmış oldukları çalışmalarda, cebirsel ispatların en az tercih edilen ispat olması, öğrencilerin cebiri beklenen düzeyde kullanamamasına bağlanmaktadır ve cebiri düzgün kullanabilmenin ispat becerisinde etkisi olduğu belirtilmektedir. Bu anlamda, öğrencilerin işlem bilgisini geliştirmenin öneminden söz edilebilir. Benzer şekilde, öğrencilerin matematiksel dil ve notasyonda yeterli olmadıkları görülmüştür. Nitekim bireysel sözsüz ispat etkinliklerinden birinde, varsayım sözel olarak verilmiş ve matematiksel olarak ifade edilmesi istenmiş, ancak öğrencilerden hiçbiri varsayımı matematiksel olarak ifade edememiştir. Varsayımın ifade edilememesi ve öğrencilerin sadece üçgenin alan formülünü kullanarak sözsüz ispatı çözmeye çalışması, öğrencilerin ispatı tamamlamasını engellemiştir. Bu durum öğrencilerin ispatta başarısız olma

sebeplerinden birisini matematiksel dil ve notasyondaki eksiklik olarak belirten Moore (1994)'un çalışmasının sonuçları ile uyumludur. Sözel ifadeyi formal olarak ifade edememe, problem çözümünü ve çözüm sürecini yeteri kadar açıklayamama, matematiksel dil ve notasyona hakim olmamaktan kaynaklanmaktadır (Güler, 2013; Sağır, 2013). Matematiksel dil ve notasyonun doğru biçimde kullanılmasının, yapılan ispata dair ikna edici açıklama yapabilmek için gerekli olduğunu gözler önüne sermektedir. Öğrenciler sözsüz ispata ilişkin açıklama yaparken matematiksel dil ve notasyonu kullanmaktadırlar. Bu süreçte öğrencilerin matematiksel dil ve notasyondaki eksiklikleri ortaya çıkarılarak düzeltilebilir. Uğurel ve Morali (2010)'ya göre teste yönelik öğretim anlayışı öğrencilerin matematiksel dili kullanmamalarını engellemektedir. Bu nedenle öğrencilere matematiksel dili etkin olarak kullanabilecekleri ortamlar sağlanmalıdır.

Öğrencilerin sözsüz ispat sürecinin anlaşılması için uzun uğraş gerektiren Viviani teoremi etkinliğinde sıkıldıkları ve zorlandıkları görülmüştür. Bu durum olumsuz öğrenci davranışı olarak ifade edilmiştir. İspat beceri testinde sorulmuş olan Viviani teoremi ile ilgili sözsüz ispatta, öğrencilerin Mudaly (2013)'nin çalışmasına benzer şekilde, evin adanın merkezine yapılması gerektiği görüşüne sahip oldukları görülmüştür ve Mudaly'e göre bu durum öğrencilerin sahip olduğu çember fikrinden kaynaklanmaktadır. Gerçekten ispat beceri testinde, bir öğrencinin bu sorunun çözümünü yaparken bir çember kullandığı görülmüştür. Bu tez çalışmasında, öğrencilerle uygulama sürecinde Viviani teoreminin sözsüz ispatı ile etkinlik yapılmış olmasına rağmen; gerek uygulama öncesinde gerek uygulama sonrasında yapılan ispat beceri testinde, bu soruya öğrenciler evin adanın merkezine yapılması yönünde cevap vermişlerdir. Dolayısıyla her iki testte öğrencilerin doğru cevap veremediği görülmüştür. Mudaly'nin çalışmasında öğrenciler Sketcpad programı ile bu teoremi doğrulamaya çalışmışlardır ve bu yaklaşımın öğrencilerin teoremi anlaması için etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ancak kağıt ve kalem kullanılarak yapılan bu uygulamanın Sketchpad programı kullanılan uygulama kadar etkili olmadığı görülmüştür. Dolayısıyla Heinze vd. (2008)'nin çalışmalarında bahsettiği üzere farklı bağlamlarda farklı ispat formları kullanılmasının uygun olduğu doğrulanmıştır.

Nitekim öğretim programının öğrencilere “Matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme” davranışını kazandırmak istemesi, bu durumun önemini gözler önüne sermektedir. Bu çalışmada öğrencilerin sözsüz ispat etkinlikleriyle ilk kez karşılaştıkları görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin kullanacakları alternatif ispat yöntemlerinden habersiz oldukları söylenebilir. Çalışkan (2012)'nin öğrencilerle ve Demircioğlu ve Polat (2015)'in öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmalarda da benzer

sonuçlar çıkmıştır. Dolayısıyla ğrencilerin farklı ispat yöntemleriyle tanıştırılması için, öğretmenlerin de farklı yöntemler hakkında bilgi sahibi olmaları gerektiği söylenebilir.

Öğrencilerin cebirsel eşitsizliklerin verildiği sözsüz ispatı açıklamak için, sayıları kullandıkları görölmüştür. Bu durum öğrencilerin deneysel yöntemleri doğrulama için sıkça kullandıklarını göstermektedir ki; bu da ispat ile ilgili yapılan pek çok araştırmanın sonucu ile aynıdır (Almeida 1996; Boero, 1999; Coe ve Ruthven, 1994; Harel ve Sowder, 2007; Marrades ve Gutierrez, 2000). Öğrencilerin cebirsel ifadelere sayı vererek varsayımın doğruluğuna ikna olması, cebirsel ifadelerin öğrencide birer soyut kavram olmasından kaynaklanıyor olabilir. Öğrencilere somut temsiller ve görsel formda ilişkiler sunularak, sembolik ifadelere anlam verebilmeleri için fırsat sağlanabilir. Nitekim Demircioğlu ve Polat (2015) ve Miller (2012)'in çalışmalarında sözsüz ispatların somut olmayan matematiksel sonuçları somutlaştırdığı ifade edilmektedir.

Geometrik serilerle ilgili sözsüz ispat etkinliğinde, öğrenciler görselin fraktal olduğunu ifade etmişlerdir. Sözsüz ispatı doğru biçimde açıklayabilmelerine rağmen; henüz geometrik seriler hakkında bir şey bilmedikleri için, formal ve geometrik serilerin limiti ile ilgili herhangi bir ifade kullanamamışlardır. Fakat bu etkinlik ile öğrencilerin sonsuzluk, bütün, alan kavramlarına değinmiş olmaları; Casselman (2000)'ın belirttiği, sözsüz ispatların birden çok konuyu bütünleştirebilmeye imkan sağlamasını doğrular niteliktedir. Öğrencilerden birisinin bu soruda sonsuzun da sonu olduğunu ifade etmesi, öğrencinin limit kavramını hissetmiş olduğu sonucunu çıkarmamıza sebep olabilir ki bu durum soyut bir kavrama somutluk kazandırma olarak ifade edilebilir. Nitekim Davis (1993) fraktallarda, sözsüz ispatların söz ile zor, hatta mümkün olmayacak matematiksel kavramlar hakkında bilgi verdiğini söylemektedir.

Çalışmada öğrencilere aynı sözsüz ispat etkinliği, önce tek bir şekille ve sonrasında aşamalı olarak sunulmuş olup, öğrencilerin sözsüz ispatı çözme süreci incelendiğinde; öğrencilerin aşamalı olarak verilen sözsüz ispat etkinliğinde, ne yapıldığını daha kolay anladıkları ve ne yapıldığını açıklayabildikleri görölmüştür. Benzer durum özel bir üçgenin alan formölünün yer aldığı sözsüz ispatta da görölmüştür. Bu çalışmada, uygulama esnasında sözsüz ispat etkinlikleri, sezgisel yapılandırılmış örnekler formatında aşamalı olarak planlanmış ve öğrenciler çalışma kâğıtlarındaki yönerge ve öğretmenin yönlendirmesiyle ispata ulaşmışlardır. Sözsüz ispat etkinlikleri yapılırken; öğrencilerin aşama aşama ispata yaklaştıklarında ispatın yapılış aşamalarını daha iyi anladıkları görölmüştür. Bu durum Heinze vd., (2008), Hilbert vd., (2008), İpek (2010), Mudaly (2013)'nin, Paas vd., (2003), Paas ve Gog (2006), Sweller (2008) alışmalarının sonuçları ile benzerdir. Dolayısıyla

öğretmenlerin ispat aşamalarının farkında olup, öğrencileri yönlendirmeleri ve öğrenci tarafından ihmal edilen aşamaları çeşitli yönlendirmelerle öğrencinin geçirmesini sağlamaları gerektiği düşünülmektedir. Nitekim bu çalışmada da, öğrencinin şekli ve metinsel paylaşımı birlikte incelememesi, varsayımı fark etmesine engel olmuş, dolayısıyla varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi olarak tanımlanan üçüncü aşamada, öğrencinin sadece yapılan işlemlere odaklandığı görülmüştür. Aylar (2014)'ın çalışmasında, 16 öğrencinin ikisi dışındakilerin ispatı yönlendirmelerle tamamladığı sonucu bu durumu doğrulamaktadır.

Öğrencilerin ispatın sonucuna kendileri ulaştıklarında ispat yapma sürecinden keyif aldıkları görülmüştür ki Mudaly (2013)'e göre, bu içsel motivasyon faktörüdür. Nitekim Karaoğlu (2010)'nun çalışmasında da, ispatı tamamlayabilmenin, motivasyonu arttırdığı; ispat yapmadan keyif almayı sağladığı sonucu elde edilmiştir. Bütün bunlarla beraber, öğrencilerin belirli yönlendirmelere ihtiyaç duymaları, bu yönlendirmelerle sonuca ulaşabilmeleri kendilerine güvenmemelerinden kaynaklanıyor olabilir ki pek çok çalışmaya göre öğrenciler ispat yapma konusunda kendilerine güvenmemektedirler (Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki, 2011; Doruk ve Kaplan, 2013a, Doruk, Özdemir ve Kaplan, 2014; Gökkurt ve Soylu, 2012; Sağır, 2013; Shaughnessy ve Burger, 1985). Dolayısıyla sözsüz ispat etkinlikleriyle öğrencilerin ispata ulaşmaları sağlanarak ispat konusunda kendilerine güvenmeleri sağlanabilir.

Öğrenciler sözsüz ispat etkinliklerinin ilk başlarında, geometrik ve cebirsel ifadeler arasında ilişki kuramazken; sonrasında cebirsel ifadeleri özellikle alan kavramı ile kolayca ilişkilendirebildikleri ve cebirsel ifadeleri geometrik olarak ifade edebildikleri görülmüştür. Benzer sonuçlar İpek ve Akkuş İspir (2011)'in ve İpek (2010)'in öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmalarda da görülmüştür. Öğrencilerin cebirsel ifadelerin geometrik olarak ifade edildiğini görmeleri, cebir ve geometrinin birbiri ile ilişkili olduğunu anlamalarını sağlamıştır. Matematikteki farklı temsillerin kullanılması problemlere farklı çözümler bulabilmek için önemlidir. Nitekim Gierdien (2007)'e sözsüz ispatlar matematiksel fikirleri farklı sunuşlar aracılığıyla ilişkilendirmede önemli araçlardır. Sözsüz ispat etkinlikleri öğrencilere formüllerin geometrik yorumunu yapabilmeleri ve şekilleri cebirsel olarak yorumlayabilmeleri için fırsat sunmaktadır. Öğrencilerde farklı temsiller arasında ilişki kurabilme, formüllerin geometrik yorumunu yapabilme ve geometrik şekilleri formülleştirebilme yeteneği kazandırmak; öğrencinin formülün mantığını kavramasına, matematiğin konularını ilişkilendirmesine, şekillerin matematiksel dil ile ifade edebilmesine ve gördükleri nesnelerin ve varlıkların ne tür bir matematiksel anlam ifade ettiğini yorumlayabilmesine yardımcı olmaktadır. Böylelikle öğrenci matematiksel sürecin altında

yatan bilişsel işlemleri yerine getirerek, bilişsel mimarinin kurulmasını ve kavramların yapılandırılması sağlayacaktır (Hitt, 2002; Duval, 1999 ve Şan, 2012). Ayrıca aynı görevlere farklı çözümler bulmak, en kısa, en basit, matematiğin estetik yönünü ortaya çıkaracak çözümler bulmak için, farklı matematiksel araçları kullanabilme yeteneğinin gelişmiş olması gerekmektedir (Sigler vd., 2016)

Geometrik ortalama ile aritmetik ortalamanın arasındaki ilişkiyi gösteren sözsüz ispat etkinliğinde, bir öğrencinin Öklid teoremini kullanabildiği görülmüştür. Ceylan (2012) öğretmen adaylarıyla yapmış olduğu çalışmasında, geometrik şekillerin cebirsel temsillerinin gösterilmesinin, cebir ve geometri arasında ilişki kurmayı kolaylaştırdığı sonucuna ulaşmıştır. Bu durumda, sözsüz ispatların öğrenmede ilişkilendirme yapabilme ve daha önceden edinilen bilgilerin uygulamasını yapabilme fırsatı sunduğu söylenebilir (Strausova ve Hasek, 2012; Öner, 2006). Ayrıca aritmetik ortalama ve geometrik ortalama konularının işlendiği sırada bu tip bir etkinliğin verilmesi, öğrencilerde ortalamalara dair somut bir farkındalık kazandırabilir. Bununla birlikte diğer öğrencilerin sözsüz ispatta verilen bilgileri sorgulamadıkları ve doğrulamaya çalışmadıkları görülmüştür. Bu sonuç Bardelle (2009), Strausova ve Hasek (2012) ve Mudaly (2013)'nin çalışmalarının sonuçları ile benzerdir.

Öğrencilerin iki boyutlu özdeşliklerin modellemesine yönelik sorularda, diğer sorulara kıyasla daha iyi oldukları görülmüştür. Öğrencilerle yapılan görüşmeler neticesinde, bu tip örnekleri ortaokulda gördükleri belirlenmiştir. Demircioğlu ve Polat (2016)'ın çalışmasında, öğretmen adaylarının, Pisagor teoremi gibi aşına oldukları sözsüz ispatlarda zorlanmadıkları belirtilmiştir. Dolayısıyla öğrencilerin seviyelerine uygun sözsüz ispat etkinlikleriyle erken yaşlarda tanışmış olmaları ileriki sınıflarda ispat becerisi edinmelerine yardımcı olabilir (Çalışkan, 2012). Bu duruma karşılık, öğrencilerin üç boyutlu görsellerin kullanıldığı özdeşlikleri anlamada güçlük çektikleri görülmüştür. Benzer durumun Demircioğlu ve Polat (2016)'ın öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmada da görülmüş olması; uzamsal görselleştirme yeteneğinin öğrencilerde geliştirilmesinin gerekliliğini göstermektedir. Nitekim zihinde döndürme ve uzamsal görselleştirme yeteneği bazı sözsüz ispatlarda önemli rol oynamaktadır. İpek (2010) çalışmasında, üç boyutlu geometrik cisimlerin oluşturulabildiği dinamik yazılım kullanmış ve öğretmen adaylarının çoğunun cebirsel ifadeyi modelleyerek ispatı tamamlayabildiği sonucuna ulaşmıştır. Dolayısıyla özellikle üç boyutlu görsellerin kullanıldığı sözsüz ispatlarda yazılımlardan faydalanılabilir.

Brown (2008) tümevarım yöntemini henüz öğrenmemiş öğrencilerin sözsüz ispatları hiç zorlanmadan kavrayabileceklerini belirtmiş olmasına ve bu çalışmadaki öğrencilerin bu konuda herhangi bir eğitimleri olmamasına rağmen; öğrencilerin tamsayı ilişkileri ile ilgili

sözsüz ispat etkinliğinde belli sayının modellenmesinden genele geçişte zorlandıkları görülmüştür. Flores (2000)'a göre, somut gösterimler ve özel sayıların kullanılmasıyla, öğrenciler genelleştirilebilen ilişkileri açıklayabilir ve örneklerden genellemeye gidebilirler. Ancak bu çalışmada öğrencilerden bir tanesi sözsüz ispatta genellemeye gidebilmişken; üç öğrenci genellemeye gidememiştir. Benzer şekilde Güler ve Ekmekçi (2016)'nin, Birinci (2010)'nin ve Arslan (2007)'nin çalışmalarında da gerek öğrenciler gerekse öğretmen adayları verilen şeklin örnek ya da özel bir durum olduğunu ve sadece şekildeki sayıların toplamını örneklediğini vurgulamıştır. Arslan (2007)'a göre bu durumun sebebi öğrencilerin genelleme düzeyine erişememiş olmalarıdır. Dolayısıyla bu durumda tek bir örneğin resmedildiği sözsüz ispatla, öğrencilerin ispatı tüm tamsayılarda genelleyebilip genelleyemeyeceği tartışılabilir bir konudur. Genellemeye gidebilen öğrenci, sözsüz ispatın vermiş olduğu formülü hatırlayarak varsayımı fark etmiştir. Dolayısıyla öğrencinin formülü hatırlamış olmasının da soruya yaklaşma biçimini etkilemiş olacağı düşünülmektedir. Sınıf uygulamalarında öğretmenin bu konuya dair açıklamalarda bulunarak; öğrencinin formülü yapılandırmasına ve nereden geldiğine ikna olmasına yardımcı olabilir. Demircioğlu ve Polat (2016) bu durumu tümevarımsal düşünmede yeterli olmamaya bağlamaktadırlar. Nitekim Doruk (2016) çalışmasında, tümevarımsal gerekçe tipine sahip bireylerin matematiksel ifadelere birkaç durum ya da örnek ile ikna olabileceklerini ve bu gerekçe tipine sahip bireylerin, çoğunlukla sonuç genellemesi yaptıklarını; halbuki tümevarımsal ispat yapabilmek için, sürecin düzenliliğine yoğunlaşan süreç örnek genellemesi yapmaları gerektiğini belirtmektedir. Bu durum öğrencilerin genellemeye gidememesini açıklamaktadır. Öğrencilerin bu tarz etkinliklerle daha sık karşılaşması, örüntülerden cebirsel ifadeye geçiş yapabilmelerini kolaylaştırabilir. Ayrıca tümevarımsal ispatların ve sözsüz ispatların birlikte verildiği durumlarda, öğrencilerin özel örnekte fark ettikleri ilişkileri genelleyebilecekleri düşünülmektedir. Nitekim Demir (2011)'e göre öğrenciler özel bir ya da birkaç şekil üzerinde fark ettikleri ve tanımladıkları ilişkileri, tümevarımsal muhakemeyle genelleyebilmektedirler.

İspat süreci aşamalarına ilişkin sonuç ve tartışma.

Bu alt başlıkta bireysel sözsüz ispat etkinliklerinde ve sınıf içi etkinliklerde elde edilen ispat süreci aşamalarına ilişkin tartışma ve sonuç verilmiştir.

Bell (2011)'e göre sözsüz ispatları kullanmak, öğrencilerin ispat sürecini anlamada etkilidir. Bu çalışmada, öğrencilerin ispat sürecini anlamak için sözsüz ispatlar kullanılmıştır. İspat süreci aşamaları, bulgular kısmında verilmiş olup; öğrencilerin ispat süreci aşamaları bu bölümde tartışılmıştır.

Şeklin incelenmesi aşamasında, şekil ve metinsel paylaşımları beraber inceleyen öğrencilerin varsayımı daha kolay fark edebildikleri, varsayımı fark eden öğrencilerin ise daha sonra yapacağı işlemlerde varsayıma dair farkındalıklarının diğer öğrencilere göre daha yüksek olduğu görülmüştür. Doruk (2016) çalışmasında, ispata başlamadan önce başarılı bir argümantasyon süreci geçirmenin, ispatta başarıyı artırdığını; yani ispat yapmaya başlamadan önce girilen varsayım oluşturma sürecinin, ispat sürecini kolaylaştırdığı sonucu göz önüne alınırsa; ispat sürecinde varsayımı fark etme aşamasının üzerinde durulmasının önemli olduğu söylenebilir.

Varsayımın ne olduğuna dair herhangi bir bilginin olmaması, öğrencinin sadece yaptığı işlemlere odaklanmasına sebep olduğu fark edilmiştir. Bu durumun bir sonucu olarak, öğrencinin neyi ispatladığını fark edemediği görülmüştür. Benzer durumun Demircioğlu ve Polat (2016)'ın çalışmasında, öğretmen adaylarında gözlenmiş olması, şekillerle ilgili açıklama olmamasının varsayımın anlaşılmasını engellediği sonucunu çıkarmamıza neden olabilir. Gerçekten Doyle vd. (2014) kısa metinsel ifadelerin yer aldığı ve mantıksal sıralamanın verildiği sözsüz ispatlarda, cümleler ve başlıkların, gösterilen teorem arasında bağlantı yapmaya izin verdiğinde; ispat standartlarını daha iyi sağladığını belirtmektedirler.

İspat sürecinin varsayımın geçerliği için uygun iddiaların belirlenmesi aşaması, öğrencinin teoremin doğru olduğunu anlamasının yanında, neden doğru olduğunu anlaması açısından önemlidir. Çünkü öğrenci ispatın her aşamasında, neyin niçin yapıldığını açıklamaya teşvik edilerek, yapmış olduğu her işlemi neden yaptığını düşünmek zorunda kalmaktadır. Dolayısıyla Strausova ve Hasek (2012)'in çalışmasında, öğrenci görüşü açısından bakıldığında, sözsüz ispatların öğrencilerin çözümlerini savunmak için tartışma yeteneğini geliştirme ve geniş bir çerçeveden edinilen bilgilerin uygulamasını yapabilme yeteneği kazandırma görüşü doğrulanmış olur. Çünkü sözsüz ispat problemini anlamaya çalışan öğrenci, matematiğin diğer konuları ile ilgili özellikleri kullanmak durumunda kalmaktadır. Ayrıca Karras (2012)'in tez çalışmasında, geometrik bilgi düzeyi iyi olan öğretmen adaylarının sözsüz ispatları daha iyi çözebildiği sonucunu göz önüne alırsak; sözsüz ispatların daha önceden öğrenilmiş bilgiyi kullanmayı gerektirdiği söylenebilir.

Araştırmanın sonunda öğretmen ve öğrenciler ile yapılan görüşmeler neticesinde, öğrencilerin formüllerin nereden geldiğini sorgulamaya başladıkları sonucu elde edilmiştir. Nitekim Kücheman ve Hoyles (2004) ve Altıparmak ve Öziş (2005) öğrencilerin, teoremlerin ispatlarının gösterilmesinden hoşlandıklarını ve böylelikle teoremleri öğrenebildiklerini belirtmektedirler.

Gerekli işlemlerin yapılması aşaması, bir önceki aşamada belirlenmiş işlemlerin yapıldığı aşamadır. Öğrencilerin hangi işlemi yapacaklarını doğru biçimde belirlemelerine rağmen; işlem bilgilerinin zayıf olmasından ötürü işlemleri tamamlayamadıkları görülmüştür. Öğrencilerin işlem bilgisindeki zayıflıktan ötürü, ispatı tamamlamada motivasyonlarının düştüğü görülmüştür. Nitekim bu sonuç öğrencilerin ispat yapmada başarısız olma sebeplerini ortaya koyan çalışmaların sonuçları ile uyumludur (Bardelle, 2009; Demircioğlu ve Polat, 2016; Moore, 1994; Reiss vd., 2002).

Yapılanların özetlenmesi aşaması, Heinze ve Reiss (2004) tarafından okul matematiğindeki son ve süreç hakkında geçmişe dönük genel değerlendirmenin yapıldığı evre olarak tanımlanmaktadır. Bu çalışmada da, bu aşama öğrencinin yapılanları bütüncül olarak özetlediği aşama olarak tanımlanmıştır. Varsayımın fark edilmesi aşaması, ispat sürecinin son aşaması olan yapılanların özetlenmesi için önemlidir. Öğrencinin geçmişe dönük değerlendirme yaparak; yapılanları özetlemesi, öğrencinin hangi teoremin niçin doğru olduğuna dair farkındalığı için önemlidir. Yapılan etkinliklerin sonunda, öğrencinin özetleme yapması şeklin ve metinsel paylaşımın bütüncül olarak açıklanmasını ve hangi teoremin niçin doğru olduğunun anlaşılmasını sağladığı görülmüştür. Öğrenciler ile bireysel olarak çözülen sözsüz ispat etkinliklerinde, yapılanların özetlenmesinin öğrencinin o ana kadar fark edemediği ayrıntıları fark etmesini sağladığı görülmüştür. Heinze ve Reiss (2004) yapmış oldukları deneysel çalışma sonucunda, ispat öğretimi için Boero modelinin ispat aşamalarının önemli ve gerekli olduğunu; ancak bu evrelerin öğretmenler tarafından ihmal edildiğini belirtmektedirler. Özellikle varsayımın geçerliği için uygun iddiaların ve ispat stratejilerinin kabataslak belirlendiği üçüncü aşamanın, sınıflarda çabuk geçildiği ve üzerinde durulmadığını belirtmeleri ve bu çalışmada da bu evrenin sonraki evreleri etkilediği dolayısıyla ispat sürecinin tamamını etkilediği sonucuna ulaşılması, bu durumu doğrular niteliktedir. Benzer şekilde Öztürk'ün (2016) İSMAT modeline göre yapmış olduğu ispat öğretiminde, bir matematikçinin ispat yaparken geçirmiş olduğu adımlardan geçerek, ispat öğretimi gerçekleştirilmeye çalışılmıştır ve bu sürecin ispat becerisinde olumlu etkisi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Dolayısıyla ispat süreci aşamalarının öğrenci tarafından geçirilmesinin sağlanması, ispat öğretimi üzerinde olumlu etkiye sahiptir.

Öğrenci ve öğretmen görüşlerine ilişkin sonuç ve tartışma.

Gerek öğretmen gerekse öğrenciler, formüllerin ya da matematiğin herhangi bir konusunun özelliğinin nereden geldiğini bilmek istediklerini ifade etmişlerdir. Bir özelliğin nereden geldiğini bilmek öğrenciyi ikna etmektedir. Bu bulgu Tekin ve Konyalıoğlu (2010)'nun görsel şekillere dayalı ispatların, formüllerin nasıl oluştuğu ve nereden geldiği

konusunda öğrencilere bilgi verdiği ve ezberden kaçınarak kalıcı öğrenmelerine yardımcı olduğu bulgusunu desteklemektedir. Ayrıca Karras (2012)'a göre, görsel akıl yürütme ile matematiksel kavramların anlaşılması sağlanabilmektedir. Benzer şekilde, Doruk vd. (2014) çalışmasında, öğretmen adayları temsili ispat etkinliklerinde somut yaşantılar geçirdikleri için, bilgilerin daha kalıcılığı olduğunu ifade etmişlerdir. İspatlar, neyin nereden geldiğini anlama ve bilgilerin kalıcı olması açısından faydalı olarak görülse de, sınav sisteminde yer almamasından dolayı, öğretim programında olmaması gerektiği düşünülmektedir. Dolayısıyla Harel ve Sowder (2008)'a göre, öğretmenlerin de ispatın önemine ilişkin yeterli bilgileri olmadığı söylenebilir ki Hanna (2000)'ya göre öğrenciler ve öğretmenlerle ispatın fonksiyonlarını tartışmak, ispatın önemine ve sınırlarına dikkat çekmek gerekmektedir.

Lise öğrencileri, sözsüz ispat etkinliklerini zevkli bulduklarını ve sözsüz ispatları anladıklarında mutlu olduklarını, anlamadıklarında ise mutsuz olduklarını ifade etmişlerdir. Uğurel vd. (2016)'nin çalışmasında lise öğrencileri, Doruk vd. (2014)'nin çalışmasında sınıf öğretmenleri, Demircioğlu ve Polat (2015)'in ve İpek (2010)'in çalışmalarında öğretmen adayları sözsüz ispatları zevkli ve eğlenceli bulmuşlardır. Dolayısıyla sözsüz ispatlar öğrencide merak uyandırmakta ve öğrencilerin ispat yapma motivasyonlarını arttırmaktadır. Ayrıca öğrencilerin çoğunlukla sözsüz ispatların olumlu etkilerinden söz ettikleri görülmüştür. Bu durum Uğurel vd. (2016)'nin Fen Lisesi öğrencileriyle ve Demircioğlu ve Polat (2015)'in öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmaların sonuçlarıyla uyumludur.

Öğrenciler sözsüz ispatlardan zevk aldıklarını ifade etmelerine rağmen, verilen görseldeki isteneni görmede zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin sözsüz ispatları yaparken zorlandıkları noktalar “şekilde isteneni görme, isteneni açıklama ve işlem yapma” olarak belirlenmiştir. Ancak genel olarak öğrenciler, etkinliklere yeni başladıkları zaman gösterileni anlamakta daha çok zorlandıklarını; sonrasında ise bu durumun kolaylaştığını ifade etmişlerdir. Bu sonuç Demircioğlu ve Polat (2016)'ın öğretmen adaylarıyla ve Uğurel vd. (2016)'nin lise öğrencileriyle yapmış oldukları çalışmalarla benzerdir. Öğretmen görüşü incelendiğinde ise, lise öğrencilerinin ispata nasıl başlayacaklarını bilmedikleri, bunun sebebinin de ispat temelleri olmaması olarak görüldüğü belirtilmiştir. Dolayısıyla öğrencilere öğretim programlarının da önerdiği her seviyede seviyelerine uygun ispatlarla tanıştırmak, ispat fikrinin erken yaşlardan itibaren öğrencilere kazandırılması gerektiği söylenebilir (NCTM, 2000).

Öğrenciler sözsüz ispatların görselleştirme becerilerine etkisi olduğundan bahsetmişlerdir. Bu durum Uğurel vd. (2016)'nin ve Doruk vd. (2014)'nin çalışmalarındaki sonuçla benzerdir. Ayrıca öğrenciler cebirsel bir ifadenin şekillerle gösterilmesinin,

matematik ve geometrinin birbiriyle ilişkili olduğunu görmelerine etkisi olduğunu ifade etmişlerdir. Nitekim Demircioğlu ve Polat (2016) çalışmalarında, öğretmen adayları, sözsüz ispatların geometri dersi için uygun olduklarını, uygulama alanlarının kısıtlı olduğunu belirtmiş olması; ileride öğretmen olacak kişilerin dahi bu ilişkilendirme becerisini kazanamadığını göstermektedir. Halbuki alanlar arasında ilişkilendirme matematik eğitimi için önemlidir. Öğretmen görüşü incelendiğinde, öğretmen tarafından, ispatlarla ilgili olarak detaya inemedikleri, dolayısıyla derslerde sade, öğrencilerin anlayabilecekleri, görselliğin olduğu ispatların kullanılmasının uygun olacağı yönünde görüş bildirilmiştir. Bu anlamda, sözsüz ispatlar öğrencilerin seviyesine uygun hale getirildiği takdirde; kullanılmasının uygun olacağı düşünülebilir. Ancak bu noktada öğretmen görüşüne göre bu tarz etkinliklerin hazırlanmasının öğretmenler açısından zor olacağı düşünülmektedir.

Öneriler

- Matematik eğitiminde öğrencilerin özellikle üç boyutlu görsellerin kullanıldığı sözsüz ispatlarda yeterli olmadıkları görülmüştür. Üç boyutlu çizimlerin animasyonlarla daha anlaşılır hale getirilebileceği düşünüldüğünde; bahsedilen durumun üstesinden gelebilmek için dinamik yazılımlar kullanılabilir. Ayrıca bu çalışmada üç boyutlu modellerin kullanıldığı sözsüz ispat etkinlikleri yapılmamıştır. İleride sözsüz ispatların bu tip etkinliklerle sunulduğu araştırmalar yapılması önerilebilir.
- Bu çalışmada öğrencilerin herhangi bir sözsüz ispat oluşturmaları beklenmemiştir. Fakat ileriki araştırmalar için öğrencilerin kendi başlarına sözsüz ispat oluşturmalarıyla ilgili çalışmalar yapılabilir.
- Öğrencilerin, tamsayı ilişkileri ile ilgili sözsüz ispat etkinliğinde, belli sayının modellenmesinden genele geçişte zorlandıkları görülmüştür. Bu durum öğrencideki tümevarımsal düşünmedeki yetersizlikten kaynaklanıyor olabilir. Bu nedenle ispatların tümevarım yöntemiyle verildiği kaynaklarda, sözsüz ispatının da verilmesinin bu zorluğun üstesinden gelebilmeye yardımcı olabileceği düşünülmektedir. Dolayısıyla bir ispat yönteminin diğer ispat yöntemine göre üstünlüğünü göstermekten ziyade uygun durumlarda uygun ispat yöntemlerinin kullanılması ya da ispat yöntemlerinin birlikte kullanılması tavsiye edilmektedir.
- Öğrencilerin sözsüz ispatta isteneni görmede zorlandıkları görülmüştür. Dolayısıyla sözsüz ispatlarda görselin anlaşılabilmesi için renklendirme ya da metinsel ipuçları gibi çeşitli yöntemler kullanılarak, öğrencilerin zorlandıkları noktalar ortadan kaldırılabilir.

- Bu çalışmada, öğrencilerin cebirsel bir ifadenin şekillerle gösterilmesinin, matematik ve geometrinin birbiriyle ilişkili olduğunu görmelerine etkisi olduğu görülmüştür. Kavramların farklı temsillerle ifade edilebilmesi, öğrencinin matematiğin alanları arasında ilişki kurabilmesi açısından önemlidir. Dolayısıyla öğretmenlerin öğrencilerini matematiksel kavramların farklı temsilleriyle tanıştırmaları önerilebilir.
- Sözsüz ispatların görsel akıl yürütme becerileri üzerine etkisini Van Hiele düşünme düzeyleriyle ve çoklu zeka alanlarıyla ilişkilendirecek çalışmalar yapılabilir.
- Öğrencilere soyut gelen matematiksel kavramların, sözsüz ispatlarla somutlaştırılacağı görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilere gerek matematiksel kavramlara gerekse ispata somut farkındalık kazandırmak için sözsüz ispatlar kullanılabilir.
- Öğrencilerin ispata yönelik ilgisizlik, başarısızlık durumları söz konusudur. Ancak bu çalışmada, sözsüz ispat etkinliklerinin ispat öğretiminde etkili ve ilgi çekici olduğu görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin ispata yönelik ilgisizlikleri ve başarısızlıkları sözsüz ispatların ispat eğitiminde kullanılmasıyla düzeltilebilir.
- Öğrencilerin ispata tamamlamak için doğru adımları belirlemelerine rağmen, işlem ve matematiksel dil ve notasyon bilgisi eksikliklerinden dolayı ispata tamamlayamadıkları görülmüştür. Bu durum da öğrencilerin motivasyonlarını düşürmüş olup, ispata karşı olumsuz düşüncelerine yol açmaktadır. Dolayısıyla öğretmenlerin öğrencilerin işlem becerisini geliştirmek için ders içinde ek etkinlikler düzenlemesi önerilebilir.
- Lise öğrencilerin sözsüz ispata dair bilgilerinin olmadığı görülmüştür. Ayrıca çeşitli çalışmalarda gerek statik gerekse dinamik sözsüz ispatlarla ilgili kaynak eksikliğinden söz edilmiştir. Dolayısıyla öğrencilerin bilgisayar ortamında dinamik sözsüz ispata ulaşabileceği kaynakların oluşturulması önerilebilir.
- Öğretmen görüşüne göre sezgisel yapılandırılmış örnekler formatında etkinlik hazırlamak zor olabilmektedir ve mevcut kaynakların çoğundaki sözsüz ispatlar lise öğrencilerinin seviyesine uygun değildir. Yenilenen ortaöğretim matematik öğretim programına göre formal ispatlar öğrencilere verilmemektedir. İspat yapabilme sürecinde öğrencinin aktif rol oynamasını sağlayacak informal ispat yöntemi olarak sözsüz ispat etkinlikleri bu formatta uzmanlar tarafından hazırlanabilir ve ispat öğretimine alternatif bir yöntem olarak sunulabilir.
- Bu çalışmada ispat sürecinde tartışma ortamı sağlanmış olsa da tartışma ortamı öğretmen ve öğrenci arasında kısıtlı kalmıştır. Öğrencilerin sözsüz ispat

etkinliklerinde birbirleriyle fikir alışverişinde bulundukları görülmüştür. Bu konu ile ilgili olarak grup çalışmaları yapılarak öğrencilerin birbirleriyle etkileşim içinde olmasının, süreci nasıl etkilediğine dair araştırmalar yapılabilir.



KAYNAKLAR

- Agresti, A., & Finlay B. (2009). *Statistical methods for the social sciences* (4nd ed.). New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics*, 8, 31-35. Retrieved from <http://flm-journal.org/Articles/723802C7D911A64F1F2E59C4CD92E9.pdf>
- Alibert, D., & Thomas, M. (1991). *Research on mathematical proof*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Allwein, G., & Barwise, J. (1996). *Logical reasoning with diagrams*, New York: Oxford University Press.
- Almeida, C., A., G.,O. (2014) *Provas pictóricas de identidades algébricas*. (Master's thesis, Universidade de Aveiro). Retrieved from <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/13307/1/Tese.pdf>
- Almeida, D. (1996). Variation in proof standarts: Implication for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27, 659–665. doi:10.1080/0020739960270504
- Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(1), 53-60. doi:10.1080/00207390150207059
- Alsina, C., & Nelsen R. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3(1), 118-127. Retrieved from http://www.labjor.unicamp.br/comciencia/files/matematica/ar_roger/ar_roger.pdf
- Alsina, C., & Nelsen R. B. (2006). *Math made visual: Creating images for understanding mathematics*. United States of America: The Mathematical Association of America. doi:10.5948/UPO9781614441007
- Altıparmak, K., & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme, *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25–3. <http://dergipark.gov.tr> adresinden edinilmiştir.
- Altun, M. (2014). *Liselerde matematik öğretimi*. (5. Baskı). Bursa: Aktüel Yayıncılık.
- Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinin muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi* (Doktora Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 210145)
- Aydoğdu İskenderoğlu, T., & Baki, A. (2011). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin nicel analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 11(4), 2275-2290. <http://www.kuyeb.com> adresinden edinilmiştir.
- Aylar, E. (2014). 7. Sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi. (Doktora Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 363234)
- Aylar, E., & Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(3), 559-579. <http://kefad2.ahievran.edu.tr> adresinden edinilmiştir.
- Baki, A. (2015). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. (6. baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, In: D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton. Retrieved from <http://edumat.uab.cat/Diseo/Balacheff.pdf>
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). *The teaching of proof*. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Beijing, 3, 907–920. Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/math/0305021.pdf>
- Bardelle, C. (2010). *Visual proofs: an experiment*. In V. Durand-Guerrier et al (Eds), Paper presented at the annual meeting of CERME6, Lyon, France. INRP, 251-260. Retrieved from <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg2-08-bardelle.pdf>
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *Mathematics Teacher*, 88(1), 48-54. Retrieved from <https://www.nctm.org>
- Bayazıt, İ. (2017). İspat'ın önemi ve ispat konusundaki öğretmen yeterliklerinin incelenmesi. *International Periodical for the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*, 12(14), 19-40. <http://www.turkishstudies.net> adresinden edinilmiştir.
- Bayer, R. (2009). Proof by picture. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.353.5627&rep=rep1&type=pdf>
- Beitlich, J. T., Obersteiner, A. & Reiss, K. (2015). *How do secondary school students make use of different representation formats in heuristic worked examples? An analysis of eye movements*. In Beswick, K., Muir, T., and Wells, J. (Eds.). *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education Conference*, Hobart, Australia: PME, 2, 97-104. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Andreas_Obersteiner
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40. doi:10.1007/BF00144356
- Bell, C. J. (2011). Proof without words: A visual application of reasoning. *Mathematics Teachers*, 104(9), 690–695. Retrieved from <http://is234mathforum.webs.com>
- Birinci, K. S. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının ispatlama performanslarının süreç-nesne ilişkisi açısından incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 279855)
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: a complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on The Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7,8. Retrieved from <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html>
- Borwein, P., & Jörgenson, L. (2002). Visible structures in number theory. *The American Mathematical Monthly*, 108(5), 897-910. Retrieved from https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Borwein897-910.pdf
- Brown, J. R. (1997). Proofs and pictures. *British Journal for the Philosophy of Science*, 48, 161-180. Retrieved from <https://faculty.unlv.edu/jwood/unlv/Articles/Brown.pdf>
- Brown, J. R. (2008). *Philosophy of mathematics: A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*. (2nd ed.). Routledge: Taylor & Francis Group. Retrieved from [www.bibotu.com/books/Philosophy/History%20and%20Philosophy%20of%20Science/Brown%20-%20Philosophy%20of%20Mathematics%20e%20\(Routledge,%202008\).pdf](http://www.bibotu.com/books/Philosophy/History%20and%20Philosophy%20of%20Science/Brown%20-%20Philosophy%20of%20Mathematics%20e%20(Routledge,%202008).pdf)

- Büyüköztürk, Ş. (2007). *Deneyisel desenler: öntest-sontest kontrol grubu desen ve veri analizi* (2. baskı). Ankara: Pegem A Yayıncılık.
- Can, A. (2014). *SPSS ile bilimsel araştırma sürecinde nicel veri analizi* (2. baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- Cansız Aktaş, M., & Aktaş, D.Y. (2013). Matematik bölümü öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili algılarının metaforlar yoluyla belirlenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 5(3), 701-718. http://www.iojes.net/userfiles/Article/IOJES_1102.pdf adresinden edinilmiştir.
- Casselmann, B. (2000). Pictures and proofs. *Notices of the AMS*, 47, 1257–1266. Retrieved from www.ams.org/notices/200010/fea-casselmann.pdf
- Ceylan, T. (2012). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 302918)
- Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2006). Using reading and coloring to enhance incomplete prover's performance in geometry proof. In Novotna, J., M.Moraova, H., Kratka, M. & Stehlikova, N. (Eds.). *Proceedings 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 289-296. Retrieved from <ftp://ftp.math.ethz.ch/EMIS/proceedings/PME31/2/113.pdf>
- Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41-53. doi:10.1080/0141192940200105
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5th ed.). Taylor & Francis e-Library. doi:10.4324/9780203224342
- Creswell, J. (2012). *Educational research planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research* (4th ed.). Boston: Pearson.
- Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri: Beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni*. (M. Bütün & S. B. Demir çev. ed.). Ankara: Siyasal Kitabevi. (Çalışmanın orijinali 2013'te yayımlanmıştır)
- Creswell, J. W. (2016). *Araştırma deseni: Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları*. (M. Bütün & S. B. Demir çev. ed.). Ankara: Eğiten Kitap. (Çalışmanın orijinali 2014'te yayımlanmıştır)
- Creswell, J., & Plano Clark, V., L. (2014). *Karma yöntem araştırmaları tasarımı ve yürütülmesi* (Y. Dede & S. B. Demir çev. ed.). Ankara: Anı Yayıncılık. (Çalışmanın orijinali 2011'de yayımlanmıştır)
- Çalışkan, Ç. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 328655)
- Çepni, S. (2014). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş*. (Genişletilmiş 7. Baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.
- Çokluk, Ö., Şekercioğlu, G., & Büyüköztürk, Ş. (2012). *Sosyal bilimler için çok değişkenli istatistik SPSS ve LISREL uygulamaları* (2. baskı). Ankara: Pegem Akademi
- Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları* (Doktora Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 469523)

- Çoşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi* (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 233661)
- Davis, P.J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 333–344. doi:10.1007/BF01273369
- Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ.Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbalı, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* içinde (1. baskı, ss. 15-32). Ankara: Pegem Akademi.
- Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, (2), 47-71. <http://dergipark.gov.tr/adyuebd/issue/1373/16174> adresinden edinilmiştir.
- Demir, E. (2017). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının muhakeme hatalarının ispatlama bağlamında incelenmesi*. (Doktora Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 472004)
- Demir, F. (2011). *Bir dinamik geometri yazılımının ilköğretim öğrencilerinin geometride ispat becerilerine etkisi* (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 287422)
- Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations* (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 345123)
- Demircioğlu, H., & Polat, K. (2015). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının “sözsüz ispat” yöntemine yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 41, 233-254. doi:10.9761/JASSS3171
- Demircioğlu, H., & Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının “sözsüz ispatlar” ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *International Journal Of Turkish Education Sciences*, 4(7), 82-99.
- DeVilliers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24. Retrieved from <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofa.pdf>
- Doruk, B. K., Kıymaz, Y., Horzum, T., & Morkoyunlu, Z. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının ispatla ilgili görüşleri: formal ispat- temsili ispat. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 23-55. <http://dergipark.gov.tr/download/article-file/181451> adresinden edinilmiştir.
- Doruk, M. & Kaplan, A. (2013a). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(1), 241-252. http://www.jret.org/FileUpload/ks281142/File/26a.muhammed_doruk.pdf adresinden edinilmiştir.
- Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi*. (Doktora Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 433823)
- Doruk, M., & Kaplan, A. (2013b). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(1), 241-252. http://www.jret.org/FileUpload/ks281142/File/25a.muhammed_doruk.pdf adresinden edinilmiştir.

- Doruk, M., Özdemir, F., & Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı özyeterlik algıları arasındaki ilişki. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861-874. <http://79.123.169.199/ojs/index.php/Kefdergi/article/view/574> adresinden edinilmiştir.
- Doyle, T., Kutler, L., Miller, R., Schueller, A. (2014). Proof without words and beyond. *Mathematical Association of America*. doi:10.4169/convergence20140801
- Duval R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning*. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, 1, 3-26. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf>
- Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metotlarına giriş. Nitel, nicel ve eleştirel kuram metodolojileri*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Fawcett, H. P. (1938). The nature of proof. A description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof [DX Reader version]. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED096174.pdf>
- Flores, A. (2000). *Geometric representations in the transition from arithmetic to algebra*. In F. Hitt (Ed.), North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. *Representation and Mathematics Visualization* (pp. 9-29).
- Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics: an epistemological study*. Oxford University Press: New York. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199285945.001.0001
- Gierdien, F. (2007). From “Proofs without words” to “Proofs that explain” in secondary mathematics. *Pythagoras*, 65, 53 – 62. doi:10.4102/pythagoras.v0i65.92
- Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş* (A. Ersoy & P. Yalçınoglu çev. ed.). Ankara: Anı Yayıncılık. (Çalışmanın orijinali 2011’de yayımlanmıştır)
- Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi* 1(4), 56-64. <http://jret.org/FileUpload/ks281142/File/07a.gokkurt.pdf> adresinden edinilmiştir.
- Gökkurt, B., Soylu, Y., & Şahin, Ö. (2014). Analysis of the mathematical proof skills of students of science education. *Education Research Quarterly*, 38(2), 3-22.
- Gravina, M. A. (2008). *Dynamic visual proof: What does it mean?* 11th International Congress on Mathematical Education- TSG [22. Topic Study Group], 1-7. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Maria_Gravina2/publication/
- Güler, A., Halıcıoğlu, M.B., & Taşgın, S. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*. (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi’nden edinilmiştir. (Tez No. 331712)
- Güler, G., & Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590. <http://79.123.169.199/index.php/Kefdergi/article/view/574> adresinden edinilmiştir.
- Güler, G., & Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 60-81. <http://dergipark.ulakbim.gov.tr> adresinden edinilmiştir.

- Güler, G., & Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 6(3), 446-462. <http://dergipark.gov.tr/download/article-file/201388> adresinden edinilmiştir.
- Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236. http://www.kefdergi.com/pdf/20_1/20_1_15.pdf adresinden edinilmiştir.
- Güner, P. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde dnr tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 319488)
- Güner, P., & Topan, B. (2016). Prospective elementary mathematics teachers' abilities of using geometric proofs in teaching of triangle. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, 10(2), 210-242. Retrieved from http://www.nef.balikesir.edu.tr/~dergi/makaleler/yayinda/21/EFMED_MTE235.pdf
- Hancock, G. R., & Mueller, R. O. (2010). *The reviewer's guide to quantitative methods in the social sciences*. New York and London: Routledge Taylor& Francis Group.
- Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23. Retrieved from <http://flm-journal.org/Articles/32>
- Hanna, G. (1991). *Research on mathematical proof*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465
- Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education*, 39(1-2), 73-78. doi:10.1007/s11858-006-0005-0
- Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof [DX Reader version]. Retrieved from <http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/TowardComprehensivePerspective.pdf>
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 234-282. doi:10.1090/cbmath/007/07
- Hawro, J. (2007). *University students' difficulties with formal proving and attempts to overcome them*. CERME-5, 2290-2299. Retrieved from <http://www.erne.tu-dortmund.de/~erne/CERME5b/WG14.pdf#page=72>
- Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers? *Mathematical Thinking And Learning*, 1(1), 59-84. doi: 10.1207/s15327833mtl0101_3
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428. doi:10.2307/749651
- Heinze, A., & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at lower secondary level—a video study. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 36(3), 98-104. doi: 10.1007/BF02652777

- Heinze, A., Cheng, Y. H., Ufer, S., Lin, F.L., & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 40, 443-453. doi:10.1007/s11858-008-0092-1
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4), 389-399. doi:10.1007/BF01273372
- Hershkowitz, R. (1990). *Psychological aspects of learning geometry*. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge: Cambridge University Press, 70-95. doi:10.1017/CBO9781139013499.006
- Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S., & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction*, 18, 54-65. doi:10.1016/j.learninstruc.2006.10.008
- Hitt, F. (2002). *Construction of mathematical concepts and cognitive frames*. In F. Hitt (Ed.), North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education. *Representation and Mathematics Visualization* (pp. 241-260).
- Huang, R. (2005). *Verification or proof: Justification of Pythagoras' theorem in Chinese mathematics classrooms*. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.) *Proceedings of the 29 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 161-168. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496905.pdf>
- İmamoğlu, Y. (2010). *An investigation of freshmen and senior mathematics and teaching mathematics students' conceptions and practices regarding proof* (Doktora Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 270385)
- İncikabı, L. (2013). İlköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin mantıksal argümanları kanıtlama yöntemlerinin incelenmesi, *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6 (12), 129-148. doi:10.14520/adyusbd.441
- İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretme adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 265219)
- İpek, S., & Akkuş İspir, O. (2011). Preservice elementary mathematics teachers' geometric and algebraic proof process with dynamic geometry software. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 2(1), 20-34. <http://dergipark.gov.tr/turkbilmat> adresinden edinilmiştir.
- Jamnik, M., Bundy, A., & Green, I. (1997). *Automation of diagrammatic reasoning*. In: 15th International Joint Conference on Artificial Intelligence, San Mateo, CA 1, 528-533. Retrieved from <https://www.cl.cam.ac.uk/~mj201/publications/pub873.drii-ijcai1997.pdf>
- Johnson, B., & Christensen, L. (2014). *Eğitim araştırmaları. Nicel, nitel ve karma yaklaşımlar*. (S. B. Demir çev. ed.). Ankara: Eğiten Kitap. (Çalışmanın orijinali 2012'te yayımlanmıştır).
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International journal of Mathematical Education in science and Technology*, 31(1), 53-60. doi:10.1080/002073900287381
- Kalaycı, Ş. (2010). *SPSS uygulamalı çok değişkenli istatistik teknikleri* (5. Baskı). Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

- Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları*. (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 278074)
- Karasar, N. (2006). *Bilimsel araştırma yöntemi* (16. baskı). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Karrass, M. (2012). *Diagrammatic Reasoning Skills of Pre-Service Mathematics Teachers*. (Doctoral dissertation). Retrieved from ProQuest LLC.
- Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education*, 1(2), 134-141. <http://www.ijase.net/ojs/index.php/IJTASE/article/view/61> adresinden edinilmiştir.
- Keçeli Bozdağ, S. (2012). *Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Tutumları İle İspatlama Becerileri Arasındaki İlişki*. (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 317652)
- Kenny, D. A. (1987). *Statistics for the social and behavioral sciences*. USA.
- Knuth, H. (2002). Secondary school mathematics teacher's conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405. Retrieved from <http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/articles/Knuth%282002%29.pdf>
- Kobayashi, Y. (2010). Integral representation of the pictorial proof of the pictorial proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42, 235–239. doi:10.1080/0020739X.2010.510223
- Kondratieva, M. (2011). *Geometric proofs, basic geometric configurations and dynamic geometry software*. GEOGEBRA-NA, 46-54. Retrieved from http://www.math.mun.ca/~mkondra/papers/GG_margo.pdf
- Konyalıoğlu, A. C. (2015). *Matematik alan eğitimi*. Erzurum: Ertual Akademi.
- Köğce, D. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulmuş bildiri. Niğde Üniversitesi, Niğde.
- Kunth, H. (2002). Secondary school mathematics teacher's conceptions of proof. *Journal For Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405. doi:10.2307/4149959
- Küchemann, D., & Hoyles, C. (2004). *Year 10 students' proofs of a statement in number/algebra and their responses to related multiple choice items: longitudinal and cross-sectional comparisons*. McNamara, O. (Ed.) *Proceedings of the British society for Research into Learning Mathematics*, London, 24(1), 37-42. Retrieved from <https://www.researchgate.net/>
- Lane, E. (2004). The nature of proof in today's classroom. Book review of the nature of proof. *The Mathematics Enthusiast*, 1(2), 58-65. Retrieved from <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol1/iss2/6/>
- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16. Retrieved from <https://scholar.google.com.tr>
- Lockhart, P. (2009). A Mathematician's Lament. Retrieved from https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf
- Marrades R., & Gutierrez A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics* 44, 87–125. doi:10.1023/A:1012785106627

- McAllister, J. (2005). *Mathematical beauty and the evolution of the standards of mathematical proof*. In M. Emmer (Ed.), *The visual mind II* (pp.15-33) Cambridge: MIT Press.
- McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2006). *Research in education: Evidence-based inquiry*. (6th ed.) USA: Pearson Education.
- Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber* (S. Turan çev. ed.). Ankara: Nobel Yayıncılık. (Çalışmanın orijinali 2009'da yayımlanmıştır)
- Metin, M. (2014). *Kuramdan uygulamaya bilimsel araştırma yöntemleri* (1. baskı). Ankara: Pegem Yayıncılık.
- Miller R. L. (2012). On Proofs Without Words. Retrieved from: <http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2012/Miller.pdf>
- Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2013). Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 Ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2013). İlköğretim Matematik Dersi (6,7 Ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2018). Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 Ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27,249-266. doi:10.1007/BF01273731
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160. http://www.kefdergi.com/pdf/14_1/147-160.pdf adresinden edinilmiştir.
- Morash, R. P. (1987). *Bridge to abstract mathematics: Mathematical proof and structures*, New York: Random House.
- Mudaly, V. (2013). Is proving a visual act? *Mevlana International Journal of Education. Special Issue: Dynamic and Interactive Mathematics Learning Environments*, 3 (3), 36-44. doi:10.13054/mije.si.2013.04
- Muijs, D. (2004). *Doing quantitative research in education with SPSS*. London: SAGE Publications. doi:10.4135/9781849209014
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nelsen. R (2000). *Proofs without words II: More exercises in visual thinking*. Washington: Mathematical Association of America.
- Nelsen. R. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Washington: Mathematical Association of America.
- Oral, B., & İlhan, M. (2012). İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerinin çeşitli değişkenler açısından incelenmesi. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, 6(1), 201-219. <http://dergipark.ulakbim.gov.tr> adresinden edinilmiştir.
- Öçal, M. F., & Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 318-323. doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.157
- Öner, D. (2006). *A comparative analysis of high school geometry curricula: What do technology-intensive, standards-based and traditional curricula have to offer in terms*

- of mathematical proof and reasoning (Doctoral dissertation). Retrieved from ProQuest LLC. (UMI Number. 3234661)
- Ören, D. (2007). *An investigation of 10th grade students' proof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender* (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 177506)
- Özdemir, F., & Kaplan, A. (2014). Öğretmen adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(2), 410-429. <http://dergi.amasya.edu.tr/article/view/5000070452> adresinden edinilmiştir.
- Özer, Ö., & Arıkan, A. (2002, Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri*, 5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi, tarafından düzenlenen kongre, Ankara.
- Öztürk, T. (2016). *Matematik Öğretmeni Adaylarının İspatlama Becerilerini Geliştirmeye Yönelik Tasarlanan Öğrenme Ortamının Değerlendirilmesi*. (Doktora Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 448319)
- Paas, F., & Gog, T.V., (2006). Optimising worked example instruction: Different ways to increase germane cognitive load. *Learning and Instruction*, 16, 87-91. doi:10.1016/j.learninstruc.2006.02.004
- Paas, F., Tuovinen., J. E., Tabbers, H., & Van Gerven, P. W. M. (2003). Cognitive load measurement as a means to advance cognitive load theory. *Educational Psychologist*, 38(1), 63–7. doi:10.1207/S15326985EP3801_8
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri*. (M. Bütün & S. B. Demir çev. ed.). Ankara: Pegem Akademi. (Çalışmanın orijinali 2002'de yayımlanmıştır)
- Polat, K. & Akgün, L. (2016). Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Kavramına ve İspat Yapmanın Zorluklarına Yönelik Görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 43, 423-438. doi.org/10.9761/JASSS3219
- Polat, K., & Demircioğlu, H. (2016). Matematik Eğitiminde Sözsüz İspatlar: Kuramsal Bir Çalışma. *Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129-140. doi:10.14582/DUZGEF.686
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52, 319-325. doi:10.1023/A:1024360204239
- Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophic Mathematics*, 7, 5-41. doi:10.1093/philmat/7.1.5
- Reiss, K. M., Heinze, A. Renkl, A., & Gross, C. (2008). Reasoning And Proof İn Geometry: Effects Of A Learning Environment Based On Heuristic Worked-Out Examples, *ZDM Mathematics Education*, 40, 455-467. doi:10.1007/s11858-008-0105-0
- Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: the idea of heuristic examples. *ZDM Mathematics Education*, 34(1), 1-7. doi:10.1007/BF02655690
- Reiss, K., Hellmich, F., & Reiss, M. (2002). *Reasoning and proof in geometry: Prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students*. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of The 26th Conference of The International Group For The Psychology of Mathematics Education*, Norwich: University of East Anglia, 4, 113–120. doi: 10.1007/s11858-008-0105-0

- Renkl, A., & Atkinson, R. K. (2003). Structuring the transition from example study to problem solving in cognitive skill acquisition: A cognitive load perspective, *Educational Psychologist*, 38(1), 15-22. doi:10.1207/S15326985EP3801_3
- Rinvold R. A., & Lorange A. (2013). *Multimodal proof in arithmetic*. Proceedings of CERME 8, Antalya, 16-225. Retrieved from www.mathematik.unidortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf
- Rinvold, R. A., & Lorange, A. (2011). *Multimodal derivation and proof in algebra*. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.). *Proceedings of CERME 7*, Poland, 233-242. Retrieved from http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG1/WG1_Rinvold.pdf
- Rodd, M. M. (2000). On mathematical warrants: Proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 221-244. doi:10.1207/S15327833MTL0203_4
- Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 372244)
- Shaughnessy, J. M., & Burger, F. M. (1985). Spadework prior to deductive geometry. *The Mathematics Teacher*, 78(6), 419-428. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.648.9878&rep=rep1&type=pdf>
- Sigler A, Segal R, & Stupel M. (2016). The standard proof, the elegant proof, and the proof without words of tasks in geometry, and their dynamic investigation. *International Journal of Mathematics Education Scientific Technology*, 47(8), 1226-1243. doi:10.1080/0020739X.2016.1164347
- Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The sage handbook of qualitative research* (3rd ed., pp. 443-466). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Strausova, I. & Hasek, R. (2012). "Dynamic visual proofs" using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 7(2), 130-143. Retrieved from <http://eds.b.ebscohost.com>
- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. London: Sage Publications.
- Sweller, J. (2008). Human cognitive architecture. M. Spector, et al. (Eds.), *Handbook of research for educational communications and technology* (3rd ed. pp. 369-383), Lawrence Erlbaum Associates.
- Şan, İ. (2012). Matematik Öğretiminde Görselleştirme. *Journal of Qafqaz University*, 34, 109-123. <https://www.researchgate.net/publication/283211854> adresinden edinilmiştir.
- Şimşek, E., Şimşek, A., & Dündar, S. (2013). Lise 12.sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreçlerinin incelenmesi. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(4), 43-57. <http://dergipark.ulakbim.gov.tr/befdergi/article/view/5000206359> adresinden edinilmiştir.
- Tall, D., Yevdokimov, O. Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.H. (2011). Cognitive development of proof. *Proof and Proving in Mathematics Education*, 13-49. doi:10.1007/978-94-007-2129-6_2
- Tanrıöğen, A. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Anı Yayıncılık.

- Taştepe, M. (2012). *İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 319476).
- Taştepe, M., Yavuz, İ., & Baştürk, S. (2015). Soyut matematik ders kitaplarındaki ispatların balacheff'in taksonomisi bağlamında incelenmesi. *Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2(2), 52-62. doi:10.16991/INESJOURNAL.17
- Tekin , B. & Konyalıoğlu, A. C. (2010). Trigonometrik fonksiyonların toplam ve fark formüllerinin ortaöğretim düzeyinde görselleştirilmesi. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(1-2), 24-37. <http://dergipark.ulakbim.gov.tr/befdergi/article/view/5000195648> adresinden edinilmiştir.
- Thornton, S. (2001). A Picture is worth a thousand words. Retrieved from <http://math.unipa.it/grim/AThornton251.PDF>
- Turgut, M., Yenilmez, K., & Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 227-252. doi:10.14520/adyusbd.532
- Uğurel, I., & Moralı , S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 135-154. http://acikerisim.deu.edu.tr/xmlui/bitstream/handle/12345/117/pdf_91.pdf?sequence=1&isAllowed=y adresinden edinilmiştir.
- Uğurel, I., Moralı, H. S., Karahan, Ö., & Boz, B. (2016). Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (vp) and preliminary ideas about VP. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(3), 174-197. doi:10.18404/ijemst.61686
- Umay, A., & Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 188-195. <http://dergipark.ulakbim.gov.tr/hunefd/article/viewFile/5000048654/5000045974> adresinden edinilmiştir.
- Urhan, S., & Bülbül, A. (2016). Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(1), 351-373. <http://dergipark.ulakbim.gov.tr/balikesirnef/article/view/5000194112> adresinden edinilmiştir.
- Uysal Koğ, O., & Başer, N. (2012). The role of visualization approach on students' attitudes towards and achievements in mathematics. *İlköğretim Online*, 11(4), 945-957.
- Ünveren, E. N. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi) Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 275269)
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. W. (2014). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim*. (S. Durmuş çev. ed.). Ankara: Nobel Yayınları. (Çalışmanın orijinali 2010'da yayımlanmıştır)
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119. doi:10.1023/A:1015535614355
- Yassin, E. İ. A. (2013). *The effect of using the proof without words method on the results and the transfer of learning among the scientific the first grade secondary students in*

Nablus. (Master's thesis) Retrieved from <https://scholar.najah.edu/sites/default/files/Eman%20Yassin.pdf>

- Yeşilyurt Çetin, A. (2017). *Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri*. (Doktora Tezi) Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 480352)
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (Genişletilmiş 9. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi*. (Yüksek Lisans Tezi) Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 394787)
- Yılmaz, K., & Çiltaş, A. (2015). Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili görüşlerine etkisi. *Akademik Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 3(18), 66-86. <http://www.asosjournal.com> adresinden edinilmiştir.
- Yılmaz, S., Turgut M., & Alyeşil Kabakçı, D. (2008). Ortaöğretim öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin incelenmesi: Erdek ve Buca örneği. *Bilim, Eğitim ve Düşünce Dergisi*, 8, 1. <http://www.universite-toplum.org/text.php3?id=354?ref=Sexshopdan.com> adresinden edinilmiştir.
- Yin, R. K. (2003). *Case study research design and methods* (3rd edit.). London: Sage Publication.
- Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. (Yüksek Lisans Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 307591)
- Zöttl, L., Ufer, S., & Reiss, K. (2010). Modelling with heuristic worked examples in the KOMMA learning environment. *Journal of Mathematics Didactic*, 31, 143-165. doi:10.1007/s13138-010-0008-9

EKLER

EK-1. Resmi İzin Yazıları

	T.C. SİVAS VALİLİĞİ İl Millî Eğitim Müdürlüğü	
Sayı : 92255297-605.01-E.1122624		27.01.2017
Konu: Araştırma İzni (Kübra POLAT)		
VALİLİK MAKAMINA		
İlgi : a)Araştırma Görevlisi Kübra POLAT'ın 25/01/2017 Tarihli Dilekçesi. b)Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 07/03/2012 Tarihli B.08.0.YET.00.20.00.0-3616 Sayılı 2012/13 No'lu Genelgesi. c)Valilik Makamının 21/10/2016 Tarih ve 92255297-605-E.11777707 Sayılı Onayı.		
Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Bölümü Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi Kübra POLAT, "Alternatif Bir İspat Yöntemi Olarak Sözsüz İspatlar: Lise Öğrencilerinin İspat Yapabilme Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı doktora tez çalışması kapsamında, İlimiz Ulaş Çok Programlı Anadolu Lisesi öğrencilerine yönelik anket çalışması yapmak istemektedir. İlgi (a) dilekçe ekindeki anket çalışması, Valilik Makamının İlgi (c) Onayı ile oluşturulan Araştırma Değerlendirme Komisyonu tarafından incelenmiş olup çalışmanın, eğitim öğretimin aksatılmaması kaydıyla İlimiz Ulaş Çok Programlı Anadolu Lisesi öğrencilerine uygulanmasında bir sakınca görülmemektedir.		
Onaylarınıza arz ederim.		
Mücahit GÜL Müdür a. Şube Müdürü		
OLUR 27.01.2017		
Harun TAN Vali a. Millî Eğitim Müdür V.		
Lütfi KELDAL Şef		
Muhsin Yazıcıoğlu Bulvarı No:23 SİVAS Elektronik Ağ:http://sivas.meb.gov.tr Eposta:arge58@meb.gov.tr;istatistik58@meb.gov.tr Bilgi için: L. KELDAL / Şef Tel:0 346 2284800/132 Faks:0 346 2270639		
Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. http://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden eb5b-2123-3ba9-a90a-50bb kodu ile teyit edilebilir.		



T.C.
SİVAS VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü



Sayı : 92255297-605.01-E.1122624

27.01.2017

Konu: Araştırma İzni
(Kübra POLAT)

VALİLİK MAKAMINA

- İlgi : a)Araştırma Görevlisi Kübra POLAT'ın 25/01/2017 Tarihli Dilekçesi.
b)Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün
07/03/2012 Tarihli B.08.0.YET.00.20.00.0-3616 Sayılı 2012/13 No'lu Genelgesi.
c)Valilik Makamının 21/10/2016 Tarih ve 92255297-605-E.11777707 Sayılı
Onayı.

Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Bölümü Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi Kübra POLAT, "Alternatif Bir İspat Yöntemi Olarak Sözsüz İspatlar: Lise Öğrencilerinin İspat Yapabilme Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı doktora tez çalışması kapsamında, İlimiz Ulaş Çok Programlı Anadolu Lisesi öğrencilerine yönelik anket çalışması yapmak istemektedir.

İlgi (a) dilekçe ekindeki anket çalışması, Valilik Makamının İlgi (c) Onayı ile oluşturulan Araştırma Değerlendirme Komisyonu tarafından incelenmiş olup çalışmanın, eğitim öğretimin aksatılmaması kaydıyla İlimiz Ulaş Çok Programlı Anadolu Lisesi öğrencilerine uygulanmasında bir sakınca görülmemektedir.

Onaylarınıza arz ederim.

Mücahit GÜL
Müdür a.
Şube Müdürü

OLUR
27.01.2017

Harun TAN
Vali a.
Millî Eğitim Müdür V.

Güvenli Elektronik imzalı
Aslı ile Aynıdır.
27/01/2017

Lütfi KELDAL
Şef

Muhsin Yazıcıoğlu Bulvarı No:23 SİVAS
Elektronik Ağ:http://sivas.meb.gov.tr
Eposta:arge58@meb.gov.tr;istatistik58@meb.gov.tr

Bilgi için: L. KELDAL / Şef
Tel:0 346 2284800/132
Faks:0 346 2270639

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. http://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden eb5b-2123-3ba9-a90a-50bb kodu ile teyit edilebilir.

EK-2. Veli İzin Formu

Sayın Veli;

Ben Kübra POLAT. Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Araştırma Görevlisiyim. “Lise Öğrencilerin İspat Becerilerinin İncelenmesi: Alternatif İspat Yöntemi Olarak Sözsüz İspatlar” isimli doktora tez çalışmamda öğrencilerimizin zorlanmakta oldukları matematik dersinin ispat konusunda çalışmaktayım. Tez kapsamında öğrencilerimize bu konu ile ilgili çeşitli etkinlikler yapıp bu konu ile ilgili eksikliklerinin tespit edilip giderilmesi için çalışmalar yapılacaktır. Ders kapsamındaki etkinlikler ile ilgili verilerin kaybedilmemesi için video kaydı yapmak istiyorum. Eğitim araştırmalarında verilerin kaybolmaması için video kaydı sıkça kullanılan bir veri toplama aracıdır. Öğrencilerin kimlikleri hiçbir birimle paylaşılmayacaktır. Bu konuda velisi olduğunuz öğrencinin çalışmaya katılması için bu belgeyi imzalarsanız çok memnun olurum. Aşağıda telefon numaram ve adresim yer almaktadır. Herhangi bir sorunuz olursa bana bu numaradan ulaşabilirsiniz.

Kübra POLAT

Cumhuriyet Üniversitesi

Eğitim Fakültesi

Tel:0541 5858926

Velinin İmzası

EK-3. İspat Beceri Testi

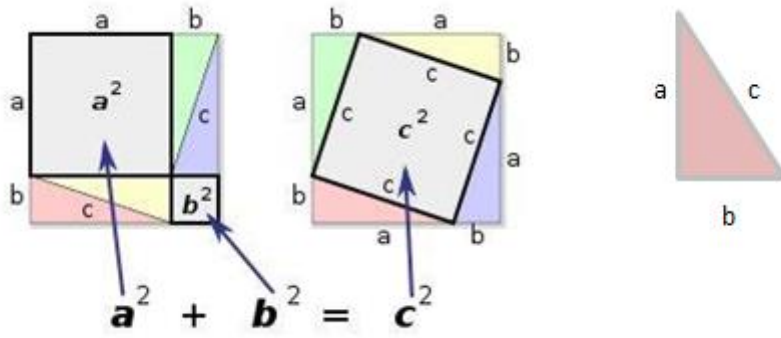
Ad-Soyad:

Tarih:

Sevgili öğrenciler aşağıdaki soruları cevaplamaz istenmektedir. Araştırma sonucunda elde edilen veriler, sözsüz ispata yönelik çalışmalarda kullanılacaktır. Vereceğiniz bilgilerin tümü gizli kalacaktır. Katkılarınızdan dolayı şimdiden çok teşekkür ederim.

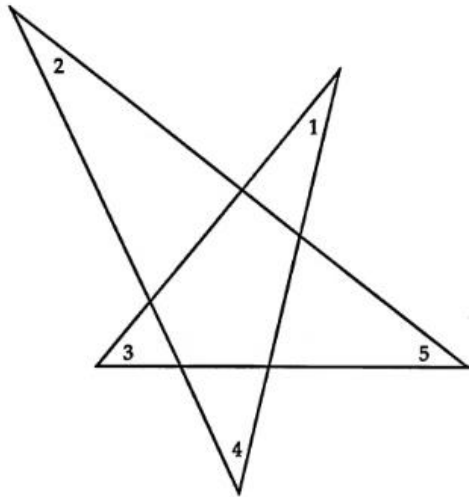
Araş. Gör. Kübra POLAT

- 1) Aşağıdaki şekil size ne ifade etmektedir? Açıklayınız.



Açıklama:

- 2) Aşağıdaki yıldızın köşe açılarının toplamının olan 180° olduğunu gösteriniz.

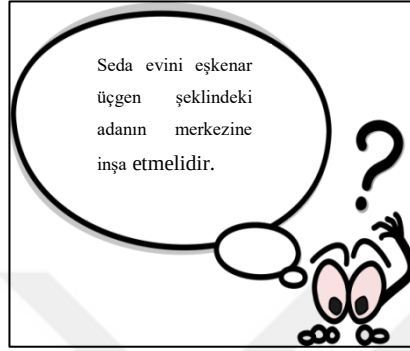


Açıklama:

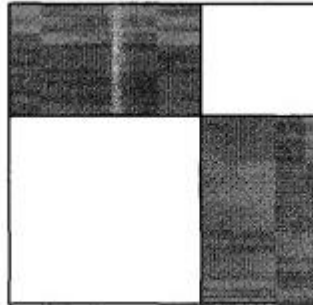
- 3) $(a^2 - b^2) = (a - b) \cdot (a + b)$ özdeşliğini modelleyiniz.

- 4) Seda bir gemi kazası sonucunda enkazdan kurtulup ıssız bir adaya düşüyor. Ada eşkenar üçgen şeklinde. Kendine bir sörf tahtası yapıyor ve her gün sörf yapıyor. Seda evini adanın üzerinde nereye inşa etmelidir ki evinden adanın üç kenarına olan uzaklıkların toplamı minimum olsun? (Seda eşit sıklıkta her bir kenarı ziyaret etmektedir)

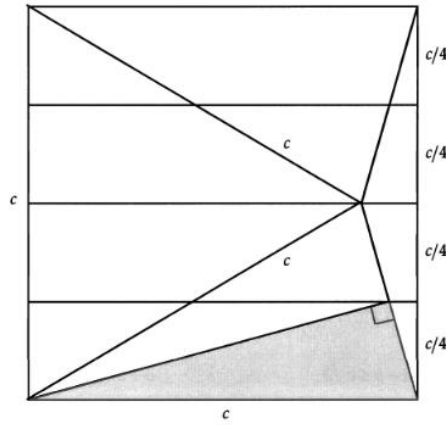
Verilmiş olan soruya aşağıdaki yanıtlar verilmiştir. Size göre hangi cevap doğrudur sebebinizi açıklayınız.



- 5) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ özdeşliğini aşağıdaki kareyle nasıl modelleyebilirsiniz?

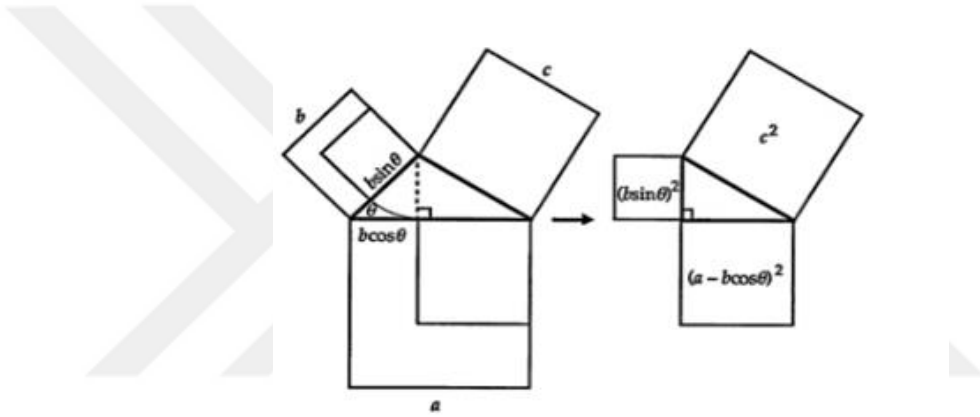


- 6) $15^\circ 75^\circ 90^\circ$ üçgeninin alanı hipotenüs uzunluğunun karesinin $\frac{1}{8}$ ine eşittir. Bu ispat aşağıdaki şekilde gösterilmektedir. İstenen varsayımı yazınız ve görsel ispatın nasıl yapıldığını tartışınız.



Açıklama:

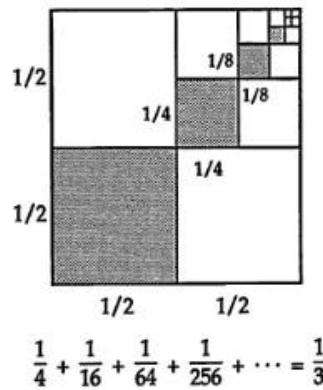
- 7) Aşağıda verilen şekille matematiğin önemli teoremlerinden bir ispatlanmaktadır. Bu teoremin hangisi olduğunu ve nasıl ispatlandığını tartışınız.



Açıklama:

- 8) Aşağıdaki resimde koyu renkle verilmiş bölgelerin alanları toplamını göz önünde bulundurarak matematiksel bir ifade ispatlanmıştır. Bu ispattaki varsayımı (neyin ispatlandığını) ve ispatın nasıl yapıldığını tartışınız.

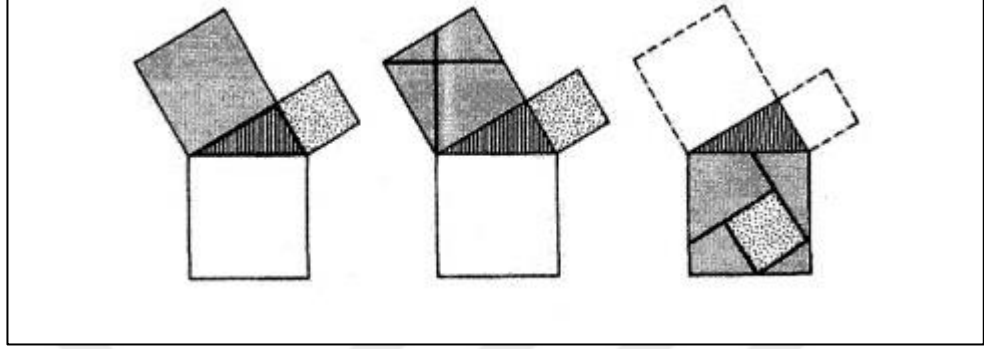
Yol gösterme: Taralı alanların toplamıyla bütün alan arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurunuz.



Açıklama:

- 9) Aşağıda matematiğin önemli teoremlerinden birinin sözsüz ispatı verilmiştir. Verilen bu sözsüz ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve ispatın nasıl yapıldığını tartışınız.

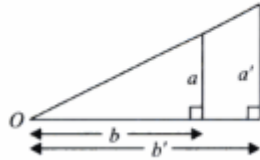
Yol gösterme: Aynı renklerde verilen alanlarının eşit olduğunu göz önünde bulundurunuz.



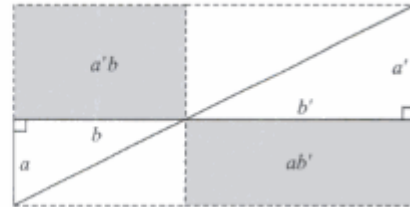
Açıklama:

- 10) Aşağıda üçgende bir teoreminin görsel ispatı ve bu ispata ulaşılması için gerekli ispat aşamaları verilmiştir. Verilen görsel ispatı inceleyerek aşağıda verilmiş aşamaları doldurunuz.

(a)



(b)

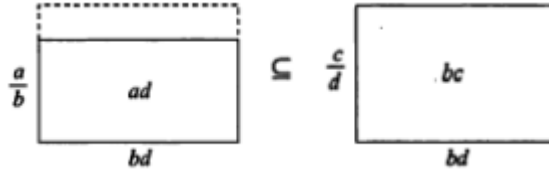


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

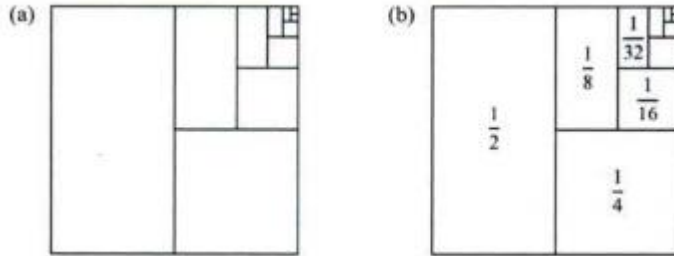
- Şekli açıklayınız:
- Görsel ispatı verilmiş teoremin hangi teorem olduğunu yazınız:
- İspat yapılırken hangi işlemlerden faydalandığınızı belirtiniz:
- Sonuca ulaşmak için gerekli işlemlerin yapınız:
- Yapılanları özetleyiniz:

EK-4. Bireysel Sözsüz İspat Etkinlikleri

- 1) a, b, c, d pozitif sayılar olmak üzere $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \leftrightarrow ad \leq cb$ eşitsizliğinin sözsüz ispatı aşağıda verilmiştir. İspatın nasıl yapıldığını tartışınız.

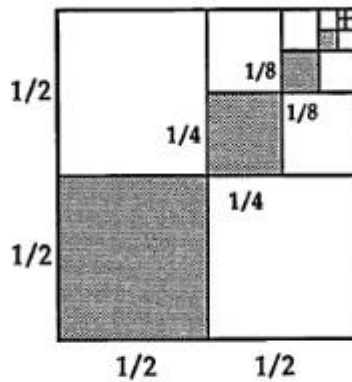


- 2) Aşağıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

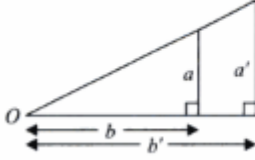
- 3) Aşağıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.



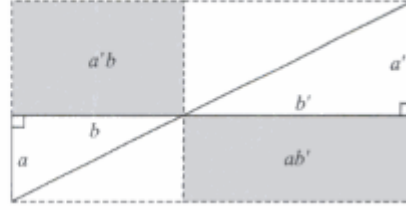
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

- 4) Aşağıda bir teoremin ispatı yer almaktadır. Bu ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve nasıl yapıldığını tartışınız.
- 5)

(a)



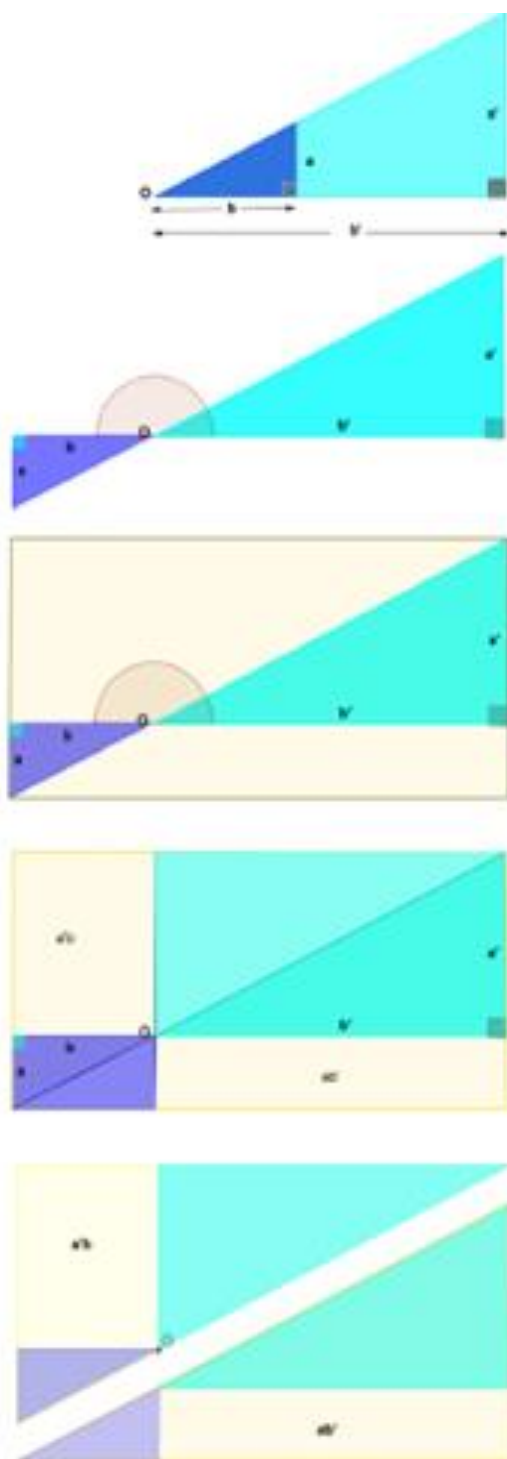
(b)



$$a'b = ab' \text{ olmak üzere } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

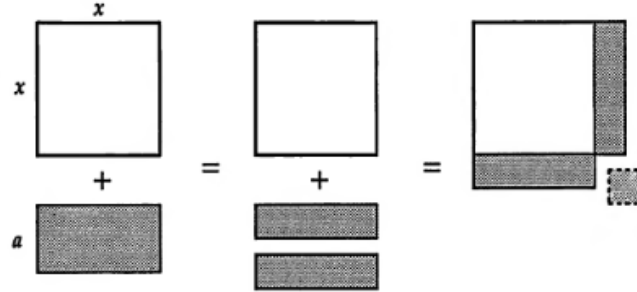
- 6) Aşağıda bir teoremin ispatı yer almaktadır. Bu ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve nasıl yapıldığını tartışınız.

$$a'b = ab' \text{ olmak üzere } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$



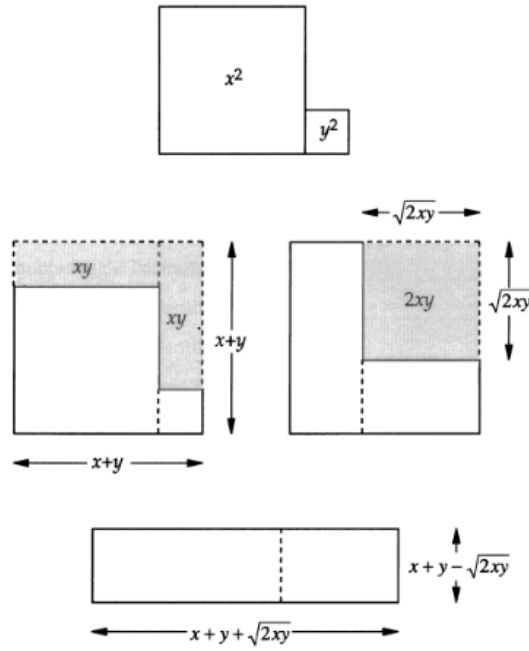
7) Aşağıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.

$$x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$$

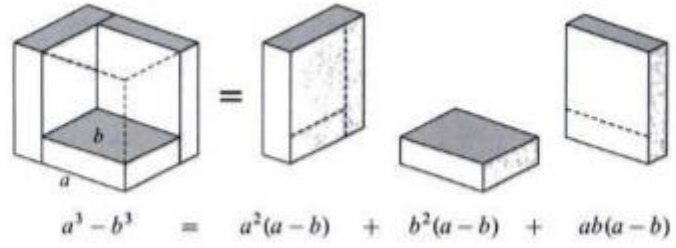


8) Aşağıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.

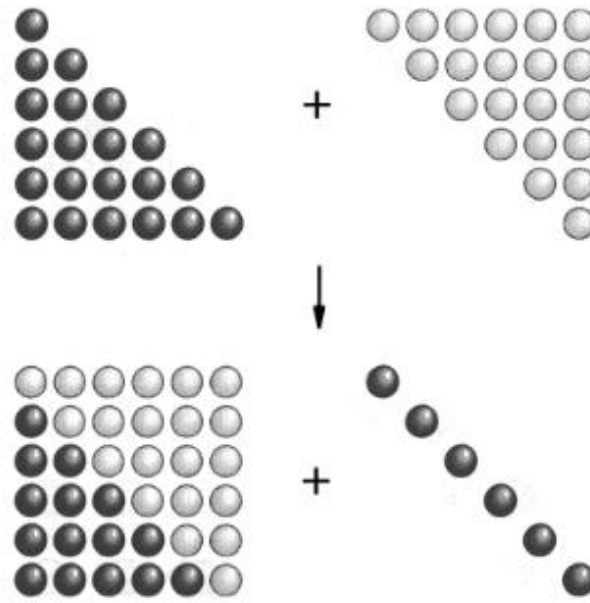
$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$



9) Aşağıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.



10) Aşağıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.



11) Aşağıdaki şekille bir eşitsizliğin sözsüz ispatı gösterilmektedir. Bu eşitsizliğin ne olduğunu ve ispatın nasıl yapıldığını tartışınız.

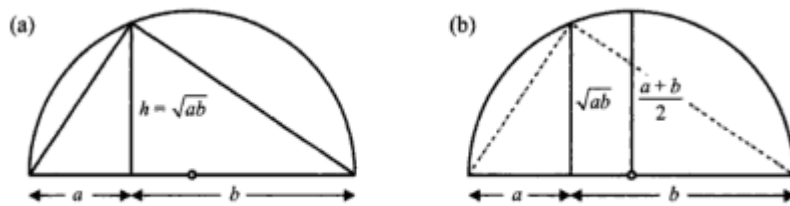
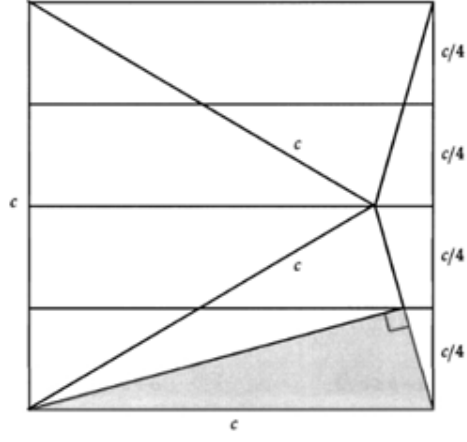
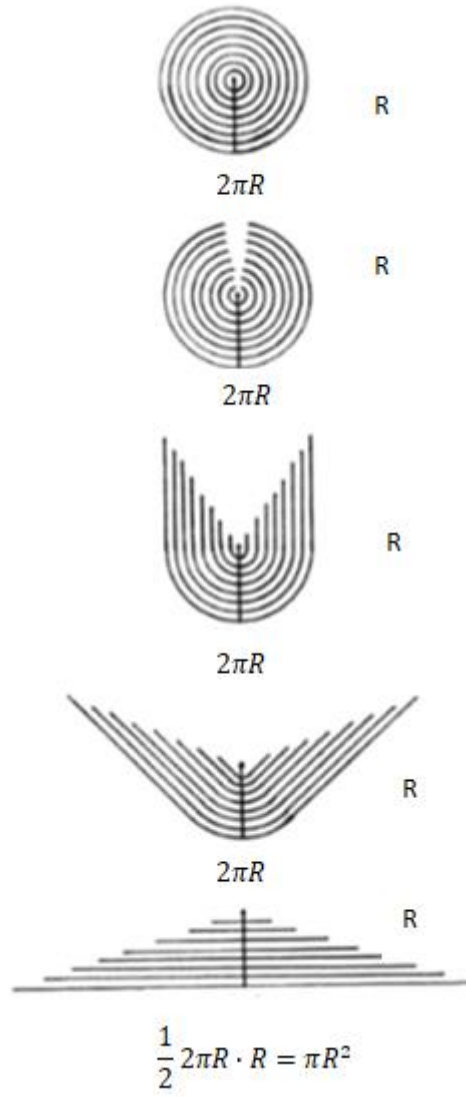


FIGURE 2.2

- 12) “ $15^\circ 75^\circ 90^\circ$ üçgeninin alanı hipotenüs uzunluğunun karesinin $\frac{1}{8}$ ine eşittir.” Bu ifadenin ispatı aşağıda verilmiştir. İspatın nasıl yapıldığını tartışınız.



13) Aşağıda verilen sözsüz ispatın ne olduğunu ve nasıl yapıldığı tartışınız.



EK-5. Öğrenci Görüşme Formu

- 1) Sözsüz ispatlara orta öğretim programında yer verilmesi hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?”
- 2) Dersinizde sözsüz ispatlar ile ilgili etkinlikleri yaparken zorlandığınız noktalar oldu mu? Olduysa örneklerle açıklayınız.
- 3) Derste yapmış olduğunuz sözsüz ispat etkinlikleri ile ilgili olarak varsa olumlu bulduğunuz yönleri örneklerle açıklayınız.
- 4) Dersinizde yapmış olduğunuz sözsüz ispat etkinlikleri ile ilgili olarak varsa olumsuz bulduğunuz yönleri örneklerle açıklayınız.
- 5) Kendi başınıza herhangi bir konuyla ilgili bir sözsüz ispat yapabileceğini düşünüyor musunuz? Nedeninizi açıklayınız.
- 6) Daha önce sözsüz ispatlarla karşılaştınız mı? Karşılaştıysanız birkaç örnek verebilir misiniz?
- 7) Sözsüz ispatların matematiksel düşünmenize etkisi ne oldu? Örnekleriyle açıklayınız.
- 8) Sözsüz ispatların görselleştirme becerinize etkisi ne oldu? Örnekleriyle açıklayınız.
- 9) Sözsüz ispatların ilişkilendirme becerinize etkisi ne oldu? Örnekleriyle açıklayınız.
- 10) Yapılan sözsüz ispat etkinliklerinde ispatı anladığınızda yaşadığınız duygular neler oldu? Örneklerle açıklayınız.
- 11) Yapılan sözsüz ispat etkinliklerinde ispatı anlamadığınızda yaşadığınız duygular neler oldu? Örneklerle açıklayınız.
- 12) Sözsüz ispatların yer aldığı ders süreci ve bu görüşme ile ilgili belirtmek istediğiniz başka görüş ve önerileriniz var mı? Belirtiniz.
- 13) Sözsüz ispatlar ve formal ispatları karşılaştıracak olursanız neler söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.
- 14) Sözsüz ispatlarla ilgili yapmış olduğunuz etkinlikleri düşünecek olursanız aklınızda kalan etkinlik hangisiydi? Belirtiniz.
- 15) Bir arkadaşınıza ev ödevi olarak sözsüz ispat görevi verilmiş. Ancak daha önce arkadaşınız kendi başına sözsüz ispat yapmamış ve sizden yardım istiyor. Arkadaşınıza ne tavsiye edersiniz?

Öğretmen Görüşme Formu

- 1) Lise öğretim programında ispatlara yer verilmesi ile ilgili ne düşünüyorsunuz?
- 2) Öğrencilerinizin ispat yapma becerisi hakkında ne düşünüyorsunuz?
- 3) Size göre öğrencilerin ispat yapma becerisi nasıl geliştirilebilir?
- 4) Sözsüz ispatlara lise öğretim programında yer verilip verilmemesi ile ilgili olarak ne düşünüyorsunuz? Bu konu ile ilgili deneyimlerinizden örneklerle bahseder misiniz?
- 5) Dersinizde sözsüz ispatlar ile ilgili etkinlikleri yaparken zorlandığınız noktalar oldu mu? Olduysa örneklerle açıklayınız.
- 6) Size göre sözsüz ispatların öğrencilerin ispat becerisine katkısı var mıdır? Varsa örneklerle açıklayınız.
- 7) Bu etkinliklerin ardından öğrencilerde olumlu bulduğunuz yönler var mıdır? Varsa örnek verebilir misiniz?
- 8) Bu etkinliklerin ardından öğrencilerde olumsuz bulduğunuz yönler var mıdır? Varsa örnek verebilir misiniz?
- 9) İleriki yıllarda sözsüz ispatlarla ilgili yapmış olduğunuz etkinlikleri kullanmayı düşünür müsünüz? Nedenleriyle açıklayınız.
- 10) Sözsüz ispat etkinliklerini yeniden gözden geçirmeniz istense neler yapardınız? Nedenleriyle açıklayınız.
- 11) Sözsüz ispatların alternatif bir ispat yöntemi olarak kullanılması hakkında ne düşünüyorsunuz?
- 12) Ders süreci ve bu görüşme ile ilgili belirtmek istediğiniz başka görüş ve önerileriniz var mı?

EK-6. Puanlama Cetveli

Soru	Gözlenen Davranış	Davranış Gözlendi ise	Davranış kısmen gözlendi ise	Davranış gözlemlenmedi
1.soru	Şekli analiz etme/eş uzunlukları belirleme	2	1	0
	Varsayımı ($a^2 + b^2 = c^2$) fark etme	2	0	
	Kare ve üçgenlerin alanları ile ilgili eşitlikleri yerine yazma	2	0	
	Eşitliklerden yola çıkarak varsayıma ulaşma	4	2	0
2.soru	Şekli analiz etme/şekildeki küçük üçgenleri görme	2	0	
	İstenen varsayımı ifade etme	2	0	
	Üçgende iki iç açının ölçüsünün toplamının komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşit olma özelliğini köşe açılarına uygulayabilme	2	0	
	Eşitliklerden yola çıkarak varsayıma ulaşma	4	2	0
3.soru	Verilen özdeşliğin geometrik yorumunu fark etme	2	0	
	Verilen özdeşlik ile model arasında bağlantı kurma/modeli oluşturma	2	0	
	Oluşturulan modeldeki dikdörtgen ve kare alanları ile ilgili eşitliklerin yazılması	2	0	
	Yazılan eşitlikten varsayımın elde edilmesi	4	2	0
4.soru	Viviani teoremini kullanarak soruyu doğru biçimde yanıtlama	10	0	
5.soru	Şekildeki eşit uzunlukları fark etme/şekilde oluşan kare ve dikdörtgenleri ifade etme	2	0	
	Verilen özdeşliğin, verilen şekil ile modellenebileceğinin ifade edilmesi	2	0	
	Şekilde oluşan dikdörtgen ve karelerin alanları ile ilgili eşitliklerin yazılması	2	0	
	Eşitliklerden yola çıkarak modellemenin gösterilmesi	4	2	0

6.soru	Şekli analiz etme/eş uzunlukların, açıların ifade etme	2	0	
	Varsayımı ifade etme	2	0	
	Eşkenar üçgen, ikizkenar üçgen ve karenin alanı ile ilgili eşitliklerin yazılması	2	0	
	Eşitliklerden yola çıkarak modellemenin gösterilmesi	4	2	0
7.Soru	Şekli analiz etme/kenar uzunluklarını ifade etme/ θ açısını kosinüs ve sinüs cinsinden ifade etme	2	0	
	Kosinüs teoreminin ispatı olduğunu fark etme	2	0	
	Pisagor teoremini uygulama	2	0	
	Sonuca ulaşabilme	4	2	0
8.Soru	Şekli analiz etme/kenar uzunlukları ve alanlar arasındaki ilişkiyi ifade etme	2	0	
	Varsayımı ifade etme	2	0	
	Oluşan şekillerin alanları ile ilgili eşitlikleri yazma	2	0	
	Varsayıma ulaşma	4	2	0
9.Soru	Şekli analiz etme/eş uzunlukları, benzer şekilleri fark etme	2	0	
	Renklendirilen karenin içinde oluşan şekillerin alanları ile karelerin alanları arasındaki ilişkiyi ifade etme	2	0	
	İfade edilen varsayımla ilgili işlemleri yapma	2	0	
	Pisagor teoremini elde etme	4	2	0
10.soru	Şekli analiz etme/kenar uzunlukları, eş kenarları, açıları belirleme	2	0	
	Verilen varsayımın Thales teoremine ait olduğunu ifade etme	2	0	
	Oluşan şekillerin alanları ile ilgili eşitlikleri yazma	2	0	
	Verilen varsayımı elde etme	4	2	0

EK-7. Gözlem Formu

Gözlem Formu

Amaç

Bu gözlemin amacı, sözsüz ispat etkinlikleri esnasındaki öğrenci ve öğretmen davranışlarını, sınıf ortamını gözlemlemek ve bu etkinlikler esnasında öğrencilerin hangi becerileri edindiklerine ve sözsüz ispatların ispatın hangi fonksiyonlarını yerine getirdiğine yönelik bilgi elde etmektir.

Gözlem Yapılan Okul:..... Okul Türü:..... Sınıf:.....

İşlenen Ünite:..... İşlenen Konu:..... Etkinlik Adı:.....

Gözlem Tarihi: Gözlemin Başlama Zamanı:..... Bitiş Zamanı:.....

	Gözlenen Davranış	Gözlenme Durumu
İspatın fonksiyonları	Sözsüz ispat etkinlikleri öğrencilere formüllerin nereden geldiğini anlamalarını sağlıyor (ispatın açıklama fonksiyonu)	
	Öğrenciler sözsüz ispat etkinlikleriyle formülleri keşfediyorlar (ispatın keşfetme fonksiyonu)	
	Öğrenciler sözsüz ispatlar sayesinde formüllerin doğruluğuna ilişkin ikna oluyorlar (ispatın ikna fonksiyonu)	
	Öğrenciler sözsüz ispat etkinliklerini yapmaktan keyif alıyorlar(ispatın hoşlanma fonksiyonu)	
	Sözsüz ispat etkinlikleri öğrencilerde merak uyandırıyor	
Bilişsel Beceriler	Öğrenciler sözsüz ispatlar sayesinde farklı konular ve matematiksel fikirler arasında ilişki kurabiliyorlar(ilişki kurma becerisi)	
	Öğrenciler sözsüz ispatlar sayesinde bir resmi açıklarken sebep gösterebiliyorlar(sebep gösterme becerisi)	
	Öğrenciler sözsüz ispatlarla ilgili muhakeme yapabiliyorlar(muhakeme becerisi)	
	Öğrenciler sözsüz ispatlar sayesinde aşık olmanın fikir ve kuralları kullanabiliyorlar	
	Öğrenciler sözsüz ispatlarla görülmeyeni görebilme fırsatı bulabiliyorlar (gömülü matematiği keşfetmek için çizimler, diyagramlar ve karalamalar yapmaya çalışıyor)	
	Sözsüz ispatlar ispata nasıl başlayacağı hakkında öğrenciye fikir vermektedir	

Sosyal beceriler	Öğrenciler sözsüz ispatları anlayınca kendilerine güvenleri artıyor	
	Öğrenciler sözsüz ispatları yaparken birbirleriyle ispatlar hakkında fikir alışverişinde bulunuyorlar	
	Sözsüz ispat etkinlikleri esnasında öğrenciler öğretmenlerine rahatça soru sorabiliyorlar(Öğretmen iletişime açık)	
	Öğrenci ve öğretmen arasında dil kullanılıyor (samimi, resmi)	
Öğretmenin rolü	Sözsüz ispat etkinliklerinde öğretmen öğrencilerini yönlendiriyor	
	Öğretmen öğrencilerine tipinde sorular soruyor (açık, kapalı, uzun, kısa)	
	Sözsüz ispat etkinlikleri esnasında öğretmen sınıf içi etkileşimi kuvvetlendirmek için öğrenciler arasında işbirliği yapmaya teşvik ediyor	
	Öğretmen sözsüz ispatlar konusunda yeterince alan bilgisine sahip (Sözsüz ispatlar ile ilgili eğitim almış)	
	Öğretmen sözsüz ispat etkinlikleri esnasında etkinliğin doğru ilerleyebilmesi için kontrolü sağlayabiliyor	
	Öğretmen sınıftaki bütün öğrencilerin etkinliklere katılmasını sağlıyor	
Olumsuz Öğrenci Tepkileri	Öğrenciler sözsüz ispatlardan sıkılıyorlar	
	Öğrenciler sözsüz ispat etkinliklerini yaparken zorlanıyorlar	
	Sözsüz ispatlar öğrencilerin kafasını karıştırıyor	
	Öğrencilerin sözsüz ispatları anlamadığında moralleri bozuluyor	
Sınıfın Fiziksel Ortamı	Etkileşimli tahta vb teknolojik donanımlar mevcuttur	
	Sınıf mevcudu yeterlidir (Sınıf ne çok kalabalık ne de sınıfta çok az öğrenci var)	
	Sıra düzeni sözsüz ispatlar için uygun tasarlanmıştır	

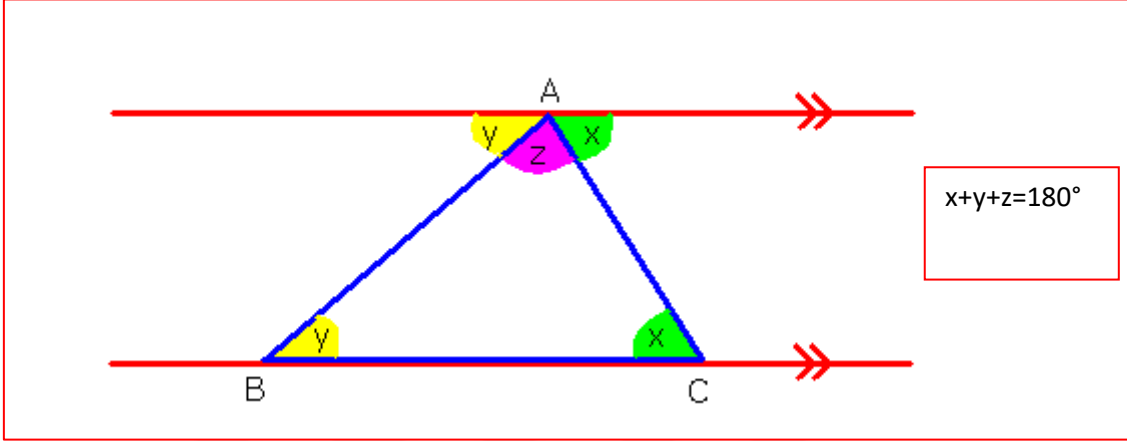
Diğer gözlemler:

EK-8. Etkinlikler

Üçgenin İç Açılar Toplamı

1)

Ad-Soyad:



- Yukarıdaki şekil hakkında tartışınız.
- Eşit olarak verilen açılar hakkında ne söyleyebilirsiniz?

2)

Ad-Soyad:

- Size verilen üçgenin tepe açısını tabana gelecek biçimde katlayınız.
- Sağdaki açığı diğer açığa değecek biçimde katlayınız.
- Benzer şekilde soldaki açığı da katlayınız.
- Oluşan şekil hakkında tartışınız.

Pisagor Teoremi Etkinliği

1)

Ad-Soyad:

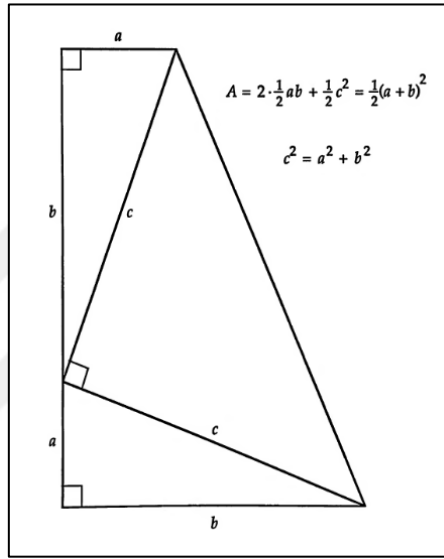
- Size verilmiş dik kenarlarının uzunlukları a,b hipotenüsün uzunluğu c olan dik üçgenleri kenar uzunluğu c olan bir kare elde edecek biçimde birleştiriniz.
- Elde etmiş olduğunuz karenin içinde oluşan karenin kenar uzunluğunu tartışınız.

- Büyük karenin alanı ve a, b, c kenar uzunluğundaki dört üçgenin alanı ve içteki karenin alanı hakkında ne söyleyebilirsiniz?
- Elde etmiş olduğunuz eşitliği yorumlayınız.

Düşünelim: Verilen üçgenin ikizkenar dik üçgen olması durumunda bu etkinliğini tartışınız.

2)

Ad-Soyad:

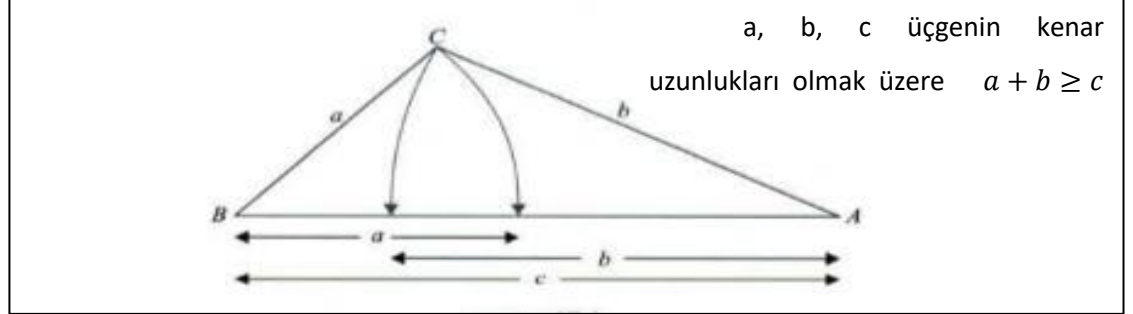


- Yukarıdaki şekil size ne ifade etmektedir? Tartışınız.
- Size verilmiş olan üçgenlerin kenar uzunluklarını harflendiriniz. Bu üç üçgeni kullanarak dik bir yamuk oluşturunuz.
- Oluşan dik yamuğun alanı ve üç üçgenin toplam alanını tartışınız.
- Üçgenin alan formülü ve dik yamuğun alan formülünü kullanarak alanları bulunuz.
- Elde etmiş olduğunuz eşitliği tartışınız.
- Yapmış olduğunuz etkinlikleri değerlendiriniz.
- Zorlandığınız noktalar nelerdir?
- Yapmış olduğunuz bu etkinliklerin sizin için herhangi bir katkısı olup olmadığı hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Üçgen Eşitsizliği

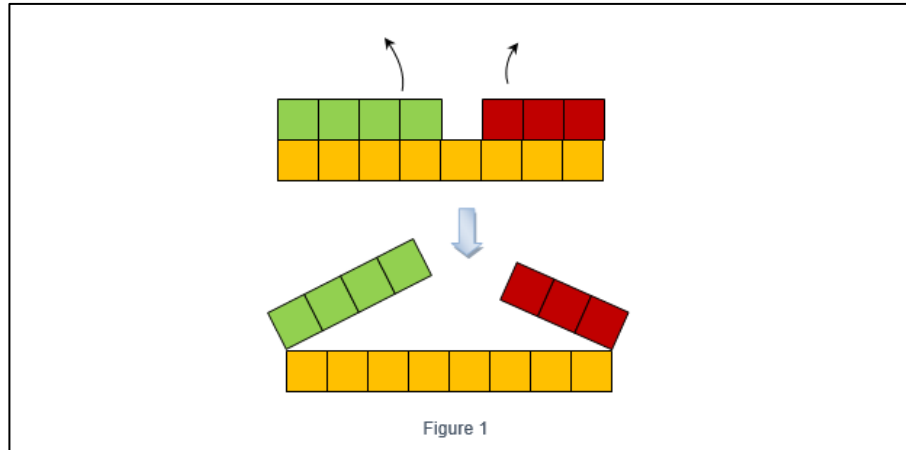
1)

Ad-Soyad:

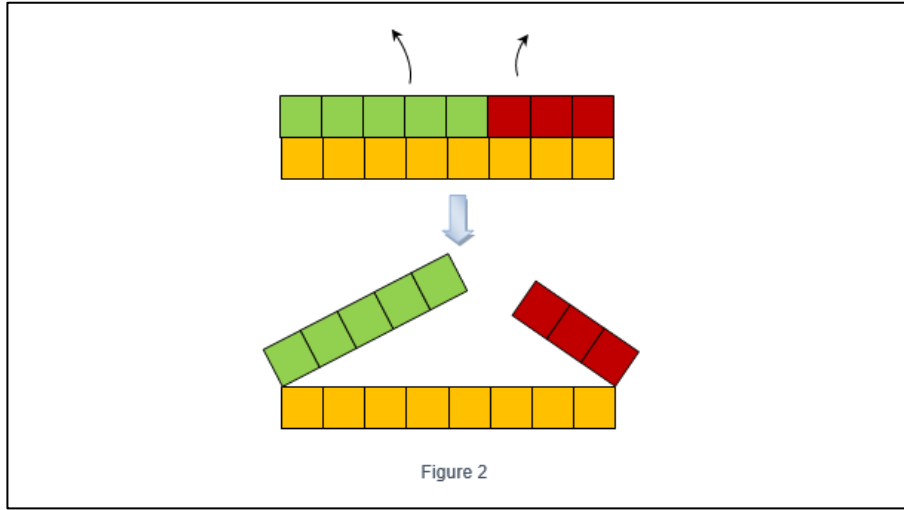


- Yukarıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Tartışınız.
- Ok işaretleri size ne ifade etmektedir?
- Verilen şekilde üçgen ile ilgili bir özellik verilmektedir. Bunun ne olabileceğini yazınız.
- Sizce a, b, c uzunlukları arasında ne gibi bir ilişki olabilir?
- Şimdiye kadar düşünmüş olduklarınızı ve verilen özelliğin ispatı için yapılanlarla ilgili süreci özetleyiniz.

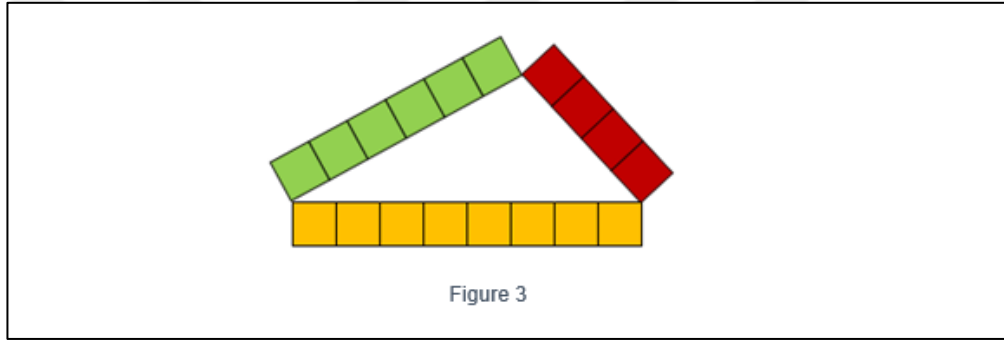
2)



- Yukarıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Tartışınız.



- Yukarıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Tartışınız.



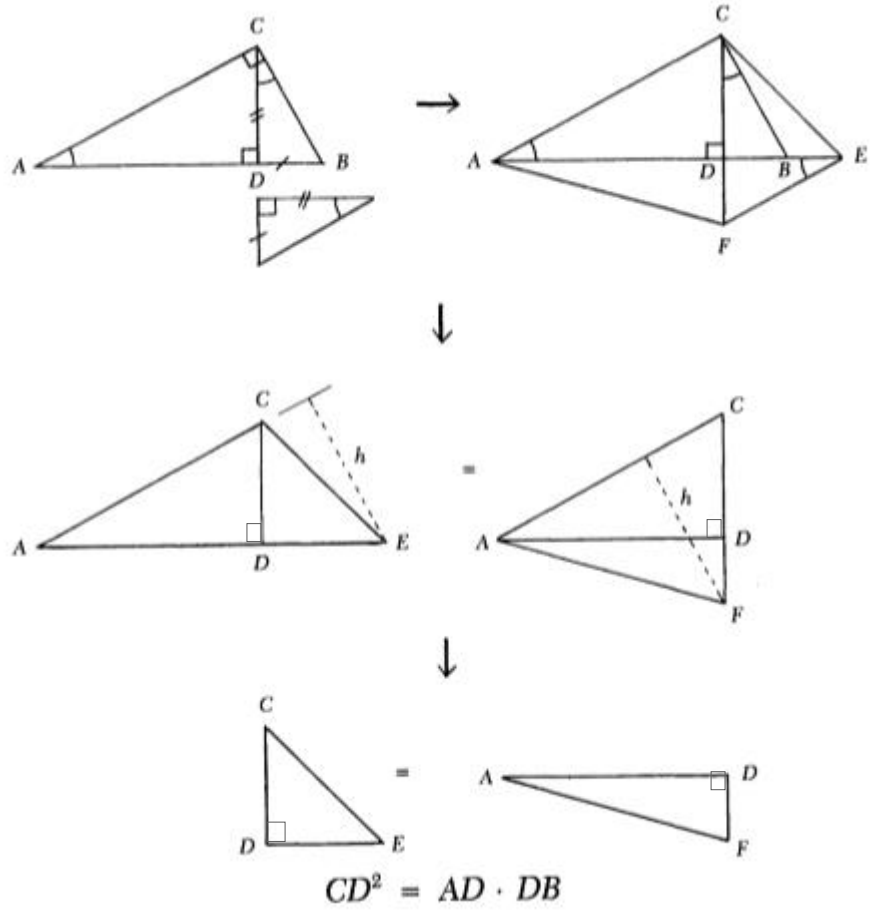
- Yukarıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Tartışınız.
- Sizce bir üçgenin oluşturma şartları nelerdir? Tartışınız.
- Yukarıdaki şekilde birimli dikdörtgenleri üçgenin kenar uzunlukları olarak düşünürseniz hangi durumlarda üçgen oluşturulup hangi durumlarda oluşturulamayacağını tartışınız.
- Sizce üç kenarının uzunluğunu bildiğiniz üçgenlerin tümü çizilebilir midir? Tartışınız.

<https://tube.geogebra.org/material/simple/id/2436815>

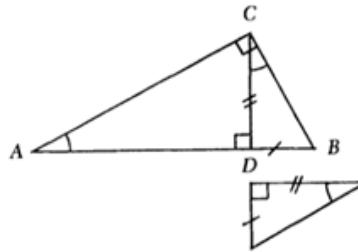
Öklid Teoremi Etkinliği

Ad-Soyad:

Aşağıda matematiğin önemli bağıntılarından birinin ispatı yer almaktadır. Bakalım bu bağıntının ne olduğunu bulabilecek miyiz? Şekli inceleyiniz ve neler yapıldığını açıklamaya çalışınız.



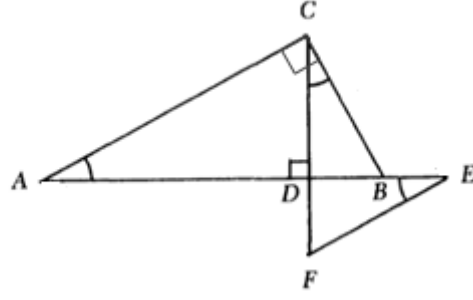
- Şimdi aşama aşama bu ispatı yapalım:



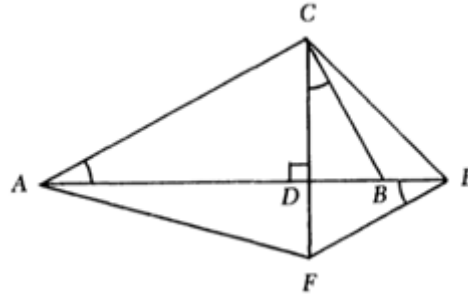
- Şeklin birinci kısmında CDB üçgeni saat yönünde 90° döndürelim:



- Sonrasında ACB üçgeni ile birleştirelim:



- Şimdi C ve E noktalarını ve A ve F noktalarını birleştirerek bir dörtgen oluşturalım:



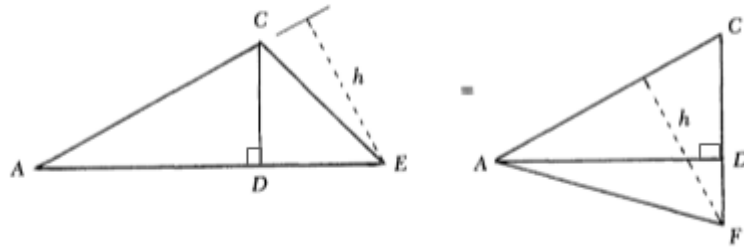
- DAC, DCB ve DEF açılarını tartışalım:

Yol gösterme: ACB açısının 90° olduğunu göz önünde bulundurarak açıları harflendiriniz.

- Şimdi $|CA|$ ve $|EF|$ doğru parçalarının birbirine göre durumunu tartışalım:

$|CA|$ ve $|EF|$ doğru parçaları
çünkü;.....

- Şeklin ikinci kısmına bakalım:



- h yüksekliği E noktasından F noktasına taşınmış olmasını tartışalım:
- ACE ve ACF üçgenlerinin alanları hakkında ne söyleyebilirsiniz?
- ACE ve ACF üçgenlerinin alanları.....çünkü;.....

- CDE ve ADF üçgenlerinin alanları.....çünkü;.....
- CDE ve ADF üçgenlerinin alanlarını dik üçgende alan formülünü kullanarak bulunuz.

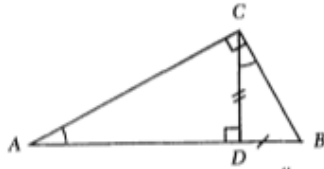
$$A(\triangle CDE) = \frac{Taban \times Yükseklik}{2}$$

$$A(\triangle CDE) = \frac{| | \times | | }{2}$$

$$A(\triangle ADF) = \frac{Taban \times Yükseklik}{2}$$

$$A(\triangle ADF) = \frac{| | \times | | }{2}$$

- $|CD|$ ve $|DE|$ uzunlukları arasındaki ilişkiyi ve $|DF|$ ve $|DB|$ uzunlukları arasındaki ilişki hakkında ne söyleyebilirsiniz?
- Bu kenarlar arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak $A(\triangle CDE)$ ve $A(\triangle ADF)$ alanlarını yeniden ifade ediniz. (DE yerine CD ve DF yerine DB yazınız)
- İspat aşamalarını ve bulmuş olduğlarınızı ve ispatın son aşamasında yazılmış olan $|CD|^2 = |AD| \times |DB|$ bağıntısını göz önünde bulundurarak yapılanları özetleyiniz ve bu bağıntının ne olduğunu ifade etmeye çalışınız.



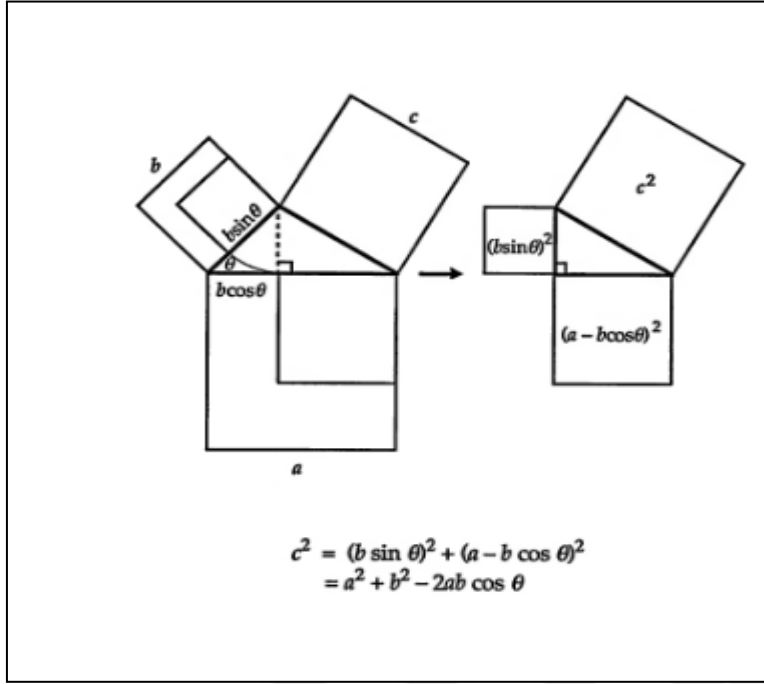
$$|CD|^2 = |AD| \times |DB|$$

- Şimdi bulmuş olduğunuz bu bağıntının diğer bir özelliği ile ilgili dinamik bir görsel ispat izleyelim: tube.geogebra.org/material/simple/id/72937
- Şimdi bu öğrenmiş olduğunuz bağıntıyı bir üçgen çizerek ifade ediniz:

Kosinüs Teoremi Etkinliği

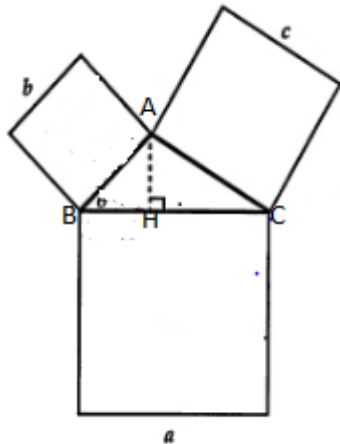
1)

Ad-Soyad:



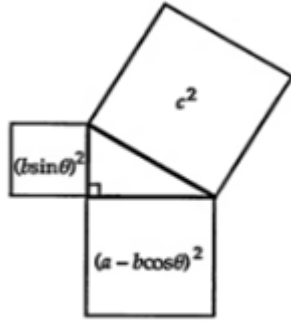
- Yandaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.
- Bu şekil yardımıyla yapılmış olan ispatta kullanılmış olan matematiksel işlemler hakkında tartışınız.
- Şimdi bu görsel ispatı birlikte yapalım:

- Kenar uzunlukları a , b , c olan dar açılı bir üçgen çizelim:
- Bu üçgenin a , b , c kenarlarına a , b , c kenar uzunluğuna sahip kareler çizelim:
- Üçgenin iç açılarından birine θ diyelim:
- θ dediğimiz açının karşısına gelecek şekilde bir yükseklik çizelim:



- ABC üçgende $|BH|$ ve $|AH|$ ve $|CH|$ kenar uzunluklarını trigonometrik bağıntılardan faydalanarak bulunuz.

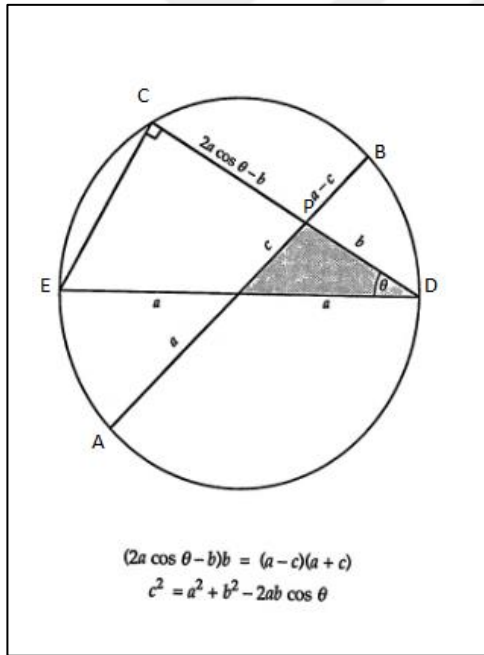
- İspatın tamamlanması için aşağıdaki şekilde matematiğin önemli teoremlerinden birini kullanacağız. Bu teoremin ne olduğu hakkında ne söyleyebilirsiniz?



- Benzer şekilde üçgenin diğer açılara da isim vererek eşitliği bulunuz.
- Gerekli işlemleri yaptıktan sonra bulmuş olduğunuz eşitlikleri tartışınız.
- Çizmiş olduğunuz üçgenin geniş açılı olması durumunu tartışınız.

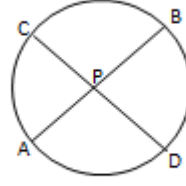
2)

Ad-Soyad:



- Yandaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.

- $2a \cos \theta - b$ uzunluğunun nereden geldiğini tartışınız. (dik üçgende trigonometrik bağıntılar, $\cos \theta$ yi ifade ediniz.)
- *Hatırlatma:* Bir çember ve çemberin içindeki nokta P olsun. P noktasından geçen herhangi kiriş $[AB]$ ve $[CD]$ ise, $|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$ dir.

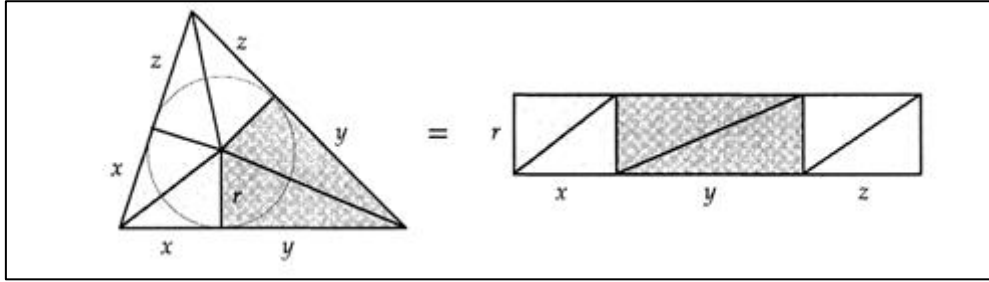


- Yukarıdaki hatırlatmayı göz önüne alırsanız yukarıdaki şekille ilgili olarak hangi işlemleri yapacağınızı tartışınız.
- Yapmış olduğunuz etkinlik hakkındaki görüşleriniz nelerdir? Zorlandığınızı, sıkıldığınızı veya hoşunuza giden noktaları belirtiniz.

Alan Etkinlikleri

1)

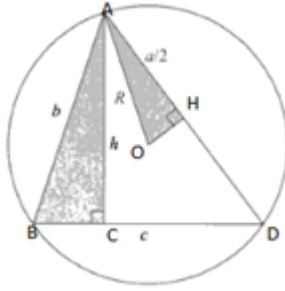
Ad-Soyad:



- Yukarıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.
- Size verilen üçgenlerin hepsini kullanarak tek bir üçgen oluşturunuz.(üçgenin içindeki çemberi oluşturmayı da ihmal etmeyiniz. Oluşan çember hakkında ne söyleyebilirsiniz?)
- Size verilen üçgenlerin tamamını kullanarak dikdörtgen oluşturunuz.
- Oluşturmuş olduğunuz dikdörtgenin alanını ifade ediniz.
- Oluşturmuş olduğunuz üçgen ve dikdörtgenin alanı hakkında ne söyleyebilirsiniz?
- Yapmış olduğunuz etkinlikle bulmuş olduğunuz formülü tartışınız. ($x + y + z = \text{yarı çevre}$, r iç teğet çemberin yarıçapı)
- Yapmış olduğunuz etkinliği değerlendiriniz. Zorlandığınızı, hoşunuza giden veya hoşunuza gitmeyen, keşfettiğiniz noktalar neler oldu? Belirtiniz.

2)

Ad-Soyad:

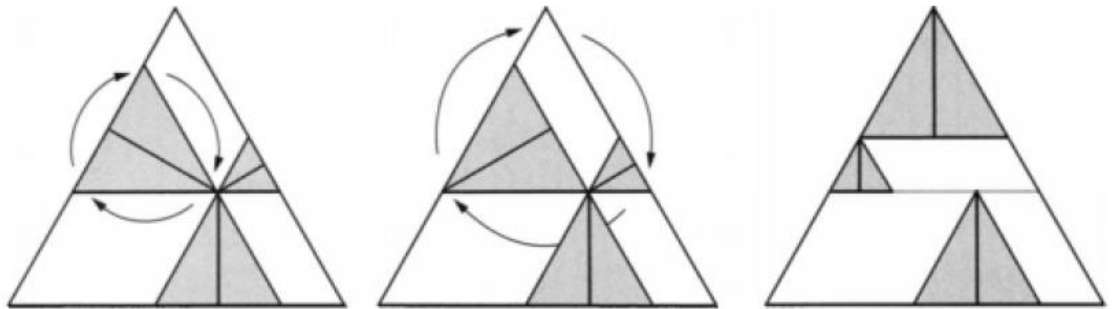


- Şekilde kenar uzunlukları a , b , c olan ABD üçgeni ve bu üçgenin R yarıçaplı O merkezli çevrel çemberi verilmiştir. Taralı olan iki üçgenin benzer olduğunu gösteriniz. Benzerlik oranlarını yazınız. h değerini bulunuz. (Çevre açısı ve merkez açısı özelliklerinden faydalanabilirsiniz)
- Bir kenarının uzunluğu c ve bu kenara ait yüksekliğin uzunluğu h olan ABD üçgeninin alanını bulunuz.
- 1. Adımda bulduğunuz h değerini 2. adımda bulduğunuz $A(ABD)$ eşitliğinde yerine yazınız.
- Üçgenin alanı ile ilgili bulmuş olduğunuz formülü tartışınız.
- Yaptığınız etkinliği değerlendiriniz. Zorlandığınız, hoşunuza giden veya hoşunuza gitmeyen, keşfettiğiniz noktalar neler oldu? Belirtiniz.

Viviani Teoremi Etkinliği

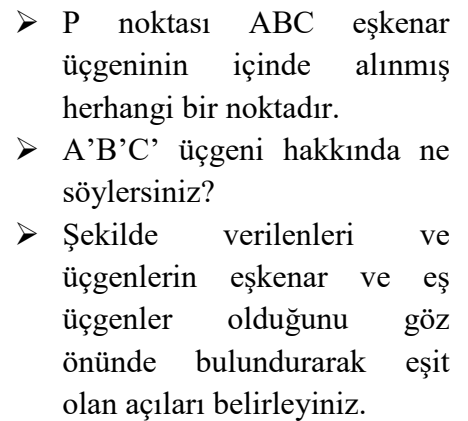
1)

Ad-Soyad:



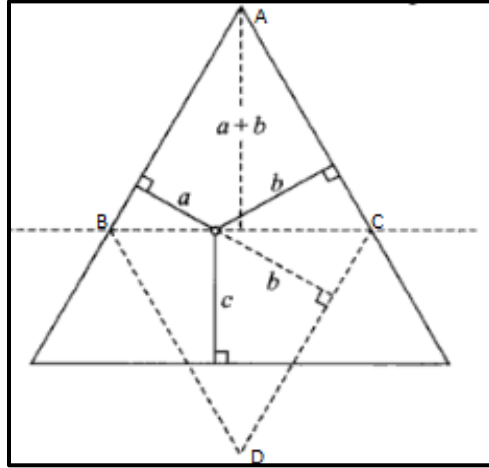
- Yukarıda verilen resimde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.

Ad-Soyad:



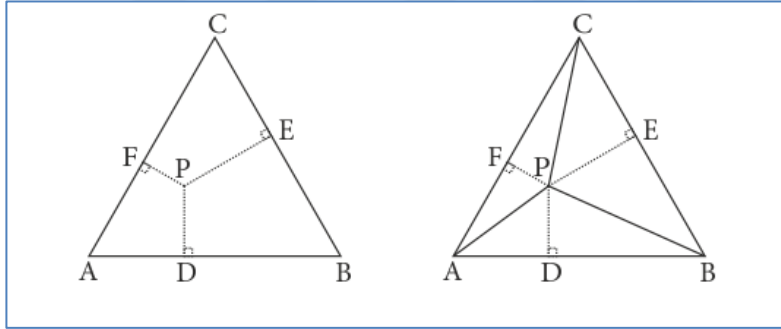
- 204

3)



- Yukarıdaki şekilde ne görüyorsunuz? Açıklayınız.
- ABC üçgeni eşkenar bir üçgen olmak üzere ABC üçgeninin yansıması DBC üçgenidir. ABC üçgeninde h yüksekliğinin $a + b$ olduğunu alan bağıntısını kullanarak gösteriniz.
- $a + b + c$ uzunluğu hakkında tartışınız.

Formal İspat:



İspatı inceleyip neler yapıldığı hakkında tartışınız.

- Kenar uzunluğu s , yüksekliği h ve açıları A, B, C olan eşkenar üçgeni düşünelim:
- Üçgenin içinde keyfi bir P noktası alalım:

$A(APC) + A(BPC) + A(APB) = A(ABC)$ olduğuna göre;

$$\frac{1}{2} h \cdot s = \frac{1}{2} |PF| \cdot s + \frac{1}{2} |PE| \cdot s + \frac{1}{2} |PD| \cdot s = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (|PF| + |PE| + |PD|)$$

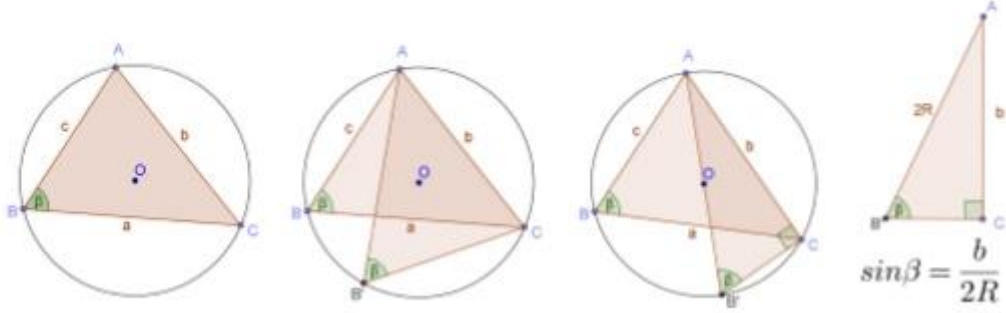
O halde $h = |PF| + |PE| + |PD|$

Sinüs Teoremi Etkinliği

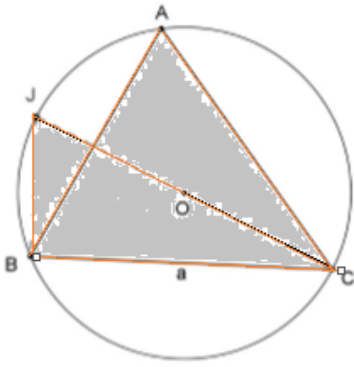
1)

Ad-Soyad:

➤ Aşağıdaki şekli inceleyiniz ve açıklayınız.

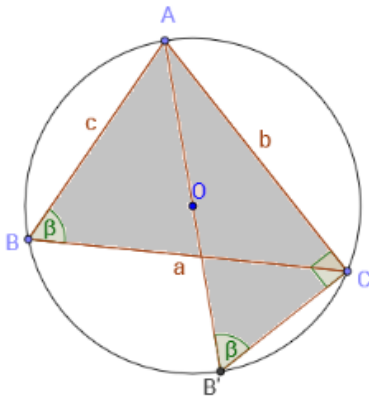


1.aşama:



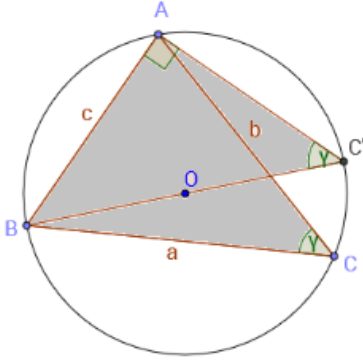
- Yandaki ABC üçgenindeki A açısı ve JBC üçgeninde J açısı için ne söyleyebilirsiniz? Tartışınız.
- JBC üçgeninde B açısını tartışınız.
- $\sin J$ açısının değerini dik üçgende trigonometrik bağıntılardan faydalanarak yazınız. (yarıçap:r)
- $\sin A$ ve $\sin J$ için ne söyleyebilirsiniz?
- **$\sin J = \sin A$ olmak üzere $\sin J = \frac{a}{2r}$ ise $2r = \dots$** boşluğunu doldurunuz.

2.aşama:



- Yandaki ABC üçgenindeki B açısı ve AB'C üçgeninde B' açısı için ne söyleyebilirsiniz? Tartışınız.
- AB'C dik üçgeninde $\sin B'$ açısının değerini dik üçgende trigonometrik bağıntılardan faydalanarak yazınız. (yarıçap:r)
- **$\sin B = \sin B'$ olmak üzere $\sin B' = \frac{b}{2r}$ ise $2r = \dots$** boşluğunu doldurunuz.

3.aşama:

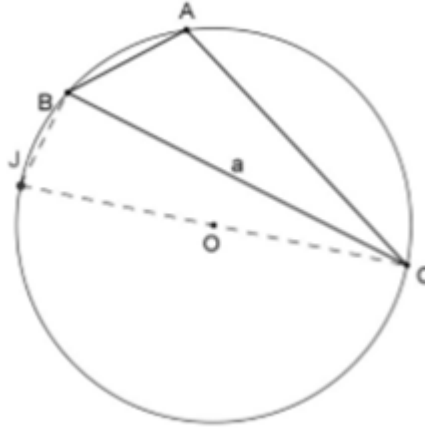


- Benzer şekilde yanda verilmiş ABC üçgenindeki C açısı ve ABC' üçgeninde C' açısı için ne söyleyebilirsiniz? Tartışınız.
- AB'C dik üçgeninde $\sin B'$ açısının değerini dik üçgende trigonometrik bağıntılardan faydalanarak yazınız. (yarıçap:r)
- **$\sin B = \sin B'$ olmak üzere $\sin B' = \frac{b}{2r}$ ise $2r = \frac{b}{\sin B}$ boşluğunu doldurunuz.**

- $\frac{a}{\sin A} = 2r$, $\frac{b}{\sin B} = 2r$, $\frac{c}{\sin C} = 2r$ eşitliklerini tek bir eşitlik halinde yazınız.
- Bulmuş olduğunuz eşitliğin matematiğin hangi teoremi olduğunu tartışınız.
- Yapmış olduğunuz etkinliği değerlendiriniz. Hoşlandığınız, hoşlanmadığınız, zorlandığınız, zorlanmadığınız noktalar neler oldu? Belirtiniz.

2)

- Yukarıdaki etkinlikte ABC üçgeni dar açılı bir üçgendir. ABC üçgeninin geniş açılı olması durumunu tartışınız.



- ABC üçgenindeki A açısını ve J açısını tartışınız.
- *Hatırlatma: $\sin \theta = \sin (180-\theta)$ özelliğini kullanarak; $\sin A$ ve $\sin (180-J)$ açıları hakkında ne söyleyebilirsiniz?*
- BJC üçgeninde B açısı için ne söyleyebilirsiniz?
- BJC dik üçgeninde trigonometrik bağıntıları kullanarak $\sin J$ değerini bulunuz.
- Benzer şekilde B ve C açılarını tartışınız.
- Elde etmiş olduğunuz eşitliği tartışınız.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı: Kübra POLAT

Doğum Yeri: Sivas/1984

Telefon: 03462191010/4680

E-posta: kpolat@cumhuriyet.edu.tr/kubrapolaat@hotmail.com.tr



Öğrenim Bilgisi

Doktora	Atatürk Üniversitesi
2013-2018	Eğitim Bilimleri Enstitüsü/Matematik Eğitimi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi
2009-2011	Eğitim Bilimleri Enstitüsü/Matematik Eğitimi
Lisans	Hacettepe Üniversitesi
2002-2009	Eğitim Fakültesi/Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği

Görevler

Araştırma Görevlisi: Cumhuriyet Üniversitesi/Eğitim Fakültesi/Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü/Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı/Matematik Öğretmenliği (2013-)

Eserler

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler:

1. Demircioğlu, H., Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının sözsüz ispatlar ile ilgili yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 81-89. (Yayın No: 3236264)
2. Polat K., Akgün, L. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri. *The Journal Of Academic Social Science Studies* (43), 423-438. <http://dx.doi.org/10.9761/JASSS3219> (Yayın No: 2902541)
3. Demircioğlu, H., Polat, K. (2015). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının sözsüz ispat yöntemine yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 41, 233-233. Doi: 10.9761/JASSS3171 (Yayın No: 2484700)

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında (Proceedings) Basılan Bildiriler

1. Demircioğlu, H., Polat, K., Oflaz, G. (2014). *Matematik öğretmeni adaylarının sonsuzluk kavramı ile ilgili anlayışları*. VI. International Congress of Educational Research (Tam Metin Bildiri/)(Yayın No:2902630)
2. Polat K., Demircioğlu, H., Oflaz, G. (2014). *Matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayı kavramı ile ilgili anlayışları*. VI. International Congress of Educational Research (Tam Metin Bildiri/)(Yayın No:2902628)
3. Oflaz, G., Demircioğlu, H., Polat, K. (2014). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının hacim kavramı anlayışları üzerine betimsel bir analiz*. VI. International Congress Of Educational Research (Tam Metin Bildiri/)(Yayın No:2902636)

Ulusal Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Polat K., Demircioğlu, H. (2016). *Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar kuramsal bir çalışma. Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi* 28, 129-140. doi: <http://Dx.Doi.Org/10.14582/Duzgef.686> (Yayın No: 2902533)

Ulusal Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında Basılan Bildiriler

1. Polat K., Akgün, L. (2017). *Matematik öğretmeni adaylarının diziler ve seriler konusunda gerçek hayat etkinliği hazırlama süreci ile ilgili görüşlerinin incelenmesi*. Türk Bilgisayar Ve Matematik Eğitimi Sempozyumu - 3 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:3541554)

Üniversite Dışı Deneyim

2012-2013 Öğretmen Hafik Lisesi, Sivas (Kamu)