



**ASİMTOTİK GENİŞLEMİYEN RASTGELE
OPERATÖRLERİN FARKLI SINIFLARI İÇİN
RASTGELE SABİT NOKTA SONUÇLARI**

Muhammed Emin BATUHAN

Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

2023

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ASİMTOTİK GENİŞLEMİYEN RASTGELE OPERATÖRLERİN
FARKLI SINIFLARI İÇİN RASTGELE SABİT NOKTA SONUÇLARI**

(Random Fixed Point Results for Different Classes of Asymptotically Nonexpansive Random Operators)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhammed Emin BATUHAN

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

ERZURUM

Temmuz, 2023



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Graduate School of Natural and
Applied Sciences

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

ASİMTOTİK GENİŞLEMİYEN RASTGELE OPERATÖRLERİN FARKLI SINIFLARI İÇİN RASTGELE SABİT NOKTA SONUÇLARI

Prof. Dr. İsa YILDIRIM danışmanlığında, Muhammed Emin BATUHAN tarafından hazırlanan bu çalışma, .../.../20... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	
Danışman:	Prof. Dr. İsa YILDIRIM <i>Atatürk Üniversitesi</i>	
Jüri Üyesi:	Dr. Öğr. Üyesi Nazlı KADIOĞLU KARACA <i>Atatürk Üniversitesi</i>	

Enstitü Yönetim
Kurulunun .../.../.... tarih
ve sayılı kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN
Enstitü Müdürü



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak *Prof. Dr. İsa YILDIRIM* danışmanlığında sunulan “Asimtotik Genişlemeyen Rastgele Operatörlerin Farklı Sınıfları İçin Rastgele Sabit Nokta Sonuçları” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	0	30
Kuramsal Temeller	7	30
Materyal ve Metot	8	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	19	20
Sonuçlar ve Öneriler	6	20
Tezin Geneli	18	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Sunulan bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ettiğimizi beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Muhammed Emin BATUHAN	Prof. Dr. İsa YILDIRIM
12.7.2023	12.7.2023
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunulan bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Tez süreci boyunca bana sağladığı danışmanlık, destek, bilgelik, deneyim, mütevazı liderliği, sınırsız sabrı ve ilham verici öğretim tarzıyla tezin kapsamını ve kalitesini geliştirmeme yardımcı olduğu için ve akademik gelişimimdeki önemli adımlarda cesaretlendirdiği için danışmanım Sayın Prof. Dr. İsa YILDIRIM'a içtenlikle teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitim hayatımda bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen Atatürk Üniversite Matematik Bölümündeki öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Aileme yüksek lisansta sonsuz sevgi ve desteği için kalpten teşekkür ederim.

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na yüksek lisans öğrenimim boyunca TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ile desteğinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed Emin BATUHAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASİMTOTİK GENİŞLEMİYEN RASTGELE OPERATÖRLERİN FARKLI SINIFLARI İÇİN RASTGELE SABİT NOKTA SONUÇLARI

Muhammed Emin BATUHAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Amaç: Bu çalışmada, ayrılabilir Banach uzaylarında asimtotik genişlemeyen rastgele operatörlerin bazı sınıflarının sabit noktaları ile ilgili yakınsama sonuçlarının elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Yöntem: Tezdeki teoremler, matematiksel yöntemler ve lemmalar yardımı ile ispatlanmıştır.

Bulgular: Bu tezde, ilk olarak asimtotik genişlemeyen rastgele operatörlerin sabit noktaları için bir rastgele iterasyon metodu oluşturulmuş ve bazı yakınsama sonuçları verilmiştir. Daha sonra Banach uzaylarında genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatör sınıfı tanımlanarak bu dönüşümlerin üç sonlu ailesi için hatalı kapalı rastgele iterasyon metodu ifade edilmiştir. Son olarak, bu iterasyon metodu kullanılarak ayrılabilir Banach uzaylarında bazı yakınsama teoremleri ispatlanmıştır.

Sonuç: İterasyon metotları ve yakınsama teoremlerinde geçen bazı parametrelerin özel seçimi için Banach uzaylarda ilgili sonuçlara değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler, (B^*) şartı, iterasyon metotları, ortak rastgele sabit nokta, düzgün konveks Banach uzayları.

Temmuz 2023, 41 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

Random Fixed Point Results for Different Classes of Asymptotically Nonexpansive Random Operators

Muhammed Emin BATUHAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Purpose: In this study, it is aimed to obtain convergence results about fixed points of some classes of asymptotic nonexpansive random operators in separable Banach spaces.

Method: The theorems in the thesis are proved with the help of mathematical methods and lemmas.

Findings: In this thesis, firstly, a random iteration method for fixed points of asymptotic nonexpansive random operators is defined and some convergence results are given. Then, the class of generalized asymptotic nonexpansive random operators in Banach spaces is defined and the implicit random iteration method is expressed for the three finite families of these mappings. Finally, some convergence theorems have been proved in separable Banach spaces using this iteration method.

Results: The relevant results in Banach spaces are mentioned for the special selection of some parameters in the iteration methods and convergence theorems.

Keywords: generalized asymptotically nonexpansive random operators, $\text{Condition}(B^*)$, iteration methods, common random fixed point, uniformly convex Banach spaces.

July 2023, 41 pages

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	9
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	17
5. SONUÇ	37
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	41

SİMGELER DİZİNİ

$\emptyset$	Boş küme
$\forall$	Her
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu reel uzay
f^{-1}	f nin tersi
A'	A kümesinin tümleyeni
$\ \quad \ $	Norm
$RF(E)$	E nin rastgele sabit noktalar kümesi
F	Ortak rastgele sabit noktaların kümesi
$E^m(\ell, u)$	u nun E altındaki m . iterasyonu
I	Birim operatör
$d(x, A)$	x noktasının A kümesine olan uzaklığı

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, özellikle 20. yüzyılın başlarından itibaren matematiksel analizde büyük ilerlemeler kaydetti. Bu dönemde Hollandalı matematikçi Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Brouwer Sabit Nokta Teoremi olarak bilinen önemli bir sonucu ortaya koydu. Bu teorem, sürekli bir dönüşümün bir aralıkta her zaman en az bir sabit noktaya sahip olduğunu belirtir. Brouwer Sabit Nokta Teoremi, sabit nokta teorisinin temel taşlarından biri olarak kabul edilir.

Ölçüm teorisindeki ilk çalışmalar, M.Ö. 4. yüzyılda Yunan matematikçisi Eudoxus tarafından yapılmıştır. Eudoxus, matematikte bir sayının değerini belirlemek için kullanılan bir kavram olan "ölçüm" kavramını ilk kez kullanmıştır. Ölçüm teorisi, bir sistemdeki ölçümlerin nasıl yapılacağını, ölçümlerin doğruluğunu ve hassasiyetini inceleyen bir matematik alanıdır. Ölçümler, doğruluğu ve hassasiyeti belirli bir derecede olan sayısal değerlerdir ve ölçüm teorisi, bu değerlerin nasıl üretileceği ve nasıl yorumlanacağı konularını inceler.

Rastgele operatörler matematik, bilim ve teknolojide sıklıkla farklı amaçlar ile kullanılır. Rastgele Analiz ise matematiğin en önemli alanlarından biridir. Ayrıca rastgele teknikler, soyut ve uygulamalı matematikte çok yaygın bir kullanıma sahiptir. Rastgele operatörler, matematiksel modellerin ve simülasyonların analizinde yaygın olarak kullanılan bir kavramdır. Bu operatörler, belirli bir dağılıma göre rastgele olarak seçilen veya üretilen değerleri kullanarak işlemler gerçekleştirir. Bu şekilde, belirli bir olasılık dağılımına sahip verilerin simülasyonunu yapabilir ve sonuçlarını analiz edebiliriz. Rastgele operatörler, rastgelelik kavramını matematiksel modellerde ve simülasyonlarda temsil etmek için kullanılır. Genellikle, bir olasılık dağılımına dayalı olarak veri üretirler ve bu veriler üzerinde işlemler yaparlar. Rastgele operatörler, bir dizi matematiksel yöntem ve algoritma kullanarak rastgele sayıları üretirler ve bu sayıları modele veya simülasyona dahil ederler.

Hanš (1957, 1961) ve Spacek (1955), ayrılabilir tam metrik uzaylarda rastgele daraltan dönüşümlerin rastgele sabit nokta teoremlerini ilk defa ispatlamışlardır. Daha sonra Itoh (1979), Hanš ve Spacek'in teoremlerini çok değerli daraltan dönüşümlere genelleştirmiştir. Dolayısıyla bu teori, lineer olmayan rastgele sistemlerin çözümünü elde etmek için kullanılan rastgele sabit

nokta teorisi ile ilgili çeşitli fikirleri ve araştırma alanlarını içermektedir (Bharucha-Reid 1972). Bu çalışmaları dikkate alarak, Papageorgiou (1986), Xu (1990), Beg (1997, 2002a, 2002b), Xu ve Beg (1998), Qihou (2001), Beg ve Shahzad (1994) ve pek çok yazar rastgele dönüşümlerin sabit noktalarına çalışmışlardır. Kararlı operatör teoride sabit noktaları elde etmek için literatürde pek çok farklı iterasyon metotları ifade edilmiş ve kullanılmıştır (Mann 1953), (Outlaw 1969), (Ishikawa 1974, 1976), (Ghosh 1997), (Park 1994), (Schu 1991a).



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, araştırma bulguları bölümündeki ifadelerde kullanacağımız temel tanım ve teoremler ifade edilecektir.

Tanım 1: X kümesinin alt kümelerinin boştan farklı $\mathcal{J}$ sınıfı

- i. $\forall \mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{J}$ için $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N} \in \mathcal{J}$
- ii. $\forall \mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{J}$ için $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} \in \mathcal{J}$

yukarıdaki i ve ii şartlarını sağlarsa $\mathcal{J}$ sınıfına halka denir. Yukarıda verilen ii şartı yerine

- iii. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{M}_k \in \mathcal{J} \Rightarrow \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k \in \mathcal{J}$

şartı alınırsa $\mathcal{J}$ halkasına bir σ - halka denir (Balcı 1998).

Tanım 2: Keyfi bir X kümesinin $\mathcal{J}$ sınıfı aşağıda verilen şartları sağlarsa $\mathcal{J}$ sınıfına X kümesi üzerinde bir cebirdir denir.

- i. $X \in \mathcal{J}$,
- ii. $\forall \mathcal{N} \in \mathcal{J}$ için $\mathcal{N}' = X \setminus \mathcal{N} \in \mathcal{J}$,
- iii. $k = 1, 2, \dots, m$ için $\mathcal{N}_k \in \mathcal{J} \Rightarrow \cup_{k=1}^m \mathcal{N}_k \in \mathcal{J}$.

Yukarıda iii şartı yerine

- iv. $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{N}_m \in \mathcal{J} \Rightarrow \cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{N}_m \in \mathcal{J}$
- iv şartı alınırsa $\mathcal{J}$ ye σ - cebiri denir (Balcı 1998).

Örnek 1: X keyfi bir küme ve $\mathcal{J}$ de keyfi bir X kümesinin kuvvet kümesi olsun. $\mathcal{J}, X$ üzerinde bir σ - cebiridir (Balcı 1998).

Örnek 2: $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}, \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}, X\}$ olarak alınırsa $\mathcal{J}$ sınıfı yukarıda ifade edilen Tanım 2'deki i, ii ve iv şartlarını sağladığı için X üzerinde bir σ - cebiridir (Balcı 1998).

Örnek 3: X keyfi bir küme ve $\mathcal{J} = \{\emptyset, X\}$ sınıfı verilsin. $\mathcal{J}$, X kümesinde bir σ - cebiridir (Balcı 1998).

Tanım 3: $\mathbb{R}^n$ de her (a, b) aralıklarının oluşturduğu σ - cebirine Borel Cebiri denir ve $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ olarak ifade edilir. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ Borel Cebir'inin elemanlarının tümü Borel Kümesi olarak adlandırılır (Balcı 1998).

Tanım 4: $\mathcal{J}$, X kümesi üzerinde bir σ - cebiri olsun. Burada $(X, \mathcal{J})$ ikilisine ölçülebilir uzay denir. Ayrıca $\mathcal{J}$ sınıfındaki her küme ise $\mathcal{J}$ - ölçülebilir küme ile ifade edilir. (Balcı 1998).

Tanım 5: $(X, \mathcal{J})$ ölçülebilir uzay, μ ise genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon ve μ fonksiyonu $\mathcal{J}$ üzerinde tanımlanmış olsun. Eğer μ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa bu fonksiyona ölçü fonksiyonu veya ölçü adı verilir.

- i. $\mu(\emptyset) = 0$,
- ii. $\forall \mathcal{N} \in \mathcal{J}$ için $\mu(\mathcal{N}) \geq 0$,
- iii. Her ayırık $(\mathcal{N}_m)$ dizisi $\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{N}_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\mathcal{N}_m)$ dir.

Ayrıca $\mathcal{J}$ nin her elemanının μ fonksiyonu altındaki görüntüsü bir reel sayıya karşılık geliyorsa μ fonksiyonu sonlu ölçü olarak adlandırılır. Ardından X , her bir sonlu ölçüye sahip sayılabilir sayıdaki kümelerin birleşimi olarak ifade edilebiliyor ise μ ölçüsü σ - sonludur (Balcı 1998).

Örnek 4: X boştan farklı bir küme olsun. $\mathcal{J} = P(X)$ olarak seçelim. $\mathcal{L} \in \mathcal{J}$ için

$$\mu(\mathcal{L}) = \begin{cases} 0, & \mathcal{L} = \emptyset \text{ ise} \\ +\infty, & \mathcal{L} \neq \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan μ fonksiyonu ölçüdür. Fakat dikkat edilirse yukarıdaki iii. şarttan dolayı bu ölçü sonlu ya da σ - sonlu değildir (Balcı 1998).

Tanım 6: f , $\mathcal{U}$ ölçülebilir uzayı üzerinde tanımlı dönüşüm ve herhangi bir $X \subset \mathbb{R}$ Borel alt kümesi için $f^{-1}(X)$ kümesi ölçülebilirse, f dönüşümüne ölçülebilir denir (Balcı 1998).

Tanım 7: $(X, \mathcal{J})$ ölçülebilir uzay olsun. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$$

olur (Balcı 1998).

Örnek 5: Sabit fonksiyonlar aynı zamanda ölçülebilir fonksiyondur. Bunu göstermek için $f(x) = k$ sabit fonksiyonunu ele alalım. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$c \geq k$ ise

$$\{x \in X: f(x) > c\} = \emptyset \in \mathcal{J}$$

ve $c < k$ ise

$$\{x \in X: f(x) > c\} = X \in \mathcal{J}$$

olur (Balcı 1998).

Tanım 8: $E, \mathcal{U} \times X$ ten X e bir operatör ve $\forall u_0 \in X$ olsun. $E(\cdot, u_0): \mathcal{U} \rightarrow X$ ölçülebilir ise, E ye rastgele operatör denir.

E operatörünün m 'inci iterasyonu $E(\ell, E(\ell, E(\ell, \dots, E(\ell, u_0))))$ şeklinde yazılır ve $E^m(\ell, u_0)$ notasyonu kullanılarak gösterilir. $I: \mathcal{U} \times X \rightarrow X$ rastgele dönüşümü için $I(\ell, u_0) = u_0$ ve $E^0 = I$ dır.

Tanım 9: X ayrılabilir Banach uzayı olsun. Θ ise X uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. $E: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ nın rastgele bir operatör olduğunu varsayalım. Eğer E

- i. $k(\ell)$ - daraltan rastgele operatör ise herhangi $u_0, v_0 \in \Theta$ ve $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\|E(\ell, u_0) - E(\ell, v_0)\| \leq k(\ell) \|u_0 - v_0\|$$

şartı sağlanacak şekilde $k: \mathcal{U} \rightarrow [0,1)$ ölçülebilir dönüşümü vardır;

- ii. kesin daraltan rastgele operatör ise herhangi $u_0, v_0 \in \Theta$ ve $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\|E(\ell, u_0) - E(\ell, v_0)\| < \|u_0 - v_0\|$$

şartını sağlar;

- iii. zayıf daraltan rastgele operatör ise $\varphi(0) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$ olacak şekilde $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan ve sürekli dönüşüm iken herhangi $u_0, v_0 \in \Theta$ ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\|E(\ell, u_0) - E(\ell, v_0)\| \leq \|u_0 - v_0\| - \varphi(\|u_0 - v_0\|)$$

şartını sağlar;

- iv. genişlemeyen rastgele operatör ise $\forall u_0, v_0 \in \Theta$ ve $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için

$$\|E(\ell, u_0) - E(\ell, v_0)\| \leq \|u_0 - v_0\|$$

şartını sağlar;

- v. asimtotik genişlemeyen rastgele operatör ise $\forall u_0, v_0 \in \Theta, m \in \mathbb{N}$ için

$$\|E^m(\ell, u_0) - E^m(\ell, v_0)\| \leq r_m(\ell)\|u_0 - v_0\|$$

şartını sağlayacak şekilde $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(\ell) = 1$ olan $r_m: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$

ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi vardır;

- vi. asimtotik quasi genişlemeyen rastgele operatör ise $p: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$, E nin rastgele bir sabit noktası ve $\eta: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\|E^m(\ell, \eta(\ell)) - p(\ell)\| \leq (1 + r_m(\ell))\|\eta(\ell) - p(\ell)\|$$

şartını sağlayacak şekilde $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(\ell) = 0$ olan $r_m: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$

ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi vardır;

- vii. düzgün L -Lipschitzian rastgele operatör ise $m \geq 1$ ve $L > 0$ olmak üzere $\forall u_0, v_0 \in \Theta$ ve $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için

$$\|E^m(\ell, u_0) - E^m(\ell, v_0)\| \leq L\|u_0 - v_0\|$$

şartını sağlar;

- viii. yarı kompakt rastgele operatör ise $\{\varrho_m\}$, $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı ölçülebilir dönüşümün bir dizisi, $\{\varrho_{m_k}\}$ dizisi $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için $\varrho_{m_k}(\ell) \rightarrow \varrho(\ell)$ şartını sağlayan $\{\varrho_m\}$ in bir alt dizisi ve ϱ da $\mathcal{U}$ dan Θ ya ölçülebilir bir dönüşüm olmak üzere $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varrho_m(\ell) - E(\ell, \varrho_m(\ell))\| = 0$$

olur;

- ix. tamamen sürekli rastgele operatör ise Θ da tanımlı her $\{\varrho_m\}$ dizisi ϱ ya zayıf yakınsak iken $\{E(\ell, \varrho_m)\}$ dizisi her $\ell \in \mathcal{U}$ için $E(\ell, \varrho)$ ya güçlü yakınsar (Beg and Abbas 2006).

Yukarıda ifade edilen Tanım 9 dan aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir.

- a) Her daraltan rastgele operatör aynı zamanda kesin daraltan rastgele operatördür.

- b) Her kesin daraltan rastgele operatör aynı zamanda genişlemeyen rastgele operatördür.
- c) Eğer daraltan rastgele operatör tanımında her $\ell \in \mathcal{U}$ için $k(\ell) = 1$ alınırsa genişlemeyen rastgele operatör elde edilir.
- d) Her asimtotik genişlemeyen rastgele operatörün rastgele sabit noktalar kümesi boş kümeden farklıysa bu aynı zamanda asimtotik quasi genişlemeyen rastgele operatördür. Ayrıca her asimtotik genişlemeyen rastgele operatör aynı zamanda düzgün L -Lipschitzian rastgele operatördür.

Fakat yukarıdaki ifadelerin tersi her zaman doğru olmayabilir.

Tanım 10: Sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip topolojik uzaya ayrılabilir uzay denir.

Tanım 11: p -normunun sonlu boyutlu vektör uzayına uyarlanmasıyla tanımlanan fonksiyon uzayına Lebesgue uzayı denir ve L^p ile gösterilir.

Tanım 12: $x: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ ölçülebilir fonksiyon olarak tanımlansın. $\forall \ell \in \mathcal{U}$ ve $\forall r \in (0, \infty)$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ iken $\forall x$ için

$$f(d(x(\ell), F)) \leq \max_{1 \leq i \leq N} \{\|x(\ell) - E_i(\ell, x(\ell))\|\}$$

olacak şekilde $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan fonksiyonu varsa $F = \bigcap_{i=1}^N RF(E_i) \neq \emptyset$ ile $\mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ tanımlı N sürekli rastgele operatörlerinin sonlu bir $\{E_i: i \in I\}$ ailesi (B) şartını sağlar (Banerjee and Choudhury 2011).

Üç sonlu iterasyon ailesi için bu tanımı aşağıdaki gibi değiştirebiliriz.

Tanım 13: $\{E_j: j \in J\}$, $\{\mathcal{S}_j: j \in J\}$ ve $\{\mathcal{K}_j: j \in J\}$ genişlemeyen dönüşümlerinin üç sonlu ailesi ve F ise boştan farklı ortak sabit noktalar kümesi olsun. Eğer $t > 0$ için $f(t) > 0$, $f(0) = 0$ ayrıca $x: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ iken her $\ell \in \mathcal{U}$ ve her x için

$$\max_{1 \leq j \leq N} \{\|x(\ell) - E_j(\ell, x(\ell))\|\} \geq f(d(x(\ell), F))$$

$$\max_{1 \leq j \leq N} \{\|x(\ell) - \mathcal{S}_j(\ell, x(\ell))\|\} \geq f(d(x(\ell), F))$$

$$\max_{1 \leq j \leq N} \{\|x(\ell) - \mathcal{K}_j(\ell, x(\ell))\|\} \geq f(d(x(\ell), F))$$

şartlarından birisi sağlanırsa yukarıdaki üç aile sınıfı (B^*) şartını sağlar denir.

Tanım 14: $E, \mathcal{U} \times X$ ten X e bir operatör olsun. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için $E(\ell, \cdot): X \rightarrow X$ dönüşümü sürekli ise E de sürekli dir.

Tanım 15: $E, \mathcal{U} \times X$ ten X e bir operatör olsun. $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için $E(\ell, p(\ell)) = p(\ell)$ ise p , E rastgele operatörünün bir sabit noktasıdır. Burada $p: \mathcal{U} \rightarrow X$ dönüşümü ölçülebilir bir fonksiyondur ve E nin rastgele sabit noktalarının kümesi $RF(E)$ olarak gösterilir.

Örnek 6: $\mathcal{U} = [0,1]$ ve Σ , Lebesgue'in ölçülebilir $\mathcal{U}$ alt kümelerinin sigma cebiri ve $X = \mathbb{R}$ olsun. Burada $a, b \in \mathbb{R}$ için $d(a, b) = |a - b|$ seçelim. E operatörü $\mathcal{U} \times X$ den X e tanımlı ve $E(\ell, x) = 10\ell - x$ olarak rastgele bir dönüşüm olsun. Burada $q: \mathcal{U} \rightarrow X$ ölçülebilir dönüşümü her $\ell \in \mathcal{U}$ için $q(\ell) = \frac{10\ell}{3}$ olsun. Burada q, E nin rastgele bir sabit noktası değildir. Ancak her $\ell \in \mathcal{U}$ için $E^2(\ell, q(\ell)) = q(\ell)$ rastgele operatör denklemi geçerlidir. Burada $q(\ell)$ ölçülebilir dönüşümü farklı alınırsa E nin rastgele bir sabit noktasına sahip olabileceği açıkça görülmektedir (Beg and Abbas 2011).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde araştırma bulguları kısmındaki rastgele operatörler için gerekli olan tanım ve lemmalara yer verilmiştir.

1995 yılında Choudhury rastgele Ishikawa iterasyon metodunu tanımladı ve bu metodu Hilbert uzaylarında kullanarak bazı rastgele sabit nokta teoremlerini kanıtladı. Böylece rastgele iterasyon metotlarının geliştirilmesine katkıda bulundu. Daha sonra bazı yazarlar, farklı operatör sınıflarının rastgele sabit noktaları için farklı iterasyon metotları tanıttı (Itoh 1979), (Beg and Shahzad 1994), (O'Regan 1994), (Lin 1995), (Choudhury 2002), (Khan et al. 2002), (Banerjee and Choudhury 2011). Beg ve Abbas (2006), Banach uzaylarında zayıf daraltan ve asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler için (1) deki kapalı iterasyon metodunu tanıttılar. Ayrıca, bu yazarlar Banach uzaylarında asimtotik quasi genişlemeyen rastgele operatörlerin sonlu bir ailesi için ifade ettikleri iterasyon metodunun bu dönüşümlerin ortak rastgele sabit noktasına yakınsadığını da gösterdiler.

Lemma 1: $p > 1$ ve $r > 0$ olacak şekilde sabit reel sayı olsun. Bir X Banach uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in B(0, r)$ ve $w_p(\lambda) = \lambda^p(1 - \lambda) + \lambda(1 - \lambda)^p$ için

$$\| \lambda x + (1 - \lambda)y \|^p \leq \lambda \| x \|^p + (1 - \lambda) \| y \|^p - w_p(\lambda)g(\| x - y \|^p)$$

eşitsizliğini sağlayan $g(0) = 0$ ve $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde tanımlı sürekli, artan ve kesin konveks bir fonksiyonun olmasıdır (Hong-Kun 1991).

Lemma 2: $\{\alpha_m\}$ ve $\{\beta_m\}$ negatif olmayan reel diziler ve her $m = 1, 2, 3, \dots$, için

$$\alpha_{m+1} \leq (1 + \beta_m)\alpha_m \text{ ve } \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m < \infty$$

şartları sağlansın. Bu durumda

- i. $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m$ limiti vardır.
- ii. $\liminf_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ ise $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ dır (Qihou 2001).

2006 yılında Beg ve Abbas aşağıdaki iterasyon metodunu tanımlayarak bununla ilgili yakınsama teoremini ispatlamışlardır.

Teorem 1: X bir ayrılabilir düzgün konveks Banach uzayı ve Θ ise X uzayının boştan farklı kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olsun. $E: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} (k_m(\ell) - 1) < \infty$ şartını sağlayan ve $k_m: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir dizisine sahip, tamamen sürekli, asimtotik genişlemeyen bir rastgele operatör olsun. ϱ_0 , $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Her $\ell \in \mathcal{U}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, için $\{\zeta_m\}$, $\{\eta_m\}$ ve $\{\varrho_m\}$ fonksiyon dizileri

$$\begin{aligned}\zeta_m(\ell) &= \gamma_m E^m(\ell, \varrho_m(\ell)) + (1 - \gamma_m) \varrho_m(\ell), \\ \eta_m(\ell) &= \beta_m E^m(\ell, \zeta_m(\ell)) + (1 - \beta_m) \varrho_m(\ell), \\ \varrho_{m+1}(\ell) &= \alpha_m E^m(\ell, \eta_m(\ell)) + (1 - \alpha_m) \varrho_m(\ell)\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Burada $\{\alpha_m\}$, $\{\beta_m\}$ ve $\{\gamma_m\}$ ise $[0, 1]$ aralığında tanımlı reel sayılardır ve ayrıca $0 < \liminf_{m \rightarrow \infty} \alpha_m \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \alpha_m < 1$ ve $0 < \liminf_{m \rightarrow \infty} \beta_m \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \beta_m < 1$ şartlarını sağlar.

O zaman $\{\zeta_m\}$, $\{\eta_m\}$ ve $\{\varrho_m\}$ fonksiyon dizileri E nin bir rastgele sabit noktasına yakınsar (Beg and Abbas 2006).

Plubtieng vd (2007) yukarıdaki çalışmadan esinlenerek (1) numaralı iterasyon metodunu oluşturarak rastgele operatörlerin sınıfları için aşağıdaki bazı yakınsama sonuçlarını elde etmişlerdir.

Tanım 16: $E_1, E_2, E_3: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ üç rastgele operatör olsun. Burada X bir ayrılabilir Banach uzayı ve Θ ise X uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesidir. ϱ_0 ise $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlanan ölçülebilir bir dönüşüm ve $\{f_m\}$, $\{f'_m\}$, $\{f''_m\}$ ise $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı ölçülebilir fonksiyonların sınırlı dizileri olsun. $m = 0, 1, 2, \dots$, için $\{\zeta_m\}$, $\{\eta_m\}$ ve $\{\varrho_m\}$ fonksiyon dizileri her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned}\zeta_m(\ell) &= \alpha''_m E_3^m(\ell, \varrho_m(\ell)) + \beta''_m \varrho_m(\ell) + \gamma''_m f''_m(\ell), \\ \eta_m(\ell) &= \alpha'_m E_2^m(\ell, \zeta_m(\ell)) + \beta'_m \varrho_m(\ell) + \gamma'_m f'_m(\ell), \\ \varrho_{m+1}(\ell) &= \alpha_m E_1^m(\ell, \eta_m(\ell)) + \beta_m \varrho_m(\ell) + \gamma_m f_m(\ell)\end{aligned} \tag{1}$$

olarak tanımlansın. Burada $\{\alpha_m\}$, $\{\alpha'_m\}$, $\{\alpha''_m\}$, $\{\beta_m\}$, $\{\beta'_m\}$, $\{\beta''_m\}$, $\{\gamma_m\}$, $\{\gamma'_m\}$ ve $\{\gamma''_m\}$ ise $[0, 1]$ aralığında reel sayı dizileri ve $\alpha_m + \beta_m + \gamma_m = \alpha'_m + \beta'_m + \gamma'_m = \alpha''_m + \beta''_m + \gamma''_m = 1$ dir (Plubtieng et al. 2007).

Tezde I kümesi, N doğal sayı olmak üzere $I = \{1, 2, \dots, N\}$ şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca $\{\mathcal{S}_i: i \in I\}$, $\{E_i: i \in I\}$ ve $\{\mathcal{K}_i: i \in I\}$ üç sonlu ailenin ortak sabit noktalarının kümesi $F = \bigcap_{i=1}^N [RF(\mathcal{S}_i) \cap RF(E_i) \cap RF(\mathcal{K}_i)]$ olarak gösterilmiştir.

Teorem 2: X bir düzgün konveks ayrılabilir Banach uzayı ve Θ ise X uzayının boştan farklı ve konveks alt kümesi olsun. $E_1, E_2, E_3: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ yarı kompakt asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler olsun. Ayrıca her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} r_{i_m}(\ell) < \infty$ şartını sağlayan $r_{i_m}(\ell): \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty)$ ölçülebilir dizi olsun. Her bir $i = 1, 2, 3$ için $F = \bigcap_{i=1}^3 RF(E_i) \neq \emptyset$ ve $\varrho_0, \mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı ölçülebilir bir dönüşümdür. (1) de $\{\alpha_m\}, \{\alpha'_m\}, \{\alpha''_m\}, \{\beta_m\}, \{\beta'_m\}, \{\beta''_m\}, \{\gamma_m\}, \{\gamma'_m\}$ ve $\{\gamma''_m\}$ reel sayı dizileri ile tanımlanan $\{\varrho_m\}, \{\eta_m\}$ ve $\{\zeta_m\}$ fonksiyon dizileri aşağıdaki şartları sağlasın.

- i. Her $m \geq m_0, \exists m_0 \in \mathbb{N}$ ve bazı $\alpha \in (0, 1)$ için $0 < \alpha \leq \alpha_m, \alpha'_m, \alpha''_m \leq 1 - \alpha$ dir.
- ii. $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty, \sum_{m=1}^{\infty} \gamma'_m < \infty$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma''_m < \infty$ dur.

O halde $\{\varrho_m\}, \{\eta_m\}$ ve $\{\zeta_m\}$ dizileri F nin ortak bir rastgele sabit noktasına yakınsar (Plubtieng et al. 2007).

X normlu bir uzay ve Θ ise X uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. $E_1, E_2, E_3: \Theta \rightarrow \Theta$ üç operatör alalım. O zaman (1) de tanımlanan iterasyon metodu aşağıdaki hatalı iterasyona indirgenir ve

$$\begin{aligned}\varrho_m &= \gamma_m E_3^m \zeta_m + \gamma'_m \zeta_m + \gamma''_m h_m, \\ \eta_m &= \beta_m E_2^m \varrho_m + \beta'_m \zeta_m + \beta''_m g_m, \\ \zeta_{m+1} &= \alpha_m E_1^m \eta_m + \alpha'_m \zeta_m + \alpha''_m f_m\end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 17: $E_i: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ rastgele operatörlerin sonlu bir ailesi ve $\varrho_0: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ ise ölçülebilir herhangi bir fonksiyon olsun. $\{\varrho_m\}$ fonksiyon dizisi $m = (k - 1)N + i$ için

$$\varrho_m(\ell) = \alpha_m \varrho_{m-1}(\ell) + (1 - \alpha_m) E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) \quad (2)$$

olarak tanımlanır (Beg and Abbas 2006).

Beg ve Abbas 2006 yılında Banach uzaylarında zayıf daraltan asimtotik genişlemeyen rastgele operatörleri için tanıttıkları kapalı iterasyon metodu ile rastgele sabit noktalarına

yakınsadığını gösterdiler. Ayrıca, kapalı bir rastgele iterasyonun, düzgün konveks Banach uzaylarında asimtotik quasi genişlemeyen rastgele operatörlerin sonlu bir ailesinin ortak rastgele sabit noktasına yakınsadığını da kanıtladılar. İfade ettikleri Teorem 3 ve Teorem 4 ü, Lemma 1 ve Lemma 2 ile ispatladılar.

Teorem 3: X bir ayrılabilir Banach uzay ve Θ ise X uzayının boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca her $\ell \in \mathcal{U}$ ve $i \in J$ için $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{i_m}(\ell) < \infty$ şartını sağlayan $\lambda_{i_m}: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir dönüşüm dizisi ile $\{E_i: i \in J\}$ ler $\mathcal{U} \times \Theta$ dan Θ ya tanımlı N asimtotik quasi genişlemeyen sürekli rastgele operatörler olmak üzere $F = \bigcap_{i=1}^N RF(E_i) \neq \emptyset$ olsun. Burada ϱ_0 , $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı ölçülebilir bir dönüşümdür. Bu durumda (1) de tanımlanan kapalı rastgele iterasyon metodunun $\{E_i: i \in J\}$ rastgele operatörlerin ortak bir sabit noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $\liminf_{m \rightarrow \infty} d(\varrho_m(\ell), F) = 0$ olmasıdır. Burada $\{\alpha_m\}$ dizisi, bazı $s \in (0,1)$ değerleri için $(s, 1 - s)$ açık aralığında yer alır (Beg and Abbas 2006).

Teorem 4: X bir düzgün konveks ayrılabilir Banach uzay ve Θ ise X uzayının boştan farklı kapalı sınırlı konveks alt kümesi olsun. Her $\ell \in \mathcal{U}$ ve $i \in J$ için $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{i_m}(\ell) < \infty$ şartını sağlayan $\lambda_{i_m}: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir dönüşüm dizisi ile $\{E_i: i \in J\}$ ler $\mathcal{U} \times \Theta$ dan Θ ya tanımlı N düzgün L -Lipschitzian, asimtotik quasi genişlemeyen sürekli rastgele operatörler ve $F = \bigcap_{i=1}^N RF(E_i) \neq \emptyset$ olsun. $\{E_i: i \in J\}$ ailesindeki operatörlerden en az birisinin yarı kompakt rastgele operatör olduğunu kabul edelim ve buna E diyelim. ϱ_0 , $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı ölçülebilir bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_m\}$ bazı $s \in (0,1)$ için $(s, 1 - s)$ açık bir aralığında reel sayıların dizisi olmak üzere (1) de tanımlanan kapalı rastgele iterasyon metodu $\{E_i: i \in J\}$ rastgele operatörlerin ortak bir sabit noktasına yakınsar (Beg and Abbas 2006).

Tanım 18: X bir ayrılabilir Banach uzayı ve Θ da X uzayının boştan farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\varrho_0: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ bir keyfi ölçülebilir dönüşüm ve $E: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ bir zayıf daraltan rastgele operatör olsun. $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı $\{\varrho_m\}$ fonksiyon dizisi $m = 0, 1, 2, \dots$, ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\varrho_{m+1}(\ell) = (1 - \alpha_m)\varrho_m(\ell) + \alpha_m E(\ell, \varrho_m(\ell))$$

olur ve burada $0 \leq \alpha_m \leq 1$ ve $\sum \alpha_m = \infty$ dır. O zaman $\{\varrho_m\}$ dizisi, E nin rastgele sabit noktasına yakınsar (Beg and Abbas 2006).

Daha sonra 2007 yılında ise Plubtieng vd. Tanım 19 da ifade edilen kapalı iterasyon metodunu tanıttılar ve düzgün konveks ayrılabilir Banach uzayda bazı şartlar altında asimtotik quasi genişlemeyen rastgele operatörlerin sonlu bir ailesinin ortak bir rastgele sabit noktası için bazı yakınsama sonuçları elde ettiler. Bu sonuçlar Beg ve Abbas'ın (2006) sonuçlarını genişletmiş ve geliştirmiştir (Plubtieng et al. 2007).

Tanım 19: $E_i: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ rastgele operatörlerin sonlu bir ailesi ve $\varrho_0: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ ölçülebilir herhangi bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı $\{f_m\}$ dizisinin ölçülebilir olduğunu varsayalım. $\{f_m(\ell)\}$, Θ da toplanabilir dizi yani $\sum_{m=1}^{\infty} \|f_m(\ell)\|$ serisi yakınsak ve $m = (k - 1)N + i$ olsun. $\forall m \geq 1$ ve $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için

$$\varrho_m(\ell) = \alpha_m \varrho_{m-1}(\ell) + (1 - \alpha_m) E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) + f_m(\ell)$$

dir (Plubtieng et al. 2007).

Daha sonra, Banerjee ve Choudhury reel Banach uzayında asimtotik genişlemeyen sonlu bir rastgele operatör ailesi için rastgele hatalı iterasyonunu tanımladılar (Banerjee and Choudhury 2011). Ayrıca, bu iterasyonun düzgün konveks Banach uzaylarında bu tür operatörlerin ortak rastgele sabit noktasına yakınsadığını da kanıtladılar. Bu iterasyon metodu Tanım 20 de ifade edilmiştir.

Tanım 20: $E_i: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ rastgele operatörlerin sonlu bir ailesi ve $\varrho_0: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\forall m \geq 1$ ve $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned} \varrho_m(\ell) &= \alpha_m \varrho_{m-1}(\ell) + \beta_m E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) + \gamma_m f_m(\ell), \\ \eta_m(\ell) &= a_m \varrho_m(\ell) + b_m E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) + c_m g_m(\ell) \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $[0,1]$ aralığındaki $\{\alpha_m\}, \{\beta_m\}, \{\gamma_m\}, \{a_m\}, \{b_m\}$ ve $\{c_m\}$ dizileri $\alpha_m + \beta_m + \gamma_m = a_m + b_m + c_m = 1$ şartını sağlar. Θ dan $\mathcal{U}$ ya tanımlı $\{f_m\}$ ve $\{g_m\}$ dizileri ölçülebilir fonksiyonların sınırlı dizileridir (Banerjee and Choudhury 2011).

Ardından, Banerjee ve Choudhury (3) numaralı iterasyon metodunu kullanarak aşağıdaki Teorem 5 ve Teorem 6 yı ifade ettiler ve ispatladılar. Bu sonuçlar Plubtieng vd (2007) sonuçlarını genişletmekte ve iyileştirmektedir.

Teorem 5: X ayrılabilir bir Banach uzayı ve Θ ise X uzayının boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\{r_{i_m}\}: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir dizisi ile $\mathcal{U} \times \Theta$ dan Θ ya tanımlı N

asimtotik genişlemeyen rastgele operatörleri $\{E_i: i \in I\}$ olmak üzere her $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $i \in I = \{1, 2, \dots, N\}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} (r_{i_m}(\ell) - 1) < \infty$ şartı sağlansın. $F = \bigcap_{i=1}^N RF(E_i) \neq \emptyset$ olsun ve (3) de tanımlanan $\{q_m\}$ hatalı kapalı rastgele iterasyon, $0 < \alpha \leq \alpha_m, \beta_m \leq \beta < 1$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty$, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m < \infty$ şartlarını sağlasın. O zaman $\{q_m\}$ dizisinin, $\{E_i, i \in I\}$ rastgele operatörlerinin ortak bir rastgele sabit noktasına güçlü yakınsaması için gerek ve yeter şart $d(q_m(\ell), F) = \inf\{\|q_m(\ell) - q(\ell)\|: q \in F\}$ iken her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\liminf_{m \rightarrow \infty} d(q_m(\ell), F) = 0$ olmasıdır (Banerjee and Choudhury 2011).

Teorem 6: X düzgün konveks ayrılabilir bir Banach uzayı ve Θ ise X uzayının boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $\{r_{i_m}\}: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir dizisi ile $\mathcal{U} \times \Theta$ dan Θ ya tanımlı N düzgün L -Lipschitzian asimtotik genişlemeyen rastgele operatörü $\{E_i: i \in I\}$ olsun. $F = \bigcap_{i=1}^N RF(E_i) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Ayrıca (3) de tanımlanan $\{q_m\}$ hatalı kapalı rastgele iterasyon, $0 < \alpha \leq \alpha_m, \beta_m \leq \beta < 1$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty$, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m < \infty$ şartlarını sağlasın. $\{E_i: i \in I\}$ ailesi her $\ell \in \mathcal{U}$ için (B^*) şartını sağlarsa o zaman $\{q_m\}$, $\{E_i, i \in I\}$ ailesinin ortak bir rastgele sabit noktasına kuvvetli yakınsar (Banerjee and Choudhury 2011).

Tanım 21: Θ , X normlu uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $E: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ rastgele bir operatör olsun. Eğer $\forall u_0, v_0 \in \Theta$ ve $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için

$$\|E^m(\ell, u_0) - E^m(\ell, v_0)\| \leq \|u_0 - v_0\| + \mu_m(\ell)\|u_0 - v_0\| + \nu_m(\ell)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m(\ell) = 0$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \nu_m(\ell) = 0$ şartlarını sağlayan $\mu_m(\ell): \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty)$ ve $\nu_m(\ell): \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty)$ dizileri varsa E ye genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatör denir (Yildirim and Batuhan 2023).

Yukarıda ifade edilen genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatörde $\nu_m(\ell) = 0$ alınırsa asimtotik genişlemeyen rastgele operatöre indirgenmiş olur. Yani her asimtotik genişlemeyen rastgele bir dönüşüm aynı zamanda genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele bir dönüşümdür. Ancak bu ifadenin tersinin her zaman doğru olması gerekmez.

Şimdi aşağıda bu tez çalışmasında tanımladığımız iterasyon metotlarını sırasıyla ifade edeceğiz.

Tanım 22: X bir ayrılabilir Banach uzay ve Θ , X uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $E_1, E_2, E_3: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ ise üç rastgele operatör olsun. Ayrıca $\xi_0: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ ölçülebilir bir dönüşüm ve $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı $\{f_m\}, \{g_m\}, \{h_m\}$ dizileri ölçülebilir fonksiyonların sınırlı dizileri olsun. Her $\ell \in \mathcal{U}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, için $\{\varrho_m\}, \{\varsigma_m\}$ ve $\{\xi_m\}$ fonksiyon dizileri

$$\begin{aligned}\varrho_m(\ell) &= \gamma_m \xi_m(\ell) + \gamma'_m E_3^m(\xi_m, \ell) + \gamma''_m h_m(\ell), \\ \varsigma_m(\ell) &= \beta_m E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) + \beta'_m g_m(\ell), \\ \xi_{m+1}(\ell) &= \alpha_m E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) + \alpha'_m f_m(\ell)\end{aligned}\tag{4}$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki $\{\alpha_m\}, \{\beta_m\}, \{\gamma_m\}, \{\alpha'_m\}, \{\beta'_m\}, \{\gamma'_m\}$, ve $\{\gamma''_m\}$ ise $[0, 1]$ aralığındaki reel sayıların dizileridir. Ayrıca $\alpha_m + \alpha'_m = \beta_m + \beta'_m = \gamma_m + \gamma'_m + \gamma''_m = 1$ dir.

Tanım 23: X ayrılabilir bir Banach uzay ve Θ ise X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Ayrıca $\mathcal{S}_i, E_i, \mathcal{K}_i: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ rastgele operatörlerin üç sonlu ailesi ve $\varrho_0: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\forall \ell \in \mathcal{U}$ ve $m \geq 1$ için

$$\begin{aligned}\varrho_m(\ell) &= \alpha_m \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) + \beta_m E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) + \gamma_m f_m(\ell), \\ \eta_m(\ell) &= a_m \varrho_m(\ell) + b_m \mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) + c_m g_m(\ell)\end{aligned}\tag{5}$$

dir. Burada $\{\alpha_m\}, \{\beta_m\}, \{\gamma_m\}, \{a_m\}, \{b_m\}$ ve $\{c_m\}$ dizileri $[0, 1]$ aralığında yer alır. Ayrıca $\alpha_m + \beta_m + \gamma_m = a_m + b_m + c_m = 1$ ve $\{f_m\}, \{g_m\}$ $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlanan ölçülebilir fonksiyonlarının sınırlı dizileridir (Yildirim and Batuhan 2023).

Yukarıdaki (5) iterasyonu kompakt biçimde ifade edilmiştir. Bu iterasyonu açık olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{cases}
\varrho_1(\ell) = \alpha_1 \mathcal{S}_1(\ell, \varrho_0(\ell)) + \beta_1 E_1(\ell, a_1 \varrho_1(\ell) + b_1 \mathcal{K}_1(\ell, \varrho_1(\ell)) + c_1 g_1(\ell)) \\
+ \gamma_1 f_1(\ell) \\
\varrho_2(\ell) = \alpha_2 \mathcal{S}_2(\ell, \varrho_1(\ell)) + \beta_2 E_2(\ell, a_2 \varrho_2(\ell) + b_2 \mathcal{K}_2(\ell, \varrho_2(\ell)) + c_2 g_2(\ell)) \\
+ \gamma_2 f_2(\ell) \\
\ldots \\
\varrho_N(\ell) = \alpha_N \mathcal{S}_N(\ell, \varrho_{N-1}(\ell)) + \beta_N E_N(\ell, a_N \varrho_N(\ell) + b_N \mathcal{K}_N(\ell, \varrho_N(\ell)) \\
+ c_N g_N(\ell)) + \gamma_N f_N(\ell) \\
\varrho_{N+1}(\ell) = \alpha_{N+1} \mathcal{S}_{N+1}(\ell, \varrho_N(\ell)) + \beta_{N+1} E_1^2(\ell, a_{N+1} \varrho_{N+1}(\ell) \\
+ b_{N+1} \mathcal{K}_1^2(\ell, \varrho_{N+1}(\ell)) + c_{N+1} g_{N+1}(\ell)) + \gamma_{N+1} f_{N+1}(\ell) \\
\ldots \\
\varrho_{2N}(\ell) = \alpha_{2N} \mathcal{S}_{2N}(\ell, \varrho_{2N-1}(\ell)) + \beta_{2N} E_N^2(\ell, a_{2N} \varrho_{2N}(\ell) \\
+ b_{2N} \mathcal{K}_N^2(\ell, \varrho_{2N}(\ell)) + c_{2N} g_{2N}(\ell)) + \gamma_{2N} f_{2N}(\ell) \\
\varrho_{2N+1}(\ell) = \alpha_{2N+1} \mathcal{S}_{2N+1}(\ell, \varrho_{2N}(\ell)) + \beta_{2N+1} E_1^3(\ell, a_{2N+1} \varrho_{2N+1}(\ell) \\
+ b_{2N+1} \mathcal{K}_1^3(\ell, \varrho_{2N+1}(\ell)) + c_{2N+1} g_{2N+1}(\ell)) + \gamma_{2N+1} f_{2N+1}(\ell) \\
\ldots
\end{cases}$$

(4) ve (5) de tanımlanan iterasyon metotları göz önüne alınarak yukarıdaki rastgele operatör sınıfının sonlu ailelerinin ortak sabit noktalarına kuvvetli yakınsama ile ilgili temel sonuçları vermek için ilk olarak aşağıdaki lemmalar ifade edilecektir.

Lemma 3: $\{\alpha_m\}, \{\beta_m\}$ ve $\{\delta_m\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\alpha_{m+1} \leq (1 + \delta_m) \alpha_m + \beta_m$$

eşitsizliği sağlansın. $\sum \delta_m < \infty$ ve $\sum \beta_m < \infty$ ise o zaman

- i. $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m$ vardır,
- ii. $\liminf_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ iken $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ dır (Tan 1993).

Lemma 4: X düzgün konveks Banach uzay ve $\{u_m\}$ ve $\{v_m\}$, X te herhangi $\delta \geq 0$ için $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|u_m\| \leq \delta$, $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|v_m\| \leq \delta$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\ell_m u_m + (1 - \ell_m) v_m\| = \delta$ olacak şekilde iki dizi olsun. Ayrıca $0 < a \leq \ell_m \leq b < 1$ olduğunu varsayalım. O zaman $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - v_m\| = 0$ olur (Schu 1991).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Şimdi, (4) deki hatalı rastgele iterasyon metodunu kullanarak asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler için bazı yakınsama teoremlerini ifade edeceğiz.

Lemma 5: X bir düzgün konveks ayrılabilir Banach uzayı ve Θ ise X uzayının boştan farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{i_m}(\ell) < \infty$ şartını sağlayan ve $\mu_{i_m}(\ell): \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty)$ ölçülebilir dönüşümün dizisi ile $E_1, E_2, E_3: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler olsun. Ayrıca her $i = 1, 2, 3$ için $F = \bigcap_{i=1}^3 RF(E_i) \neq \emptyset$ ve (4) de tanımlanan $\{\xi_m(\ell)\}$ dizisi $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha'_m < \infty, \sum_{m=1}^{\infty} \beta'_m < \infty$, ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma''_m < \infty$ şartlarını sağlasın. O zaman her bir $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $p(\ell) \in F$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - p(\ell)\|$ limiti vardır.

İspat: $p: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$, E_1, E_2 ve E_3 rastgele operatörlerinin ortak bir sabit noktası olduğunu varsayalım. $\{f_m\}, \{g_m\}$ ve $\{h_m\}$ ise $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı ölçülebilir fonksiyonların sınırlı dizileri olsun. O zaman aşağıdaki gibi

$$M(\ell) = \sup_{m \geq 1} \{\|f_m(\ell) - p(\ell)\|, \|g_m(\ell) - p(\ell)\|, \|h_m(\ell) - p(\ell)\|\}$$

bir sonlu $M(\ell)$ sayısı vardır. Her $m \geq 1$ için $\mu_m(\ell) = \max\{\mu_{i_m}(\ell) | i = 1, 2, 3\}$ yazabiliriz. O halde $\mu_m(\ell) \geq 0$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{i_m}(\ell) = 0$ ve

$$\begin{aligned} \|\xi_{m+1}(\ell) - p(\ell)\| &= \|\alpha_m E_1^m(\ell, \zeta_m(\ell)) + \alpha'_m f_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\leq \alpha_m \|E_1^m(\ell, \zeta_m(\ell)) - p(\ell)\| + \alpha'_m \|f_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\leq \alpha_m (1 + \mu_m(\ell)) \|\zeta_m(\ell) - p(\ell)\| + \alpha'_m \|f_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\leq \alpha_m (1 + \mu_m(\ell) M(\ell)) \|\zeta_m(\ell) - p(\ell)\| + \alpha_m \\ &\quad + \alpha'_m \|f_m(\ell) - p(\ell)\| \end{aligned} \tag{6}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \|\zeta_m(\ell) - p(\ell)\| &\leq \beta_m (1 + \mu_m(\ell) M(\ell)) \|\varrho_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\quad + \beta_m + \beta'_m \|g_m(\ell) - p(\ell)\| \end{aligned} \tag{7}$$

ve

$$\begin{aligned} \|\varrho_m(\ell) - p(\ell)\| &\leq \gamma_m(1 + \gamma_m(\ell) + \mu_m(\ell)M(\ell))\|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\quad + \gamma'_m + \gamma''_m\|h_m(\ell) - p(\ell)\| \end{aligned} \quad (8)$$

elde edilir. Şimdi (7) ile (8) i birleştirirsek,

$$\begin{aligned} \|\varsigma_m(\ell) - p(\ell)\| &\leq \gamma_m\beta_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))(1 + \gamma_m + \mu_m(\ell)M(\ell))\|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\quad + \beta_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))\gamma'_m + \beta_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))\gamma''_m\|h_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\quad + \beta_m + \beta'_m\|g_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &= \gamma_m(1 - \alpha_m - \gamma_m)(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))(1 + \gamma_m + \mu_m(\ell)M(\ell))\|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\quad + \beta_m[1 + \gamma'_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))] + m_m(\ell) \\ &\leq (1 + \mu_m(\ell)M(\ell))(1 + \gamma_m + \mu_m(\ell)M(\ell))\|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\quad + \beta_m[1 + \gamma'_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))] + m_m(\ell) \end{aligned} \quad (9)$$

bulunur. Burada

$$m_m(\ell) = \beta_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))\gamma''_m\|h_m(\ell) - p(\ell)\| + \beta'_m\|g_m(\ell) - p(\ell)\| \quad (10)$$

olarak seçilmiştir. Teoremin hipotezindeki koşullardan, $\sum_{m=1}^{\infty} m_m(\ell) < \infty$ olduğunu elde ederiz. (6) ile (9) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|\xi_{m+1}(\ell) - p(\ell)\| &\leq \alpha_m(\mu_m(\ell)M(\ell))^2(1 + \gamma_m + \mu_m(\ell)M(\ell))\|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\quad + \alpha_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))\beta_m[1 + \gamma'_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))] \\ &\quad + \alpha_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))m_m(\ell) + \alpha_m + \alpha'_m\|f_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\leq (1 + \mu_m(\ell))(1 + \gamma_m + \mu_m(\ell)M(\ell))\|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\quad + b_m(\ell) + \alpha_m \end{aligned} \quad (11)$$

ifadesi elde edilir ve burada

$$\begin{aligned} b_m(\ell) &= \alpha_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))\beta_m[1 + \gamma'_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))] \\ &\quad + \alpha_m(1 + \mu_m(\ell)M(\ell))m_m(\ell) + \alpha'_m\|f_m(\ell) - p(\ell)\| \end{aligned} \quad (12)$$

olarak seçilmiştir. Yani $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(\ell) < \infty$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} b_m(\ell) < \infty$ olduğu anlamına gelir. Lemma 5 den her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_{m+1}(\ell) - p(\ell)\|$ limiti vardır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 6: X bir düzgün konveks ayrılabilir Banach uzay ve Θ ise X uzayının boştan farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $E_1, E_2, E_3: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler olmak üzere her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(\ell) < \infty$ şartını sağlayan $\mu_m(\ell): \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty)$ ölçülebilir dönüşümlerin bir dizisi olsun. Her $i = 1, 2, 3$ için $F = \bigcap_{i=1}^3 RF(E_i) \neq \emptyset$ dır. (4) de tanımlanan $\{\xi_m(\ell)\}$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

- i. Her $m \geq m_0, \exists m_0 \in \mathbb{N}$ ve bazı $\alpha \in (0, 1)$ için $0 < \alpha \leq \alpha_m, \beta_m, \gamma_m \leq 1 - \alpha$ dır.
- ii. $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha' < \infty, \sum_{m=1}^{\infty} \beta'_m < \infty$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma''_m < \infty$ dur.

O halde her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|E_3^m(\ell, \xi_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| \\ &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

dır.

İspat: $p(\ell) \in F$ olsun. Lemma 5 den, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_{m+1}(\ell) - p(\ell)\|$ limitinin var olduğunu bilinmektedir. Bazı $r \geq 0$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| = r$ olarak yazılabilir. Her bir $m \geq 1$ için, $\mu_m(\ell) = \max\{\mu_{i_m}(\ell) | i = 1, 2, 3\}$ dir. (9) eşitsizliğinin her iki tarafında limsup alınırsa

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\varsigma_m(\ell) - p(\ell)\| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| = r \tag{14}$$

bulunur. E_1 ve (14) kullanılırsa

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - p(\ell)\| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} (1 + \mu_m(\ell)) \|\varsigma_m(\ell) - p(\ell)\| \leq r \tag{15}$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} & \limsup_{m \rightarrow \infty} \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - p(\ell) + \alpha'_m(f_m(\ell) - \xi_m(\ell))\| \\ & \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - p(\ell)\| + \|\alpha'_m(f_m(\ell) - \xi_m(\ell))\| \end{aligned} \tag{16}$$

bulunur. (15) ve (16) dan

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - p(\ell) + \alpha'_m(f_m(\ell) - \xi_m(\ell))\| \leq r \tag{17}$$

sonucu çıkar. Üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - p(\ell) + \alpha'_m(f_m(\ell) - \xi_m(\ell))\| \leq r \tag{18}$$

elde edilir. (4) den ve E_1 operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_{m+1}(\ell) - p(\ell)\| \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\alpha_m E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) + \alpha'_m f_m(\ell) - p(\ell)\| \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\alpha_m E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) + \alpha'_m f_m(\ell) - (1 - \alpha_m)p(\ell) - \alpha_m p(\ell) \\
&\quad + \alpha_m \alpha'_m f_m(\ell) - \alpha_m \alpha'_m \xi_m(\ell) - \alpha_m \alpha'_m f_m(\ell) + \alpha_m \alpha'_m \xi_m(\ell)\| \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\alpha_m (E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - p(\ell) + \alpha'_m (f_m(\ell) - \xi_m(\ell))) \\
&\quad + (1 - \alpha_m)(\xi_m(\ell) - p(\ell) + \alpha'_m (f_m(\ell) - \xi_m(\ell)))\|
\end{aligned} \tag{19}$$

yukarıdaki ifade elde edilir. (17), (18) ve Lemma 5 i kullanarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = 0 \tag{20}$$

elde ederiz. Şimdi ise $\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = 0$ olduğu kanıtlayalım. Her $m \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| &\leq \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| + \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - p(\ell)\| \\
&\leq \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| + (1 + \mu_m(\ell))\|\varsigma_m(\ell) - \xi_m(\ell)\|
\end{aligned} \tag{21}$$

elde edilir. $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m(\ell) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = 0$ olduğundan, (14) ve (21) den

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\varsigma_m(\ell) - \xi_m(\ell)\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|\varsigma_m(\ell) - \xi_m(\ell)\| \leq r
\end{aligned} \tag{22}$$

yazılır. Böylece $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varsigma_m(\ell) - p(\ell)\| = r$ dır. (4) ü ele alırsak

$$\begin{aligned}
\|\varrho_m(\ell) - p(\ell)\| &\leq (1 + \mu_m(\ell))\|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \\
&\quad + \gamma_m'' \|h(\ell) - p(\ell)\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m(\ell) = 0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m''$ ve $\{h_m(\ell)\}$ nin sınırlı olmasını kullanılırsa

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\varrho_m(\ell) - p(\ell)\| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \leq r$$

ve

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m \rightarrow \infty} \|E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - p(\ell)\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} (1 + \mu_m(\ell))\|(\ell, \varrho_m(\ell)) - p(\ell)\| \leq r
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılır. Sonra

$$\begin{aligned}
&\|E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - p(\ell) + \beta'_m(g(\ell) - \xi_m(\ell))\| \\
&\leq \|E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - p(\ell)\| + \beta'_m\|g_m(\ell) - \xi_m(\ell)\|
\end{aligned} \tag{23}$$

ifadesini göz önüne alalım. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafının limsup alırsak

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - p(\ell) + \beta'_m(g_m(\ell) - \xi_m(\ell))\| \leq r$$

olur. Yine üçgen eşitsizliğinden

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - p(\ell) + \beta'_m(g_m(\ell) - \xi_m(\ell))\| \leq r$$

bulunur. Devamında $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\zeta_m(\ell) - p(\ell)\| = r$ olduğundan

$$\begin{aligned} r &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\beta_m E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) + \beta'_m g_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \begin{aligned} &\beta_m (E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - p(\ell) + \beta'_m (g_m(\ell) - \xi_m(\ell))) \\ &+ (1 - \beta_m) (\xi_m(\ell) - p(\ell) + \beta'_m (g_m(\ell) - \xi_m(\ell))) \end{aligned} \right\| \end{aligned} \quad (24)$$

elde edilir. Son olarak Lemma 5 ile

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = 0$$

bulunur. Yukarıdakine benzer olarak her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_3^m(\ell, \xi_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = 0$$

ifadesi de gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 7: X bir düzgün konveks ayrılabilir Banach uzay ve Θ ise X uzayının boştan farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $E_1, E_2, E_3: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ operatörleri ya yarı kompakt asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler ya da tamamen sürekli rastgele operatörler olmak üzere, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{i_m}(\ell) < \infty$ şartını sağlayan $\mu_{i_m}(\ell): \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty)$ ölçülebilir dönüşümün dizisi olsun. Her $i = 1, 2, 3$ için $F = \bigcap_{i=1}^3 RF(E_i) \neq \emptyset$ dır. Ayrıca ξ_0 ise $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı bir ölçülebilir dönüşüm olsun. (4) de $\{\alpha_m\}, \{\alpha'_m\}, \{\beta_m\}, \{\beta'_m\}, \{\gamma_m\}, \{\gamma'_m\}$ ve $\{\gamma''_m\}$ ile tanımlanan $\{\xi_m\}, \{\zeta_m\}$ ve $\{\varrho_m\}$ fonksiyon dizileri aşağıdaki şartları sağlasın.

- i. Her $m \geq m_0, \exists m_0 \in \mathbb{N}$ ve bazı $\alpha \in (0, 1)$ için $0 < \alpha \leq \alpha_m, \beta_m, \gamma_m \leq 1 - \alpha$ dır.
- ii. $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha' < \infty, \sum_{m=1}^{\infty} \beta'_m < \infty$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma''_m < \infty$ dur.

O zaman $\{\xi_m\}, \{\zeta_m\}$ ve $\{\varrho_m\}$ dizileri F nin bir ortak sabit noktasına yakınsar.

İspat: $p: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$, F nin ortak rastgele sabit nokta olsun. Lemma 6 dan her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|E_1^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|E_2^m(\ell, \zeta_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|E_3^m(\ell, \xi_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ifadesi elde edilir. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için $m \rightarrow \infty$ iken

$$\|\xi_{m+1}(\ell) - \xi_m(\ell)\| \leq \alpha_m \|E_1^m(\ell, \zeta_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| + \alpha'_m \|f_m(\ell) - \xi_m(\ell)\| \rightarrow 0$$

bulunur. Daha sonra üçgen eşitsizliğini kullanılırsa $m \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned}
\|E_1^m(\ell, \xi_{m+1}(\ell)) - \xi_{m+1}(\ell)\| &\leq \|E_1^m(\ell, \xi_{m+1}(\ell)) - E_1^m(\ell, \xi_m(\ell))\| \\
&+ \|E_1^m \xi_m(\ell) - \xi_m(\ell)\| + \|\xi_m(\ell) - \xi_{m+1}(\ell)\| \\
&\leq (1 + \mu_m(\ell))\|\xi_{m+1}(\ell) - \xi_m(\ell)\| \\
&+ \|E_1^m(\ell, \xi_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| \\
&+ \|\xi_m(\ell) - \xi_{m+1}(\ell)\| \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{26}$$

elde edilir. Şimdi her $\ell \in \mathcal{U}$ için (26) eşitliğinden $m \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa

$$\begin{aligned}
&\|E_1(\ell, \xi_{m+1}(\ell)) - \xi_{m+1}(\ell)\| \\
&\leq \|E_1(\ell, \xi_{m+1}(\ell)) - E_1^{m+1}(\ell, \xi_m(\ell))\| + \|E_1^{m+1}(\ell, \xi_{m+1}(\ell)) - \xi_{m+1}(\ell)\| \\
&\leq (1 + \mu_m(\ell))\|\xi_{m+1}(\ell) - E_1^m \xi_{m+1}(\ell)\| + \|E_1^{m+1}(\ell, \xi_{m+1}(\ell)) - \xi_{m+1}(\ell)\| \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{27}$$

olur. O halde her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_1(\ell, \xi_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = 0$ dır. Benzer şekilde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_2(\ell, \xi_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|E_3(\ell, \xi_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = 0 \tag{28}$$

limitleri bulunur.

Varsayalım ki E_1 yarı kompakt sürekli rastgele operatör ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_1(\ell, \xi_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| = 0$ olsun. O zaman $\{\xi_m\}$ nin $\{\xi_{m_k}\}$ bir alt dizisi ve ξ_{m_k} nin ξ_0 a yakınsayacağı şekilde ölçülebilir bir $\xi_0: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ dönüşümü vardır. Ölçülebilir dönüşümlerin $\{\xi_{m_k}\}$ alt dizisi ve $\xi_0: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ dönüşümü ölçülebilirdir. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi_{m_k}(\ell) - E_1(\ell, \xi_{m_k}(\ell))\| = \|\xi_0(\ell) - E_1(\ell, \xi_0(\ell))\| = 0 \tag{29}$$

olur. Böylece $\xi_0(\ell)$, E_1 in rastgele bir sabit noktasıdır. $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - \xi_0(\ell)\|$ limiti var olduğundan, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m(\ell) = \xi_0(\ell)$ yazılır. Burada benzer yöntem kullanılırsa $\xi_0(\ell)$ nin ayrıca E_2 ve E_3 ün de rastgele bir sabit noktası olduğu görülür. Dikkat edilirse her $\ell \in \mathcal{U}$ için $m \rightarrow \infty$ iken

$$\|\zeta_m(\ell) - \xi_m(\ell)\| \leq \beta_m \|E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| + \beta'_m \|g_m(\ell) - \xi_m(\ell)\| \rightarrow 0 \tag{30}$$

ve

$$\|\varrho_m(\ell) - \xi_m(\ell)\| \leq \gamma'_m \|E_3^m(\ell, \xi_m(\ell)) - \xi_m(\ell)\| + \gamma''_m \|h_m(\ell) - \xi_m(\ell)\| \rightarrow 0 \tag{31}$$

elde edilir. O halde her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_m(\ell) = \xi_0(\ell)$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_m(\ell) = \xi_0(\ell)$ bulunur.

Böylece $\{\xi_m\}$, $\{\zeta_m\}$ ve $\{\varrho_m\}$ fonksiyon dizileri F nin rastgele ortak bir sabit noktasına yakınsar. Şimdi, $E_1, E_2, E_3: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ den birinin tamamen sürekli rastgele operatör olduğunu varsayalım. Örneğin E_1 i sürekli rastgele operatör olarak seçelim. O zaman $\{E_1(\ell, \xi_{m_k}(\ell))\}$ nin bir $\{E_1(\ell, \xi_m(\ell))\}$ şeklinde bir alt dizisi vardır. Öyle ki $k \rightarrow \infty$ iken $E_1(\ell, \xi_{m_k}(\ell)) \rightarrow \xi_0(\ell)$

olur ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\xi_0: \mathcal{U} \rightarrow \Theta$ ölçülebilir bir dönüşümdür. Lemma 6 dan $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi_{m_k}(\ell) - E_1(\ell, \xi_{m_k}(\ell))\| = 0$ olduğunu biliyoruz. E_1 in sürekliliği kullanılırsa, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{m_k}(\ell) = \xi_0(\ell)$ olduğu elde edilir. Bu ise her $\ell \in \mathcal{U}$ için $E_1(\ell, \xi_0(\ell)) = \xi_0(\ell)$ anlamına gelir. Böylece $\xi_0(\ell)$, E_1 in rastgele bir sabit noktasıdır. Lemma 5 den her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - \xi_0(\ell)\|$ limitinin var olduğunu bildiğimiz için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi_{m_k}(\ell) - \xi_0(\ell)\| = 0$ yazılır. Bu nedenle, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi_m(\ell) - \xi_0(\ell)\| = 0$ olur. Yani $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m(\ell) = \xi_0(\ell)$ bulunur. (30) ve (31) ifadeleri kullanılırsa her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \varsigma_m(\ell) = \xi_0(\ell)$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_m(\ell) = \xi_0(\ell)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 8: X ayrılabilir bir Banach uzayı ve Θ , X in boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun. $\forall \ell \in \mathcal{U}$ ve $\forall i \in I$ için $\mathcal{S}_i, E_i, \mathcal{K}_i: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler olmak üzere $\{r_{i_m}\}: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$ iken $\sum_{m=1}^{\infty} (r_{i_m}(\ell) - 1) < \infty$ şartı sağlansın. $F \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. (5) te tanımlanan $\{\varrho_m\}$ iterasyonunun ek olarak $0 < \alpha \leq \alpha_m, \beta_m \leq \beta < 1$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty, \sum_{m=1}^{\infty} c_m < \infty$ şartlarını sağladığını varsayalım. O zaman $\{\varrho_m\}$ dizisinin, $\mathcal{S}_i, E_i$ ve $\mathcal{K}_i$ rastgele operatörlerinin ortak bir sabit noktasına güçlü yakınsaması için gerek ve yeter şart $d(\varrho_m(\ell), F) = \inf\{\|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\|: \varrho \in F\}$ iken $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için $\liminf_{m \rightarrow \infty} d(\varrho_m(\ell), F) = 0$ olmasıdır (Yildirim and Batuhan 2023).

İspat: $\varrho \in F$ yani ϱ ortak bir sabit nokta olsun. $\{f_m\}$ ve $\{g_m\}$ sınırlı diziler olduğundan dolayı biz $\forall \ell \in \mathcal{U}$ için

$$M(\ell) = \sup_{m \geq 1} \|f_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \vee \sup_{m \geq 1} \|g_m(\ell) - \varrho(\ell)\|$$

ifadesini yazabiliriz. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için $M(\ell) < \infty$ olduğu açıktır. Ayrıca her $m \geq 1$ için $r_m(\ell) = \{\max r_{i_m}(\ell): i = 1, 2, \dots, N\}$ olduğunu varsayalım. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} (r_{i_m}(\ell) - 1) < \infty$ şartından dolayı $\sum_{m=1}^{\infty} (r_m(\ell) - 1) < \infty$ yazabiliriz. (5) kullanılarak

$$\begin{aligned} & \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &= \|a_m \varrho_m(\ell) + b_m \mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) + c_m g_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &\leq a_m \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m \|\mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) - \varrho(\ell)\| + c_m \|g_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &\leq a_m \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m r_{k(m)}(\ell) \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m v_m(\ell) + c_m M(\ell) \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_m \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m(1 + \mu_m(\ell)) \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m v_m(\ell) + c_m M(\ell) \\
&\leq (1 + \mu_m(\ell)) \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m v_m(\ell) + c_m M(\ell)
\end{aligned}$$

elde edilir ve burada $\mu_m(\ell) = r_{k(m)}(\ell) - 1$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
&\|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&= \left\| \alpha_m \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell) + \beta_m E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) + \gamma_m f_m(\ell) - \varrho(\ell) \right\| \\
&\leq \alpha_m \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell) \right\| + \beta_m \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho(\ell) \right\| \\
&\quad + \gamma_m \|f_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&\leq \alpha_m r_{k(m)}(\ell) \|\varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell)\| + \alpha_m v_m(\ell) + \beta_m r_{k(m)}(\ell) \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&\quad + \gamma_m M(\ell) + \beta_m v_m(\ell) \\
&\leq \alpha_m (1 + \mu_m(\ell)) \|\varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&\quad + \beta_m (1 + \mu_m(\ell)) [(1 + \mu_m(\ell)) \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + c_m M(\ell)] \\
&\quad + \alpha_m v_m(\ell) + \beta_m v_m(\ell) + \gamma_m M(\ell) \\
&= \alpha_m (1 + \mu_m(\ell)) \|\varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell)\| + \beta_m (1 + \mu_m(\ell))^2 \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&\quad + \beta_m c_m (1 + \mu_m(\ell)) M(\ell) + \beta_m v_m(\ell) + \beta_m (1 + \mu_m(\ell)) b_m v_m(\ell) \\
&\quad + \alpha_m v_m(\ell) + \gamma_m M(\ell) \\
&\leq \alpha_m (1 + \mu_m(\ell)) \|\varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&\quad + (1 - \alpha_m)(1 + p_m(\ell)) \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&\quad + [\beta_m c_m (1 + \mu_m(\ell)) + \gamma_m] M(\ell) + \beta_m v_m(\ell) \\
&\quad + \beta_m (1 + \mu_m(\ell)) b_m v_m(\ell) + \alpha_m v_m(\ell) \\
&\leq \alpha_m \|\varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell)\| + (1 - \alpha_m + p_m(\ell)) \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&\quad + [\beta_m c_m (1 + \mu_m(\ell)) + \gamma_m] M(\ell) + \beta_m v_m(\ell) \\
&\quad + \beta_m (1 + \mu_m(\ell)) b_m v_m(\ell) + \alpha_m v_m(\ell)
\end{aligned}$$

olur. Burada $p_m(\ell) = 2\mu_m(\ell) + \mu_m(\ell)^2$ dir. Bu ise

$$\begin{aligned}
\|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| &\leq \|\varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell)\| + \frac{p_m(\ell)}{\alpha_m} \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&\quad + \frac{\beta_m c_m (1 + \mu_m(\ell)) + \gamma_m}{\alpha_m} M(\ell) + v_m(\ell) \\
&\quad + \frac{\beta_m v_m(\ell) + \beta_m (1 + \mu_m(\ell)) b_m v_m(\ell)}{\alpha_m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|q_{m-1}(\ell) - q(\ell)\| + \frac{p_m(\ell)}{\alpha} \|q_m(\ell) - q(\ell)\| \\
&+ \frac{\beta_m c_m(1 + \mu_m(\ell)) + \gamma_m}{\alpha} M(\ell) + v_m(\ell) \\
&+ \frac{\beta_m v_m(\ell) + \beta_m(1 + \mu_m(\ell))b_m v_m(\ell)}{\alpha}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|q_m(\ell) - q(\ell)\| &\leq \frac{\alpha}{\alpha - p_m(\ell)} v_m(\ell) \|q_{m-1}(\ell) - q(\ell)\| \\
&+ \left(\frac{\beta_m c_m(1 + \mu_m(\ell)) + \gamma_m + \beta_m v_m(\ell)}{\alpha - p_m(\ell)} + \frac{\beta_m(1 + \mu_m(\ell))b_m v_m(\ell) + v_m(\ell)}{\alpha - p_m(\ell)} \right) M(\ell) \\
&= \left(1 + \frac{p_m(\ell)}{(\alpha - p_m(\ell))v_m(\ell)} \right) \|q_{m-1}(\ell) - q(\ell)\| \\
&+ \left(\frac{\beta_m c_m(1 + \mu_m(\ell)) + \gamma_m + \beta_m v_m(\ell)}{\alpha - p_m(\ell)} + \frac{\beta_m(1 + \mu_m(\ell))b_m v_m(\ell) + v_m(\ell)}{\alpha - p_m(\ell)} \right) M(\ell)
\end{aligned} \tag{33}$$

olmasını gerektirir. Burada her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} (r_{k(m)}(\ell) - 1) < \infty$ koşulundan $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(\ell) < \infty$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} p_m(\ell) < \infty$ olduğunu biliyoruz. Yani her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(\ell) = 0$ olur. Genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatörün tanımından her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} v_m(\ell) = 0$ limitine sahibiz. O zaman $\ell \in \mathcal{U}$ için, her $m \geq m_1$ için $p_m(\ell) < \frac{\alpha}{2}$ olacak şekilde $m_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece (33) den ve her $m \geq m_1$ için şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\|q_m(\ell) - q(\ell)\| &\leq \left(1 + 2 \frac{p_m(\ell)}{\alpha v_m(\ell)} \right) (1 + \mu_m(\ell)) \|q_{m-1}(\ell) - q(\ell)\| \\
&+ \left(\frac{\beta_m c_m(1 + \mu_m(\ell)) + \gamma_m + \beta_m v_m(\ell) + \beta_m(1 + \mu_m(\ell))b_m v_m(\ell) + v_m(\ell)}{\alpha} \right) 2M(\ell) \\
&= (1 + \lambda_m(\ell)) \|q_{m-1}(\ell) - q(\ell)\| + \sigma_m(\ell).
\end{aligned} \tag{34}$$

Burada

$$\lambda_m(\ell) = 2 \frac{p_m(\ell)}{\alpha v_m(\ell)} (1 + \mu_m(\ell)) + \mu_m(\ell)$$

ve

$$\sigma_m(\ell) = \frac{\beta_m c_m(1+\mu_m(\ell)) + \gamma_m + \beta_m v_m(\ell) + \beta_m(1+\mu_m(\ell))b_m v_m(\ell) + v_m(\ell)}{\alpha} 2M(\ell)$$

dir. Bu nedenle $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m(\ell) < \infty$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m(\ell) < \infty$ ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla

$$d(\varrho_m(\ell), F) \leq 1 + \lambda_m(\ell)d(\varrho_{m-1}(\ell), F) + \sigma_m(\ell)$$

olur. Lemma 4 ü kullanarak biz her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} d(\varrho_m(\ell), F)$ limitinin var olduğunu elde ederiz. Ayrıca, her $\ell \in \mathcal{U}$ için sahip olduğumuz teoremin koşulundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(\varrho_m(\ell), F) = 0$$

elde edilir. Beg ve Abbas'ın (2006) çalışmalarında yer alan benzer ispat yöntemini kullanarak $\{\varrho_m(\ell)\}$ dizisinin her $\ell \in \mathcal{U}$ için bir Cauchy dizisi olduğunu görebiliriz. Bu nedenle $p: \mathcal{U} \rightarrow F$ olmak üzere her $\ell \in \mathcal{U}$ için $m \rightarrow \infty$ iken $\varrho_m(\ell) \rightarrow p(\ell)$ olur. Şimdi $p \in F$ olduğu ispatlanacaktır. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için $m \rightarrow \infty$ iken $\varrho_m(\ell) \rightarrow p(\ell)$ için $m_3 \in \mathbb{N}$ vardır ve her $m \geq m_3$ için $\|\varrho_m(\ell) - p(\ell)\| < \frac{\epsilon}{3(1+r_1(\ell))}$ dir. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} d(\varrho_m(\ell), F) = 0$ olduğundan $m_4 \in \mathbb{N}$ vardır ve her $m \geq m_4$ için $d(\varrho_m(\ell), F) < \frac{\epsilon}{3(1+r_1(\ell))}$ dir. Yani her $m \geq m_4$ için $\|\varrho_m(\ell) - \varrho^*(\ell)\| \leq \frac{\epsilon}{3(1+r_1(\ell))}$ olacak şekilde $\varrho^* \in F$ vardır. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} v_m(\ell) = 0$ olduğundan her $m \geq m_5$ için $v_m(\ell) < \frac{\epsilon}{3(1+r_1(\ell))}$ olacak şekilde $m_5 \in \mathbb{N}$ vardır. $m_6 = \max\{m_3, m_4, m_5\}$ olsun. Şimdi her $l \in I$ ve $m \geq m_6$ için

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_l(\ell, p(\ell)) - p(\ell)\| &\leq \|\mathcal{S}_l(\ell, p(\ell)) - \varrho^*(\ell)\| + \|\varrho^*(\ell) - p(\ell)\| \\ &\leq \|\mathcal{S}_l(\ell, p(\ell)) - \mathcal{S}_l(\ell, \varrho^*(\ell))\| + \|\varrho^*(\ell) - p(\ell)\| \\ &\leq r_1(\ell)\|\varrho^*(\ell) - p(\ell)\| + v_1(\ell) + \|\varrho^*(\ell) - p(\ell)\| \\ &= (1 + r_1(\ell))\|\varrho^*(\ell) - p(\ell)\| + v_1(\ell) \\ &\leq (1 + r_1(\ell))\|\varrho^*(\ell) - \varrho_m(\ell)\| + (1 + r_1(\ell))\|\varrho_m(\ell) - p(\ell)\| \\ &\quad + (1 + r_1(\ell))v_1(\ell) \\ &< (1 + r_1(\ell))\frac{\epsilon}{3(1 + r_1(\ell))} + (1 + r_1(\ell))\frac{\epsilon}{3(1 + r_1(\ell))} \\ &\quad + (1 + r_1(\ell))\frac{\epsilon}{3(1 + r_1(\ell))} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

bulunur ve burada her $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $l \in I$ için $\mathcal{S}_l(\ell, p(\ell)) = p(\ell)$ dir. Benzer şekilde, her $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $l \in I$ için $E_l(\ell, p(\ell)) = p(\ell)$ ve $\mathcal{K}_l(\ell, p(\ell)) = p(\ell)$ dir. Bu nedenle, $p \in F$ olur. Yani $\{q_m\}$, $\mathcal{S}_i$, E_i ve $\mathcal{K}_i$ nin bir ortak sabit noktasına güçlü yakınsar.

Lemma 7: X bir düzgün konveks ayrılabilir Banach uzay ve Θ ise X in boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun. $\mathcal{S}_i, E_i, \mathcal{K}_i: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ her $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $i \in I$ için $\sum_{m=1}^{\infty} (r_{i_m}(\ell) - 1) < \infty$ şartını sağlayan $\{r_{i_m}\}: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir dönüşümlerin dizisi ile düzgün L -Lipschitzian genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler olsun. $F \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. (5) de tanımlanan $\{q_m\}$ iterasyonu $0 < \alpha \leq \alpha_m, \beta_m \leq \beta < 1$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty, \sum_{m=1}^{\infty} c_m < \infty$ şartlarını da sağlasın. O halde her $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $l = 1, 2, \dots, N$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(\ell) - \mathcal{S}_l(\ell, q_m(\ell))\| = 0,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(\ell) - E_l(\ell, q_m(\ell))\| = 0$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(\ell) - \mathcal{K}_l(\ell, q_m(\ell))\| = 0$$

olur (Yildirim and Batuhan 2023).

İspat: $q \in F$ keyfi bir nokta olsun. $\{f_m\}$ ve $\{g_m\}$, $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı ölçülebilir fonksiyonların sınırlı dizileri olduğundan

$$M(\ell) = \sup_{m \geq 1} \|f_m(\ell) - q(\ell)\| \vee \sup_{m \geq 1} \|g_m(\ell) - q(\ell)\|$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikten, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $M(\ell) < \infty$ dir. Ayrıca her $m \geq 1$ için $r_m(\ell) = \{\max r_{i_m}(\ell) : i = 1, 2, \dots, N\}$ olduğunu varsayalım. Bu her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} (r_m(\ell) - 1) < \infty$ dur. (34) ü kullanarak

$$\|q_m(\ell) - q(\ell)\| \leq (1 + \lambda_m(\ell))\|q_{m-1}(\ell) - q(\ell)\| + \sigma_m(\ell)$$

yazabiliriz ve burada $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m(\ell) < \infty$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m(\ell) < \infty$ dur.

Lemma 3 den her $q \in F$ ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(\ell) - q(\ell)\|$ var olduğunu elde ederiz.

Şimdi $\lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(\ell) - q(\ell)\| = a_\ell$ olduğunu varsayalım. (5) den

$$\|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \leq (1 + \mu_m(\ell))\|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m v_m(\ell) + c_m M(\ell)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikten her $\ell \in \mathcal{U}$ için şunu elde ederiz:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \leq a_\ell. \quad (35)$$

Ayrıca

$$a_\ell = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \alpha_m \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) + \beta_m E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) + \gamma_m f_m(\ell) - \varrho(\ell) \right\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| (1 - \beta_m) \left(\mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho(\ell) + \gamma_m (f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell))) \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta_m \left(E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho(\ell) + \gamma_m (f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell))) \right) \right\|. \end{aligned}$$

Her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho(\ell) + \gamma_m (f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell))) \right\| \\ &\leq \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho(\ell) \right\| + \gamma_m \left\| f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafında limsup alarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} &\limsup_{m \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho(\ell) + \gamma_m (f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell))) \right\| \quad (37) \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \left(\left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho(\ell) \right\| + \gamma_m \left\| f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| \right) \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \left((1 + \mu_m(\ell)) \|\varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell)\| + v_m(\ell) + \gamma_m \left\| f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| \right) \\ &= a_\ell. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
& \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho(\ell) + \gamma_m \left(f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right) \right\| \\
& \leq \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho(\ell) \right\| + \gamma_m \left\| f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| \\
& \leq r_{k(m)}(\ell) \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + v_m(\ell) + \gamma_m \left\| f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\|
\end{aligned}$$

eşitsizliğini de yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizlikte tekrar limsup alırsak

$$\begin{aligned}
& \limsup_{m \rightarrow \infty} \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho(\ell) + \gamma_m \left(f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right) \right\| \\
& \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \left((1 + \mu_m(\ell)) \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + v_m(\ell) + \gamma_m \left\| f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| \right) \\
& \leq a_\ell
\end{aligned} \tag{38}$$

elde ederiz. (36), (37), (38) ve Lemma 4 den her $\ell \in \mathfrak{U}$ için şunu elde ederiz:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| = 0. \tag{39}$$

Ayrıca her $\ell \in \mathfrak{U}$ ve $m \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned}
& \left\| \varrho_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| \\
& = \left\| \alpha_m \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) + \beta_m E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) + \gamma_m f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| \\
& \leq \beta_m \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| \\
& \quad + \gamma_m \left\| f_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{40}$$

olur. Dolayısıyla her $\ell \in \mathfrak{U}$ ve her $l \in I$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \varrho_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m+l}(\ell)) \right\| = 0$$

dır.

O zaman (39) ve (40) ı kullanarak

$$\begin{aligned} \|\varrho_m(\ell) - E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell))\| &\leq \|\varrho_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell))\| \\ &\quad + \|\mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell))\| \end{aligned}$$

elde edilir ve her $\ell \in \mathfrak{U}$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varrho_m(\ell) - E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell))\| = 0 \quad (41)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} &\|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &= \|a_m \varrho_m(\ell) + b_m \mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) + c_m g_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &\leq a_m \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m \|\mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) - \varrho(\ell)\| + c_m \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &\leq a_m \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m r_m(\ell) \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m v_m(\ell) + c_m \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &= \|\alpha_m \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) + \beta_m E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) + \gamma_m f_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &\leq \alpha_m \|\mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho(\ell)\| + \beta_m \|E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho(\ell)\| \\ &\quad + \gamma_m \|f_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &\leq \alpha_m r_{m-1}(\ell) \|\varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell)\| + \alpha_m v_{m-1}(\ell) + \beta_m r_m(\ell) \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &\quad + \beta_m v_m(\ell) + \gamma_m \|f_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılır. (35) den her $\ell \in \mathfrak{U}$ için $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \leq a_\ell$ olduğunu biliyoruz.

Ayrıca

$$\begin{aligned} &\liminf_{m \rightarrow \infty} \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \{a_m \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + b_m r_m(\ell) [\alpha_m r_{m-1}(\ell) \|\varrho_{m-1}(\ell) - \varrho(\ell)\| + \alpha_m v_{m-1}(\ell) \\ &\quad + \beta_m r_m(\ell) \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + \beta_m v_m(\ell) + \gamma_m \|f_m(\ell) - \varrho(\ell)\|] + c_m \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\|\} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$a_\ell \leq a_m a_\ell + b_m [\alpha_m a_\ell + \beta_m \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\|]$$

eşitsizliğini gelir. Yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - a_m)a_\ell}{b_m} &\leq \alpha_m a_\ell + \beta_m \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\eta_m(\ell) - \varrho_m(\ell)\| \\
\frac{(1 - a_m)a_\ell - b_m \alpha_m a_\ell}{b_m \beta_m} &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\eta_m(\ell) - \varrho_m(\ell)\| \\
\frac{(1 - a_m - b_m \alpha_m)a_\ell}{b_m \beta_m} &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\eta_m(\ell) - \varrho_m(\ell)\| \\
a_\ell &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\eta_m(\ell) - \varrho_m(\ell)\|
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
a_\ell &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\eta_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \|a_m \varrho_m(\ell) + b_m \mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) + c_m g_m(\ell) - \varrho(\ell)\| \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| (1 - b_m)[\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell) + c_m(g_m(\ell) - \varrho_m(\ell))] \right. \\
&\quad \left. + b_m [\mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) - \varrho(\ell) + c_m g_m(\ell) - \varrho_m(\ell)] \right\|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell) + c_m(g_m(\ell) - \varrho_m(\ell))\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + c_m \|g_m(\ell) - \varrho_m(\ell)\| \\
&\leq a_\ell
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) - \varrho(\ell) + c_m g_m(\ell) - \varrho_m(\ell)\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) - \varrho(\ell)\| + c_m \|g_m(\ell) - \varrho_m(\ell)\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} r_m(\ell) \|\varrho_m(\ell) - \varrho(\ell)\| + v_m(\ell) + c_m \|g_m(\ell) - \varrho_m(\ell)\| \\
&\leq a_\ell
\end{aligned}$$

yazılır. Lemma 4 kullanılırsa $m \rightarrow \infty$ iken

$$\|\mathcal{K}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_m(\ell)) - \varrho_m(\ell)\| \rightarrow 0$$

olur. (41) i kullanarak $m \rightarrow \infty$ iken

$$\|\varrho_m(\ell) - \eta_m(\ell)\| \rightarrow 0$$

elde edilir. Daha sonra her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - E_m(\ell, \varrho_m(\ell)) \right\| \\ & \leq \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) \right\| + \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - E_m(\ell, \varrho_m(\ell)) \right\| \\ & \leq \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) \right\| + L \left\| E_{i(m)}^{k(m)-1}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \\ & = \sigma_m(\ell) + L \left\| E_{i(m)}^{k(m)-1}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \end{aligned} \quad (42)$$

bulunur ve burada $\sigma_m(\ell) = \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) \right\|$ dir.

(39) dan, her $\ell \in \mathcal{U}$ ve $m \rightarrow \infty$ iken $\sigma_m(\ell) \rightarrow 0$ dir. Ayrıca $m = (m - N)(\text{mod } N)$ iken $m > N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left\| E_{i(m)}^{k(m)-1}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \\ & \leq \left\| E_{i(m)}^{k(m)-1}(\ell, \eta_m(\ell)) - E_{i(m-N)}^{k(m)-1}(\ell, \varrho_{m-N}(\ell)) \right\| \\ & \quad + \left\| E_{i(m-N)}^{k(m)-1}(\ell, \varrho_{m-N}(\ell)) - E_{i(m-N)}^{k(m)-1}(\ell, \eta_{m-N}(\ell)) \right\| \\ & \quad + \left\| E_{i(m-N)}^{k(m)-1}(\ell, \eta_{m-N}(\ell)) - \mathcal{S}_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \varrho_{(m-N)-1}(\ell)) \right\| \\ & \quad + \left\| \mathcal{S}_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \varrho_{(m-N)-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \end{aligned} \quad (43)$$

eşitsizliğine sahibiz. Yine $m = (k(m) - 1)N + i(m)$ olduğundan, $k(m - N) = k(m) - 1$ ve $i(m - N) = i(m)$ olur. (43) ü kullanarak

$$\begin{aligned} & \left\| E_{i(m)}^{k(m)-1}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \\ & \leq \left\| E_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \eta_m(\ell)) - E_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \varrho_{m-N}(\ell)) \right\| \\ & \quad + \left\| E_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \varrho_{m-N}(\ell)) - E_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \eta_{m-N}(\ell)) \right\| \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| E_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \eta_{m-N}(\ell)) - \mathcal{S}_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \varrho_{(m-N)-1}(\ell)) \right\| \\
& + \left\| \mathcal{S}_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \varrho_{(m-N)-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \\
& \leq L \|\eta_m(\ell) - \varrho_{m-N}(\ell)\| + L \|\varrho_{m-N}(\ell) - \eta_{m-N}(\ell)\| \\
& + \sigma_{m-N}(\ell) \\
& + \left\| \mathcal{S}_{i(m-N)}^{k(m-N)}(\ell, \varrho_{(m-N)-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\|
\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m-1}(\ell)\| &= \left\| \begin{aligned} & \alpha_m \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) + \beta_m E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) \\ & + \gamma_m f_m(\ell) - \varrho_{m-1}(\ell) \end{aligned} \right\| \\
&\leq \alpha_m \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho_{m-1}(\ell) \right\| \\
&+ \beta_m \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_{m-1}(\ell) \right\| \\
&\leq \alpha_m \left(\left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| + \|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m-1}(\ell)\| \right) \\
&+ \beta_m \left(\left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| + \|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m-1}(\ell)\| \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&= \alpha_m \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| + \beta_m \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \\
&+ (\alpha_m + \beta_m) \|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m-1}(\ell)\| \\
&\Rightarrow (1 - \alpha_m - \beta_m) \|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m-1}(\ell)\| \leq \alpha_m \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \\
&+ \beta_m \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \\
&\Rightarrow \|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m-1}(\ell)\| \\
&\leq \frac{\alpha_m \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| + \beta_m \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\|}{(1 - \alpha_m - \beta_m)}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\alpha_m \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| + \beta_m \left\| E_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \eta_m(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\|}{1 - 2\beta_m}$$

ve böylece her $\ell \in \mathcal{U}$ ve $m \rightarrow \infty$ iken

$$\|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m-1}(\ell)\| \rightarrow 0$$

olur. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için (42) ve (44) den

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - E_m(\ell, \varrho_m(\ell)) \right\| \\ & \leq \sigma_m(\ell) + L^2 \|\eta_m(\ell) - \varrho_{m-N}(\ell)\| + L^2 \|\varrho_{m-N}(\ell) - \eta_{m-N}(\ell)\| \\ & \quad + L\sigma_{m-N}(\ell) + L \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{(m-N)-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \\ & \leq \sigma_m(\ell) + L^2 (\|\eta_m(\ell) - \varrho_m(\ell)\| + \|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m-N}(\ell)\|) \\ & \quad + L^2 \|\varrho_{m-N}(\ell) - \eta_{m-N}(\ell)\| + L\sigma_{m-N}(\ell) \\ & \quad + L \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{(m-N)-1}(\ell)) - \varrho_m(\ell) \right\| \end{aligned}$$

yazılır. Bunun devamında $m \rightarrow \infty$ iken

$$\left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - E_m(\ell, \varrho_m(\ell)) \right\| \rightarrow 0 \quad (45)$$

elde edilir. (40) ve (45) de $m \rightarrow \infty$ iken limit alınır

$$\begin{aligned} & \|\varrho_m(\ell) - E_m(\ell, \varrho_m(\ell))\| \\ & \leq \left\| \varrho_m(\ell) - \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) \right\| + \left\| \mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) - E_m(\ell, \varrho_m(\ell)) \right\| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (46)$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi her $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ için (46) yı kullanırsak ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için $m \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \|\varrho_m(\ell) - \mathcal{S}_{m+l}(\ell, \varrho_m(\ell))\| & \leq \|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m+l}(\ell)\| + \|\varrho_{m+l}(\ell) - \mathcal{S}_{m+l}(\ell, \varrho_{m+l}(\ell))\| \\ & \quad + \|\mathcal{S}_{m+l}(\ell, \varrho_{m+l}(\ell)) - \mathcal{S}_{m+l}(\ell, \varrho_m(\ell))\| \\ & \leq \|\varrho_m(\ell) - \varrho_{m+l}(\ell)\| + \|\varrho_{m+l}(\ell) - \mathcal{S}_{m+l}(\ell, \varrho_{m+l}(\ell))\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L\|q_{m+l}(\ell) - q_m(\ell)\| \\
& \leq \|q_m(\ell) - q_{m+l}(\ell)\| + \|q_{m+l}(\ell) - q_{m+l-1}(\ell)\| \\
& + \|q_{m+l-1}(\ell) - \mathcal{S}_{m+l}(\ell, q_{m+l}(\ell))\| \\
& + L\|q_{m+l}(\ell) - q_m(\ell)\| \\
& \leq \|q_m(\ell) - q_{m+l}(\ell)\| + \|q_{m+l}(\ell) - q_{m+l-1}(\ell)\| \\
& + \|q_{m+l-1}(\ell) - q_{m+l}(\ell)\| \\
& + \|q_{m+l-1}(\ell) - \mathcal{S}_{m+l}(\ell, q_{m+l}(\ell))\| \\
& + L\|q_{m+l}(\ell) - q_m(\ell)\| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak her $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $l \in I$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(\ell) - \mathcal{S}_l(\ell, q_m(\ell))\| = 0$$

dır. Yukarıdaki benzer ispat yönteminden hareketle her $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $l \in I$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(\ell) - E_l(\ell, q_m(\ell))\| = 0 \text{ ve } \lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(\ell) - \mathcal{K}_l(\ell, q_m(\ell))\| = 0$$

olduğu gösterilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 9: X bir düzgün konveks ayrılabilir Banach uzayı ve Θ ise X in boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun. $\mathcal{S}_i, E_i, \mathcal{K}_i: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ düzgün L -Lipschitzian genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler olmak üzere her $i \in I$ ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} (r_{i_m}(\ell) - 1) < \infty$ şartını sağlayan $\{r_{i_m}\}: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir bir dizi olsun. Ayrıca $F \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. (5) de tanımlanan $\{q_m\}$ iterasyonu ek olarak $0 < \alpha \leq \alpha_m, \beta_m \leq \beta < 1$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty, \sum_{m=1}^{\infty} c_m < \infty$ şartlarını sağlasın. $\mathcal{S}_i, E_i$ ve $\mathcal{K}_i$ aileleri her $\ell \in \mathcal{U}$ için (B^*) şartını sağlıyorsa o zaman $\{q_m\}$ iterasyonu $\mathcal{S}_i, E_i$ ve $\mathcal{K}_i$ nin ortak bir rastgele sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Yildirim and Batuhan 2023).

İspat: Teorem 8 den, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} d(q_m(\ell), F)$ limitinin var olduğunu biliyoruz.

Lemma 7 ve (B^*) şartı ile

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(d(q_m(\ell), F)) = 0$$

olduğu açıktır. f nin tanımından $\lim_{m \rightarrow \infty} d(q_m(\ell), F) = 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla sonuç Teorem 8 tarafından elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 10: X bir düzgün konveks Banach uzayı ve Θ da X in boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun. $\mathcal{S}_i, E_i, \mathcal{K}_i: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$, her $i \in I$ ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} (r_{i_m}(\ell) - 1) < \infty$ şartını sağlayan ve $\{r_{i_m}\}: \mathcal{U} \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonların dizisiyle düzgün L -Lipschitzian genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler olsun. $\mathcal{S}_i, E_i$ ve $\mathcal{K}_i$ ailelerinden en az birinin yarı kompakt rastgele operatör ve $F \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. (5) de tanımlanan $\{q_m\}$ iterasyonu ek olarak $0 < \alpha \leq \alpha_m, \beta_m \leq \beta < 1$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty, \sum_{m=1}^{\infty} c_m < \infty$ şartlarını sağlasın. O halde $\{q_m\}$ iterasyonu $\mathcal{S}_i, E_i$ ve $\mathcal{K}_i$ nin ortak bir rastgele sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Yildirim and Batuhan 2023).

İspat: Lemma 7 den, her $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $l \in I$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m(\ell) - \mathcal{S}_l(\ell, q_m(\ell))\| = 0$ olduğunu biliyoruz. $\mathcal{S}_1$ yarı kompakt rastgele operatör olduğunu varsayalım. Daha sonra q ise $\mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı ölçülebilir bir dönüşüm olmak üzere, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $q_{m_k}(\ell) \rightarrow q(\ell)$ olacak şekilde $\{q_m(\ell)\}$ nin alt dizisi $\{q_{m_k}(\ell)\}$ olsun. Böylece her $l \in I$ ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için

$$\|q(\ell) - \mathcal{S}_l(\ell, q(\ell))\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|q_{m_k}(\ell) - \mathcal{S}_l(\ell, q_{m_k}(\ell))\| = 0$$

dır. Buradan $q \in F$ olur. $\{q_m(\ell)\}$ her $\ell \in \mathcal{U}$ için $q_{m_k}(\ell) \rightarrow q(\ell)$ olacak şekilde $\{q_{m_k}(\ell)\}$ alt dizisine sahip olduğundan, $\liminf_{m \rightarrow \infty} d(q_m(\ell), F) = 0$ olur. Dolayısıyla istenen sonuç, Teorem 8 tarafından elde edilir ve ispat tamamlanır.

5. SONUÇ

- i. Lemma 7, Teorem 8, Teorem 9 ve Teorem 10, asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler ve düzgün L -Lipschitzian asimtotik genişlemeyen rastgele operatörler için de geçerlidir. Her bir $\ell \in \mathcal{U}$ ve her $m \geq 1$ için $v_m(\ell) = 0$ alınırsa, teoremlerimizin sonuçları ortaya çıkar.
- ii. Kapalı iterasyon metodunda her $\ell \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{K} = E$ için $\mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) = \varrho_{m-1}(\ell)$ alınırsa (5) iterasyon metodu, (3) iterasyon metoduna indirgenir. Böylece, Lemma 7, Teorem 8, Teorem 9 ve Teorem 10, genelleştirilmiş asimtotik genişlemeyen rastgele operatörlerin üç sonlu ailesi için Banerjee ve Choudhury (2011) nin Lemma 3.1, Teorem 3.1, Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 ünü genişletir ve geliştirir.
- iii. Her $m \in \mathbb{N}$ ve her $\ell \in \mathcal{U}$ için (5) iterasyon metodunda $\mathcal{S}_{i(m)}^{k(m)}(\ell, \varrho_{m-1}(\ell)) = \varrho_{m-1}(\ell)$, $a_m = b_m = c_m = 0$ ve $f_m(\ell) = 0$ alınırsa (2) iterasyon motodu elde edilir. Böylece sonuçlarımız Beg ve Abbas'ın (2006) sırasıyla Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 yi genişletir. Ayrıca, sonuçlarımız Plubtieng ve diğerlerinin (2007) sonuçlarını genişletir ve iyileştirir.
- iv. (4) de $E_1 = E_2 = E_3 := E$ ve $\alpha'_m = \beta'_m = \gamma''_m = 0$ alınırsa

$$\varrho_m(\ell) = \gamma_m \xi_m(\ell) + \gamma'_m E_3^m(\xi_m, \ell), \quad (47)$$

$$\varsigma_m(\ell) = \beta_m E_2^m(\ell, \varrho_m(\ell)),$$

$$\xi_{m+1}(\ell) = \alpha_m E_1^m(\ell, \varsigma_m(\ell))$$

iterasyon metodu elde edilir. Daha sonra, Teorem 7 den aşağıdaki sonuç ifade edilir:

X bir düzgün konveks ayrılabilir Banach uzayı ve Θ ise X uzayının boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $E: \mathcal{U} \times \Theta \rightarrow \Theta$ operatörü, her $\ell \in \mathcal{U}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{i_m}(\ell) < \infty$ şartını sağlayan $\mu_{i_m}(\ell): \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty)$ ölçülebilir dizisi ile ya yarı kompakt asimtotik genişlemeyen rastgele operatör ya da tamamen sürekli rastgele operatör olsun. Her $\ell \in \mathcal{U}$ için $RF(E) \neq \emptyset$ dır. Ayrıca $\xi_0, \mathcal{U}$ dan Θ ya tanımlı bir ölçülebilir dönüşüm olsun.

(4) de $\{\alpha_m\}, \{\beta_m\}, \{\gamma_m\}$ ve $\{\gamma'_m\}$ ile tanımlanan $\{\xi_m\}, \{\varsigma_m\}$ ve $\{\varrho_m\}$ fonksiyon dizileri her $m \geq m_0, \exists m_0 \in \mathbb{N}$ ve bazı $\alpha \in (0,1)$ için $0 < \alpha \leq \alpha_m \leq 1 - \alpha$ sağlasın. O

zaman $\{\xi_m\}$, $\{\zeta_m\}$ ve $\{\varrho_m\}$ fonksiyon dizileri F nin bir rastgele sabit noktasına yakınsar.



KAYNAKLAR

- Balcı, M., 1998. Reel Analiz. Ertem Matbaa, 144 s, Ankara.
- Banerjee, S. and Choudhury, B. S., 2011. Composite implicit random iterations for approximating common random fixed point for a finite family of asymptotically nonexpansive random operators. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 26(1), 23-35.
- Beg, I. and Shahzad, N., 1994. Random fixed point theorems for nonexpansive and contractive type random operators on Banach spaces. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 7(4), 569-580.
- Beg, I., 1997. Random fixed points of random operators satisfying semicontractivity conditions. *Mathematica japonicae*, 151-155.
- Beg, I., 2002. Approximation of random fixed points in normed spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1363-1372.
- Beg, I., 2002. Minimal displacement of random variables under Lipschitz random maps. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 391-397.
- Beg, I. and Abbas, M., 2006. Iterative procedures for solutions of random operator equations in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 315(1), 181-201.
- Beg, I. and Abbas, M., 2011. Solution of Random Operator Equations and Inclusions. *Random Operator Equations and Inclusions*. Lambert Academic Publishing 16-22, 164 s, United Kingdom.
- Bharucha-Reid, A., 1972. Random integral equations. New York: Academic Press.
- Choudhury, B. S. and Upadhyay A., 1999. An iteration leading to random solutions and fixed points of operators. *Soochow J. Math.*, 25(4), 395-400.
- Choudhury, B. S., 2002. A common unique fixed point theorem for two random operators in Hilbert spaces. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 32(3), 177-182.
- Choudhury, B. S., 2003. A Random Fixed Point Iteration For Three Random Operators On Uniformly Convex Banach Spaces. *Analysis in Theory and Application*, 19(2), 99-107.
- Choudhury, B. S., 2003. Random Mann iteration scheme. *Appl. Math. Lett.*, 16(1), 93-96.
- Choudhury, B. S., 2004. An iteration for finding a common random fixed point. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2004(4), 385-394.
- Ghosh, M., 1997. Convergence of Ishikawa Iterates of Quasi-Nonexpansive Mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 96-103.
- Hanš, O., 1961. Random operator equations. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. California: University of California Press, 185-202.
- Hanš, O., 1957. Random fixed point theorems, *Transactions of the 1st Prague Conf. on Information Theory, Statistics, Decision Functions and Random Processes*. Czechoslovak Acad. Sci., Prague, 105-125.
- Hong-Kun, X., 1991. Inequalities in Banach spaces and applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1127-1138.
- Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 147-150.
- Ishikawa, S., 1976. Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 65-71.

- Itoh, S., 1979. Random Fixed Point Theorems with an Application to Random Differential Equations in Banach Spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 67(2), 261-273.
- Khan, A. R. and A. B. Thaheem, N. Hussain, 2002. Random Fixed Points and Random Approximations in Nonconvex Domains. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 15(3), 247-253.
- Lin, T. C., 1995. Random Approximations and Random Fixed Point Theorems For Continuous 1-Set-Contractive Random Maps. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(4), 1167-1176.
- Mann, W., 1953. Mean Value Methods in Iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 506-510.
- O'Regan, D., 1999. Random Fixed Point Theory for Multivalued Maps. *Stochastic Analysis and Applications*, 17(4), 597-607.
- Outlaw, C., 1969. Mean value iteration of nonexpansive mappings in a Banach space. *Pacific Journal of Mathematics*, 747-750.
- Papageorgiou, N., 1986. Random Fixed Point Theorems for Measurable Multifunctions in Banach Spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 507-514.
- Park, J. A., 1994. Mann-Iteration process for the fixed point of strictly pseudocontractive mapping in some banach spaces. *Korean Mathematical Society*, 333-337.
- Plubtieng, S., Kumam, P. and Wangkeeree R., 2007. Approximation of a common random fixed point for a finite family of random operators. *Int. J. Math. Math. Sci.*
- Qihou, L., 2001. Iterative Sequences for Asymptotically Quasi-nonexpansive Mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1-7.
- Rhoades, B. E., 2001. Iteration to obtain random solutions and fixed points of operators in uniformly convex Banach spaces. *Soochow J. Math.*, 27(4), 401-404.
- Schu, J., 1991. Iterative construction of fixed points of strictly pseudocontractive mappings. *Applicable Analysis*, 67-72.
- Schu, J., 1991. Weak and strong convergence of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 43(1), 153-159.
- Spacek, A., 1955. Zuffalige gleichungen. *Czech. Math. Jour.*, 80(5), 462-466.
- Tan, K. K. and Xu, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mapping by the Ishikawa iteration process. *J. Math. Anal. Appl.*, 178(2), 301-308.
- Yildirim, I. and Batuhan, M.E., 2023. Random Fixed Point Results for Generalized Asymptotically Nonexpansive Random Operators, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*.
- Xu, H. K., 1990. Some random fixed point theorems for condensing and nonexpansive operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 395-400.
- Xu, H. K. and Beg, I., 1998. Measurability of Fixed Point Sets of Multivalued Random Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 62-72.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Muhammed Emin BATUHAN
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	T.C.
Adres:	-
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	
Lisans:	
Yüksek lisans:	
Yabancı Dil Bilgisi	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
1.	
2.	