

**LİNEER HİPERBOLİK BİR PROBLEMDE FİNAL
KRİTERİNDEN KAYNAK TERİMLERİNİN EŞ
ZAMANLI BELİRLENMESİ**

Turgut YELOĞLU

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Murat SUBAŞI
2009
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**LİNEER HİPERBOLİK BİR PROBLEMDE FİNAL KRİTERİNDEN
KAYNAK TERİMLERİNİN EŞZAMANLI BELİRLENMESİ**

Turgut YELOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2009

Her hakkı saklıdır

Doç. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, Turgut YELOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma 03.09.2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ahmet KAÇAR

İmza : 

Üye : Prof. Dr. Hüseyin AYDIN

İmza : 

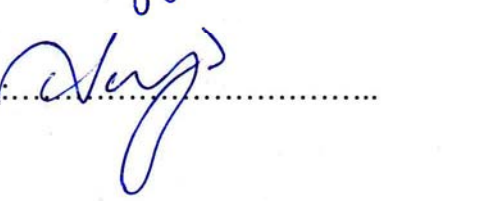
Üye : Doç. Dr. Murat SUBAŞI

İmza : 

Üye : Doç. Dr. Ömer GÜNDOĞDU

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT

İmza : 

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)


Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Ömer AKBULUT

ÖZET

Doktora Tezi

LİNEER HİPERBOLİK BİR PROBLEMDE FİNAL KRİTERİNDEN KAYNAK TERİMLERİNİN EŞZAMANLI BELİRLENMESİ

Turgut YELOĞLU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat SUBAŞI

Bu tezde hiperbolik bir problem için verilen final kriterinden kaynak terimlerinin belirlenmesi problemi ele alınmaktadır. İlk bölümde hiperbolik problemler için ters problemler hakkında genel bir giriş yapıldıktan sonra, ikinci bölümde tezde kullanılan bazı matematiksel kavramlara yer verilmektedir. Sonraki bölümde incelenen hiperbolik ters problemin ifadesi ele alınmaktadır. Ele alınan bu problemde belirlenmek istenen kaynak terimleri denklemin sağ tarafındaki ve başlangıç şartındaki fonksiyonlardır. Takip eden bölümde incelenen problem için genelleştirilmiş çözüm elde edilmektedir. Son bölümde ise sırasıyla ters problemin çözümünün varlığı, eşlenik sınır değer probleminin elde edilmesi, fonksiyonelin Frechet türevi ve minimalleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart, gradyenin Lipschitz sürekliliği ve monoton iterasyon işlemleri incelenmektedir.

2009, 70 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik sınır değer problemi, Ters problem, Frechet türevi.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SIMULTANEOUS DETERMINATION OF SOURCE TERMS FROM FINAL CRITERIA IN A LINEAR HYPERBOLIC PROBLEM

Turgut YELOĞLU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this thesis, simultaneous determination of source terms from final criteria has been investigated in a hyperbolic problem. In the first chapter, after giving a general introduction about inverse problems for hyperbolic problems, in the second chapter some basic mathematical concepts used in this thesis are presented. In the next chapter, the statement of inverse hyperbolic problem in the considered problem is studied. In the considered problem, the source terms to be determined are the functions in the right hand side and in the initial condition of the equation. In the following, the generalized solution about the considered problem is obtained. Finally, the existence of the solution of the inverse problem, obtaining the conjugate boundary value problem, the Frechet derivative and the necessary and sufficient condition for minimum of the functional, Lipschitz continuity and monotone iterative scheme of the gradient are investigated, respectively.

2009, 70 Pages

Keywords: Hyperbolic boundary value problem, Inverse problem, Frechet derivative.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma sırasında yöneticiliğimi üstlenen, değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Doç. Dr. Murat SUBAŞI hocama yakın ilgi, teşvik ve yardımlarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güvenden dolayı değerli eşim Neslihan YELOĞLU'na, oğlum Bera Efe YELOĞLU'na ve aileme en samimi duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Turgut YELOĞLU

Eylül 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	13
3.1. Hiperbolik Ters Problemin Konulması	13
3.2. Hiperbolik Problem için Genelleştirilmiş Çözümün Elde Edilmesi	16
3.3. Ters Problemin Çözülebilirliği	35
3.3.1. Problemin çözümünün varlığı	35
3.3.2. Eşlenik sınır değer probleminin elde edilmesi	48
3.3.3. Fonksiyonelin Frechet türevi ve minimalleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart	52
3.3.4. Gradyenin Lipschitz sürekliliği ve monoton iterasyon işlemleri	56
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	68
5. SONUÇ	69
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	71

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	Her yerde
$\overset{\circ}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$\Omega_t = (0, l) \times (0, t)$	$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge
$\Omega_T = (0, l) \times (0, T]$	$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge
$\bar{\Omega}_T = [0, l] \times [0, T]$	$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge
$C[0, l]$	$[0, l]$ aralığında sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$C'[0, l]$	$[0, l]$ aralığında birinci mertebeye kadar türevi sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$C^{0,1}(\bar{\Omega}_T)$	$\bar{\Omega}_T$ bölgesinde birinci değişkene göre sürekli, ikinci değişkene göre birinci mertebeye kadar türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^{2,2}(\Omega_T)$	Ω_T bölgesinde birinci ve ikinci değişkene göre ikinci mertebeye kadar türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı
$L_2[0, l]$	$[0, l]$ aralığında ölçülebilir ve karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega_T)$	Ω_T bölgesinde ölçülebilir ve karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_p(\Omega)$	Ω bölgesinde ölçülebilir ve p inci kuvveti integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$W_2^1[0, l] = H^1[0, l]$	Elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2[0, l]$ uzayından olan Sobolev uzayı
$W_2^1(\Omega_T) = H^1(\Omega_T)$	Elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega_T)$ uzayından olan Sobolev uzayı

$$W_2^0[0, l] = H^1[0, l]$$

$W_2^1[0, l]$ uzayının alt uzayı olup bu bölgenin sınırında sıfıra dönüşebilen fonksiyonların uzayı

$$W_2^{\hat{0}}[0, l] = H^1[0, l]$$

$W_2^0[0, l]$ uzayının alt uzayı olup $t = T$ için $(x, T) = 0$ şartını sağlayan fonksiyonların uzayı

$$o(\|\Delta w\|^2)$$

$\|\Delta w\|$ ifadesinden daha hızlı sıfıra giden terim

1. GİRİŞ

Hiperbolik sınır değer problemlerinde, herhangi bir andaki çözüme ait bir bilgiden faydalanarak problemde bulunan bazı fonksiyonların belirlenmesi problemi, ters hiperbolik problem olarak adlandırılır. Bu tür problemler ile dalga denklemlerinde ve titreşimle ilgili olaylarda sıkça karşılaşılır (Cohen and Bleistein 1977; Stolk and Symes 2003).

Birçok yazar ters hiperbolik problemlerde çözüme ait değişik türdeki bilgileri kullanarak denklemin farklı fonksiyonlarının belirlenmesi problemini incelemiştir.

Yamamoto (1995) yılında bölgenin sınırında normal vektörü yönündeki türevi kullanarak denklemin sağ tarafında bulunan kuvvet fonksiyonunun belirlenmesiyle ilgili araştırma yapmıştır.

Imanuvilo and Yamamoto (2003) yılında bölgenin içindeki ölçümden denklemin katsayı fonksiyonunun belirlenmesiyle ilgili bir çalışma yapmıştır.

Shcheglov and Viktorova (2004) yılında herhangi bir andaki çözüm bilgisinden lineer olmayan kuvvet fonksiyonunun sayısal çözümüne ait bir çalışma yapmıştır.

Cipolatti and Lopez (2005) yılında hiperbolik denklemde bir katsayı fonksiyonunun kontrolünü incelemiştir.

Clason (2006) yılında bir dalga denkleminde başlangıç fonksiyonunun belirlenmesi problemiyle ilgili bir doktora tezi çalışması hazırlamıştır.

Ters hiperbolik problemlerde bazı fonksiyonların eşzamanlı olarak belirlenmesi problemleriyle de ilgili değişik çalışmalar mevcuttur.

Bamberger *et al.* (1979) yılında bir boyutlu dalga denkleminde sınır ölçümünden iki katsayı fonksiyonunun bulunması problemini incelemiştir.

Isakov (1991) yılında farklı iki katsayı fonksiyonunun belirlenmesi problemini ele almıştır.

Gugat *et al.* (2005) herhangi bir anda çözümün kendisi ve zamana göre türevini içeren bir bilgiden sınır şartlarının eş zamanlı olarak belirlenmesini araştırmıştır.

Bu tez çalışması, verilen bir final kriterinden faydalanarak, biri denklemin sağ tarafında diğeri de başlangıç şartında bulunan ve kaynak terimleri olarak adlandırdığımız fonksiyonların eşzamanlı olarak belirlenmesi problemini ele almaktadır. Dolayısıyla da bu tez çalışması aranan fonksiyonların bulundukları yerler açısından öteki çalışmalardan önemli bir şekilde ayrılmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Tanım 2.1 (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

$$M1. \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M2. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$M3. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartları sağlanıyorsa, d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X kümesine metrik uzay denir ve (X, d) ya da X ile gösterilir.

Tanım 2.2 (Yakınsaklık): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X kümesinde bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X kümesinde yakınsak ve x elemanına da dizinin limiti denir.

Tanım 2.3 (Cauchy Dizisi): $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.4 (Tam Metrik Uzay): $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X kümesindeki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \rightarrow x \in X$ ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.5 (Konveks Küme): $X \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ için,

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in X$$

ise X kümesine konveks küme denir. Diğer bir ifadeyle X kümesi, her hangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeriyorsa bu takdirde X kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.6 (Kompakt Küme): $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X kümesinden alınan her hangi bir dizinin alt dizisi yakınsak ise X kümesine kompakt küme denir.

Tanım 2.7 (Kompakt Metrik Uzay): $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X kümesindeki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.8 (Kuvvetli Yakınsaklık): (x_n) , X normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ oluyorsa (x_n) dizisi $x \in X$ elemanına kuvvetli yakınsıyor denir.

Tanım 2.9 (Zayıf Yakınsaklık): (x_n) , H Hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall y \in H$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ oluyorsa (x_n) dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.10 (Zayıf Kompakt Küme): $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X kümesinden alınan her hangi bir dizinin alt dizisi zayıf yakınsak ise X kümesine zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.11 (Kapalı Küme): X kümesindeki her yakınsak dizinin yakınsadığı nokta X kümesine aitse X kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.12 (Yığılma Noktası): $X \subset \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. x elemanın her delik komşuluğu X kümesinin en az bir elemanını ihtiva ediyorsa x elemanına X kümesinin yığılma noktası denir. X kümesinin yığılma noktalarından oluşan kümeye X kümesinin yığılma noktalarının kümesi denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 2.13 (Kümenin Kapanışı): $X \subset \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. X kümesinin yığılma noktalarının kümesi X' olmak üzere X' ve X kümelerinin elemanlarından oluşan kümeye X kümesinin kapanışı denir. $\bar{X}$ ile gösterilir.

Tanım 2.14 (Yoğun Küme): (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin kapanışı X kümesine eşitse A kümesine X kümesinde yoğun küme denir. X kümesinin sayılabilir yoğun bir kümesi varsa X kümesine ayrılabilir küme denir.

Tanım 2.15 (Dönüşüm): X ve Y boş olamayan iki küme ve f , X kümesinden Y kümesine bir bağıntı olsun. $\forall x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir tek $y \in Y$ varsa f bağıntısına X kümesinden Y kümesine bir dönüşüm denir.

Tanım 2.16 (Süreklilik): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonu a noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.17 (Aşağıdan Yarı Sürekli Fonksiyon): $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ bir dizi, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ve $x^k \rightarrow x^0$ olmak üzere, $\lim_{k \rightarrow \infty} J(x^k) \geq J(x^0)$ ise J fonksiyonuna aşağıdan yarı sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.18 (Yukarıdan Yarı Sürekli Fonksiyon): $\lim_{k \rightarrow \infty} J(x^k) \leq J(x^0)$ ise J fonksiyonuna yukarıdan yarı sürekli fonksiyon denir.

Hem aşağından hem de yukarıdan yarı sürekli fonksiyona **sürekli fonksiyon** denir.

Tanım 2.19 (Operatör): Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.20 (Lineer Operatör): L ve L' , F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : L \rightarrow L'$ operatörü $\alpha, \beta \in F$ ve $x, y \in L$ olmak üzere,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartını sağlıyorsa T dönüşümüne lineer operatör denir.

Tanım 2.21 (Fonksiyonel): $F \subset \mathbb{R}$ veya $F \subset \mathbb{C}$ olmak üzere L, F üzerinde bir vektör uzay olsun. $J : L \rightarrow F$ operatörüne fonksiyonel denir.

Tanım 2.22 (Sınırlı Lineer Fonksiyonel): $F \subset \mathbb{R}$, $J : L \rightarrow F$ lineer fonksiyonel olmak üzere,

$$|J(x)| \leq K \|x\|$$

olacak şekilde $K \geq 0$ sayısı varsa J fonksiyoneline sınırlı lineer fonksiyonel denir.

Tanım 2.23 (Konveks Fonksiyon): $X \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme, $f(x)$ fonksiyonu da bu küme üzerinde tanımlı sonlu değerlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

oluyorsa $f(x)$ fonksiyonuna X kümesinde konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.24 (Normlu Uzay): N , bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \|: N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

$$N1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N2. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$N3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna N üzerinde norm, $(N, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.25 (Banach Uzayı): N , normlu lineer uzay olsun. N , $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise N kümesine Banach uzayı denir.

N kümesinin reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.26 (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı): L , F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle: L \times L \rightarrow F$ fonksiyonu,

$$I1. \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$I2. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$I3. \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad (\alpha \in F)$$

$$I4. \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı (veya ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayı $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ile veya kısaca L ile gösterilir.

Tanım 2.27 (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\| \cdot \|$, iç çarpım normu olsun. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine Hilbert uzayı denir.

Bu tanımdan Hilbert uzaylarının, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzayları olduğu anlaşılmaktadır.

Teorem 2.1 (Banach- Alaoglu): Bir Hilbert uzayının kapalı birim topu zayıf kompakttır.

Teorem 2.2: $f(x)$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilir ise $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilir.

Tanım 2.28: $C[0, l]$ ve $C^1[0, l]$ uzayları sırasıyla $[0, l]$ aralığında sürekli ve kendisi ile birinci mertebeye kadar türevi sürekli olan fonksiyonların uzayıdır. Bu uzaylarda norm,

$$\|w\|_{C[0, l]} := \max_{x \in [0, l]} |w(x)|$$

$$\|w\|_{C^1[0, l]} := \max_{x \in [0, l]} \{ |w(x)| + |w'(x)| \}$$

ile tanımlanır.

$C^{0,1}(\bar{\Omega}_T)$ uzayı, $\bar{\Omega}_T = [0, l] \times [0, T]$ bölgesinde birinci değişkene göre sürekli, ikinci değişkene göre birinci mertebeye kadar türevleri sürekli fonksiyonlar uzayıdır.

$C^{2,2}(\Omega_T)$ uzayı, $\Omega_T = (0, l) \times (0, T]$ bölgesinde birinci ve ikinci değişkene göre ikinci mertebeye kadar türevleri sürekli fonksiyonlar uzayıdır.

Tanım 2.29: $L_2[0, l]$ Hilbert uzayı olup elemanları $[0, l]$ aralığında ölçülebilir ve karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u, v \rangle_{L_2[0, l]} = \int_0^l u(x) v(x) dx$$

$$\|u\|_{L_2[0, l]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2[0, l]}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.30: $L_2(\Omega_T)$ Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega_T = (0, l) \times (0, T]$ bölgesinde ölçülebilir ve karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega_T)} = \iint_{\Omega_T} u(x, t) v(x, t) dx dt$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega_T)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(\Omega_T)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.31: $L_p(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve p 'inci kuvveti integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u, u \rangle_{L_p(\Omega)} = \iint_{\Omega} |u(x, t)|^p dx dt$$

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\langle u, u \rangle_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.32: $W_2^1[0, l] = H^1[0, l]$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2[0, l]$ uzayından olan Sobolev uzayıdır.

Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u, v \rangle_{W_2^1[0, l]} = \int_0^l \left(u(x)v(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right) dx$$

$$\|u\|_{W_2^1[0, l]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1[0, l]}}$$

şeklinde tanımlanır.

$W_2^1(\Omega_T) = H^1(\Omega_T)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega_T)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır.

Sobolev uzayları, genelleştirilmiş türevleri L_p uzayından olan Banach uzaylarıdır.

$\overset{0}{W}_2^1[0, l] = \overset{0}{H}^1[0, l]$ uzayı, $W_2^1[0, l]$ uzayının alt uzayı olup bu bölgenin sınırında sıfıra dönüşebilen fonksiyonların uzayıdır.

$\overset{\hat{0}}{W}_2^1[0, l] = \overset{\hat{0}}{H}^1[0, l]$ uzayı da $\overset{0}{W}_2^1[0, l]$ uzayının alt uzayı olup $t = T$ için $(x, T) = 0$ şartını sağlayan fonksiyonların uzayıdır.

Lemma 2.1: Eğer $w(x) \in C^1[0, l]$ fonksiyonu $w(0) = 0$ koşulunu sağlıyor ise,

$$\|w\|_{C[0, l]} \leq \sqrt{l} \|w_x\|_{L_2[0, l]}$$

$$\|w\|_{L_2[0, l]} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|w_x\|_{L_2[0, l]}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Lemma 2.2 (Cauchy – Bunyakovsky– Schwarz Eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega_T)$ elemanları için,

$$\left| \iint_{\Omega_T} uv dx dt \right| \leq \left(\iint_{\Omega_T} u^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega_T} v^2 dx dt \right)^{1/2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 2.3 (ε – Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a, b sayıları ve her $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$ab < \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.33 (Lipschitz Sabiti): f , D bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sabiti varsa f fonksiyonuna D bölgesinde y değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar denir ve k sabitine Lipschitz sabiti denir.

Teorem 2.3 (Genelleştirilmiş Weierstrass Teoremi): W, H Hilbert uzayında zayıf kompakt bir küme olsun. $J : W \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel ise

$$J_* = \inf_w J(w) > -\infty$$

olur ve

$$W_* = \{w \in W : J(w) = J_*\} \neq \emptyset$$

kümesi zayıf kompakttır. Ayrıca W kümesinden alınan herhangi minimalleştirici dizi W_* kümesine zayıf yakınsar.

Tanım 2.34 (Gradyen – Frechet Türevi): W kümesinde tanımlanan $J(w)$ fonksiyoneli için,

$$\Delta J(w) = J(w + \Delta w) - J(w) = \langle J'(w), \Delta w \rangle_w + o(\|\Delta w\|_w^2)$$

şartı sağlanırsa bu fonksiyonele $w \in W$ elemanında Frechet anlamında diferensiyellenen fonksiyonel, $J'(w)$ elemanına ise $J(w)$ fonksiyonelinin gradyeni veya Frechet türevi denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Hiperbolik Ters Problemin Konulması

$$p(x)u_{tt} = (k(x)u_x)_x + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T = (0,l) \times (0,T] \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.1.1)$$

$$u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x), \quad x \in (0,l) \quad (3.1.2)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T] \quad (3.1.3)$$

lineer hiperbolik probleminde,

$$u(x,T) = y(x), \quad \forall x \in [0,l] \quad (3.1.4)$$

final kriterinden faydalananarak, $w := \{f(x,t), h(x)\}$ fonksiyonlarının eş zamanlı belirlenmesi problemini inceleyeceğiz.

Burada $p(x)$ ve $k(x)$ fonksiyonları,

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1, \quad 0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1 \quad (3.1.5)$$

şeklindeki fonksiyonlardır.

Verilen $p(x)$, $k(x)$, $f(x,t)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarından, (3.1.1) - (3.1.3) probleminin çözümü olan $u(x,t)$ fonksiyonunun bulunması problemi direkt problem olarak adlandırılır.

Bizim incelediğimiz problemde olduğu gibi $p(x)$, $k(x)$, $g(x)$ verilen fonksiyonlar olmak üzere (3.1.4) şartını sağlayacak şekilde $w := \{f(x,t), h(x)\}$ ikilisini bulma problemine de ters problem denir.

(3.1.1) - (3.1.3) probleminin çözüm sınıfını belirleyelim:

$t = 0$ anında çözümün kendisi ve birinci türevi ayrıca $x = 0, x = l$ sınırlarında çözümün kendisi verildiğinden dolayı, buralarda çözümün sürekli olması gerekir. Denklemdeki ikinci mertebeden türevleri de dikkate aldığımızda, problemin klasik çözümünün $u(x, t) \in C^{2,2}(\Omega_T) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega_T})$ sınıfından olduğunu görürüz. Çözümün bu şekilde tanımlanabilmesi için katsayıların,

$$p(x) \in C[0, l], \quad k(x) \in C^1[0, l] \quad (3.1.6)$$

ve giriş verilerinin de

$$g(x) \in C^1[0, l], \quad h(x) \in C[0, l], \quad f(x, t) \in C(\Omega_T) \quad (3.1.7)$$

koşullarını sağlaması gerekir.

Pratikte $p(x), k(x), f(x, t), g(x), h(x)$ fonksiyonları fiziksel ölçümlerden elde edilen, düzgün olmayan (problemi sağlayacak derecede yeterli sürekli türevlere sahip olmayan) fonksiyonlardır. Diğer bir ifadeyle (3.1.6) ve (3.1.7) şartları doğadaki problemlerin çoğunda mümkün olmayabilir. Bu durumlarda klasik çözüme dayalı metotlar geçersiz olacaktır. Böyle hallerde uygun şekilde tanımlanan, şartları daha kolay sağlanacak genelleştirilmiş çözümler aranır.

Biz bu problem için önce,

$$g(x) \in H^1[0, l], \quad y(x) \in H^1[0, l] \quad (3.1.8)$$

olarak kabul edeceğiz. Ayrıca (3.1.5) şartını da

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1, \quad 0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1, \quad \forall x \in [0, l] \quad (3.1.9)$$

şartıyla değiştirip $w := \{f(x, t), h(x)\}$ ikilisini,

$$W := \{w = \{f, h\} : \|w\|_W \leq b\} \subset L_2(\Omega_T) \times L_2[0, l] \quad (3.1.10)$$

kümesinden arayarak bu fonksiyonlar için süreklilik şartını kaldıracak ve problemin pratikte uygulanabilirlik durumunu daha da genişleteceğiz.

W uzayında $\forall w_1, w_2 \in W$ için iç çarpım,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_W := \int_0^T \int_0^l f_1(x, t) f_2(x, t) dx dt + \int_0^l h_1(x) h_2(x) dx \quad (3.1.11)$$

şeklinde tanımlıdır. Buna göre w elemanının W kümesindeki normu,

$$\|w\|_W = \left(\int_0^T \int_0^l [f(x, t)]^2 dx dt + \int_0^l [h(x)]^2 dx \right)^{1/2} \quad (3.1.12)$$

şeklindedir.

Diğer taraftan fonksiyonların böyle seçimlerinden ve karşılaşılabilecek olan kaçınılmaz ölçüm hatalarından dolayı, (3.1.4) eşitliğinin tam olarak sağlanması hemen hemen imkansızdır. Bu yüzden (3.1.1) - (3.1.4) ters probleminin çözümünü,

$$J(w) = \int_0^l [u(x, T; w) - y(x)]^2 dx \quad (3.1.13)$$

ile tanımlanan amaç fonksiyonelinin minimumlaştırılmasının çözümü olarak değiştirip,

$$J(w_*) = \inf_{w \in W} J(w) \quad (3.1.14)$$

şeklinde yarı çözümü tanımlayacağız. Eğer $J(w_*) = 0$ ise $w_* \in W$ yarı çözümü (3.1.1) - (3.1.4) probleminin tam çözümü de olacaktır.

Burada $u(x, T; w)$ fonksiyonu (3.1.1) - (3.1.3) probleminin verilen herhangi bir $w \in W$ elemanına karşılık gelen çözümüdür.

3.2. Hiperbolik Problem için Genelleştirilmiş Çözümün Elde Edilmesi

(3.1.1) ifadesindeki,

$$p(x)u_{tt} = (k(x)u_x)_x + f(x, t)$$

eşitliğinin Ω_T bölgesinin her noktasında sağlanması talebini genişletmeye çalışalım.

Bunun için eşitliğin her iki tarafını, şartlarını daha sonra belirleyeceğimiz bir $\eta = \eta(x, t)$ fonksiyonuyla çarparak Ω_T bölgesinde integrallersek,

$$\iint_{\Omega_T} p(x)u_{tt}\eta dxdt = \iint_{\Omega_T} (k(x)u_x)_x \eta dxdt + \iint_{\Omega_T} f(x, t)\eta dxdt \quad (3.2.1)$$

eşitliğini elde ederiz.

Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_T} p(x)u_{tt}\eta dxdt &= \int_0^l \int_0^T p(x)u_{tt}\eta dt dx = \int_0^l p(x) \left\{ u_t \eta \Big|_0^T - \int_0^T u_t \eta_t dt \right\} dx \\ &= \int_0^l p(x)u_t(x, T)\eta(x, T) dx - \int_0^l p(x)u_t(x, 0)\eta(x, 0) dx \\ &\quad - \iint_{\Omega_T} p(x)u_t \eta_t dt dx \\ &= \int_0^l p(x)u_t(x, T)\eta(x, T) dx - \int_0^l p(x)h(x)\eta(x, 0) dx \\ &\quad - \iint_{\Omega_T} p(x)u_t \eta_t dt dx \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_T} (k(x)u_x)_x \eta dx dt &= \int_0^T \int_0^l (k(x)u_x)_x \eta dx dt = \int_0^T \left\{ \int_0^l (k(x)u_x)_x \eta dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ (k(x)u_x)\eta \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l (k(x)u_x)\eta_x dx \right\} dt \\
&= \int_0^T (k(l)u_x(l,t))\eta(l,t) dt - \int_0^T (k(0)u_x(0,t))\eta(0,t) dt \\
&\quad - \iint_{\Omega_T} k(x)u_x \eta_x dx dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (3.2.1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^l p(x)u_t(x,T)\eta(x,T) dx - \int_0^l p(x)h(x)\eta(x,0) dx - \iint_{\Omega_T} p(x)u_t \eta_t dt dx \\
&= \int_0^T (k(l)u_x(l,t))\eta(l,t) dt - \int_0^T (k(0)u_x(0,t))\eta(0,t) dt \\
&\quad - \iint_{\Omega_T} k(x)u_x \eta_x dx dt + \iint_{\Omega_T} f(x,t)\eta dx dt
\end{aligned}$$

elde edilir. $\eta(0,t) = \eta(l,t) = \eta(x,T) = 0$ olarak kabul edilip bu değerler yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\iint_{\Omega_T} (-p(x)u_t \eta_t + k(x)u_x \eta_x) dt dx = \int_0^l p(x)h(x)\eta(x,0) dx + \iint_{\Omega_T} f(x,t)\eta dx dt \quad (3.2.2)$$

bulunur. Bu eşitliği (3.1.1) probleminin genelleştirilmiş çözümü olarak tanımlayalım.

Dikkat edilirse bu eşitliğin sağlanabilmesi için

$$u, u_x, u_t \in L_2(\Omega_T)$$

ve

$$\eta, \eta_x, \eta_t \in L_2(\Omega_T)$$

olması gerekir.

Ayrıca,

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$$

ve

$$\eta(0,t) = \eta(l,t) = \eta(x,T) = 0$$

şartları da bu şartlarla birleştirilirse,

$$u \in \overset{0}{H}{}^1 = \overset{0}{W}{}^1_2 \quad \text{ve} \quad \eta \in \overset{\hat{0}}{H}{}^1 = \overset{\hat{0}}{W}{}^1_2$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.2.1: Her $\eta \in \overset{\hat{0}}{H}{}^1 = \overset{\hat{0}}{W}{}^1_2$ için (3.2.2) eşitliğini sağlayan $u \in \overset{0}{H}{}^1 = \overset{0}{W}{}^1_2$ fonksiyonuna (3.1.1) probleminin genelleştirilmiş çözümü denir.

Şimdi $w \in W$ için (3.1.1) problemini göz önüne alalım. Bu problem için aşağıdaki hüküm geçerlidir.

Teorem 3.2.2: (3.1.6) ve (3.1.7) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde her bir $w \in W$ için (3.1.1) - (3.1.3) başlangıç sınır değer probleminin tek çözümü var ve

$$\|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2 \leq c_5 \left(\|g\|_{H^1[0,l]}^2 + \|w\|_W^2 \right) \quad (3.2.3)$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat: Teoremi, Ladyzhenskaya (1985) çalışmasında olduğu gibi Galerkin metoduyla ispatlayalım. $\{\phi_k(x)\}$, $\overset{0}{W}{}^1_2[0,l]$ uzayının $\langle \phi_k, \phi_l \rangle = \delta_k^l$ şartını sağlayan temel sistemi olsun.

Yaklaşık çözümü,

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \phi_k(x) \quad (3.2.4)$$

şeklinde arayalım. Bu çözüm fonksiyonunu (3.1.1) denkleminde yerine yazarsak,

$$p(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} = \left(k(x) \frac{\partial u^N}{\partial x} \right)_x + f(x, t) \quad (3.2.5)$$

olur. Her iki tarafı $\phi_i(x)$ ile çarpıp,

$$p(x) u_{tt}^N \phi_i(x) = \left(k(x) u_x^N \right)_x \phi_i(x) + f(x, t) \phi_i(x) \quad (3.2.6)$$

eşitliğini $[0, l]$ aralığında integrallersek,

$$\begin{aligned} \int_0^l p(x) u_{tt}^N \phi_i(x) dx &= \int_0^l \left(k(x) u_x^N \right)_x \phi_i(x) dx + \int_0^l f(x, t) \phi_i(x) dx \\ &= k(x) u_x^N \phi_i(x) \Big|_0^l - \int_0^l k(x) u_x^N \phi_i'(x) dx + \int_0^l f(x, t) \phi_i(x) dx \end{aligned}$$

olur. $\phi_i(0) = \phi_i(l) = 0$ olduğundan,

$$\begin{cases} \langle p(x) u_{tt}^N, \phi_i \rangle_{L_2[0, l]} + \langle k(x) u_x^N, \phi_i' \rangle_{L_2[0, l]} = \langle f, \phi_i \rangle_{L_2[0, l]}, & i = 1, 2, 3, \dots, N \\ c_k^N(0) = \langle g, \phi_k \rangle_{L_2[0, l]}, & \frac{d}{dt} c_k^N(0) = \langle h, \phi_k \rangle_{L_2[0, l]} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

sistemi elde ederiz. Burada,

$$g^N(x) = \sum_{k=1}^N \langle u^N(x, 0), \phi_k(x) \rangle \phi_k(x)$$

toplamı $N \rightarrow \infty$ için $W_2^1[0, l]$ normunda $g(x)$ fonksiyonuna yakınsar. (3.2.7)

denklemleri t değişkenine göre ikinci mertebeden adi diferensiyel denklem sistemi oluşturur. Bu sistemin bir tek çözümü vardır.

Lemma 3.2.3: (3.2.4) ile verilen $u^N(x, t)$ yaklaşıkları için,

$$\|u^N\|_{H^1(\Omega_T)} \leq c_0$$

değerlendirmesi gerçektir.

İspat: (3.1.1) denklemini u^N için yazarsak,

$$p(x)u_{tt}^N - (k(x)u_x^N)_x = f(x, t)$$

olur. Denkleminin her iki tarafını u_t^N ile çarpıp $[0, l]$ aralığında integrallersek,

$$\int_0^l \left[p(x)u_{tt}^N - (k(x)u_x^N)_x \right] u_t^N dx = \int_0^l f(x, t) u_t^N dx$$

olur. Burada,

$$(k(x)u_x^N)_x u_t^N = (k(x)u_x^N u_t^N)_x - k(x)u_x^N u_{xt}^N$$

özdeşliğinden yararlanarak,

$$\int_0^l (p(x)u_{tt}^N u_t^N + k(x)u_x^N u_{xt}^N) dx = \int_0^l f(x, t) u_t^N dx + \int_0^l (k(x)u_x^N u_t^N)_x dx$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$p(x)u_{tt}^N u_t^N + k(x)u_x^N u_{xt}^N = \frac{1}{2} \left[p(x)(u_t^N)^2 + k(x)(u_x^N)^2 \right]_t$$

olduğunu kullanarak,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^l \left[p(x)(u_t^N)^2 + k(x)(u_x^N)^2 \right] dx \right\} = \int_0^l f(x, t) u_t^N dx + (k(x)u_x^N u_t^N) \Big|_{x=0}^{x=l}$$

elde ederiz.

$u^N(0, t) = u^N(l, t) = 0$ olduğundan, $u_t^N(0, t) = u_t^N(l, t) = 0$ olacaktır. Böylece,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^l \left[p(x) (u_t^N)^2 + k(x) (u_x^N)^2 \right] dx \right\} = \int_0^l f(x, t) u_t^N dx$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki tarafını $[0, t]$ aralığında integrallersek,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \left[p(x) (u_t^N(x, t))^2 + k(x) (u_x^N(x, t))^2 \right] dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^l \left[p(x) (u_t^N(x, 0))^2 + k(x) (u_x^N(x, 0))^2 \right] dx \\ & = \int_0^t \int_0^l f(x, \tau) u_\tau^N dx d\tau, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

olur.

Şimdi,

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l \left[p(x) (u_t^N(x, t))^2 + k(x) (u_x^N(x, t))^2 \right] dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan,

$$J(t) := \sqrt{E(t)} = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[p(x) (u_t^N(x, t))^2 + k(x) (u_x^N(x, t))^2 \right] dx \right\}^{1/2}$$

yazalım. $J(t)$ integraline $u^N(x, t)$ fonksiyonunun $[0, l]$ aralığındaki **enerji normu** denir. $t > 0$ değişkenine bağlı bu norm,

$$\|u\|_E := \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[p(x) (u_t^N(x, t))^2 + k(x) (u_x^N(x, t))^2 \right] dx \right\}^{1/2}, \quad t > 0$$

olarak gösterilir.

Böylece,

$$J^2(t) - J^2(0) = \int_0^t \int_0^l f(x, \tau) u_\tau^N dx d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (3.2.8)$$

olarak yazılabilir.

Lemma 3.2.4: (3.1.1) - (3.1.3) problemleri için (3.1.6) ve (3.1.7) şartları sağlanıyorsa,

$$\|u_x^N\|_{L_2[0,l]} \leq \sqrt{\frac{2}{k_0}} J(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.2.9)$$

$$\|u_t^N\|_{L_2[0,l]} \leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.2.10)$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat:

$$\begin{aligned} \int_0^l [u_x^N(x, t)]^2 dx &\leq \frac{1}{k_0} \int_0^l k(x) [u_x^N(x, t)]^2 dx \\ &\leq \frac{1}{k_0} \int_0^l \left[p(x) (u_t^N(x, t))^2 + k(x) (u_x^N(x, t))^2 \right] dx \\ &:= \frac{2}{k_0} E(t) \end{aligned}$$

olup,

$$\|u_x^N\|_{L_2[0,l]} \leq \sqrt{\frac{2}{k_0}} J(t), \quad t \in [0, T]$$

yazılır.

Benzer şekilde ikinci değerlendirme de

$$\begin{aligned}
 \int_0^l [u_t^N(x, t)]^2 dx &\leq \frac{1}{p_0} \int_0^l p(x) [u_t^N(x, t)]^2 dx \\
 &\leq \frac{1}{p_0} \int_0^l \left[p(x) (u_t^N(x, t))^2 + k(x) (u_x^N(x, t))^2 \right] dx \\
 &:= \frac{2}{p_0} E(t)
 \end{aligned}$$

olup,

$$\|u_t^N\|_{L_2[0, l]} \leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(t), \quad t \in [0, T]$$

bulunur.

(3.2.8) özdeşliğinin her iki tarafının $t > 0$ değişkenine göre türevini alıp ve sonra bulunan eşitliğin sağ tarafına Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}
 2J'(t) J(t) &\leq \|f\|_{L_2[0, l]} \|u_t^N\|_{L_2[0, l]} \\
 &\leq \|f\|_{L_2[0, l]} \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(t)
 \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$J'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \|f\|_{L_2[0, l]}$$

bulunur. Bunu $[0, t]$ aralığında integrallersek,

$$J(t) \leq J(0) + \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \int_0^t \|f\|_{L_2[0, l]} d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (3.2.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada,

$$J(0) := \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[p(x) (u_t^N(x, 0))^2 + k(x) (u_x^N(x, 0))^2 \right] dx \right\}^{1/2}$$

şeklindedir.

Lemma 3.2.5: (3.1.1) - (3.1.3) probleminde, (3.1.6) ve (3.1.7) şartlarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda $u^N(x, t)$ fonksiyonu için,

$$\|u_x^N\|_{L_2[0, l]} \leq \sqrt{\frac{2}{k_0}} J(0) + \frac{1}{\sqrt{k_0 p_0}} \int_0^t \|f\|_{L_2[0, l]} d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (3.2.12)$$

$$\|u_t^N\|_{L_2[0, l]} \leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(0) + \frac{1}{p_0} \int_0^t \|f\|_{L_2[0, l]} d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (3.2.13)$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat: (3.2.9) ve (3.2.11) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} \|u_x^N\|_{L_2[0, l]} &\leq \sqrt{\frac{2}{k_0}} \left[J(0) + \frac{1}{\sqrt{2 p_0}} \int_0^t \|f\|_{L_2[0, l]} d\tau \right] \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{k_0}} J(0) + \frac{1}{\sqrt{k_0 p_0}} \int_0^t \|f\|_{L_2[0, l]} d\tau, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde (3.2.10) ve (3.2.11) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} \|u_t^N\|_{L_2[0, l]} &\leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} \left[J(0) + \frac{1}{\sqrt{2 p_0}} \int_0^t \|f\|_{L_2[0, l]} d\tau \right] \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(0) + \frac{1}{p_0} \int_0^t \|f\|_{L_2[0, l]} d\tau, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $\|u^N\|_{L_2[0,l]}$ için bir değerlendirme yapalım:

$$\|u^N\|_{L_2[0,l]}^2 = \int_0^l [u^N(x,t)]^2 dx, \quad t \in [0, T]$$

eşitliğinin her iki tarafının $t > 0$ değişkenine göre türevini alır ve Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinizden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} 2\|u^N\|_{L_2[0,l]} \|u^N\|'_{L_2[0,l]} &= 2 \int_0^l u^N(x,t) u_t^N(x,t) dx \\ &\leq 2\|u^N\|_{L_2[0,l]} \|u_t^N\|_{L_2[0,l]} \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafı $2\|u^N\| \neq 0$ ile bölüp, sağ tarafta (3.2.13) eşitsizliğini dikkate alırsak,

$$\|u^N\|'_{L_2[0,l]} \leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(0) + \frac{1}{p_0} \int_0^t \|f\|_{L_2[0,l]} d\tau, \quad t \in [0, T]$$

bulunur. t değişkenine bağlı bu eşitsizliği $[0, t]$ aralığında integrallersek,

$$\begin{aligned} \|u^N(x,t)\|_{L_2[0,l]} &\leq \|u^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(0)t \\ &\quad + \frac{1}{p_0} \int_0^t \int_0^\tau \|f\|_{L_2[0,l]} d\eta d\tau, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

olur. Bu ifade için,

$$\int_0^t \int_0^\tau g(x) d\eta d\tau = \int_0^t (t-\tau) g(\tau) d\tau$$

özdeşliğinden yararlanırsak,

$$\|u^N\|_{L_2[0,l]} \leq \|u^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{2}{p_0}} J(0)t + \frac{1}{p_0} \int_0^t (t-\tau) \|f\|_{L_2[0,l]} d\tau \quad (3.2.14)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca, Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinizden,

$$\int_0^t 1 \left(\int_0^l f(x, \tau)^2 dx \right)^{1/2} d\tau \leq \left(\int_0^t 1 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_0^l f(x, \tau)^2 dx d\tau \right)^{1/2}, \quad t > 0$$

olup, buradan

$$\int_0^t \|f\|_{L_2[0,l]} d\tau \leq \sqrt{t} \|f\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad t > 0 \quad (3.2.15)$$

ve

$$\int_0^t (t-\tau) \|f\|_{L_2[0,l]} d\tau \leq \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{3}} \|f\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad t > 0 \quad (3.2.16)$$

yazılabilir.

Diğer taraftan,

$$J(0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(p_1 \int_0^l [u_t^N(x, 0)]^2 dx + k_1 \int_0^l [u_x^N(x, 0)]^2 dx \right)^{1/2}$$

olup, $r_0 = \max\{p_1, k_1\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} J(0) &\leq \sqrt{\frac{r_0}{2}} \left(\int_0^l [u_t^N(x, 0)]^2 dx + \int_0^l [u_x^N(x, 0)]^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{r_0}{2}} \left(\|u_t^N(x, 0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|u_x^N(x, 0)\|_{L_2[0,l]}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

ifadesi, buradan da

$$J(0) \leq \sqrt{\frac{r_0}{2}} \left(\|u_t^N(x, 0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x, 0)\|_{L_2[0,l]} \right) \quad (3.2.17)$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.2.15) ve (3.2.17) ifadeleri, (3.2.12) ifadesinde değerlendirilirse,

$$\begin{aligned} \|u_x^N\|_{L_2[0,l]} &\leq \sqrt{\frac{r_0}{k_0}} \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} \right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{t}{k_0 p_0}} \|f\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

olur ve $t = T$ için

$$\begin{aligned} \|u_x^N\|_{L_2[0,l]} &\leq \sqrt{\frac{r_0}{k_0}} \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} \right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{T}{k_0 p_0}} \|f\|_{L_2(\Omega_T)} \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$c_1 = \max \left\{ \sqrt{\frac{r_0}{k_0}}, \sqrt{\frac{T}{k_0 p_0}} \right\}$$

denirse,

$$\|u_x^N\|_{L_2[0,l]} \leq c_1 \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|f\|_{L_2(\Omega_T)} \right)$$

ve

$$\|u_x^N\|_{L_2[0,l]}^2 \leq 3c_1^2 \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right) \quad (3.2.18)$$

bulunur.

(3.2.15) ve (3.2.17) ifadeleri, (3.2.13) ifadesinde değerlendirilirse,

$$\begin{aligned} \|u_t^N\|_{L_2[0,l]} &\leq \sqrt{\frac{r_0}{p_0}} \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{t}}{p_0} \|f\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

olur ve $t = T$ için

$$\|u_t^N\|_{L_2[0,l]} \leq \sqrt{\frac{r_0}{p_0}} \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} \right) + \frac{\sqrt{T}}{p_0} \|f\|_{L_2(\Omega_T)}$$

yazılabilir.

$$c_2 = \max \left\{ \sqrt{\frac{r_0}{p_0}}, \frac{\sqrt{T}}{p_0} \right\}$$

denirse,

$$\|u_t^N\|_{L_2[0,l]} \leq c_2 \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|f\|_{L_2(\Omega_T)} \right)$$

ve

$$\|u_t^N\|_{L_2[0,l]}^2 \leq 3c_2^2 \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right) \quad (3.2.19)$$

bulunur.

(3.2.16) ve (3.2.17) ifadeleri, (3.2.14) ifadesinde değerlendirilirse,

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{L_2[0,l]} &\leq \|u^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + t \sqrt{\frac{r_0}{p_0}} \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} \right) \\ &\quad + \frac{t\sqrt{t}}{p_0\sqrt{3}} \|f\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

olur ve $t = T$ için

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{L_2[0,l]} &\leq \|u^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + T \sqrt{\frac{r_0}{p_0}} \left(\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} \right) \\ &\quad + \frac{T\sqrt{T}}{p_0\sqrt{3}} \|f\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$c_3 = \max \left\{ 1, T \sqrt{\frac{r_0}{p_0}}, \frac{T\sqrt{T}}{p_0\sqrt{3}} \right\}$$

denirse,

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{L_2[0,l]} \leq c_3 & \left(\|u^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]} \right. \\ & \left. + \|f\|_{L_2(\Omega_T)} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{L_2[0,l]}^2 \leq 4c_3^2 & \left(\|u^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 \right. \\ & \left. + \|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

bulunur.

(3.2.18), (3.2.19) ve (3.2.20) ifadeleri taraf tarafa toplanırrsa,

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{H^1[0,l]}^2 \leq c_4 & \left(\|u^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|u_x^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 \right. \\ & \left. + \|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

yazılır. Burada $c_4 = \max \{4c_3^2, 3c_1^2, 3c_2^2\}$ şeklindedir.

Diğer taraftan,

$$\|u^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 = \sum_{k=1}^N |c_k^N(0)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^N(0)|^2 = \|g\|_{L_2[0,l]}^2$$

$$\|u_t^N(x,0)\|_{L_2[0,l]}^2 = \sum_{k=1}^N \left| \frac{d}{dt} c_k^N(0) \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} c_k^N(0) \right|^2 = \|h\|_{L_2[0,l]}^2$$

ve

$$\|u_x^N(x, 0)\|_{L_2[0, I]}^2 = \|g_x\|_{L_2[0, I]}^2$$

olacağından,

$$\|u^N\|_{H^1[0, I]}^2 \leq c_4 \left(\|g\|_{L_2[0, I]}^2 + \|h\|_{L_2[0, I]}^2 + \|g_x\|_{L_2[0, I]}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\|u^N\|_{H^1[0, I]}^2 \leq c_4 \left(\|g\|_{L_2[0, I]}^2 + \|g_x\|_{L_2[0, I]}^2 + \|w\|_W^2 \right)$$

ve

$$\|u^N\|_{H^1[0, I]}^2 \leq c_4 \left(\|g\|_{H^1[0, I]}^2 + \|w\|_W^2 \right)$$

elde edilir.

Böylece,

$$\|u^N\|_{H^1(\Omega_T)}^2 \leq c_5 \left(\|g\|_{H^1[0, I]}^2 + \|w\|_W^2 \right), \quad c_5 = c_4 T \quad (3.2.22)$$

değerlendirmesi bulunur.

Sağ taraftaki normlar sonlu olacağından,

$$\|u^N\|_{H^1(\Omega_T)}^2 \leq c_6$$

ve

$$\|u^N\|_{H^1(\Omega_T)} \leq c_0 \quad (3.2.23)$$

yazılabilir. Böylece Lemma 3.2.3 ispatlanmış oldu.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim:

(3.2.23) ifadesi ile $\{u^N\}$, $(N=1,2,3,\dots)$ dizisinden $u(x,t) \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega_T)$ elemanına $H^1(\Omega_T)$ normunda zayıf yakınsayan bir alt dizi çıkarabiliriz.

Bu $u(x,t)$ limitinin (3.1.1) ve (3.1.4) probleminin genelleştirilmiş çözümü olduğunu göstermeliyiz.

$u^N(x,t)$ ifadesinin, (3.2.2) eşitliğini sağladığını göstermek için (3.2.7) sistemindeki ifadelerin her birini $d_i(t) \in W_2^1[0,T]$, $d_i(T)=0$ fonksiyonu ile çarpıp $i=1$ ' den $i=N$ ' ye kadar toplayarak $[0,T]$ aralığında integrallemeliyiz.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ \int_0^l p(x) u_{tt}^N \sum_{i=1}^N d_i(t) \phi_i(x) dx \right\} dt + \int_0^T \left\{ \int_0^l k(x) u_x^N \sum_{i=1}^N d_i(t) (\phi_i(x))_x dx \right\} dt \\ = \int_0^T \left\{ \int_0^l f(x,t) \sum_{i=1}^N d_i(t) \phi_i(x) dx \right\} dt \end{aligned}$$

ve

$$\eta = \sum_{i=1}^N d_i(t) \phi_i(x)$$

olmak üzere,

$$\iint_{\Omega_T} (p(x) u_{tt}^N \eta + k(x) u_x^N \eta_x) dx dt = \iint_{\Omega_T} f \eta dx dt$$

elde ederiz.

İlk terime kısmi integrasyon uygulayarak,

$$\begin{aligned} \int_0^l p(x) \left\{ u_t^N \eta \Big|_0^T - \int_0^T u_t^N \eta_t dt \right\} dx &= \int_0^l p(x) u_t^N(x, T) \eta(x, T) dx \\ &\quad - \int_0^l p(x) u_t^N(x, 0) \eta(x, 0) dx \\ &= \iint_{\Omega_T} -p(x) u_t^N \eta_t dx dt \end{aligned}$$

bulabiliriz. Bunu denklemde yerine yazıp,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_T} \left(-p(x) u_t^N \eta_t + k(x) u_x^N \eta_x \right) dt dx &= \int_0^l p(x) u_t^N(x, 0) \eta(x, 0) dx \\ &\quad + \iint_{\Omega_T} f \eta dx dt \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu şekildeki bütün η fonksiyonlarının hepsini $\mathfrak{R}_N$ ile gösterelim. (3.2.24) ifadesinde, yukarıda belirttiğimiz alt dizi (N_i) üzerinden sabit bir $\eta \in \mathfrak{R}_{N_i}$ elemanı için limit alabiliriz. Böylece bütün $\eta \in \mathfrak{R}_{N_i}$ için $u(x, t)$ limit fonksiyonu (3.2.2) eşitliğini sağlayacaktır.

η elemanlarının kümesi olan $\mathfrak{R}_N$ kümelerinin $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{R}_N$ bileşimi $\hat{W}_2^1(\Omega_T)$ kümesinde yoğun olduğundan ve $u(x, t)$ limit fonksiyonu $u \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega_T)$ şeklinde olduğundan her $\eta \in \hat{W}_2^1(\Omega_T)$ için $u \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega_T)$ limit fonksiyonu (3.2.2) eşitliğini sağlar. Dolayısıyla tanımladığımız şekilde genelleştirilmiş çözüm olur.

$u^N(x, t)$ için geçerli olan (3.2.22) değerlendirmesi, limit fonksiyonu olan $u(x, t)$ için de geçerli olacaktır.

Bu takdirde,

$$\|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2 \leq c_5 \left(\|g\|_{H^1[0,l]}^2 + \|w\|_w^2 \right)$$

yazılabilir.

Sağ taraftaki normlar sonlu olacağından,

$$\|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2 \leq c_6$$

ve

$$\|u\|_{H^1(\Omega_T)} \leq c_0 \quad (3.2.25)$$

yazılabilir.

Çözümün tekliği için önce,

$$p(x)(u_1)_{tt} = (k(x)(u_1)_x)_x + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T = (0,l) \times (0,T] \subset \mathbb{R}^2$$

$$(u_1)(x,0) = g(x), \quad (u_1)_t(x,0) = h(x), \quad x \in (0,l)$$

$$(u_1)(0,t) = 0, \quad (u_1)(l,t) = 0, \quad t \in (0,T]$$

ve

$$p(x)(u_2)_{tt} = (k(x)(u_2)_x)_x + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T = (0,l) \times (0,T] \subset \mathbb{R}^2$$

$$(u_2)(x,0) = g(x), \quad (u_2)_t(x,0) = h(x), \quad x \in (0,l)$$

$$(u_2)(0,t) = 0, \quad (u_2)(l,t) = 0, \quad t \in (0,T]$$

şeklinde u_1 ve u_2 gibi iki çözüm olduğunu kabul edelim. $y = u_1 - u_2$ farkı için

$$p(x)y_{tt} = (k(x)y_x)_x, \quad (x, t) \in \Omega_T = (0, l) \times (0, T] \subset \mathbb{R}^2$$

$$y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad t \in (0, T]$$

problemi yazılabilir.

Bu problem için (3.2.3) değerlendirmesine benzer olarak,

$$\|y\|_{H^1(\Omega_T)}^2 \leq 0$$

yazılabilir.

Buradan $\|y\|_{H^1(\Omega_T)}^2 = 0$ ve $H^1(\Omega_T)$ uzayında $y = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla genelleştirilmiş çözüm tekdir.

Böylece Teorem 3.2.2 ispatlanmış oldu.

3.3. Ters Problemin Çözülebilirliği

Bu bölümde,

$$J(w_*) = \inf_{w \in W} J(w) \quad (3.3.1)$$

probleminin, çözüme sahip olduğunu göstererek bu çözümün elde edilebilmesi için gerekli olan işlemleri ele alacağız.

3.3.1. Problemin çözümünün varlığı

Burada, incelediğimiz problemin genelleştirilmiş Weierstrass teoreminin şartlarını sağladığını göstererek bu teoremin hükmünü kullanacağız.

$L_2(\Omega_T) \times L_2[0, l]$ uzayı bir Hilbert uzayı olup, W kümesi bu uzayda zayıf kompakt bir kümedir.

W kümesinin zayıf kompaktlığı için Banach-Alaoglu teoreminden bu kümenin sınırlı, kapalı ve konveks olduğunu göstermeliyiz. Böylece ele aldığımız küme genelleştirilmiş Weierstrass teoreminde kümeye ait olan şartları sağlamış olur.

Sırasıyla bu özelliklerin sağlandığını gösterelim:

W1. W kümesinin,

$$W := \{w = \{f, h\} : \|w\|_W \leq b\} \subset L_2(\Omega_T) \times L_2[0, l]$$

şeklinde tanımlı olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle her bir elmanın sınırlı olmasından, kümenin sınırlı olduğu söylenebilir.

W2. W kümesinin kapalı olduğunu gösterelim:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

olduğunu biliyoruz. $\{w_n\} \rightarrow w_*$ olacak şekilde yakınsak bir dizi olsun. $w_* \in W$ olduğunu göstereceğiz. Çünkü her yakınsak dizinin yakınsadığı nokta kümeye aitse o kümeye kapalı küme denir.

Bu keyfi $\{w_n\}$ dizisinin yakınsaklığından,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_* - w_n\| = 0$$

olduğu açıktır. Yukarıdaki özellikten,

$$\|w_*\| - \|w_n\| \leq \|w_* - w_n\|$$

olup, her iki tarafın limitini alırsak,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_*\| - \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_* - w_n\| \\ \|w_*\| - b &\leq 0 \\ \|w_*\| &\leq b \end{aligned}$$

olup, $w_* \in W$ olur. Dolayısıyla W kümesi kapalıdır.

W3. W kümesinin konveks olduğunu gösterelim:

Konveksliğin tanımından, $\forall w_1, w_2 \in W$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için $\alpha w_1 + (1-\alpha)w_2 \in W$ dolayısıyla,

$$\|\alpha w_1 + (1-\alpha)w_2\| \leq b$$

olmalıdır.

$\|w_1\| \leq b$ ve $\|w_2\| \leq b$ olduğundan,

$$\|\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2\| \leq \alpha \|w_1\| + (1-\alpha) \|w_2\| \quad (3.3.2)$$

olduğunu göstermeliyiz. Çünkü,

$$\begin{aligned} \|\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2\| &\leq \alpha b + (1-\alpha) b \\ &\leq \alpha b + b - \alpha b \\ &\leq b \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi (3.3.2) eşitsizliğini gösterelim:

$$\begin{aligned} \|\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2\| &= \|\alpha \{f_1, h_1\} + (1-\alpha) \{f_2, h_2\}\| \\ &= \|\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2, \alpha h_1 + (1-\alpha) h_2\| \\ &= \left[\int_0^T \int_0^l [\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2]^2 dx dt + \int_0^l [\alpha h_1 + (1-\alpha) h_2]^2 dx \right]^{1/2} \end{aligned}$$

olup, buradan her iki tarafın karesini alırsak,

$$\begin{aligned} \|\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2\|^2 &= \int_0^T \int_0^l [\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2]^2 dx dt + \int_0^l [\alpha h_1 + (1-\alpha) h_2]^2 dx \\ &= \iint \alpha^2 f_1^2 dx dt + \iint (1-\alpha)^2 f_2^2 dx dt \\ &\quad + \iint 2\alpha(1-\alpha) f_1 f_2 dx dt + \int \alpha^2 h_1^2 dx + \int (1-\alpha)^2 h_2^2 dx \\ &\quad + \int 2\alpha(1-\alpha) h_1 h_2 dx \\ &= \|\alpha w_1\|^2 + \|(1-\alpha) w_2\|^2 + 2\alpha(1-\alpha) \langle w_1, w_2 \rangle \\ &\leq \|\alpha w_1\|^2 + \|(1-\alpha) w_2\|^2 + 2\alpha(1-\alpha) \|w_1\| \|w_2\| \\ &= (\|\alpha w_1\| + \|(1-\alpha) w_2\|)^2 \end{aligned}$$

olup her iki tarafın kare kökü alınırsa,

$$\|\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2\| \leq \alpha \|w_1\| + (1-\alpha) \|w_2\|$$

bulunur. Dolayısıyla (3.3.2) eşitsizliği ispatlanmış oldu. Bu da W kümesinin konveks olduğunu gösterir (Yosida 1980).

Şimdi genelleştirilmiş Weierstrass teoreminin fonksiyonele ait olan konvekslik ve süreklilik şartlarının sağlanıp sağlanmadığına bakalım:

Bunun için $J(w)$ fonksiyonelinin W kümesinde aşağıdan zayıf yarı sürekli olup olmadığını incelemeliyiz. Aşağıdan yarı sürekli fonksiyonel konveks ise aşağıdan zayıf yarı süreklidir. Ayrıca, bir fonksiyonelin sürekliliği aynı zamanda aşağıdan yarı sürekliliğini de ihtiva eder. Öyleyse önce $J(w)$ fonksiyonelinin W kümesinde konveks olduğunu göstermeliyiz. Sonra sürekli olduğunu göstererek aşağıdan yarı sürekli olduğunu göstermiş olacağız. Böylece de $J(w)$ fonksiyonelinin W kümesinde aşağıdan zayıf yarı sürekli olduğunu ispatlayarak, Weierstrass teoreminin şartlarının sağlandığını göstereceğiz.

Teorem 3.3.1.1:

$$J(w) = \int_0^l |u(x, T; w) - y(x)|^2 dx$$

fonksiyoneli W kümesinde konvektir.

İspat: W kümesinin konveks bir küme olduğunu göstermiştik.

Her bir $w_1, w_2 \in W$ için

$$J(\beta w_1 + (1-\beta) w_2) \leq \beta J(w_1) + (1-\beta) J(w_2) \quad (3.3.1.1)$$

eşitsizliğinin keyfi $\beta \in [0,1]$ için sağlandığını göstermemiz gerekir.

Sınır değer probleminin lineerliğinden ve çözümün tekliğinden her bir $w_1, w_2 \in W$ ve $\beta \in [0,1]$ için,

$$u(x, t; \beta w_1 + (1 - \beta) w_2) = \beta u(x, t; w_1) + (1 - \beta) u(x, t; w_2)$$

yazılabilir.

Ayrıca $|u - y|^2$ fonksiyonunun u değişkenine göre konveksliğinden,

$$|\beta u_1 + (1 - \beta) u_2 - y|^2 \leq \beta |u_1 - y|^2 + (1 - \beta) |u_2 - y|^2$$

eşitsizliği yazılabilir.

Bu özelliklerden faydalanarak da

$$\begin{aligned} J(\beta w_1 + (1 - \beta) w_2) &= \int_0^l |u(x, T; \beta w_1 + (1 - \beta) w_2) - y(x)|^2 dx \\ &= \int_0^l |\beta u(x, T; w_1) + (1 - \beta) u(x, T; w_2) - y(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^l \beta |u(x, T; w_1) - y(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_0^l (1 - \beta) |u(x, T; w_2) - y(x)|^2 dx \\ &= \beta J(w_1) + (1 - \beta) J(w_2) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Böylece Teorem 3.3.1.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi de $J(w)$ fonksiyonelinin W kümesinde sürekli olduğunu gösterelim:

Her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\|w + \Delta w - w\| < \delta$$

olduğunda,

$$|J(w + \Delta w) - J(w)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de

$$|J(w + \Delta w) - J(w)| < s_0 \|\Delta w\|_w^2 \quad (3.3.1.2)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Çünkü

$$|\Delta J(w)| \leq s_0 \|\Delta w\|_w^2 \leq s_0 \delta^2 = \varepsilon$$

seçilirse $\delta = \sqrt{\varepsilon / s_0} > 0$ seçilmiş olur.

(3.3.1.2) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim:

Teorem 3.3.1.2: $w \in W$ keyfi bir eleman ve Δw , $w + \Delta w \in W$ olacak şekilde bu eleman için verilmiş bir artım olsun. Bu durumda

$$|J(w + \Delta w) - J(w)| \leq s_0 \|\Delta w\|_w^2 \quad (3.3.1.2)$$

değerlendirmesi geçerlidir. Burada, s_0 sayısı Δw artımından bağımsızdır.

İspat: Önce, (3.1.1) - (3.1.3) probleminin $w + \Delta w$ artımından nasıl etkileneceğine bakalım:

Artımdan dolayı,

$$w = \{f, h\}, \Delta w = \{\Delta f, \Delta h\} \text{ ve } w + \Delta w = \{f + \Delta f, h + \Delta h\}$$

şeklinde olup,

$$u_{\Delta}(x, t; w) = u(x, t; w + \Delta w)$$

ile gösterirsek,

$$\Delta u(x, t; w) = u_{\Delta}(x, t; w) - u(x, t; w) = u(x, t; w + \Delta w) - u(x, t; w) \in H^1_0(\Omega_T)$$

fonksiyonu, problemin $w + \Delta w$ çiftine karşılık gelen halinden w çiftine karşılık gelen halinin çıkarılması sonucu elde edilecek problemin çözümü olacaktır. Öyleyse,

$$pu_{\Delta_t} = (ku_{\Delta_x})_x + f + \Delta f$$

$$u_{\Delta}(x, 0) = g(x), u_{\Delta_t}(x, 0) = h + \Delta h$$

$$u_{\Delta}(0, t) = u_{\Delta}(l, t) = 0$$

probleminden,

$$pu_{\Delta_t} = (ku_{\Delta_x})_x + f + \Delta f$$

$$u_{\Delta}(x, 0) = g(x), u_{\Delta_t}(x, 0) = h + \Delta h$$

$$u_{\Delta}(0, t) = u_{\Delta}(l, t) = 0$$

problemini çıkarırsak,

$$p\Delta u_{tt} = (k\Delta u_x)_x + \Delta f \quad (3.3.1.3)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \Delta u_t(x, 0) = \Delta h \quad (3.3.1.4)$$

$$\Delta u(0, t) = \Delta u(l, t) = 0 \quad (3.3.1.5)$$

fark sınır değeri problemi elde edilir.

Şimdi $w + \Delta w$ artımına karşılık $J(w)$ fonksiyonelinin nasıl değişeceğine bakalım:

$$u_{\Delta}(x, T; w) = u(x, T; w + \Delta w)$$

olmak üzere,

$$J(w + \Delta w) = \int_0^l [u_{\Delta}(x, T; w) - y(x)]^2 dx$$

fonksiyonelinin $J(w)$ fonksiyonelinin çıkarırsak,

$$\begin{aligned} \Delta J(w) = J(w + \Delta w) - J(w) = \int_0^l \left\{ [u_{\Delta}(x, T; w) - y(x)]^2 \right. \\ \left. - [u(x, T; w) - y(x)]^2 \right\} dx \end{aligned}$$

olur.

$$u_{\Delta}(x, T; w) = u(x, T; w) + u(x, T; w + \Delta w) - u(x, T; w)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\Delta J(w) &= \int_0^l \left\{ \left[u(x, T; w) - \Delta u(x, T; w) - y(x) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. - \left[u(x, T; w) - y(x) \right]^2 \right\} dx \\
&= \int_0^l \left[u + \Delta u - y + u - y(x) \right] \left[u + \Delta u - y - u + y(x) \right] dx \\
&= \int_0^l 2 \left[u(x, T; w) - y(x) \right] \Delta u(x, T) dx + \int_0^l \left[\Delta u(x, T) \right]^2 dx
\end{aligned} \tag{3.3.1.6}$$

elde edilir.

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
|\Delta J(w)| &\leq 2 \|u(x, T; w) - y(x)\|_{L_2[0, l]} \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]} \\
&\quad + \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]}^2
\end{aligned} \tag{3.3.1.7}$$

yazabiliriz.

Şimdi buradaki $\|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]}^2$ ifadesini değerlendirelim:

(3.3.1.3) ifadesini Δu_t fonksiyonu ile çarpıp Ω_t bölgesinde integrallersek,

$$\iint_{\Omega_t} \left(p \Delta u_{tt} - (k \Delta u_x)_x - \Delta f \right) \Delta u_t dx dt = 0$$

olur.

Buradan,

$$\int_0^t \int_0^l \left[p \Delta u_{tt} \Delta u_t + k \Delta u_x \Delta u_{xt} \right] dx dt = \int_0^t \int_0^l (k \Delta u_x \Delta u_t)_x dx dt + \int_0^t \int_0^l \Delta f \Delta u_t dx dt$$

olup,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l \left[p \Delta u_t^2(x, t) + k \Delta u_x^2(x, t) \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left[p \Delta u_t^2(x, 0) + k \Delta u_x^2(x, 0) \right] dx \\ = \int_0^t \int_0^l \Delta f \Delta u_t dx dt \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[p \Delta u_t^2 + k \Delta u_x^2 \right] dx, \quad t \in [0, T]$$

dersek,

$$E_1(t) - E_1(0) = \int_0^t \int_0^l \Delta f \Delta u_t dx dt, \quad t \in [0, T]$$

olacaktır.

Buradan $J_1(t) = \sqrt{E_1(t)}$ için,

$$J_1^2(t) - J_1^2(0) = \int_0^t \int_0^l \Delta f \Delta u_t dx dt$$

yazılabilir. Bu ifade (3.2.8) ifadesinin benzeridir. O halde (3.2.12) ifadesinden faydalanarak,

$$\|\Delta u_x\|_{L_2[0,l]} \leq \sqrt{\frac{2}{k_0}} J_1(0) + \frac{1}{\sqrt{k_0 p_0}} \int_0^t \|\Delta f\|_{L_2[0,l]} d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (3.3.1.8)$$

eşitsizliğini, (3.2.13) ifadesinden faydalanarak,

$$\|\Delta u_t\|_{L_2[0,l]} \leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} J_1(0) + \frac{1}{p_0} \int_0^t \|\Delta f\|_{L_2[0,l]} d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (3.3.1.9)$$

eşitsizliğini ve (3.2.14) ifadesinden faydalanarak,

$$\|\Delta u\|_{L_2[0,l]} \leq \sqrt{\frac{2}{p_0}} J_1(0) t + \frac{1}{p_0} \int_0^t (t-\tau) \|\Delta f\|_{L_2[0,l]} d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (3.3.1.10)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Yine (3.2.15) ve (3.2.16) ifadelerine benzer olarak,

$$\int_0^t \|\Delta f\|_{L_2[0,l]} d\tau \leq \sqrt{t} \|\Delta f\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad t > 0 \quad (3.3.1.11)$$

ve

$$\int_0^t (t-\tau) \|\Delta f\|_{L_2[0,l]} d\tau \leq \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{3}} \|\Delta f\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad t > 0 \quad (3.3.1.12)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Diğer taraftan,

$$J_1(0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(p_1 \int_0^l [\Delta u_t(x, 0)]^2 dx + k_1 \int_0^l [\Delta u_x(x, 0)]^2 dx \right)^{1/2}$$

olup, $r_0 = \max\{p_1, k_1\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} J_1(0) &\leq \sqrt{\frac{r_0}{2}} \left(\int_0^l [\Delta u_t(x, 0)]^2 dx + \int_0^l [\Delta u_x(x, 0)]^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{r_0}{2}} \left(\|\Delta u_t(x, 0)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|\Delta u_x(x, 0)\|_{L_2[0,l]}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeden de

$$J_1(0) \leq \sqrt{\frac{r_0}{2}} \left(\|\Delta u_t(x, 0)\|_{L_2[0,l]} + \|\Delta u_x(x, 0)\|_{L_2[0,l]} \right) \quad (3.3.1.13)$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.3.1.12) ve (3.3.1.13) ifadeleri (3.3.1.10) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_{L_2[0,t]} &\leq \sqrt{\frac{r_0}{p_0}} t \left(\|\Delta u_t(x, 0)\|_{L_2[0,t]} + \|\Delta u_x(x, 0)\|_{L_2[0,t]} \right) \\ &\quad + \frac{1}{p_0} \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{3}} \|\Delta f\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

ve $t = T$ için

$$\begin{aligned} \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0,t]} &\leq \sqrt{\frac{r_0}{p_0}} T \left(\|\Delta u_t(x, 0)\|_{L_2[0,t]} + \|\Delta u_x(x, 0)\|_{L_2[0,t]} \right) \\ &\quad + \frac{T\sqrt{T}}{p_0\sqrt{3}} \|\Delta f\|_{L_2(\Omega_T)} \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$s_1 = \max \left\{ T \sqrt{\frac{r_0}{p_0}}, \frac{T\sqrt{T}}{p_0\sqrt{3}} \right\}$$

denirse,

$$\|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0,t]} \leq s_1 \left(\|\Delta u_t(x, 0)\|_{L_2[0,t]} + \|\Delta u_x(x, 0)\|_{L_2[0,t]} + \|\Delta f\|_{L_2(\Omega_T)} \right)$$

ve

$$\begin{aligned} \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0,t]}^2 &\leq 3s_1^2 \left(\|\Delta u_t(x, 0)\|_{L_2[0,t]}^2 + \|\Delta u_x(x, 0)\|_{L_2[0,t]}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\Delta f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. $\Delta u(x, 0) = 0$ ise $\Delta u_x(x, 0) = 0$ olacağından,

$$\|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0,t]}^2 \leq s_2 \left(\|\Delta h\|_{L_2[0,t]}^2 + \|\Delta f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right) = s_2 \|\Delta w\|_w^2, \quad s_2 = 3s_1^2 \quad (3.3.1.14)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.1.7) ifadesine ε – Cauchy eşitsizliğini uygulayarak,

$$|\Delta J(w)| \leq \|u(x, T; w) - y(x)\|_{L_2[0, l]}^2 + \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]}^2 + \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]}^2$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $y(x) \in L_2[0, l]$ verilen bir fonksiyon olduğundan,

$$\|y(x)\|_{L_2[0, l]} = p$$

şeklinde bilinen bir sayıdır.

Bu durumda,

$$|\Delta J(w)| \leq s_0 \|\Delta w\|_w^2$$

yazılabilir.

Dolayısıyla Teorem 3.3.1.2 ispatlanmış oldu. Burada s_0 sayısı Δw artımından bağımsızdır

Böylece $J(w)$ fonksiyonelinin W kümesinde sürekli ve dolayısıyla da aşağıdan zayıf yarı sürekliliği ispatlanmış oldu.

Genelleştirilmiş Weierstrass Teoremine göre,

$$J_* = J(w_*) = \inf_w J(w) > -\infty$$

olur ve

$$W_* = \{w \in W : J(w) = J(w_*)\} \neq \emptyset$$

kümesi zayıf kompakttır. Ayrıca W kümesinden alınan herhangi minimalleştirici dizi W_* kümesine zayıf yakınsar.

3.3.2. Eşlenik sınır değer probleminin elde edilmesi

Bu bölümde, fonksiyonelin türevinde kullanılmak üzere problemimize karşılık gelen eşlenik sınır değer problemini çıkaracağız.

Eşlenik sınır değer problemini İskenderov *et al.* (2002) çalışmalarındaki metodu kullanarak elde edelim:

Bunun için u fonksiyonuna,

$$\delta u(x, 0) = 0, \delta u_t(x, 0) = 0, \delta u(0, t) = 0 \text{ ve } \delta u(l, t) = 0$$

şartlarını sağlayan δu artırımını verelim.

Lagrange fonksiyoneli,

$$L(u, w, \eta) = \int_0^l [u(x, T) - y(x)]^2 dx + \int_0^T \int_0^l \eta (-pu_{tt} + (ku_x)_x + f) dx dt \quad (3.3.2.1)$$

şeklinde yazalım.

Bu fonksiyonelin birinci varyasyonu için,

$$\begin{aligned} L(u + \varepsilon \delta u, w, \eta) &= \int_0^l [(u + \varepsilon \delta u)(x, T) - y(x)]^2 dx \\ &\quad + \int_0^T \int_0^l \eta (-p(u + \varepsilon \delta u)_{tt} + (k(u + \varepsilon \delta u)_x)_x + f) dx dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
L(u + \varepsilon \delta u, w, \eta) - L(u, w, \eta) &= \int_0^l \left(u^2 + 2u\varepsilon\delta u + (\varepsilon\delta u)^2 - 2uy - 2\varepsilon\delta u y + y^2 \right. \\
&\quad \left. - u^2 + 2uy - y^2 \right) dx + \int_0^T \int_0^l \eta \{ -p u_{tt} - p\varepsilon\delta u_{tt} \\
&\quad + (k u_x)_x + (k\varepsilon\delta u_x)_x + f + p u_{tt} - (k u_x)_x \\
&\quad - f \} dx dt \\
&= 2 \int_0^l \varepsilon \delta u [u(x, T) - y(x)] dx + \varepsilon^2 \int_0^l \delta u^2 dx \\
&\quad + \varepsilon \int_0^T \int_0^l \eta (-p \delta u_{tt} + (k \delta u_x)_x) dx dt
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\frac{L(u + \varepsilon \delta u, w, \eta) - L(u, w, \eta)}{\varepsilon} &= 2 \int_0^l \delta u [u(x, T) - y(x)] dx + \varepsilon \int_0^l \delta u^2 dx \\
&\quad + \int_0^T \int_0^l \eta (-p \delta u_{tt} + (k \delta u_x)_x) dx dt
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan da

$$\begin{aligned}
\delta L &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(u + \varepsilon \delta u, w, \eta) - L(u, w, \eta)}{\varepsilon} \\
&= 2 \int_0^l [u(x, T) - y(x)] \delta u(x, T) dx \\
&\quad + \int_0^T \int_0^l [-p \delta u_{tt} + (k \delta u_x)_x] \eta dx dt
\end{aligned} \tag{3.3.2.2}$$

şeklinde birinci varyasyon bulunur.

Sağ tarafın ikinci integralindeki terimlere kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^l (-p) \int_0^T \delta u_{tt} \eta dt dx &= \int_0^l (-p) \left\{ \delta u_t \eta \Big|_0^T - \int_0^T \delta u_t \eta_t dt \right\} dx \\
&= \int_0^l (-p) \left\{ \delta u_t \eta \Big|_0^T - \left\{ \delta u \eta_t \Big|_0^T - \int_0^T \delta u \eta_{tt} dt \right\} \right\} dx \\
&= \int_0^l (-p) \delta u_t(x, T) \eta(x, T) dx - \int_0^l (-p) \delta u_t(x, 0) \eta(x, 0) dx \\
&\quad - \int_0^l (-p) \delta u(x, T) \eta_t(x, T) dx + \int_0^l (-p) \delta u(x, 0) \eta_t(x, 0) dx \\
&\quad + \int_0^l \int_0^T (-p) \delta u \eta_{tt} dt dx \\
&= - \int_0^l p \delta u_t(x, T) \eta(x, T) dx + \int_0^l p \delta u(x, T) \eta_t(x, T) dx \\
&\quad + \int_0^T \int_0^l (-p) \eta_{tt} \delta u dx dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^l (k \delta u_x)_x \eta dx dt &= \int_0^T \left\{ k \delta u_x \eta \Big|_0^l - \int_0^l k \delta u_x \eta_x dx \right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{ k \delta u_x \eta \Big|_0^l - \delta u k \eta_x \Big|_0^l - \int_0^l (k \eta_x)_x \delta u dx \right\} dt \\
&= \int_0^T k(l) \delta u_x(l, t) \eta(l, t) dt - \int_0^T k(0) \delta u_x(0, t) \eta(0, t) dt \\
&\quad - \int_0^T k(l) \delta u(l, t) \eta_x(l, t) dt + \int_0^T k(0) \delta u(0, t) \eta_x(0, t) dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^l (k \eta_x)_x \delta u(x, T) dx dt
\end{aligned}$$

olur.

Böylece δL ifadesi,

$$\begin{aligned}
 \delta L = & 2 \int_0^l [u(x, T) - y(x)] \delta u(x, T) dx \\
 & - \int_0^l p \delta u_t(x, T) \eta(x, T) dx + \int_0^l p \delta u(x, T) \eta_t(x, T) dx \\
 & + \int_0^T k(l) \delta u_x(l, t) \eta(l, t) dt - \int_0^T k(0) \delta u_x(0, t) \eta(0, t) dt \\
 & + \int_0^T \int_0^l [-p \eta_{tt} + (k \eta_x)_x] \delta u(x, T) dx dt
 \end{aligned} \tag{3.3.2.3}$$

halini alır.

Minimum değer için $\delta L = 0$ stasyonelik şartı sağlamak zorunda olduğundan δu fonksiyonunun keyfiliğinden yararlanarak $\delta u(x, T)$, $\delta u_t(x, T)$, $\delta u_x(l, t)$ ve $\delta u_x(0, t)$ varyasyonlarının katsayılarını sıfıra eşitleyerek,

$$p \eta_{tt} = (k \eta_x)_x \tag{3.3.2.4}$$

$$\eta(x, T) = 0 \tag{3.3.2.5}$$

$$p \eta_t(x, T) = -2[u(x, T) - y(x)] \tag{3.3.2.6}$$

$$k(0) \eta(0, t) = 0, \quad k(l) \eta(l, t) = 0 \tag{3.3.2.7}$$

sınır değer problemini elde ederiz.

Bu probleme **eşlenik sınır değer problemi** denir.

3.3.3. Fonksiyonelin Frechet türevi ve minimalleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart

Bu bölümde fonksiyonelimizin Frechet anlamında türevlenebildiğini gösterip, bundan faydalanarak bir w_* elemanının optimal çözüm olması için sağlaması gereken şartı ifade edeceğiz.

Teorem 3.3.3.1: (3.1.8) - (3.1.10) şartları sağlansın. Bu durumda $J(w) \in C^1(W)$ fonksiyoneli Frechet türevlenebilirdir.

Üstelik $J(w)$ fonksiyonelinin $w \in W$ elemanındaki Frechet türevi (3.3.2.4) - (3.3.2.7) eşlenik sınır değer probleminin η çözümü vasıtasıyla,

$$J'(w) = \{ \eta(x, t; w), p(x) \eta(x, 0; w) \} \quad (3.3.3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat:

J fonksiyonelinin $w \in W$ elemanında Frechet türevlenebilmesinin tanımı,

$$J(w + \Delta w) - J(w) = \langle J'(w), \Delta w \rangle_w + o(\|\Delta w\|_w^2) \quad (3.3.3.2)$$

şeklindedir.

(3.3.1.6) eşitliğindeki $\Delta J(w)$ artımındaki,

$$2 \int_0^l [u(x, T; w) - y(x)] \Delta u(x, T) dx$$

ifadesini inceleyelim.

Bunun için eşlenik sınır değer problemini Δu ile çarpıp Ω_T bölgesinde integralleyelim,

$$\int_0^l \int_0^T p \eta_{tt} \Delta u dt dx = \int_0^l \int_0^T (k \eta_x)_x \Delta u dt dx$$

olup kısmi integrasyonla,

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^T p \eta_{tt} \Delta u dt dx &= \int_0^l p \left\{ \eta_t \Delta u \Big|_0^T - \int_0^T \eta_t \Delta u_t dt \right\} dx \\ &= \int_0^l p \left\{ \eta_t \Delta u \Big|_0^T - \left[\eta \Delta u_t \Big|_0^T - \int_0^T \eta \Delta u_{tt} dt \right] \right\} dx \\ &= \int_0^l p \eta_t(x, T) \Delta u(x, T) dx - \int_0^l p \eta_t(x, 0) \Delta u(x, 0) dt \\ &\quad - \int_0^l p \eta(x, T) \Delta u_t(x, T) dx + \int_0^l p \eta(x, 0) \Delta u_t(x, 0) dx \\ &\quad + \int_0^l \int_0^T p \Delta u_{tt} \eta dx dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l (k \eta_x)_x \Delta u dx dt &= \int_0^T \left\{ k \eta_x \Delta u \Big|_0^l - \int_0^l k \eta_x \Delta u_x dx \right\} dt \\ &= \int_0^T \left\{ k \eta_x \Delta u \Big|_0^l - \left[\eta k \Delta u_x \Big|_0^l - \int_0^l \eta (k \Delta u_x)_x dx \right] \right\} dt \\ &= \int_0^T k(l) \eta_x(l, t) \Delta u(l, t) dt - \int_0^T k(0) \eta_x(0, t) \Delta u(0, t) dt \\ &\quad - \int_0^T k(l) \eta(l, t) \Delta u_x(l, t) dt + \int_0^T k(0) \eta(0, t) \Delta u_x(0, t) dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^l (k \Delta u_x)_x \eta dx dt \end{aligned}$$

olur.

Bu değerler yukarıdaki eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$\int_0^l p\eta_t(x, T)\Delta u(x, T)dx + \int_0^l p\eta(x, 0)\Delta hdx + \iint p\Delta u_{tt}\eta dxdt = \iint (k\Delta u_x)_x \eta dxdt$$

olur.

Bu eşitlik de düzenlenerek,

$$\iint [p\Delta u_{tt} - (k\Delta u_x)_x] \eta dxdt + \int_0^l p\eta(x, 0)\Delta hdx = \int_0^l 2[u(x, T) - y] \Delta u(x, T) dx$$

şeklinde yazılabilir.

(3.3.1.3) - (3.3.1.5) fark sınır değer problemini de $\eta(x, t)$ ile çarpıp Ω_T bölgesi üzerinden integralleyip bu eşitlikten çıkarırsak,

$$\int_0^l p\eta(x, 0)\Delta hdx + \int_0^T \int_0^l \Delta f \eta dxdt = 2 \int_0^l [u(x, T; w) - y(x)] \Delta u(x, T) dx$$

eşitliğini buluruz.

Bu eşitlikten ve (3.3.1.14) ifadesinden de faydalanarak,

$$\Delta J(w) = \int_0^T \int_0^l \eta \Delta f dxdt + \int_0^l p\eta(x, 0; w) \Delta hdx + o(\|\Delta w\|_w^2)$$

eşitliği ve

$$J'(w) = \{\eta(x, t; w), p(x)\eta(x, 0; w)\}$$

Frechet türevi elde edilir.

Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Şimdi fonksiyonelin minimalleştirilebilmesi için gerek ve yeter şartı şu şekilde ifade edelim:

$W \subset L_2(0,1) \times L_2(0,1)$ kapalı, konveks bir küme ve $J(w) \in C^1(W)$ kümesi konveks bir fonksiyonel ise w_* elemanının J fonksiyonelinin minimumu olması için gerek ve yeter şart,

$$\langle J'(w_*), w - w_* \rangle_w \geq 0, \forall w \in W$$

şeklindedir.

$J'(w)$ türevi, eşlenik problemin $\eta(x, t; w)$ çözümü sayesinde $y(x)$ final verisine ve direk problemin $u(x, t; w)$ çözümüne bağlıdır.

Dolayısıyla,

$$\langle J'(w_*), w - w_* \rangle_w \geq 0, \forall w \in W$$

şartı,

$$\langle \eta(., .; w_*), w - w_* \rangle_w \geq 0, \forall w \in W$$

şartına eşit olacaktır.

Burada,

$$\begin{aligned} \langle \eta(., .; w_*), w - w_* \rangle_w &:= \iint_{\Omega_T} \eta(x, t; w_*) [f(x, t) - f_*(x, t)] dx dt \\ &+ \int_0^l p(x) \eta(x, 0; w_*) [h(x) - h_*(x)] dx \end{aligned}$$

şeklindedir.

3.3.4. Gradyenin Lipschitz sürekliliği ve monoton iterasyon işlemleri

Bu bölümde gradyenin Lipschitz sürekliliğini gösterip, bulunan Lipschitz sabitinden faydalanarak elde edilecek minimalleştirici dizinin, fonksiyoneli minimum değerine yaklaştırdığını ispatlayacağız.

Teorem 3.3.4.1: Teorem 3.3.3.1 teoreminin şartları sağlansın. Bu takdirde $J(w)$ fonksiyoneli için,

$$\|J'(w + \Delta w) - J'(w)\|_w \leq L \|\Delta w\|_w, \quad \forall w, w + \Delta w \in W \quad (3.3.4.1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Burada,

$$L = \sqrt{qs_2}, \quad q := \max \left\{ \frac{2l^2 T}{p_0}, \frac{2p_1^2 l^2}{p_0} \right\}, \quad s_2 = 3 \left(\max \left\{ T \sqrt{\frac{r_0}{p_0}}, \frac{T\sqrt{T}}{p_0\sqrt{3}} \right\} \right)^2 \quad (3.3.4.2)$$

ve

$$\|J'(w + \Delta w) - J'(w)\|_w^2 = \iint_{\Omega_T} [\Delta \eta(x, t; w)]^2 dx dt + \int_0^l [p(x) \Delta \eta(x, 0; w)]^2 dx \quad (3.3.4.3)$$

şeklindedir.

İspat: Eşlenik sınır değer problemini, $w + \Delta w$ artımı için yazalım:

$$\eta_\Delta = \eta(x, t; w + \Delta w)$$

olmak üzere,

$$p(\eta_\Delta)_{tt} = [k(\eta_\Delta)_x]_x$$

$$\eta_\Delta(x, T) = 0$$

$$p(\eta_\Delta)_t(x, T) = -2[u(x, T; w + \Delta w) - y]$$

$$k(0)\eta_\Delta(0, t) = 0, \quad k(l)\eta_\Delta(l, t) = 0$$

problemi elde edilir.

Bundan faydalananarak,

$$\Delta \eta = \eta(x, t; w + \Delta w) - \eta(x, t; w)$$

fonksiyonu için

$$p\Delta \eta_{tt} = (k\Delta \eta_x)_x \quad (3.3.4.4)$$

$$\Delta \eta(x, T) = 0 \quad (3.3.4.5)$$

$$p\Delta \eta_t(x, T) = -2\Delta u(x, T; w) \quad (3.3.4.6)$$

$$k(0)\Delta \eta(0, t) = 0, \quad k(l)\Delta \eta(l, t) = 0 \quad (3.3.4.7)$$

problemi yazılabilir.

Lemma 3.3.4.2: (3.3.4.4) - (3.3.4.7) probleminin $\Delta \eta(x, t)$ çözümü için

$$\frac{2}{l^2} \|\Delta \eta(x, t)\|_{L_2[0, l]}^2 \leq \|\Delta \eta_x\|_{L_2[0, l]}^2, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.3.4.8)$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat: $\Delta\eta(0,t)=0$ olduğundan,

$$\Delta\eta(x,t)=\int_0^x\Delta\eta_\xi(\xi,t)d\xi=\Delta\eta(x,t)-\Delta\eta(0,t)$$

olur.

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinden,

$$|\Delta\eta(x,t)|\leq\sqrt{x}\left(\int_0^x\Delta\eta_\xi^2d\xi\right)^{1/2}\leq\sqrt{x}\left(\int_0^l\Delta\eta_x^2dx\right)^{1/2}=\sqrt{x}\|\Delta\eta_x\|_{L_2[0,l]}$$

eşitsizliği ve buradan

$$|\Delta\eta(x,t)|^2\leq x\|\Delta\eta_x\|_{L_2[0,l]}^2$$

eşitsizliği yazılabilir.

Bu ifadeyi $[0,l]$ aralığında integralleyerek,

$$\begin{aligned}\int_0^l|\Delta\eta(x,t)|^2dx&\leq\int_0^lx\|\Delta\eta_x\|_{L_2[0,l]}^2dx\\&=\|\Delta\eta_x\|_{L_2[0,l]}^2\frac{l^2}{2}\end{aligned}$$

eşitsizliğini ve buradan da

$$\frac{2}{l^2}\|\Delta\eta(x,t)\|_{L_2[0,l]}^2\leq\|\Delta\eta_x\|_{L_2[0,l]}^2,\forall t\in[0,T]$$

eşitsizliğini buluruz.

Böylece Lemma 3.3.4.2 ispatlanmış oldu.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim:

(3.3.4.4) eşitliğinin her iki tarafını $\Delta\eta_t$ ile çarpıp $[0, l]$ üzerinden integralleyip sınır şartlarını kullanırsak;

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[p\Delta\eta_{tt} - (k\Delta\eta_x)_x \right] \Delta\eta_t dx &= 0 \\ \int_0^l \left[p\Delta\eta_{tt}\Delta\eta_t + k\Delta\eta_x\Delta\eta_{xt} \right] dx &= \int_0^l (k\Delta\eta_x\Delta\eta_t)_x dx \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^l \left[p(\Delta\eta_t)^2 + k(\Delta\eta_x)^2 \right] dx \right\} &= k(l)\Delta\eta_x(l,t)\Delta\eta_t(l,t) \\ &\quad - k(0)\Delta\eta_x(0,t)\Delta\eta_t(0,t) \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeyi $[t, T]$ aralığında integrallersek;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ p[\Delta\eta_t(x,t)]^2 + k[\Delta\eta_x(x,t)]^2 \right\} dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ p[\Delta\eta_t(x,T)]^2 \right. \\ &\quad \left. + k[\Delta\eta_x(x,T)]^2 \right\} dx \end{aligned}$$

olup, (3.3.4.6) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \int_0^l (p\Delta\eta_t^2 + k\Delta\eta_x^2) dx &= \int_0^l \frac{4[\Delta u(x,T)]^2}{p(x)} dx \\ \int_0^l \Delta\eta_x^2 dx &\leq \frac{4}{p_0} \int_0^l [\Delta u(x,T)]^2 dx \end{aligned}$$

olur. (3.3.4.8) eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \frac{2}{l^2} \int_0^l \Delta\eta^2 dx &\leq \frac{4}{p_0} \int_0^l [\Delta u(x,T)]^2 dx \\ \|\Delta\eta\|_{L_2[0,l]}^2 &\leq \frac{2l^2}{p_0} \|\Delta u(x,T)\|_{L_2[0,l]}^2, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

yazabiliriz.

Bu eşitsizliğin $[0, T]$ aralığında integralini alarak,

$$\int_0^T \int_0^l [\Delta \eta(x, t; w)]^2 dx dt \leq \frac{2l^2 T}{p_0} \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]}^2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \int_0^l [p(x) \Delta \eta(x, 0)]^2 dx &\leq p_1^2 \int_0^l [\Delta \eta(x, 0)]^2 dx \\ &\leq \frac{2p_1^2 l^2}{p_0} \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]}^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceği açıktır.

Böylece,

$$\begin{aligned} \|J'(w + \Delta w) - J'(w)\|_w^2 &\leq \frac{2l^2 T}{p_0} \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]}^2 \\ &\quad + \frac{2p_1^2 l^2}{p_0} \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]}^2 \end{aligned} \tag{3.3.4.9}$$

ifadesinde

$$q := \max \left\{ \frac{2l^2 T}{p_0}, \frac{2p_1^2 l^2}{p_0} \right\}$$

denirse,

$$\|J'(w + \Delta w) - J'(w)\|_w^2 \leq q \|\Delta u(x, T)\|_{L_2[0, l]}^2$$

yazılabilir.

(3.3.1.14) kullanılarak,

$$\|J'(w + \Delta w) - J'(w)\|_w^2 \leq qs_2 \|\Delta w\|_w^2$$

ve $L = \sqrt{qs_2}$ denirse,

$$\|J'(w + \Delta w) - J'(w)\|_w \leq L \|\Delta w\|_w$$

elde edilir.

Gradyenin Lipschitz sürekliliği ispatlandıktan sonra Hasanov (2007) çalışmasından faydalanarak şu sonuçları elde ederiz:

Teorem 3.3.4.3: W , Hilbert uzayında kapalı ve konveks bir küme olsun.

$J(w) \in C^1(W)$ olmak üzere $\forall w_1, w_2 \in W$ için,

$$\|J(w_1) - J(w_2) - \langle J'(w_2), w_1 - w_2 \rangle\| \leq \frac{L}{2} \|w_1 - w_2\| \quad (3.3.4.10)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $J(w)$ fonksiyoneli için birinci varyasyon formülü,

$$J(w + h) - J(w) = \int_0^1 \langle J'(w + \theta h), h \rangle d\theta$$

şeklinde olup burada $w_1 = w + h$ ve $w_2 = w$ alınırsa,

$$J(w_1) - J(w_2) = \int_0^1 \langle J'(w_2 + \theta(w_1 - w_2)), w_1 - w_2 \rangle d\theta$$

elde edilir. Her iki taraftan,

$$\langle J'(w_2), w_1 - w_2 \rangle$$

terimini çıkarırsak,

$$J(w_1) - J(w_2) - \langle J'(w_2), w_1 - w_2 \rangle = \int_0^1 \langle J'(w_2 + \theta(w_1 - w_2)), w_1 - w_2 \rangle d\theta - \langle J'(w_2), w_1 - w_2 \rangle$$

yazabiliriz.

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinin uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned} \left| J(w_1) - J(w_2) - \langle J'(w_2), w_1 - w_2 \rangle \right| &= \left| \int_0^1 \langle J'(w_2 + \theta(w_1 - w_2)) - J'(w_2), w_1 - w_2 \rangle d\theta \right| \\ &\leq \int_0^1 \|J'(w_2 + \theta(w_1 - w_2)) - J'(w_2)\| \|w_1 - w_2\| d\theta \end{aligned}$$

olup, (3.3.4.1) eşitsizliği de kullanılarak,

$$\left| J(w_1) - J(w_2) - \langle J'(w_2), w_1 - w_2 \rangle \right| \leq L \int_0^1 \theta \|w_1 - w_2\|^2 d\theta = \frac{L}{2} \|w_1 - w_2\|^2$$

elde edilir.

Lemma 3.3.4.4: $\{w^{(n)}\}$ dizisi,

$$w^{(n+1)} = w^{(n)} - \alpha_n J'(w^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

iterasyonu ile elde edilen bir dizi olsun. Burada $w^{(0)}$ verilen başlangıç elemanı ve $\alpha_n = \alpha = \text{sabit} > 0$ şeklindedir.

Bu durumda $\forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için,

$$J(w^{(n)}) - J(w^{(n+1)}) \geq \frac{1}{2L} \|J'(w^{(n)})\|^2, L > 0 \quad (3.3.4.11)$$

yazılabilir.

İspat: (3.3.4.10) ifadesinde

$$w_1 = w^{(n+1)} \text{ ve } w_2 = w^{(n)}$$

alınırsa,

$$J(w^{(n+1)}) - J(w^{(n)}) - \langle J'(w^{(n)}), -\alpha J'(w^{(n)}) \rangle \leq \frac{L}{2} \alpha^2 \|J'(w^{(n)})\|^2$$

$$J(w^{(n+1)}) - J(w^{(n)}) + \alpha \|J'(w^{(n)})\|^2 \leq \frac{L}{2} \alpha^2 \|J'(w^{(n)})\|^2$$

$$J(w^{(n)}) - J(w^{(n+1)}) \geq \alpha \left(1 - \frac{L}{2} \alpha\right) \|J'(w^{(n)})\|^2$$

olur.

Diğer taraftan,

$$q(\alpha) = \alpha \left(1 - \frac{L}{2} \alpha\right)$$

fonksiyonu, maksimumunu $\alpha_* = \frac{1}{L}$ değerinde alır. Maksimum değeri ise

$$q_* = q(\alpha_*) = \frac{1}{2L}$$

şeklindedir.

Bu maksimum değeri yerine yazılırsa,

$$J(w^{(n)}) - J(w^{(n+1)}) \geq \frac{1}{2L} \|J'(w^{(n)})\|^2$$

bulunur.

Teorem 3.3.4.5: W kapalı konveks bir küme ve $J(w) \in C^1(W)$ olsun. Bu durumda,

$$w^{(n+1)} = w^{(n)} - \alpha_* J'(w^{(n)}), \quad \alpha_* = \frac{1}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.4.12)$$

ile tanımlı $\{w^{(n)}\}$ dizisi için $\{J(w^{(n)})\}$ monoton azalan yakınsak bir dizidir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J'(w^{(n)})\| = 0 \quad (3.3.4.13)$$

şeklindedir.

Üstelik,

$$\|w^{(n+1)} - w^{(n)}\|_W^2 \leq \frac{2}{L} [J(w^{(n)}) - J(w^{(n+1)})] \quad (3.3.4.14)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: (3.3.4.12) ifadesinden

$$w^{(n+1)} - w^{(n)} = -\frac{1}{L} J'(w^{(n)})$$

yazılabilir. Buradan,

$$\|w^{(n+1)} - w^{(n)}\|_W^2 = \frac{1}{L^2} \|J'(w^{(n)})\|^2$$

elde edilir.

(3.3.4.11) ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned}\|w^{(n+1)} - w^{(n)}\|_W^2 &\leq \frac{1}{L^2} 2L \left[J(w^{(n)}) - J(w^{(n+1)}) \right] \\ &\leq \frac{2}{L} \left[J(w^{(n)}) - J(w^{(n+1)}) \right]\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Teorem 3.3.4.6: Verilen herhangi bir $w^{(0)} \in W$ başlangıç noktası ile oluşturulmuş $\{w^{(n)}\} \subset W$ dizisi $L_2(\Omega_T) \times L_2(0, l)$ uzayında ters problemin $w_* \in W_*$ yarı çözümüne zayıf yakınsar. Ayrıca $\{J(w^{(n)})\}$ dizisinin yakınsama hızı için,

$$0 \leq J(w^{(n)}) - J(w_*) \leq \frac{2Ld^2}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.4.15)$$

değerlendirmesi geçerlidir.

Burada,

$$d := \sup \|w^{(n)} - w_*\|$$

şeklindedir.

İspat: Biliyoruz ki $W, L_2(\Omega_T) \times L_2[0, l]$ Hilbert uzayında kapalı, konveks bir küme ise $w_* \in W_*$ kümesi; ters problemin yarı çözümlerinden oluşan kapalı, konveks ve sınırlı bir kümedir. Bu durumda minimalleştirici her $\{w^{(n)}\} \subset W$ dizisi bir $w_* \in W_*$ elemanına zayıf yakınsar. Böylece (3.3.4.12) ile tanımlanmış $\{w^{(n)}\} \subset W$ dizisi için $n \rightarrow \infty$ iken,

$$w^{(n)} \rightarrow w_* \in W_*$$

olacaktır.

Yakınsaklık hızını ispat etmek için,

$$a_n = J(w^{(n)}) - J(w_*), \quad w^{(n)} \in W, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dizisini oluşturalım. $J(w)$ fonksiyonelinin konveksliğinden,

$$J(w^{(n)}) - J(w_*) \leq (J'(w^{(n)}), w^{(n)} - w_*)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliği ile

$$a_n = J(w^{(n)}) - J(w_*) \leq \|J'(w^{(n)})\| \|w^{(n)} - w_*\| \leq d \|J'(w^{(n)})\|$$

yazabiliriz. Böylece,

$$a_n^2 \leq 2Ld^2 [J(w^{(n)}) - J(w^{(n+1)})] = 2Ld^2 [a_n - a_{n+1}]$$

olur.

Diğer taraftan,

$$a_n - a_{n+1} \geq \frac{a_n^2}{2Ld^2}$$

olacağından $\{a_n\}$ dizisinin monoton azalan olduğu görülür.

$k = 0, 1, \dots, n-1$ için,

$$\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k a_{k+1}} \geq \frac{a_k^2}{2Ld^2} \frac{1}{a_k a_{k+1}} \geq \frac{1}{2Ld^2} \frac{a_k}{a_{k+1}} > \frac{1}{2Ld^2}$$

yazılabilir.

Bu ifadeyi k üzerinden toplarsak,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right] = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} > \frac{n}{2Ld^2}$$

olur. Böylece,

$$a_n < \frac{2Ld^2}{n} \text{ veya } J(w^{(n)}) - J(w_*) < \frac{2Ld^2}{n}$$

elde edilir.

Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Sonuç olarak, (3.3.4.12) iterasyonları ile fonksiyonelin minimumunu bulmak için bir engel kalmamıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

İlk olarak tezin üçüncü bölümünde, bilinmeyen iki fonksiyonun araştırıldığı ters hiperbolik problem ifade edilmiştir.

Daha sonra ters problemde yer alan hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin genelleştirilmiş çözümü tanımlanarak, bu çözüm için bazı değerlendirmeler elde edilmiştir.

Son olarak ters problemin çözülebilirliği incelenmiştir. Bu son bölüm dört alt kısımdan oluşmaktadır. Alt kısımlarda, ilk olarak ters hiperbolik problemin çözümünün varlığı, incelenen kümenin zayıf kompakt olduğu ve fonksiyonelin ise bu kümede aşağıdan zayıf yarı sürekli olduğu gösterilerek, Weierstrass teoremine göre ispatlanmıştır. İkinci olarak Lagrange çarpanları metodu kullanılarak eşlenik sınır değer problemi elde edilmiştir. Üçüncü de ise bu eşlenik sınır değer probleminin yardımıyla fonksiyonelin Frechet türevi elde edilmiş ve minimumun varlığı için gerek ve yeter şart ispatlanmıştır. Dördüncü kısımda ise fonksiyonelin türevinin Lipschitz sürekliliği ispatlanarak, bulunan Lipschitz sabiti yardımıyla minimalleştirici dizi tanımlanmış ve bu dizinin çözüme zayıf yakınsadığı ispatlanmıştır.

5. SONUÇ

Bu tezde incelenen ters hiperbolik problem, problemin koyuluşu açısından önceki çalışmalardan önemli bir şekilde ayrılmaktadır. Belirlenecek fonksiyon sayısı iki olup, bunlar hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin farklı yerlerinde bulunmaktadır. Yapılan çalışmayla tezde ters hiperbolik problemin çözümünün varlığı, teorik olarak ispatlanmakla birlikte, minimalleştirici dizinin elde edilmesinde önemli rol oynayacak olan Lipschitz sabiti de elde edilmiştir. Bu sabit kullanılarak kolayca minimalleştirici dizi kurulabilmektedir. Literatürde böyle Lipschitz sabitinin elde edildiği bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Hiperbolik problemlerin uygulamalı bilimler arasındaki önemi ve kullanım sahasının genişliği düşünülürse tez, bu alanda yapılacak birçok çalışma için de bir kaynak teşkil edecektir.

KAYNAKLAR

- Bamberger, A., Chavent, G. and Lailly, P., 1979. About the stability of the inverse problem in 1-D wave equations, application to the interpretation of seismic profiles. *Applied Mathematics and Optimization*, 5, 1-47.
- Cipolatti, R. and Lopez, I. F., 2005. Determination of coefficients for a dissipative wave equation via boundary measurements. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 306, 317-329.
- Clason, C., 2006. A direct method for the numerical time reversal of waves in a heterogeneous medium. Ph. D. Thesis, Technische Universitat München, Zentrum Mathematik, München.
- Cohen, J. K. and Bleistein, N., 1977. An inverse method for determining small variations in propagation speed. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) on Control and Optimization*, 32, 784-799.
- Gugat, M., Leugering G. and Sklyar, G., 2005. L^p Optimal Boundary control for the wave equation. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) on Control and Optimization*, 44, (1), 49-74.
- Hasanov, A., 2007. Simultaneous determination of source terms in a linear parabolic problem from the final overdetermination: Weak solution approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 330, (2), 766-779.
- Hunter, J.K. and Nachtergaele, B., 2001. *Applied Analysis*. World Scientific, California, 439.
- Imanuvilov, O. Y. and Yamamoto, O. Y., 2003. Determination of a coefficient in an acoustic equation with a single measurement. *Inverse Problems*, 19, (1), 157-171.
- Isakov, V., 1991. An inverse hyperbolic problem with many boundary measurements. *Communications in Partial Differential Equations*, 16, (6 & 7), 1183-1195.
- İskenderov, A. D., Tagiev, R. G. and Yagubov, G. Ya., 2002. *Optimizasyon Metotlar. Çaşoğlu*, 376, Bakü.
- Ladyzhenskaya, O.A., 1985. *The Boundary Value Problems in Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York, 322.
- Shcheglov, A. Yu. and Viktorova, I. V., 2004. Numerical Reconstitution of a Nonlinear Source in a Hyperbolic Equation. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 25, (1&2), 137-150.
- Stolk, C. and Symes, W. W., 2003. Smooth objective functionals for seismic velocity inversion. *Inverse Problems*, 19, (1), 73-89.
- Yamamoto, M., 1995. Stability, reconstruction formula and regularization for an inverse source hyperbolic problem by a control method. *Inverse Problems*, 11, (2), 481-496.
- Yosida, K., 1980. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 624, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Sinop'un Erfelek ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erfelek'te tamamladı. 1995 yılında yükseköğrenimine başladığı Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1999 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erzurum'un Karayazı ilçesinde Matematik Öğretmeni olarak başladığı görevine, 2000 - 2003 yılları arasında Erzurum Merkez Dereboğazı Köyü İlk Öğretim Okulu'nda devam etti.

2001 - 2002 yılları arasında İngilizce hazırlık sınıfını bitirdikten sonra 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisans öğrenimine başladı.

2003 yılının Haziran ayında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2004 yılında yüksek lisans programını tamamlayıp aynı yıl aynı alanda doktora öğrenimine başladı. Doktora çalışmaları için 2006 - 2007 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde bulundu. Halen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.