

**TOMOGRAFİNİN BİR TERS PROBLEM
OLARAK İNCELENMESİ**

Mehmet ÖZACET

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Murat SUBAŞI
2024**

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

TOMOGRAFİNİN BİR TERS PROBLEM OLARAK İNCELENMESİ
(Examining Tomography as an Inverse Problem)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet ÖZACET

Danışman: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

Erzurum
Ağustos, 2024

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Mehmet ÖZACET tarafından hazırlanan “Tomografinin Bir Ters Problem Olarak İncelenmesi” başlıklı çalışması .././2024 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Uygulama Matematik Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Ömer TARAKCI	
	<i>Atatürk Üniversitesi</i>	
Danışman:	Prof. Dr. Murat SUBAŞI	
	<i>Atatürk Üniversitesi</i>	
Jüri Üyesi:	Dr. Öğretim Üyesi Hakkı GÜNGÖR	
	<i>Ufuk Üniversitesi</i>	
Jüri Üyesi:		
Jüri Üyesi:		

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek lisans tezi olarak Prof. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında sunulan “Tomografinin Bir Ters Problem Olarak İncelenmesi” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	0	30
Kuramsal Temeller	6	30
Materyal ve Yöntem	6	35
Bulgular	1	20
Tartışma	0	20
Tezin Geneli	6	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuk sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Mehmet ÖZACET	Prof. Dr. Murat SUBAŞI
29.7.2024	29.7.2024
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada, çalışma konusunun tayin edilmesinde ve çalışma sürecinin her aşamasında bilgi, tecrübe ve kıymetli zamanını esirgemeyerek sevgi, sabır ve destekle bana rehberlik eden değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Murat SUBAŞI'ya en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan başta Sayın Prof. Dr. Halit ORHAN hocam olmak üzere bütün hocalarıma kıymetli katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam süresince, her zaman yanımda olan ve desteklerini hiç esirgemeyen değerli aileme teşekkür ediyorum.

Ayrıca TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) tarafından yürütülen 2210-A programı kapsamında verdikleri maddi destekler için TÜBİTAK nezdinde Devletime teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet ÖZACET

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOMOGRAFİNİN BİR TERS PROBLEM OLARAK İNCELENMESİ

Mehmet ÖZACET

Danışman: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

Amaç: Bu tezin amacı, tomografiyi matematiksel açıdan bir ters problem olarak ele alıp özelliklerini incelemektir. Tomografi görüntüsü oluşturulurken görüntüyü bulanıklıktan kurtarma çalışmalarını sunmak ve sonrasında tomografi görüntüsünü yeniden oluştururken kullanılan yöntemler arasındaki farklılığı ortaya koymak, hedeflenmiştir.

Yöntem: Tez ile ilgili olarak, kuramsal temel, genel metotlar ve araştırma teknikleri olarak aşağıdakiler kullanılacaktır:

1. Radon dönüşümü, Sinogram ve Fourier dönüşümü kavramlarının kullanılması
2. Geri projeksiyon ve Filtrelenmiş geri projeksiyon yöntemlerinin uygulanması

Bulgular: Bu tezde, X-ışınları geometrisinden yola çıkarak bir nesnenin içinden farklı yoğunluklarla geçen ışınların oluşturduğu projeksiyonlar üzerinden Radon ve Fourier dönüşümleri araştırılarak tomografinin bir ters problem olma durumu incelenmiştir. Tomografinin ters problem olma durumu örnekler üzerinden açıklandıktan sonra Filtrelenmiş geri projeksiyon yöntemi tanımlanmış, tomografik görüntülere Matlab üzerinden uygulama yapılmış ve sonuçları geri projeksiyon sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Sonuç: Medikal görüntüleme bağlamında Tomografi çok önemli bir yere sahip olup, bu alanda çok sayıda çalışma yapılmaktadır. Bu tez çalışması Tomografik görüntüyü yeniden oluştururken kullanılan bazı yöntemlerin görüntüyü bulanıklıktan kurtarmak için ne kadar önemli olduğunu ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: Bilgisayarlı Tomografi (BT), Ters Problemler, Radon Dönüşümü, Fourier Dönüşümü, Sinogram

Ağustos 2024, 59 sayfa

ABSTRACT

MASTER THESIS

EXAMINING TOMOGRAPHY AS AN INVERSE PROBLEM

Mehmet ÖZACET

Supervisor: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

Purpose: The aim of this thesis is to treat tomography as an inverse problem from a mathematical point of view and to investigate its properties. It is aimed to present the efforts to recover the image from blurring during tomography image reconstruction and then to reveal the differences between the methods used to reconstruct the tomography image.

Method: Regarding the thesis, the following theoretical foundations, general methods, and research techniques will be used:

1. Using the concepts of Radon transform, Sinogram and Fourier transform
2. Application of back projection and filtered back projection methods

Findings: In this thesis, starting from the geometry of X-rays, the situation of tomography as an inverse problem is examined by investigating the projections created by rays passing through an object with different densities using Radon and Fourier transforms. After explaining the situation of tomography as an inverse problem through examples, the filtered back projection method is defined, applied to tomographic images using MATLAB, and the results are compared with those of the back projection method.

Results: In the context of medical imaging, tomography holds a very important place, and numerous studies are being conducted in this field. This thesis demonstrates how crucial some methods used in reconstructing tomographic images are in eliminating blurriness.

Keywords: Computed Tomography (CT), Inverse Problems, Radon Transform, Fourier Transform, Sinogram

August 2024, 59 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
GİRİŞ.....	1
Tomografi.....	3
KURAMSAL TEMELLER.....	6
Direkt ve Ters Problem	6
Kötü Tanımlanmış Ters Problemler.....	9
Beer-Lambert Yasası.....	10
Tomografinin Matematiği	15
Radon Dönüşümü.....	17
Radon Dönüşümünün Temel Özellikleri	19
Radon Dönüşümü Örnekleri	19
MATERYAL VE YÖNTEM	24
Görüntüyü Geri Yansıtma (Yeniden Yapılandırma).....	24
Geri Projeksiyon	26
Fourier Dönüşümü	28
Ters Fourier Dönüşümü	29
Fourier Dilim Teoremi (Merkezi Dilim Teoremi)	30
ARAŞTIRMA BULGULARI	33
Filtrelenmiş Geri Projeksiyon	39
Tomografi Görüntüleri Üzerinden Uygulama.....	42
SONUÇ.....	46
KAYNAKÇA	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Ters problemin çözümünün varlığı	7
Şekil 2. Ters problemin çözümünün tekliği	8
Şekil 3. Ters problemin çözümünün kararlılığı.....	9
Şekil 4. X-ışınlarının zayıflaması ve ölçümlerin yorumlanması.....	14
Şekil 5. Sol taraftaki resimde, bir kafanın içinden geçen X-ışını gösteriliyor. Koyu yerler ışının daha çok zayıflatıldığı yerler. Sağ taraftaki grafik ise ışının zayıflamasının nasıl değiştiğini gösteriyor.	14
Şekil 6. BT örneği	15
Şekil 7. Paralel X-ışını geometrisi.....	16
Şekil 8. Shepp Logan Fantom ve Sinogram	16
Şekil 9. $l_{t,\theta}$ doğrusu	17
Şekil 10. θ_1 ve θ_2 için Radon dönüşümü	18
Şekil 11. (0,1) (solda) ve (1,0) (sağda) merkezli küçük ve parlak dairesel disklerin sinogramları sırasıyla sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının grafiklerine benzer.	19
Şekil 12. Temel karenin karakteristik fonksiyonunun sinogramının $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{9}, \theta = \frac{\pi}{4}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ teki kesitleri.	21
Şekil 13. $S = x, y: x \leq 1, y \leq 1$ bölgesinin karakteristik fonksiyonun sinogramı	21
Şekil 15. Veri örnekleme modeli.....	24
Şekil 16. Tomografinin genel konseptinin gösterimi.	25
Şekil 17. (a) örnekteki fonksiyonumuzun Radon dönüşümü sonucu oluşan görüntüsü. (b) ise Radon dönüşümünün tersi (geri projeksiyonu) sonucu oluşan görüntüsü	28
Şekil 18. Merkezi Dilim Teoremi	32
Şekil 19. Tomografinin ters problem olarak gösterilmesi.....	37
Şekil 20. Tomografinin ters problem olarak gösterilmesinin bir modeli	37
Şekil 21. Fourier uzayında örnekleme modeli.....	39
Şekil 22. Bir Karenin 5, 25, 100 ve 1000 yönde geriye yansması	40
Şekil 23. Birinci BT görüntüsüne ait sonuçlar	43
Şekil 24. İkinci BT görüntüsüne ait sonuçlar	44
Şekil 25. Üçüncü BT görüntüsüne ait sonuçlar	45

SİMGELER DİZİNİ

$A(x)$	Ortamın x noktasındaki azalma katsayısı
A^T	A matrisinin transpozu
B	Geri projeksiyon operatörü
ds	Eğrisel integral için yay uzunluğu elemanı
E	Her bir fotonun enerji seviyesi
$\mathcal{R}f$	f fonksiyonunun Radon dönüşümü
Ff	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
F_n	n boyutlu Fourier dönüşüm operatörü
F_n^{-1}	n boyutlu Ters Fourier dönüşüm operatörü
$I(x)$	x noktasındaki fotonların yoğunluğu
$l_{t,\theta}$	Düzlemdeki t, θ parametrelili doğru
$\mathcal{R}$	Radon dönüşüm operatörü
S^1	Birim çember

GİRİŞ

Ters (Inverse) problemler, matematiksel veya bilimsel bir problemde, bir sonuç veya çözüm verildiğinde, bu sonucun veya çözümün hangi başlangıç koşullarına sahip olduğunu belirlemeye çalışan problemlerdir. Başka bir deyişle, bir çözüm veya sonuç verilerek, bu çözümün veya sonucun hangi giriş verileriyle elde edildiğini belirlemek için geriye doğru çalışır.

Ters problemler, birçok farklı alanda karşımıza çıkar. Örneğin, mühendislikte bir yapısal sorunun nedenlerini belirlemek için kullanılır. Tıp alanında, bir hastalığın semptomlarına dayanarak hastalığın nedenini belirlemek için kullanılır. Fizikte, ölçümlere dayanarak bir nesnenin özelliklerini belirlemek için kullanılırlar.

Ters problemler genellikle zor ve karmaşık problemlerdir ve analitik bir çözüme sahip olmayabilirler. Bu nedenle, sayısal yöntemler ve bilgisayar modellemesi gibi yaklaşımlar kullanılarak çözümleri gerekebilir.

Farklı alanlarda ters problemlere birkaç örnek verecek olursak:

Mühendislik: Bir köprüdeki titreşimlerin sebepleri, nedenleri belirlenerek köprünün tasarımının optimize edilmesinde.

Tıp: Bir hastanın belirtileri, laboratuvar testleri ve diğer tıbbi verilerin analizi ile hastalığın nedeni belirlenerek uygun tedavi planı oluşturulmasında.

Fizik: Bir nesnenin yörüngesi veya hareketi, ölçümlere dayanarak o nesnenin kütle ve hızını belirlemek için kullanılarak hesaplanabilmesinde.

Görüntü işleme: Bir resimdeki objelerin özellikleri, resmin işlenmesiyle elde edilen sonuçlara dayanarak belirlenmesinde.

Jeofizik: Bir yerin altındaki yapıların belirlenmesi, yeraltı kaynaklarının tespit edilmesi için jeofiziksel verilerin analizi kullanımında.

Sismoloji: Depremlerin kaynakları, dalgaların seyahatleri ve bunların olası sonuçları, gözlemlere ve ölçümlere dayanarak belirlenmesinde.

Kimya: Kimyasal reaksiyonlarda hangi ürünlerin oluşacağını belirlemek için ters kinetik analizleri kullanılmasında.

Bu örneklerin hepsinde, verilen sonuç veya çıktıya dayanarak başlangıç koşulları veya girdiler belirlenmeye çalışılmaktadır.

Direkt problemler ise belirli girdilerin sonucunda çıktıların hesaplandığı problemlerdir. Bir nesnenin hareketini hesaplamak için nesnenin kütlesi, hızı ve uygulanan kuvvet gibi girdiler kullanılır. Bu girdiler kullanılarak, nesnenin konumu ve hızı gibi çıktılar hesaplanır (Mueller ve Siltanen 2012, Engl 1996, Hansen 2010).

Örneğin, bir öğretmen 3 sayısının 5. kuvvetini sorduğunda sonucu 273 olarak hesaplama bir direkt problem olarak değerlendirilsin. Diğer yandan öğretmen 3 sayısının bir kuvvetinin 273 olduğunu söyledi ama kuvveti söylerken ne dediğini tam duyamadım. Acaba kaçınıcı kuvvetini söylemiş olabilir? diye kurulan sonuçtan sebebi bulma problemi direkt problem için bir ters problemidir.

Manavda alışveriş yapıyoruz. Elmanın kilosu 10 TL, muzun kilosu 15 TL olsun. Bir kilo elma ve bir kilo muz alırsak ne kadar ödememiz gerekir diye bir direkt problem kurabiliriz. Diğer yandan aynı manavdan alışveriş yapıp çıktığımızı düşünelim. Bir miktar elma ve muz aldık ve 160 TL ödedik. Acaba aldığımız elma ve muz kaç kg olabilir? diye kurulan sonuçtan sebebi bulma problemi yine bir ters problemidir.

Başka bir örnek verelim. Türev konusu anlatılıyor. e^{-2x} fonksiyonunun türevi nedir? sorusu gerekli işlemleri yaparak sebepten sonuca gitme şeklinde kurulmuş bir direkt problem iken hangi fonksiyonun türevi $\sin 2x$ fonksiyonudur? sorusu da sonuçtan sebebi bulma şeklinde türev işleminin tersini kullanmayı gerektiren bir ters problem olacaktır.

Bunun gibi matematiksel örneklerin yanı sıra günlük yaşamda da bazı değerlendirmeler direkt problem olarak düşünüldüğünde bu değerlendirmelerde sonuçtan sebebi tahmin etme merakı da ters problem olarak yorumlanabilir. Mesela normal şartlar altında, saat 23:00 de yattığınızda sabah kaçta kalkarsınız? bir direkt problem olarak düşünüldüğünde, yine normal şartlar altında sabah 10:00 da kalktığınıza göre akşam kaçta yatmışsınızdır? tahmini bu durumla alakalı bir ters problemidir.

Başka bir örnek verelim. Kahvenizi hazırlarken her zaman kullandığınız fincana bir kaşık şeker atarsınız bu hali ile tadı tam sizin istediğiniz gibidir. Burada şeker miktarı sebep iken tadını beğenmeniz sonuç olarak değerlendirilebilir. Şimdi kabul edelim ki kahvenizi başka biri hazırladı ve siz tadını beğenmediniz bu durumda ne kadar şeker atmış olabilir diye merak etmeniz de sonuçtan sebebi ölçmeye yönelik bir ters problemidir.

Bu gibi örnekler ters problemlerin yaşamın her sahasında var olan bir problem türü olduğunu göstermektedir. Öyle ki bir her durumda bir sonuca bakıp onun sebeplerinden birini veya birkaçını merak edebiliriz. Uygun matematiksel işlemlerle bu sebepler ortaya çıkarıldığında son derece faydalı neticeler elde edilebilir. Mesela tıpta kullanılan görüntüleme

cihazlarında bu yaklaşım söz konusudur. Herhangi bir organdaki bozukluk sebebiyle sağlığımızda kötü sonuçlar meydana gelir. Görüntüleme cihazlarında ses veya radyasyon dalgaları o organa gönderilerek dalgaların organa giriş ve çıkış oranları sonuç olarak kabul edilir. Bu değerler makul aralıkların dışında ise hastalığa o organdaki bir bozukluğun sebep olduğu kabul edilir. Böylece hastalık teşhisi uzun ve yorucu işlemlere gerek kalmadan birkaç dakikada yapılabilir. Böyle bir durumda sonuç olarak düşünülen dalga boylarının giriş ve çıkış değerlerinin oranı iken sebep olarak düşünülen de organdaki bozukluğun(kitlenin) yeri olabilir. Böylece yine bir ters problem ortaya çıkmıştır. Bu bozukluğun organdaki konumunu belirlemek için vücuda gönderilen dalgaların giriş ve çıkış oranlarının yer aldığı matematiksel operatörler tanımlanır. Bu noktadan sonra tanımlanan operatör denklemler incelenip elde edilecek çözüm yani ters problemin çözümü olan veriler, söz konusu organdaki bozukluğun(kitlenin) yerinin konumu olur.

Bütün bunlar düşünüldüğünde ters problemlerde kullanılacak matematiksel işlemlerin daha iyi anlaşılıp sonuçların daha az hata ile elde edilmesi büyük bir öneme sahiptir.

Tomografi

Tıbbi görüntüleme, insan vücudundaki iç yapıları görüntülemek için kullanılan bir teknolojidir. Tıbbi görüntüleme yöntemleri, öncelikle 20. yüzyılın ortalarında geliştirilmiştir. İlk tıbbi görüntüleme yöntemi, röntgen ışınlarıydı. Röntgen ışınları, insan vücudundaki farklı dokuların farklı yoğunluklara sahip olması nedeniyle farklı şekillerde geçerler ve bu nedenle bir film üzerinde görüntülenerek farklı yapıların görüntülenmesine izin verirler. Ancak, röntgen ışınlarının sağlık riskleri ve yetersiz çözünürlükleri nedeniyle, tıbbi görüntüleme yöntemleri hızla geliştirildi. 1960'larda, manyetik rezonans görüntüleme (MR) ve bilgisayarlı tomografi (BT) gibi yeni teknolojiler ortaya çıktı.

Bilgisayarlı tomografi, X-ışını ışınlarının kullanımı ile vücut kesitlerinin oluşturulduğu bir tıbbi görüntüleme yöntemidir. İlk BT taramaları, 1972 yılında yapıldı (Kayıpmaz ve Sezgin, 2016). Bu taramaların çözünürlükleri düşüktü ve yavaş çalışıyorlardı. Ancak, teknolojiye gelişmeler sayesinde, modern BT taramaları, ışınların farklı açılardan nesneye uygulanması ve verilerin bilgisayarda işlenmesi sayesinde hızlı ve yüksek çözünürlüklü hale geldi.

Tomografi, tıp alanında hastalıkların teşhisinde ve tedavisinde önemli bir rol oynamaktadır. Tomografik görüntüleme teknolojileri, manyetik rezonans görüntüleme (MR) ve bilgisayarlı tomografi (BT) gibi farklı tekniklerle nesnenin iç yapısına ilişkin farklı bilgileri toplayabilir. Bu veriler, matematiksel modelleme ve algoritmalar kullanılarak nesnenin iç yapısı hakkında tahminler yapmak için kullanılabilir.

Tomografi teknolojileri, nesnenin iç yapısına ilişkin verileri toplarlar, ancak bu verilerin doğru şekilde görüntülenmesi için önce bilgisayar tarafından işlenmesi gerekir. İşlenmiş veriler, matematiksel modellere ve algoritmalara dayanarak nesnenin iç yapısı hakkında tahminler yapmak için kullanılır.

BT'nin temel prensibi, bir X-ışını kaynağından çıkan ışınların, vücut içindeki dokulara nüfuz ederek bir dedektör tarafından algılanmasıdır. BT, bu ışınların sayısını ölçerek ve bilgisayar algoritmalarını kullanarak vücut kesitlerini oluşturur. Yapılan bu işlemler Radon dönüşümü adı verilen matematiksel bir yöntemle dayanır. Radon dönüşümü, X-ışınlarının nesnenin içinden geçmesi sırasında kaydedilen yoğunluk verilerini matematiksel olarak ifade eden bir dönüşümdür. Bu dönüşüm, nesnenin yoğunluğu ile ışınların yönü arasındaki ilişkiyi açıklayan bir integral transformasyondur. Bu yöntem, X-ışınlarının vücut içindeki farklı dokulardan geçişleri sırasında emilimlerinin değişmesi nedeniyle farklı yoğunluklarda radyasyon emilimleri oluşur. Bu radyasyon emilimleri, bir dizi ışın demeti (projeksiyon) halinde ölçülür ve her bir projeksiyon, bir sinogram adı verilen bir grafiksel görüntü olarak kaydedilir.

Sinogramlar, bilgisayar algoritmaları kullanılarak, her bir projeksiyondan geçen X-ışınlarının, vücut kesitindeki her bir noktaya düşen X-ışını miktarını tahmin etmek için kullanılır. Bu süreç, Ters Radon Dönüşümü olarak adlandırılır ve görüntüleme işlemi için gerekli olan kesit bilgilerini elde etmek için kullanılır. Ters Radon dönüşümü, sinogram verilerini kullanarak, nesnenin iç yapısını tahmin etmek için kullanılan matematiksel bir işlemdir. Bu işlem, bir nesnenin yoğunluk dağılımını, sinogram verilerini kullanarak tahmin eder. Sonuç olarak, BT, bir dizi kesit görüntüsü oluşturur ve bu görüntüler, dokuların yoğunluğu ve X-ışınlarının emilim derecesi gibi faktörlere göre renklendirilir veya gri tonlamalı olarak gösterilir.

Tomografi, bir nesnenin iç yapısını görüntülemek için kullanılan bir tıbbi görüntüleme tekniğidir. Ancak, tomografi aynı zamanda bir tür ters problem olarak kabul edilir. Görüntü oluşturma işlemi, bir ters problem olarak adlandırılır çünkü nesnenin iç yapısı, ölçülen yoğunluklardan geriye doğru hesaplanarak elde edilir. Bu da nesnenin iç yapısını tam olarak tanımlamak için bazı varsayımların yapılmasını gerektirir. Bunun için geri projeksiyon ve filtrelenmiş geri projeksiyon gibi yöntemler Fourier dönüşümü yardımıyla uygulanır.

Invers(ters) problem, bilinen çıktı verilerine dayanarak girdi verilerinin tahmin edilmesidir. Tomografinin bir invers problem olması, tahmin sürecinde belirsizlik ve hata ile ilişkilidir. Bu, özellikle doğru ve hassas bir görüntü elde etmek için matematiksel modeller ve algoritmaların doğru şekilde yapılandırılması gerektiğini gösterir. Örneğin, hava alanındaki bir

nesnenin görüntülenmesi, nesnenin yoğunluğu, şekli ve boyutu gibi birçok farklı faktöre bağlıdır. Bu nedenle, tomografi teknolojilerinin doğruluğunu ve hassasiyetini artırmak için matematiksel algoritmaların ve görüntü işleme tekniklerinin sürekli olarak geliştirilmesi gereklidir (Kak ve Slaney 2001, Jiang and Wang 2003, Cierniak 2011, Herman 1980, 2009).

KURAMSAL TEMELLER

Direkt ve Ters Problem

X ve Y birer vektör uzay olmak üzere $K: X \rightarrow Y$ operatörünü ele alalım.

Verilmiş bir $f \in X$ elemanından Kf elemanını bulma problemi direkt problem iken verilmiş bir $g \in Y$ elemanından $Kf = g$ eşitliğini sağlayan $f \in X$ elemanını bulma problemi ters problem olarak adlandırılır.

Bazı matematiksel direkt ve ters problem örnekleri:

a) Bir $K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümünü ele alalım. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisi bu dönüşüme

karşılık gelen matris olsun.

Direkt Problem:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ için $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ elemanını bulma

Ters Problem:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ için $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ elemanını bulma

b) $L: L^2[0; \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ Laplace dönüşümünü ele alalım.

Direkt Problem:

$L(t) = \int_0^\infty e^{-st} t dt$ eşitliği ile t fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulma

Ters Problem:

$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s}$ eşitliğini sağlayan $f(t)$ fonksiyonunu bulma

c) $C([0,1])$, $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonların ve $C^1([0,1])$ uzayı da $[0,1]$ aralığında tanımlı kendisi ve birinci türevi sürekli olan fonksiyonların uzayı olsun.

$K: C^1([0,1]) \rightarrow C([0,1])$, $Ku = u'$ operatörünü ele alalım.

Direkt Problem:

$\sin x \in C^1([0,1])$ için $K(\sin x) = (\sin x)' \in C([0,1])$ elemanını bulma

Ters Problem:

$e^{2x} \in C([0,1])$ için $Ku = u' = e^{2x}$ eşitliğini sağlayan $u \in C^1([0,1])$ elemanını bulma

d) $g''(s) = f(s)$; $g(0) = g(1) = 0$ sınır-değer problemini ele alalım

Direkt Problem:

Verilmiş bir $f(s)$ fonksiyonuna karşılık sınır şartlarını sağlayan $g(s)$ fonksiyonunu bulma

Ters Problem:

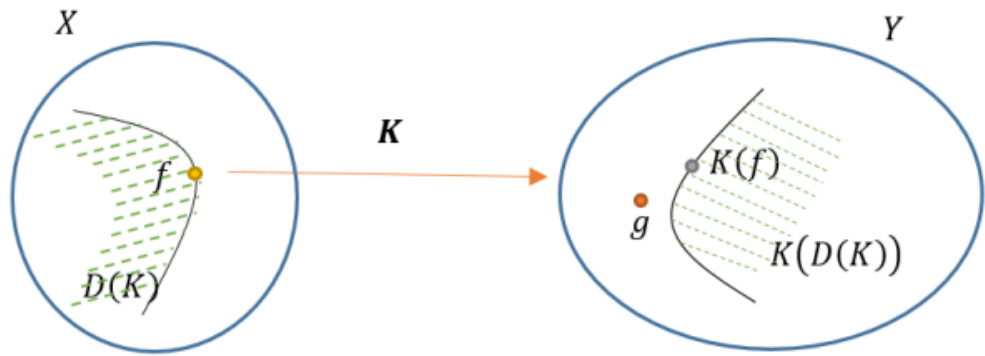
Sınır şartlarını sağlayan verilmiş bir $g(s)$ fonksiyonu için onun ikinci türevi olan $f(s)$ fonksiyonunu bulma

Şimdi $K: X \rightarrow Y$ operatörü için verilmiş bir $g \in Y$ elemanına karşılık $Kf = g$ eşitliğini sağlayan $f \in X$ elemanını bulma şeklinde tanımlı bir ters problem için bazı kavramlardan bahsedelim.

Çözümün Varlığı

Verilen $g \in Y$ için $Kf = g$ eşitliğini sağlayan en az bir $f \in X$ elemanı varsa bu elemana ters problemin çözümü denir.

K operatörünün tanım kümesi $D(K) \subseteq X$ olsun. K operatörü bu kümedeki elemanları $K(D(K))$ kümesine dönüştürecektir. Verilen $g \in Y$ elemanı aynı zamanda $K(D(K))$ kümesine ait değilse $Kf = g$ eşitliğini sağlayan bir $f \in X$ elemanı mevcut olmayacaktır.



Şekil 1. Ters problemin çözümünün varlığı

Örneğin $K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, K(x, y) = (x + y, x + 2y, x + 3y)$ lineer dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüme karşılık gelen matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ olur.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ için $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ elemanını bulma

probleminde $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K(D(K))$ olup bu problemin bir $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ çözümü vardır.

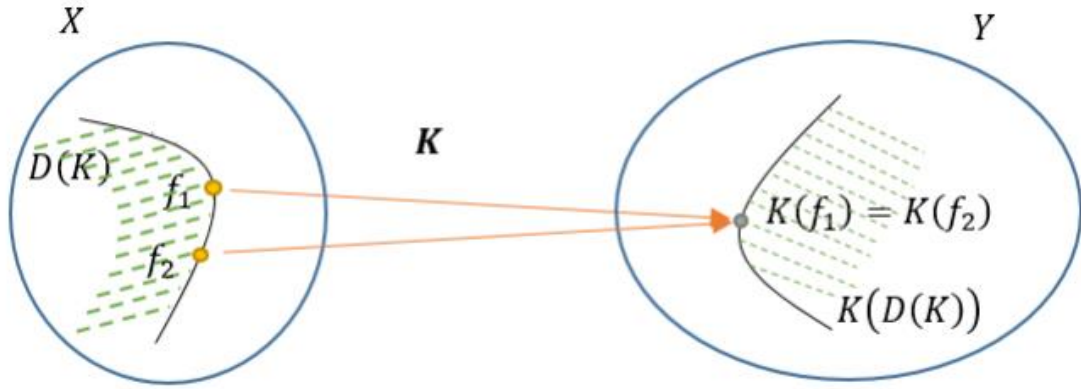
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ için $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ elemanını bulma

probleminde ise $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin K(D(K))$ olup bu problemin bir $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ çözümü yoktur.

Çözümün Tekliği

Verilen $g \in Y$ için $Kf = g$ eşitliğini sağlayan bir tek $f \in X$ elemanının olmasıdır.

$f_1 \neq f_2 \in K$ elemanları için $K(f_1) = K(f_2) = g$ oluyorsa çözüm tek değildir.



Şekil 2. Ters problemin çözümünün tekliği

Örneğin $K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, K(x, y) = (x + 2y, -2x + 4y)$ lineer dönüşümünü ele alalım.

Bu dönüşüme karşılık gelen matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ olur.

$\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ için $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ elemanını

bulma probleminde $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ elemanları birer çözümdür. Dahası bu sistemin sonsuz çözümü vardır.

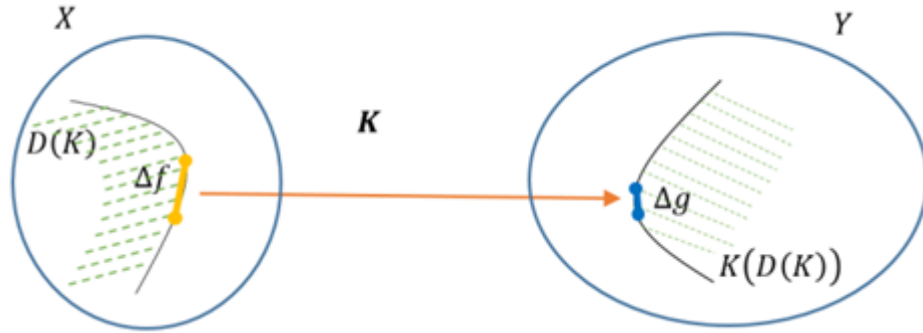
Çözümün Kararlılığı

$K: X \rightarrow Y, Kf = g$ eşitliğinde g fonksiyonundaki küçük değişikliklere karşılık f fonksiyonunda da küçük değişiklikler meydana gelmesidir. Çözümün kararlılığı, ölçülen g

sonucundaki belirsizliklerin ya da sayısal hataların ters problemin çözümü olan f fonksiyonunda büyük değişiklikler meydana getirmemesini sağlar. Çözümün kararlı olması için

$$\|\Delta f\|_X \leq c \|\Delta g\|_Y$$

eşitsizliğini sağlayacak bir c sabitinin bulunması gerekir. Bu eşitsizliğin sağlanması $\|\Delta g\|_Y \rightarrow 0$ için $\|\Delta f\|_X \rightarrow 0$ olmasını da gerektirir. Yani sonuçta yer alabilecek hata ya da gürültü giderildiğinde sebepteki hata ya da gürültü de giderilmiş olur.



Şekil 3. Ters problemin çözümünün kararlılığı

Örnek Problem

$K: C\left(\left[\frac{0,1}{4}\right]\right) \rightarrow \mathbb{R}, Kf = g; \int_0^{1/4} f(t) dt = g$ fonksiyoneli ele alalım ve herhangi bir $g \in \mathbb{R}$ için $\int_0^{1/4} f(t) dt = g$ eşitliğini sağlayan $f(t) \in C(\mathbb{R})$ fonksiyonunu bulma problemini inceleyelim.

Çözümün Varlığı: Herhangi bir $g \in \mathbb{R}$ için $f(t) = 2g\pi \sin 2\pi t$ fonksiyonu $\int_0^{1/4} f(t) dt = g$ eşitliğini sağlar. Böylece ters problemin çözümü vardır.

Çözümün Tekliği: $g = 0$ için $f(t) = \sin 8k\pi t, k = 1, 2, 3, \dots$ fonksiyonlarının hepsi $\int_0^{1/4} f(t) dt = 0$ denklemini sağlar. Yani çözüm tek değildir.

Çözümün Kararlılığı: ε herhangi bir sabit olmak üzere $\Delta g = \frac{\varepsilon}{2k+1}, k = 1, 2, 3, \dots$ sayıları için $\Delta f = 2\varepsilon\pi \sin[(4k+2)\pi t], k = 1, 2, 3, \dots$ çözümleri mevcuttur. $k \rightarrow \infty$ için $|\Delta g| \rightarrow 0$ olmasına karşın $\|\Delta f\|_{C\left(\left[\frac{0,1}{4}\right]\right)} = 2\varepsilon\pi \not\rightarrow 0$ olur. Yani çözüm kararlı değildir.

Kötü Tanımlanmış Ters Problemler

Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa ele alınan probleme iyi tanımlanmış (well-posed) problem denir.

1. Verilen $g \in Y$ için $Kf = g$ eşitliğini sağlayan en az bir $f \in X$ elemanını bulma (çözümün varlığı)
2. Verilen $g \in Y$ için $Kf = g$ eşitliğini sağlayan bir tek $f \in X$ elemanını bulma (çözümün tekliği)
3. $Kf = g$ eşitliğinde g fonksiyonundaki küçük değişikliklere karşılık f fonksiyonunda da küçük değişiklikler elde etme (çözümün kararlılığı)

Bu şartlardan en az biri sağlanmıyorsa probleme kötü tanımlanmış (ill-posed) problem denir. Ters problemler genellikle kötü tanımlanmış problemlerdir. Yukarıda verilen örnek problem de kötü tanımlanmıştır (Engl 1996, Hansen 2010).

Beer-Lambert Yasası

Beer-Lambert yasası, bir X-ışınının bir malzeme içerisindeki yoğunluğuna ve malzemenin kalınlığına bağlı olarak zayıflamasını açıklar. X-ışınları, malzemelerin içinden geçerken zayıflanır ve bu zayıflama, tomografi için önemli bir ilke olarak kullanılır.

X-ışınları, yüksek enerjili elektromanyetik ışınım türüdür. X-ışınları, malzeme içerisindeki elektronlarla etkileşime girer ve emilirler. Bu emilim, ışınımın şiddetinde bir azalmaya neden olur. Beer-Lambert yasası, bu azalmanın yoğunluğunu ve malzeme kalınlığını hesaplamak için kullanılır.

X-ışınları kullanılarak tomografi yaparken, bir nesne üzerine paralel ışınlar gönderilir. Bu ışınlar, nesnenin içinden geçer ve bir dedektör tarafından algılanır. Bu ölçümler, bilgisayar tarafından işlenerek bir görüntü oluşturulur. Bu işlem sırasında, X-ışınları nesne içerisindeki malzemelerden farklı yoğunluklardan geçerler. Daha yoğun malzemeler, daha fazla X-ışını emer ve daha azı dedektöre ulaşır. Bu emilim miktarı, Beer-Lambert yasasına göre hesaplanır ve nesne içerisindeki malzemelerin yoğunluklarına bağlı olarak belirlenir.

X-ray Işınının Zayıflaması

X-ışını bir hastadan ya da nesneden geçerken yoğunluğu azalacak şekilde zayıflar. Bunun derecesi ışının hangi malzemeden geçtiğine bağlıdır; yoğunluk kemikten geçerken kas, iç organ veya tümörden olduğundan daha fazla azalır. Bir x-ışını bir vücuttan geçerken, bunu düz bir çizgi halinde yapar ve toplam soğurulma, içinden geçtiği farklı malzemeler tarafından soğurulma miktarlarının bir kombinasyonudur.

X-ışınının düz bir çizgi boyunca hareket ettiğini ve vücuda s uzaklıkta $l(s)$ yoğunluğuna sahip olduğunu farz edelim.

s arttıkça, x-ışını emildikçe (absorbe) $l(s)$ azalır.

X-ışını küçük bir ds mesafesi kat ederse, yoğunluğu küçük bir dl miktar azalır. Bu azalma hem x-ışınının yoğunluğuna hem de malzemenin optik yoğunluğuna ($f(s)$) bağlıdır.

Yoğunluktaki azalma, optik yoğunlukla ilişkilidir;

$$dl = -f(s)l(s) ds \quad (2.1)$$

Şimdi x-ışınının vücuda(nesneye) girdiği yoğunluğu $I_{giriş}$ (I_0), ayrıldığı(çıktığı) yoğunluk $I_{çıkış}$ (I_1) olsun.

Bu işlem üstel azalmaya tabi düşünülebilir ve sembolik olarak bu süreç aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilebilir;

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

N : miktar
 λ : üstel bozulma sabiti

Bu denklemin çözümü;

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$N(t)$: t zamanındaki miktar
 N_0 : başlangıç miktarı

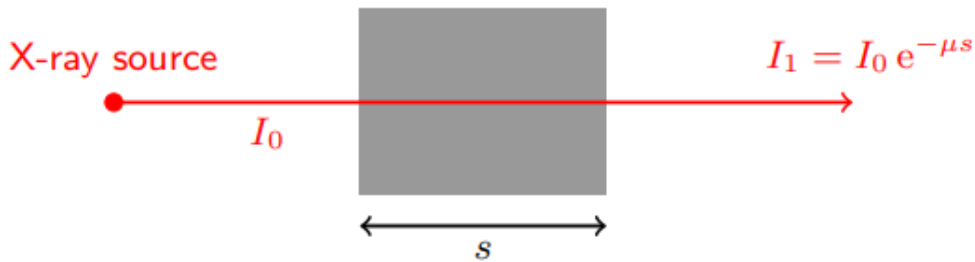
x-ışınının yoğunluğunun azalması;

$$I_1 = I_0 e^{-R}$$

$$R = \int f(s) ds$$

bu bir x-ışının zayıflamasıdır (Anonymous, 2019).

Örneğin; Beer-Lambert yasasına göre homojen bir madde içinden geçen x-ray ışını aşağıdaki şekilde modelleyebiliriz;

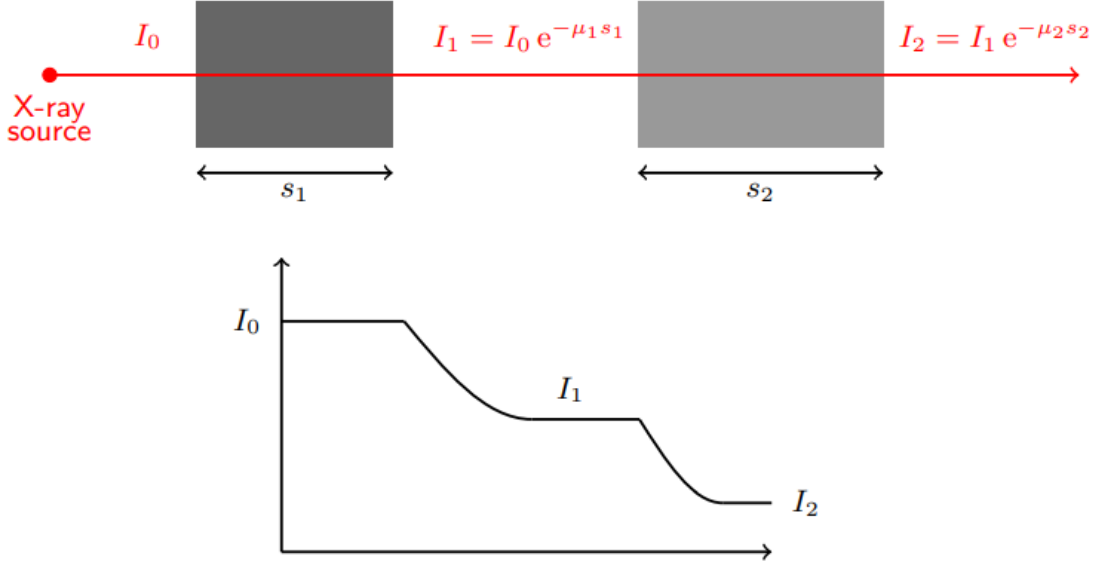


I_0 : x-ray ışınının başlangıç yoğunluğu

I_1 : x-ray ışınının son yoğunluğu

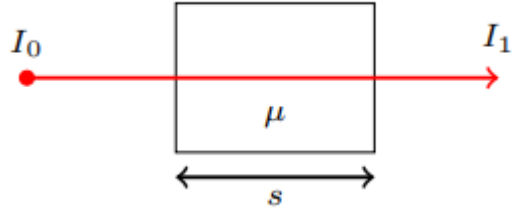
$\mu > 0$: x-ray ışını zayıflama katsayısı

İki homojen bloktan geçen x-ışını ve zayıflama grafiği:



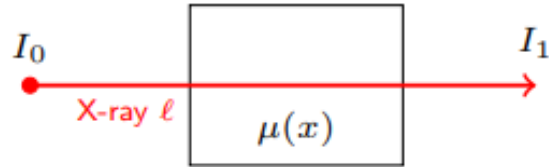
Homojen nesnede x-ışını:

$$I_1 = I_0 e^{-\mu s}$$



Homojen olmayan nesnede x-ışını:

$$I_1 = I_0 e^{-\int_l \mu(x) dx}$$



Bu denklem mevcut haliyle BT için pek kullanışlı görülmemektedir. Zayıflama katsayısı, bir materyalin X-ışınlarını ne kadar zayıflattığının bir ölçüsüdür ve genellikle yoğunlukla doğrusal bir ilişki gösterir. Tomografide, nesnenin içinden geçen X-ışınlarının şiddetindeki azalma, bu zayıflama katsayısıyla ilişkilidir. Ancak, direkt olarak nesnenin iç kısımlarındaki zayıflama katsayılarını ölçmek mümkün değildir. Bu nedenle, amacımız, elde ettiğimiz projeksiyon verilerini kullanarak, nesnenin iç yapısını ve dolayısıyla zayıflama katsayısı dağılımını yeniden oluşturmaktır. Bunun için denklemi biraz değiştirmek gerekmektedir.

Verilen denklemi aşağıdaki şekilde yeniden düzenlersek:

$$I_1 = I_0 e^{-\int_l \mu(x) dx} \iff \ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) = \int_l \mu(x) dx \quad (2.2)$$

elde ederiz.

Buradan elde ettiğimiz (2.2)'deki denklemi aşağıdaki şekilde düzenlersek BT için çok önemli olan Radon dönüşümünün formülüyle bağlantı elde etmiş oluruz.

$$f(x) = \mu(x) \quad , \quad R(f) = \ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right)$$

alındığında,

$$R(f) = \int_l f(x) dx$$

elde edilir.

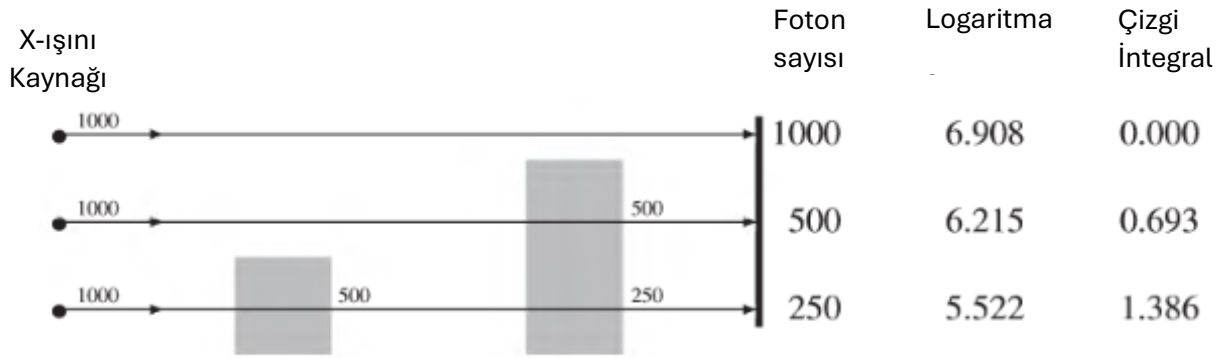
Genel olarak bir tomografik tarama sırasında:

- I_0 kalibrasyondan ve I_1 ölçümünden bilinir.
- $I_1, f(x)$ in belirleneceği nesne boyunca birçok çizgi integral değeri elde etmek için birçok $l(\theta, t)$ doğrusu boyunca ölçülür.
- I_1 in yoğunluğu iletim olarak adlandırılırken, $\ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right)$ e karşılık gelen emilim(absorpsiyon) veya yansıtma(projeksiyon) olarak adlandırılır. Projeksiyonların toplamına da sinogram denir (Bubba, 2019).

Örnek:

Başlangıçta, Şekil 4'te gösterildiği gibi iki levhanın incelendiği bir örnek kullanılarak X ışınlarının üstel zayıflaması gösterilir. X-ışınları, bir tüpün içindeki küçük bir noktadan çıkar. Bu noktaya X-ışını kaynağı denir ve şekillerde siyah bir nokta ile gösterilir. Bir deneyde, başlangıçta 1000 foton içeren üç farklı X-ışını demeti bir detektöre doğru yönlendirilir. Detektör, bu demetlerin her birindeki fotonların, üzerindeki her bir noktaya ulaşma sayısını ayrı ayrı tespit eder ve kaydeder. Işınlardan biri boşluktan detektöre gelir ve 1000 fotonun tamamını iletir. İkinci bir X-ışını demeti, kalınlığı alüminyumun yarı değer kalınlığına eşit olan bir alüminyum levhadan geçirilmektedir. Bu durum, levhaya giren fotonların yaklaşık yarısının levha içinde emilerek zayıflatılacağı anlamına gelir. Üçüncü X-ışını demeti ise, kalınlıkları yarı değer kalınlığına eşit olan iki adet alüminyum levhadan sırasıyla geçirilir. Bu üç X-ışınına sırasıyla boş uzay ışını, tek levha ışını ve iki levha ışını diyoruz.

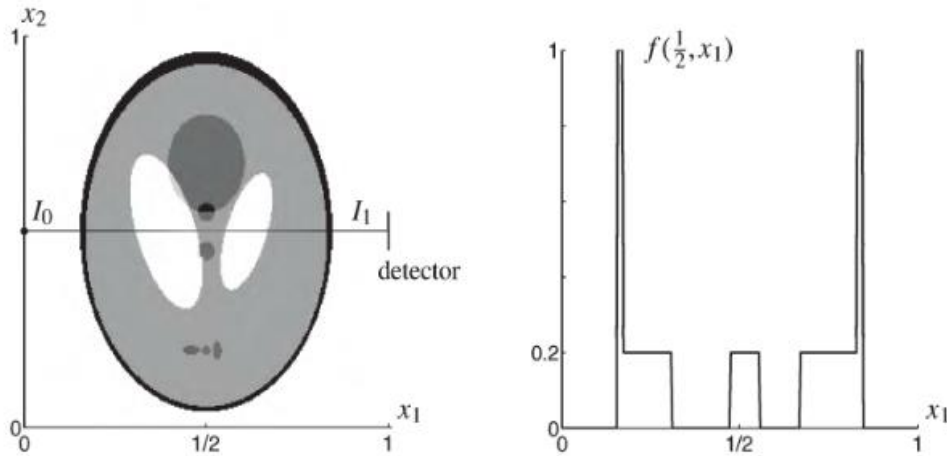
Foton sayısı verileri, basit bir işlemle zayıflama verilerine çevrilir. Önce bu sayıların logaritması alınır, sonra bu değerlerden boş uzay ışınının değeri çıkarılır. Böylece, maddelerin ışığı ne kadar zayıflattığı bulunur. Şekil-4'te görüldüğü gibi, tek levha ışığı için zayıflama 0.693, iki levha için ise bunun iki katı bulunur.



Şekil 4. X-ışınlarının zayıflaması ve ölçümlerin yorumlanması

Şekil 4'teki iki levha örneği, sadece homojen malzeme ile ilgiliydi. Şekil-5'teki gibi, bir insan kafasının basit bir modelini alalım ve bu modele X-ışını göndererek ne olduğunu görelim. Hedef dilimi $0 \leq x_1 \leq 1$ ve $0 \leq x_2 \leq 1$ ile tanımlanan birim karenin içine yerleştirilmiştir. X-ışınının, $0 \leq x_1 \leq 1$ ve $x_2 = \frac{1}{2}$ ile tanımlanan yol boyunca ilerlediğini düşünelim.

Tek tip bir levha yerine, bir başın içinde kemik, beyin gibi farklı şeyler olduğu için X-ışınları farklı şekilde etkilenir. Bunun grafiğini Şekil-5'in sağ kısmında gösterilmektedir (Mueller ve Siltanen,2012).



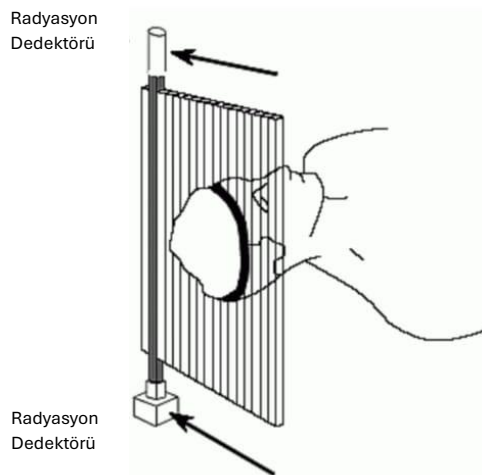
Şekil 5. Sol taraftaki resimde, bir kafanın içinden geçen X-ışını gösteriliyor. Koyu yerler ışının daha çok zayıflatıldığı yerler. Sağ taraftaki grafik ise ışının zayıflamasının nasıl değiştiğini gösteriyor.

Tomografinin Matematiği

Beatty (2012) “Radon dönüşümü ve Medikal Görüntülemenin Matematiği” adlı çalışmasında tomografi ve Radon dönüşümünü aşağıdaki şekilde açıklamıştır.

Tomografi, bir nesnenin ardışık kesitler aracılığıyla görüntülenmesine yönelik matematiksel bir yöntemdir. Tıbbi görüntülemelerde bu kesitler, nesnenin içinden farklı açılarla geçirilen çok sayıda paralel X-ışını demeti ile tanımlanır. X-ışınlarının nesneye girerken ve çıkarken ki şiddetleri ölçülür. Bu ölçümler kullanılarak, nesnenin iç yapısını gösteren bir dizi görüntü oluşturulur.

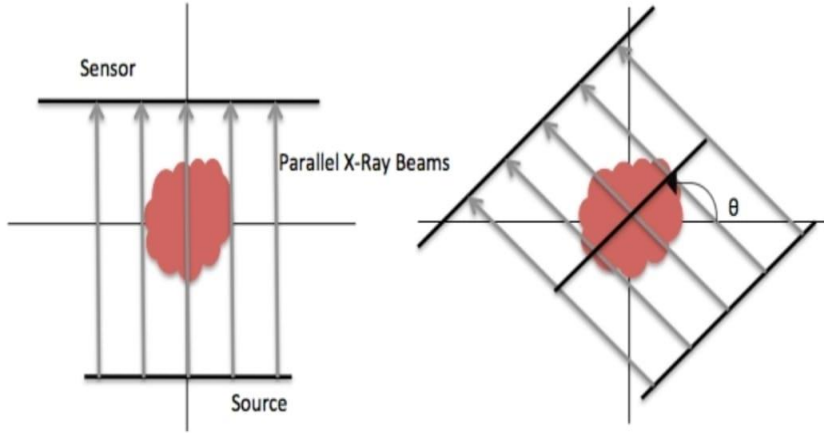
Tomografi, iki veya üç boyutlu bir nesnenin, birçok tek boyutlu 'dilim' aracılığıyla görüntülenmesini sağlayan bir tekniktir. BT (bilgisayarlı tomografi) taramasında, bu dilimler, birbirine dik olan çok sayıda paralel X-ışını ışınlı ile tanımlanır. Şekil-6'da görüldüğü üzere, hastanın başı etrafında tanımlanan bir dilim, tarama işlemi sırasında elde edilen verilerin temsili bir kesitini oluşturmaktadır. BT tarayıcısı, her bir X-ışını demetinin kaynağındaki büyüklüğü (I_0) ve detektörde ölçülen büyüklüğü (I_1) belirleyerek, dokuların zayıflatma katsayılarını hesaplar. X-ışınının şiddetindeki azalma, geçtiği yol üzerindeki madde yoğunluğu ile doğrudan ilişkilidir. Kaynağın ve dedektörün yönünü değiştirerek ve buna karşılık gelen yoğunluk değişimlerini inceleyerek, tek bir kesitin iç yoğunluğu hakkında daha fazla bilgi edinebiliriz. Tek bir dilimdeki projeksiyon verilerini kullanarak elde ettiğimiz bilgi, nesnenin belirli bir kesiti hakkında sınırlı olsa da farklı açılardan alınan birden çok dilimdeki verileri birleştirerek, nesnenin üç boyutlu yapısı hakkında detaylı bir bilgi elde edebiliriz.



Şekil 6. BT örneği

X ışınları, uzayda seyahat eden yüklü parçacıklara bağlı bir enerji türü olan bir tür elektromanyetik radyasyondur. X ışınlarının dalga boyları $0,01$ ila $0,1$ nm ($1\text{nm} = 10^{-9}$ m) arasında olup, karşılık gelen frekanslar 3×10^{16} Hz- 3×10^{19} Hz aralığındadır. X-ışını, madde ile

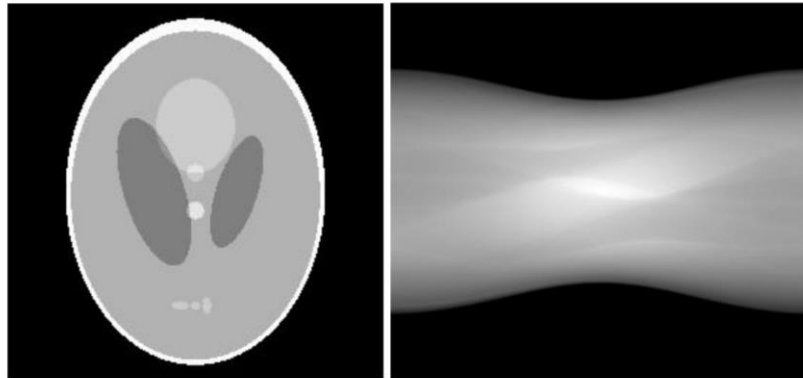
etkileşerek enerji kaybettiği için yoğunluğunda azalma olur. Bir ışın demeti, bir madde içerisinden geçerken şiddetindeki değişim, o maddenin yoğunluğuyla doğrudan ilişkilidir. Bu prensip, maddenin iç yapısını görüntülemek için kullanılan tomografi gibi yöntemlerin temelini oluşturur. Yoğunluğu yüksek olan kemik gibi maddeler, X-ışınlarını daha az yoğun olan insan dokusuna kıyasla daha büyük bir ölçüde zayıflatarak, radyografik kontrastı artırır.



Şekil 7. Paralel X-ışını geometrisi

Bir BT taramasında, tek bir X-ışını demeti vücudun içinden geçerken farklı dokulara (kemik, kan, doku) rastlar. Bu sırada ışının gücü, geçtiği dokunun yoğunluğuna göre değişir. Böylece, ışının başlangıçtaki ve sonradaki gücü ölçülerek görüntü oluşturulur. Tek bir yönde ilerleyen ışın, geçtiği ortamın farklı bölgelerindeki yoğunluk farklılıklarını ayrı ayrı göstermez. Sadece ışığın başlangıçtaki ve sonradaki gücü arasındaki toplam farkı belirtir. Tomografinin temelinde yatan fikir, X-ışını ışınlarının yoğunluğundaki değişiklikleri çeşitli yönlerden ölçerek, başlangıç ortamımızın farklı yoğunluklarını belirlemek için yeterli bilgiyi toplamaktır.

Bu fikir, Şekil 7'de gösterilmektedir; burada birden fazla paralel ışın iki farklı dilim oluşturmaktadır. İlk olarak ışınlar x eksenine dik yerleştirilmiş, daha sonra θ açısıyla döndürülmüşlerdir. Kirişlerin hareket ettiği θ açısı değiştirilerek yeni bir dilim oluşturulabilir.



Şekil 8. Shepp Logan Fantom ve Sinogram

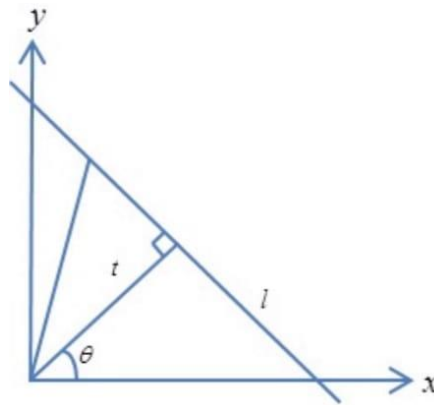
Yoğunluktaki kayıplar, 0 ile 1 arasında bir gri seviyesi değeri ile gösterilir. 0 değeri, ışının hiç zayıflamadığını, 1 değeri ise ışının tamamen soğrulduğunu gösterir. Bu değişken değerler, matematiksel olarak bir araya getirilerek sinogram olarak bilinen bir veri yapısı oluşturur (Şekil 8). Sinogram, BT tarayıcısı tarafından ölçülen yoğunluk kayıplarının grafiksel bir temsidir; burada dikey eksen, çeşitli ışınların başlangıç noktasına olan mesafesini temsil eder ve yatay eksen, dilimin ölçüldüğü açıyı temsil eder. Sinogramdaki her piksel, belirli bir projeksiyon açısı ve dedektör konumu için elde edilen yoğunluk projeksiyonunun bir bileşenini temsil eder. Bir sinogramda verilen bilgilerden orijinal nesnenin yapısı yeniden oluşturulabilmektedir.

Bir görüntüyü yeniden oluşturmak için, X-ışınlarının farklı noktalarındaki yoğunluk değişimlerini ölçerek nesnenin iç yapısını ortaya çıkarmamız gerekir. Ancak, sadece sinogramdaki bilgileri kullanarak nesnenin başlangıç durumunu tam olarak belirlemek çok zordur.

Bir ortamın yoğunluğu, X-ışınlarının ne kadar kolaylıkla nüfuz edebileceğini belirleyen önemli bir faktördür. Yoğunluk arttıkça, X-ışınları daha fazla zayıflar. Ortamın yoğunluğunu, X-ışını ışınının kaybettiği enerji miktarına göre sınıflandırabilmeyi amaçlıyoruz. Bir ortamın bu özelliğine zayıflama katsayısı denir.

Radon Dönüşümü

İki değişkenli bir fonksiyonun Radon Dönüşümü bu fonksiyonun tüm doğrular boyunca integralleri yardımıyla tanımlanabilir.



Şekil 9. $l_{t,\theta}$ doğrusu

Şekil 9 da gösterildiği gibi t , başlangıç noktasından l ye indirilen dikmenin uzunluğu ve θ , bu dikmenin x-ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı olmak üzere denklemdeki her bir doğru

$$l_{t,\theta}: (x(s), y(s)) = (t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta), \quad s \in \mathbb{R}$$

şeklinde verilsin.

$$x = t \cos \theta - s \sin \theta$$

$$y = t \sin \theta + s \cos \theta$$

eşitlikleri dikkate alınırsa $l_{t,\theta}$ doğrusunun denklemi

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta$$

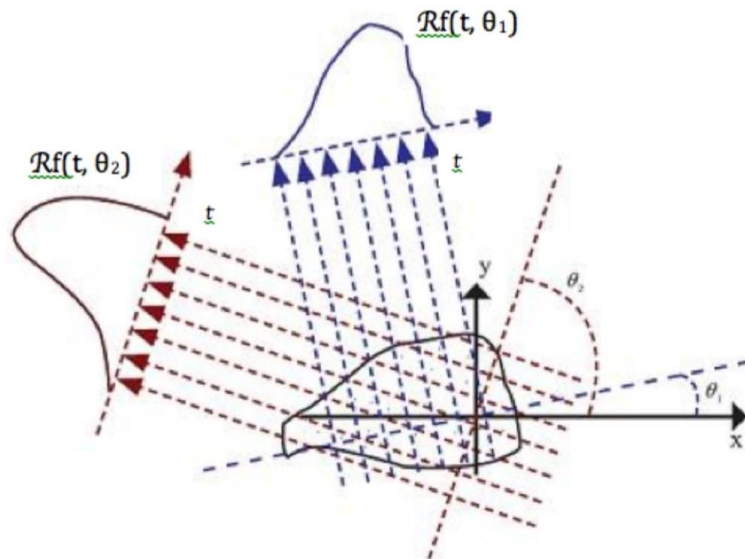
şeklinde yazılabilir.

Tanım (Radon Dönüşümü) : $t \in R$, $\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \in S^1$ (birim çember) olmak üzere, sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun Radon Dönüşümü düzlemdeki tüm $l_{t,\theta}$ doğruları boyunca

$$\mathcal{R}\{f(x, y)\}(t, \theta) = \int_{l_{t,\theta}} f(x, y) ds = \int_{l_{t,\theta}} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

integralleri ile tanımlanır (Sevimli, 2019).

Radon dönüşümü, belirli bir f fonksiyonunun belirli bir l çizgisi boyunca toplam yoğunluğunu belirlemenin bir yolunu sunar. Bu l çizgisi, Şekil-9'da gösterildiği gibi x ekseninden θ açıyla ve orijinden bir t uzaklığıyla belirlenir. Şekil-10'da gösterildiği üzere, Radon dönüşümünü farklı projeksiyon açıları için tekrarlayarak, nesnenin yoğunluk dağılımına ait çoklu projeksiyonlar elde edebiliriz. Şekil 10' da gösterilen damla benzeri bölgenin bir mürekkep lekesi olduğunu varsayalım; eğer bu lekeyi θ_1 yönünde değişen çizgiler boyunca yaydıysak, mürekkep lekesinin daha geniş bölgelerinin daha küçük bölgelere göre daha büyük bir alanı kapsamasını bekleriz ki, bu da tam olarak gözlemlediğimiz durumdur (Beatty, 2012).



Şekil 10. θ_1 ve θ_2 için Radon dönüşümü

Radon Dönüşümünün Temel Özellikleri

a ve b reel sabit, f ve g R^2 sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

i) $\mathcal{R}(af(x) + bg(x)) = a\mathcal{R}f(x) + b\mathcal{R}g(x)$

ii) $\mathcal{R}f(t, \theta) = \mathcal{R}f(-t, -\theta)$

iii) $\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$

Özellik (i) bize Radon dönüşümünün doğrusal olduğunu, (i) çift olduğunu ve (iii) aynı dönüşümden farklı ifadeler oluşturmak için eşdeğer geometrik ifadelerden yararlanır (Beatty, 2012).

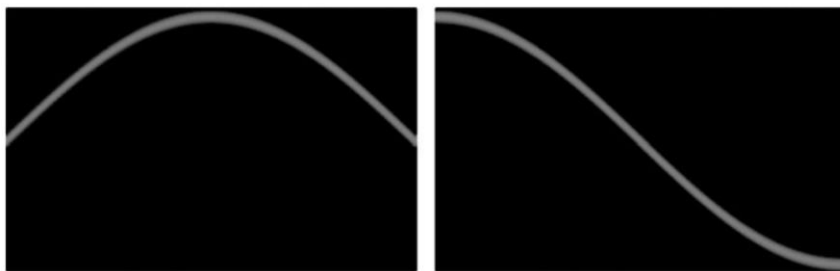
Radon Dönüşümü Örnekleri

Örnek-1

İlk örnek olarak; hastamızın $(0,1)$ noktasında, $0,05$ yarıçaplı küçük dairesel bir tümöre sahip olduğunu ve f azaltma katsayısı fonksiyonunun oradaki değerinin sabit 10 olduğunu varsayalım. Şimdi keyfi bir θ değeri alalım. Bu durumda, $t = \sin(\theta)$ olduğunda, $l_{t,\theta}$ doğrusu $(0,1)$ den geçecek ve dairesel tümörün çapını oluşturacaktır. Bu diskin çapı $2 \cdot (0,05) = 1$ olduğundan $\mathcal{R}f(\sin(\theta), \theta) = 10 \cdot (0,1) = 1$ elde edilir. Ayrıca; herhangi bir θ değeri için, $\mathcal{R}f(t, \theta)$ nin değeri, $\sin(\theta) - 0,05 < t < \sin(\theta) + 0,05$ dar bandı dışında 0 olur.

Böylece θ , 0 'dan π 'ye kadar değiştiğinde, grafik; $t = \sin(\theta)$ merkez civarı, 0.1 genişliğinde daha dar, daha parlak gri bir şerit olarak görülür. Başka bir deyişle, (θ, t) düzlemindeki $\mathcal{R}f$ 'nin grafiği, sinüs fonksiyonunun grafiğine benzeyecektir. Benzer şekilde, $(1,0)$ konumunda bulunan küçük, parlak bir diskin Radon dönüşümünün (θ, t) düzlemindeki grafiği kosinüs fonksiyonunun grafiğine benzeyecektir. Şekil-11, bu iki parlak diskin sinogramlarını göstermektedir.

Bu tür fonksiyonlara bazı terminolojileri eklemek için, varsayalım ki Ω düzlemde sonlu bir bölgede olsun ve $f\Omega$ yı Ω yı içeren her noktada 1 değerine, Ω da olmayan her noktada 0 değerine sahip olan bir fonksiyon olarak ele alalım.



Şekil 11. $(0,1)$ (solda) ve $(1,0)$ (sağda) merkezli küçük ve parlak dairesel disklerin sinogramları sırasıyla sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının grafiklerine benzer.

Bu $f\Omega$ fonksiyonu, Ω bölgesinin karakteristik fonksiyonu veya gösterge fonksiyonu olarak bilinir. Böylece, önceki örneğimizde, küçük bir diskin karakteristik fonksiyonunun 10 katına baktık.

Zayıflama katsayısı fonksiyonu, $f\Omega$ karakteristik fonksiyonu olduğunda; onun Radon dönüşümünün anlaşılması özellikle kolaydır. Gerçekte, herhangi bir lt, θ doğrusu boyunca, $f\Omega$ nin değeri doğrunun değerinin 1 olduğu Ω bölgesinden geçmesi haricinde 0 olacaktır. Dolayısıyla her t ve θ değer çifti için, $\mathcal{R}f\Omega(t, \theta)$ nın değeri, $l_{t, \theta}$ doğrusu ile Ω bölgesi arasındaki kesişme uzunluğuna eşittir.

Genel olarak, test ettiğimiz nesne her biri kendine özgü zayıflama katsayısına sahip çeşitli malzemelerden oluşan “damlalar” ın bir koleksiyonunu içerebilir. Yakında görebileceğimiz gibi tüm koleksiyonun Radon dönüşümü ayrı ayrı damlaların dönüşümlerinin bir bileşimi olacaktır. Sonuç olarak; bu temel örnek türünün anlaşılması, görüntünün yeniden yapılandırılması için, çeşitli yaklaşımların doğruluğunun değerlendirilmesinde merkezi bir rol oynayacaktır (Feeman, 2015).

Örnek-2

$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ fonksiyonunun Radon dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}f(t, \theta) &= \int_{l_{t, \theta}} e^{-x^2-y^2} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t \cos \theta - s \sin \theta)^2 - (t \sin \theta + s \cos \theta)^2} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 \cos^2 \theta + 2t s \cos \theta \sin \theta - s^2 \sin^2 \theta - t^2 \sin^2 \theta - 2t s \cos \theta \sin \theta - s^2 \cos^2 \theta} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - s^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 - s^2} ds
 \end{aligned}$$

$$= e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds$$

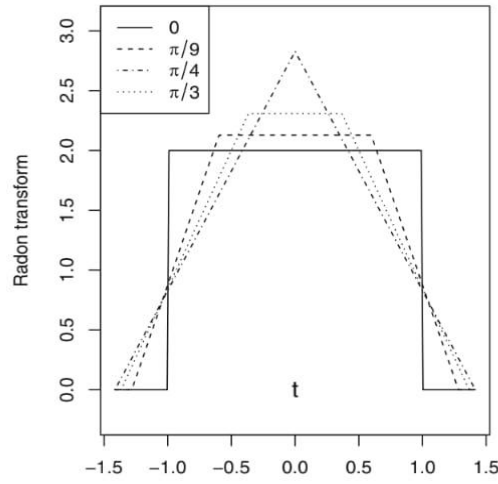
$$= \sqrt{\pi} e^{-t^2}$$

bulunur (Deans,1983).

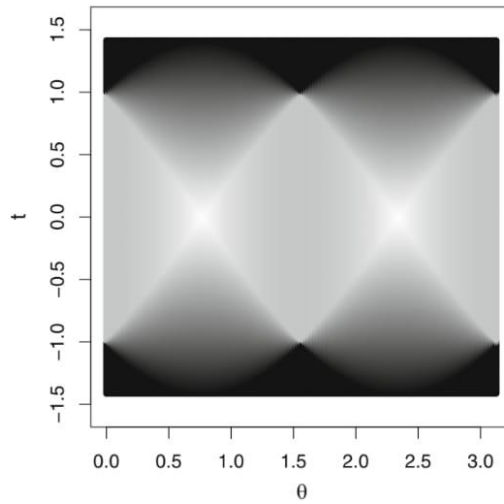
Örnek-3

Karakteristik fonksiyon olmayan bir örnek için, tanımlanan fonksiyon f olsun.

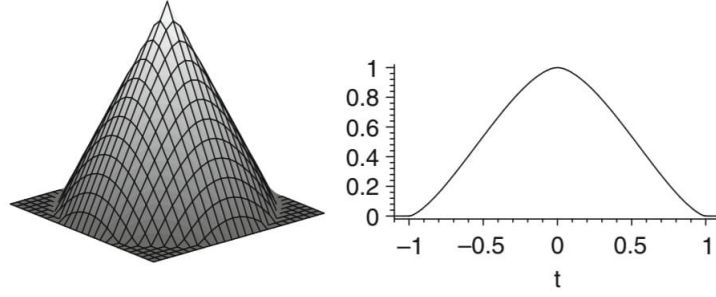
$$f(x,y) := \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , x^2 + y^2 > 1 \text{ ise} \end{cases}$$



Şekil 12. Temel karenin karakteristik fonksiyonunun sinogramının $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{9}, \theta = \frac{\pi}{4}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ teki kesitleri.



Şekil 13. $S = \{(x,y): |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ bölgesinin karakteristik fonksiyonun sinogramı



Şekil 14. Şekil-12 de tanımlanan koniyi ve herhangi bir sabit θ değeri için Radon dönüşümünün grafiğini göstermektedir.

$l_{t,\theta}$ doğrusu üzerinde;

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= (t \cos \theta - s \sin \theta)^2 + (t \sin \theta + s \cos \theta)^2 \\
 &= t^2 \cos^2 \theta - 2ts \cos \theta \sin \theta + s^2 \sin^2 \theta + t^2 \sin^2 \theta + 2ts \cos \theta \sin \theta + s^2 \cos^2 \theta \\
 &= t^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + s^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= t^2 + s^2
 \end{aligned}$$

Buradan $l_{t,\theta}$ doğrusu üzerinde f fonksiyonunun şu şekilde verildiği sonucu çıkar:

$$f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) := \begin{cases} 1 - \sqrt{t^2 + s^2} & , t^2 + s^2 \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , t^2 + s^2 > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Bundan, $\mathcal{R}f(t, \theta)$ değerinin θ ya değil sadece t ye bağlı olduğunu ve $|t| > 1$ olduğunda $\mathcal{R}f(t, \theta) = 0$ olduğunu görüyoruz. $|t| \leq 1$ olacak şekilde sabit bir t değeri için $t^2 + s^2 \leq 1$ koşulu sağlanacaktır. Böylece herhangi bir θ değeri ve $|t| \leq 1$ olacak şekilde uygun bir t değeri için biliyoruz ki,

$$f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) := \begin{cases} 1 - \sqrt{t^2 + s^2} & , -\sqrt{1-t^2} \leq s \leq \sqrt{1-t^2} \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumda} \end{cases}$$

Bu nedenle

$$\int_{l_{t,\theta}} f ds = \int_{s=-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1 - \sqrt{t^2 + s^2}) ds \quad (2.3)$$

Trigonometrik işlemler yapılarak (2.3)' teki integral hesaplandığında

$$\int_{s=-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1 - \sqrt{t^2 + s^2}) ds = \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2} t^2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{1 - \sqrt{1-t^2}} \right) \quad (2.4)$$

Sonuç olarak f fonksiyonunun Radon dönüşümü;

$$\mathcal{R}f(t, \theta) := \begin{cases} \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}t^2 \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{1-\sqrt{1-t^2}} \right) & , -1 \leq t \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , |t| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda $\mathcal{R}f$ nin θ dan bağımsız olduğu durumda $\mathcal{R}f(t, \theta)$ nin değeri $z = f(x, y)$ ile tanımlanan koninin uygun bir dikey kesiti altındaki bölgeye karşılık gelmektedir. Bu kesitlerden birkaçı Şekil-14 de görülmektedir (Feeman, 2015).

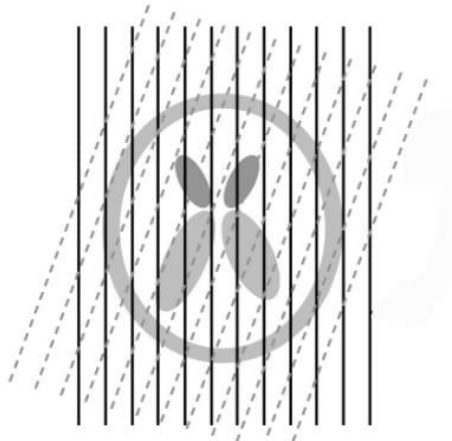
MATERYAL VE YÖNTEM

Görüntüyü Geri Yansıtma (Yeniden Yapılandırma)

Bu bölümde bir tomografi görüntüsünü yeniden yapılandırmaya yönelik incelemeler yapılacaktır. İlk olarak görüntüyü yeniden yapılandırma fikri açıklanacak ardından Ters Radon Dönüşümü olarak da adlandırılan Geri Projeksiyon yöntemi incelenecektir. Son olarak Fourier Dilim Teoreminden bahsedilecektir.

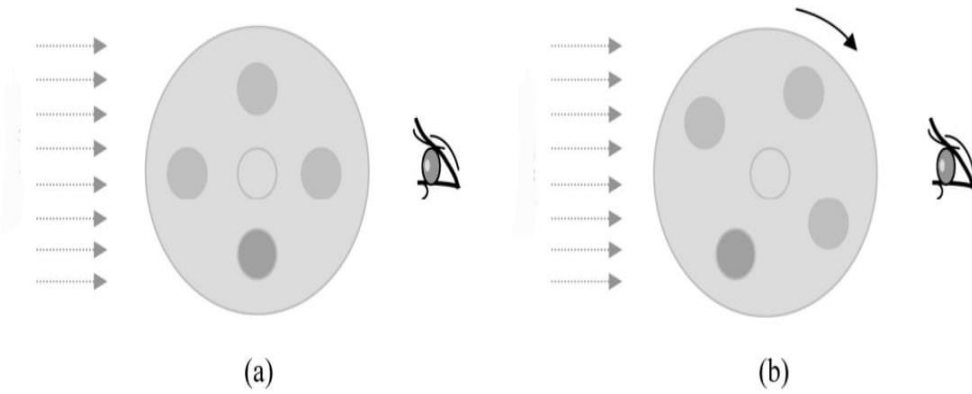
Hsieh (2009) “Bilgisayarlı Tomograafi” adlı kitabının 3.bölümünde görüntüyü yeniden yapılandırmaya fikrini aşağıdaki gibi temellendirmektedir.

Tomografide incelediğimiz nesne, bir matematiksel fonksiyon gibi düşünülebilir. Bu fonksiyon, nesnenin farklı bölgelerindeki yoğunlukları belirtir. X-ışınlarını nesneden geçirip ölçümler aldığımızda, aslında bu fonksiyonun belirli bir çizgi boyunca aldığı değerlerin toplamını ölçmüş oluruz. Bu ölçümleri farklı açılardan ve farklı mesafelerden alarak, nesnenin tamamı hakkında bilgi edinmeye çalışırız. Ölçümleri alırken, gereksiz tekrarlardan kaçınmak için belirli bir sıra izleriz. İlk olarak, Şekil-15’te düz çizgilerle gösterildiği gibi eşit aralıklı paralel yollar boyunca bir dizi ölçüm alıyoruz. Bu ölçümler, nesnenin bir projeksiyonunu oluşturur. Daha sonra, bu projeksiyon işlemini farklı bir açıda tekrarlayarak yeni bir projeksiyon elde ederiz. Bu işlem, teorik olarak sadece 180 derece olması yeterliyken, pratikte 360 derecenin tamamına kadar devam eder. Tüm görüntüleme süreci boyunca, X-ışınları farklı açılardan nesnenin içinden geçirilirken, her bir ardışık görüntü arasında X-ışınlarının yönü sabit bir miktar döndürülür ve nesne hareket ettirilmez. BT yeniden yapılandırma probleminin temel amacı, bu projeksiyon verilerinden nesnenin zayıflatma katsayısı dağılımını tahmin etmektir.



Şekil 15. Veri örnekleme modeli

Yarı saydam bir nesnenin iç yapısını tahmin etmeye çalıştığımızı varsayalım. Nesne, Şekil-16(a) da tasvir edildiği üzere, silindirik bir kabın içerisinde beş küresel parçacıktan meydana gelmektedir. Nesne, yalnızca yanal projeksiyonda incelenebilme sınırlaması nedeniyle, tam bir üç boyutlu yapısal analiz mümkün olmamaktadır. Şekil-16(a) da sunulan sınırlı görüş açısı, ön plandaki kürenin yarı saydam yapısı sebebiyle arka plandaki iki küreyi kısmen örtmesi sonucu, tek bir küre izlenimi vermektedir. Üste binen bölgelerdeki opaklığın, bireysel kürelerin opaklıkları ile doğrusal bir ilişki içerisinde olmaması, görsel analiz yoluyla küre sayısının kesin olarak belirlenmesini zorlaştırmaktadır. Bu durum, yanlışlıkla nesnenin yalnızca üç küreden oluştuğu sonucuna varılmasına neden olabilmektedir. Ancak, Şekil-16(b) de sunulan farklı bir görüş açısı, örtünme nedeniyle gözlemlenemeyen kürelerin varlığını ortaya koymaktadır. Çoklu projeksiyon verileri, nesnenin beş küresel birimden oluştuğunu kesin olarak göstermekle birlikte, bu birimlerin boyut ve yoğunluklarının tüm görüş açılarında sabit kalması, bunların küresel geometriye sahip oldukları hipotezinin güçlendirilmesine katkı sağlamaktadır. Bu deney, yarı saydam bir nesneyi birden fazla açıdan inceleyerek nesnenin iç yapısını tahmin edebileceğimizi gösterir. Bir görüntüleme sisteminde ışık kaynağı olarak X-ışını tüpü, algılayıcı olarak X-ışını dedektörü ve veri işleme merkezi olarak bilgisayar kullanıldığında bir bilgisayarlı tomografi (BT) sistemi oluşturulur. BT'nin temel prensiplerinden biri, incelenen nesnenin farklı açılardan radyografik görüntülerinin elde edilerek üç boyutlu bir rekonstrüksiyonunun yapılmasıdır. Bu süreçte, nesnenin X-ışınlarına karşı belirli bir derecede şeffaflık göstermesi (yarı saydamlık) kritik öneme sahiptir. Zira, tamamen opak bir nesnede, hangi açıdan incelenirse incelenir, iç yapısı hakkında bilgi elde etmek mümkün olmaz. Neyse ki, tıbbi görüntülemede sıklıkla kullanılan yumuşak doku, kemik ve kontrast maddeler gibi materyaller, X-ışınlarına karşı belirli ölçüde şeffaflık özelliği göstermektedir.



Şekil 16. Tomografinin genel konseptinin gösterimi. (a) Yarı saydam bir nesneye bir açıdan bakıldığında bazı iç küreler üst üste gelebilir. Kürelerin ne kadar ışığı engellediğini bilmediğimiz için, kaç tane olduklarını, ne kadar büyük olduklarını ve ne kadar yoğun olduklarını kesin olarak söyleyemeyiz. (b) Nesneyi döndürdüğümüzde, kürelerin oluşturduğu gölgeler birbirinin üzerine düşmez ve her bir küre ayrı ayrı görülebilir. Çoklu görüş açısı kullanılarak elde edilen veriler, incelenen nesnenin özellikleri (şekil, boyut), yoğunlukları ve sayıları hakkında daha kesin ve güvenilir tahminler yapılmasını sağlar.

Bilgisayarlı tomografi (BT) görüntü rekonstrüksiyonu, matematiksel görüntü işleme alanında köklü bir geçmişe sahip, oldukça karmaşık ve disiplinler arası bir konudur. Bu alandaki temel teorik çerçeve, J. Radon'un 1917 yılında ortaya koyduğu, bir fonksiyonun çizgi integralleri üzerinden yeniden inşası problemine yönelik çözümü olan Radon dönüşümü üzerine inşa edilmiştir. 1970'lerin sonu ve 1980'lerin başında klinik uygulamalara yönelik BT sistemlerinin geliştirilmesiyle birlikte, bu alanda kapsamlı bir araştırma faaliyeti başlamış ve günümüze kadar kesintisiz olarak devam etmektedir. Konu hakkında sayısız bilimsel makale, konferans bildirisi, kitap bölümü ve hatta ders kitabı yayınlanmış olup, bu da BT rekonstrüksiyonunun hem akademik hem de endüstriyel açıdan ne kadar önemli bir araştırma alanı olduğunu göstermektedir. Konunun karmaşıklığı nedeniyle, görüntü yeniden oluşturma sürecini tüm yönlerini tek bir bölümde ele almak imkansızdır. Amaç, konunun genel bir görünümünü sağlamak olduğundan bu kısmı burada bitirip, aşağıda yeniden yapılandırma için bazı yaklaşımlar incelenecektir (Hsieh, 2009).

Geri Projeksiyon

Geri projeksiyon fikri ve tanımları için Beatty (2012) ve Feeman (2015) çalışmalarından yararlanılmıştır.

Radon dönüşümünün bize $l_{t,\theta}$ çizgisi boyunca f nin toplam yoğunluğunu verdiğini biliyoruz. Belirli bir çizgi üzerindeki yoğunluk, bu çizgi boyunca gönderilen bir X-ışını demetinin başlangıçtaki ve çizgiden çıktıktan sonraki şiddetlerinin karşılaştırılmasıyla bulunur. X-ışınının çizgi boyunca kaybettiği enerji miktarı, o bölgedeki maddenin yoğunluğuyla doğrudan ilişkilidir. Eğer bu yoğunluk verilerini bir görüntü uzayına projekte edebilirsek, başlangıçtaki nesnenin bir temsilini elde etme olasılığı ortaya çıkar. Bu süreç, sinogram verisinin ters projeksiyonu olarak kavramsallaştırılabilir.

Ancak bu verileri düzleme geri yansıtarken doğru sonuçlar bulmak kolay değildir. Bunun yapılabilmesi, Radon dönüşümünün tersi için Radon dönüşümü ile integralleri alınan fonksiyonun bulunmasına bağlıdır ancak bunun için verilen bir l doğrusu ile (x, y) noktalarının ilişkilendirilmesi gerektiğinden ve (x, y) noktasından sonsuz sayıda doğru geçtiğinden bu hesaplamaları yapmak zordur (Sevimli, 2019).

Düzlemde (x_0, y_0) noktasını seçtiğimizi düşünelim. Bu noktadan birçok doğru geçecektir yada başka bir ifadeyle bu nokta pek çok doğrunun üstünde olacaktır. Aslında, θ nın her değeri için $l_{t,\theta}$ doğrusu (x_0, y_0) dan geçecek şekilde tam olarak bir tane t reel sayısı mevcuttur. Spesifik olarak bu değer $t = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$ olur yani verilen herhangi bir x_0 , y_0 ve θ değeri için $l_{(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta), \theta}$ doğrusu (x_0, y_0) noktasından geçer.

Uygulamada, bazı örneklerde (x_0, y_0) noktasında bulunan madde türü ne olursa olsun, bu noktadan geçen herhangi bir X-ışını ışınının yoğunluğunu etkiler. Artık bu türden her bir ışının θ açısı için $l_{(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta), \theta}$ şeklinde bir çizgi izlediğini görüyoruz. Başka bir deyişle, (x_0, y_0) noktasında maddenin $f(x_0, y_0)$ azalma kat sayısı her bir θ açısı için $\mathcal{R}f(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta, \theta)$ Radon dönüşümünün değerleri ile hesaplanır. $f(x_0, y_0)$ ı bulmanın ilk adımı, bu çizgi integrallerinin (x_0, y_0) dan geçen tüm doğruların ortalaması alınarak ortalama değerini hesaplamaktır. Yani

$$\frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathcal{R}f(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta, \theta) d\theta \quad (3.1)$$

(3.1)' de verilen integrali bulmaktır. Biçimsel olarak bu integral, geri projeksiyon veya geri projeksiyon dönüşümü olarak adlandırılan bir dönüşüm için kullanılır.

Tanım: $h = h(t, \theta)$ tanım kümesi kutupsal koordinatlar olan h fonksiyonunun geri projeksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{B}h(x, y) := \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} h(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

$\mathcal{R}$ nin geri projeksiyonu: Tıbbi görüntüleme bağlamında aşağıdaki eşitlik Radon dönüşümünün tersini (geri projeksiyonu) temsil eder.

$$\mathcal{B}\mathcal{R}f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathcal{R}f(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

Örnek-4:

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , x^2 + y^2 > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Radon Dönüşümünü incelerken Örnek-3'te $-1 \leq t \leq 1$ için şunu hesaplamıştık:

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{s=-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{s=-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1 - \sqrt{t^2 + s^2}) ds$$

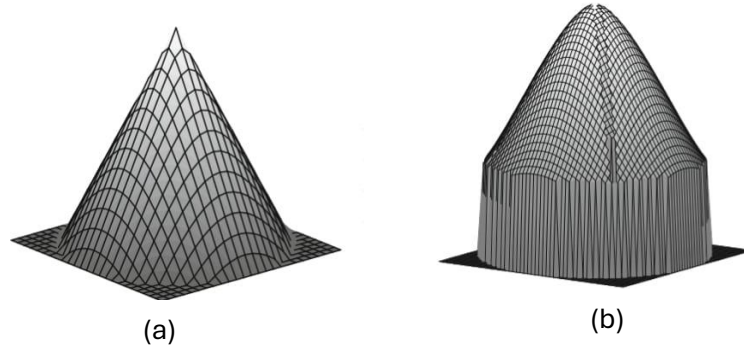
$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \sqrt{1 - t^2} - \frac{1}{2} t^2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{1 - \sqrt{1 - t^2}} \right)$$

$|x \cos \theta + y \sin \theta| \leq 1$ eşitsizliği birim diskteki yalnızca (x, y) noktalarına baktığımız sürece tüm θ değerleri için sağlandığından $t_0 = x \cos \theta + y \sin \theta$ için;

$$\mathcal{BR}f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathcal{R}f(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

$$\mathcal{BR}f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left\{ \sqrt{1 - t_0^2} - \frac{1}{2} t_0^2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - t_0^2}}{1 - \sqrt{1 - t_0^2}} \right) \right\} d\theta$$

bulunur.



Şekil 17. (a) örnekteki fonksiyonumuzun Radon dönüşümü sonucu oluşan görüntüsü. (b) ise Radon dönüşümünün tersi (geri projeksiyonu) sonucu oluşan görüntüsü

Örneğimizde f nin grafiği bir koni iken, geri projeksiyonunun grafiği yuvarlatılmış bir konidir.

Geri projeksiyon yöntemi fonksiyonun (medikal görüntüleme anlamında cismin) gerçek görüntüsünü yansıtmaz; cismin bulanık ve düzgünleştirilmiş bir versiyonunu yansıtır (Feeman, 2015).

Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü, bir nesnenin farklı açılardan alınan projeksiyon verilerini (sinogram) frekans uzayına dönüştürerek analiz edilmesini kolaylaştırır. Frekans uzayında, projeksiyon verileri daha belirgin hale gelir ve işlenmesi daha basit olur. Projeksiyon verileri doğrudan geri yansıtıldığında, görüntüde bulanıklık oluşabilir. Projeksiyon verileri frekans uzayına dönüştürülüp burada uygun filtreler (örneğin, Ram-Lak filtresi) kullanılarak, yüksek frekans

bileşenleri güçlendirilir, düşük frekans bileşenleri zayıflatılır, böylece görüntü netliği artırılmış olur.

Tanım: $\mathbb{R}$ 'de tanımlı integrallenebilir belirli bir f fonksiyonu için, f nin Ff ile gösterilen Fourier Dönüşümü, her ξ gerçek sayısı için şu şekilde tanımlanır:

$$Ff(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (3.2)$$

Fourier dönüşümü sinyal analizinde sıklıkla kullanılır ve bir zaman fonksiyonunu bir frekans fonksiyonuna dönüştürmenin bir yolunu sunar; x değişkeni saniye cinsinden zamanı temsil ederken, ξ değişkeni fonksiyonun Hertz cinsinden frekansını temsil eder. $\omega = 2\pi\xi$ olmak üzere açısal frekansı (ω) kullanan alternatif bir tanım mevcuttur.

$$Ff(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (3.3)$$

(3.3)'te verilen tanım mühendislik ve tıbbi görüntülemede daha yaygın olarak kullanılan form olduğundan, öncelikle Fourier dönüşümünün bu ikinci tanımını ele alacağız (Beatty, 2012).

Ters Fourier Dönüşümü

Tanım: Mutlak integrallenebilir bir f fonksiyonu için, f nin her x reel sayısı için $F^{-1}f$ ile gösterilen ters Fourier dönüşümü şöyle tanımlanır (Beatty, 2012):

$$F^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

Teorem: Ters Fourier Teoremi. Tanım kümesi $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ ve reel doğru üzerinde sürekli olan f fonksiyonu, tüm x ler için (Beatty, 2012);

$$F^{-1}(Ff)(x) = f(x)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım: $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan mutlak integrallenebilir bir g fonksiyonu için, g nin F_2g ile gösterilen 2 boyutlu Fourier dönüşümü tüm $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ için şu şekilde tanımlanır (Beatty, 2012);

$$F_2g(X, Y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} g(x, y) e^{-i(xX+yY)} dx dy$$

Benzer şekilde $\mathbb{R}^2$ de ters Fourier dönüşümü de aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım: $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan mutlak integrallenebilir bir g fonksiyonu için, $F_2^{-1}g(x, y)$ ile gösterilen (x, y) noktasındaki 2 boyutlu ters Fourier dönüşümü şu şekilde verilir (Beatty, 2012):

$$F_2^{-1}g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} g(X, Y) e^{i(xX+yY)} dx dy$$

Fourier Dilim Teoremi (Merkezi Dilim Teoremi)

Merkezi dilim teoremi bize iki boyutlu Fourier dönüşümü ile Radon dönüşümünün tek boyutlu Fourier dönüşümü arasında dikkate değer bir ilişki verir.

Teorem: $\mathbb{R}^2$ de tümü $S \in \mathbb{R}$ ve $\theta \in [0, 2\pi)$ üzerinde tanımlanan mutlak integrallenebilir bir f fonksiyonu için,

$$F_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) = F(\mathcal{R}f)(S, \theta)$$

dır.

İspat: Öncelikle $f(x, y)$ nin iki boyutlu Fourier dönüşümünün şu şekilde verildiğini biliyoruz:

$$F_2 f(x, y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} f(x, y) e^{-iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (3.4)$$

Şimdi Radon dönüşümünü bölümünde tanımladığımız koordinat sistemine göre bir değişken değişimi uyguluyoruz. $l_{t,\theta}$ doğrusunu parametrelendirdiğimizde $s \in \mathbb{R}$ için aşağıdakileri söyleyebiliriz:

$$x(s) = t \cos \theta - s \sin \theta$$

$$y(s) = t \sin \theta + s \cos \theta$$

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$x(s)$ ve $y(s)$ için Jacobian'ın determinantına baktığımızda:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = 1$$

$ds dt = dx dy$ diyebileceğimizi görüyoruz. Bu nedenle (3.4)'teki denklemin sağ tarafını s, t değişkenlerine göre yeniden yazarsak;

$$\iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) e^{-ist} ds dt \quad (3.5)$$

e^{ist} , s ye bağılı olmadığı için (3.5)' te verilen integrali aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \right) e^{-ist} dt \quad (3.6)$$

bulunur.

(3.6) nın iç integral tam olarak $f(t, \theta)$ nın Radon dönüşümü olduğu için bu integrali;

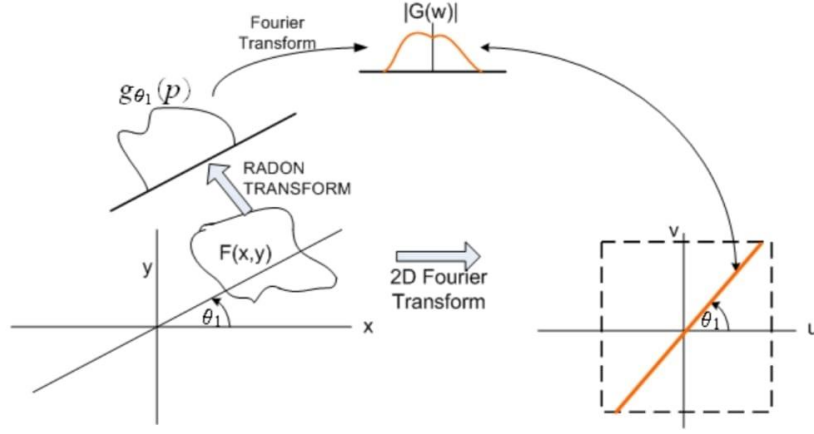
$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{R}f(t, \theta)) e^{-ist} dt \quad (3.7)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu da $\mathcal{R}f(S, \theta)$ nın Fourier dönüşümüdür. Böylece;

$$F_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) = F(\mathcal{R}f)(S, \theta)$$

eşitliğini göstermiş oluruz.

Merkezi dilim teoremi, bir fonksiyonun iki boyutlu Fourier dönüşümü ile bu fonksiyonun projeksiyonlarının tek boyutlu Fourier dönüşümleri (Radon dönüşümleri) arasındaki matematiksel ilişkiyi ortaya koyan temel bir teoremdir. Basitçe ifade etmek gerekirse, teorem; bir fonksiyonun herhangi bir doğru boyunca alınan projeksiyonunun Fourier dönüşümünün, orijinal fonksiyonun iki boyutlu Fourier dönüşümünün bu doğruya paralel olan bir doğrusal çizgi üzerindeki değerlerine eşit olduğunu belirtir. Bu ilişki, Şekil 18'de görsel olarak sunulmuştur. Şeklin sol kısmında bir $F(x, y)$ fonksiyonuyla başlıyoruz ve bir g projeksiyonu elde etmek için Radon dönüşümünü uyguluyoruz ve ardından buna Fourier dönüşümünü uygulayarak turuncu G elde ediyoruz (şeklin üst kısmındaki fonksiyon). Şekil-18 in sağında, $F(x, y)$ nin projeksiyon çizgisine paralel turuncu diliminin iki boyutlu Fourier dönüşümü alınmakta. Bu iki boyutlu Fourier dönüşümü aynı zamanda şeklin üst kısmında gösterilen turuncu G fonksiyonuna da eşittir (Beatty, 2012).



Şekil 18. Merkezi Dilim Teoremi

Örnek-5: $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ fonksiyonu için $F_2 f$ dönüşümünü hesaplandığında;

$$F_2 f(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} e^{-i(ux+vy)} dx dy = \pi e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}$$

bulunur ve

$$F_2 f(Su, Sv) = \pi e^{-\frac{S^2(u^2+v^2)}{4}}$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafına da F^{-1} uygulandığında

$$F^{-1} F_2 f = \frac{1}{2\pi} \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{S^2(u^2+v^2)}{4}} e^{iSt} dS \right)$$

$$F^{-1} F_2 f = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u^2 + v^2}} e^{\left(\frac{-t^2}{u^2+v^2}\right)}$$

elde edilir.

$\mathcal{R}f = F^{-1} F_2 f$ olduğundan

$$\mathcal{R}f(t; u, v) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u^2 + v^2}} e^{\left(\frac{-t^2}{u^2+v^2}\right)}$$

olur.

$u^2 + v^2 = 1$ olmak üzere, $\xi = (u, v)$ olarak tanımlandığında;

$$\mathcal{R}f(t, \xi) = \sqrt{\pi} e^{-t^2}$$

bulunur (Deans, 1983).

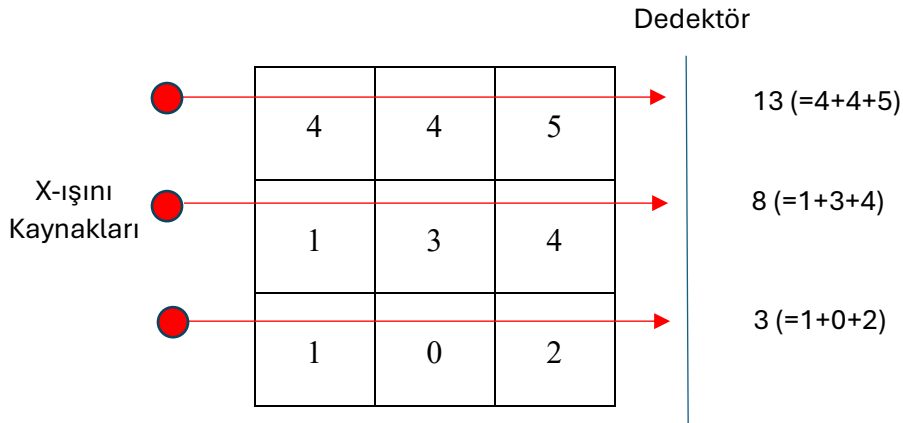
ARAŞTIRMA BULGULARI

Inverse problem, gözlem verilerine dayanarak sistem parametrelerinin veya iç yapısının belirlenmesi gerektiği matematiksel problemleri ifade eder. Tomografi, bir nesnenin iç yapısını belirlemek için dışarıdan yapılan ölçümlere dayanır ve bu nedenle inverse problem olarak ele alınır. Tomografinin inverse problem olarak ele alınması önemlidir çünkü bu yaklaşım, bir nesnenin iç yapısının belirlenmesinde kullanılan matematiksel modelin doğruluğu ve doğru çözümün elde edilmesi için gerekli olan algoritma ve hesaplama yöntemlerinin geliştirilmesi açısından önemlidir.

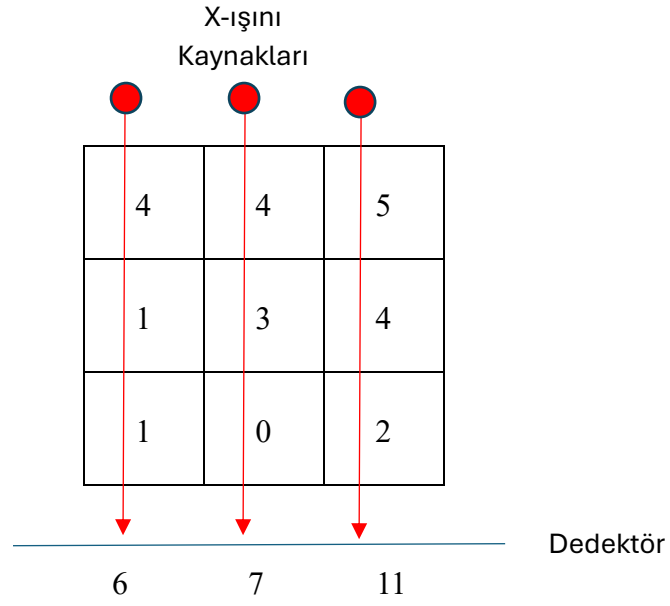
Tomografinin bir ters problem olarak incelenmesi fikri için Siltanen (2016) çalışmalarından yararlanılmıştır.

İki boyutlu basit bir tomografik görüntüleme örneğini inceleyelim.

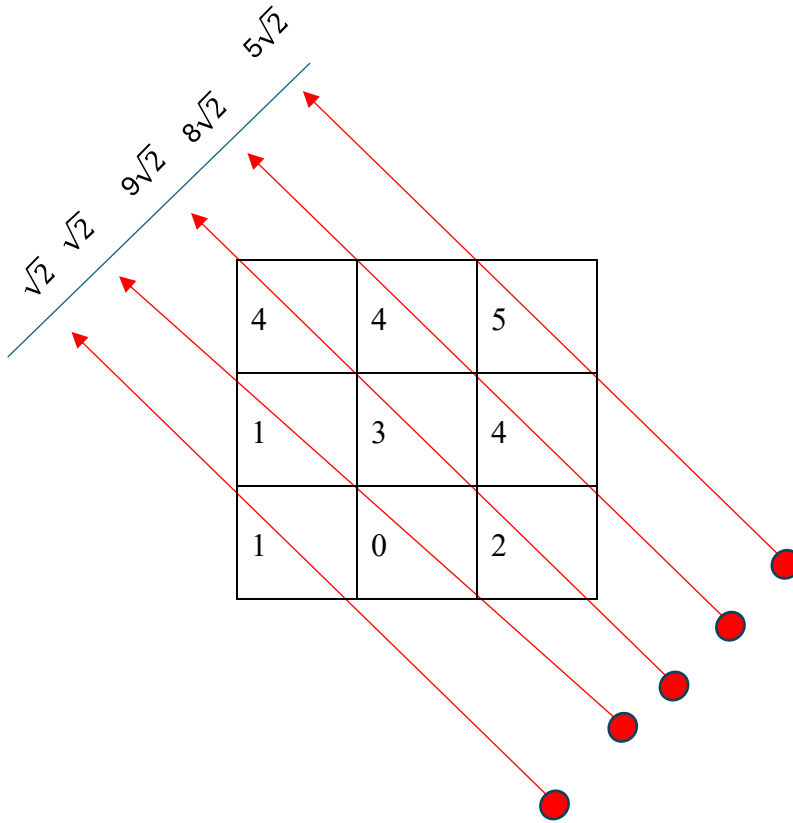
Tomografi, X-ışınlarının madde içerisindeki zayıflama oranlarını ölçerek, maddenin yoğunluk dağılımını belirleme prensibine dayanır. Paralel bir X-ışını demeti, incelenen nesneden geçirilerek, dedektörler yardımıyla projeksiyon verileri elde edilir.



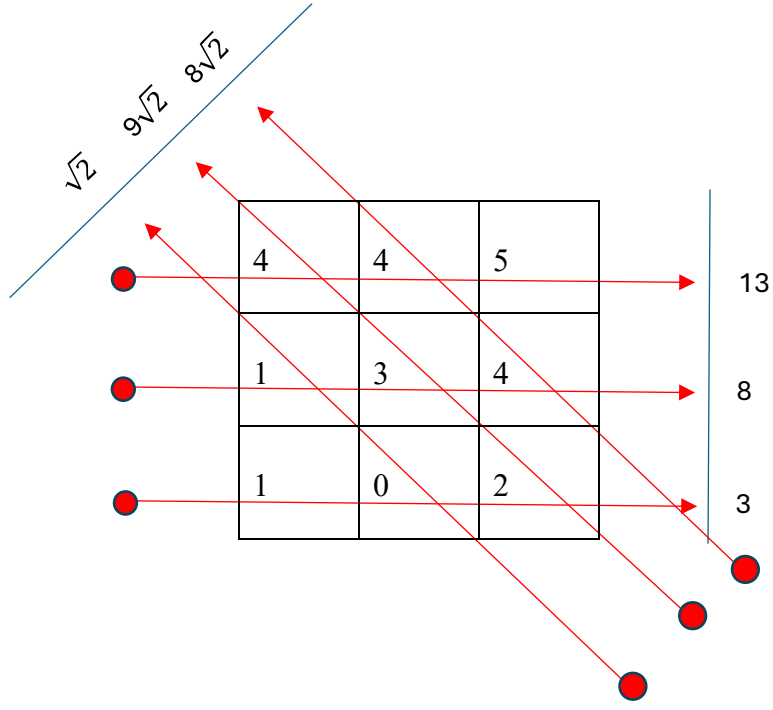
Tomografi görüntüleme için farklı yönlerden projeksiyon görüntülerinin kaydedilmesi esastır.



Her pikselin içinden hareket eden X-ışınlarının uzunluğu önemlidir (aşağıda karekökler).



Burada direkt problem, bilinen dokulardan projeksiyon görüntülerini (X-ışını verilerini) bulmaktır.

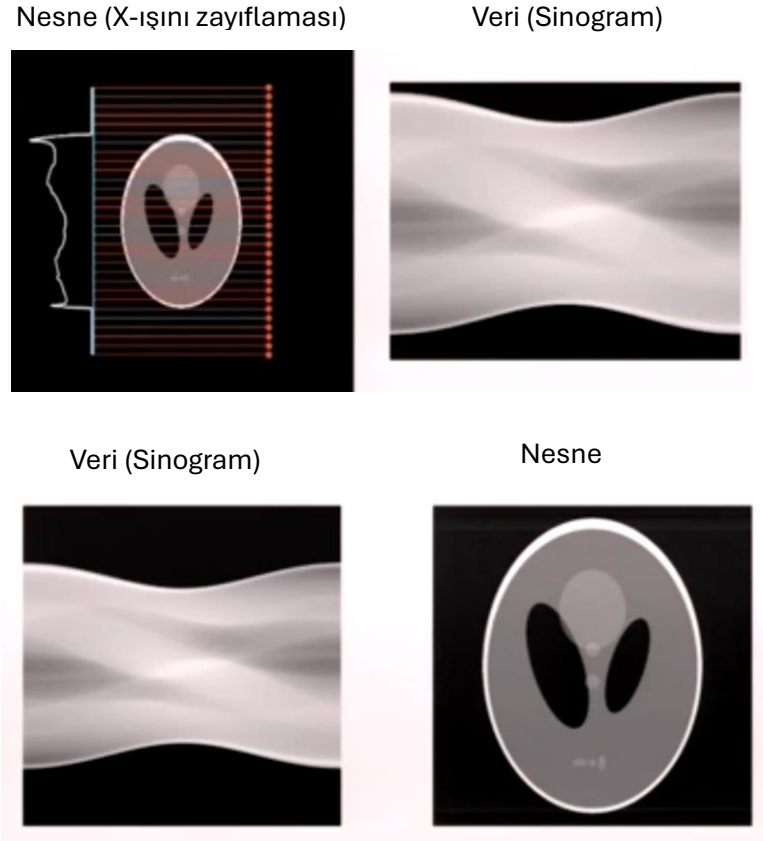


5	6	2
1	5	2
4	0	-1

9	1	3
1	0	7
3	0	0

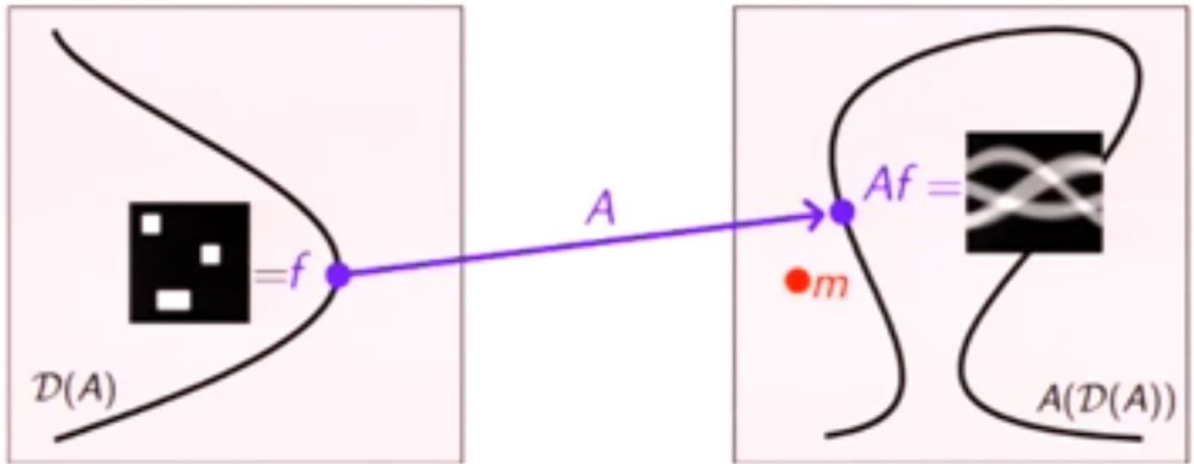
Farklı ölçümlerin aynı verileri verdiğine dair örnekler

Yani bir BT'de nesne verildiğinde verileri belirlemek direkt problemken, veriler verildiğinde (ki bu veriler genelde gürültülü verilerdir) nesneyi belirlemek invers problemidir. Aşağıda verilen şekillerden bunu somut bir şekilde görmekteyiz.



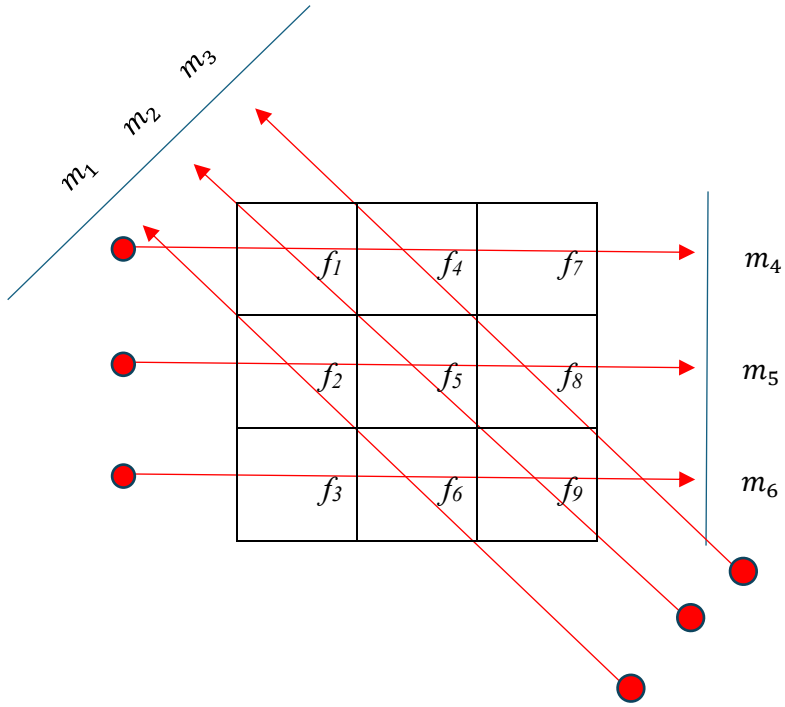
Şekil 19. Tomografinin ters problem olarak gösterilmesi

Bunu matematiksel olarak aşağıdaki şekilde modelleyebiliriz;



Şekil 20. Tomografinin ters problem olarak gösterilmesinin bir modeli

Matris formunda yazacak olursak;



$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix}$$

Ölçüm modeli:

$$m = Af + \varepsilon$$

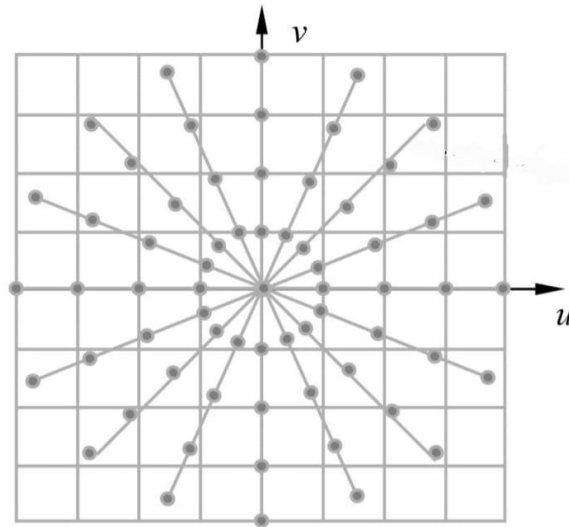
biçiminde gösterilir.

Yukarıda verdiğimiz ölçümün matris denklemini aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

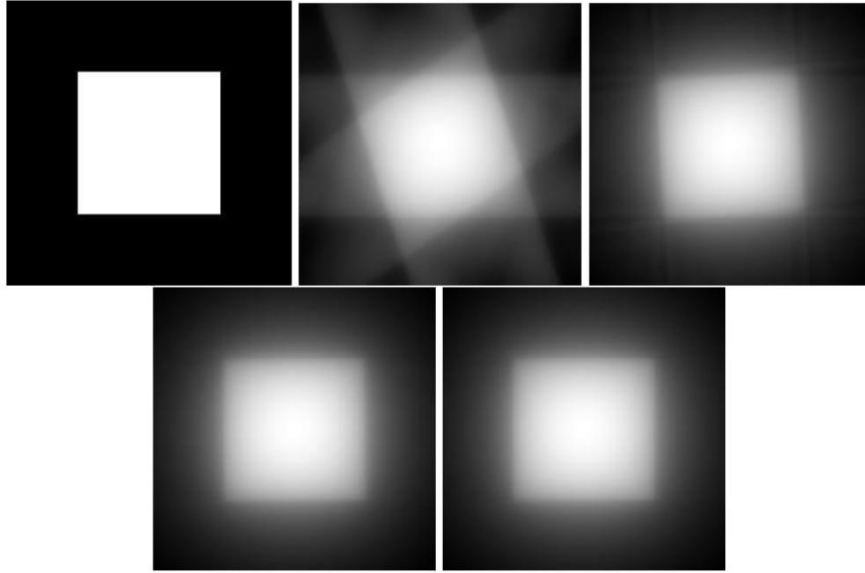
Filtrelenmiş Geri Projeksiyon

Merkezi dilim teoremi, tomografik görüntü yeniden yapılandırma probleminin çözümü için temel bir çerçeve sunmasına rağmen, pratik uygulamalarda önemli bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu zorlukların başında, Fourier uzayında elde edilen örnekleme verisinin Kartezyen koordinat sistemine uymayan kutupsal bir dağılım göstermesi gelir. Teorem gereği, her bir projeksiyonun Fourier dönüşümü, iki boyutlu Fourier uzayında orijinden geçen bir doğru üzerinde yer alır. Dolayısıyla, farklı projeksiyonlardan elde edilen veriler, Şekil-21'da da görüldüğü gibi, Fourier uzayında kutupsal bir örnekleme deseni oluşturur. İki boyutlu ters Fourier dönüşümünü gerçekleştirmek için, bu örneklerin bir Kartezyen koordinata interpolasyonu (yerleştirilmesi) veya yeniden birleştirilmesi gerekir. Fourier uzayında interpolasyon işlemi, gerçek uzaydaki interpolasyondan daha karmaşık ve hassastır. Gerçek uzayda yapılan bir interpolasyon hatası, genellikle sınırlı bir bölgeyi etkilerken, Fourier uzayında yapılan bir hata, tüm frekans bileşenlerini etkilediğinden, elde edilen görüntünün tamamında istenmeyen hataların oluşmasına neden olabilir. Yani, Fourier uzayında tek bir örneğin değeri değiştirildiğinde, bu değişiklik tüm görüntüye yayılır (Hsieh, 2009).



Şekil 21. Fourier uzayında örnekleme modeli

Filtrelenmiş geri projeksiyona olan ihtiyacı şöyle de açıklayabiliriz. Tıbbi görüntüleme bağlamında f , zayıflama katsayısı fonksiyonumuzu temsil ettiğini biliyoruz. Ölçtüğümüz dilimler üzerinden geriye projeksiyon yapabiliyoruz. Şekil-22 de gösterildiği gibi, yalnızca birkaç yönde geri projeksiyon, basit bir nesneyi için bile yeniden oluşturmanın son derece hatalı bir yöntemidir. Bununla birlikte, kullandığımız geri projeksiyonların sayısını önemli ölçüde artırmış olsak bile (örneğin 1000 yönde), yeniden oluşturulan görüntümüzde büyük miktarda bulanıklık ve gürültü hala mevcut olacaktır. Görünüşe göre, ne kadar çok yönde geri projeksiyon yaparsak yapalım, yalnızca geri projeksiyon formülünü kullanarak görüntümüzü mükemmel bir şekilde yeniden oluşturmak mümkün olmayacaktır. Geri yansıtma formülünün resmimizde yarattığı gürültünün bir kısmını filtrelemek ve nesnemizin daha düzgün bir temsilini elde etmek için filtrelenmiş bir geri yansıtma yapmamız gerekiyor (Beatty, 2012).



Şekil 22. Bir Karenin 5, 25, 100 ve 1000 yönde geriye yansması

Aşağıdaki teorem ile uygun bir filtre yardımıyla görüntünün bulanıklığı ortadan kaldırılarak daha orijinal görüntüye daha yakın sonuçlar elde edilir.

Teorem: $\mathbb{R}^2$ de tanımlanan mutlak integrallenebilir bir f fonksiyonu için;

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B}\{F^{-1}[|S|F(\mathcal{R}f)(S, \theta)]\}(x, y)$$

Kanıt: Öncelikle 2 boyutlu Fourier dönüşümü ve tersi için şunu belirtelim:

$$f(x, y) = F_2^{-1} F_2 f(x, y)$$

Eşitliğin sağ tarafı, Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü tanımlarından şöyle yazılabilir;

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} F_2 f(X, Y) e^{i(xX+yY)} dXdY \quad (4.1)$$

bulunur.

Şimdi değişkenleri Kartezyen'den (X, Y) kutupsal koordinatlara (S, θ) değiştirmeyi kullanacağız; burada $S \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, \pi]$ ve

$$X = S \cos \theta$$

$$Y = S \sin \theta$$

olmak üzere; bu, aşağıdaki Jacobian determinantını verir:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = |S|$$

bu bize $dXdY = |S|dSd\theta$ eşitliğinin sağlandığını gösterir. Değişkenlerdeki bu yeni değişiklikleri (4.1)'deki denklemimize uyguladığımızda;

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{0-\infty}^{\pi\infty} F_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS d\theta \quad (4.2)$$

haline gelir. Merkezi dilim teoremini kullanarak (4.2)'deki denklemin aslında şuna eşit olduğunu görüyoruz:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{0-\infty}^{\pi\infty} F(\mathcal{R}f)(S, \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS d\theta \quad (4.3)$$

Şimdi (4.3)'teki denklemin iç integraline daha yakından bakarak ve aşağıdakilere dikkat edecek olursak:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathcal{R}f)(S, \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS \\ f(x, y) &= 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathcal{R}f)(S, \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS \right) \\ f(x, y) &= 2\pi F^{-1}[|S|F(\mathcal{R}f)(S, \theta)](x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \end{aligned}$$

Yani denklemin iç integrali $|S|F(\mathcal{R}f)(S, \theta)$ nın $(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)$ noktasındaki ters Fourier dönüşümünün 2π katıdır. O zaman integralimizi

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F^{-1}[|S|F(\mathcal{R}f)(S, \theta)](xcos\theta + ysin\theta, \theta) d\theta$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi geri projeksiyonun tanımından integralimiz;

$$\frac{1}{2} \mathcal{B}\{F^{-1}[|S|F(\mathcal{R}f)(S, \theta)]\}(x, y)$$

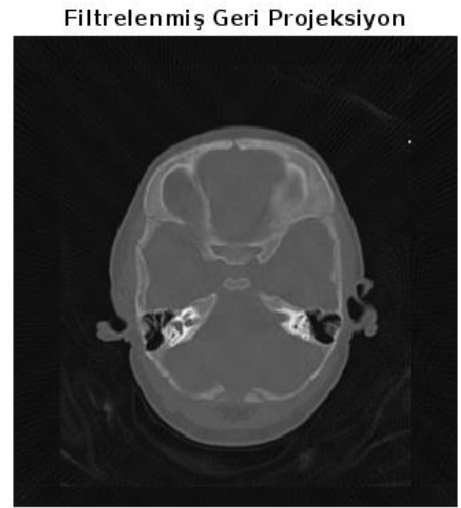
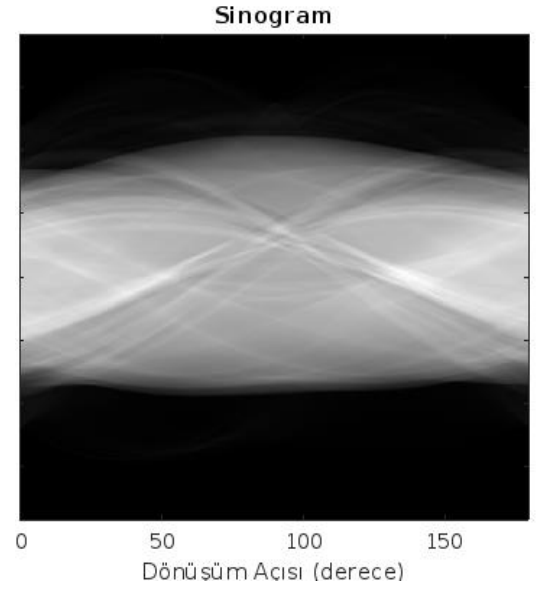
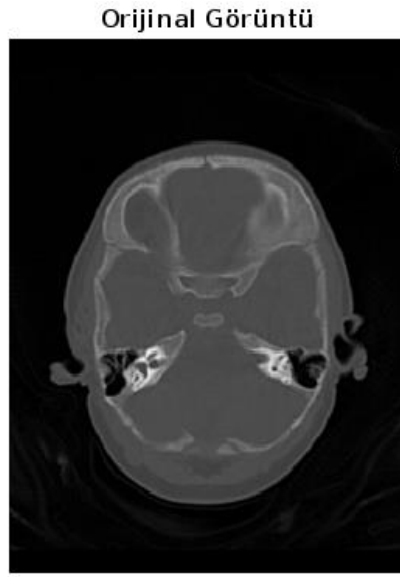
ifadesine eşit olur. Bu da bizi istediğimiz sonuca götürür.

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B}\{F^{-1}[|S|F(\mathcal{R}f)(S, \theta)]\}(x, y)$$

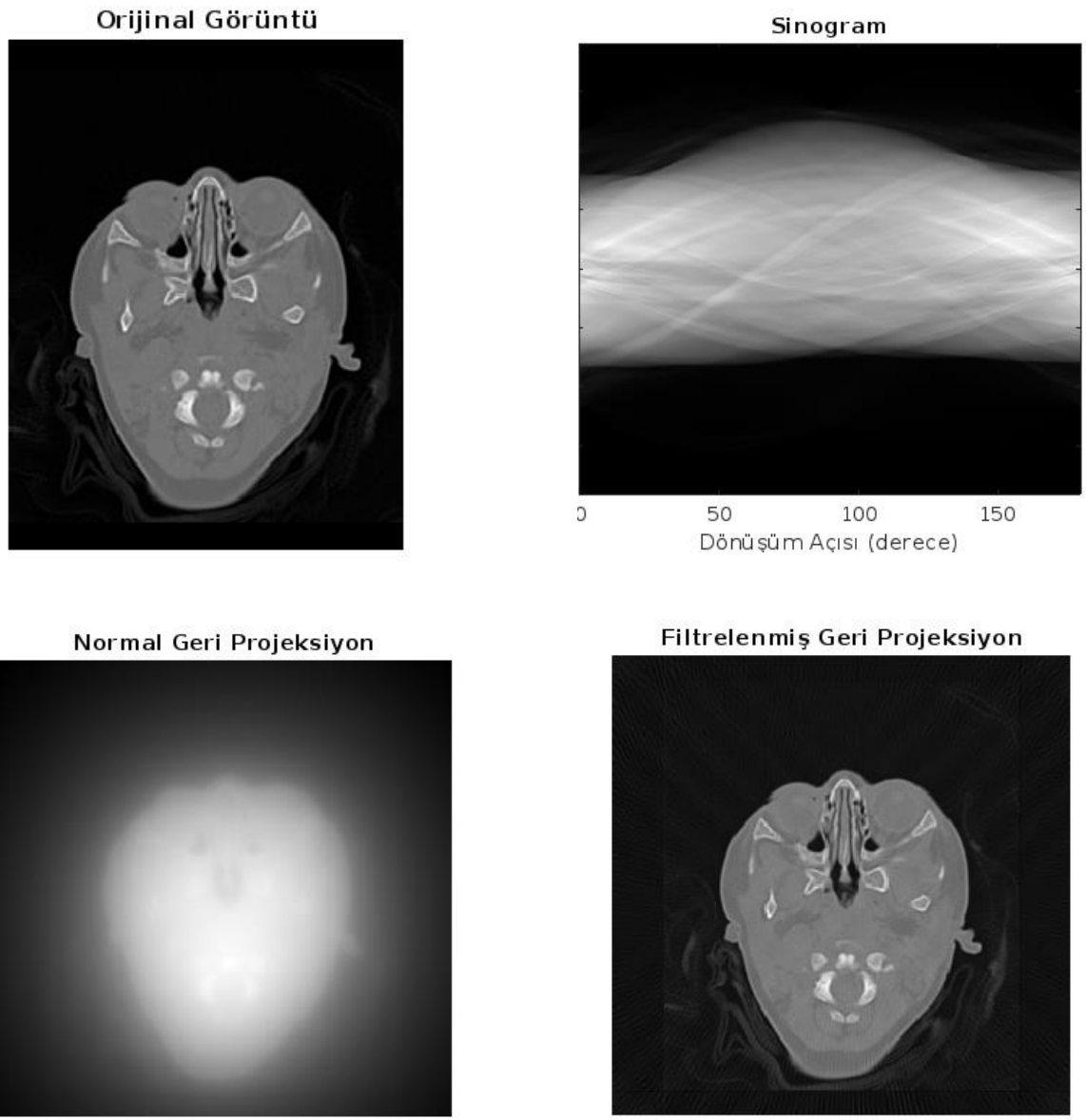
Bu formüldeki önemli faktör, Fourier dönüşümü ve ters dönüşümü arasında ortaya çıkan $|S|$ çarpanıdır. Bu faktör olmadan, bu iki terim birbirini götürür ve daha önce karşılaştığımız Radon dönüşümü için standart geri projeksiyon formülü ile baş başa kalırız ki, gördüğümüz gibi bu doğrudan $f(x, y)$ yi geri vermez. Bu ek $|S|$ çarpanına Radon dönüşümüne bir filtre diyoruz ve bu da bize filtrelenmiş geri projeksiyon formülünün adını verir (Beatty, 2012).

Tomografi Görüntüleri Üzerinden Uygulama

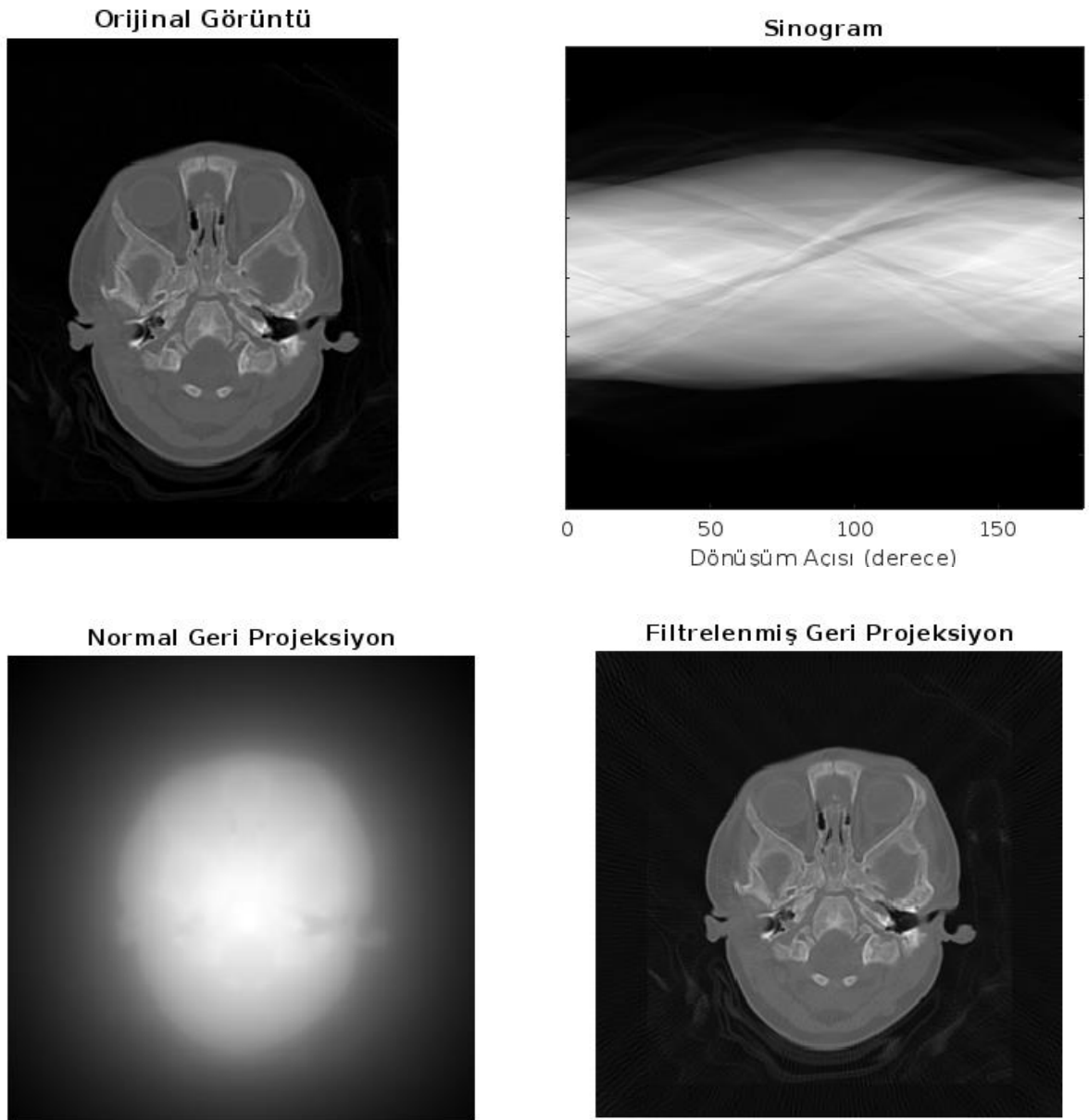
Aşağıda bazı Bilgisayarlı Tomografi görüntüleri üzerinde Matlab' ta uygulama yapılmıştır. Üç ayrı BT taramasına Radon dönüşümü uygulanarak sinogramlar elde edilmiş, oluşturulan sinogramlar üzerinden görüntüyü yeniden oluşturmak için hem normal geri projeksiyon hem de filtrelenmiş geri projeksiyon çalışmaları yapılmıştır.



Şekil 23. Birinci BT görüntüsüne ait sonuçlar



Şekil 24. İkinci BT görüntüsüne ait sonuçlar



Şekil 25. Üçüncü BT görüntüsüne ait sonuçlar

SONUÇ

- (1) Ters problem ve Medikal görüntüleme bağlamında Tomografi için pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan farklı olarak bu tez çalışmasında tomografinin bir ters problem olduğunu ve görüntüyü yeniden oluşturma aşamasında karşılaşılan hataları gidermek için kullanılan bazı yöntemleri detaylıca ve uygulamalı olarak tomografi görüntüleri üzerinden karşılaştırdık.
- (2) Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışmada ilk olarak, ters problemin ne olduğu ve Tomografinin bir ters problem olma durumu incelendi.
- (3) X-ışını geometrisi üzerinden Radon dönüşümü tanımlanarak sinogramların nasıl elde edildiği gösterildi.
- (4) Görüntüyü geri yansıtırken oluşan hataları gidermek için Fourier dönüşümü tanımlanarak filtelenmiş geri projeksiyonun önemi araştırıldı.

Son olarak üç tane tomografi görüntüsü üzerinden Matlab'ta görüntüyü yeniden oluşturma uygulamaları yapıldı ve normal geri projeksiyon ile filtelenmiş geri projeksiyon arasındaki görüntü (netlik) farkı ortaya konuldu.

KAYNAKÇA

- Anonymous, 2019. Tomography. YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=KXdytBNSRm0&list=PLqstxki3mfzFdENyjdqxqYpR0SGG1sqRt7&index=5> (06.09.2023).
- Anonymous, 2022. Looking through Objects - How Tomography Works!. YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=f0sxjhGHRPo&list=PLqstxki3mfzFdENyjdqxqYpR0SGG1sqRt7&index=6> (06.09.2023).
- Beatty, J., 2012. The Radon Transform and the Mathematics of Medical Imaging, Ph.D. Dissertation. Colby College, USA.
- Bubba, T. A., 2019. The Mathematics of X-ray Tomography. Summer School on Very Finnish Inverse Problems, Helsinki.
- Budak, H., 2013. Medikal Verilerde Ters Problemler, Yüksek Lisans Tezi. Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli, Türkiye.
- Deans, S.R., 1983. *The Radon Transform and Some of Its Applications*, John Wiley & Sons, New York, USA, 295 s.
- Engl, H. W., Hanke, M., Neubauer, 1996, A., Regularization of Inverse Problems, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Feeman, T., 2015. *The Mathematics of Medical Imaging*, Second Edition, Springer, London, UK, 197 s.
- Hansen, P. C., 2010, Discrete inverse problems : insight and algorithms, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Hsieh, J., 2009. Computed Tomography: Principles, Design, Artifacts, and Recent Advances. SPIE Press, 584, Bellingham, Washington, USA.
- İbret, H., 2021. Medikal Görüntüleme ve Radon Dönüşümü, Yüksek Lisans Tezi. Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Burdur, Türkiye.
- Kayıpmaz, S., Sezgin, Ö. S., 2016. Bilgisayarlı Tomografi: Prensipleri, Tarihsel Gelişimi ve Dış Hekimliğindeki Uygulama Alanları. Türkiye Klinikleri Ağız Diş ve Çene Radyolojisi, 2(1), 1-8.
- Müller, J. L. and Siltanen, S., 2012, Linear and nonlinear inverse problems with practical applications-Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Radon, J., 1917. Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten. Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, 69, 262-277.
- Sevimli, G., 2019. Radon Dönüşümü ve Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi. Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Zonguldak, Türkiye.
- Siltanen, S., 2016. Reconstruction methods for ill-posed inverse problems - Part 1. YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=PHgCwqqzj6Q&list=PLqstxki3mfzFdENyjdqxqYpR0SGG1sqRt7&t=1571s> (13.12.2022).
- Siltanen, S., 2020. What is tomography?. YouTube, https://www.youtube.com/watch?v=dn358iX_WxQ&list=PLqstxki3mfzFdENyjdqxqYpR0SGG1sqRt7&index=4 (13.12.2022).
- Subasi, M., Sendur, F. D. and Yasar, C., (2021). An inverse source identification by nonlinear optimization in a two-dimensional hyperbolic problem. Inverse Problems in Science and Engineering, vol. 29, no. 12, 2110-2130.

- Subasi, M., Sendur, F. D., (2024). Inverse Coefficient Identification by Nonlinear Optimization in a Two Dimensional Hyperbolic Problem. Authorea, Doi: 10.22541/au.170668765.54842164/v1.
- Tikhonov A. N., 1963. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Volume 151, Number 3, 501–504.
- Cierniak R., 2011. X-Ray Computed Tomography in Biomedical Engineering. Springer, New York.
- Cormack, A. M., 1963. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. Journal of Applied Physics, 34: 2722-2727.
- Cormack, A. M., 1964. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications II. Journal of Applied Physics, 35: 2908-2912.
- Herman, G. T., 2009. Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections. Second Edition, Springer, New York.
- Hounsfield, G. N., 1972. A method of apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation. Patent Specification 1283915, The Patent Office, London.
- Hounsfield, G. N., 1973. Computerized transverse axial scanning tomography. British Journal of Radiology, 46: 1016-1022.
- Herman, G. T., 1980. Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. Academic Press, New York.
- Jiang, M., and Wang, G., 2003. Convergence studies on iterative algorithms for image reconstruction. IEEE Transactions on Medical Imaging, 22 (5), 569-579
- Kak, A. C., and Slaney, M., 2001. Principles of computerized tomographic imaging. Classics in Applied Mathematics, Vol. 33, SIAM, Philadelphia.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Mehmet ÖZACET
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	İstanbul/Sultanbeyli Mesleki Ve Teknik Anadolu Lisesi
Lisans:	Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Orta
Tezden Üretilmiş Yayınlar	