



**ÜSTEL TİPLİ KONVEKS FONKSİYONLAR
YARDIMIYLA ELDE EDİLEN YENİ
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

Abdolvahit YERGÖZ

Danışman: Doç. Dr. Çetin YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2023

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**ÜSTEL TIPLI KONVEKS FONKSİYONLAR YARDIMIYLA ELDE EDİLEN
YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

(New Integral Inequalities Obtained by Using Exponential Type Convex Functions)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdulahit YERGÖZ

Danışman: Doç. Dr. Çetin YILDIZ

Erzurum
Ocak, 2023

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Abdolvahit YERGÖZ tarafından hazırlanan Üstel Tipli Konveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Yeni İntegral Eşitsizlikleri başlıklı çalışması 12/01/2023 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR
Atatürk Üniversitesi

Aslı Islak İmzalıdır

Danışman: Doç. Dr. Çetin YILDIZ
Atatürk Üniversitesi

Aslı Islak İmzalıdır

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ
Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Aslı Islak İmzalıdır

Enstitü Yönetim Kurulunun
.../.../.... tarih ve sayılı
kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Aslı ıslak imzalıdır

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN
Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Doç. Dr. Çetin Yıldız danışmanlığında sunulan “Üstel Tipli Konveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Yeni İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	25	30
Kuramsal Temeller	30	30
Materyal ve Yöntem	16	35
Bulgular	6	20
Tartışma	14	20
Tezin Geneli	13	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Abdulahit YERGÖZ	Doç. Dr. Çetin YILDIZ
3.1.2023	3.1.2023
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez çalışmamda her türlü bilgi, destek ve donanımıyla danışmanlığımı yürüten; her aşamada yardımını gördüğüm değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Çetin YILDIZ'a teşekkür ederim.

Tez yazma aşamasında sevgi ve yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarımızı birlikte yürüttüğümüz kıymetli, biricik eşime sevgi ve şükranlarımı sunarım.

Abdolvahit YERGÖZ



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL TIPLİ KONVEKS FONKSİYONLAR YARDIMIYLA ELDE EDİLEN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Abdolvahit YERGÖZ

Danışman: Doç. Dr. Çetin YILDIZ

Amaç: Bu çalışmada üstel tipli konveks fonksiyon tanımı ve eşitsizlik teorisinin özellikleri kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilmesi amaçlanmıştır.

Yöntem: Teorem ve sonuçları elde etmek amacıyla integraller için üçgen eşitsizliği, Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan Eşitsizlikleri ve Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizliği kullanılmıştır.

Bulgular: Dört farklı lemmaya uygulanan eşitsizlikler ve üstel tipli konveks fonksiyon yardımıyla yeni teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç: Bu tezde Hölder-İşcan ve Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizlikleri ile elde edilen teoremlerin Hölder ve Power-Mean Eşitsizliklerine göre daha iyi üst sınırlar verdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Hölder Eşitsizliği, Power-Mean Eşitsizliği, Hölder-İşcan Eşitsizliği, Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizliği, üstel tipli konveks fonksiyon.

Ocak 2023, 84 sayfa

ABSTRACT

MS THESIS

NEW INTEGRAL INEQUALITIES OBTAINED BY USING EXPONENTIAL TYPE CONVEX FUNCTIONS

Abdulahit YERGÖZ

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Purpose: In this study, it is aimed to obtain new inequalities by using the exponential type convex function whole and the properties of the inequality theory.

Method: Triangle inequality, Hölder, Power-Mean, Hölder-Isan Inequalities and Improved Power-Mean Inequality are used for integrals in order to obtain theorems and results.

Findings: New theorems and results are obtained by using inequalities and exponential type convex function applied to four different lemmas.

Results: In this thesis, it has been seen that the theorems obtained with the Hölder-Isan and Improved Power-Mean inequalities give better upper bounds than the Hölder and Power-Mean inequalities.

Keywords: Hölder Inequality, Power-Mean Inequality, Hölder-Isan Inequality, Improved Power-Mean Inequality, exponential type convex function.

January 2023, 84 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
KISALTMALAR ve SİMGELER DİZİNİ	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	3
Genel Terimler	3
Pozitif Reel Sayılar İçin Bazı Özel Ortalamalar.....	8
MATERYAL VE YÖNTEM	10
Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler	10
Üstel Tipli Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilmiş Sonuçlar	12
ARAŞTIRMA BULGULARI	18
Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar	66
SONUÇ VE ÖNERİLER	71
Öneriler	71
KAYNAKLAR.....	72
ÖZGEÇMİŞ.....	74

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Konveks kümeler.....	3
Şekil 2. Konveks olmayan kümeler.....	3
Şekil 3. Aralıklar üzerinde (yani $\mathbb{R}^+$ da) konveks fonksiyon ($f(x) = x^2$).....	5
Şekil 4. Konveks fonksiyonun incelenmesi.....	5



KISALTMALAR ve SİMGELER DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
I	$\mathbb{R}$ 'de bir aralık
I°	I aralığının içi
$\subset$	Alt küme
$\subseteq$	Alt küme veya eşit
β	Beta Fonksiyonu
$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\psi, \ell)$	Aritmetik Ortalama
$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\psi, \ell)$	Geometrik Ortalama
$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\psi, \ell)$	Harmonik Ortalama
$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \ell)$	Logaritmik Ortalama
$L[\psi, \ell]$	$[\psi, \ell]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$\mathfrak{F}'$	$\mathfrak{F}$ Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$\mathfrak{F}''$	$\mathfrak{F}$ Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum

GİRİŞ

Eşitsizlik iki büyüklük, iki nicelik arasındaki farkı gösteren bir ilişkidir. Matematikte $<$, $>$, $\leq$ ve $\geq$ gibi sembollerle gösterilir. Reel analizde sıralama yapabilmek için kullanılır.

Eşitsizlik Teorisi matematiğin genç alanlarından bir tanesi olmak üzere üzerinde çalışılmaya müsait ve yeni ifadeler bulmak adına önemli bir alandır. 18. ve 19. yüzyıllarda eşitsizlik teorisi K. F. Gauss (1777-1855), A. L. Cauchy (1789-1857) ve P. L. Chebyshev (1821-1894) gibi matematikçiler tarafından çalışıldı. Modern anlamdaki ilk çalışmalar ise 1934 yılında Pólya, Hardy ve Littlewood tarafından yapıldı. Bu çalışmayı 1961 yılında R. Bellman'ın ve E.F. Beckenbach'ın "Inequalities" adlı kitabı izler. S.S. Dragomir, Gradimir V. Milovanovic, Josip E. Pečarić, Ravi Agarwal, George Anastassiou, M. E. Özdemir, İ. İşcan ve M. Z. Sarıkaya gibi araştırmacıların da birçok çalışması literatürde mevcuttur.

Günümüzde eşitsizlik teorisi konvekslikte, konveksliğin çeşitli türlerinde, özel ortalamalarda, cebirsel, geometrik ve trigonometrik eşitsizliklerde, operatör eşitsizlikleri gibi birçok alanda farklı matematikçiler tarafından çalışılmaktadır. Elde edilen yeni eşitsizlikler ve fonksiyonların ortalama değerine ait yeni üst sınırlar matematiğin diğer birçok alanlarında kullanılmaktadır.

Konvekslik ise matematiğin kompleks analiz, fonksiyonel analiz, cebirsel geometri, olasılık teorisi, kısmi diferansiyel denklemler, kodlama teorisi, vb. gibi çeşitli alanlarında önemli bir yer tutar. 1883 yılında Hermite, Mathesis dergisinde yayınladığı çalışmasıyla konveks fonksiyonlar için belki de bilinen en meşhur eşitsizliği ortaya koymuştur. Daha sonra Jensen, 1905-1906 yıllarında bu alanda önemli çalışmalar yapmıştır. Konveks fonksiyonların farklı sınıfları üzerinde de birçok yeni tanım ve özellikler bulunmuştur. Bunlar m -konveks, quasi konveks, modifiye h -konveks, üstel tipli konveks vs. gibi fonksiyon sınıflarıdır.

Bu tezde üstel tipli konveks fonksiyonlar çalışıldığından üstel fonksiyonları bulan Euler hakkında birkaç bilgi eklenmesi gerekir.

İsviçreli matematikçi ve fizikçi Leonhard Euler, 15 Nisan 1707'de İsviçre'nin Basel şehrinde doğdu. Logaritmayı da bulan matematikçidir ve 800'den fazla makalesi bulunmaktadır. Sayı teorisi, grafik teorisi, uygulamalı matematik, fonksiyonlar ve günümüzde kullanılan diğer birçok konu hakkında çalışmıştır.

Üstel tipli konvekslikte de kullanılan üstel fonksiyonun tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir:

$\psi \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ bir sabit sayı olmak üzere

$$\mathfrak{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{F}(x) = \psi^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonksiyon denir.

Sadece matematikte değil, fizik ve kimya gibi diğer doğa bilimlerinde önemli bir yeri olan sabit e (Euler) sayısı ($e = 2,7182\dots$) üstel fonksiyonlarda en sık kullanılan taban değerlerinden biridir.

$$\mathfrak{F}(x) = e^x$$

şeklindeki e tabanındaki üstel fonksiyonlara doğal üstel fonksiyon da denir.

Bu tez çalışmasının girişinde Eşitsizlik Teorisi'nin tarihi gelişiminden, bu konu ile çalışma yapan bilim insanlarından, konvekslik kavramının tanımından ve kullanım alanlarından ayrıca üstel fonksiyonu ortaya koyan Euler'den ve üstel fonksiyonun tanımından bahsedilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde konveks fonksiyonlarla ilgili tanım, teorem ve konveks fonksiyonun geometrik olarak incelenmesine ayrıca iki pozitif sayı için bazı ortalamalara ilişkin bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde konveks fonksiyonlar için temel eşitsizliklerden ve üstel tipli konveks fonksiyonlar için daha önce elde edilmiş teoremlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde literatürde var olan lemmalar ve yeni yazdığımız bir lemma yardımıyla üstel tipli konveks fonksiyonlar ile ilgili yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca yazdığımız teoremlerle ve sonuçlarla ilgili uygulamalara yer verilmiştir. Tezin son bölümünde ise önerilerden bahsedilmiştir.

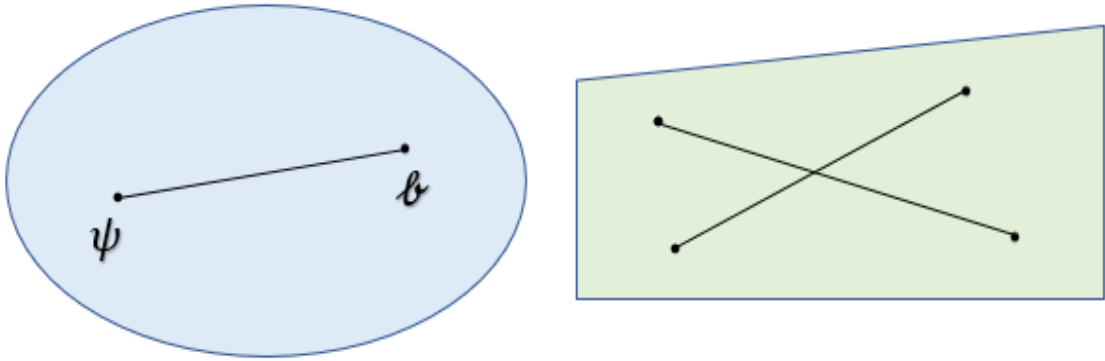
KURAMSAL TEMELLER

Genel Terimler

Tanım 1. (Konveks Küme) L bir lineer uzay $K \subseteq L$ ve $\psi, \ell \in K$ keyfi olmak üzere

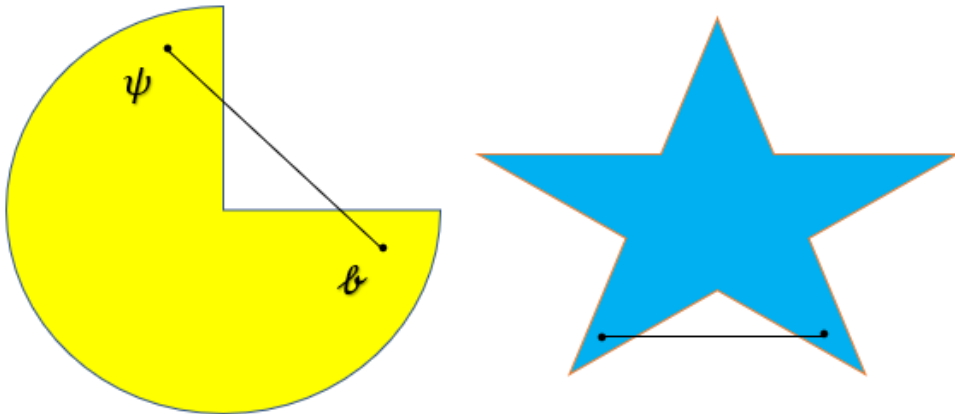
$$B = \{\vartheta \in L: \vartheta = \lambda\psi + (1 - \lambda)\ell, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq K$$

ise K kümesine konveks küme denir. Eğer $\vartheta \in B$ ise $\vartheta = \lambda\psi + (1 - \lambda)\ell$ eşitliğindeki ψ ve ℓ 'nin katsayıları için $\lambda + (1 - \lambda) = 1$ bağıntısı her konveks küme için geçerlidir. Bu nedenle konveks küme tanımındaki $1 - \lambda = \beta$ yazılırsa $\lambda + \beta = 1$ şartı sağlanır. Geometrik olarak, B kümesi uç noktaları ψ ve ℓ olan doğru parçasını gösterir. Dolayısıyla konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 1. Konveks kümeler

Bir küme konveks küme değil ise bu küme konkav küme olarak ifade edilir.



Şekil 2. Konkav kümeler

Tanım 2. (Konveks Fonksiyon) $I \subseteq \mathbb{R}$ de bir aralık ve $\mathfrak{F}: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $\psi, \ell \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\mathfrak{F}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) \leq \lambda\mathfrak{F}(\psi) + (1 - \lambda)\mathfrak{F}(\ell)$$

eşitsizliğini sağlayan $\mathfrak{F}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pečarić *et al.* 1992).

Eğer $\lambda \in (0,1)$ açık aralığında seçilirse buradan

$$\mathfrak{F}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) < \lambda\mathfrak{F}(\psi) + (1 - \lambda)\mathfrak{F}(\ell)$$

olur. Bu $\mathfrak{F}$ fonksiyonuna da kesin konveks fonksiyon denir.

Konveks fonksiyon tanımında eğer $-\mathfrak{F}$ konveks fonksiyon (kesin konveks fonksiyon) ise $\mathfrak{F}$ 'ye konkav fonksiyon (kesin konkav fonksiyon) denir.

Örnek 1. $\mathfrak{F}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için $\mathfrak{F}(x) = x^2$ fonksiyonu I kümesi üzerinde konveks bir fonksiyondur.

Çözüm: Her $\psi, \ell \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $\mathfrak{F}$ fonksiyonunun konveks olduğunu göstermek için

$$\mathfrak{F}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) \leq \lambda\mathfrak{F}(\psi) + (1 - \lambda)\mathfrak{F}(\ell)$$

yani

$$(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell)^2 \leq \lambda\psi^2 + (1 - \lambda)\ell^2$$

olduğu gösterilmelidir. O halde

$$\lambda^2\psi^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\psi\ell + (1 - \lambda)^2\ell^2 \leq \lambda\psi^2 + (1 - \lambda)\ell^2$$

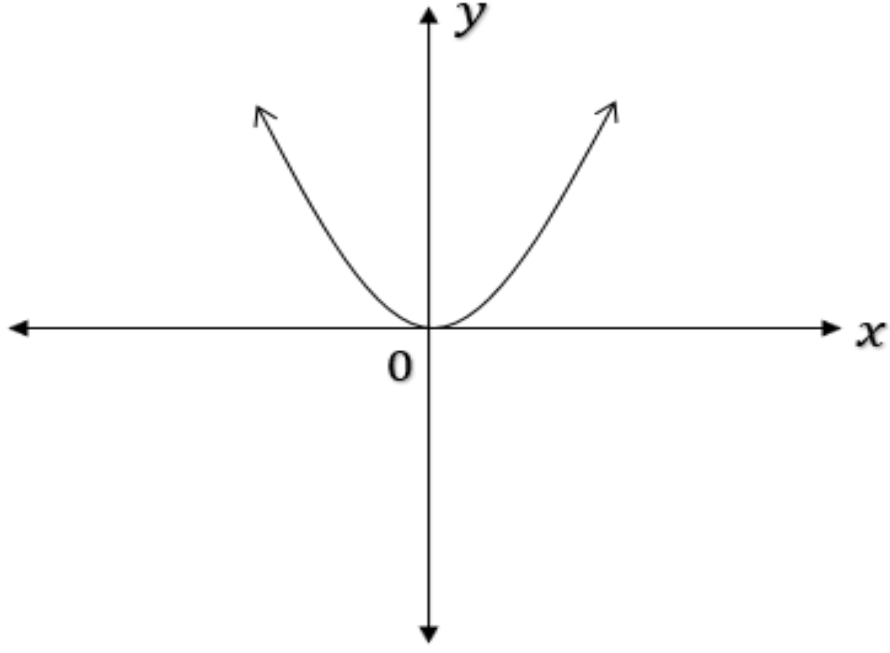
$$\lambda^2\psi^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\psi\ell + (1 - \lambda)^2\ell^2 - \lambda\psi^2 - (1 - \lambda)\ell^2 \leq 0$$

$$-\lambda(1 - \lambda)\psi^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\psi\ell - \lambda(1 - \lambda)\ell^2 \leq 0$$

$$-\lambda(1 - \lambda)(\psi^2 - 2\psi\ell + \ell^2) \leq 0$$

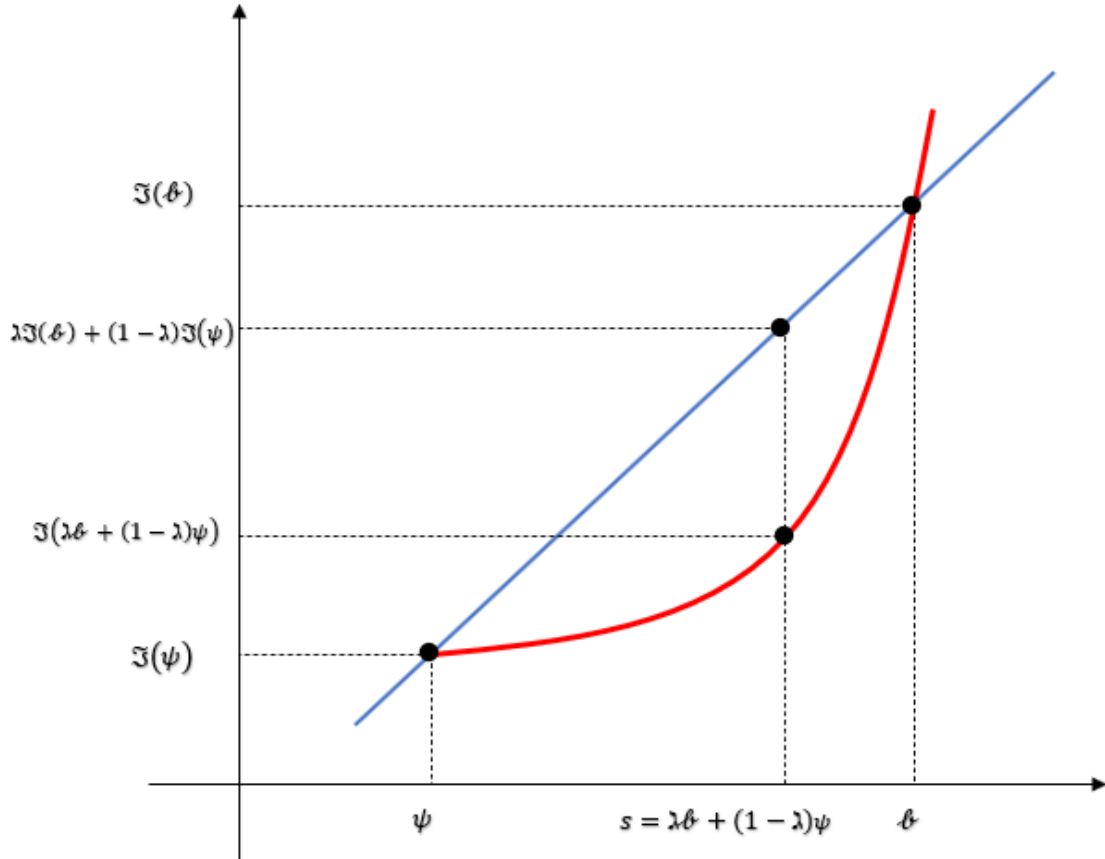
$$-\lambda(1 - \lambda)(\psi - \ell)^2 \leq 0$$

olur. Buradan $\mathfrak{F}(x) = x^2$ fonksiyonun konveks olduğu görülür.



Şekil 3. Aralıklar üzerinde (yani $\mathbb{R}^+$ da) konveks fonksiyon ($\mathfrak{F}(x) = x^2$)

Konveks fonksiyonların geometrik olarak anlamı, Şekil 4.’teki gibi açıklanabilir:



Şekil 4. Konveks fonksiyonun incelenmesi

Şekil 4.'te görüldüğü gibi, konveks fonksiyon geometrik olarak şöyle ifade edilir:

ψ 'nin $\mathfrak{S}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü $\mathfrak{S}(\psi)$, ℓ 'nin $\mathfrak{S}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü $\mathfrak{S}(\ell)$ olmak üzere $(\psi, \mathfrak{S}(\psi))$ ve $(\ell, \mathfrak{S}(\ell))$ noktalarını birleştiren doğru parçasını ele alalım. $s = \lambda\ell + (1 - \lambda)\psi$ noktasının $\mathfrak{S}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü, aynı λ değeri için doğru üzerinde oluşan değerden küçük veya eşit olduğundan fonksiyon konvektir.

Tanım 3. Eğer $\mathfrak{S}$ fonksiyonu hem konveks hem de konkav fonksiyon ise $\mathfrak{S}$ 'ye afindir (lineerdir) denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 1. $I \subset \mathbb{R}$ için bir $\mathfrak{S}$ fonksiyonunun I kümesinde konveks bir fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\psi, \ell \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$\mathfrak{S}\left(\frac{p\psi + q\ell}{p + q}\right) \leq \frac{p\mathfrak{S}(\psi) + q\mathfrak{S}(\ell)}{p + q}$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Tanım 4. (J-Konveks Fonksiyon) $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere ve her $\psi, \ell \in I$ için

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \leq \frac{\mathfrak{S}(\psi) + \mathfrak{S}(\ell)}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan $\mathfrak{S}$ fonksiyonuna $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde Jensen anlamında konveks veya J -konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Sonuç 2. Her konveks fonksiyon aynı zamanda J -konveks fonksiyondur.

Tanım 5. (Kesin J-Konveks Fonksiyon): Her $\psi, \ell \in I$ ve $\psi \neq \ell$ için

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) < \frac{\mathfrak{S}(\psi) + \mathfrak{S}(\ell)}{2}$$

şartını sağlayan $\mathfrak{S}$ fonksiyonuna $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde kesin J -konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 6. $h \neq 0$ olmak üzere $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathfrak{S}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\mathfrak{S}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) \leq h(\lambda)\mathfrak{S}(\psi) + h(1 - \lambda)\mathfrak{S}(\ell)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathfrak{S}: I \rightarrow \mathbb{R}$, bir h -konveks fonksiyondur. Bu durumda $\mathfrak{S}$ fonksiyonu $SX(h, I)$ sınıfına aittir (Varosanec 2007).

Tanım 7. $\mathfrak{S}: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, her $\psi, \vartheta \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\mathfrak{S}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\vartheta) \leq (e^\lambda - 1)\mathfrak{S}(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)\mathfrak{S}(\vartheta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathfrak{S}$ 'e üstel tipli konveks fonksiyon denir.

I üzerindeki üstel tipli konveks fonksiyonların sınıfı $EXPC(I)$ ile gösterilir (Kadakal and İşcan 2020).

Sonuç 3. Üstel tipli konveks fonksiyonlar $[0, \infty)$ üzerinde değer alır.

İspat: $\psi \in I$ olmak üzere $\lambda = 1$ için üstel tipli konveks fonksiyonun tanımı kullanılırsa $\mathfrak{S}(\psi) \leq (e - 1)\mathfrak{S}(\psi) \Rightarrow 0 \leq (e - 2)\mathfrak{S}(\psi) \Rightarrow \mathfrak{S}(\psi) \geq 0$ elde edilir (Kadakal and İşcan 2020).

Teorem 1. (Üçgen Eşitsizliği) $\psi, \vartheta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|\psi + \vartheta| \leq |\psi| + |\vartheta|,$$

$$||\psi| - |\vartheta|| \leq |\psi - \vartheta|,$$

$$||\psi| - |\vartheta|| \leq |\psi + \vartheta|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|\psi_1 + \dots + \psi_n| \leq |\psi_1| + \dots + |\psi_n|$$

eşitsizlikleri elde edilir (Mitrinovic *et al.* 1993).

Teorem 2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Formu) $\mathfrak{S}, [\psi, \vartheta]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir dönüşüm ise bu durumda

$$\left| \int_{\psi}^{\vartheta} \mathfrak{S}(x) dx \right| \leq \int_{\psi}^{\vartheta} |\mathfrak{S}(x)| dx \quad (\psi < \vartheta)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic *et al.* 1993).

Pozitif Reel Sayılar İçin Bazı Özel Ortalamalar

$\psi, \ell \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

(1) Aritmetik ortalama:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\psi, \ell) = \frac{\psi + \ell}{2},$$

(2) Geometrik ortalama:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\psi, \ell) = \sqrt{\psi \ell},$$

(3) Harmonik ortalama:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\psi, \ell) = \frac{2\psi\ell}{\psi + \ell},$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \ell) = \begin{cases} \psi, & \psi = \ell \\ \frac{\ell - \psi}{\ln \ell - \ln \psi}, & \psi \neq \ell \end{cases}$$

(5) İdentrik ortalama:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\psi, \ell) = \begin{cases} \psi, & \psi = \ell \\ \frac{1}{e} \left(\frac{\ell^\ell}{\psi^\psi} \right)^{\frac{1}{\ell - \psi}}, & \psi \neq \ell \end{cases}$$

(6) p -Logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\psi, \ell) = \begin{cases} \psi, & \psi = \ell \\ \left[\frac{\ell^{p+1} - \psi^{p+1}}{(p+1)(\ell - \psi)} \right]^{\frac{1}{p}}, & \psi \neq \ell \end{cases}$$

geçerlidir.

Bu özel ortalamalar arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{I} \leq \mathcal{A}.$$

Tanım 8. Beta fonksiyonu

$$\beta(\psi, \ell) = \int_0^1 \lambda^{\psi-1} (1 - \lambda)^{\ell-1} d\lambda, \quad \psi, \ell > 0$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tipli Beta integral fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır. Beta fonksiyonu,

$$(1) \quad \beta(\psi, \ell) = \beta(\ell, \psi)$$

$$(2) \quad \beta(\psi + 1, \ell) = \frac{\psi}{\psi + \ell} \beta(\psi, \ell)$$

özelliklerini sağlar (Dragomir *et al.* 2000).



MATERYAL VE YÖNTEM

Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler

Teorem 3. (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $\mathfrak{I}$ ve g , $[\psi, \ell]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon ve $|\mathfrak{I}|^p, |g|^q$ $[\psi, \ell]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\psi}^{\ell} |\mathfrak{I}(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\psi}^{\ell} |\mathfrak{I}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\psi}^{\ell} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 4. (Hölder-İşcan Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $\mathfrak{I}$ ve g , $[\psi, \ell]$ aralığında tanımlı reel fonksiyon $|\mathfrak{I}|^p$ ve $|g|^q$, $[\psi, \ell]$ aralığında integrallenebilen fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \int_{\psi}^{\ell} |\mathfrak{I}(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{\ell - \psi} \left\{ \left(\int_{\psi}^{\ell} (\ell - x) |\mathfrak{I}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\psi}^{\ell} (\ell - x) |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\psi}^{\ell} (x - \psi) |\mathfrak{I}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\psi}^{\ell} (x - \psi) |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &\leq \left(\int_{\psi}^{\ell} |\mathfrak{I}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\psi}^{\ell} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (İşcan 2019).

Teorem 5. (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. $\mathfrak{I}$ ve g , $[\psi, \ell]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\mathfrak{I}|$ ve $|g|^q$, $[\psi, \ell]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\psi}^{\ell} |\mathfrak{I}(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\psi}^{\ell} |\mathfrak{I}(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\psi}^{\ell} |\mathfrak{I}(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Power Mean eşitsizliği

$$\int_{\psi}^{\ell} \int_{\psi}^{\ell} |\Im(x)g(x)| dx dy \leq \left(\int_{\psi}^{\ell} \int_{\psi}^{\ell} |\Im(x)| dx dy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\psi}^{\ell} \int_{\psi}^{\ell} |\Im(x)||g(x)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 6. (Geliştirilmiş Power-Mean İntegral Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. Eğer $\Im$ ve g , $[\psi, \ell]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|\Im|$ ve $|\Im||g|^q$, $[\psi, \ell]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} \int_{\psi}^{\ell} |\Im(x)g(x)| dx &\leq \frac{1}{\ell - \psi} \left\{ \left(\int_{\psi}^{\ell} (\ell - x) |\Im(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\psi}^{\ell} (\ell - x) |\Im(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\psi}^{\ell} (x - \psi) |\Im(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\psi}^{\ell} (x - \psi) |\Im(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &\leq \left(\int_{\psi}^{\ell} |\Im(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\psi}^{\ell} |\Im(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

dur (Kadakal *et al.* 2019).

Teorem 7. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $I, \mathbb{R}'$ de bir aralık, $\psi, \ell \in I$ ve $\psi < \ell$ olmak üzere $\Im: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\Im\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \leq \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \Im(x) dx \leq \frac{\Im(\psi) + \Im(\ell)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 8. (Ostrowski Eşitsizliği) $\Im: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° (I 'nin içi) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\Im' \in L[\psi, \ell]$ için $\psi, \ell \in I$, $x \in [\psi, \ell]$ ve $\psi < \ell$ olsun. Eğer $|\Im'(x)| \leq M$ ise

$$\left| \Im(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \Im(t) dt \right| \leq \frac{M}{\ell - \psi} \left[\frac{(x - \psi)^2 + (\ell - x)^2}{2} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir (Ostrowski 1938).

Üstel Tipli Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilmiş Sonuçlar

Lemma 1. $\lambda \in [0,1]$ için $e^\lambda - 1 \geq \lambda$ ve $e^{1-\lambda} - 1 \geq 1 - \lambda$ eşitsizlikleri geçerlidir (Kadakal and İşcan 2020).

Sonuç 4. Her negatif olmayan konveks fonksiyon aynı zamanda üstel tipli konveks fonksiyondur (Kadakal and İşcan 2020).

İspat: $\lambda \in [0,1]$ için Lemma 1'deki $\lambda \leq e^\lambda - 1$ ve $1 - \lambda \leq e^{1-\lambda} - 1$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$\mathfrak{J}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) \leq \lambda\mathfrak{J}(\psi) + (1 - \lambda)\mathfrak{J}(\ell) \leq (e^\lambda - 1)\mathfrak{J}(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)\mathfrak{J}(\ell)$ eşitsizliği elde edilir. ■

Örnek 2. $\mathfrak{J}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ için $\mathfrak{J}(x) = -\ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konveks bir fonksiyon olmasına rağmen sadece $(0,1]$ aralığında üstel tipli konveks bir fonksiyondur.

Çözüm: $\mathfrak{J}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{J}(x) = -\ln x$ konveks fonksiyonu $(0,1]$ aralığında negatif olmayan olduğu için bu aralıkta aynı zamanda bir üstel tipli konveks fonksiyondur.

Sonuç 5. Her üstel tipli konveks fonksiyon $h(\lambda) = e^\lambda - 1$ için bir h -konveks fonksiyondur (Kadakal and İşcan 2020).

İspat: Eğer Tanım 6'daki eşitsizlikte $e^\lambda - 1 = h(\lambda)$ ve $e^{1-\lambda} - 1 = h(1 - \lambda)$ alınırsa kolaylıkla bir h -konveks fonksiyon olduğu görülür. ■

Teorem 9. $\mathfrak{J}, g: [\psi, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\mathfrak{J}$ ve g üstel tipli konveks fonksiyonlar ise

- i. $\mathfrak{J} + g$ üstel tipli konveks bir fonksiyondur.
- ii. $c \geq 0$ için $c\mathfrak{J}$ üstel tipli konveks bir fonksiyondur.

(Kadakal and İşcan 2020).

İspat: (i) $\mathfrak{J}, g$ üstel tipli konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{J} + g)(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) \\ &= \mathfrak{J}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) + g(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) \\ &\leq (e^\lambda - 1)\mathfrak{J}(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)\mathfrak{J}(\ell) + (e^\lambda - 1)g(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)g(\ell) \\ &= (e^\lambda - 1)[\mathfrak{J}(\psi) + g(\psi)] + (e^{1-\lambda} - 1)[\mathfrak{J}(\ell) + g(\ell)] \\ &= (e^\lambda - 1)(\mathfrak{J} + g)(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)(\mathfrak{J} + g)(\ell) \end{aligned}$$

olur.

(ii) $\mathfrak{I}$ üstel tipli konveks fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$ ($c \geq 0$) olsun. Buradan

$$\begin{aligned} (c\mathfrak{I})(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell) &\leq c[(e^\lambda - 1)\mathfrak{I}(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)\mathfrak{I}(\ell)] \\ &= (e^\lambda - 1)c\mathfrak{I}(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)c\mathfrak{I}(\ell) \\ &= (e^\lambda - 1)(c\mathfrak{I})(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)(c\mathfrak{I})(\ell) \end{aligned}$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 10. Eğer $\mathfrak{I}: I \rightarrow J$ konveks bir fonksiyon $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ üstel tipli azalmayan konveks bir fonksiyon ise $g \circ \mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ üstel tipli konveks bir fonksiyondur (Kadakal and İşcan 2020).

İspat: $\psi, \ell \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} (g \circ \mathfrak{I})(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell) &= g(\mathfrak{I}(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)) \\ &\leq g(\lambda\mathfrak{I}(\psi) + (1-\lambda)\mathfrak{I}(\ell)) \\ &\leq (e^\lambda - 1)g(\mathfrak{I}(\psi)) + (e^{1-\lambda} - 1)g(\mathfrak{I}(\ell)) \\ &= (e^\lambda - 1)(g \circ \mathfrak{I})(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)(g \circ \mathfrak{I})(\ell) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 11. $n > 0$ ve $\mathfrak{I}_\alpha: [\psi, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, üstel tipli konveks fonksiyonların bir keyfi ailesi olsun. $\mathfrak{I}(x) = \sup_\alpha \mathfrak{I}_\alpha(x)$ olmak üzere eğer $J = \{u \in [\psi, \ell]: \mathfrak{I}(u) < \infty\}$ kümesi boş değilse J bir aralıktır ve $\mathfrak{I}$, J üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyondur (Kadakal and İşcan 2020).

İspat: $\lambda \in [0,1]$ ve $\psi, \ell \in J$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell) &= \sup_\alpha \mathfrak{I}_\alpha(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell) \\ &\leq \sup_\alpha [(e^\lambda - 1)\mathfrak{I}_\alpha(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)\mathfrak{I}_\alpha(\ell)] \\ &\leq (e^\lambda - 1)\sup_\alpha \mathfrak{I}_\alpha(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)\sup_\alpha \mathfrak{I}_\alpha(\ell) \\ &= (e^\lambda - 1)\mathfrak{I}(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)\mathfrak{I}(\ell) < \infty \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 12. Eğer $\mathfrak{I}: [\psi, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu üstel tipli konveks bir fonksiyon ise $\mathfrak{I}$, $[\psi, \ell]$ üzerinde sınırlıdır (Kadakal and İşcan 2020).

İspat: $K = \max\{\mathfrak{I}(\psi), \mathfrak{I}(\ell)\}$ ve $x \in [\psi, \ell]$ keyfi bir nokta olsun. O zaman $\lambda \in [0,1]$ vardır öyle ki $x = \lambda\psi + (1 - \lambda)\ell$ dir. Böylece $e^\lambda \leq e$ ve $e^{1-\lambda} \leq e$ den

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(x) &\leq \mathfrak{I}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) \\ &\leq (e^\lambda - 1)\mathfrak{I}(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)\mathfrak{I}(\ell) \\ &\leq (e^\lambda + e^{1-\lambda} - 2)K \\ &\leq 2(e - 1)K = M\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $\mathfrak{I}$, $[\psi, \ell]$ üzerinde sınırlıdır. ■

Teorem 13. $\mathfrak{I}: [\psi, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ üstel tipli konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I} \in L[\psi, \ell]$ ise aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{2(\sqrt{e} - 1)} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \leq \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \leq (e - 2)[\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)]$$

(Kadakal and İşcan 2020).

İspat: İlk olarak $\mathfrak{I}$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) &= \mathfrak{I}\left(\frac{[\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell] + [(1 - \lambda)\psi + \lambda\ell]}{2}\right) \\ &= \mathfrak{I}\left(\frac{1}{2}[\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell] + \frac{1}{2}[(1 - \lambda)\psi + \lambda\ell]\right) \\ &\leq \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) \mathfrak{I}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) + \left(e^{1-\frac{1}{2}} - 1\right) \mathfrak{I}((1 - \lambda)\psi + \lambda\ell)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin λ 'ne göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) &\leq \left[\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) \int_0^1 \mathfrak{I}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) d\lambda + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) \int_0^1 \mathfrak{I}((1 - \lambda)\psi + \lambda\ell) d\lambda\right] \\ &= \frac{2(\sqrt{e} - 1)}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci olarak üstel tipli konveks fonksiyon olan $\mathfrak{I}$ 'ün özelliği kullanılırsa ve değişken $u = \lambda\psi + (1 - \lambda)\ell$ olarak değiştirilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du &= \int_0^1 \mathfrak{I}(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) d\lambda \\
&\leq \int_0^1 \{(e^{\lambda} - 1)\mathfrak{I}(\psi) + (e^{1-\lambda} - 1)\mathfrak{I}(\ell)\} d\lambda \\
&= (e - 2)[\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)].
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Lemma 2. $\mathfrak{I}: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. $\psi, \ell \in I^{\circ}$ ve $\psi < \ell$ olmak üzere eğer $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ ise

$$\frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx = \frac{\ell - \psi}{2} \int_0^1 (1 - 2\lambda) \mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1 - \lambda)\ell) d\lambda$$

eşitliği geçerlidir (Dragomir and Agarwal 1998).

Teorem 14. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^{\circ}$ ve $\psi < \ell$ olsun. $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq (\ell - \psi) \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) \mathcal{A}(|\mathfrak{I}'(\psi)|, |\mathfrak{I}'(\ell)|)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda \in [0, 1]$ ve $\mathcal{A}(u, v)$, u ile v 'nin aritmetik ortalamasıdır (Kadakal and İşcan 2020).

Teorem 15. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^{\circ}$, $\psi < \ell$ ve $q > 1$ olsun. $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
\leq \frac{\ell - \psi}{2} [2(e - 2)]^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}}(|\mathfrak{I}'(\psi)|^q, |\mathfrak{I}'(\ell)|^q)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda \in [0, 1]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\mathcal{A}$ ise aritmetik ortalamadır (Kadakal and İşcan 2020).

Teorem 16. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^{\circ}$, $\psi < \ell$ ve $q \geq 1$ olsun. $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{\ell - \psi}{2^{2-\frac{1}{q}}} \left[2 \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}}(|\mathfrak{I}'(\psi)|^q, |\mathfrak{I}'(\ell)|^q)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\lambda \in [0,1]$ dir (Kadakal and İşcan 2020).

Lemma 3. $\psi, \ell \in I$ ve $\psi < \ell$ olmak üzere $\mathfrak{I}: I^{\circ} \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathfrak{I}'' \in L[\psi, \ell]$ ise

$$\frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx - \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)$$

$$= \frac{(\ell - \psi)^2}{16} \left[\int_0^1 \lambda^2 \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda)\psi \right) d\lambda + \int_0^1 (\lambda - 1)^2 \mathfrak{I}'' \left(\lambda \ell + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) d\lambda \right]$$

eşitliği geçerlidir (Ciurdariu 2012).

Teorem 17. $\psi, \ell \in I$ ve $\psi < \ell$ olmak üzere $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $I^{\circ} \subset \mathbb{R}$ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\mathfrak{I}'' \in L[\psi, \ell]$ için eğer $|\mathfrak{I}''|$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx - \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(\ell - \psi)^2}{8} \left[\left(e - \frac{7}{3} \right) \left| \mathfrak{I}''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| + \left(e - \frac{8}{3} \right) |\mathfrak{I}''(\psi)| + \left(e - \frac{8}{3} \right) |\mathfrak{I}''(\ell)| \right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Tirtirau 2020).

Teorem 18. $\psi, \ell \in I^{\circ}$, $\psi < \ell$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $I^{\circ} \subset \mathbb{R}$ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\mathfrak{I}'' \in L[\psi, \ell]$ için eğer $|\mathfrak{I}''|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx - \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(\ell - \psi)^2}{16} \frac{(e-2)^{\frac{1}{q}}}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q, |\mathfrak{I}''(\psi)|^q \right) + \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{I}''(\ell)|^q, \left| \mathfrak{I}''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right) \right].$$

Burada $\mathcal{A}(u, v)$, u ile v 'nin aritmetik ortalamasıdır (Tirtirau 2020).

Teorem 19. $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $I^\circ \subset \mathbb{R}$ üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\mathfrak{I}'' \in L[\psi, \ell]$ için eğer $|\mathfrak{I}''|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx - \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(\ell - \psi)^2}{16} \frac{1}{3^{\frac{1}{p}}} \left[\mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left(e - \frac{7}{3} \right) \left| \mathfrak{I}''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q, 2 \left(e - \frac{8}{3} \right) |\mathfrak{I}''(\psi)|^q \right) \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(2 \left(e - \frac{8}{3} \right) |\mathfrak{I}''(\ell)|^q, \left(e - \frac{7}{3} \right) \left| \mathfrak{I}''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right) \right]. \end{aligned}$$

Burada $\mathcal{A}(u, v)$, u ile v 'nin aritmetik ortalamasıdır (Tirtirau 2020).

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde literatürde mevcut olan lemmalardan faydalanarak üstel tipli konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu eşitsizlikleri elde etmek için üstel tipli konveks fonksiyon tanımı, Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan ve Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Lemma 4. $\mathfrak{I}: I^\circ \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \\ &= \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \int_0^1 (1 - 2\lambda) \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1 - \lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) d\lambda \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Awan *et al.* 2020).

İspat: Kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 - 2\lambda) \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1 - \lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) d\lambda \\ &= 2 \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} - \frac{8}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^4} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4}$ ifadesiyle çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \int_0^1 (1 - 2\lambda) \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1 - \lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) d\lambda \\ &= \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \end{aligned}$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 20. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{2} \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) \mathcal{A} \left(|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|, \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda \in [0, 1]$ ve $\mathcal{A}(u, v)$ ise u ile v 'nin aritmetik ortalamasıdır.

İspat: Lemma 4'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \int_0^1 |1 - 2\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1 - \lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| d\lambda$$

olur. $|\mathfrak{I}'|$ üstel tipli konveks fonksiyon olduğu için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \int_0^1 |1 - 2\lambda| \left[(e^\lambda - 1) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})| + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| \right] d\lambda \\ & = \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left[|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})| \int_0^1 |1 - 2\lambda| (e^\lambda - 1) d\lambda \right. \\ & \quad \left. + \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| \int_0^1 |1 - 2\lambda| (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right] \\ & = \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{2} \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) \mathcal{A} \left(|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|, \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 |1 - 2\lambda| (e^\lambda - 1) d\lambda = \int_0^1 |1 - 2\lambda| (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = 4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2}$$

dir. ■

Teorem 21. $\mathfrak{S}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{S}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{S}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{\mathfrak{S}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{S}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{S}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{2^{2-\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} (e-2)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{S}'(\sqrt{\psi\ell})|^q, \left| \mathfrak{S}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\lambda \in [0,1]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\mathcal{A}$ ise aritmetik ortalamadır.

İspat: Lemma 4'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{\mathfrak{S}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{S}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{S}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \int_0^1 |1 - 2\lambda| \left| \mathfrak{S}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1-\lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| d\lambda$$

olur. Hölder integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{S}'|^q$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\left| \frac{\mathfrak{S}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{S}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{S}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left(\int_0^1 |1 - 2\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \mathfrak{S}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1-\lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \left[(e^\lambda - 1) |\mathfrak{S}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{S}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(|\mathfrak{S}'(\sqrt{\psi\ell})|^q \int_0^1 (e^\lambda - 1) d\lambda + \left| \mathfrak{S}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \int_0^1 (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{2^{2-\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} (e-2)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell}) \right|^q, \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)$$

bulunur. Burada

$$\int_0^1 |1-2\lambda|^p d\lambda = \frac{1}{p+1}$$

$$\int_0^1 (e^\lambda - 1) d\lambda = \int_0^1 (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = e - 2$$

dir. ■

Teorem 22. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi+\ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{2^{3-\frac{2}{q}}} \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell}) \right|^q, \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $q \geq 1$, $\lambda \in [0,1]$ ve $\mathcal{A}$ ise aritmetik ortalamadır.

İspat: Lemma 4'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi+\ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \int_0^1 |1-2\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1-\lambda)\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right| d\lambda$$

yazılır. Power-Mean integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi+\ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left(\int_0^1 |1-2\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1-\lambda)\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\sqrt{\ell}-\sqrt{\psi})^2}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2\lambda| \left[(e^\lambda - 1) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{(\sqrt{\ell}-\sqrt{\psi})^2}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q \int_0^1 |1-2\lambda| (e^\lambda - 1) d\lambda + \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \int_0^1 |1-2\lambda| (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{(\sqrt{\ell}-\sqrt{\psi})^2}{2^{3-\frac{2}{q}}} \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q, \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 6. Teorem 22’de $q = 1$ olarak alınır Teorem 20 elde edilir.

Teorem 23. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell}-\sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi+\ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
&\leq \frac{(\sqrt{\ell}-\sqrt{\psi})^2}{4} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\left(e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \frac{1}{2} \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $p > 1$, $\lambda \in [0,1]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 4’e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell}-\sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi+\ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
&\leq \frac{(\sqrt{\ell}-\sqrt{\psi})^2}{4} \int_0^1 |1-2\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1-\lambda)\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right| d\lambda
\end{aligned}$$

yazılır. Hölder-İşcan integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ ’nın üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Im(\sqrt{\psi\ell}) + \Im\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \Im(x) dx \right| \\
& \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left[\left(\int_0^1 (1 - \lambda) |1 - 2\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \lambda) \left| \Im' \left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \lambda |1 - 2\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \lambda \left| \Im' \left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left[\left(\int_0^1 (1 - \lambda) |1 - 2\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \lambda) \left[(e^\lambda - 1) |\Im'(\sqrt{\psi\ell})|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \Im' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \lambda |1 - 2\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \lambda \left[(e^\lambda - 1) |\Im'(\sqrt{\psi\ell})|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \Im' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \\
& = \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left[\left(\int_0^1 (1 - \lambda) |1 - 2\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\left| \Im'(\sqrt{\psi\ell}) \right|^q \int_0^1 (1 - \lambda)(e^\lambda - 1) d\lambda + \left| \Im' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \int_0^1 (1 - \lambda)(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \lambda |1 - 2\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\left| \Im'(\sqrt{\psi\ell}) \right|^q \int_0^1 \lambda(e^\lambda - 1) d\lambda + \left| \Im' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \int_0^1 \lambda(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\left(e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \frac{1}{2} \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (1-\lambda) |1-2\lambda|^p d\lambda = \int_0^1 \lambda |1-2\lambda|^p d\lambda = \frac{1}{2(p+1)}$$

$$\int_0^1 (1-\lambda)(e^\lambda - 1) d\lambda = \int_0^1 \lambda(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = e - \frac{5}{2}$$

$$\int_0^1 (1-\lambda)(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = \int_0^1 \lambda(e^\lambda - 1) d\lambda = \frac{1}{2}$$

dir. ■

Sonuç 7. Teorem 23 eşitsizliği Teorem 21 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç verir.

İspat: $k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = x^s$, $0 < s \leq 1$ olmak üzere konkav k fonksiyonu için $\frac{u^s+v^s}{2} \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^s$ özelliği kullanılırsa Teorem 23 eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\left(e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \frac{1}{2} \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(e-2) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + (e-2) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \\ = \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{2^{2-\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} (e-2)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q, \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right).$$

Bu şekilde Teorem 23 eşitsizliğinin Teorem 21 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç verdiği görülür. ■

Teorem 24. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi+\ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4^{2-\frac{1}{q}}} \\ \times \left[\left(\left(10\sqrt{e} - 3e - \frac{33}{4} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(2e - 6\sqrt{e} + \frac{19}{4} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\left(2e - 6\sqrt{e} + \frac{19}{4} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(10\sqrt{e} - 3e - \frac{33}{4} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $q \geq 1$ ve $\lambda \in [0,1]$ 'dir.

İspat: Lemma 4'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi+\ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \int_0^1 |1 - 2\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1-\lambda)\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right| d\lambda$$

olur. Geliştirilmiş Power-Mean integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi+\ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left[\left(\int_0^1 (1-\lambda) |1 - 2\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ \times \left(\int_0^1 (1-\lambda) |1 - 2\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1-\lambda)\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left. + \left(\int_0^1 \lambda |1 - 2\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \lambda |1 - 2\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\sqrt{\psi\ell} + (1-\lambda)\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left[\left(\int_0^1 (1-\lambda)|1-2\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-\lambda)|1-2\lambda| \right. \right. \\
&\quad \times \left[(e^\lambda - 1)|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right] d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 \lambda|1-2\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \lambda|1-2\lambda| \left[(e^\lambda - 1)|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right] d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4} \left[\left(\int_0^1 (1-\lambda)|1-2\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \times \left(|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q \int_0^1 (1-\lambda)|1-2\lambda|(e^\lambda - 1) d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \int_0^1 (1-\lambda)|1-2\lambda|(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \lambda|1-2\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q \int_0^1 \lambda|1-2\lambda|(e^\lambda - 1) d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \int_0^1 \lambda|1-2\lambda|(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Big] \\
&= \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4^{2-\frac{1}{q}}} \\
&\quad \times \left[\left(\left(10\sqrt{e} - 3e - \frac{33}{4} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(2e - 6\sqrt{e} + \frac{19}{4} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(2e - 6\sqrt{e} + \frac{19}{4} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(10\sqrt{e} - 3e - \frac{33}{4} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (1-\lambda)|1-2\lambda| d\lambda = \int_0^1 \lambda|1-2\lambda| d\lambda = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 (1-\lambda)|1-2\lambda|(e^\lambda - 1) d\lambda = \int_0^1 \lambda|1-2\lambda|(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = 10\sqrt{e} - 3e - \frac{33}{4}$$

$$\int_0^1 (1-\lambda)|1-2\lambda|(e^{1-\lambda}-1)d\lambda = \int_0^1 \lambda|1-2\lambda|(e^\lambda-1)d\lambda = 2e - 6\sqrt{e} + \frac{19}{4}$$

tür. ■

Sonuç 8. Teorem 24 eşitsizliği, Teorem 22 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç verir.

İspat: $k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = x^s$, $0 < s \leq 1$ olmak üzere konkav k fonksiyonu için Teorem 24 eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4^{2-\frac{1}{q}}} \left[\left(\left(10\sqrt{e} - 3e - \frac{33}{4} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(2e - 6\sqrt{e} + \frac{19}{4} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\left(2e - 6\sqrt{e} + \frac{19}{4} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(10\sqrt{e} - 3e - \frac{33}{4} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{2(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{4^{2-\frac{1}{q}}} \left[\frac{\left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q + \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \\ & = \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{2^{3-\frac{2}{q}}} \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|^q, \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right). \end{aligned}$$

Bu şekilde Teorem 24 eşitsizliğinin Teorem 22 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç verdiği görülür. ■

Sonuç 9. Teorem 24'te $q = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{I}(\sqrt{\psi\ell}) + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right)}{2} - \frac{2}{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2} \int_{\sqrt{\psi\ell}}^{\frac{\psi+\ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2}{2} \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) \mathcal{A} \left(|\mathfrak{I}'(\sqrt{\psi\ell})|, \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right| \right). \end{aligned}$$

Lemma 5 Ostrowski tipli bir lemma olduğu için tercih edilmiştir.

Lemma 5. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm, $\psi, \ell \in I$, $\psi < \ell$ olsun. Eğer $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ ise

$$\mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du = (\ell - \psi) \int_0^1 p(\lambda) \mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell) d\lambda$$

eşitliği geçerlidir. Her $\lambda \in [0,1]$ için

$$p(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \lambda \in \left[0, \frac{\ell - x}{\ell - \psi}\right] \\ \lambda - 1, & \lambda \in \left(\frac{\ell - x}{\ell - \psi}, 1\right] \end{cases}$$

dir. Burada $x \in [\psi, \ell]$ 'dir (Alomari and Darus 2010).

İspat: İki parçaya kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 p(\lambda) \Im'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \lambda \Im'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell) d\lambda + \int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 (\lambda-1) \Im'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell) d\lambda \\ &= \lambda \frac{\Im(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)}{\psi - \ell} \Big|_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \frac{\Im(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)}{\psi - \ell} d\lambda \\ &\quad + (\lambda-1) \frac{\Im(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)}{\psi - \ell} \Big|_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 - \int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 \frac{\Im(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)}{\psi - \ell} d\lambda \\ &= \frac{\ell-x}{(\ell-\psi)^2} \Im(x) - \int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \frac{\Im(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)}{\psi - \ell} d\lambda + \frac{x-\psi}{(\ell-\psi)^2} \Im(x) - \int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 \frac{\Im(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)}{\psi - \ell} d\lambda \\ &= \frac{1}{\ell - \psi} \Im(x) - \frac{1}{(\ell - \psi)^2} \int_{\psi}^{\ell} \Im(u) du \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan eşitlik $(\ell - \psi)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} &\ell - \psi \frac{1}{\ell - \psi} \Im(x) - (\ell - \psi) \frac{1}{(\ell - \psi)^2} \int_{\psi}^{\ell} \Im(u) du \\ &= \Im(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \Im(u) du \end{aligned}$$

Lemma 5'in sol tarafı elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

Teorem 25. $\Im: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\psi, \ell \in I$, $\psi < \ell$ ve $\Im' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\Im'|$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\left| \Im(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \Im(u) du \right| \\ &\leq \left((\ell - \psi)(e + 1) - \frac{(x - \psi)^2 + (\ell - x)^2}{2(\ell - \psi)} - (2x - 3\psi + \ell)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \right) |\Im'(\psi)| \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{(\ell - \psi)(2e + 1)}{2} + \frac{(\ell - x)(x - \psi)}{\ell - \psi} - (3\ell - 2x - \psi)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $x \in [\psi, \ell]$ dir.

İspat: Lemma 5'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \leq (\ell - \psi) \left\{ \int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} |\lambda| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda + \int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 |\lambda - 1| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda \right\}$$

yazılır. $|\mathfrak{I}'|$ üstel tipli konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\ & \leq (\ell - \psi) \left\{ \int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \lambda [(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)| + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|] d\lambda \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 (1-\lambda) [(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)| + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|] d\lambda \right\} \\ & = (\ell - \psi) \left\{ \left(1 - \frac{(\ell - x)^2}{2(\ell - \psi)^2} - \frac{(x - \psi)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}}{\ell - \psi} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)| \right. \\ & \quad \left. + \left(e - \frac{(\ell - x)^2}{2(\ell - \psi)^2} + \frac{(\psi - 2\ell + x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell - \psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)| \right. \\ & \quad \left. + \left(e - e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(x - \psi) \left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} + 1 \right)}{\ell - \psi} - \frac{(x - \psi)(\psi - 2\ell + x)}{2(\ell - \psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)| \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\psi^2 - 2\psi(2\ell - x) - 2(\ell - \psi)(\ell - x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} + 2\ell^2 - x^2}{2(\ell - \psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)| \right\} \\ & = \left((\ell - \psi)(e + 1) - \frac{(x - \psi)^2 + (\ell - x)^2}{2(\ell - \psi)} - (2x - 3\psi + \ell)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)| \\ & \quad + \left(\frac{(\ell - \psi)(2e + 1)}{2} + \frac{(\ell - x)(x - \psi)}{\ell - \psi} - (3\ell - 2x - \psi)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 10. Teorem 25'te $x = \frac{\psi + \ell}{2}$ olarak alınırse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \leq (\ell - \psi) \left(e + \frac{3}{4} - 2\sqrt{e} \right) (|\mathfrak{I}'(\psi)| + |\mathfrak{I}'(\ell)|).$$

Teorem 26. $\mathfrak{I}: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\psi, \ell \in I$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\ & \leq \frac{1}{(\ell - \psi)^{\frac{1}{p}} (p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (\ell - x)^{1+\frac{1}{p}} \left(\left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} - 1 \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(e - e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (x - \psi)^{\frac{p+1}{p}} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\left(e - e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{x-\psi}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left(e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - \frac{x-\psi}{\ell-\psi} - 1 \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $x \in [\psi, \ell]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 5'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\ & \leq (\ell - \psi) \left\{ \int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} |\lambda| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda + \int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 |\lambda - 1| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Hölder integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ nun üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\ & \leq (\ell - \psi) \left\{ \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} |\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 |\lambda - 1|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\ell - \psi) \left\{ \left(\frac{\left(\frac{\ell - x}{\ell - \psi} \right)^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} [(e^\lambda - 1)|\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1)|\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\left(\frac{x - \psi}{\ell - \psi} \right)^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 [(e^\lambda - 1)|\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1)|\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \frac{1}{(\ell - \psi)^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (\ell - x)^{\frac{p+1}{p}} \left(\left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} - 1 \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(e - e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (x - \psi)^{1+\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\left(e - e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{x-\psi}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left(e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - \frac{x-\psi}{\ell-\psi} - 1 \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 11. Teorem 26'da $x = \frac{\psi + \ell}{2}$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left| \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
&\leq \frac{\ell - \psi}{2^{1+\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(\left(\sqrt{e} - \frac{3}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left(e - \sqrt{e} - \frac{1}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(e - \sqrt{e} - \frac{1}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left(\sqrt{e} - \frac{3}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Teorem 27. $\mathfrak{I}: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\psi, \ell \in I$, $\psi < \ell$, $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&\left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
&\leq \frac{1}{2^{1-\frac{1}{q}}(\ell - \psi)^{1-\frac{2}{q}}} \left\{ (\ell - x)^{2-\frac{2}{q}} \left(\left(1 - \frac{(\ell - x)^2}{2(\ell - \psi)^2} - \frac{(x - \psi)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}}{\ell - \psi} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(e - \frac{(\ell - x)^2}{2(\ell - \psi)^2} + \frac{(\psi - 2\ell + x)e^{\frac{\psi-x}{\ell-\psi}}}{\ell - \psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + (x - \psi)^{2-\frac{2}{q}} \left(\left(e - e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(x-\psi)\left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} + 1\right)}{\ell - \psi} - \frac{(x-\psi)(\psi-2\ell+x)}{2(\ell-\psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{(\ell - x)(\ell - 2\psi + x)}{2(\ell - \psi)^2} - \frac{(\ell - x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell - \psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $x \in [\psi, \ell]$ ve $q \geq 1$ dir.

İspat: Lemma 5'e integraller için üçgen eşitsiliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
& \leq (\ell - \psi) \left\{ \int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} |\lambda| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda + \int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 |\lambda - 1| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Power-Mean integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ nun üstel tipli konveks bir fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
& \leq (\ell - \psi) \left\{ \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} |\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} |\lambda| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 |\lambda - 1| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 |\lambda - 1| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq (\ell - \psi) \left\{ \left(\frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \lambda [(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{(x-\psi)^2}{2(\ell-\psi)^2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 (1-\lambda) [(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{1-\frac{1}{q}}(\ell-\psi)^{1-\frac{2}{q}}} \left\{ (\ell-x)^{2-\frac{2}{q}} \left(\left(1 - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} - \frac{(x-\psi)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(e - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} + \frac{(\psi-2\ell+x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + (x-\psi)^{2-\frac{2}{q}} \left(\left(e - e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(x-\psi)\left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}+1\right)}{\ell-\psi} - \frac{(x-\psi)(\psi-2\ell+x)}{2(\ell-\psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{(\ell-x)(\ell-2\psi+x)}{2(\ell-\psi)^2} - \frac{(\ell-x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 12. Teorem 27’de $q = 1$ olarak alınırsa Teorem 25 elde edilir.

Sonuç 13. Teorem 27’de $x = \frac{\psi+\ell}{2}$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left| \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
&\leq \frac{\ell-\psi}{2^{3-\frac{3}{q}}} \left\{ \left(\left(\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{e}}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left(e - \frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{e}}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(e - \frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{e}}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left(\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{e}}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Teorem 28. $\mathfrak{I}: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\psi, \ell \in I$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&\left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
&\leq \frac{(\ell-\psi)^2}{\ell-x} \left\{ \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} + \frac{\psi-2\ell+x}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} - \frac{e(x-\psi)}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{(p+2)} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\left(1 - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} - \frac{(x-\psi)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& \left. + \left(e - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} + \frac{(\psi-2\ell+x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\
& + \frac{(\ell-\psi)^2}{x-\psi} \left\{ \left(\frac{1}{p+2} \left(\frac{x-\psi}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(e - e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(x-\psi)\left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}+1\right)}{\ell-\psi} - \frac{(x-\psi)(\psi-2\ell+x)}{2(\ell-\psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{(\ell-x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} + \frac{(\ell-x)(\ell-2\psi+x)}{2(\ell-\psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \left(\frac{x-\psi}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} - \frac{(\ell-x)(e-1)}{\ell-\psi} - \frac{1}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& \left. + \left(e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - \frac{1}{2} - \frac{(\ell+x)^2 + 4\psi(\psi-\ell-x)}{2(\ell-\psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $x \in [\psi, \ell]$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 5'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
& \leq (\ell-\psi) \left\{ \int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} |\lambda| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda + \int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 |\lambda-1| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Hölder-İşcan integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ nun üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\ell-\psi)^2}{\ell-x} \left\{ \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} - \lambda \right) |\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} - \lambda \right) |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \lambda |\lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \lambda |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& + \frac{(\ell-\psi)^2}{x-\psi} \left\{ \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 (1-\lambda) |\lambda-1|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 (1-\lambda) |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 \left(\lambda - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right) |\lambda-1|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 \left(\lambda - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{(\ell-\psi)^2}{\ell-x} \left\{ \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} - \lambda \right) [(e^\lambda - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{(\ell-x)^2}{(\ell-\psi)^2(p+2)} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \lambda [(e^\lambda - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& + \frac{(\ell-\psi)^2}{x-\psi} \left\{ \left(\frac{1}{p+2} \left(\frac{x-\psi}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 (1-\lambda) [(e^\lambda - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \left(\frac{x-\psi}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 \left(\lambda - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right) [(e^\lambda - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \frac{(\ell-\psi)^2}{\ell-x} \left\{ \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} + \frac{\psi-2\ell+x}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
& \quad + \left(e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} - \frac{e(x-\psi)}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \Bigg)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{p+2} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\left(1 - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} - \frac{(x-\psi)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(e - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} + \frac{(\psi-2\ell+x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\
& + \frac{(\ell-\psi)^2}{x-\psi} \left\{ \left(\frac{1}{p+2} \left(\frac{x-\psi}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(e - e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(x-\psi) \left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} + 1 \right)}{\ell-\psi} - \frac{(x-\psi)(\psi-2\ell+x)}{2(\ell-\psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} - \frac{(\ell-x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} + \frac{(\ell-x)(\ell-2\psi+x)}{2(\ell-\psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \left(\frac{x-\psi}{\ell-\psi} \right)^{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\left(e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(\ell-x)^2}{2(\ell-\psi)^2} - \frac{(\ell-x)(\ell-1)}{\ell-\psi} - \frac{1}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& + \left. \left(e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - \frac{1}{2} - \frac{(\ell+x)^2+4\psi(\psi-\ell-x)}{2(\ell-\psi)^2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 29. $\mathfrak{I}: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\psi, \ell \in I$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\ell-\psi)^2}{\ell-x} \left\{ \left(\frac{(\ell-x)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3\ell-2\psi-x+(2\psi-\ell-x)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} - \frac{(\ell-x)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{(-2\psi+3\ell-x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - e(x+\ell-2\psi)}{\ell-\psi} - \frac{(\ell-x)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{(\ell-x)^3}{3(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\left(1 + \frac{(x-\psi)^2}{(\ell-\psi)^2} \right) e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(\ell-x)^3}{3(\ell-\psi)^3} - 2 \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& + \left. \left(e \left(2 - \left(1 + \frac{(\psi-2\ell+x)^2}{(\ell-\psi)^2} \right) e^{-\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \right) - \frac{(\ell-x)^3}{3(\ell-\psi)^3} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\
& + \frac{(\ell-\psi)^2}{x-\psi} \left\{ \left(\frac{(x-\psi)^3}{3(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(2e - \frac{(x-\psi)^3}{3(\ell-\psi)^3} - \left(5 + \frac{(4\psi-3\ell-x)(\ell-x)}{(\ell-\psi)^2} \right) e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{-(x-\psi)^3}{3(\ell-\psi)^3} + \left(1 + \frac{(\ell-x)^2}{(\ell-\psi)^2} \right) e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - 2 \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{(x-\psi)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{1}{6(\ell-\psi)} \left(\frac{(\ell-x)^2(3\psi-2\ell-x)}{(\ell-\psi)^2} + 6e(\psi-2\ell+x) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 6(-3\psi+2\ell+x)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} + \psi+2\ell-3x \right) \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{2\ell-3\psi+x+(\psi-2\ell+x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} + \frac{\psi+2\ell-3x}{6(\ell-\psi)} + \frac{(\ell-x)^2(3\psi-2\ell-x)}{6(\ell-\psi)^3} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $x \in [\psi, \ell]$ ve $q \geq 1$ dir.

İspat: Lemma 5'e integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \\
& \leq (\ell-\psi) \left\{ \int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} |\lambda| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda + \int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 |\lambda-1| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)| d\lambda \right\} \\
& \leq \frac{(\ell-\psi)^2}{\ell-x} \left\{ \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} - \lambda \right) |\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} - \lambda \right) |\lambda| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \lambda |\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \lambda |\lambda| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& + \frac{(\ell-\psi)^2}{x-\psi} \left\{ \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 (1-\lambda) |\lambda-1| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 (1-\lambda) |\lambda-1| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 \left(\lambda - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right) |\lambda-1| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 \left(\lambda - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right) |\lambda-1| |\mathfrak{I}'(\lambda\psi + (1-\lambda)\ell)|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Geliştirilmiş Power-Mean integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ nun üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{I}(x) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(u) du \right| \leq \frac{(\ell-\psi)^2}{\ell-x} \left\{ \left(\frac{(\ell-x)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \left(\frac{\ell-x}{\ell-\psi} - \lambda \right) \lambda [(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{(\ell-x)^3}{3(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \lambda^2 [(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& \quad + \frac{(\ell-\psi)^2}{x-\psi} \left\{ \left(\frac{(x-\psi)^3}{3(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 (1-\lambda)^2 [(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{(x-\psi)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}^1 \left(\lambda - \frac{\ell-x}{\ell-\psi} \right) (1-\lambda) [(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \frac{(\ell-\psi)^2}{\ell-x} \left\{ \left(\frac{(\ell-x)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3\ell-2\psi-x+(2\psi-\ell-x)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}}}{\ell-\psi} - \frac{(\ell-x)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
& \quad + \left. \left(\frac{(-2\psi+3\ell-x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - e(x+\ell-2\psi)}{\ell-\psi} - \frac{(\ell-x)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{(\ell-x)^3}{3(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\left(1 + \frac{(x-\psi)^2}{(\ell-\psi)^2} \right) e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} - \frac{(\ell-x)^3}{3(\ell-\psi)^3} - 2 \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& \quad + \left. \left(e \left(2 - \left(1 + \frac{(\psi-2\ell+x)^2}{(\ell-\psi)^2} \right) e^{-\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \right) - \frac{(\ell-x)^3}{3(\ell-\psi)^3} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& \quad + \frac{(\ell-\psi)^2}{x-\psi} \left\{ \left(\frac{(x-\psi)^3}{3(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(2e - \frac{(x-\psi)^3}{3(\ell-\psi)^3} - \left(5 + \frac{(4\psi-3\ell-x)(\ell-x)}{(\ell-\psi)^2} \right) e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
& \quad + \left. \left(\frac{-(x-\psi)^3}{3(\ell-\psi)^3} + \left(1 + \frac{(\ell-x)^2}{(\ell-\psi)^2} \right) e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}} - 2 \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{(x-\psi)^3}{6(\ell-\psi)^3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{1}{6(\ell-\psi)} \left(\frac{(\ell-x)^2(3\psi-2\ell-x)}{(\ell-\psi)^2} + 6e(\psi-2\ell+x) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + 6(-3\psi+2\ell+x)e^{\frac{\ell-x}{\ell-\psi}} + \psi+2\ell-3x \right) \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{2\ell - 3\psi + x + (\psi - 2\ell + x)e^{\frac{x-\psi}{\ell-\psi}}}{\ell - \psi} + \frac{\psi + 2\ell - 3x}{6(\ell - \psi)} + \frac{(\ell - x)^2(3\psi - 2\ell - x)}{6(\ell - \psi)^3} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

elde edilir. ■

Daha önce birinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için yazılan lemmadan esinlenerek ikinci mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için aşağıdaki lemma yazılmıştır.

Lemma 6. $\mathfrak{I}: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$, $n \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ olmak üzere eğer $\mathfrak{I}'' \in L[\psi, \ell]$ ise

$$\begin{aligned} I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell]) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[\mathfrak{I} \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) + \mathfrak{I} \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right] - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \\ &\quad \times \left[\int_0^1 \lambda(1-\lambda) \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) d\lambda \right] \end{aligned}$$

dir (Yıldız and Yergöz 2023).

İspat: $n \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ olsun. Aşağıdaki integrale kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_i &= \int_0^1 \lambda(1-\lambda) \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) d\lambda \\ &= \frac{n}{\psi - \ell} (\lambda - \lambda^2) \mathfrak{I}' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \Bigg|_0^1 \\ &\quad - \frac{n}{\psi - \ell} \int_0^1 (1-2\lambda) \mathfrak{I}' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) d\lambda \\ &= \frac{n}{\ell - \psi} \int_0^1 (1-2\lambda) \mathfrak{I}' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) d\lambda \end{aligned}$$

olur. Tekrardan kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{n}{\ell - \psi} \int_0^1 (1-2\lambda) \mathfrak{I}' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) d\lambda \\ &= \frac{n}{\ell - \psi} \left[\frac{n}{\psi - \ell} (1-2\lambda) \mathfrak{I} \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right] \Bigg|_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2n}{\psi - \ell} \int_0^1 \Im \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) d\lambda \Big] \\
& = \frac{n^2}{(\ell - \psi)^2} \left\{ \Im \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) + \Im \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right\} \\
& \quad - \frac{2n^2}{(\ell - \psi)^2} \int_0^1 \Im \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) d\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$x = \lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}$$

dönüşümü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
I_i &= \frac{n^2}{(\ell - \psi)^2} \left\{ \Im \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) + \Im \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right\} \\
& \quad - \frac{2n^3}{(\ell - \psi)^3} \int_{\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n}}^{\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}} \Im(x) dx
\end{aligned}$$

olur. I_i 'nin her iki tarafı $\frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} I_i &= \frac{1}{2n} \left[\Im \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) + \Im \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n}}^{\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}} \Im(x) dx
\end{aligned}$$

olur. Son olarak her iki tarafa toplam sembolü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} I_i &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[\Im \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) + \Im \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{\ell - \psi} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n}}^{\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}} \Im(x) dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left[\Im \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) + \Im \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right] - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \Im(x) dx
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu şekilde ispat tamamlanır. ■

Teorem 30. $\Im: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir dönüşüm olmak üzere $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\Im'' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\Im''|, [\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$|I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right) \\ \times \mathcal{A} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|, \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right| \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda \in [0,1]$ ve $\mathcal{A}(u, v)$ ise u ile v 'nin aritmetik ortalamasıdır.

İspat: Lemma 6'ya integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \\ \times \left[\int_0^1 |\lambda - \lambda^2| \left| \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right| d\lambda \right]$$

yazılır. $|\mathfrak{I}''|$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$|I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \int_0^1 |\lambda - \lambda^2| \left[(e^\lambda - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right| \right. \\ \left. + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right| \right] d\lambda \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left[\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right| \int_0^1 (\lambda - \lambda^2) (e^\lambda - 1) d\lambda \right. \\ \left. + \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right| \int_0^1 (\lambda - \lambda^2) (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right] \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right) \\ \times \mathcal{A} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|, \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right| \right)$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (\lambda - \lambda^2) (e^\lambda - 1) d\lambda = \int_0^1 (\lambda - \lambda^2) (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = \frac{17}{6} - e$$

dir. ■

Sonuç 14. Teorem 30'da

i. $n = 1$ seçilirse

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} - \frac{1}{\ell - \psi} \int_\psi^\ell \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq (\ell - \psi)^2 \left(\frac{17}{6} - e \right) \frac{|\mathfrak{I}''(\psi)| + |\mathfrak{I}''(\ell)|}{2}$$

eşitsizliği,

ii. $n = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{4} \left[\mathfrak{I}(\psi) + 2\mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) + \mathfrak{I}(\ell) \right] - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\ell - \psi)^2}{8} \left(\frac{17}{6} - e \right) \left[\frac{|\mathfrak{I}''(\psi)| + |\mathfrak{I}''(\ell)|}{2} + \left| \mathfrak{I}''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 31. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}'' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{I}''|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} |I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1)(e-2)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}''\left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n}\right) \right|^q, \left| \mathfrak{I}''\left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}\right) \right|^q \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda \in [0, 1]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\mathcal{A}$ ise aritmetik ortalamadır.

İspat: Lemma 6'ya integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\lambda - \lambda^2| \left| \mathfrak{I}''\left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}\right) \right| d\lambda \right] \end{aligned}$$

yazılır. Hölder integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}''|^q$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} |I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left(\int_0^1 |\lambda - \lambda^2|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 \left| \mathfrak{I}''\left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left(\int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[(e^\lambda - 1) \left| \mathfrak{I}''\left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n}\right) \right|^q \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}''\left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}\right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (e^\lambda - 1) d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) (e-2)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q, \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^p d\lambda &= \beta(p+1, p+1) \\
\int_0^1 (e^\lambda - 1) d\lambda &= \int_0^1 (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = e - 2
\end{aligned}$$

dir. ■

Sonuç 15. Teorem 31’de

i. $n = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} - \frac{1}{\ell - \psi} \int_\psi^\ell \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
&\leq \frac{(\ell - \psi)^2}{2} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) (e-2)^{\frac{1}{q}} (|\mathfrak{I}''(\psi)|^q + |\mathfrak{I}''(\ell)|^q)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği

ii. $n = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{4} \left[\mathfrak{I}(\psi) + 2\mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) + \mathfrak{I}(\ell) \right] - \frac{1}{\ell - \psi} \int_\psi^\ell \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq \frac{(\ell - \psi)^2}{16} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) \\
&\quad \times (e-2)^{\frac{1}{q}} \left[\left(|\mathfrak{I}''(\psi)|^q + \left| \mathfrak{I}''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left| \mathfrak{I}''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q + |\mathfrak{I}''(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 32. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}'' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{I}''|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$|I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{12^{1-\frac{1}{q}} n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right)^{\frac{1}{q}} \\ \times \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q, \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda \in [0, 1]$ ve $q \geq 1$ 'dir.

İspat: Lemma 6'ya integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\lambda - \lambda^2| \left| \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right| d\lambda \right]$$

yazılır. Power-Mean integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}''|^q$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$|I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left(\int_0^1 |\lambda - \lambda^2| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left(\int_0^1 |\lambda - \lambda^2| \left| \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left(\int_0^1 (\lambda - \lambda^2) d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (\lambda - \lambda^2) \left[(e^\lambda - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \right. \right. \\ \left. \left. + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{6} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (\lambda - \lambda^2) (e^\lambda - 1) d\lambda \right. \\ \left. + \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (\lambda - \lambda^2) (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{12^{1-\frac{1}{q}} n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right)^{\frac{1}{q}} \\ \times \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q, \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)$$

olur.

Burada

$$\int_0^1 (\lambda - \lambda^2) dt = \frac{1}{6}$$

dır. ■

Sonuç 16. Teorem 32’de $q = 1$ olarak alınırsa Teorem 30 elde edilir.

Sonuç 17. Teorem 32’de

i. $n = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Im(\psi) + \Im(\ell)}{2} - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \Im(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\ell - \psi)^2}{12} (17 - 6e)^{\frac{1}{q}} (|\Im''(\psi)|^q + |\Im''(\ell)|^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği

ii. $n = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{4} \left[\Im(\psi) + 2\Im\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) + \Im(\ell) \right] - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \Im(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\ell - \psi)^2}{96} (17 - 6e)^{\frac{1}{q}} \left[\left(|\Im''(\psi)|^q + \left| \Im''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left| \Im''\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q + |\Im''(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 33. $\Im: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\Im'' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\Im''|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} |I_n(\Im_n, [\psi, \ell])| & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left\{ \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) \right. \\ & \times \left(\left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \Im''\left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n}\right) \right|^q + \frac{1}{2} \left| \Im''\left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \left(\frac{1}{2} \left| \Im''\left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n}\right) \right|^q \right. \\ & \left. \left. + \left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \Im''\left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda \in [0,1]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 6'ya integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \times \left[\int_0^1 |\lambda - \lambda^2| \left| \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right| d\lambda \right]$$

yazılır. Hölder-İşcan integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}''|^q$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} |I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\int_0^1 (1-\lambda) |\lambda - \lambda^2|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \times \left(\int_0^1 (1-\lambda) \left| \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \lambda |\lambda - \lambda^2|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 \lambda \left| \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^{p+1} d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-\lambda) \left[(e^\lambda - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \lambda^{p+1} (1-\lambda)^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \lambda \left[(e^\lambda - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left\{ \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (1-\lambda)(e^\lambda - 1) d\lambda \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \mathfrak{S}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (1-\lambda) (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \left(\left| \mathfrak{S}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \lambda (e^\lambda - 1) d\lambda \right. \\
& \left. + \left| \mathfrak{S}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \lambda (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\
& = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left\{ \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) \left(\left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \mathfrak{S}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \right. \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left| \mathfrak{S}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \left(\frac{1}{2} \left| \mathfrak{S}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \mathfrak{S}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\}
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\int_0^1 \lambda^p (1-\lambda)^{p+1} d\lambda = \beta(p+1, p+2)$$

$$\int_0^1 \lambda^{p+1} (1-\lambda)^p d\lambda = \beta(p+2, p+1)$$

$$\int_0^1 (1-\lambda)(e^\lambda - 1) d\lambda = \int_0^1 \lambda(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = e - \frac{5}{2}$$

$$\int_0^1 (1-\lambda)(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = \int_0^1 \lambda(e^\lambda - 1) d\lambda = \frac{1}{2}$$

dir. ■

Sonuç 18. Teorem 33, Teorem 31'den daha iyi bir sonuç verir.

İspat:

$$\beta(p+1, p+2) = \beta(p+2, p+1) = \frac{p+1}{2(p+1)} \beta(p+1, p+1)$$

özellği ve $k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = x^s, 0 < s \leq 1$ fonksiyonunun konkav olduğu ayrıca konkav fonksiyonlar için

$$\frac{u^s + v^s}{2} \leq \left(\frac{u + v}{2} \right)^s$$

özellği de kullanılırsa Teorem 33'ün sağ tarafı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left\{ \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) \right. \\ & \quad \times \left(\left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + \frac{1}{2} \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \\ & \quad \times \left(\frac{1}{2} \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + \left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\ & \leq 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) \\ & \quad \times \left(\frac{(e-2) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + (e-2) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left[\frac{p+1}{2(p+1)} \beta(p+1, p+1) \right]^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\frac{(e-2) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + (e-2) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1) (e-2)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q, \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right). \end{aligned}$$

Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 19. Teorem 33'te $n = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\ell - \psi)^2}{2} \left[\beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+2) \left(\left(e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}''(\psi)|^q + \frac{1}{2} |\mathfrak{I}''(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \beta^{\frac{1}{p}}(p+2, p+1) \left(\frac{1}{2} |\mathfrak{I}''(\psi)|^q + \left(e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}''(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 34. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $\mathfrak{I}'' \in L[\psi, \ell]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{I}''|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} |I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \left\{ \left(\left(\frac{131}{12} - 4e \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + \left(3e - \frac{97}{12} \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\left(3e - \frac{97}{12} \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + \left(\frac{131}{12} - 4e \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda \in [0,1]$ ve $q \geq 1$ 'dir.

İspat: Lemma 6'ya integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left[\int_0^1 |\lambda - \lambda^2| \left| \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right| d\lambda \right] \end{aligned}$$

yazılır. Geliştirilmiş Power-Mean integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}''|^q$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} |I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\int_0^1 (1-\lambda) |t - \lambda^2| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ & \times \left(\int_0^1 (1-\lambda) |\lambda - \lambda^2| \left| \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 \lambda |\lambda - \lambda^2| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left(\int_0^1 \lambda |\lambda - \lambda^2| \left| \mathfrak{I}'' \left(\lambda \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} + (1-\lambda) \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left[\left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-\lambda)(\lambda - \lambda^2) \left[(e^\lambda - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \lambda(\lambda - \lambda^2) \left[(e^\lambda - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left\{ \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (1-\lambda)(\lambda - \lambda^2)(e^\lambda - 1) d\lambda \right. \\
& \quad \left. + \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 (1-\lambda)(\lambda - \lambda^2)(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \lambda(\lambda - \lambda^2)(e^\lambda - 1) d\lambda \right. \\
& \quad \left. + \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \int_0^1 \lambda(\lambda - \lambda^2)(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \left(\left(\frac{131}{12} - 4e \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + \left(3e - \frac{97}{12} \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(\left(3e - \frac{97}{12} \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + \left(\frac{131}{12} - 4e \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

olur. Burada

$$\int_0^1 (1-\lambda) |\lambda - \lambda^2| d\lambda = \int_0^1 \lambda |\lambda - \lambda^2| d\lambda = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^1 (1-\lambda)(\lambda - \lambda^2)(e^\lambda - 1) d\lambda = \int_0^1 \lambda(\lambda - \lambda^2)(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = \frac{131}{12} - 4e$$

$$\int_0^1 (1-\lambda)(\lambda - \lambda^2)(e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = \int_0^1 \lambda(\lambda - \lambda^2)(e^\lambda - 1) d\lambda = 3e - \frac{97}{12}$$

dir. ■

Sonuç 20: Teorem 34, Teorem 32'den daha iyi bir sonuç verir.

İspat: $k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = x^s$, $0 < s \leq 1$ olmak üzere konkav k fonksiyonu için Teorem 34'teki eşitsizliğin sağ tarafı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \left\{ \left(\left(\frac{131}{12} - 4e \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + \left(3e - \frac{97}{12} \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\left(3e - \frac{97}{12} \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + \left(\frac{131}{12} - 4e \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \leq 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{12} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \left[\frac{\left(\left(\frac{17}{6} - e \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q + \left(\frac{17}{6} - e \right) \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}}{2} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{12^{1-\frac{1}{q}} n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right)^{\frac{1}{q}} \\ \times \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|^q, \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right|^q \right).$$

Böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 21. Teorem 34'te $q = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|I_n(\mathfrak{I}_n, [\psi, \ell])| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2}{n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right) \\ \times \mathcal{A} \left(\left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right) \right|, \left| \mathfrak{I}'' \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right) \right| \right).$$

Sonuç 22. Teorem 34'te $n = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq \frac{(\ell - \psi)^2}{24} \\ \times \left\{ ((131 - 48e)|\mathfrak{I}''(\psi)|^q + (36e - 97)|\mathfrak{I}''(\ell)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + ((36e - 97)|\mathfrak{I}''(\psi)|^q + (131 - 48e)|\mathfrak{I}''(\ell)|^q)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Lemma 7'de δ ve μ gibi iki farklı reel sabit olduğu ve bu sabitlere verilebilecek farklı değerler için yeni sonuçlar elde edilebileceğinden bu lemma seçilmiştir.

Lemma 7. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I$ ve $\psi < \ell$ olsun. Eğer $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ ve $\delta, \mu \in \mathbb{R}$ ise

$$\frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \\ = \frac{\ell - \psi}{4} \int_0^1 \left[(1 - \delta - \lambda) \mathfrak{I}'\left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2}\right) + (\mu - \lambda) \mathfrak{I}'\left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell\right) \right] d\lambda$$

eşitliği geçerlidir (Xi and Qi 2012).

İspat: Lemma 7'nin sağ tarafındaki integrali parçalara ayırıp kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (1 - \delta - \lambda) \mathfrak{I}' \left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) d\lambda \\
&= -\frac{2}{\ell - \psi} \left[(1 - \delta - \lambda) \mathfrak{I} \left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \mathfrak{I} \left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) d\lambda \right] \\
&= \frac{2}{\ell - \psi} \left[\delta \mathfrak{I}(\psi) + (1 - \delta) \mathfrak{I} \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right] - \frac{4}{(\ell - \psi)^2} \int_{\psi}^{\frac{\psi + \ell}{2}} \mathfrak{I}(x) dx \tag{1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (\mu - \lambda) \mathfrak{I}' \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell \right) d\lambda \\
&= -\frac{2}{\ell - \psi} \left[(\mu - \lambda) \mathfrak{I} \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \mathfrak{I} \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell \right) d\lambda \right] \\
&= \frac{2}{\ell - \psi} \left[(1 - \mu) \mathfrak{I} \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) + \mu \mathfrak{I}(\ell) \right] - \frac{4}{(\ell - \psi)^2} \int_{\frac{\psi + \ell}{2}}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \tag{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan (1) ve (2) ayrı ayrı $\frac{\ell - \psi}{4}$ ile çarpılıp toplanırsa Lemma 7'yi verecektir. ■

Teorem 35. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^\circ$ ve $\psi < \ell$ olsun. $0 \leq \delta, \mu \leq 1$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I} \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
&\leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(-\delta^2 + (e + 2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)| \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} [\delta^2 + (\delta - 1)^2 + \mu^2 + (\mu - 1)^2] + 2(e^\delta + e^\mu) - e(\delta + \mu) - \delta - \mu - 2 \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| + \left(-\mu^2 + (e + 2)\mu + 2e^{1-\mu} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)| \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 7'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I} \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
&\leq \frac{\ell - \psi}{4} \int_0^1 \left| (1 - \delta - \lambda) \mathfrak{I}' \left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) + (\mu - \lambda) \mathfrak{I}' \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell \right) \right| d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\ell - \psi}{4} \int_0^1 \left[|1 - \delta - \lambda| \left| \mathfrak{I}' \left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| \right. \\
&\quad \left. + |\mu - \lambda| \left| \mathfrak{I}' \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell \right) \right| \right] d\lambda \\
&= \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \int_0^1 |1 - \delta - \lambda| \left| \mathfrak{I}' \left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 |\mu - \lambda| \left| \mathfrak{I}' \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell \right) \right| d\lambda \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. $|\mathfrak{I}'|$ 'nin $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I} \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
&\leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \int_0^1 |1 - \delta - \lambda| \left[(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)| + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| \right] d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 |\mu - \lambda| \left[(e^{\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)| \right] d\lambda \right\} \\
&= \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(-\delta^2 + (e + 2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)| \right. \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} [\delta^2 + (\delta - 1)^2] + 2e^{\delta} - e\delta - \delta - 1 \right) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} [\mu^2 + (\mu - 1)^2] + 2e^{\mu} - e\mu - \mu - 1 \right) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| \\
&\quad \left. + \left(-\mu^2 + (e + 2)\mu + 2e^{1-\mu} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)| \right\} \\
&= \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(-\delta^2 + (e + 2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)| \right. \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} [\delta^2 + (\delta - 1)^2 + \mu^2 + (\mu - 1)^2] + 2(e^{\delta} + e^{\mu}) - e(\delta + \mu) - \delta - \mu - 2 \right) \\
&\quad \times \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| + \left(-\mu^2 + (e + 2)\mu + 2e^{1-\mu} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)| \Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |\mu - \lambda| (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = -\mu^2 + (e + 2)\mu + 2e^{1-\mu} - e - \frac{5}{2} \\
&\int_0^1 |\mu - \lambda| (e^{\lambda} - 1) d\lambda = -\frac{1}{2} [\mu^2 + (\mu - 1)^2] + 2e^{\mu} - e\mu - \mu - 1
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 |1 - \delta - \lambda|(e^\lambda - 1)d\lambda = -\delta^2 + (e + 2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2}$$

$$\int_0^1 |1 - \delta - \lambda|(e^{1-\lambda} - 1)d\lambda = -\frac{1}{2}[\delta^2 + (\delta - 1)^2] + 2e^\delta - e\delta - \delta - 1$$

dir. ■

Teorem 36. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^\circ$ ve $\psi < \ell$ olsun. $0 \leq \delta, \mu \leq 1$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_\psi^\ell \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(\ell - \psi)(e - 2)^{\frac{1}{q}}}{4(p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (\delta^{p+1} + (1 - \delta)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + (\mu^{p+1} + (1 - \mu)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \left(\left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q + |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 7'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_\psi^\ell \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \int_0^1 |1 - \delta - \lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\psi + (1 - \lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| d\lambda \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\mu - \lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda)\ell\right) \right| d\lambda \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Hölder eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ 'nin $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_\psi^\ell \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(\int_0^1 |1 - \delta - \lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\psi + (1 - \lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 |\mu - \lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda)\ell\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 |\mu - \lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \mathfrak{I}' \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda)\ell \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& \leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(\frac{\delta^{p+1} + (1 - \delta)^{p+1}}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[(e^\lambda - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\mu^{p+1} + (1 - \mu)^{p+1}}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[(e^\lambda - 1) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& = \frac{\ell - \psi}{4(p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (\delta^{p+1} + (1 - \delta)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \left((e - 2) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e - 2) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (\mu^{p+1} + (1 - \mu)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \left((e - 2) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q + (e - 2) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& = \frac{(\ell - \psi)(e - 2)^{\frac{1}{q}}}{4(p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ (\delta^{p+1} + (1 - \delta)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (\mu^{p+1} + (1 - \mu)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \left(\left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q + |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 |1 - \delta - \lambda|^p d\lambda = \frac{\delta^{p+1} + (1 - \delta)^{p+1}}{p + 1}$$

$$\int_0^1 |\mu - \lambda|^p d\lambda = \frac{\mu^{p+1} + (1 - \mu)^{p+1}}{p + 1}$$

dir. ■

Eğer Teorem 36'da $\delta = \mu$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 23. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^\circ$ ve $\psi < \ell$ olsun. $0 \leq \delta \leq 1$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\delta}{2} [\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)] + (1 - \delta) \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{(\ell - \psi)(e - 2)^{\frac{1}{q}}}{4} \left(\frac{\delta^{p+1} + (1 - \delta)^{p+1}}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(|\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q + |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Eğer Teorem 36'da $\delta = \mu = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 24. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^\circ$ ve $\psi < \ell$ olsun. $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right] - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{(\ell - \psi)(e - 2)^{\frac{1}{q}}}{8(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(|\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q + |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Teorem 37. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $q \geq 1$ olsun. $0 \leq \delta, \mu \leq 1$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \delta + \delta^2 \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\left(-\delta^2 + (e + 2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{1}{2} [\delta^2 + (\delta - 1)^2] + 2e^\delta - e\delta - \delta - 1 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{2} - \mu + \mu^2 \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\left(-\frac{1}{2} [\mu^2 + (\mu - 1)^2] + 2e^\mu - e\mu - \mu - 1 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{1}{2} [\mu^2 + (\mu - 1)^2] + 2e^\mu - e\mu - \mu - 1 \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

$$+ \left(-\mu^2 + (e+2)\mu + 2e^{1-\mu} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 7'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2-\delta-\mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\ell-\psi}{4} \left\{ \int_0^1 |1-\delta-\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\psi + (1-\lambda)\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right| d\lambda \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\mu-\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\frac{\psi+\ell}{2} + (1-\lambda)\ell\right) \right| d\lambda \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Power-Mean eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ 'nin $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2-\delta-\mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\ell-\psi}{4} \left\{ \left(\int_0^1 |1-\delta-\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1-\delta-\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\psi + (1-\lambda)\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 |\mu-\lambda| d\lambda \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\mu-\lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\frac{\psi+\ell}{2} + (1-\lambda)\ell\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \leq \frac{\ell-\psi}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \delta + \delta^2 \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \times \left(\int_0^1 |1-\delta-\lambda| \left[(e^{\lambda}-1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda}-1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} - \mu + \mu^2 \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 |\mu-\lambda| \left[(e^{\lambda}-1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q + (e^{1-\lambda}-1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \delta + \delta^2 \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(-\delta^2 + (e+2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(-\frac{1}{2} [\delta^2 + (\delta-1)^2] + 2e^\delta - e\delta - \delta - 1 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} - \mu + \mu^2 \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(-\frac{1}{2} [\mu^2 + (\mu-1)^2] + 2e^\mu - e\mu - \mu - 1 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(-\mu^2 + (e+2)\mu + 2e^{1-\mu} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 25. Teorem 37’de $q = 1$ olarak alınırsa Teorem 35 elde edilir.

Eğer Teorem 37’de $\delta = \mu$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 26. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $q \geq 1$ olsun. $0 \leq \delta \leq 1$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\delta}{2} [\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)] + (1-\delta) \mathfrak{I}\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell-\psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
&\leq \frac{\ell - \psi}{4} \left(\frac{1}{2} - \delta + \delta^2 \right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \left(\left(-\delta^2 + (e+2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(-\frac{1}{2} [\delta^2 + (\delta-1)^2] + 2e^\delta - e\delta - \delta - 1 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(-\frac{1}{2} [\delta^2 + (\delta-1)^2] + 2e^\delta - e\delta - \delta - 1 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi+\ell}{2}\right) \right|^q \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(-\delta^2 + (e+2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Eğer Teorem 37’de $\delta = \mu = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 27. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $q \geq 1$ olsun. $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{I}(\psi) + \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right] - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{(\ell - \psi)(8\sqrt{e} - 2e - 7)^{\frac{1}{q}}}{16} \times \left\{ \left(|\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q + |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Teorem 38. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^\circ$ ve $\psi < \ell$ olsun. $0 \leq \delta, \mu \leq 1$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{\ell - \psi}{4((p+1)(p+2))^{\frac{1}{p}}} \left\{ (\delta^{p+2} + (\delta + p + 1)(1 - \delta)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \right.$$

$$\times \left(\left(e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \frac{1}{2} \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left((1 - \delta)^{p+2} + \delta^{p+1}(-\delta + p + 2) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2} |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left((1 - \mu)^{p+2} + (p + 2 - \mu)\mu^{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(e - \frac{5}{2} \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q + \frac{1}{2} |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left. + (\mu^{p+2} + (\mu + p + 1)(1 - \mu)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2} \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q + \left(e - \frac{5}{2} \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 'dir.

İspat: Lemma 7'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \int_0^1 |1 - \delta - \lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| d\lambda \right.$$

$$\left. + \int_0^1 |\mu - \lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell\right) \right| d\lambda \right\}$$

yazılır. Hölder-İşcan integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ 'nin üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \lambda) |1 - \delta - \lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1 - \lambda) \right. \right. \\
& \quad \times \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\psi + (1 - \lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 \lambda |1 - \delta - \lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \lambda \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\psi + (1 - \lambda)\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 (1 - \lambda) |\mu - \lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \lambda) \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda)\ell\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \lambda |\mu - \lambda|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \lambda \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda\frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda)\ell\right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(\frac{\delta^{p+2} + (\delta + p + 1)(1 - \delta)^{p+1}}{(p + 1)(p + 2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1 - \lambda) \right. \right. \\
& \quad \times \left[(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right] d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{(1 - \delta)^{p+2} + (-\delta + p + 2)\delta^{p+1}}{(p + 1)(p + 2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \lambda [(e^{\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& \quad \left. \left. + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{(1 - \mu)^{p+2} + (p + 2 - \mu)\mu^{p+1}}{(p + 1)(p + 2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1 - \lambda) \left[(e^{\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\frac{\mu^{p+2} + (\mu + p + 1)(1 - \mu)^{p+1}}{(p + 1)(p + 2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \lambda \left[(e^{\lambda} - 1) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(e^{1-\lambda} - 1)|\mathfrak{I}'(\ell)|^q]d\lambda)^{\frac{1}{q}}\Big\} \\
& = \frac{\ell - \psi}{4((p+1)(p+2))^{\frac{1}{p}}}\Big\{(\delta^{p+2} + (\delta + p + 1)(1 - \delta)^{p+1})^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \Big((e - \frac{5}{2})|\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \frac{1}{2}\Big|\mathfrak{I}'\Big(\frac{\psi + \ell}{2}\Big)\Big|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + ((1 - \delta)^{p+2} + \delta^{p+1}(-\delta + p + 2))^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{2}|\mathfrak{I}'(\psi)|^q + \Big(e - \frac{5}{2}\Big)\Big|\mathfrak{I}'\Big(\frac{\psi + \ell}{2}\Big)\Big|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + ((1 - \mu)^{p+2} + (p + 2 - \mu)\mu^{p+1})^{\frac{1}{p}}\Big(\Big(e - \frac{5}{2}\Big)\Big|\mathfrak{I}'\Big(\frac{\psi + \ell}{2}\Big)\Big|^q + \frac{1}{2}|\mathfrak{I}'(\ell)|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + (\mu^{p+2} + (\mu + p + 1)(1 - \mu)^{p+1})^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{2}\Big|\mathfrak{I}'\Big(\frac{\psi + \ell}{2}\Big)\Big|^q + \Big(e - \frac{5}{2}\Big)|\mathfrak{I}'(\ell)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1 - \lambda)|1 - \delta - \lambda|^p d\lambda &= \frac{\delta^{p+2} + (\delta + p + 1)(1 - \delta)^{p+1}}{(p + 1)(p + 2)} \\
\int_0^1 \lambda|1 - \delta - \lambda|^p d\lambda &= \frac{(1 - \delta)^{p+2} + (-\delta + p + 2)\delta^{p+1}}{(p + 1)(p + 2)} \\
\int_0^1 (1 - \lambda)|\mu - \lambda|^p d\lambda &= \frac{(1 - \mu)^{p+2} + (p + 2 - \mu)\mu^{p+1}}{(p + 1)(p + 2)} \\
\int_0^1 \lambda|\mu - \lambda|^p d\lambda &= \frac{\mu^{p+2} + (\mu + p + 1)(1 - \mu)^{p+1}}{(p + 1)(p + 2)}
\end{aligned}$$

dir. ■

Teorem 39. $\mathfrak{I}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi, \ell \in I^\circ$, $\psi < \ell$ ve $q \geq 1$ olsun. $0 \leq \delta, \mu \leq 1$ ve $\mathfrak{I}' \in L[\psi, \ell]$ olmak üzere eğer $|\mathfrak{I}'|^q$, $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{(\ell - \psi)6^{\frac{1}{q}}}{24} \Big\{ (2\delta^3 - 3\delta + 2)^{1 - \frac{1}{q}} \Big(\left(\frac{1}{6}(-2\delta^3 + 15\delta - 32) + 2e^{1-\delta}(\delta + 2) \right. \\
& \quad \left. + e(\delta - 2))|\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{6}(2\delta^3 - 3\delta + 2) + 2e^\delta(\delta - 2) + \delta + e + 2 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + (-2\delta^3 + 6\delta^2 - 3\delta + 1)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left(\left(\frac{1}{6}(2\delta^3 - 6\delta^2 - 3\delta + 17) - 2e^{1-\delta}(\delta + 1) + e \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& + \left(\frac{1}{6}(2\delta^3 - 6\delta^2 + 3\delta - 1) - 2e^\delta(\delta - 3) - e(\delta + 1) - 2\delta - 3 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + (-2\mu^3 + 6\mu^2 - 3\mu + 1)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left(\left(\frac{1}{6}(2\mu^3 - 6\mu^2 + 3\mu - 1) - 2e^\mu(\mu - 3) - e(\mu + 1) - 2\mu - 3 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right. \\
& + \left(\frac{1}{6}(2\mu^3 - 6\mu^2 - 3\mu + 17) - 2e^{1-\mu}(\mu + 1) + e \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + (2\mu^3 - 3\mu + 2)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left(\left(-\frac{1}{6}(2\mu^3 - 3\mu + 2) + 2e^\mu(\mu - 2) + \mu + e + 2 \right) \left| \mathfrak{I}'\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) \right|^q \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{6}(-2\mu^3 + 15\mu - 32) + 2e^{1-\mu}(\mu + 2) + e(\mu - 2) \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 7'ye integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\delta \mathfrak{I}(\psi) + \mu \mathfrak{I}(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \mathfrak{I}\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \mathfrak{I}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \int_0^1 |1 - \delta - \lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2}\right) \right| d\lambda \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 |\mu - \lambda| \left| \mathfrak{I}'\left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell\right) \right| d\lambda \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Geliştirilmiş Power-Mean integral eşitsizliği ve $|\mathfrak{I}'|^q$ 'nin $[\psi, \ell]$ üzerinde üstel tipli konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\delta \Im(\psi) + \mu \Im(\ell)}{2} + \frac{2 - \delta - \mu}{2} \Im\left(\frac{\psi + \ell}{2}\right) - \frac{1}{\ell - \psi} \int_{\psi}^{\ell} \Im(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \lambda) |1 - \delta - \lambda| d\lambda \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \lambda) |1 - \delta - \lambda| \left| \Im' \left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 \lambda |1 - \delta - \lambda| d\lambda \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \lambda |1 - \delta - \lambda| \left| \Im' \left(\lambda \psi + (1 - \lambda) \frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 (1 - \lambda) |\mu - \lambda| d\lambda \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \lambda) |\mu - \lambda| \left| \Im' \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \lambda |\mu - \lambda| d\lambda \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \lambda |\mu - \lambda| \left| \Im' \left(\lambda \frac{\psi + \ell}{2} + (1 - \lambda) \ell \right) \right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{\ell - \psi}{4} \left\{ \left(\frac{1}{6} (2\delta^3 - 3\delta + 2) \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \lambda) |1 - \delta - \lambda| \left[(e^{\lambda} - 1) |\Im'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \Im' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{6} (-2\delta^3 + 6\delta^2 - 3\delta + 1) \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \lambda |1 - \delta - \lambda| \left[(e^{\lambda} - 1) |\Im'(\psi)|^q + (e^{1-\lambda} - 1) \left| \Im' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{6} (-2\mu^3 + 6\mu^2 - 3\mu + 1) \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \lambda) |\mu - \lambda| \left[(e^{\lambda} - 1) \left| \Im' \left(\frac{\psi + \omega}{2} \right) \right|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\Im'(\ell)|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{6} (2\mu^3 - 3\mu + 2) \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 \lambda |\mu - \lambda| \left[(e^\lambda - 1) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q + (e^{1-\lambda} - 1) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right] d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \frac{(\ell - \psi) 6^{\frac{1}{q}}}{24} \left\{ (2\delta^3 - 3\delta + 2)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{1}{6} (-2\delta^3 + 15\delta - 32) + 2e^{1-\delta}(\delta + 2) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + e(\delta - 2) \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{1}{6} (2\delta^3 - 3\delta + 2) + 2e^\delta(\delta - 2) + \delta + e + 2 \right) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (-2\delta^3 + 6\delta^2 - 3\delta + 1)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\left(\frac{1}{6} (2\delta^3 - 6\delta^2 - 3\delta + 17) - 2e^{1-\delta}(\delta + 1) + e \right) |\mathfrak{I}'(\psi)|^q \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{6} (2\delta^3 - 6\delta^2 + 3\delta - 1) - 2e^\delta(\delta - 3) - e(\delta + 1) - 2\delta - 3 \right) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + (-2\mu^3 + 6\mu^2 - 3\mu + 1)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\left(\frac{1}{6} (2\mu^3 - 6\mu^2 + 3\mu - 1) - 2e^\mu(\mu - 3) - e(\mu + 1) - 2\mu - 3 \right) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{6} (2\mu^3 - 6\mu^2 - 3\mu + 17) - 2e^{1-\mu}(\mu + 1) + e \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + (2\mu^3 - 3\mu + 2)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\left(-\frac{1}{6} (2\mu^3 - 3\mu + 2) + 2e^\mu(\mu - 2) + \mu + e + 2 \right) \left| \mathfrak{I}' \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{6} (-2\mu^3 + 15\mu - 32) + 2e^{1-\mu}(\mu + 2) + e(\mu - 2) \right) |\mathfrak{I}'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (1 - \lambda) |1 - \delta - \lambda| (e^\lambda - 1) d\lambda = \frac{1}{6} (-2\delta^3 + 15\delta - 32) + 2e^{1-\delta}(\delta + 2) + e(\delta - 2)$$

$$\int_0^1 (1 - \lambda) |1 - \delta - \lambda| (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = -\frac{1}{6} (2\delta^3 - 3\delta + 2) + 2e^\delta(\delta - 2) + \delta + e + 2$$

$$\int_0^1 \lambda |1 - \delta - \lambda| (e^\lambda - 1) d\lambda = \frac{1}{6} (2\delta^3 - 6\delta^2 - 3\delta + 17) - 2e^{1-\delta}(\delta + 1) + e$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda |1 - \delta - \lambda| (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda \\ = \frac{1}{6} (2\delta^3 - 6\delta^2 + 3\delta - 1) - 2e^\delta(\delta - 3) - e(\delta + 1) - 2\delta - 3 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (1 - \lambda) |\mu - \lambda| (e^\lambda - 1) d\lambda = \frac{1}{6} (2\mu^3 - 6\mu^2 + 3\mu - 1) - 2e^\mu(\mu - 3) - e(\mu + 1) - 2\mu - 3$$

$$\int_0^1 (1 - \lambda) |\mu - \lambda| (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = \frac{1}{6} (2\mu^3 - 6\mu^2 - 3\mu + 17) - 2e^{1-\mu}(\mu + 1) + e$$

$$\int_0^1 \lambda |\mu - \lambda| (e^\lambda - 1) d\lambda = -\frac{1}{6} (2\mu^3 - 3\mu + 2) + 2e^\mu(\mu - 2) + \mu + e + 2$$

$$\int_0^1 \lambda |\mu - \lambda| (e^{1-\lambda} - 1) d\lambda = \frac{1}{6} (-2\mu^3 + 15\mu - 32) + 2e^{1-\mu}(\mu + 2) + e(\mu - 2)$$

dir. ■

Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar

Yukarıdaki bölümlerde yazılan teorem ve sonuçlara ait uygulamalara bu kısımda yer verilmiştir.

Uygulama 1.

i. $\psi, \ell \in [0, \infty)$, $0 < \psi < \ell$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 2$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A} \left((\sqrt{\psi\ell})^\lambda, \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right)^\lambda \right) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda \left(\sqrt{\psi\ell}, \frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| \\ \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2 \lambda}{2} \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right) \mathcal{A} \left((\sqrt{\psi\ell})^{\lambda-1}, \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right)^{\lambda-1} \right). \end{aligned}$$

İspat: Teorem 20 eşitsizliğinde $x \in [\psi, \ell]$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 2$ için $\mathfrak{S}(x) = x^\lambda$ olarak

alınırsa ispat görülür. ■

ii. $\psi, \ell \in [0, \infty)$, $0 < \psi < \ell$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 2$ olmak üzere her $q > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{A} \left((\sqrt{\psi\ell})^\lambda, \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right)^\lambda \right) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda \left(\sqrt{\psi\ell}, \frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2 \lambda}{2^{2-\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} (e-2)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left((\sqrt{\psi\ell})^{(\lambda-1)q}, \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right)^{(\lambda-1)q} \right). \end{aligned}$$

İspat: Teorem 21 eşitsizliğinde $x \in [\psi, \ell]$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 2$ için $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

iii. $\psi, \ell \in [0, \infty)$, $0 < \psi < \ell$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 2$ olmak üzere her $q \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{A} \left((\sqrt{\psi\ell})^\lambda, \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right)^\lambda \right) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda \left(\sqrt{\psi\ell}, \frac{\psi + \ell}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(\sqrt{\ell} - \sqrt{\psi})^2 \lambda}{2^{3-\frac{2}{q}}} \left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left((\sqrt{\psi\ell})^{(\lambda-1)q}, \left(\frac{\psi + \ell}{2} \right)^{(\lambda-1)q} \right). \end{aligned}$$

İspat: Teorem 22 eşitsizliğinde $x \in [\psi, \ell]$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 2$ için $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

Uygulama 2.

i. $\psi, \ell \in [0, \infty)$, $\psi < \ell$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 2$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|\mathcal{A}^\lambda(\psi, \ell) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda(\psi, \ell)| \leq \lambda(\psi - \ell) \left(2\sqrt{e} - e - \frac{3}{4} \right) (|\psi|^{\lambda-1} + |\ell|^{\lambda-1}).$$

İspat: Sonuç 10 eşitsizliğinde $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

ii. $\psi, \ell \in [0, \infty)$, $\psi < \ell$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 2$ olsun. Her $q > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}^\lambda(\psi, \ell) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda(\psi, \ell)| & \leq \frac{\lambda(\ell - \psi)}{2^{\frac{p+1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(\left(\sqrt{e} - \frac{3}{2} \right) |\psi|^{(\lambda-1)q} + \left(e - \sqrt{e} - \frac{1}{2} \right) |\ell|^{(\lambda-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\left(e - \sqrt{e} - \frac{1}{2} \right) |\psi|^{(\lambda-1)q} + \left(\sqrt{e} - \frac{3}{2} \right) |\ell|^{(\lambda-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

İspat: Sonuç 11 eşitsizliğinde $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

iii. $\psi, \ell \in [0, \infty)$, $\psi < \ell$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 2$ olsun. Her $q \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|\mathcal{A}^\lambda(\psi, \ell) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda(\psi, \ell)| \leq \frac{\lambda(\ell - \psi)}{2^{3-\frac{3}{q}}} \left\{ \left(\left(\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{e}}{2} \right) |\psi|^{(\lambda-1)q} + \left(e - \frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{e}}{2} \right) |\ell|^{(\lambda-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\left(e - \frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{e}}{2} \right) |\psi|^{(\lambda-1)q} + \left(\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{e}}{2} \right) |\ell|^{(\lambda-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

İspat: Sonuç 13 eşitsizliğinde $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

Uygulama 3.

i. $\psi, \ell \in [0, \infty)$, $0 < \psi < \ell$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 3$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \mathcal{A} \left(\left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right)^\lambda, \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right)^\lambda \right) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda(\psi, \ell) \right| \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2 \lambda(\lambda-1)}{n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right) \\ \times \mathcal{A} \left(\left| \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right|^{\lambda-2}, \left| \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right|^{\lambda-2} \right).$$

İspat: Teorem 30 eşitsizliğinde $x \in [\psi, \ell]$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 3$ için $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

ii. $\psi, \ell \in [0, \infty)$, $0 < \psi < \ell$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 3$ olmak üzere her $q > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \mathcal{A} \left(\left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right)^\lambda, \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right)^\lambda \right) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda(\psi, \ell) \right| \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2 \lambda(\lambda-1)}{2^{1-\frac{1}{q}} n^3} \beta^{\frac{1}{p}}(p+1, p+1)(e-2)^{\frac{1}{q}} \\ \times \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right|^{(\lambda-2)q}, \left| \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right|^{(\lambda-2)q} \right).$$

İspat: Teorem 31 eşitsizliğinde $x \in [\psi, \ell]$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 3$ için $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

iii. $\psi, \ell \in [0, \infty)$, $0 < \psi < \ell$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 3$ olmak üzere her $q \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \mathcal{A} \left(\left(\frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right)^\lambda, \left(\frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right)^\lambda \right) - L_\lambda^\lambda(\psi, \ell) \right| \\
& \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ell - \psi)^2 \lambda(\lambda-1)}{12^{1-\frac{1}{q}} n^3} \left(\frac{17}{6} - e \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \mathcal{A}^{\frac{1}{q}} \left(\left| \frac{(n-i)\psi + i\ell}{n} \right|^{(\lambda-2)q}, \left| \frac{(n-i-1)\psi + (i+1)\ell}{n} \right|^{(\lambda-2)q} \right).
\end{aligned}$$

İspat: Teorem 32 eşitsizliğinde $x \in [\psi, \ell]$, $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 3$ için $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

Uygulama 4.

i. $0 < \psi < \ell$, $x > 0$ ve $\lambda > 1$ olmak üzere $0 \leq \delta \leq 1$, her $q > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \delta \mathcal{A}(\psi^\lambda, \ell^\lambda) + (1 - \delta) \mathcal{A}^\lambda(\psi, \ell) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda(\psi, \ell) \right| \\
& \leq \frac{\lambda(\ell - \psi)(e - 2)^{\frac{1}{q}}}{4} \left(\frac{\delta^{p+1} + (1 - \delta)^{p+1}}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\psi^{(\lambda-1)q} + \mathcal{A}^{(\lambda-1)q}(\psi, \ell) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\mathcal{A}^{(\lambda-1)q}(\psi, \ell) + \ell^{(\lambda-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

İspat: Sonuç 23 eşitsizliğinde $x > 0$ ve $\lambda > 1$ için $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

ii. $0 < \psi < \ell$, $x > 0$ ve $\lambda > 1$ olmak üzere $0 \leq \delta \leq 1$, her $q > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} [\mathcal{A}(\psi^\lambda, \ell^\lambda) + \mathcal{A}^\lambda(\psi, \ell)] - \mathcal{L}_\lambda^\lambda(\psi, \ell) \right| \\
& \leq \frac{\lambda(\ell - \psi)(e - 2)^{\frac{1}{q}}}{8(p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(\psi^{(\lambda-1)q} + \mathcal{A}^{(\lambda-1)q}(\psi, \ell) \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\mathcal{A}^{(\lambda-1)q}(\psi, \ell) + \ell^{(\lambda-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

İspat: Sonuç 24 eşitsizliğinde $x > 0$ ve $\lambda > 1$ için $\mathfrak{I}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

iii. $0 < \psi < \ell$, $x > 0$ ve $\lambda > 1$ olmak üzere $0 \leq \delta \leq 1$, her $q \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \delta \mathcal{A}(\psi^\lambda, \ell^\lambda) + (1 - \delta) \mathcal{A}^\lambda(\psi, \ell) - \mathcal{L}_\lambda^\lambda(\psi, \ell) \right| \\
& \leq \frac{\lambda(\ell - \psi)}{4} \left(\frac{1}{2} - \delta + \delta^2 \right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \left((-\delta^2 + (e + 2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2}) \psi^{(\lambda-1)q} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{2} [\delta^2 + (\delta - 1)^2] + 2e^\delta - e\delta - \delta - 1 \right) \mathcal{A}^{(\lambda-1)q}(\psi, \ell) \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\left(-\frac{1}{2} [\delta^2 + (\delta - 1)^2] + 2e^\delta - e\delta - \delta - 1 \right) \mathcal{A}^{(\lambda-1)q}(\psi, \ell) \right. \\
& \left. + \left(-\delta^2 + (e + 2)\delta + 2e^{1-\delta} - e - \frac{5}{2} \right) \ell^{(\lambda-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \Big\}.
\end{aligned}$$

İspat: Sonuç 26 eşitsizliğinde $x > 0$ ve $\lambda > 1$ için $\mathfrak{S}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

iv. $0 < \psi < \ell$, $x > 0$ ve $\lambda > 1$ olmak üzere $0 \leq \delta \leq 1$, her $q \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} [\mathcal{A}(\psi^\lambda, \ell^\lambda) + \mathcal{A}^\lambda(\psi, \ell)] - \mathcal{L}_\lambda^\lambda(\psi, \ell) \right| \\
& \leq \frac{\lambda(\ell - \psi)(8\sqrt{e} - 2e - 7)^{\frac{1}{q}}}{16} \left\{ \left(\psi^{(\lambda-1)q} + \mathcal{A}^{(\lambda-1)q}(\psi, \ell) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\mathcal{A}^{(\lambda-1)q}(\psi, \ell) + \ell^{(\lambda-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

İspat: Sonuç 27 eşitsizliğinde $x > 0$ ve $\lambda > 1$ için $\mathfrak{S}(x) = x^\lambda$ olarak alınırsa ispat görülür. ■

SONUÇ VE ÖNERİLER

Öneriler

Bu tezde üstel tipli konveks fonksiyonlar için Hölder, Power Mean, Hölder-İşcan ve Geliştirilmiş Power Mean İntegral Eşitsizlikleri kullanılarak yeni teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Farklı lemmalar yardımıyla üstel tipli konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilebilir. Elde edilen eşitsizliklere farklı fonksiyonlar uygulanabilir. Ayrıca bu eşitsizlikler için daha iyi üst sınırlar bulunabilir. Üstel tipli konveks fonksiyonların diğer konveks fonksiyonlarla ilişkisi araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- Alomari, M., Darus, M., (2010). Some Ostrowski type inequalities for convex functions with applications. RGMIA, 13 1 (2010), No., 3.
- Awan, M. U., Noor, M. A., Du, T. & Noor, K. I., (2020). On $\mathcal{M}$ -convex functions. AIMS Mathematics, 5(3): 2376-2387.
- Bayraktar, M., (2000). Fonksiyonel Analiz. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.
- Ciurdariu, L., (2012). On some Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose power of absolute value of derivatives are (α, m) -convex. Int. J. of Math. Anal., 6(48), 2361-2383.
- Dragomir, S.S., Agarwal, R.P., (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Appl. Math Lett. 11, 91-95.
- Dragomir, S., Agarwal, R., & Barnett, N., (2000). Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. J. of Inequal. and Appl, 5(2), 103-165.
- Greenberg, H., & Pierskalla, W., (1971). A review of quasi convex functions. Operations, 7, 1553-1570.
- İşcan, İ., (2019). New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality. Jour. Ineq. and App., 2019:204.
- Kadakal, M., İşcan, İ., Kadakal, H. & Bekar, K., (2019). On improvements of some integral inequalities. Honam Math. Jour., 43(3), 441-452.
- Kadakal, M., İşcan, İ., (2020). Exponential type convexity and some related inequalities. Journal of inequalities and Applications, 2020:82
- Mitrinović, D., (1970). Analytic Inequalities. Berlin.: Springer-Verlag.
- Mitrinovic, D. S., Pečarić, J. & Fink, A. M., (1993). Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic, Dordrecht.
- Ostrowski, A., (1938). Über die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von. Comment. Math. Hel, 1(17), 226-230.
- Pečarić, J. E., Proschan, F. and Tong, Y. L., (1992). Convex functions, Partial Ordering and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Tirtirau, L., (2020). Hermite-Hadamard type inequalities for exponential convex functions. RGMIA, Res. Rep. Coll. 23, Art. 44, 7 pp. Received 07/04/20
[ONLINE: <https://rgmia.org/papers/v23/v23a47.pdf>].
- Varošanec, S., (2007). On h-convexity. J. Math. Anal. Appl., 326, 303-311.
- Yıldız, Ç., Yergöz, A., (2023). An investigation into inequalities obtained through the new lemma for exponential type convex functions. Filomat (Accepted).

Xi, B., Qi, F., (2012). Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications to means. *Journal of Function Spaces and Applications*, Article ID 980438, 14 Pages.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Abdolvahit YERGÖZ
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Fethiye Mehmet Erdoğan Anadolu Lisesi
Lisans:	Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Makaleler:	Yıldız, Ç., Yergöz, A., (2023). An investigation into inequalities obtained through the new lemma for exponential type convex functions. Filomat (Accepted). Yıldız, Ç., Yergöz, B. and Yergöz, A., (2023). On new general inequalities for s-convex functions and their applications. Journal of Inequalities and Applications. 2023:11