

**SONLU POLYHEDRAL VE BİNARY
POLYHEDRAL GRUPLARDAKİ K-NACCI
DİZİLERİ**

Ömür DEVECİ

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Erdal KARADUMAN
2010
Her hakkı saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

**SONLU POLYHEDRAL VE BİNARY POLYHEDRAL
GRUPLARDAKİ K-NACCI DİZİLERİ**

Ömür DEVECİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2010

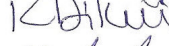
Her hakkı saklıdır

Doç. Dr. Erdal KARADUMAN danışmanlığında, Ömür DEVECİ tarafından hazırlanan bu çalışma 26.03.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Dursun TAŞCI

İmza : 

Üye: Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

İmza : 

Üye: Prof. Dr. Hüseyin AYDIN

İmza : 

Üye: Doç. Dr. Engin ÜZKAN

İmza : 

Üye: Doç. Dr. Erdal KARADUMAN

İmza : 

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

(imza)

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

SONLU POLYHEDRAL VE BİNARY POLYHEDRAL GRUPLARDAKİ K-NACCI DİZİLERİ

Ömür DEVECİ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KARADUMAN

Sonlu bir gruptaki bir k -nacci (k -basamak Fibonacci) dizisi, grubun $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları için,

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1}; & j \leq n < k \text{ için} \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots x_{n-1}; & n \geq k \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tezde, $f(k, 2)$, $f(k, 4)$ dizilerinin ve sonlu $(2, 2, 2)$, $(n, 2, 2)$, $(2, n, 2)$, $(2, 2, n)$ polyhedral gruplarındaki, $\langle 2, 2, 2 \rangle$, $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$, $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral gruplarındaki ve bu gruplarla ilişkili $E(2, 2, 2)$, $E(p, 2, 2)$, $E(2, q, 2)$, $E(2, 2, r)$ genişletilmiş triangle gruplarındaki k -nacci dizilerinin periodları hesaplanmıştır.

2010, 98 sayfa

Anahtar Kelimeler: Polyhedral Grup, Binary Polyhedral Grup, Genişletilmiş Triangle Grup, k -nacci Dizisi, Period.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

K-NACCI SEQUENCES IN FINITE POLYHEDRAL GRPOUPS AND BİNARY POLYHEDRAL GROUPS

Ömür DEVECİ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Erdal KARADUMAN

A *k-nacci sequence* in a finite group is a sequence of group elements $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ for which, given an initial (seed) set $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ each element is defined by

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \cdots x_{n-1} & \text{for } j \leq n < k \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots x_{n-1} & \text{for } n \geq k \end{cases}.$$

In this thesis, the periods of $f(k, 2)$, $f(k, 4)$ sequences and the k - nacci sequences in finite polyhedral groups $(2, 2, 2)$, $(n, 2, 2)$, $(2, n, 2)$, $(2, 2, n)$, finite binary polyhedral groups $\langle 2, 2, 2 \rangle$, $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$, $\langle 2, 2, n \rangle$ and extended triangle groups $E(2, 2, 2)$, $E(p, 2, 2)$, $E(2, q, 2)$, $E(2, 2, r)$ which related with these groups were calculated.

2010, 98 pages

Keywords: Polyhedral Group, Binary Polyhedral Group, Extended Triangle Group, k - nacci Sequence, Period.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen başta hocam Sayın Doç. Dr. Erdal KARADUMAN'a ve değerli fikirlerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN, Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ ve Sayın Doç. Dr. Engin ÖZKAN'a şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı aileme, eşime ve oğluma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ömür DEVECİ

Mart 2010

SİMGELER DİZİNİ

$E(p, q, r)$	Genişletilmiş triangle grup
e	Grubun birim elemanı
$f_n^{(k)}$	$1 \leq i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ sınır şartlarıyla tanımlı, $n > k$ için $f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^k f_{n-j}^{(k)}$ k -basamak Fibonacci dizisinin n . elemanı
$f(k, m)$	$f_n^{(k)}$ nin m 'ye göre modülü
$F_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$	G grubunda $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları ile elde edilmiş k -nacci dizisi
G	Grup
$ G $	Grubun mertebesi
G/H	G nin H ye göre bölüm grubu
$G \cong H$	G grubu H grubuna izomorf
$H < G$	H, G nin alt grubu
$H \triangleleft G$	H, G nin normal alt grubu
$k(p)$	Standart Fibonacci dizisinin periodu
$h_k(m)$	$f(k, m)$ nin en küçük periodu veya m modülüne göre k -basamak Fibonacci dizisinin Wall sayısı
$P_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$	$F_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ k -nacci dizisinin periodu
s_i	i . Fibonacci sayısı
(l, m, n)	Polyhedral grup
$\langle l, m, n \rangle$	Binary polyhedral grup

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 A_n grubunun farklı geren 2 -lisine göre Fibonacci uzunluğu	19
Çizelge 3.2 iki geren için sonlu $\langle 2, m, n \rangle$ binary polyhedral ve $(2, m, n)$ polyhedral gruplarının Fibonacci uzunlukları	25
Çizelge 3.3 üç geren için sonlu $\langle 2, m, n \rangle$ binary polyhedral ve $(2, m, n)$ polyhedral gruplarının Fibonacci uzunlukları	26
Çizelge 3.4 $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_3(p) \mid (p^3 - p^i)$ 'nin durumu.....	38
Çizelge 3.5 $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_4(p) \mid (p^3 - p^i)$ 'nin durumu.....	39
Çizelge 3.6 $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_5(p) \mid (p^3 - p^i)$ 'nin durumu.....	40

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	
2.1 Grup Takdimleri	3
2.2. Dihedral Grup	6
2.3. Polyhedral Grup	8
2.4. Binary Polyhedral Grup	10
2.5. Genişletilmiş Triangle Grup	11
2.6. Fibonacci Dizileri	12
3. MATERYAL ve YÖNTEM	
3.1. Fibonacci Uzunluğu	18
3.2. Sonlu Polyhedral ve Binary Polyhedral Grupların Fibonacci Uzunlukları	22
3.3. Genişletilmiş Triangle Grupların Fibonacci Uzunluğu	27
3.4. Centro-Polyhedral Grupların Fibonacci Uzunluğu	27
3.5. Sonlu Gruplarda k-nacci Dizisi (Sonlu Gruplarda k-Basamak Fibonacci Dizisi)	31
3.6. $h_k(m)$ Fonksiyonu	35
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	
4.1. $f(k, m)$ Dizinin Periodu	41
4.2. $(2, 2, 2), (n, 2, 2), (2, n, 2)$ ve $(2, 2, n)$ Polyhedral Grupları	42
4.3. $E(2, 2, 2), E(p, 2, 2), E(2, q, 2)$ ve $E(2, 2, r)$ Genişletilmiş Triangle Grupları	67
4.4. $\langle 2, 2, 2 \rangle, \langle n, 2, 2 \rangle, \langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ Binary Polyhedral Grupları	76
5. SONUÇ	96
KAYNAKLAR	97
ÖZGEÇMİŞ	99

1. GİRİŞ

Gruplarda Fibonacci dizilerini ilk olarak Wall çalışmıştır (Wall 1960). Wall bu çalışmasında devirli gruplardaki adi Fibonacci dizilerini araştırmıştır. Daha sonra Wilcox (1986)'da problemi abelyen gruplara genişletmiştir. Campbell *et al.* (1990)'da bu teoriyi bazı sonlu gruplara uygulamışlardır. Aydın and Smith (1994)'de 2-basamak adi Fibonacci dizisinin uzunluğunun, nilpotent sınıfı 4 ve exponenti p (p asal) olan sonlu nilpotent gruplardaki adi 2-basamak Fibonacci dizilerinin uzunluğuna eşit olduğunu ispatlamışlardır. Bu teoriyi Dikici and Smith (1995)'de nilpotent sınıfı 2 ve exponenti 2 olan sonlu nilpotent gruplardaki adi 3-basamak Fibonacci dizilerine genelleştirmişlerdir.

Aydın ve Dikici (1998)'de 2-basamak genel Fibonacci dizisinin temel periodunun uzunluğunun nilpotent sınıfı 2 ve exponenti p (p asal) olan herhangi bir sonlu p -grup için bu grubun geren elemanlarıyla oluşturulan 2-basamak genel Fibonacci dizisinin temel perioduna eşit olduğunu göstermişlerdir. Karaduman (2002)'de Fibonacci sayılarının gruplardaki uygulamaları üzerinde durmuştur. Karaduman ve Yavuz (2003)'de $2 < p \leq 2927$ aralığındaki p asal sayısı için $k(p)$, 2-basamak Fibonacci dizilerinin periodu olmak üzere, exponenti p nilpotent sınıfı 5 olan sonlu nilpotent gruplarda 2-basamak Fibonacci dizilerinin periodlarının $p.k(p)$ olduğunu göstermişlerdir. Karaduman ve Aydın (2003)'de exponenti p ve nilpotent sınıfı 4 olan gruplardaki 2-basamak genel Fibonacci dizilerini incelemişlerdir. Özkan (2003)'de exponenti p ve nilpotent sınıfı 4 olan gruplardaki 3-basamak Fibonacci dizileri üzerinde durmuştur.

Knox (1992)'de sonlu bir gruptaki, k -nacci dizisini tanımlamış ve $n \geq 3$ için a, b gerenleriyle takdim edilmiş D_n dihedral grubunun periodunun $P_k(D_n; a, b) = 2k + 2$ olduğunu göstermiştir. Lü and Wang (2007)'de k -basamak Fibonacci dizileri için Wall sayılarını incelemişlerdir. Campbell *et al.* (2004)'de $i \geq 2$ için D_∞^i nin Fibonacci

orbitini tanımlamış ve D_{2m}^i nin $i \geq 2$ için Fibonacci uzunluğunu hesaplamışlardır. Campbell and Campbell (2009)'da sonlu (l, m, n) polyhedral, $\langle l, m, n \rangle$ binary polyhedral ve $E(p, q, r)$ genişletilmiş polyhedral grupların orbitlerini tanımlanmış ve bu grupların Fibonacci uzunluklarını hesaplamışlardır. Campbell and Campbell (2005)'de centro polyhedral gruplarının orbitlerini tanımlanmış ve bu grupların Fibonacci uzunluklarını hesaplamışlardır. Karaduman ve Deveci (2009)'da $n > 2$ için sonlu $(2, 2, 2)$, $(n, 2, 2)$, $(2, n, 2)$, $(2, 2, n)$ polyhedral ve $E(2, 2, 2)$, $E(n, 2, 2)$, $E(2, n, 2)$, $E(2, 2, n)$ genişletilmiş triangle gruplardaki k -nacci dizilerinin priodlarını hesaplamışlardır.

Conway *et al.* (1972)'de ve Coxeter and Moser (1972)'de Generator and relations for discrete groups isimli kitaplarında polyhedral gruplar ve polyhedral gruplarla ilişkili grupların yapıları hakkında bilgi vermişlerdir. Ayrıca Ablar and Al-Hamdan (1993)'de triangle grupların yapısı hakkında bilgi vermişlerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Grup Takdimleri

Tanım 1: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin her elemanı S nin elemanlarının ve bu elemanların terslerinin sonlu bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa S kümesi, G grubunun gerenlerinin bir kümesi olarak adlandırılır (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2: Bir gruptaki gerenlerin sağladıkları denklemlere bu gruptaki bağıntılar denir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 3: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. $s_1, s_2, \dots, s_n$, S nin elemanları ve her bir $\alpha_i = \pm 1$ olmak üzere, S deki bir kelime $s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \dots s_n^{\alpha_n}$ şeklinde ifade edilir.

S deki her bir kelime, G nin bir elemanını temsil eder. Bu anlamda boş kelime G nin birim elemanını temsil eder ve boş kelime uzunluğu sıfır olan tek kelimedir.

Tanım 4: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G 'nin herhangi bir elemanı S 'nin sonlu sayıdaki elemanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir.

Tanım 5: X bir küme, $F(x)$, X üzerinde serbest grup ve $R \subseteq F(x)$ olsun. $G = \langle X : R \rangle$ ' a G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r \in R$ için $r = e$ olacak şekildeki denklemlerinin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir. r elemanlarına da bağıntılar denir.

Hem X hemde R sonlu kümeler olmak üzere, Eğer bir G grubu $\langle X : R \rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir.

Lemma 1: Eğer G ve H sırası ile $\langle X : R \rangle$ ve $\langle Y : S \rangle$ şeklinde takdim edilmiş gruplar ise $[X, Y]$, $\{x^{-1}y^{-1}xy : x \in X, y \in Y\}$ şeklinde komutatörlerin kümesi olmak üzere, bu grupların $G \times H$ direkt çarpımı, $\langle X, Y : R, S, [X, Y] \rangle$ şeklinde takdim edilir (Johnson 1997) ve (Sims 1994).

Tanım 6: $(G, *)$ ve $(H, \circ)$ iki grup olmak üzere eğer $\varphi : G \rightarrow H$ dönüşümü $\forall x, y \in G$ için

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

şartını sağlarsa φ 'ye bir grup homomorfizmi ya da kısaca bir homomorfizm denir (Taşcı 2007).

Tanım 7: $\varphi : G \rightarrow H$, örten bir grup homomorfizmi ise φ 'ye bir epimorfizm denir (Taşcı 2007).

Tanım 8: $\varphi : G \rightarrow H$, 1-1 bir grup homomorfizmi ise φ 'ye bir monomorfizm denir (Taşcı 2007).

Tanım 9: $\varphi : G \rightarrow H$, 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ 'ye bir grup izomorfizmi denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir (Taşcı 2007).

İzomorf gruplar arasında birebir eşleme olup grup yapılarında bu eşleme altında bozulmaz.

Tanım 10: $\varphi: G \rightarrow G$ grup homomorfizmine endomorfizm denir. Eğer φ , 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ’ye bir grup otomorfizmi denir.

Tanım 11: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $\forall x \in G$ için

$$I_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlanan

$$I_a: G \rightarrow G$$

otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesini $I(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümesinde $Aut(G)$ ile gösterilir (Taşcı 2007).

Tanım 12: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. G ’nin S alt kümesini kapsayan en küçük normal alt grubuna S alt kümesinin normal kapanışı denir.

Tanım 13: X bir küme, $F(X)$, X üzerinde serbest grup, $R \subseteq F(x)$ ve $\bar{R}$, $F(x)$ deki R kümesinin normal kapanışı olsun, yani $\langle g^{-1}rg : g \in F(x), r \in R \rangle$ kümesi ile $F(x)$ in alt grubu gerilmiş olsun. Bu durumda eğer $G \cong F(x)/\bar{R}$ ise G grubu, $\langle X : R \rangle$ şeklindeki takdim ile tanımlanmıştır denilir (Campbell 2003).

Önerme 1: Aynı grubun sonlu iki takdimi verilmiş olsun. Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak verilen bir takdimden diğer takdim elde edilebilir (Johnson 1997).

Eğer G sonlu gerilmiş bir grup değil ise bu grup sonlu takdim edilemez. Bu duruma örnek olarak rasyonel sayıların normal toplama işlemine göre bir grup olan $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi verilebilir. Fakat bazı gruplar vardırki sonlu gerilmiştir ama sonlu takdim edilemezler. Bu sonuç aşağıdaki iki teoremden elde edilir (Campbell 2003).

Teorem 1: $2^{\aleph_0}$ tane nonizomorfik 2-gerenli grup vardır (Robinson 1982).

Teorem 2: Sayılabilir çoklukta nonizomorfik sonlu takdim edilmiş grup vardır (Campbell 2003).

Lemma(von Dyck's Lemma) 2: $R \subseteq S \subseteq F(x)$ olmak üzere, $G = \langle X|R \rangle$ ve $H = \langle X|S \rangle$ ise her $x \in X$ elemanını sabitleyen ve $\text{Ker} \phi = \overline{S \setminus R}$ olacak şekilde bir $\phi: G \rightarrow H$ epimorfizmi vardır. Tersine, $G = \langle X|R \rangle$ nin her bölüm grubu, $R \subseteq S$ olmak üzere $\langle X|S \rangle$ şeklinde bir takdime sahiptir (Johnson 1997).

Tanım 14: G , $\rho = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$ takdimi ile tanımlanmış bir grup olsun. ρ nin bağıntı matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olup, bu matrisin herhangi b_{ij} elemanı r_i bağıntısındaki x_j gerenlerinin üstlerinin toplamıdır.

Örneğin, G grubu, $\rho = \langle x, y, z : x^3 = y^3, xzx^{-1} = y, (zx)^3 = e, (zy)^2 = e \rangle$ şeklinde takdim edilsin. ρ nin bağıntı matrisi,

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir (Campbell 2003).

2.2. Dihedral Grup

Tanım: C_q devirli grubu bir tek $x^q = e$ bağıntısıyla tanımlanır ki bu bağıntı her elemanı kendisinin tersine götüren bir dış otomorfizm olarak kabul edilebilir. Bu dış

otomorfizme göre C_q 'ya dönüşen ve $r_1^2 = e$ olan yeni bir r_1 elemanı ekleyerek, x , r_1 elemanları tarafından gerilen ve

$$\langle x, r_1 : x^q = r_1^2 = (xr_1)^2 = e \rangle$$

şeklinde takdim edilen $2q$ mertebeden bir grup elde edilebilir, bu gruba dihedral grup denir ve D_q ile gösterilir.

Eğer $r_2 = r_1 x$ denilirse bu grup

$$\langle r_1, r_2 : r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^q = e \rangle$$

şeklinde takdim edilebilir. Bu takdime göre, $q = 2m$ ise bu gruba çift dihedral grup denir ve D_{2m} ile gösterilir. D_{2m} çift dihedral grup, $z = (r_1 r_2)^m$ ile gerilmiş mertebesi 2 olan bir merkeze sahiptir. Eğer m çift ise r_1 ve $r = r_2 z$ elemanları $r_1^2 = r^2 = (r_1 r)^m = e$ bağıntılarını sağlar, bu bağıntılar yardımıyla r_1 ve r elemanları tarafından gerilen ve

$$\langle r_1, r : r_1^2 = r^2 = (r_1 r)^m = e \rangle$$

şeklinde takdim edilen D_m dihedral grubu elde edilebilir. Bu grup için $D_{2m} \cong C_2 \times D_m$ dir. Eğer $m = 1$ ise r_1 ve r_2 elemanları ile gerilmiş mertebesi 4 olan ve

$$\langle r_1, r_2 : r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^2 = e \rangle$$

şeklinde takdim edilen D_2 four-grubu elde edilebilir. Bu grup için $D_2 \cong C_2 \times D_1 \cong C_2 \times C_2$ dir. Burada $r_0 = r_1 r_2$ denilirse r_1 , r_2 ve $r_0 = r_1 r_2$ şeklinde üç eleman tarafından oluşturulan $r_0^2 = r_1^2 = r_2^2 = r_0 r_1 r_2 = e$ bağıntıları elde edilebilir. Bu şekildeki bağıntılar yardımıyla, D_2 grubu üç gereni devirli olarak birbirine taşıyan 3. mertebeden bir dış otomorfizm ortaya koyar ve

$$\langle r_0, r_1, r_2 : r_0^2 = r_1^2 = r_2^2 = r_0 r_1 r_2 = e \rangle$$

şeklinde takdim edilebilir. Bu manada $s^3 = e$, $s^{-i} r_0 s^i = r_i$ ($i = 1, 2$) bağıntılarını sağlayacak şekilde yeni bir s elemanı eklendiğinde, s ve r_0 gerenlerine bağlı olarak,

$$\langle s, r_0 : s^3 = r_0^2 = (s r_0)^3 = e \rangle$$

şeklinde takdim edilen ve mertebesi 12 olan bir grup elde edilebilir. Burada $r_0 = (12)(34)$ ve $s = (123)$ olup r_0 ve s permütasyonları 12. mertebeden A_4 alterne grubunu gerdiğinden ve $s^3 = r_0^2 = (sr_0)^3 = e$ bağıntılarını sağladıklarından bu grubun A_4 alterne grubu olduğu anlaşılır. Yukarıdaki bilgilerden D_2 four-grubu A_4 alterne grubunun normal alt grubudur. Burada $u = s^{-1}r_0$ olmak üzere A_4 alterne grubu s ve u gerenleriyle,

$$\langle s, u : s^3 = u^3 = (su)^2 = e \rangle$$

şeklinde takdim edilebilir. Bu bağıntılar yardımıyla A_4 üzerinde u ve s gerenlerini birbirine eşleyen periodu 2 olan bir dış otomorfizm tanımlanabilir. $t^2 = e, tst = u$ bağıntılarını sağlayacak şekilde yeni bir t elemanı ilave edildiğinde, $s^3 = u^3 = (su)^2 = e$ ve $t^2 = e, tst = u$ bağıntıları ile tanımlanmış, s ve t gerenlerine bağlı olarak,

$$\langle s, t : s^3 = t^2 = (st)^4 = e \rangle$$

şeklinde takdim edilen ve mertebesi 24 olan bir grup elde edilebilir. Burada $s = (234)$ ve $t = (12)$ permütasyonları 24. mertebeden S_4 grubunu gerdiğinden ve $s^3 = t^2 = (st)^4 = e$ bağıntılarını sağladıklarından bu grubun S_4 olduğu anlaşılır. Böylece $l = s^{-1}t$ denirse s ve l gerenlerine göre S_4 grubu,

$$\langle s, l : s^3 = l^4 = (sl)^2 = e \rangle$$

şeklinde de takdim edilebilir (Coxeter and Moser 1972).

2.3. Polyhedral Grup

Tanım: (l, m, n) polyhedral grubu $l, m, n > 1$ için,

$$\langle x, y, z : x^l = y^m = z^n = xyz = e \rangle$$

veya

$$\langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n = e \rangle$$

şeklinde takdim edilip, Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak $(l, m, n) \cong (m, n, l) \cong (n, l, m)$ olduğu görülebilir.

Eğer $t = lmn \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right) = mn + lm - lmn$ sayısı pozitif ise (l, m, n) polyhedral grubu sonludur. Eğer $1 < l \leq m \leq n$ ise yalnızca aşağıdaki durumlarda t sayısı pozitif olup (l, m, n) polyhedral grubunun sonlu olduğu durumlar elde edilir;

(i) $l = m = 2$ ve $n, n \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı ise,

(ii) $l = 2, m = 3$ ve $n, 3 \leq n \leq 5$ olacak şekilde bir tamsayı ise.

(l, m, n) polyhedral grubu sonlu ise bu grubun mertebesi $2 \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right)^{-1} = \frac{2lmn}{t}$ dir.

(i) durumundaki grupların yapısı aşağıdaki teoremle belirlenir.

Teorem: D , mertebeleri 2 olan iki eleman tarafından üretilmiş bir grup olsun. Bu durumda D grubu aşağıdaki taktime sahiptir,

$$D = \langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^n = e \rangle,$$

burada n ya bir doğal sayıdır ya da $n = \infty$ dur. Eğer $n = \infty$ ise $(xy)^n = e$ bağıntısı ihmal edilecektir. n 'nin sonlu olduğu durumda ise D grubu mertebesi $2n$ olan dihedral gruba izomorf olur. $z = xy$ ve $D_0 = \langle z \rangle$ olsun. Bu durumda,

$$x^{-1}zx = y^{-1}zy = z^{-1}$$

elde edilir ve D_0 indeksi 2 olan bir normal alt grup olur. Buna ek olarak eğer n bir tek tamsayı ise x ve y elemanları D grubunda birbirinin eşleniğidir (conjugedirler) (Suzuki 1982).

$(2, 2, n)$ polyhedral grubunda $t = 4$ olup bu grubun mertebesi $2n$ dir. Bu grup dihedral grup diye adlandırılır.

(ii) durumundaki grupların yapısı aşağıdaki durumlar söz konusudur,

$(2,3,5)$ polyhedral grubu basit bir grup olup bu grupta $t = 1$ dir. Bu grubun mertebesi 60 olup A_5 alterne grupdur, A_5 alterne grup düzgün icosahedronun döngülerinin grubuna izomorftur. Aynı zamanda icosahedral grup diye adlandırılır.

$(2,3,4)$ polyhedral grubu indeksi 2 olan bir alt gruba sahip olup bu grupta $t = 2$ dir. Bu grubun mertebesi 24 olup S_4 simetrik grupdur, S_4 simetrik grup düzgün octahedronun döngülerinin grubuna izomorftur. Aynı zamanda octahedral grup diye adlandırılır.

$(2,3,3)$ polyhedral grubu indeksi 3 olan bir alt gruba sahip olup bu grupta $t = 3$ dir. Bu grubun mertebesi 12 olup A_4 alterne grupdur. A_4 alterne grup düzgün tetrahedronun döngülerinin grubuna izomorftur. Aynı zamanda tetrahedral grup diye adlandırılır.

2.4. Binary Polyhedral Grup

Tanım 1: $\langle l, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu $l, m, n > 1$ için;

$$\langle x, y, z : x^l = y^m = z^n = xyz \rangle$$

veya

$$\langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n \rangle$$

şeklinde takdim edilir.

(l, m, n) polyhedral grubu $\langle l, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu için bir bölüm grubu olarak meydana geldiğinden $t \leq 0$ olduğu zaman bu grup sonsuzdur. Bu gruptaki bağıntılar; $x^l = y^m = z^n = xyz = f$ şeklindedir. $t > 0$ olduğu zaman $f^2 = 1$ olur. Bu grupta x, y, z

nin mertebeleri (l, m, n) polyhedral grubundakinin iki katıdır. Aynı zamanda bu grubun mertebesi de (l, m, n) nin mertebesinin iki katı olup $\frac{4lmn}{t}$ dir.

$(2, m, n)$ polyhedral grubu sonlu olduğu zaman, $\langle 2, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu, C_2 devirli grubunun $(2, m, n)$ polyhedral grubu ile bir genişlemesidir (Coxeter and Moser 1972).

$\langle 2, 3, 5 \rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 120 olup binary icosahedral grup diye adlandırılır.

$\langle 2, 3, 4 \rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 48 olup binary octahedral grup diye adlandırılır.

$\langle 2, 3, 3 \rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 24 olup binary tetrahedral grup diye adlandırılır.

$\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi $4n$ olup dicyclic grup diye adlandırılır.

Tanım 2: $\langle l, m, n \rangle$ centro-polyhedral grubu $l, m, n \in \mathbb{Z}$ için,

$$\langle x, y, z : x^l = y^m = z^n = xyz \rangle$$

şeklinde takdim edilir.

2.5. Genişletilmiş Triangle Grup

Tanım: $E(p, q, r)$ genişletilmiş triangle grubu $p, q, r > 1$ için,

$$\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^p = (yz)^q = (zx)^r = e \rangle$$

şeklinde takdim edilir.

(p, q, r) polyhedral (triangle) grubu $E(p, q, r)$ genişletilmiş triangle grubunun indeksi 2 olan alt grubudur. Eğer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ ise $E(p, q, r)$ genişletilmiş triangle grubu sonludur.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ nin durumuna göre $E(p, q, r)$ genişletilmiş triangle grubu için aşağıdaki üç durum söz konusudur:

- i. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ ise $E(p, q, r)$ genişletilmiş triangle grubu öklid durumdadır.
- ii. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ ise $E(p, q, r)$ genişletilmiş triangle grubu eliptik durumdadır.
- iii. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ ise $E(p, q, r)$ genişletilmiş triangle grubu hiperbolik durumdadır.

(Ablar and Al-Hamdan 1993).

2.6. Fibonacci Dizileri

Tanım 1: $s_0 = 0, s_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere, Fibonacci dizisi,

$$s_{n+2} = s_{n+1} + s_n \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2: $l, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere 2-basamak genel Fibonacci dizileri

$$s_i = ls_{i-1} + ms_{i-2}$$

şeklinde tanımlanır.

Lucas (1878) çalışmasında,

$$s_{k+n} \equiv s_n \pmod{m} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

olacak şekilde bir k tamsayısının olduğunu yani, her m tamsayısının Fibonacci dizisinin bazı elemanlarını böldüğünü ve Fibonacci dizisinin $\pmod{m}$ ye göre periodik olduğunu göstermiştir.

Tanım 3:

$$s_{k+n} \equiv s_n \pmod{m} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

denkliğini sağlayan en küçük k tamsayısına $\pmod{m}$ ye göre period denir ve $s(m)$ ile gösterilir.

Tanım 4:

$$s_k \equiv 0 \pmod{m}$$

denkliğini sağlayan en küçük pozitif k tamsayısına m ye göre rank denir ve $f(m)$ ile gösterilir.

Şimdi Fibonacci dizisinin terimlerinin bilinen bazı özelliklerini verelim.

i. $s_{n-1}^2 = s_n s_{n-2} + (-1)^n$.

Bu eşitliğin doğruluğu Fibonacci dizisinin tanımında verilen bağıntılar yardımıyla tümevarım metodu kullanılarak gösterilebilir.

ii. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$s_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

eşitliğine “Binet formülü” denir. Bu formül n nin negatif değerleri için Fibonacci dizisinin doğal genişlemesini verir. $\alpha^n \beta^n = (-1)^n$ bağıntısı kullanılarak,

$$s_{-n} = (-1)^{n+1} s_n$$

olduğu gösterilebilir.

G sonlu bir grup olsun. G nin Fibonacci döngüsü aşağıdaki gibi tanımlanır. $g_0, g_1 \in G$ olmak üzere, $i \geq 2$ için $g_i = g_{i-2}g_{i-1}$ ve $i \leq 0$ için $g_i = g_{i+2}g_{i+1}^{-1}$ olarak tanımlanır. Bu takdirde yukarıdaki eşitlikleri sağlayan her i tam sayısı için $g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sonlu döngüsü elde edilir.

G sonlu olduğu için bu döngü periodiktir. Bir g döngüsünün minimum periodunu göstermek için uzunluk terimi kullanılır ve bu uzunluk $l(g)$ ile gösterilir. Eğer g döngüsünün periodu t ise $l(g) \mid t$ dir. Böyle döngülerin sayısı $|G|^2$ dir. Her i tamsayısı için $g_{i+s} = h_i$ olacak şekilde bir s tamsayısı varsa (g_i) ve (h_i) döngüleri arasında $(g_i) \sim (h_i)$ şeklinde bir denklik bağıntısı tanımlanır. Döngülerin denklik sınıflarını tanımlamak için e -döngü terimi kullanılır. G nin döngülerinin kümesi $L(G)$ ile gösterilir. G nin elemanlarının bütün sonlu periodik dizileri bileşke işlemi altında bir grup oluşturur. G abelyen ise $L(G)$, $G \times G$ ye izomorf sonlu bir altgrup olur.

G nin $GF(p)$ cisminde p elemanlı toplamsal bir grup olduğunu kabul edelim ve $k(p^n)$, p^n . mertebeden devirli grubun standart döngüsünün uzunluğunu gösterebiliriz.

Lemma 1: H , sonlu $GF(p')$ cisminin toplamsal bir grubu olsun. Eğer $f \in L(H)$ ise $l(f) \mid k(p)$ dir. $l(h) < k(p)$ olmak üzere, aşık olmaya bir h döngüsünün bütün

elemanları sıfırdan farklı olmalı ve bu d6ngü geometrik bir dizi olmalıdır (Yani $h_i^{-1}h_{i+1}$, i den bağımsız olmalıdır).

İspat: $s = (0, 1, 1, 2, \dots)$ uzunluğu $k(p)$ olan standart bir d6ngü olsun. Bu durumda s , $GF(p')$ nin bir alt cismi olan $GF(p)$ de bir d6ngü olur. Aynı şekilde sınıfında uzunluğu $k(p)$ olan başka bir d6ngü elde etmek için bu d6ngü döndürülebilir. Aynı zamanda başka bir d6ngü elde etmek için d6ngünün her bir elemanı $GF(p')$ nin bir elemanı ile çarpılabilir. $f \in L(H)$ keyfi bir d6ngü olsun. Bu takdirde,

$$f = (f_0, f_1, \dots) = f_0 \cdot (1, 0, \dots) + f_1 \cdot (0, 1, \dots)$$

yazılır. Burada dikkat edilirse $(1, 0, \dots)$ standart d6ngünün dönmesidir. Böylece f d6ngüsünün periodu $k(p)$ olup $l(f) \mid k(p)$ olmalıdır.

f nin bir sıfıra sahip olduğu fakat aşıkâr olmadığı kabul edilsin. $x \neq 0$ olmak üzere döndürme yardımı ile $f = (0, x, \dots)$ olduğu kabul edilebilir. Buradan $f = xs$ (ve $s = x^{-1} \cdot f$) yazılır. O halde $l(f) = k(p)$ olur.

Şimdi f nin yalnız sıfır olmayan elemanlara sahip olduğu ve $l(f) < k(p)$ olduğu kabul edilsin. $f = (w, wx, \dots)$ olmak üzere g , f nin herhangi bir dönmesi olsun. Böylece $g = (y, yxz, \dots)$ ve $f - wy^{-1} \cdot g = (0, w(x - z), \dots)$ d6ngüsü sıfırı ihtiva eden ve uzunluğu $k(p)$ den küçük olan aşıkâr d6ngü olur. Buradan $x = z$ yazılır. Böylece verilen herhangi bir d6ngüde ardışık elemanların bir dönmesi olarak en fazla bir $\beta \in GF(p')$ vardır. O halde aşıkâr olmayan bir d6ngünün elemanları sıfır olmalıdır. Bu da lemmanın ispatını tamamlar.

Tanım 5: G toplamsal bir abelyen grup ve $g \in L(G)$ olmak üzere $g_i = 0$ olsun. $m, n \in \mathbb{Z}$ için $g_m = g_n = 0$ olacak şekilde $r = m - n$ şeklindeki en küçük pozitif r tamsayısına Fibonacci dizisinin rankı denir.

Lemma 2: x in standart $s \in L(C_p)$ döngüsünde ikinci sıfırdan önce görüldüğü ve $o(x) = t$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde $k(p) = rt$ dir. Burada r dizinin rankıdır.

İspat: $f = (0, 1, \dots, 0, x, \dots)$ olarak yazılır. Böylece f nin x ile çarpımı f nin r dönmesi olur. Böylece $x^t = 1$ ve t den küçük pozitif u tamsayıları için $x^u \neq 1$ olup $rt = k(p)$ bulunur.

Lemma(Vinson) 3: $p \neq 2, 5$ olsun. Bu takdirde $s \in L(C_p)$ nin rankı $\gamma = \beta_1 / \beta_2$ nin çarpımsal katıdır. Eğer r tek ise $k(p) = 4r$ dir. r çift ise $l = r$ yada $l = 2r$ dir (Aydın 1991).

Sonuç 1: p tek asal sayı ise k çifttir.

Lemma 4: G sonlu bir grup ve $f \in L(G)$ olsun. $h \in L(Z(G))$ olduğu takdirde $f.h$ çarpımı G nin bir döngüsüdür.

İspat: Her i tamsayısı için

$$f_i h_i = f_{i-2} f_{i-1} h_{i-2} h_{i-1} = f_{i-2} h_{i-2} f_{i-1} h_{i-1}$$

olarak yazılır.

Bu yazılımda $f.h$ çarpımının G de bir döngü olduğunu gösterir.

Tanım 6: Lucas sayıları, $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

şeklindeki liner indirgeme denklemi ile tanımlanan, $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ tamsayılar dizisidir. n 'inci Lucas sayısı, Lucas $L[n]$ ile gösterilir.

$n = 1, 2, \dots$ için L_n 'nin değerleri 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, $\dots$ şeklindedir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Fibonacci Uzunluğu

Tanım 1: G grubu $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ tarafından gerilen bir grup olsun. Bu takdirde

$x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n, x_{i+n} = \prod_{j=1}^n x_{i+j-1}, i \geq 1$ dizisine G grubunun Fibonacci orbiti denir ve

$F_A(G)$ ile gösterilir (Campbell and Campbell 2005).

Tanım 2: Eğer $F_A(G)$ dizisi periodik ise bu dizinin perioduna A geren kümesine göre G grubunun Fibonacci uzunluğu denir ve $LEN_A(G)$ ile gösterilir. Eğer $F_A(G)$ dizisi periodik değilse G grubunun, A geren kümesine göre Fibonacci uzunluğu sonsuzdur denir ve $LEN_A(G) = \infty$ ile gösterilir (Campbell and Campbell 2005).

Tanım 3: $F(r, n)$ Fibonacci grubu, $r > 0, n > 0$ ve bütün alt indisler n modülüne göre indirgenmiş olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2, \dots, a_n : a_1 a_2 a_3 \cdots a_r = a_{r+1}, a_2 a_3 a_4 \cdots a_{r+1} = a_{r+2}, \\ a_{n-1} a_n a_1 \cdots a_{r-2} = a_{r-1}, a_n a_1 a_2 \cdots a_{r-1} = a_r \rangle \end{aligned}$$

şeklindeki takdim ile tanımlanır.

Teorem 1: $G, A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tarafından gerilmiş bir grup ve sonlu bir m sayısı için $LEN_A(G) = m$ olsun. Bu takdirde $G, F(n, m)$ Fibonacci grubunun epimorfik bir görüntüsüdür (Campbell 2003).

İspat. Bu teorem von Dyck's Lemma'sı ve Johnson *et al.* (1974)'nın direkt bir sonucudur.

Bir grubun Fibonacci uzunluğu, seçilen farklı geren n -lisine yani başlangıç elemanlarına bağlı olarak değişir. Bu durum için aşağıdaki örnek verebilir,

Çizelge 3.1 A_n grubunun farklı geren 2-lisine göre Fibonacci uzunluğu

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$LEN_X(A_n)$	8	16	12	14	60	104	28	176	180	260	60
$LEN_Y(A_n)$	8	16	14	10	44	16	48	40	108	260	156

burada X geren kümesi $X = [(1,2,3,\dots,n), (n-2, n-1, n)]$ ve Y geren kümesi $Y = [(n-2, n-1, n), (1,2,3,\dots,n)]$ şeklinde olup, farklı iki geren çifti için Fibonacci uzunluklarının farklı olduğu görülmektedir.

Ayrıca H ve G grupları için, $H \leq G$ veya $H \trianglelefteq G$ ise aşağıdaki durumların herhangi biri sözkonusudur,

$$LEN(H) \geq LEN(G),$$

$$LEN(H) \leq LEN(G),$$

$$LEN(H) \mid LEN(G),$$

$$LEN(H) \nmid LEN(G).$$

Bu durum için örnek olarak,

n tek olduğunda,

$$S_n = \langle (1,2,\dots,n), (1,2) \rangle \text{ ve } A_n = \langle (1,2,\dots,n), (n-2, n-1, n) \rangle$$

şeklinde ve n çift olduğunda,

$$S_n = \langle (1,2,\dots,n), (1,2) \rangle \text{ ve } A_n = \langle (1,2,\dots,n-1), (n-2, n-1, n) \rangle$$

şeklinde takdim edilen S_n ve A_n grupları verilebilir (Campbell 2003).

Fibonacci uzunluğunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

i. Bir grubun Fibonacci uzunluğu seçilen geren kümesine ve geren elemanların sıralamasına bağlıdır (Campbell and Campbell 2005).

ii. Eğer G grubu bir Fibonacci grubunun epimorfik bir görüntüsü ise $F_A(G)$ dizisi periodiktir (Thomas 1991).

Sonuç 1: G grubu, $\langle X : R \rangle$ şeklinde takdim edilmiş olsun. $LEN_X(G) = n$ ve H , G grubunun aynı geren kümesi üzerinde bir bölüm grubu ise $LEN_X(H) | LEN_X(G)$ olur (Campbell and Campbell 2009).

Sonuç 2: $(|G_n|)$ sınırsız ve monoton artan bir dizi olmak üzere, $G_n = \langle X \rangle$ grupların bir ailesi ve $n \geq k$ için $LEN_X(G_n) = LEN_X(G_{n+1}) = m$ olsun. Bu durumda $F(|X|, m)$ Fibonacci grubunun mertebesi sonsuzdur (Campbell and Campbell 2009).

Tanım 4: Fibonacci kelimelerinin dizisi,

$$(\{x, y\}, \{x \rightarrow y, y \rightarrow xy\}, \{x\})$$

sistemi ile gerilmiş sonsuz bir dizidir. Yani dizi, $(x, y, xy, yxy, xy^2xy, \dots)$ şeklindedir.

Tribonacci kelimelerinin dizisi,

$$(\{x, y, z\}, \{x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow xyz\}, \{x\})$$

sistemi ile gerilmiş sonsuz bir dizidir (Campbell and Campbell 2009).

Tanım 5: Eğer bir grubun elemanlarının bir dizisi belli bir noktadan sonra yalnızca sabit bir altdizinin tekrarı şeklinde ise periodiktir. Tekrar eden altdizideki elemanların sayısına dizinin periodu denir. Örneğin $a, b, c, d, b, c, d, b, c, d, \dots$ dizisi periodik olup başlangıç elemanı a ve periodu 3 dür.

Tanım 6: Eğer bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k periodlu basit periodik dizi denir. Örneğin $a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, \dots$ dizisi basit periodik olup periodu 5 dir.

$f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad n \geq 2$$

şeklinde tanımlanan Fibonacci dizisinde n . Fibonacci sayısı f_n ile ve bu dizinin $\text{mod } m$ ye göre en küçük periodunun uzunluğu da $k(m)$ ile gösterilsin.

Teorem 2: $f_n \pmod{m}$ basit periodik bir dizidir.

İspat: Bu dizide mümkün olan m^2 tane ikili olduğunda tekrar eder. Fibonacci dizisinin tanımdan $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ olarak yazabiliriz. Böylece eğer $f_{t+1} = f_{s+1}$ ve $f_t \equiv f_s \pmod{m}$ olursa $f_{t-1} \equiv f_{s-1}, \dots, f_{t-s+1} \equiv f_1$ and $f_{t-s} \equiv f_0$ olur ki dizi basit periodiktir.

Teorem(Wall) 3: i. p bir asal sayı olmak üzere, eğer $m = \prod p_i^{e_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılabiliriyorsa ve $t_i = k(p_i^{e_i})$ ise $k(m)$, t_i lerin en küçük ortak katıdır.

ii. p bir asal sayı olmak üzere, $k(p^2) \neq k(p)$ ise $k(p^e) = p^{e-1}k(p)$ dir. Ayrıca l , $k(p^l) = k(p)$ olacak şekilde en büyük tamsayı olmak üzere $e > l$ için $k(p^e) = p^{e-l}k(p)$ olur.

Teorem(Wilcox) 4: f_n , n . Fibonacci ve g_n , n . Lucas sayıları olmak üzere,

$$t = \min(\{n : n \text{ çift sayı ve } m \mid f_n\} \cup \{n : n \text{ tek sayı ve } m \mid g_n\})$$

olacak şekilde $m > 2$ için $k(m) = 2t$ dir.

Lemma 1: $a, b, c, x, y, z, n \in \mathbb{Z}$ için $n > 0$ olmak üzere, a, b, c ve x, y, z tamsayılarının hepsi birden n modülüne göre sıfıra denk değilse,

$$k_{(a,b,c)}(n) = k_{(x,y,x)}(n)$$

olur.

Sonuç 3: $a, b, c, x, y, z, m, n \in \mathbb{Z}$ için $m, n > 0$ olmak üzere, a, b, c ve x, y, z tamsayılarının hepsi birden n modülüne göre sıfıra denk değilse,

$$k_{(a,b,c)}(n) \mid k_{(x,y,z)}(mn)$$

olur.

3.2. Sonlu Polyhedral ve Binary Polyhedral Grupların Fibonacci Uzunlukları

Bu bölümde sonlu polyhedral ve binary polyhedral gruplarının Fibonacci uzunluğu ile ilgili yapılan bazı çalışmalara yer verilecektir.

Teorem 1: Herhangi bir n için $\langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ takdimi ile tanımlanmış grubun Fibonacci uzunluğu 8 dir (Campbell and Campbell 2009).

Sonuç: $G = \langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$, $n > 2$ olsun. Bu durumda $LEN_{(x,y,z)}(G) = 8$ dir (Campbell and Campbell 2009).

Benzer ifadeler kullanılarak aşağıdaki teorem ve sonuç elde edilir:

Teorem 2: Herhangi bir n için $\langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz \rangle$ takdimi ile tanımlanmış grubun Fibonacci uzunluğu 8 dir (Campbell and Campbell 2009).

Sonuç: $G = \langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz = e \rangle$, $n > 2$ olsun. Bu durumda $LEN_{(x,y,z)}(G) = 8$ dir (Campbell and Campbell 2009).

Direkt olarak hesaplama ile iki gerenli durumda yani herhangi geren çifti için $LEN(\langle n, 2, 2 \rangle) = 6$, $LEN((n, 2, 2)) = 6$, $LEN(\langle 2, n, 2 \rangle) = 6$ ve $LEN((2, n, 2)) = 6$ olduğu görülür.

Teorem 3: G_n , $n > 0$ için $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz \rangle$ takdimi ile tanımlanmış bir grup olsun. Bu durumda

$$LEN_{(x,y,z)}(G_n) = \begin{cases} 4n, & n \text{ çift} \\ 8n, & n \text{ tek} \end{cases}$$

(Campbell and Campbell 2009).

İspat: G_n grubu $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz \rangle$ takdimi ile tanımlanmış olsun.

Fibonacci orbitinin başlangıcı aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} x, y, z, \underline{xyz} &= z^n, \underline{yzz^n} = z^n yz, \underline{zz^n z^n} yz = z^{2n} \underline{zyz} = z^{2n} zx, \\ \underline{z^n z^n} yz \underline{z^{2n}} zx &= z^{4n} \underline{yzzx} = z^{4n} xzx, \\ z^n \underline{yz z^{2n}} \underline{zx z^{4n}} xzx &= z^{7n} \underline{yzzxzx} = z^{8n} xz^2 x, \\ z^{2n} \underline{zxz^{4n}} \underline{xzxz^{8n}} xz^2 x &= z^{14n} \underline{zx^2 z x^2 z^2} x = z^{16n} z^4 x, \\ \underline{z^{4n}} \underline{xzxz^{8n}} \underline{xz^2 x z^{16n}} z^4 x &= z^{28n} \underline{xzx^2 z^2} xz^4 x = z^{29n} \underline{xz^3 xz^4} x = z^{29n} x^2 zx = z^{30n} zx, \\ \underline{z^{8n}} \underline{xz^2 xz z^{16n}} z^4 x \underline{z^{30n}} zx &= z^{54n} \underline{xz^2 xz^4} xzx = x^{54n} \underline{x^2 z^2} xzx = z^{55n} \underline{z^2 xzx} = z^{55n} \underline{zx^2} = z^{56n} z, \\ \underline{z^{16n}} z^4 x \underline{z^{30n}} \underline{zx z^{56n}} z &= z^{102n} \underline{zxzxz} = z^{102n} z^3 \underline{x^2} z = z^{103n} z^4, \\ \underline{z^{30n}} \underline{zx z^{56n}} \underline{z z^{103n}} z^4 &= z^{189n} \underline{zxz^5} = z^{189n} xz^4, \dots \end{aligned}$$

Şimdi yukarıdaki Fibonacci orbitinin belli bir kesiti $\dots, z^a x, zx, z, \dots$ formunda yazılırsa, $|z| = 2n$ olduğu kullanılarak aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
& z^a x, \\
& zx, \\
& z, \\
& \underline{z^a xzxz} = z^{a-1} \underline{x^2} z = z^n z^a, \\
& \underline{zxz} \underline{z^n z^a} = z^n \underline{zxz^{a+1}} = z^n xz^a, \\
& \underline{z z^n z^a z^n xz^a} = \underline{z^{a+1} xz^a} = zx, \\
& \underline{z^n z^a z^n xz^a} zx = \underline{z^a xz^{a+1}} x = xzx, \\
& \underline{z^n xz^a z xzx} = xz^{a+2} x, \\
& \underline{zxzx} \underline{zxz^{a+2}} x = z^{a+4} x, \\
& \underline{xzx} \underline{zxz^{a+2}} \underline{xz^{a+4}} x = z^n x \underline{z^{a+3} xz^{a+4}} x = \underline{z^n xzx} = zx, \\
& \underline{xz^{a+2} xz^{a+4} xzx} = \underline{x^2 z^2 xzx} = z^n \underline{zx^2} = z, \dots
\end{aligned}$$

Buradan Fibonacci orbitinin her sekiz terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece Fibonacci orbiti aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x, x_2 = y, x_3 = z, \dots, \\
x_9 &= z^4 x, x_{10} = \underline{zx} = y, x_{11} = z, \dots, \\
x_{17} &= z^8 x, x_{18} = \underline{zx} = y, x_{19} = z, \dots, \\
x_{8i+1} &= z^{4i} x, x_{8i+2} = \underline{zx} = y, x_{8i+3} = z, \dots
\end{aligned}$$

Böylece, $k \in N$ için $4i = 2nk$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. Fibonacci orbitinin uzunluğu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki iki durum söz konusudur:

Eğer n çift ise $i = \frac{n}{2}$ olup, $8i = 4n$ olur ki, buradan $LEN_{(x,y,x)}(G_n) = 4n$ olduğu görülür.

Eğer n tek ise $n = i$ olup, $8i = 8n$ olur ki, buradan $LEN_{(x,y,x)}(G_n) = 8n$ olduğu görülür.

Sonuç: G_n , $n > 0$ için $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz = e \rangle$ takdimi ile tanımlanmış bir grup olsun. Bu durumda

$$LEN_{(x,y,z)}((2,2,n)) = \begin{cases} 2n, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ 4n, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 8n, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

(Campbell and Campbell 2009).

Kolaylıkla görülür ki, herhangi geren çifti için $LEN(\langle 2,2,n \rangle) = 6$ ve $LEN((2,2,n)) = 6$ dır. Bu dihedral gruplar için (Campbell *et al.* 1990) çalışmasında verilen sonuçların doğal bir genişlemesidir (Campbell and Campbell 2009).

$0 < (n-2)(m-2) < 4$ olacak şekilde yani, sonlu $\langle 2,m,n \rangle$ binary polyhedral ve $(2,m,n)$ polyhedral gruplarının Fibonacci uzunlukları aşağıdaki tablolardaki gibidir (Campbell and Campbell 2009).

Çizelge 3.2 iki geren için sonlu $\langle 2,m,n \rangle$ binary polyhedral ve $(2,m,n)$ polyhedral gruplarının Fibonacci uzunlukları

İzomorf bütün gruplar için	$LEN_{(x,y)}(G)$
$\langle 2,3,3 \rangle$	16 (96), 48 (288)
$(2,3,3)$	16 (96)
$\langle 2,3,4 \rangle$	18 (864)
$(2,3,4)$	18 (216)
$\langle 2,3,5 \rangle$	12 (960), 14 (840), 42 (2520), 50 (1200), 150 (3600)
$(2,3,5)$	12 (240), 14 (840), 50 (1200)

Parantez içindeki sayılar bu uzunluğa sahip farklı geren çiftlerinin toplam sayısıdır.

Çizelge 3.3 üç geren için sonlu $\langle 2, m, n \rangle$ binary polyhedral ve $(2, m, n)$ polyhedral gruplarının Fibonacci uzunlukları

İzomorf bütün gruplar için	$LEN_{(x,y,z)}(G)$
$\langle 2,3,3 \rangle$	26 (1248), 52 (11232)
$(2,3,3)$	26 (312), 52 (1248)
$\langle 2,3,4 \rangle$	8 (4992), 16 (6144), 24 (16128), 48 (36864), 56 (10752), 60 (5760)
$(2,3,4)$	8 (624), 16 (768), 24 (2592), 48 (4032), 56 (1344), 60 (720)
$\langle 2,3,5 \rangle$	8 (36480), 10 (2400), 14 (6720), 20 (2400), 24 (23040), 25 (1200), 28 (6720), 40 (38400), 42 (6720), 45 (3600), 50 (1200), 84 (6720), 90 (3600), 92 (22080), 100 (2400), 154 (36960), 180 (6200), 204 (32640), 268 (257280), 308 (36960), 385 (18480), 716 (171840), 770 (18480), 880 (84480), 1188 (95040), 1540 (36960), 1860 (297600), 3580 (343680)
$(2,3,5)$	8 (4560), 10 (600), 14 (1680), 24 (2880), 25 (600), 40 (4800), 42 (1680), 45 (1800), 92 (2760), 102 (4080), 154 (9240), 268 (32160), 385 (9240), 440 (10560), 594 (11880), 716 (21480), 930 (37200), 1790 (42960)

Parantez içindeki sayılar bu uzunluğa sahip farklı geren üçlülerinin toplam sayısıdır.

3.3. Genişletilmiş Triangle Grupların Fibonacci Uzunlukları

Bu bölümde genişletilmiş triangle gruplarının Fibonacci uzunluğu ile ilgili yapılan bazı çalışmalara yer verilecektir.

Lemma 1: $E(\infty, 2, \infty)$ nin Fibonacci uzunluğu 8 dir (Campbell and Campbell 2009).

İspat: Fibonacci orbitinin elemanları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} x, y, z, xyz, yzxyz, zxzyzxyz &= z\underline{xx}y = \underline{zy}z, \\ x\underline{yzyzxy}zzyz &= \underline{xx}y\underline{yz} = z, \\ yzxy\underline{zz}y\underline{zz} &= yz\underline{xy}y = yzx, \\ zy\underline{zz}yzx &= z\underline{yy}zx = \underline{zz}x = x \\ \underline{zyzxx} &= z\underline{yz} = \underline{zz}y = y, \\ yz\underline{xx}y &= y\underline{zy} = \underline{y}yz = z, \dots \end{aligned}$$

Böylece, bu grup için Fibonacci uzunluğu 8 dir.

Sonuç 1: $E(p, 2, r)$ nin Fibonacci uzunluğu 8 dir (Campbell and Campbell 2009).

Lemma 2: $q > 2$ olsun. Bu durumda

$$LEN_{(x,y,z)}(E(2, q, 2)) = \begin{cases} 2n, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ 4n, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 8n, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

(Campbell and Campbell 2009).

3.4. Centro-Polyhedral Grupların Fibonacci Uzunlukları

Bu bölümde centro-polyhedral gruplarının Fibonacci uzunluğu ile ilgili yapılan bazı çalışmalara yer verilecektir.

Tanım 1: $k_{(a,b,c)}(n)$, her bir değeri n modülüne indirgendiği zaman, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}$, $u_0 = a, u_1 = b, u_2 = c$ şeklindeki, tam sayı değerlerinin indirgeme bağıntısının minimum periodunu gösterir.

Teorem 1: $n \geq 3$ bir tamsayı olsun. LEN ile $LEN(\langle 2, -2, n \rangle)$ gösterilsin. Bu durumda LEN ,

$$4n \mid LEN, \\ k_{(0,2,3)}(4(n-1)) \mid LEN$$

olacak şekilde aşikar olmayan en küçük tamsayıdır (Campbell and Campbell 2005).

İspat: $\langle 2, -2, n \rangle$ taktimi ile tanımlanan grup formundan, düzenlenmiş Tood-Coxeter verileri veya diğer veriler kullanılarak, bu grupta $|x| = |y| = 4(n-1)$ ve $|z| = 2n(n-1)$ olarak elde edilir.

$\langle 2, -2, n \rangle$ grubu için taktimden,

$$\begin{aligned} z &= y^{-1}x, \\ \underline{z}xz &= y^{-1}\underline{x}xz = y^{-1}\underline{z}x^2, \\ &= y^{-1}y^{-1}xx^2 = y^{-2}x\underline{x}^2 = y^{-4}x, \\ &= (y^{-2})^2 x = z^{2n}x \end{aligned}$$

elde edilebilir. Bir elementer indiksiyon düzenlemesi ile,

$$z^j x z^j = z^{2jn} x$$

olduğu görülebilir. Bu son sonuç x 'in üsleri toplamının sabit kalması ve z 'nin üsleri toplamının n 'nin bir çarpanı olarak değişmesi bakımından yararlıdır. Bu sonuç kullanılarak Fibonacci orbiti için basit bir standart form elde edilir.

Fibonacci orbitinin başlangıcı aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
& x, y, z, \underline{xyz} = x^2, \underline{yzx^2} = xx^2, \\
& zx^4, xzx^8, xz^2xx^{16}, z^4x^{33}, \\
& xzx^8, xz^2xx^{16}, z^4x^{33} = z^{6n}zx^{60}, \\
& xz^2xx^{16}, z^4x^{33}, z^{6n}zx^{60} = z^{12n}zx^{112}, \dots
\end{aligned}$$

Böylece Fibonacci orbiti, ilk iki terimden sonra yalnızca x ve z kullanılarak yazılabilir. Gerçekten kolaylıkla görülür ki Fibonacci orbiti aşağıdaki modele uygundur:

$$x_m = \begin{cases} z^{(a_m-(m-1)/2)n} z^{(m-1)/4} xx^{b_m-1}, & m \equiv 1 \pmod{8}, \\ z^{(a_m-1)n} zx^{b_m-1}, & m \equiv 2 \pmod{8}, \\ z^{(a_m-1)n} zx^{b_m}, & m \equiv 3 \pmod{8}, \\ z^{(a_m-(m-4)/2)n} z^{(m-4)/2} x^{b_m}, & m \equiv 4 \pmod{8}, \\ z^{(a_m-(m-5)/2)n} xz^{(m-5)/2} x^{b_m-1}, & m \equiv 5 \pmod{8}, \\ z^{(a_m-1)n} zx^{b_m-1}, & m \equiv 6 \pmod{8}, \\ z^{(a_m-1)n} xzx^{b_m-2}, & m \equiv 7 \pmod{8}, \\ z^{(a_m-(m-8)/4+2)n} xz^{(m-8)/4+2} xx^{b_m-2}, & m \equiv 0 \pmod{8}. \end{cases}$$

Burada

$$\begin{aligned}
a_m &= a_{m-3} + a_{m-2} + a_{m-1}, \quad a_3 = 1, a_4 = 0, a_5 = 0; \\
b_m &= b_{m-3} + b_{m-2} + b_{m-1}, \quad b_3 = 0, b_4 = 2, b_5 = 3.
\end{aligned}$$

$LEN = LEN(\langle 2, -2, n \rangle)$ olsun, bu durumda,

$$\begin{aligned}
x_{LEN+3} &= z^{(a_{LEN+3}-1)n} zx^{b_{LEN+3}}, \\
x_{LEN+4} &= z^{(a_{LEN+4}-((LEN+4)-4)/2)n} z^{((LEN+4)-4)/2} x^{b_{LEN+4}}, \\
x_{LEN+5} &= z^{(a_{LEN+5}-((LEN+5)-5)/2)n} xz^{((LEN+5)-5)/2} x^{b_{LEN+5}-1}
\end{aligned}$$

olur. Böylece $k(m)$, pozitif m tamsayısının 3-adım Wall sayısı olmak üzere $k(|x|) \mid LEN$ yani $k(4(n-1)) \mid LEN$ olması gerekir. 3.1. bölümdeki Lemma 1 ve Sonuç 3 kullanılarak yukarıdaki eşitliklerin ilkinden,

$$x_{LEN+3} = z^{(1-1)n} zx^0 = z$$

elde edilir. İkinci eşitlikten,

$$x_{LEN+4} = z^{(0-(LEN)/2)n} z^{(LEN)/2} x^2$$

elde edilir. Böylece bu ifadenin x^2 ye eşit olabilmesi için $2n \mid LEN/2$ olması gerekir.

Son eşitlikten ise,

$$\begin{aligned} x_{LEN+5} &= z^{(0-LEN/2)n} x z^{LEN/2} x^2 \\ &= x z^{(LEN/2)(1-n)} x^2 = x^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre LEN ,

$$\begin{aligned} &4n \mid LEN, \\ &k_{(0,2,3)}(4(n-1)) \mid LEN \end{aligned}$$

koşulunu sağlayan en küçük tamsayı olmalıdır.

Teorem 2: $n \geq 3$ bir tamsayı olsun. Bu durumda $LEN(\langle 2, -2, n \rangle) = LEN(\langle -2, 2, n \rangle)$ dir (Campbell and Campbell 2005).

Teorem 3: $\langle a, b, c \rangle$ grupları düşünüldüğü zaman,

1. $\langle -n, 2, 2 \rangle$ ve $\langle 2, -n, 2 \rangle$ gruplarının Fibonacci uzunlukları 8 dir.

2. $\langle 2, 2, -n \rangle$ ile grubunun Fibonacci uzunluğu aşağıdaki gibidir,

$$LEN_{(x,y,z)}(\langle 2, 2, -n \rangle) = \begin{cases} 4n, & n \text{ çift} \\ 8n, & n \text{ tek} \end{cases}$$

(Campbell and Campbell 2005).

Teorem 4: $\langle -2, n, 2 \rangle$ nin Fibonacci uzunluğu $k(4(n-1))$ dir (Campbell and Campbell 2005).

Teorem 5: $\langle 2, n, -2 \rangle$ nin Fibonacci uzunluğu $k(4(n-1))$ dir (Campbell and Campbell 2005).

Teorem 6: $\langle n, 2, -2 \rangle$ nin Fibonacci uzunluğu $k(4(n-1))$ dir (Campbell and Campbell 2005).

Teorem 7: $\langle n, -2, 2 \rangle$ nin Fibonacci uzunluğu $k(4(n-1))$ dir (Campbell and Campbell 2005).

3.5. Sonlu Gruplarda k-nacci Dizisi (Sonlu Gruplarda k-Basamak Fibonacci Dizisi)

Tanım 1: Sonlu bir gruptaki bir k -nacci (k -basamak Fibonacci) dizisi, grubun $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları için,

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1}; & j \leq n < k \text{ için} \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots x_{n-1}; & n \geq k \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının grubu gemesi gerekir. Böylece, bu k -nacci dizisi grubun yapısını yansıtır. $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ tarafından gerilen sonlu bir gruptaki bir k -nacci dizisi $F_k(G; x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1})$ ile gösterilir. Buna göre tamsayılardaki mod m ye göre klasik Fibonacci dizisi $F_2(Z_m; 0, 1)$ olarak yazılabilir. Grup elemanlarının bir 2-nacci dizisi sonlu bir grubun Fibonacci dizisi olarak adlandırılır. Bir $F_k(G; x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1})$ k -nacci dizisinin periodu $P_k(G; x_0, x_1, x_2, \dots, x_{j-1})$ şeklinde gösterilir. k -gerenli bir grubun Fibonacci orbiti bu gruptaki k -nacci dizisidir.

Tanım 2: G bir grup olsun. G nin her elemanının içinde bulunduğu bir k -nacci dizisi mevcut ise G ye k -nacci dizilenebilir denir (Knox 1992).

Şimdi özel gruplardaki k -nacci dizilerinin periodlarını araştıralım.

Teorem 1: $n \geq 3$ olmak üzere $\langle x, y : x^n = y^2 = e, yx = x^{-1}y \rangle$ şeklinde takdim edilen D_n dihedral grubunda $P_k(D_n; x, y) = P(D_n; y, x) = 2k + 2$ dir (Knox 1992).

Tanım 3: Eğer bir grup i tane eleman tarafından gerilirse bu gruba i gerenli grup denir.

Teorem 2: G , 2-gerenli bir grup ve G nin birim elemanı $F_2(G; x, y)$ veya $F_2(G; y, x)$ Fibonacci dizilerinde görülüyorsa G abelyendir (Knox 1992).

İspat: Genelliği bozmaksızın G nin $F_2(G; x, y)$ Fibonacci dizisi düşünelim ve n doğal sayısı için G nin birim elemanın bu dizinin $(n+1)$. elemanı olduğunu kabul edelim. Bu dizinin n . elemanı grubun herhangi bir elemanı olabilir. Böylece,

$$x, y, \dots, s, e, \dots$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Yalnız s^{-1} , $(n-1)$. pozisyon için tanımlayıcı bağıntıyı sağlar. Benzer şekilde, s^2 dizinin $(n-2)$. pozisyonunda, s^{-3} dizinin $(n-3)$. pozisyonunda olur. Bu şekilde devam ederek,

$$x, y, \dots, s^{-8}, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e, \dots$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Bu elemanlar üslere sahip olduğundan $u_{i-2} = -u_{i-1} + u_i$ bağıntısı kullanılarak s nin üslerinde ortaya çıkan ardışık pozitif ve negatif işaretli tamsayılardan bir Fibonacci dizisi oluşturulur. Böylece, grubun bir Fibonacci dizisi aşağıdaki iki forma sahip olur:

(i). n tek ise, dizi,

$$s^{u_n}, s^{-u_{n-1}}, s^{u_{n-2}}, \dots, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e$$

şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{u_n} = x, s^{-u_{n-1}} = y$$

(bu da $s^{u_{n-1}} = y^{-1}$ olmasını gerektirir.) ve $s^{u_{n-2}} = xy$ dir.

$$s^{u_{n-1}} s^{u_{n-2}} = s^{u_{n-1} + u_{n-2}} = s^{u_n}$$

olduğundan $y^{-1}xy = x$ veya $xy = yx$ olur. O halde bu grup abelyendir.

(ii). n çift ise, dizi,

$$s^{-u_n}, s^{u_{n-1}}, s^{-u_{n-2}}, \dots, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e$$

şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{-u_n} = x, s^{u_{n-1}} = y$$

(bu da $s^{-u_{n-1}} = y^{-1}$ olmasını gerektirir.) $s^{-u_{n-2}} = xy$ dir.

$$s^{-u_{n-1}} s^{-u_{n-2}} = s^{-(u_{n-1}+u_{n-2})} = s^{-u_n}$$

olduğu için $y^{-1}xy = x$ veya $xy = yx$ olur. O halde bu grup abelyendir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım,

$$A = \langle x, y : x^9 = y^2 = e, xy = yx \rangle$$

abelyen grubunu göz önüne alalım. Bu grubun Fibonacci dizileri,

$$x, y, xy, x, x^2y, x^3y, x^5, x^8y, x^4y, x^3, x^7y, xy, x^8, y, \\ x^8y, x^8, x^7y, x^6y, x^4, xy, x^5y, x^6, x^2y, x^8y, x, y, xy, \dots$$

ve

$$y, x, xy, x^2y, x^3, x^5y, x^8y, x^4, x^3y, x^7y, x, x^8y, y, x^8 \\ x^8y, x^7y, x^6, x^4y, xy, x^5, x^6y, x^2y, x^8, xy, y, x, xy, \dots$$

şeklinde olur. Dikkat edilirse bu grubun e, x^2 ve x^7 elemanları bu dizilerde yer almamaktadır.

Sonuç 1: 2-nacci dizilenebilir bir grup devirlidir (Knox 1992).

İspat: G , 2-nacci dizilenebilir bir grup olsun. Bu takdirde, G grubu ya 1-gerenli ya da 2-gerenlidir. G , 2-gerenli bir grup ise e , G nin 2-nacci dizisinde bulunacağından yukarıdaki teoremin ispatında olduğu gibi, G nin bir s elemanının terimlerinden bir dizi oluşturulabilir. G nin her elemanı kendisinin 2-nacci dizisinde

bulunur ve bu yüzden, G nin bütün elemanları, sadece bir s elemanının terimleri ile takdim edilir (s nin üsleri ile). O halde, G grubu 1-gerenlidir ya da devirlidir.

Genel olarak $k \geq 3$ için k -nacci dizilenebilir gruplar abelyen değildir. D_3 dihedral grubu 6 elemanlı, k -nacci dizilenebilir bir gruptur.

Teorem 3: G , 2-gerenli bir grup olsun. G nin birim elemanı bu grubun bir Fibonacci dizisinde görülürse, bu takdirde dizinin $x_i = e$ özelliğini sağlayan x_i elemanlarının indislerinin bir koleksiyonu aritmetik bir dizilişe sahip bir dizi ihtiva eder (Knox 1992).

İspat: Yukarıdaki Teorem 2'den $G = \langle x, y \rangle$ abelyendir. Bu yüzden, dizinin n . terimi $x^{u_{n-1}} y^{u_n}$ şeklindedir. Walli'nin (1960) daki çalışmasından, $u_n \equiv 0 \pmod{m}$ olan terimlerin basit aritmetik dizilişte olan indislere sahip oldukları bilinmektedir. Böylece, $x, x, x^2, \dots, x^{u_n}$ ve $y, y, y^2, y^3, \dots, y^{u_n}$ elemanlarının dizilerinin her ikisi de indisleri aritmetik dizilişte olan pozisyonlarda e yi ihtiva eder. e nin ortaya çıkışının periodu x ve y nin mertebelerine bağlıdır. $x, y, xy, xy^2, x^2 y^3, \dots$ de e nin ortaya çıkışının bu periodu e nin $x, x, x^2, \dots, x^{u_n}$ ve $y, y, y^2, y^3, \dots, y^{u_n}$ deki periodlarının en küçük ortak katı olur. Böylece, e nin $x, y, xy, xy^2, x^2 y^3, \dots$ deki pozisyonları, bir aritmetik diziliş ihtiva eden altindisler olacaktır.

k -nacci dizilenebilir bir grubun bir homomorfik görüntüsü de k -nacci dizilenebilir dir. k -nacci dizilenebilir bir grubun, bir k -nacci dizilenebilir grup tarafından genişlemesinin k -nacci dizilenebilir olması gerekmez. k -nacci dizilenebilir grupların direkt çarpımlarının k -nacci dizilenebilir olması gerekmez bu durumu bir örnekle gösterelim.

$$A = \langle x, y : x^9 = y^2 = e \text{ ve } yx = xy \rangle$$

abelyen grubunu ele alalım, bu grup $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ devirli gruplarının direkt çarpımıdır.

$\langle x \rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$F_2(\langle x \rangle; e, x) = e, x, x, x^2, x^3, x^5, x^8, x^4, x^3, x^7, x, x^8, \\ e, x^8, x^8, x^7, x^6, x^2, x^8, x, e, x, x, \dots$$

ve $\langle y \rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$F_2(\langle y \rangle; e, y) = e, y, y, e, \dots$$

şeklinde olup bu iki grup da 2 -nacci dizilenelebilir olmasına rağmen bu grupların direkt çarpımı 2 -nacci dizilenelebilir değildir (Knox 1992).

3.6. $h_k(m)$ Fonksiyonu

$f_n^{(k)}$, $1 \leq i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ sınır şartlarıyla tanımlı,

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^k f_{n-j}^{(k)} \text{ for } n > k \quad (1)$$

k -basamak Fibonacci dizisinin n . elemanıdır. $f_i^{(k,m)} = f_i^{(k)} \pmod{m}$ olmak üzere bu dizi m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$f(k, m) = (f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_n^{(k,m)} \dots)$$

dizisi elde edilir. O zaman $(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_k^{(k,m)}) = (0, 0, \dots, 1)$ olup bu dizi için (1) deki tekrareden dizi bağıntıları aynıdır (Lü and Wang 2007).

Teorem 1: $f(k, m)$ periyodik bir dizidir (Lü and Wang 2007).

İspat:

$$S_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : 0 \leq a_i \leq m-1\}$$

olsun. $|S_k| = m^k$ olup sonludur, yani,

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \dots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $u \geq 0$ için $v \geq u$ sayısı vardır. Tanımdan,

$$f_{n+k}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

olur. Yani,

$$f_n^{(k)} = f_{n+k}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

dir. Buradan kolaylıkla,

$$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \dots, f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)} \text{ ve } f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$$

olduğu görülebilir. Böylece $f(k, m)$ periodik bir dizidir.

$h_k(m)$ ile $f(k, m)$ nin en küçük periodu gösterilir, $f(k, m)$ nin periodu veya m modülüne göre k -basamak Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır (Lü and Wang 2007).

Örnek olarak,

$$s(4,3) = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$$

dizisi ele alınırsa, bu dizi $k = 4$ basamak için her 26 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar edip $h_4(3) = 26$ olur.

p_i ler farklı asal sayılar ve e_i ler pozitif tamsayılar olmak üzere, $m = \prod_{i=1}^t p_i^{e_i}$ ($t \geq 1$) ise

$h_k(m)$, $h_k(p_i^{e_i})$ lerin en küçük ortak katıdır (Lü and Wang 2007).

Teorem 2: t , $h_k(p) = h_k(p^t)$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Her $\alpha \geq t$ için, $h_k(p^\alpha) = p^{\alpha-t} h_k(p)$ olur. Özellikle eğer $h_k(p) = h_k(p^2)$ ise her $\alpha > 1$ için, $h_k(p^\alpha) = p^{\alpha-1} h_k(p)$ dir (Lü and Wang 2007).

Varsayım 1: Eğer $p \geq k$ bir asal sayı ise, $h_k(p) \mid (p^k - p^i)$ olacak şekilde $0 \leq i \leq k-1$ aralığında bir i sayısı vardır (Lü and Wang 2007).

Yukarıdaki varsayımı doğrulayan bazı örnekler aşağıdaki tablolar yardımıyla gösterilmiştir.

Çizelge 3.4 $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_3(p) \mid (p^3 - p^i)$ 'nin durumu

p	$h_3(p)$	Sonuç
5	31	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
13	168	$h_3(p) \mid p^3 - p^2$
23	553	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
67	1519	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
107	1272	$h_3(p) \mid p^3 - p$
179	32221	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
241	29040	$h_3(p) \mid p^3 - p$
317	100807	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
389	151711	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
557	103416	$h_3(p) \mid p^3 - p$
839	704761	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
881	777043	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
971	943813	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
1033	1067088	$h_3(p) \mid p^3 - p$
1103	1217713	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
1301	1693903	$h_3(p) \mid p^3 - p$
1447	2093808	$h_3(p) \mid p^3 - p$
1759	3094080	$h_3(p) \mid p^3 - p$
2851	8128200	$h_3(p) \mid p^3 - p$
3347	11205757	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
4831	11669280	$h_3(p) \mid p^3 - p$
13367	7444862	$h_3(p) \mid p^3 - p$
15791	10389820	$h_3(p) \mid p^3 - p$
17207	17206	$h_3(p) \mid p^3 - p^2$
18047	1696324	$h_3(p) \mid p^3 - p$

Çizelge 3.5 $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_4(p)|(p^3 - p^i)$ 'nin durumu

p	$h_4(p)$	Sonuç
5	312	$h_4(p) p^4 - 1$
11	120	$h_4(p) p^4 - p^2$
13	84	$h_4(p) p^4 - p^2$
19	6858	$h_4(p) p^4 - p$
29	280	$h_4(p) p^4 - p^2$
37	1368	$h_4(p) p^4 - p^2$
41	240	$h_4(p) p^4 - p^2$
67	100254	$h_4(p) p^4 - p$
83	1157520	$h_4(p) p^4 - 1$
151	533216	$h_4(p) p^4 - 1$
211	9393930	$h_4(p) p^4 - p$
433	23248760	$h_4(p) p^4 - 1$
907	822648	$h_4(p) p^4 - p^2$
1277	1630728	$h_4(p) p^4 - p^2$
1579	623310	$h_4(p) p^4 - p^2$
1973	1946364	$h_4(p) p^4 - p^2$
2593	1680912	$h_4(p) p^4 - p^2$
2749	7557000	$h_4(p) p^4 - p^2$
3079	4740120	$h_4(p) p^4 - p^2$
3331	369270	$h_4(p) p^4 - p^2$
3581	3205890	$h_4(p) p^4 - p^2$
3733	2322548	$h_4(p) p^4 - p^2$
3823	3822	$h_4(p) p^4 - p^3$
4019	8076180	$h_4(p) p^4 - p^2$
4253	6029336	$h_4(p) p^4 - p^2$

Çizelge 3.6 $p \geq 5$ olacak şekilde p asal sayısı için $h_5(p) \mid (p^3 - p^i)$ 'nin durumu

p	$h_5(p)$	Sonuç
5	781	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
7	2801	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
11	16105	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
19	13032	$h_5(p) \mid p^5 - p$
31	190861	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
41	2896405	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
53	8042221	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
79	39449441	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
89	3690720	$h_5(p) \mid p^5 - p$
163	176477940	$h_5(p) \mid p^5 - p$
283	20022	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
419	35112	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
503	127263526	$h_5(p) \mid p^5 - p^2$
683	159305993	$h_5(p) \mid p^5 - p^2$
823	677328	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
1259	317016	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
1709	1460340	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
2287	50292	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
2549	6497400	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
2957	8743848	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
3163	3162	$h_5(p) \mid p^5 - p^4$
3541	12538680	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
3929	15437040	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
4159	17297280	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$

(Lü and Wang 2007).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde $f(k, 2)$, $f(k, 4)$ dizilerinin ve $n > 2$ olmak üzere $(2, 2, 2)$, $(n, 2, 2)$, $(2, n, 2)$, $(2, 2, n)$ polyhedral gruplarındaki, $p, q, r > 2$ olmak üzere $E(2, 2, 2)$, $E(p, 2, 2)$, $E(2, q, 2)$, $E(2, 2, r)$ genişletilmiş triangle gruplarındaki ve $n > 2$ olmak üzere $\langle 2, 2, 2 \rangle$, $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$, $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral gruplarındaki k -nacci dizilerinin priodları hesaplanacaktır.

4.1. $f(k, m)$ Dizisinin Periodu

Teorem 1: $f(k, 2)$ dizisinin periodu $h_k(2) = k + 1$ dir.

İspat: $f(k, 2)$ dizisi,

$$\begin{aligned} x_0 = 0, x_1 = 0, \dots, x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 1, \\ x_{k+1} = 0, x_{k+2} = 0, \dots, x_{2k-1} = 0, x_{2k} = 1, x_{2k+1} = 1, \dots \end{aligned}$$

şeklinde olup, bu dizi $k + 1$ inci elemanla başa dönüp ve aynı alt dizinin tekrarı şeklinde olduğu için periodu $h_k(2) = k + 1$ dir.

Teorem 2: $f(k, 4)$ dizisinin periodu $h_k(4) = 2k + 2$ dir.

İspat: $f(k, 4)$ dizisi,

$$\begin{aligned} x_0 = 0, x_1 = 0, \dots, x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 1, x_{k+1} = 2, x_{k+2} = 0, x_{k+3} = 0, \dots, \\ x_{k+k-1} = 0, x_{2k} = 3, x_{2k+1} = 1, x_{2k+2} = 0, x_{2k+3} = 0, \dots, x_{3k} = 0, x_{3k+1} = 1, \dots \end{aligned}$$

şeklinde olup, bu dizi $2k + 2$ inci elemanla başa dönüp ve aynı alt dizinin tekrarı şeklinde olduğu için periodu $h_k(4) = 2k + 2$ dir.

4.2. $(2,2,2)$, $(n,2,2)$, $(2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ Polyhedral Grupları

Teorem 1: $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$ şeklinde takdim edilen $G_2 = (2,2,2)$ polyhedral grubu için k -nacci dizisinin periodu $k+1$ dir.

İspat: İlk olarak bu grubun iki gerenli durumunu ele alalım. Bu grup iki gerenli durumda $\langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^2 = e \rangle$ şeklinde takdim edilir ve burada $|x| = 2, |y| = 2$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, xy, yxy = x, xyx = y, xy, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 3 tür.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, xy, (xy)^2 = e, yxy = x, xyx = y, xy, e, \dots$$

Aynı şekilde bu diziden de 3 - nacci dizisinin periodunun 4 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = (xy)^2, x_4 = (xy)^4, \dots, x_{k-1} = (xy)^{2^{k-3}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = (xy)^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^k x_i = x,$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = y,$$

$$\begin{aligned}
x_{k+3} &= \prod_{i=3}^{k+2} x_i = xy, \\
x_{k+4} &= \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca, $x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e$ dir. $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ elemanları x, y ve xy nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $k+1$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{k+1}, x_1 = x_{k+2}, x_2 = x_{k+3}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_2; x, y) = k+1$ olduğu görülür.

Şimdi bu grubun üç gerenli durumu ele alalım. Bu grup üç gerenli durumda $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$ şeklinde takdim edilir ve burada $|x| = 2, |y| = 2, |z| = 2$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, yz = x, zx = y, xy = z, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 3 tür.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, xyz = e, yz = x, zx = y, z, e, x, y, z, \dots$$

Aynı şekilde bu diziden de 3 - nacci dizisinin periodunun 4 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xyz, x_4 = (xyz)^2, \dots, x_{k-1} = (xyz)^{2^{k-4}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = z^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^k x_i = x,$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = y,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = xyz = e,$$

$$\vdots$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca, $x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = xyz = e$ dir.

$x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $k+1$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{k+1}, x_1 = x_{k+2}, x_2 = x_{k+3}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_2; x, y, z) = k+1$ olduğu görülür.

2. Yol: G_2 grubu $Z_2 \oplus Z_2$ olup $P_k(Z_2; 0, 1) = k+1$ dir. Grupların direkt çarpımının bir Fibonacci dizisinin periodu her bir çarpandaki periodların en küçük ortak katı olduğundan $P_k(G_2; x, y) = k+1$ dir. Ayrıca $z = xy$ dersek 3-gerenli durumda dizi $k+1$ periodla tekrar ettiği için dizinin periodu 2-gerenli durumdaki period ile aynıdır (Karaduman ve Deveci 2009).

Teorem 2: $\langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = (n, 2, 2)$ polyhedral grubu için k -nacci dizisinin periodu $2k+2$ dir.

İspat: Bu grubun üç gerenli durumunu ele alalım, burada $|x| = n$, $|y| = 2$, $|z| = 2$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, yz, zyz, z, x, y, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

Eğer $k = 3$ ise 3.2. bölümdeki Teorem 1 için verilen Sonuç'da belirtildiği gibi dizinin periodu 8 dir.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xyz, x_4 = (xyz)^2 \dots, x_{k-1} = (xyz)^{2^{k-4}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = (xyz)^{2^{k-3}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^k x_i = yz = x^{n-1},$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zyz = xz,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+2} x_i = e,$$

$\vdots$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca,

$$x_{2k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e,$$

$$x_{2k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = x,$$

$$x_{2k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = y,$$

$$x_{2k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = z$$

olur. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_n; x, y, z) = 2k+2$ olduğu görülür (Karaduman ve Deveci 2009).

İki gerenli durumda, $n > 2$ için $(n, 2, 2) \cong (2, n, 2) \cong D_n$ olup aynı zamanda bu gruplar benzer takdimlere sahip oldukları için x, y ve y, x başlangıç elemanlarına göre $(n, 2, 2), (2, n, 2)$ grupları ile D_n dihedral grubundaki k - nacci dizilerinin periodları aynı olup $2k+2$ dir.

Teorem 3: $\langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = (2, n, 2)$ polyhedral grubu için k - nacci dizisinin periodu $2k+2$ dir.

İspat: Bu grubun üç gerenli durumunu ele alalım, burada $|x| = 2$, $|y| = n$, $|z| = 2$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, x, zx, xzx, x, y, z, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

Eğer $k = 3$ ise 3.2. bölümdeki Teorem 2 için verilen Sonuç'da belirtildiği gibi dizinin periodu 8 dir.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xyz, x_4 = (xyz)^2 \dots, x_{k-1} = (xyz)^{2^{k-4}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned}
 x_k &= \prod_{i=0}^{k-1} x_i = (xyz)^{2^{k-3}} = e, \\
 x_{k+1} &= \prod_{i=1}^k x_i = yz = x, \\
 x_{k+2} &= \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zx, \\
 x_{k+3} &= \prod_{i=3}^{k+2} x_i = xzx, \\
 x_{k+4} &= \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca,

$$\begin{aligned}
 x_{2k+1} &= \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e, \\
 x_{2k+2} &= \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = x, \\
 x_{2k+3} &= \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = y, \\
 x_{2k+4} &= \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = z
 \end{aligned}$$

olur. $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{k+1}, x_1 = x_{k+2}, x_2 = x_{k+3}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_n; x, y, z) = 2k+2$ olduğu görülür.

Teorem 4: $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = (2, 2, n)$ polyhedral grubundaki k - nacci dizilerinin periodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

İlk olarak bu grubun $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = (xy)^n = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen 2-gerenli durumunu ele alalım. 2-gerenli durumda hem x, y hemde y, x başlangıç elemanlarına göre bu gruptaki k -nacci dizilerinin periodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. $P_2(G_n; x, y) = P_2(G_n; y, x) = 6$.

ii. $P_{3,4}(G_n; x, y) = P_{3,4}(G_n; y, x) = \begin{cases} n\left(\frac{k+1}{2}\right), & n \equiv 0 \pmod{4} \\ n(k+1), & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$.

iii. $k \geq 5$ olsun.

1. Eğer n 'nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k-2]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y) = P_k(G_n; y, x) = \begin{cases} n\left(\frac{k+1}{2}\right), & n \equiv 0 \pmod{4} \\ n(k+1), & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

2. Eğer α , n 'nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y) = P_k(G_n; y, x) = \begin{cases} \alpha \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right), & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \alpha(n(k+1)), & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \alpha(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

ii'. Eğer β , $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y) = P_k(G_n; y, x) = \begin{cases} \beta \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right), & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \beta(n(k+1)), & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \beta(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

Şimdi grubun $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen 3-gerenli durumunu ele alalım. x, y, z başlangıç elemanları için bu gruptaki k -nacci dizisinin periodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. $P_2(G_n; x, y, z) = 6$.

$$\text{ii. } P_{3,4}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n \left(\frac{k+1}{2} \right), & n \equiv 0 \pmod{4} \\ n(k+1), & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

iii. $k \geq 5$ olsun.

1. Eğer n ' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k-2]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n\left(\frac{k+1}{2}\right), & n \equiv 0 \pmod{4} \\ n(k+1), & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

2. Eğer α , n ' nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} \alpha\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \alpha(n(k+1)), & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \alpha(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

ii'. Eğer β , $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} \beta\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \beta(n(k+1)), & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \beta(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

z, x, y başlangıç elemanları için ise bu gruptaki k - nacci dizisinin periodu $2k+2$ dir.

İspat: İlk olarak bu grubun 2-gerenli durumu için ispatı yapalım. Grubun 2-gerenli takdimine göre, $|x|=2$, $|y|=2$, $|(xy)|=n$ dir.

i. Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = yxy, x_4 = y, x_5 = yx, x_6 = x, x_7 = y, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

ii. Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, xy, xyxy = (xy)^2, yxy(xy)^2 = y(xy)^3,$$

$$xy(xy)^2 y(xy)^3 = (xy)^3 y(xy)^3 = y,$$

$$(xy)^2 y(xy)^3 y = yxyy = yx,$$

$$y(xy)^3 yxy = y(xy)^3 x = (yx)^4,$$

$$yyx(yx)^4 = x(yx)^4 = (xy)^4 x,$$

$$yx(yx)^4 (xy)^4 x = yxx = y,$$

$$(yx)^4 (xy)^4 xy = xy, \dots$$

Şimdi yukarıdaki 3 - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, (xy)^a x, y, xy, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$(xy)^a x,$$

$$y,$$

$$xy,$$

$$(xy)^a xyxy = (xy)^a (xy)^2 = (xy)^{a+2},$$

$$yxy(xy)^{a+2} = y(xy)^{a+3},$$

$$xy(xy)^{a+2} y(xy)^{a+3} = xyxyxy = xxy = y,$$

$$(xy)^{a+2} y(xy)^{a+3} y = yxyy = yx,$$

$$y(xy)^{a+3} yxy = y(xy)^{a+3} x = (yx)^{a+4},$$

$$yyx(yx)^{a+4} = x(yx)^{a+4} = (xy)^{a+4} x,$$

$$yx(yx)^{a+4} (xy)^{a+4} x = yxx = y,$$

$$(yx)^{a+4} (xy)^{a+4} xy = xy, \dots$$

Buradan 3 - nacci dizisinin her sekiz terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğunu görülür. Böylece 3 - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}x_0 &= x, x_1 = y, x_2 = xy, \dots, \\x_8 &= (xy)^4 x, x_9 = y, x_{10} = xy, \dots, \\x_{16} &= (xy)^8 x, x_{17} = y, x_{18} = xy, \dots, \\x_{8i} &= (xy)^{4i} x, x_{8i+1} = y, x_{8i+2} = xy, \dots.\end{aligned}$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v \in N$ için $4i = nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. 3 - nacci dizisinin periodu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki üç durum söz konusudur:

Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise $i = \frac{n}{4}$ olup, $8i = 2n$ olur ki, buradan

$$P_3 = (G_n; x, y) = n \left(\frac{k+1}{2} \right) = 2n \text{ elde edilir.}$$

Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise $i = \frac{n}{2}$ olup, $8i = 4n$ olur ki, buradan

$$P_3 = (G_n; x, y) = n(k+1) = 4n \text{ elde edilir.}$$

Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise $i = n$ olup, $8i = 8n$ olur ki, buradan

$$P_3 = (G_n; x, y) = 2n(k+1) = 8n \text{ elde edilir.}$$

$k = 4$ için de benzer ifadeler kullanılarak ispat yapılır.

iii. Eğer $k \geq 5$ ise dizinin ilk $k + 1$ tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = (xy)^2, x_4 = (xy)^4, \dots, x_k = (xy)^{2^{k-2}}$$

olur.

Şimdi k - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, (xy)^a x, y, xy, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
x_{2k+2} &= \prod_{i=k+2}^{2k+1} x_i = (xy)^a x, \\
x_{2k+2+1} &= \prod_{i=k+3}^{2k+2} x_i = y, \\
x_{2k+2+2} &= \prod_{i=k+4}^{2k+3} x_i = xy, \\
x_{2k+2+3} &= \prod_{i=k+5}^{2k+4} x_i = (xy)^b, \\
x_{2k+2+4} &= \prod_{i=k+6}^{2k+5} x_i = (xy)^{u_1}, \\
x_{2k+2+5} &= \prod_{i=k+7}^{2k+6} x_i = (xy)^{u_2}, \\
&\vdots \\
x_{2k+2+k} &= \prod_{i=2k+2}^{3k+1} x_i = (xy)^{u_{k-3}}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Buradan k - nacci dizisinin her $2k + 2$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece k - nacci dizisini aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = (xy)^2, x_4 = (xy)^4, \dots, x_k = (xy)^{2^{k-2}}, \dots, \\
x_{i(2k+2)} &= (xy)^a x, x_{i(2k+2)+1} = y, x_{i(2k+2)+2} = xy, x_{i(2k+2)+3} = (xy)^{2+4i}, \\
x_{i(2k+2)+4} &= (xy)^{u_1}, x_{i(2k+2)+5} = (xy)^{u_2}, \dots, x_{i(2k+2)+k} = (xy)^{u_{k-3}}, \dots.
\end{aligned}$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v \in N$ için $4i = nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer n ' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k - 2]$ aralığında değil ise, üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-3}$ ise $i = \frac{n}{4}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y) = n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ elde edilir. (Burada $n|a$, n böler a anlamına gelir.)

2. Durum: Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-3}$ ise $i = \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = n(k+1)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y) = n(k+1)$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-3}$ ise $i = n$ dir. Böylece $i(2k+2) = 2n(k+1)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y) = 2n(k+1)$ elde edilir.

2. Eğer α , n ' nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-3}$ ise $i = \alpha \frac{n}{4}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \alpha\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y) = \alpha\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-3}$ ise $i = \alpha \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \alpha(n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y) = \alpha(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-3}$ ise $i = \alpha n$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha(2n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y) = \alpha(2n(k+1))$ elde edilir.

ii'. Eğer β , $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-3}$ ise $i = \beta \frac{n}{4}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \beta \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y) = \beta \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ elde edilir.

2. Durum: $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-3}$ ise $i = \beta \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \beta(n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y) = \beta(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-3}$ ise $i = \beta n$ dir.

Böylece $i(2k+2) = \beta(2n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y) = \beta(2n(k+1))$ elde edilir.

y, x başlangıç elemanları için de, ispat benzer ifadeler kullanılarak yapılır.

Şimdi bu grubun 3-gerenli durumu için ispatı yapalım, burada $|x| = 2$, $|y| = 2$, $|z| = n$ dir.

i. Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0 = y, x_1 = x, x_2 = z, x_3 = xz, x_4 = x, x_5 = xy, x_6 = y, x_7 = x, x_8 = z, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

ii. Eğer $k = 3$ ise 3.2. bölümdeki Teorem 3 için verilen Sonuç'da belirtildiği gibi dizinin periyodu aşağıdaki gibidir,

$$LEN_{(x,y,z)}((2,2,n)) = \begin{cases} 2n, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ 4n, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 8n, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

Eğer $k = 4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned} x, y, z, xyz = e, xyzxyz = e, yz = x, \\ zx = y, xzx = xy, xzxzx = xzzx = xz^2x, \\ xzxzxzxz^2x = z^4x, zxzxzxz^2xzx^4x = z^8x, \\ xzxzxz^2xzx^4xz^8x = xz^7xz^8 = zx, \\ xz^2xzx^4xz^8xzx = xz^6xz^8xzx = xz^2xzx = xzxzx = z, \\ xz^4xz^8xzxz = xzx^4xzxz = z^4xx = z^4, z^8xzxz^4 = z^8xzx^4 = z^{12}, \\ zxzxz^4z^{12} = xz^4z^{12} = xz^{16}, \dots \end{aligned}$$

Şimdi yukarıdaki 4 - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, z^ax, zx, z, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned} z^ax, \\ zx = y, \\ z, \\ z^b, \\ z^axzxz^b = z^ax^2z^b = z^az^b = z^{a+b}, \\ zxzxz^bz^{a+b} = xz^{b+a+b} = xz^{2b+a}, \\ zxz^bz^{a+b}xz^{2b+a} = zx = y, \\ z^bz^{a+b}xz^{2b+a}zx = xzx, \\ z^{a+b}xz^{2b+a}zxzx = xz^{b+2}x, \\ xz^{2b+a}zxzxzxz^{b+2}x = xz^{3b+a+4}x, \\ zxzxzxz^{b+2}xzx^{3b+a+4}x = z^{4b+a+8}x, \\ xzxzxz^{b+2}xzx^{3b+a+4}xz^{4b+a+8}x = xz^{4b+a+7}xz^{4b+a+8}x = zx = y, \\ xz^{b+2}xzx^{3b+a+4}xz^{4b+a+8}xzx = xz^{4b+a+6}xz^{4b+a+8}xzx = x^2z^2xzx = zx^2 = z, \dots \end{aligned}$$

Buradan 4 - nacci dizisinin her on terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece 4 - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, \dots, \\
x_{10} &= z^8 x, x_{11} = zx = y, x_{12} = z, x_{13} = z^4, \dots, \\
x_{20} &= z^{32} x, x_{21} = zx = y, x_{22} = z, x_{23} = z^8, \dots, \\
x_{10i} &= z^{8i^2} x, x_{10i+1} = zx = y, x_{10i+2} = z, x_{10i+3} = z^{4i}, \dots.
\end{aligned}$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v_1, v_2 \in N$ için $8i^2 = nv_1$ ve $4i = nv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. 4- nacci dizisinin periodu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki üç durum söz konusudur:

Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise $i = \frac{n}{4}$ olup, $10i = \frac{5}{2}n$ olur ki, buradan

$$P_4 = (G_n; x, y, z) = n \left(\frac{k+1}{2} \right) = \frac{5}{2}n \text{ elde edilir.}$$

Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise $i = \frac{n}{2}$ olup, $10i = 5n$ olur ki, buradan

$$P_4 = (G_n; x, y, z) = n(k+1) = 5n \text{ elde edilir.}$$

Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise $i = n$ olup, $10i = 10n$ olur ki, buradan

$$P_4 = (G_n; x, y, z) = 2n(k+1) = 10n \text{ elde edilir.}$$

iii. Eğer $k \geq 5$ ise dizinin ilk $k+1$ tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, x_4 = z^{2n}, \dots, x_k = z^{2^{k-3}n}$$

burada gerekli indirgemeler yapılacak olursa,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, e, \dots, e$$

olduğu görülür, burada $3 \leq j \leq k$ için $x_j = e$ dir.

Şimdi k - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, z^a x, zx, z, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_{2k+2} = \prod_{i=k+2}^{2k+1} x_i = z^a x,$$

$$\begin{aligned}
x_{2k+2+1} &= \prod_{i=k+3}^{2k+2} x_i = z^x, \\
x_{2k+2+2} &= \prod_{i=k+4}^{2k+3} x_i = z, \\
x_{2k+2+3} &= \prod_{i=k+5}^{2k+4} x_i = z^b, \\
x_{2k+2+4} &= \prod_{i=k+6}^{2k+5} x_i = z^c, \\
x_{2k+2+5} &= \prod_{i=k+7}^{2k+6} x_i = z^{u_1}, \\
&\vdots \\
x_{2k+2+k} &= \prod_{i=2k+2}^{3k+1} x_i = z^{u_{k-4}}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Buradan k - nacci dizisinin her $2k+2$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece k - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, \dots, x_k = x^{2^{k-3}n} = e, \dots, \\
x_{i(2k+2)} &= z^a x, x_{i(2k+2)+1} = z^x, x_{i(2k+2)+2} = z, x_{i(2k+2)+3} = z^{4i}, x_{i(2k+2)+4} = z^{8i^2+4i}, \\
x_{i(2k+2)+5} &= z^{u_1}, \dots, x_{i(2k+2)+k} = z^{u_{k-4}}, \dots.
\end{aligned}$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v_1, v_2 \in N$ için $4i = nv_1$ ve $8i^2 + 4i = nv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer n 'nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise, üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \frac{n}{4}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ elde edilir. (Burada $n|a$,

n böler a anlamına gelir.)

2. Durum: Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = n(k+1)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = n(k+1)$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = n$ dir.

Böylece $i(2k+2) = 2n(k+1)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = 2n(k+1)$ elde edilir.

2. Eğer α, n 'nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \alpha \frac{n}{4}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \alpha \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = \alpha \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \alpha \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \alpha(n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = \alpha(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \alpha n$ dir.

Böylece $i(2k+2) = \alpha(2n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = \alpha(2n(k+1))$ elde edilir.

ii'. Eğer $\beta, [3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \beta \frac{n}{4}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \beta \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = \beta \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ elde edilir.

2. Durum: $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \beta \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \beta(n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = \beta(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ve $n|a, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \beta n$ dir.

Böylece $i(2k+2) = \beta(2n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = \beta(2n(k+1))$ elde edilir.

2. Yol: G_n yi $2n$ elemana sahip D_n dihedral grubu olarak düşünelim. D_n , n elemanlı düzgün çokgeninin (polygonun) simetrilerlerinden oluşup, grup,

$$a := \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \text{ ve } b := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

gerenleri ile takdim edilebilir. Bundan dolayı 3-gerenli durumda grubun geren elemanları matrisler yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edebilir,

$$z = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ve } x = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & -\cos(2\pi/n) \end{pmatrix}.$$

i. Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0 = y, x_1 = x, x_2 = z, x_3 = \begin{pmatrix} \cos(4\pi/n) & -\sin(4\pi/n) \\ -\sin(4\pi/n) & -\cos(4\pi/n) \end{pmatrix} = xz, x_4 = x,$$

$$x_5 = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} = xy, x_6 = y, x_7 = x, x_8 = z, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

ii. Eğer $k = 4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
 x, y, z, xyz &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e, (xyz)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & -\cos(2\pi/n) \end{pmatrix} = x, \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= y, \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} = xy, \begin{pmatrix} \cos(4\pi/n) & \sin(4\pi/n) \\ -\sin(4\pi/n) & \cos(4\pi/n) \end{pmatrix} = z^{-2}, \\
 \begin{pmatrix} \cos(6\pi/n) & \sin(6\pi/n) \\ \sin(6\pi/n) & -\cos(6\pi/n) \end{pmatrix} &= z^4 x, \begin{pmatrix} \cos(14\pi/n) & \sin(14\pi/n) \\ \sin(14\pi/n) & -\cos(14\pi/n) \end{pmatrix} = z^8 x, \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= y, \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} = z, \begin{pmatrix} \cos(8\pi/n) & -\sin(8\pi/n) \\ \sin(8\pi/n) & \cos(8\pi/n) \end{pmatrix} = z^4, \\
 \begin{pmatrix} \cos(24\pi/n) & -\sin(24\pi/n) \\ \sin(24\pi/n) & \cos(24\pi/n) \end{pmatrix} &= z^{12}, \begin{pmatrix} \cos(34\pi/n) & -\sin(34\pi/n) \\ -\sin(34\pi/n) & -\cos(34\pi/n) \end{pmatrix} = xz^{16}, \dots
 \end{aligned}$$

Şimdi yukarıdaki 4- nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, z^r x, zx, z, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$z^r x, zx = y, z, z^\varepsilon, z^{\tau+\varepsilon}, xz^{2\varepsilon+\tau}, y, xzx = xy, xz^{\varepsilon+2} x = z^{-(\varepsilon+2)}, xz^{3\varepsilon+\tau+4} x = z^{-(3\varepsilon+\tau+4)}, z^{4\varepsilon+\tau+8} x, zx = y, z, \dots$$

Buradan 4- nacci dizisinin her on terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece 4- nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, \dots, \\
 x_{10} &= z^8 x, x_{11} = zx = y, x_{12} = z, x_{13} = z^4, \dots, \\
 x_{20} &= z^{32} x, x_{21} = zx = y, x_{22} = z, x_{23} = z^8, \dots, \\
 x_{10i} &= z^{8i^2} x, x_{10i+1} = zx = y, x_{10i+2} = z, x_{10i+3} = z^{4i}, \dots
 \end{aligned}$$

Burada
$$z^{8i^2} = \begin{pmatrix} \cos 8i^2(2\pi/n) & -\sin 8i^2(2\pi/n) \\ \sin 8i^2(2\pi/n) & \cos 8i^2(2\pi/n) \end{pmatrix} \quad \text{ve}$$

$$z^{4i} = \begin{pmatrix} \cos 4i(2\pi/n) & -\sin 4i(2\pi/n) \\ \sin 4i(2\pi/n) & \cos 4i(2\pi/n) \end{pmatrix}$$
 olup, dizinin periodunu belirlemek için,

$v_1, v_2 \in N$ için $8i^2 = nv_1$ ve $4i = nv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. 4- nacci dizisinin periodu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki üç durum söz konusudur:

Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise $i = \frac{n}{4}$ için, $z^{8i^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olur. Böylece

$$10i = \frac{5}{2}n \text{ olduğu için } P_4 = (G_n; x, y, z) = n \left(\frac{k+1}{2} \right) = \frac{5}{2}n \text{ elde edilir.}$$

Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise $i = \frac{n}{2}$ için, $z^{8i^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olur. Böylece

$$10i = 5n \text{ olduğu için } P_4 = (G_n; x, y, z) = n(k+1) = 5n \text{ elde edilir.}$$

Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise $i = n$ için, $z^{8i^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

olur. Böylece $10i = 10n$ olduğu için $P_4 = (G_n; x, y, z) = 2n(k+1) = 10n$ elde edilir.

$k = 3$ için de benzer ifadeler kullanılarak ispat yapılır.

Eğer $k \geq 5$ ise dizinin ilk $k+1$ tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, x_4 = z^{2n}, \dots, x_k = z^{2^{k-3}n}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, e, \dots, e$$

olduğu görülür, burada $3 \leq j \leq k$ için $x_j = e$ dir.

Şimdi k - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, z^r x, zx, z, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_{2k+2} = \prod_{i=k+2}^{2k+1} x_i = z^r x,$$

$$x_{2k+2+1} = \prod_{i=k+3}^{2k+2} x_i = zx = y,$$

$$x_{2k+2+2} = \prod_{i=k+4}^{2k+3} x_i = z,$$

$$\begin{aligned}
x_{2k+2+3} &= \prod_{i=k+5}^{2k+4} x_i = z^e, \\
x_{2k+2+4} &= \prod_{i=k+6}^{2k+5} x_i = z^c, \\
x_{2k+2+5} &= \prod_{i=k+7}^{2k+6} x_i = z^{u_1}, \\
&\vdots \\
x_{2k+2+k} &= \prod_{i=2k+2}^{3k+1} x_i = z^{u_{k-4}}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Buradan k - nacci dizisinin her $2k+2$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece k - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, \dots, x_k = z^{2^{k-3}n} = e, \dots, \\
x_{i(2k+2)} &= z^r x, x_{i(2k+2)+1} = zx, x_{i(2k+2)+2} = z, x_{i(2k+2)+3} = z^{4i}, x_{i(2k+2)+4} = z^{8i^2+4i}, \\
x_{i(2k+2)+5} &= z^{u_1}, \dots, x_{i(2k+2)+k} = z^{u_{k-4}}, \dots
\end{aligned}$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v_1, v_2 \in N$ için $4i = nv_1$ ve $8i^2 + 4i = nv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer n 'nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise, üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $n \mid \tau, n \mid u_1, \dots, n \mid u_{k-4}$ ise $i = \frac{n}{4}$ için $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve

$z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = n \left(\frac{k+1}{2} \right)$ olduğu için

$P_k = (G_n; x, y, z) = n \left(\frac{k+1}{2} \right)$ elde edilir. (Burada $n \mid \tau$, n böler τ anlamına gelir.)

2. Durum: Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n|\tau, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \frac{n}{2}$ için $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve

$z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = n(k+1)$ olduğu için

$P_k = (G_n; x, y, z) = n(k+1)$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ve $n|\tau, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = n$ için

$z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = 2n(k+1)$ olduğu için

$P_k = (G_n; x, y, z) = 2n(k+1)$ elde edilir.

2. Eğer α, n 'nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $n|\tau, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \alpha \frac{n}{4}$ için $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve

$z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir.

Böylece $i(2k+2) = \alpha \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = \alpha \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n|\tau, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \alpha \frac{n}{2}$ için $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve

$z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha(n(k+1))$ olduğu için

$P_k = (G_n; x, y, z) = \alpha(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ve $n|\tau, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \alpha n$ için

$z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha(2n(k+1))$ olduğu için

$P_k = (G_n; x, y, z) = \alpha(2n(k+1))$ elde edilir.

ii'. Eğer β , $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $n|\tau, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \beta \frac{n}{4}$ için $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve

$z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \beta \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ olduğu için

$P_k = (G_n; x, y, z) = \beta \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ elde edilir.

2. Durum: $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n|\tau, n|u_1, \dots, n|u_{k-4}$ ise $i = \beta \frac{n}{2}$ için $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve

$z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \beta(n(k+1))$ olduğu için

$P_k = (G_n; x, y, z) = \beta(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: $n \equiv 1 \pmod{4}$ veya $n \equiv 3 \pmod{4}$ ve $n \mid \tau, n \mid u_1, \dots, n \mid u_{k-4}$ ise $i = \beta n$ için

$z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \beta(2n(k+1))$ olduğu için

$P_k = (G_n; x, y, z) = \beta(2n(k+1))$ elde edilir (Karaduman ve Deveci 2009).

2-gerenli durum içinde benzer ifadeler kullanılarak ispat yapılır.

z, x, y başlangıç elemanları için ise bu gruptaki k - nacci dizisinin periodunun

$P_k(G_n; z, x, y) = 2k + 2$ olduğunu ispatlayalım.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$z, x, y, xy, yxy, y, yx = z, x, y, \dots.$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$z, x, y, zxy = e, xy, yxy, y, e, yx = z, x, y, \dots.$$

Aynı şekilde bu diziden de 3 - nacci dizisinin periodunun 8 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = zxy, x_4 = (zxy)^2 \dots, x_{k-1} = (zxy)^{2^{k-4}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = (zxy)^{2^{k-3}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^k x_i = xy,$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = yxy,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = y,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+2} x_i = e,$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca,

$$x_{2k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e,$$

$$x_{2k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = z,$$

$$x_{2k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = x,$$

$$x_{2k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = y$$

olur. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları z, x ve y nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_n; z, x, y) = 2k+2$ olduğu görülür.

4.3. $E(2,2,2), E(p,2,2), E(2,q,2)$ ve $E(2,2,r)$ Genişletilmiş Triangle Grupları

Teorem 1: $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (yz)^2 = (zx)^2 = e \rangle$ şeklinde takdim edilen $E_2 = E(2,2,2)$ genişletilmiş triangle grubundaki k - nacci dizilerinin periodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. Eğer $k = 2$ ise bu gruptaki 2- nacci dizilerinin her biri basit periodik olmayıp periodiktir ve her bir 2- nacci dizisinin periodu 3 tür.

ii. Eğer $k > 2$ ise $P_k(E_2; x, y, z) = k + 1$ dir.

İspat: Bu grupta $|x| = 2$, $|y| = 2$, $|z| = 2$, $xy = yx$, $xz = zx$, $yz = zy$ dir.

i. Grup 3 gerenli olduğu için k - nacci dizilerinin başlangıç terimleri $3! = 6$ farklı şekilde seçebilir, yani 6 farklı k - nacci dizisi elde edilebilir. Bu grup için oluşacak 6 farklı 2 - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = yz, x_4 = y, x_5 = z, x_6 = yz, x_7 = y, x_8 = z, \dots,$$

$$x_0 = x, x_1 = z, x_2 = y, x_3 = zy, x_4 = z, x_5 = y, x_6 = zy, x_7 = z, x_8 = y, \dots,$$

$$x_0 = y, x_1 = x, x_2 = z, x_3 = xz, x_4 = x, x_5 = z, x_6 = xz, x_7 = x, x_8 = z, \dots,$$

$$x_0 = y, x_1 = z, x_2 = x, x_3 = zx, x_4 = z, x_5 = x, x_6 = zx, x_7 = z, x_8 = x, \dots,$$

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = x, x_5 = y, x_6 = xy, x_7 = x, x_8 = y, \dots,$$

$$x_0 = z, x_1 = y, x_2 = x, x_3 = yx, x_4 = y, x_5 = x, x_6 = yx, x_7 = y, x_8 = x, \dots.$$

Dikkat edilirse bu 2 - nacci dizilerinin hiç birisi basit periodik değildir. Bu 2 - nacci dizileri periodik olup herbirisi için period 3 tür.

ii. Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, xyz, x, y, z, \dots.$$

Bu diziden görüldüğü gibi 3 - nacci dizisinin periodu 4 tür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xyz, x_4 = (xyz)^2, \dots, x_{k-1} = (xyz)^{2^{k-4}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xyz, x_4 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = (xyz)^{2^{k-3}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^k x_i = x,$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = y,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z, \dots$$

$x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $k+1$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{k+1}, x_1 = x_{k+2}, x_2 = x_{k+3}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_n; x, y, z) = k+1$ olduğu görülür.

2. Yol: x, y, z sırasıyla $(1,0,0), (0,1,0)$ ve $(0,0,1)$ olmak üzere E_2 grubu $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ şeklinde ifade edilebildiği için bu teoremin ispatı 4.2. bölümdeki Teorem 1' in ispatına benzer olarak yapılır (Karaduman ve Deveci 2009).

Teorem 2: $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (yz)^2 = (zx)^r = e \rangle$, $r > 2$ şeklinde takdim edilen $E_r = E(2,2,r)$ genişletilmiş triangle grubundaki için k - nacci dizilerinin periodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. Eğer $k = 2$ ise bu gruptaki 2- nacci dizilerinin her biri basit periodik olmayıp periodiktir ve her bir 2- nacci dizisinin periodu 6 dır.

$$\text{ii. } P_{4,5}(E_r; x, y, z) = \begin{cases} r \left(\frac{k+1}{2} \right), & r \equiv 0 \pmod{4} \\ r(k+1), & r \equiv 2 \pmod{4} \\ 2r(k+1), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

iii. $k \geq 6$ olsun.

1. Eğer r 'nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k-3]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir,

$$P_k(E_r; x, y, z) = \begin{cases} r\left(\frac{k+1}{2}\right), & r \equiv 0 \pmod{4} \\ r(k+1), & r \equiv 2 \pmod{4} \\ 2r(k+1), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

2. Eğer α , r 'nin $[3, k-3]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum meydana gelir:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-3]$ ise period aşağıdaki gibidir,

$$P_k(E_r; x, y, z) = \begin{cases} \alpha\left(r\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & r \equiv 0 \pmod{4} \\ \alpha(r(k+1)), & r \equiv 2 \pmod{4} \\ \alpha(2r(k+1)), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

ii'. Eğer β , $[3, k-3]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha.3^j$ ise period aşağıdaki gibidir,

$$P_k(E_r; x, y, z) = \begin{cases} \beta\left(r\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & r \equiv 0 \pmod{4} \\ \beta(r(k+1)), & r \equiv 2 \pmod{4} \\ \beta(2r(k+1)), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

İspat: Bu grupta $|x| = 2, |y| = 2, |z| = 2, |xy| = 2, |yz| = 2, |zx| = r$ dir.

i. Grup 3 gerenli olduğu için k - nacci dizilerinin başlangıç terimleri $3!=6$ farklı şekilde seçebilir, yani 6 farklı k - nacci dizisi elde edilir. Bu grup için oluşacak 6 farklı 2 - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = yz, x_4 = zyz, x_5 = z, x_6 = zy, x_7 = y, x_8 = z, \dots,$$

$$x_0 = x, x_1 = z, x_2 = y, x_3 = zy, x_4 = yzy, x_5 = y, x_6 = yz, x_7 = z, x_8 = y, \dots,$$

$$x_0 = y, x_1 = x, x_2 = z, x_3 = xz, x_4 = zxz, x_5 = z, x_6 = zx, x_7 = x, x_8 = z, \dots,$$

$$x_0 = y, x_1 = z, x_2 = x, x_3 = zx, x_4 = xzx, x_5 = x, x_6 = xz, x_7 = z, x_8 = x, \dots,$$

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = yxy, x_5 = y, x_6 = yx, x_7 = x, x_8 = y, \dots,$$

$$x_0 = z, x_1 = y, x_2 = x, x_3 = yx, x_4 = xyx, x_5 = x, x_6 = xy, x_7 = y, x_8 = x, \dots.$$

Dikkat edilirse bu 2 - nacci dizilerinin hiç birisi basit periodik değildir. Bu 2 - nacci dizileri periodik olup herbirisi için period 6 dır.

ii. Eğer $k = 4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, xyz, xyzxyz = (xz)^2, yzxyz(xz)^2 = z(xz)^3,$$

$$zxyz(xz)^2 z(xz)^3 = zxyzxz = zxyzx = y,$$

$$xyz(xz)^2 z(xz)^3 y = xyzxyz = yxyz = yzy = z, (xz)^2 z(xz)^3 yz = zxyz = zxy,$$

$$z(xz)^3 yzzxy = z(xz)^3 yxy = z(xz)^3 x = (zx)^4, yzzxy(zx)^4 = yxy(zx)^4 = x(zx)^4,$$

$$zzxy(zx)^4 x(zx)^4 = xyx = y, zxy(zx)^4 x(zx)^4 y = zxyxy = z,$$

$$(zx)^4 x(zx)^4 yz = xyz, x(zx)^4 yzxyz = x(zx)^4 zxz = (xz)^6,$$

$$yzxyz(xz)^6 = zxz(xz)^6 = z(xz)^7, zxyz(xz)^6 z(xz)^7 = zxyzxz = zxyzx = zyz = y,$$

$$xyz(xz)^6 z(xz)^7 y = xyzxz = yxyz = yzy = z, (xz)^6 z(xz)^7 yz = zxyz = zxy,$$

$$z(xz)^7 yzzxy = z(xz)^7 yxy = z(xz)^7 x = (zx)^8, \dots.$$

Şimdi yukarıdaki 4 - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, x(zx)^a, y, z, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x(zx)^a,$$

$$y,$$

$$z,$$

$$xyz,$$

$$\begin{aligned}
x(zx)^a yzxyz &= x(zx)^a zxz = (xz)^{a+2}, \\
yzxyz(zx)^{a+2} &= zxz(zx)^{a+2} = z(xz)^{a+3}, \\
zxyz(zx)^{a+2} z(xz)^{a+3} &= zxyzxz = zxyz = y, \\
xyz(zx)^{a+2} z(xz)^{a+3} y &= xyzxzzy = yxzy = yzy = z, \\
(xz)^{a+2} z(xz)^{a+3} yz &= zxzyz = zxy, \\
z(xz)^{a+3} yzzxy &= z(xz)^{a+3} yxy = z(xz)^{a+3} x = (zx)^{a+4}, \dots
\end{aligned}$$

Buradan 4 - nacci dizisinin her on terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece 4 - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xyz, \dots, \\
x_{10} &= x(zx)^4, x_{11} = y, x_{12} = z, x_{13} = xyz, \dots, \\
x_{20} &= x(zx)^8, x_{21} = y, x_{22} = z, x_{23} = xyz, \dots, \\
x_{10i} &= x(zx)^{4i}, x_{10i+1} = y, x_{10i+2} = z, x_{10i+3} = xyz, \dots
\end{aligned}$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v \in N$ için $4i = rv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. 4 - nacci dizisinin periodu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki üç durum söz konusudur:

Eğer $r \equiv 0 \pmod{4}$ ise $i = \frac{r}{4}$ olup, $10i = \frac{5}{2}r$ olur ki, buradan

$$P_4 = (E_r; x, y, z) = r \left(\frac{k+1}{2} \right) = \frac{5}{2}r \text{ elde edilir.}$$

Eğer $r \equiv 2 \pmod{4}$ ise $i = \frac{r}{2}$ olup, $10i = 5r$ olur ki, buradan

$$P_4 = (E_r; x, y, z) = r(k+1) = 5r \text{ elde edilir.}$$

Eğer $r \equiv 1 \pmod{4}$ veya $r \equiv 3 \pmod{4}$ ise $i = r$ olup, $10i = 10r$ olur ki, buradan

$$P_4 = (E_r; x, y, z) = 2r(k+1) = 10r \text{ elde edilir.}$$

Eğer $k = 5$ ise ispat yukarıdaki ispata benzer şekilde yapılır.

iii. Eğer $k \geq 6$ ise dizinin ilk $k + 1$ tane elemanı aşağıdaki gibidir,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xyz, x_4 = (xz)^2, \dots, x_k = (xz)^{2^{k-3}}.$$

Şimdi k - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, x(zx)^a, y, z, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= \prod_{i=2}^{k+1} x_i = y, x_{k+2+1} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z, x_{k+2+2} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = zxy, x_{k+2+3} = \prod_{i=5}^{k+4} x_i = (zx)^4, \\ x_{k+2+4} &= \prod_{i=6}^{k+5} x_i = (zx)^{12}, x_{k+2+5} = \prod_{i=7}^{k+6} x_i = (zx)^{u_1} \dots, \\ x_{k+2+k-1} &= \prod_{i=2+k-1}^{2k} x_i = (xz)^{u_{k-5}}, x_{k+2+k} = \prod_{i=2+k}^{2k+1} x_i = x(zx)^a, \dots \end{aligned}$$

Buradan k - nacci dizisinin her $2k + 2$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece k - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned} x_0 &= x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xyz, x_4 = (xz)^2, \dots, x_k = (xz)^{2^{k-3}}, \dots, \\ x_{i(k+2)} &= y, x_{i(k+2)+1} = z, x_{i(k+2)+2} = zxy, x_{i(k+2)+3} = (zx)^{4i}, x_{i(k+2)+4} = (zx)^{12i} x_{i(k+2)+5} = (zx)^{u_1} \\ \dots, x_{i(k+2)+k-1} &= (xz)^{u_{k-5}}, x_{i(k+2)+k} = x(zx)^a \dots \end{aligned}$$

burada $p \in N$ için $u_1, \dots, u_2, a = 4p$ dir.

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v_1, v_2 \in N$ için $4i = rv_1$ ve $12i = rv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer r ' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k - 3]$ aralığında değil ise, üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $r \equiv 0 \pmod{4}$ ve $r|u_1, \dots, r|u_{k-5}, r|a$ ise $i = \frac{r}{4}$ dir. Böylece

$$i(2k+2) = r \left(\frac{k+1}{2} \right) \text{ olduğu için } P_k = (E_r; x, y, z) = r \left(\frac{k+1}{2} \right) \text{ elde edilir (Burada } r|u_1,$$

r böler u_1 anlamına gelir.)

2. Durum: Eğer $r \equiv 2 \pmod{4}$ ve $r|u_1, \dots, r|u_{k-5}, r|a$ ise $i = \frac{r}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2) = r(k+1)$ olduğu için $P_k = (E_r; x, y, z) = r(k+1)$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $r \equiv 1 \pmod{4}$ veya $r \equiv 3 \pmod{4}$ ve $r|u_1, \dots, r|u_{k-5}, r|a$ ise $i = r$ dir. Böylece $i(2k+2) = 2r(k+1)$ olduğu için $P_k = (E_r; x, y, z) = 2r(k+1)$ elde edilir.

2. Eğer α, r 'nin $[3, k-3]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-3]$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $r \equiv 0 \pmod{4}$ ve $r|u_1, \dots, r|u_{k-5}, r|a$ ise $i = \alpha \frac{r}{4}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha \left(r \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ olduğu için $P_k = (E_r; x, y, z) = \alpha \left(r \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer $r \equiv 2 \pmod{4}$ ve $r|u_1, \dots, r|u_{k-5}, r|a$ ise $i = \alpha \frac{r}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha(r(k+1))$ olduğu için $P_k = (E_r; x, y, z) = \alpha(r(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $r \equiv 1 \pmod{4}$ veya $r \equiv 3 \pmod{4}$ ve $r|u_1, \dots, r|u_{k-5}, r|a$ ise $i = \alpha r$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha(2r(k+1))$ olduğu için $P_k = (E_r; x, y, z) = \alpha(2r(k+1))$ elde edilir.

ii'. Eğer $\beta, [3, k-3]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $r \equiv 0 \pmod{4}$ ve $r|u_1, \dots, r|u_{k-5}, r|a$ ise $i = \beta \frac{r}{4}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \alpha \left(r \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ olduğu için $P_k = (E_r; x, y, z) = \alpha \left(r \left(\frac{k+1}{2} \right) \right)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer $r \equiv 2 \pmod{4}$ ve $r|u_1, \dots, r|u_{k-5}, r|a$ ise $i = \beta \frac{r}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \beta(r(k+1))$ olduğu için $P_k = (E_r; x, y, z) = \beta(r(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $r \equiv 1 \pmod{4}$ veya $r \equiv 3 \pmod{4}$ ve $r|u_1, \dots, r|u_{k-5}, r|a$ ise $i = \beta r$ dir.

Böylece $i(2k+2) = \beta(2r(k+1))$ olduğu için $P_k = (E_r; x, y, z) = \beta(2r(k+1))$ elde edilir.

Yukarıdaki kurallar $E(p, 2, 2)$ ve $E(2, q, 2)$ genişletilmiş triangle grupları içinde aynen geçerli olup ispatlarında yukarıdaki ispata benzer olarak yapılır.

2.Yol: y elemanı 2. mertebeden olup x ve z ile değişmeli olduğu için E_r grubu $E_r = Z_2 \oplus D_r$ şeklinde ifade edilebilir. a, (2) ifadesinde gösterilen a ve b tarafından gerilmiş dihedral gruptaki 2×2 tipinde bir matris olmak üzere, bu grup,

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrisler yardımıyla, matrislerin bir grubu olarak ifade edilebilir. Burada,

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Grupların direkt çarpımının bir Fibonacci dizisinin periodu her bir çarpandaki periodların en küçük ortak katı olduğundan bu teoremin ispatı 4.2. bölümdeki Teorem 4' ün ispatına benzer şekilde yapılır (Karaduman ve Deveci 2009).

4.4. $\langle 2, 2, 2 \rangle, \langle n, 2, 2 \rangle, \langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ Binary Polyhedral Grupları

Teorem 1: $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ şeklinde takdim edilen $G_2 = \langle 2, 2, 2 \rangle$ binary polyhedral grubu için k - nacci dizisinin periodu aşağıdaki gibidir,

$$P_k(G_2, x, y, z) = \begin{cases} 3, & k = 2 \\ 2k + 2, & k \geq 3 \end{cases}$$

(Deveci *et al.* to appear).

İspat: İlk olarak bu grubun iki gerenli durumunu ele alalım. Bu grup iki gerenli durumda $\langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^2 \rangle$ şeklinde takdim edilir ve burada $|x| = 4, |y| = 4$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, xy, yxy = x, xyx = y, xy, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 3 tür.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, xy, (xy)^2 = x^2, x^3, x^2 y^{-1} = y, x^3 y^{-1} = xy, e, x, y, \dots$$

Aynı şekilde bu diziden de 3 - nacci dizisinin periodunun 8 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = y^2, x_4 = y^4, \dots, x_{k-1} = y^{2^{k-3}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = y^2, x_4 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = y^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^k x_i = x^{-1},$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = x^2 y^3,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = xy,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e,$$

$$\vdots$$

$$x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e,$$

$$x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = x,$$

$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = y,$$

$$x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ dir. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$, elemanları x, y ve xy nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_2; x, y) = 2k+2$ olduğu görülür.

Şimdi bu grubun üç gerenli durumunu ele alalım. Bu grup üç gerenli durumda $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ şeklinde takdim edilir ve burada $|x| = 4, |y| = 4, |z| = 4$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, yz = x, zx = y, xy = z, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 3 tür.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, xyz = z^2, yz^3, zyz, z, e, x, y, z, \dots$$

Aynı şekilde bu diziden de 3 - nacci dizisinin periodunun 8 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, x_4 = z^4, \dots, x_{k-1} = z^{2^{k-3}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, x_4 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned} x_k &= \prod_{i=0}^{k-1} x_i = z^{2^{k-2}} = e, \\ x_{k+1} &= \prod_{i=1}^k x_i = yz^3, \\ x_{k+2} &= \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zyz, \\ x_{k+3} &= \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z, \\ x_{k+4} &= \prod_{i=4}^{k+3} x_i = yz^3zyzz = e \\ &\vdots \\ x_{k+k+1} &= \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = yz^3zyzz = e, \\ x_{k+k+2} &= \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = zyz^2 = xy yz^2 = x, \\ x_{k+k+3} &= \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = zx = y, \\ x_{k+k+4} &= \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy = z \end{aligned}$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ dir. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$, elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_2; x, y, z) = 2k+2$ olduğu görülür.

Teorem 2: $\langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = \langle n, 2, 2 \rangle$ binary polyhedral grubu için k - nacci dizisinin periodu $2k+2$ dir (Deveci *et al.* to appear).

İspat: İlk olarak bu grubun iki gerenli durumunu ele alalım. Bu grup iki gerenli durumda $\langle x, y : x^n = y^2 = (xy)^2 \rangle$ şeklinde takdim edilir ve burada $|x| = 2n, |y| = 4$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, xy, yxy, x^2y^3, y^2xy^3, x, y, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, xy, y^2, y^3xy = x^{-1}, y^2x^2y, xy, e, x, y, \dots$$

Aynı şekilde bu diziden de 3 - nacci dizisinin periodunun 8 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = y^2, \dots, y^{2^{k-3}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = y^2, x_4 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = y^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^k x_i = x^{-1},$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = x^2y^3,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = xy,$$

$$\begin{aligned}
x_{k+4} &= \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e, \\
&\vdots \\
x_{k+k+1} &= \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e, \\
x_{k+k+2} &= \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = x, \\
x_{k+k+3} &= \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = y, \\
x_{k+k+4} &= \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy
\end{aligned}$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ dir. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$, elemanları x, y ve xy nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_n; x, y) = 2k+2$ olduğu görülür.

Şimdi bu grubun üç gerenli durumunu ele alalım. Bu grup üç gerenli durumda $\langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ şeklinde takdim edilir ve burada $|x| = 2n, |y| = 4, |z| = 4$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, yz, zyz, z, x, y, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

Eğer $k = 3$ ise 3.2. bölümdeki Teorem 1'de belirtildiği gibi dizisinin periodu 8 dir.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, x_4 = z^4, \dots, x_{k-1} = z^{2^{k-3}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, x_4 = e, e, \dots, e$$

yazılır Böylece,

$$\begin{aligned}
x_k &= \prod_{i=0}^{k-1} x_i = z^{2^{k-2}} = e, \\
x_{k+1} &= \prod_{i=1}^k x_i = yz^3, \\
x_{k+2} &= \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zy^2z, \\
x_{k+3} &= \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z, \\
x_{k+4} &= \prod_{i=4}^{k+3} x_i = yz^3zyzz = e, \\
&\vdots \\
x_{k+k+1} &= \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = yz^3zyzz = e, \\
x_{k+k+2} &= \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = zy^2z^2 = xyzy^2 = x, \\
x_{k+k+3} &= \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = zx = y, \\
x_{k+k+4} &= \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy = z
\end{aligned}$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ dir. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$, elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_n; x, y, z) = 2k+2$ olduğu görülür.

Teorem 3: $\langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = \langle 2, n, 2 \rangle$ binary polyhedral grubu için k - nacci dizisinin periodu $2k+2$ dir (Deveci *et al.* to appear).

İspat: Bu grubun üç gerenli durumunu ele alalım, burada $|x| = 4$, $|y| = 2n$, $|z| = 4$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, yz, zyz, z, x, y, z, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

Eğer $k = 3$ ise 3.2. bölümdeki Teorem 2’de belirtildiği gibi dizisinin periodu 8 dir.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, x_4 = z^4, \dots, x_{k-1} = z^{2^{k-3}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, x_4 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = z^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^k x_i = yz^3,$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zyz,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = yz^3zyzz = e.$$

$\vdots$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca,

$$x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = yz^3zyzz = e,$$

$$x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = zyz^2 = xyyz^2 = x,$$

$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = zx = y,$$

$$x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy = z.$$

olur. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_n; x, y, z) = 2k+2$ olduğu görülür.

İki gerenli durumda, $n > 2$ için $\langle n, 2, 2 \rangle \cong \langle 2, n, 2 \rangle$ olup aynı zamanda bu gruplar benzer takdimlere sahip oldukları için x, y ve y, x başlangıç elemanlarına göre $\langle n, 2, 2 \rangle$ ve $\langle 2, n, 2 \rangle$ gruplarındaki k - nacci dizilerinin periodları aynı olup $2k+2$ dir.

Teorem 4: $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = \langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral grubundaki k - nacci dizilerinin periodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

İlk olarak bu grubun $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = (xy)^n \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen 2 -gerenli durumunu ele alalım. 2 -gerenli durumda hem x, y hemde y, x başlangıç elemanlarına göre bu gruptaki k - nacci dizilerinin periodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. $P_2(G_n; x, y) = P_2(G_n; y, x) = 6$.

ii. $P_{3,4}(G_n; x, y) = P_{3,4}(G_n; y, x) = \begin{cases} n(k+1), & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1) & n \text{ tek ise} \end{cases}$.

iii. $k \geq 5$ olsun.

1. Eğer n ' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k-2]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y) = P_k(G_n; y, x) = \begin{cases} n(k+1), & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1) & n \text{ tek ise} \end{cases}.$$

2. Eğer α , n ' nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y) = P_k(G_n; y, x) = \begin{cases} \alpha(n(k+1)), & n \text{ çift ise} \\ \alpha(2n(k+1)) & n \text{ tek ise} \end{cases}.$$

ii'. Eğer β , $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha.3^j$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y) = P_k(G_n; y, x) = \begin{cases} \beta(n(k+1)), & n \text{ çift ise} \\ \beta(2n(k+1)) & n \text{ tek ise} \end{cases}.$$

Şimdi grubun $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen 3-gerenli durumunu ele alalım. x, y, z başlangıç elemanları için bu gruptaki k - nacci dizisinin periodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur (Deveci *et al.* to appear):

i. $P_2(G_n; x, y, z) = 6$.

ii. $P_{3,4}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n(k+1), & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1) & n \text{ tek ise} \end{cases}.$

iii. $k \geq 5$ olsun.

1. Eğer n ' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n(k+1), & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1) & n \text{ tek ise} \end{cases}.$$

2. Eğer α , n ' nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} \alpha(n(k+1)), & n \text{ çift ise} \\ \alpha(2n(k+1)) & n \text{ tek ise} \end{cases}.$$

ii'. Eğer β , $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} \beta(n(k+1)), & n \text{ çift ise} \\ \beta(2n(k+1)) & n \text{ tek ise} \end{cases}.$$

z, x, y başlangıç elemanları için ise bu gruptaki k - nacci dizisinin periodu $2k+2$ dir.

İspat: İlk olarak bu grubun 2-gerenli durumu için ispatı yapalım. Grubun 2-gerenli takdimine göre, $|x|=4$, $|y|=4$, $|(xy)|=2n$ dir.

i. Eğer $k=2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = yxy, x_4 = y, x_5 = y^3x, x_6 = x, x_7 = y, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

ii. Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
 x, y, xy, xyxy &= (xy)^2, yxy(xy)^2 = y(xy)^3, \\
 xy(xy)^2 y(xy)^3 &= (xy)^3 y(xy)^3 = y, \\
 (xy)^2 y(xy)^3 y &= yxyy = y^3x, \\
 y(xy)^3 yyx &= y(xy)^3 x = (yx)^4, \\
 yyx(yx)^4 &= x(yx)^4 = (xy)^4 x, \\
 yx(yx)^4 (xy)^4 x &= yxx = y, \\
 (yx)^4 (xy)^4 xy &= xy, \dots
 \end{aligned}$$

Şimdi yukarıdaki 3- nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, (xy)^a x, y, xy, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
 (xy)^a x, \\
 y, \\
 xy, \\
 (xy)^a xyxy &= (xy)^a (xy)^2 = (xy)^{a+2}, \\
 yxy(xy)^{a+2} &= y(xy)^{a+3}, \\
 xy(xy)^{a+2} y(xy)^{a+3} &= xyxyxy = xxy = y, \\
 (xy)^{a+2} y(xy)^{a+3} y &= yxyy = yx, \\
 y(xy)^{a+3} yyx &= y(xy)^{a+3} x = (yx)^{a+4}, \\
 yyx(yx)^{a+4} &= x(yx)^{a+4} = (xy)^{a+4} x, \\
 yx(yx)^{a+4} (xy)^{a+4} x &= yxx = y, \\
 (yx)^{a+4} (xy)^{a+4} xy &= xy, \dots
 \end{aligned}$$

Buradan 3- nacci dizisinin her sekiz terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece 3- nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x, x_1 = y, x_2 = xy, \dots, \\
 x_8 &= (xy)^4 x, x_9 = y, x_{10} = xy, \dots, \\
 x_{16} &= (xy)^8 x, x_{17} = y, x_{18} = xy, \dots, \\
 x_{8i} &= (xy)^{4i} x, x_{8i+1} = y, x_{8i+2} = xy, \dots
 \end{aligned}$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v \in N$ için $4i = 2nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. 3- nacci dizisinin periodu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki üç durum söz konusudur:

Eğer n çift ise $i = \frac{n}{2}$ olup, $8i = 4n$ olur ki, buradan $P_3 = (G_n; x, y) = n(k+1) = 4n$ elde edilir.

Eğer n tek ise $i = n$ olup, $8i = 8n$ olur ki, buradan $P_3 = (G_n; x, y) = 2n(k+1) = 8n$ elde edilir.

$k = 4$ için de benzer ifadeler kullanılarak ispat yapılır.

iii. Eğer $k \geq 5$ ise dizinin ilk $k+1$ tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = (xy)^2, x_4 = (xy)^4, \dots, x_k = (xy)^{2^{k-2}}$$

olur.

Şimdi k - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, (xy)^a x, y, xy, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_{2k+2} = \prod_{i=k+2}^{2k+1} x_i = (xy)^a x,$$

$$x_{2k+2+1} = \prod_{i=k+3}^{2k+2} x_i = y,$$

$$x_{2k+2+2} = \prod_{i=k+4}^{2k+3} x_i = xy,$$

$$x_{2k+2+3} = \prod_{i=k+5}^{2k+4} x_i = (xy)^b,$$

$$x_{2k+2+4} = \prod_{i=k+6}^{2k+5} x_i = (xy)^{u_1},$$

$$x_{2k+2+5} = \prod_{i=k+7}^{2k+6} x_i = (xy)^{u_2},$$

$\vdots$

$$x_{2k+2+k} = \prod_{i=2k+2}^{3k+1} x_i = (xy)^{u_{k-3}},$$

$$\vdots$$

Buradan k - nacci dizisinin her $2k+2$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece k - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = (xy)^2, x_4 = (xy)^4, \dots, x_k = (xy)^{2^{k-2}}, \dots,$$

$$x_{i(2k+2)} = (xy)^a x, x_{i(2k+2)+1} = y, x_{i(2k+2)+2} = xy, x_{i(2k+2)+3} = (xy)^{2+4i},$$

$$x_{i(2k+2)+4} = (xy)^{u_1}, x_{i(2k+2)+5} = (xy)^{u_2}, \dots, x_{i(2k+2)+k} = (xy)^{u_{k-3}}, \dots.$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v \in N$ için $4i = 2nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer n ' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k-2]$ aralığında değil ise, iki alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer n çift ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-3}$ ise $i = \frac{n}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2) = n(k+1)$ olduğu için $P_k(G_n; x, y) = n(k+1)$ elde edilir. (Burada $2n|a, 2n$ böler a anlamına gelir.)

2. Durum: Eğer n tek ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-3}$ ise $i = n$ dir. Böylece $i(2k+2) = 2n(k+1)$ olduğu için $P_k(G_n; x, y) = 2n(k+1)$ elde edilir.

2. Eğer α, n ' nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise iki alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer n çift ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-3}$ ise $i = \alpha \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \alpha(n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y) = \alpha(n(k+1))$ elde edilir.

2. Durum: Eğer n tek ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-3}$ ise $i = \alpha n$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \alpha(2n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y) = \alpha(2n(k+1))$ elde edilir.

ii'. Eğer β , $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise iki alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: n çift ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-3}$ ise $i = \beta \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \beta(n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y) = \beta(n(k+1))$ elde edilir.

2. Durum: Eğer n tek ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-3}$ ise $i = \beta n$ dir. Böylece

$i(2k+2) = \beta(2n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y) = \beta(2n(k+1))$ elde edilir.

y, x başlangıç elemanları için de, ispat benzer ifadeler kullanılarak yapılır.

Şimdi bu grubun 3-gerenli durumu için ispatı yapalım. Burada $|x| = 4$, $|y| = 4$, $|z| = 2n$ dir.

i. Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = yxy, x_5 = y, x_6 = z, x_7 = x, x_8 = y, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

ii. Eğer $k = 3$ ise ispat 3.2. bölümdeki Teorem 3’de verilmiştir, $k = 4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
& x, y, z, xyz = z^n, xyzyz = z^{2n}, yzz^n z^{2n} = yzz^{3n} = z^{3n}x, \\
& zzz^n z^{2n} z^{3n}x = z^{6n}zx, z^n z^{2n} z^{3n}xz^{6n}zx = z^{12n}zx, z^{2n} z^{3n}xz^{6n}zzz^{12n}xzx = z^{23n}xxxxzx = z^{24n}xz^2x, \\
& z^{3n}xz^{6n}zzz^{12n}xzxz^{24n}xz^2x = z^{45n}xzxzxzxz^2x = z^{47n}xz^4x, z^{6n}zzz^{12n}xzxz^{24n}xz^2xz^{47n}xz^4x = \\
& = z^{89n}zxzxzxz^2xz^4x = z^{92n}z^8x, \\
& z^{12n}xzxz^{24n}xz^2xz^{47n}xz^4xz^{92n}z^8x = z^{178n}zx, z^{24n}xz^2xz^{47n}xz^4xz^{92n}z^8xz^{192n}zx = z^{344n}z, \\
& z^{47n}xz^4xz^{92n}z^8xz^{192n}zzz^{372n}z = z^{663n}z^4, z^{92n}z^8xz^{192n}zzz^{372n}zz^{715n}z^4 = z^{1278n}z^{12}, \\
& z^{192n}zzz^{372n}zz^{715n}z^4z^{1374n}z^{12} = z^{2463n}xz^{16}, \dots
\end{aligned}$$

Şimdi yukarıdaki 4 - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, z^a x, zx, z, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
& z^a x, \\
& zx = y, \\
& z, \\
& z^n z^b, \\
& z^a xzxzz^n z^b = z^a x^2 z^n z^b = z^a z^{2n} z^b = z^{a+b}, \\
& zxxz^n z^b z^{a+b} = xz^n z^{b+a+b} = z^n xz^{2b+a}, \\
& zzz^n z^b z^{a+b} z^n xz^{2b+a} = z^{2n} zx = zx = y, \\
& z^n z^b z^{a+b} z^n xz^{2b+a} zx = z^{2n} xzx = xzx, \\
& z^{a+b} z^n xz^{2b+a} zxxzx = z^{2n} xz^{b+2}x = xz^{b+2}x, \\
& z^n xz^{2b+a} zxxzxz^{b+2}x = z^n xz^{3b+a+4}x, \\
& zxxzxz^{b+2}xz^n xz^{3b+a+4}x = z^{4n} z^{4b+a+8}x = z^{4b+a+8}x, \\
& xzxz^{b+2}xz^n xz^{3b+a+4}xz^{4b+a+8}x = z^n xz^{4b+a+7}xz^{4b+a+8}x = z^{2n}zx = zx = y, \\
& xz^{b+2}xz^n xz^{3b+a+4}xz^{4b+a+8}xzx = xz^{4b+a+6}xz^{4b+a+8}xzx = x^2 z^2 xzx = z^n xz^2 = z^{2n}z = z, \dots
\end{aligned}$$

Buradan 4 - nacci dizisinin her on terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece 4 - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
& x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, \dots, \\
& x_{10} = z^8 x, x_{11} = zx = y, x_{12} = z, x_{13} = z^n z^4, \dots, \\
& x_{20} = z^{32} x, x_{21} = zx = y, x_{22} = z, x_{23} = z^n z^8, \dots, \\
& x_{10i} = z^{8i^2} x, x_{10i+1} = zx = y, x_{10i+2} = z, x_{10i+3} = z^n z^{4i}, \dots
\end{aligned}$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v_1, v_2 \in N$ için $8i^2 = 4nv_1$ ve $4i = 2nv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. 4- nacci dizisinin periodu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki üç durum söz konusudur:

Eğer n çift ise $i = \frac{n}{2}$ olup, $10i = 5n$ olur ki, buradan $P_4 = (G_n; x, y, z) = n(k+1) = 5n$ elde edilir.

Eğer n tek ise $i = n$ olup, $10i = 10n$ olur ki, buradan $P_4 = (G_n; x, y, z) = 2n(k+1) = 10n$ elde edilir.

iii. Eğer $k \geq 5$ ise dizinin ilk $k+1$ tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, x_4 = z^{2n}, \dots, x_k = z^{2^{k-3}n}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, x_4 = e, e, \dots, e$$

olduğu görülür, burada $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ dir.

Şimdi k - nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, z^a x, zx, z, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_{2k+2} = \prod_{i=k+2}^{2k+1} x_i = z^a x,$$

$$x_{2k+2+1} = \prod_{i=k+3}^{2k+2} x_i = zx,$$

$$x_{2k+2+2} = \prod_{i=k+4}^{2k+3} x_i = z,$$

$$x_{2k+2+3} = \prod_{i=k+5}^{2k+4} x_i = z^n z^b,$$

$$x_{2k+2+4} = \prod_{i=k+6}^{2k+5} x_i = z^c$$

$$x_{2k+2+5} = \prod_{i=k+7}^{2k+6} x_i = z^{u_1},$$

$$\vdots$$

$$x_{2k+2+k} = \prod_{i=2k+2}^{3k+1} x_i = z^{u_{k-4}},$$

$$\vdots$$

Buradan k - nacci dizisinin her $2k + 2$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece k - nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, x_4 = e, \dots, x_k = x^{2^{k-3}n} = e, \dots,$$

$$x_{i(2k+2)} = z^a x, x_{i(2k+2)+1} = zx, x_{i(2k+2)+2} = z, x_{i(2k+2)+3} = z^n z^{4i}, x_{i(2k+2)+4} = z^{8i^2+4i},$$

$$x_{i(2k+2)+5} = z^{u_1}, \dots, x_{i(2k+2)+k} = z^{u_{k-4}}, \dots.$$

Burada dizinin periodunu belirlemek için, $v_1, v_2 \in N$ için $4i = 2nv$ ve $8i^2 + 4i = 2nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer n 'nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise, iki alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer n çift ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ ise $i = \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$i(2k+2) = n(k+1)$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = n(k+1)$ elde edilir. (Burada $2n|a, 2n$ böler a anlamına gelir.)

2. Durum: Eğer n tek ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ ise $i = n$ dir. Böylece

$i(2k+2) = 2n(k+1)$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = 2n(k+1)$ elde edilir.

2. Eğer α , n 'nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise iki alt durum ortaya çıkar:

1. **Durum:** Eğer n çift ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ ise $i = \alpha \frac{n}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha(n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = \alpha(n(k+1))$ elde edilir.

2. **Durum:** Eğer n tek ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ ise $i = \alpha n$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha(2n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = \alpha(2n(k+1))$ elde edilir.

ii'. Eğer β , $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise iki alt durum ortaya çıkar:

1. **Durum:** n çift ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ ise $i = \beta \frac{n}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \beta(n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = \beta(n(k+1))$ elde edilir.

2. **Durum:** Eğer n tek ve $2n|a, 2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ ise $i = \beta n$ dir. Böylece $i(2k+2) = \beta(2n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = \beta(2n(k+1))$ elde edilir.

z, x, y başlangıç elemanları için ise bu gruptaki k -nacci dizisinin periodunun $P_k(G_n; z, x, y) = 2k+2$ olduğunu ispatlayalım.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$z, x, y, xy, yxy, y, y^3x = z, x, y, \dots$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2 - nacci dizisinin periodu 6 dır.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$z, x, y, zxy = y^2, xy^3, yxy, y, e, y^3x = z, x, y, \dots$$

Aynı şekilde bu diziden de 3 - nacci dizisinin periodunun 8 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = zxy, x_4 = (zxy)^2 \dots, x_{k-1} = (zxy)^{2^{k-4}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = zxy, x_4 = e, e, \dots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = (zxy)^{2^{k-3}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^k x_i = xy^3,$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = yxy,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = y,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e,$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca,

$$x_{2k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e,$$

$$x_{2k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = z,$$

$$x_{2k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = x,$$

$$x_{2k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = y$$

olur. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları z, x ve y nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \dots$ olur. Böylece $P_k(G_n; z, x, y) = 2k+2$ olduğu görülür.

5. SONUÇ

Bu çalışmada sonlu gruplardaki k -nacci (k -basamak fibonacci) dizilerinin uygulamaları üzerinde duruldu.

4. bölümde $f(k, 2)$ ve $f(k, 4)$ dizilerinin periodlarının sırası ile $k+1$ ve $2k+2$ olduğu ve periodları bu periodların katları olan $(2, 2, 2), (n, 2, 2), (2, n, 2)$ ve $(2, 2, n)$ polyhedral, $E(2, 2, 2), E(p, 2, 2), E(2, q, 2)$ ve $E(2, 2, r)$ genişletilmiş triangle, ve $\langle 2, 2, 2 \rangle, \langle n, 2, 2 \rangle, \langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral gruplarındaki k -nacci dizilerinin periodları belirlendi.

Ayrıca sonlu gruplardaki k -nacci dizilerinin periodları için elde edilen sonuçlardan, bir grup için oluşturulacak k -nacci (k -basamak Fibonacci) dizilerinin periodlarının, bu diziler elde edilirken seçilecek başlangıç elemanlarına yani geren n -li lerine bağlı olarak değiştiği görüldü.

KAYNAKLAR

- Ablar, M.A. and Al-Hamdan, W.M., 1993. The Triangle Groups. *Rendiconti del Seminero Matematico della Università di Padova*, tome 89, p. 103-111.
- Aydın, H. and Dikici, R., 1998. General Fibonacci Sequences in Finite Groups. *The Fibonacci Quarterly*, 36(3), 216-221.
- Aydın, H. and Smith, G.C., 1994. Finite p -Quotient of Some Cyclically Presented Groups. *J. London Math. Soc.*, 29(2), 83-92.
- Aydın, H., 1991. Recurrence Relations in Finite Nilpotent Groups. Ph. Thesis, University of Bath.
- Campbell, C. M., Doostie, H. and Robertson, E. F., 1990. Fibonacci Length of Generating Pairs in Groups. in *Applications of Fibonacci Numbers*, Vol. 3 Eds. G. E. Bergum *et al.* Kluwer Academic Publishers, 27-35.
- Campbell, C. M., Campbell, P. P., Doostie, H. and Robertson E.F., 2004. On the Fibonacci Lengths of Powers of Dihedral Groups. in *Applications of Fibonacci Numbers*, Vol. 9, ed. F.T. Howard, Kluwer, Dordrecht, 69-85.
- Campbell, C. M. and Campbell, P. P., 2005. The Fibonacci Length of Certain Centro-Polyhedral Groups. *J. Appl. Math. Comput.*, 19, 231-240.
- Campbell, C. M. and Campbell, P. P., 2009. The Fibonacci Lengths of Binary Polyhedral Groups and Related Groups. *Congressus Numerantium*, 194, 95-102.
- Campbell, P. P., 2003. Fibonacci Length and Efficiency in Group Presentations. Ph. Thesis, University of St Andrews.
- Conway, J. H., Coxeter, H. S. M. and Shephard, G. C., 1972. The Centre of a Finitely Generated Group. *Tensor (N.S)* 25, 405-418: erratum, *ibid.* (N.S) 26, 477.
- Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., 1972. *Generators and Relations for Discrete Groups*. 3rd edition, Springer, Berlin.
- Deveci, Ö., Karaduman, E. and Campbell, C.M., to appear. On The k -nacci Sequences in Finite Binary Polyhedral Groups. *Algebra Colloquium*.
- Dikici, R. and Smith G. C., 1995. Recurrences in Finite Groups. *Turkish J. of Mathematics*, 19, 321-329.
- Dummit, D.S and Foote, R.M., 2004. *Abstract Algebra*. 3rd edition (John Wiley & Sons, Inc.).
- Johnson, D.L., 1997. *Presentation of Groups*. 2nd edition (London Math. Soc. Student Texts 15, Cambridge University Press, Cambridge).
- Johnson, D.L., Walmsley, J.W. and Wright, D., 1974. The Fibonacci Groups. *Proc. London Math. Soc.*, 29, 577-592.
- Karaduman, E. and Aydın, H., 2003. General 2-Step Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups of Exponent p and Nilpotency Class 4. *Applied Mathematics and Computations*, 141, 491-497.
- Karaduman, E. and Deveci, Ö., 2009. k -nacci Sequences in Finite Triangle Groups. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 453750-1-453750-10.
- Karaduman, E. and Yavuz, U., 2003. On The Period of Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups. *Applied Mathematics and Computations*, 142(2-3), 321-332.
- Karaduman, E., 2002. Sonlu Gruplarda 2-Basamak Fibonacci Dizileri. *Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.

- Knox, Steven W., 1992. Fibonacci Sequences Infinite Groups. *The Fibonacci Quarterly*, 30(2), 116-120.
- Lucas, E., 1878. Théories des Fonctions Numériques Simplement Périodiques. *Amer. J. Math.*, 1, 184-240, 289-321.
- Lü, K and Wang J., 2007. k -Step Fibonacci Sequences Modulo m . *Util. Math.*, 71, 169-178.
- Özkan, E., 2003. 3-Step Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups. *Applied Mathematics and Computations*, 144, 517-527.
- Robinson, D.J.S., 1982. *A Course in The Theory Groups* (Springer-Verlag, New York).
- Sims, C.C., 1994. *Computation With Finitely Presented Groups*. (*Encyclopedia of Mathematics and Its Applications* 48, Cambridge University Press, Cambridge).
- Suzuki, M., 1982. *Group Theory I*. (ISBN 3-540-10915-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Printed in the United States of America).
- Taşcı, D., 2007. *Soyut Cebir*. (Alp Yayınevi, Ankara).
- Thomas, R.M., 1991. The Fibonacci Groups Revised. in *Groups-St Andrews, Vol. 2*, eds. C.M. Campbell and E.F. Robertson, Cambridge University Press, Cambridge, 445-454.
- Wall, D. D., 1960. Fibonacci Series Module m . *Amer. Math. Monthly.*, 67, 525-532.
- Wilcox, H. J., 1986. Fibonacci Sequences of Period n in Groups. *The Fibonacci Quarterly*, 24, 356-361.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Kars'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kars'ta tamamladı. 1998 yılında girdiği Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1999 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne yatay geçiş yaptı. 2002 yılında mezun oldu. 2003 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2004-2006 yılları arasında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimini tamamladı.

Halen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmakta olup, evli ve bir çocuk babasıdır.