

155648

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERENSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN CHEBYSHEV
YAKLAŞIMI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Turgut YELOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2004

Her hakkı saklıdır

Yrd. Doc. Dr. Ercan GELİK..... danışmanlığında, Turgut YELOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma ..06.09.2004..... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Hüseyin AYDIN

Üye: F. Nurecan Kızılgül

Üye: Yrd. Doc. Dr. Ercan GELİK

İmza :

İmza :

İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)

Prof. Dr. Mehmet ERTÜRKÜL
Enstitü Müdürü

Enstitü Müdürü 7

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERENSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN CHEBYSHEV YAKLAŞIMI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Turgut YELOĞLU

Atatürk Üniversitesi

Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ercan ÇELİK

Bu tezde, diferensiyel-cebirsell denklemlerin (DAEs) Chebyshev yaklaşımı ile nümerik çözümleri gösterildi. İlk olarak, diferensiyel-cebirsell denklemler keyfi dereceye kadar kuvvet serilerine dönüştürüldü, daha sonra bu kuvvet serileri keyfi dereceden Chebyshev serilerine dönüştürölerek verilen diferensiyel-cebirsell denklemin keyfi mertebeden nümerik çözümleri elde edildi. Üç farklı problem Chebyshev seri yaklaşımı kullanılarak çözüldü ve bu yaklaşımla elde edilen çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı.

2004, 37 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel-cebirsell denklem (DAEs), Kuvvet serileri, Chebyshev Yaklaşımı, Index, Keyfi mertebe.

ABSTRACT

Master Thesis

Chebyshev Series Approximation for Solving Differential-Algebraic Equations (DAEs)

Turgut YELOĞLU

Atatürk University
Faculty of Arts and Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist.Prof. Dr. Ercan ÇELİK

In this thesis, numerical solution of differential-algebraic equations (DAEs) is considered by Chebyshev Series Approximation. Firstly we calculate power series of the given equations system then transform it into Chebyshev series form, which gives an arbitrary order for solving differential algebraic equation numerically. Three different problems have been solved by using Chebyshev series approximation and solutions have been compared with those obtained by exact solutions.

2004, 37 Pages

Keywords: Differential-algebraic equations (DAEs), Power series, Chebyshev series approximation, Index, Arbitrary order.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışma sırasında tez danışmanlığımı üslenen sayın hocalarım Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Mustafa BAYRAM'a ve Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Ercan ÇELİK'e yakın ilgi, teşvik ve yardımlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmanın gerçekleşmesi için katkıda bulunan ve her aşamasında görüş ve tavsiyelerinden istifade ettiğim, Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi ve Bilgi İşlem Merkezi Müdürü Sayın Doç. Dr. Bünyamin YILDIZ'a yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güvenden dolayı eşim Neslihan YELOĞLU'na ve aileme en samimi duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Turgut YELOĞLU

Ağustos 2004

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. (4.1) deki $y_1(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı	23
Şekil 4.2. (4.1) deki $y_2(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı.....	24
Şekil 4.3. (4.1) deki $y_3(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı.....	24
Şekil 4.4. (4.16) daki $v_1(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı	31
Şekil 4.5. (4.16) daki $v_2(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı.....	31
Şekil 4.6. (4.16) daki $v_3(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı	32
Şekil 4.7. (4.38) deki $z_1(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı.....	35
Şekil 4.8. (4.38) deki $z_2(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı.....	35



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. (4.1) deki $y_1(x)$ 'in nümerik çözümü.....	22
Çizelge 4.2. (4.1) deki $y_2(x)$ 'in nümerik çözümü.....	22
Çizelge 4.3. (4.1) deki $y_3(x)$ 'in nümerik çözümü.....	23
Çizelge 4.4. (4.16) daki $v_1(x)$ 'in nümerik çözümü.....	30
Çizelge 4.5. (4.16) daki $v_2(x)$ 'in nümerik çözümü.....	30
Çizelge 4.6. (4.16) daki $v_3(x)$ 'in nümerik çözümü.....	31
Çizelge 4.7. (4.38) deki $z_1(x)$ 'in nümerik çözümü.....	34
Çizelge 4.8. (4.38) deki $z_2(x)$ 'in nümerik çözümü.....	35



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	v
1.GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1 Ön Bilgiler.....	3
2.2. Diferensiyel-Cebirsel Denklemler.....	6
2.2.1. Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin İndex'i.....	7
2.3 Kuvvet Serileri.....	8
2.3.2. Kuvvet Serilerinin Aritmetiği.....	9
2.4. Chebyshev Polinomları ve Özellikleri.....	10
2.5. Chebyshev Serileri.....	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	16
3.1. Diferensiyel-Cebirsel Denklemleri Çözmek İçin Nümerik Metot.....	16
3.2. Nümerik Metodun Kuvvet Serilerine Uygulanışı.....	16
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	18
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	38

1. GİRİŞ

Yapılan araştırmalar sonucunda, uygulamalı bilim dallarında, pratikte karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemeler oluşturması büyük bir önem taşımaktadır. Bu konuda yapılan çalışmalar bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda, 20. yüzyılın sonuna doğru oldukça büyük bir hız kazanmıştır. Matematiksel modelleme problemlerin genelde diferensiyel-cebirselsel denklem olarak karşımıza çıktığı gözlenmiştir. Bu nedenle, diferensiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Matematiksel modelleme teorisinde ortaya çıkan bilgisayar destekli tasarım, mekanik sistemlerin simülasyonu, güç sistemleri, kimyasal işlemlerin simülasyonu ve optimal kontrol gibi problemlerin matematiksel modellemelerin sonucu olarak elde edilen diferensiyel-cebirselsel denklem sistemlerinin nümerik çözümü üzerinde odaklanmıştır.

Diferensiyel cebirselsel denklemlerin nümerik çözümleri için ilk genel teknik 1971 yılında Gear tarafından verildi. Daha sonra araştırmacılar tarafından pek çok metot geliştirildi. En yaygın metot Runge-Kutta metodudur.

Hairer (1991) Runge-Kutta metodunu kullanarak diferensiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümleriyle ilgili çalışma yapmıştır ve diferensiyel-cebirselsel denklemleri çözmek için başlangıç/sınır değer metotlarını sunmuştur.

Pierluigi Amodio ve Francesco Mazzia (1992) başlangıç/sınır değer metotlarını kullanarak diferensiyel-cebirselsel denklemlerin çözümlerine uyguladı.

Müler (2000) diferensiyel-cebirselsel denklemlerle modellenmiş dinamik sistemin iyi yönleri (pros) ve kötü yönleri (cons) ile ilgili bir çalışma yapmıştır.

Wang (2000) mühendislikteki diferensiyel-cebirselsel denklemleri çözmek için sıralama (Collocation) metodunu geliştirmiştir.

Çelik (2002) Diferensiyel-cebirsal denklemlerin Padé yaklaşımı ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Araştırmacılar bu metotların yanısıra diferensiyel-cebirsal denklemleri çözmek için çeşitli bilgisayar paket programları geliştirmişlerdir.

Petzold (1989) genel implicit 0 ve 1 index'li diferensiyel-cebirsal denklem sistemleri için Backward diferensiyel formüllerini kullanarak DASSL bilgisayar paket programı,

Hairer ve Wanner (1992) lineer kapalı (implicit) 0 ve 1 index'li, 2 ve 3 index'li diferensiyel-cebirsal denklemlerin Hessenberg formları için Runge-Kutta metodunu kullanarak (başlangıç değer problemini çözmek için) RADAU5 bilgisayar paket programı ve sınır değer problemlerini çözmek için COLDAE bilgisayar programı,

Secchi (1993) diferensiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümleri için DAWRS bilgisayar paket programı,

Kunkel (1995) değişken katsayılı genel lineer sistemler için hem Runge-Kutta hem de Backward diferensiyel formüllerini kullanarak GELDA bilgisayar paket programlarını sunmuşlardır.

Bu çalışmada diferensiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için Chebyshev seri yaklaşımı kullanıldı. Metot üç değişik test problemine uygulandı. Önce diferensiyel-cebirsal denklemler keyfi dereceye kadar kuvvet serilerine dönüştürüldü, daha sonra bu kuvvet serileri keyfi dereceden Chebyshev serilerine dönüştürülerek verilen diferensiyel-cebirsal denklemin keyfi mertebeden nümerik çözümleri elde edildi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1.1. Tanım: Bir bağımsız değişken ile bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme diferensiyel denklem denir.

Bu tür denklemler genel olarak

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n 'inci türevidir. (2.1) denklemini $y^{(n)}$ 'ye göre çözülürse,

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu da (2.1) in açık formda yazılmış halidir.

2.1.2. Tanım: m 'inci dereceden bir

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m \quad (2.3)$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0 \quad (2.4)$$

şeklindeki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif m tamsayısına $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i 'ye denklemin kökü denir.

2.1.3. Tanım: $c_i, b \in R$ ve x_i 'ler de değişkenler olmak üzere,

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = b \quad (2.5)$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem denir.

$a_{ij}, b_i \in R$ ve x_i bilinmeyenler olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem sistemi adı verilir. Burada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine sistemin katsayılar matrisi, B ve x matrislerine de sırası ile sistemin ikinci yanı ve bilinmeyenler matrisi denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ ile } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$[A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

matrisine de sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Yukarıdaki lineer denklem sisteminin matris gösterimi $Ax = B$ şeklindedir. Bir lineer denklem sisteminde, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır ve sütun işlemleri, sistemin çözümünü değiştirmez. Yani,

- Herhangi iki denklemin yeri değiştirilirse,
- Herhangi iki denklemin her iki yanı sıfırdan farklı bir skalerle çarpılırsa,
- Herhangi iki denklemin her iki yanı, herhangi bir skalerle çarpıldıktan sonra başka bir denklemle taraf tarafa toplanırsa sistemin çözümleri aynı kalır.

Bu sebepten, $[A : B]$ genişletilmiş katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözümler bulunabilir. Bu metotla sistemi çözmeye Gauss-Jordan yok etme metodu ve katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözmeye de Gauss-Jordan indirgeme metodu adı verilir.

2.1.4. Tanım: A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler (regüler) matris, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler (regüler olmayan) matris denir.

2.1.5. Tanım: A , n . mertebeden bir regüler matris ($|A| \neq 0$) ise $Ax = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B \quad (2.9)$$

eşitliği ile verilir. Burada anlatılmak istenen,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

lineer denklem sisteminin çözümü; Δ , A matrisinin determinanı olmak üzere,

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

determinantları hesaplanır ve tek çözüm olan,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \quad (2.12)$$

olarak değerleri bulunur. $Ax = B$ lineer denklemini çözmek için uygulanan bu kurala Cramer Kuralı denir.

2.1.6. Tanım: a pozitif bir reel sayı ve $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon, a 'ya da üstel fonksiyonun tabanı denir.

2.1.7. Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ 'de her mertebeden türevi varsa,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots \quad (2.13)$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x=c$ 'deki Taylor Serisi denir. Eğer $c=0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclauren Serisi adı verilir.

2.1.8. Tanım: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. Her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

2.1.9. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Eğer,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu a noktasında süreklidir denir.

2.2. Diferensiyel-Cebirsel Denklemler

Diferensiyel cebirsel-denklemler sistemi başlangıç değerleri ile birlikte

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (2.14.a)$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0 \quad (2.14.b)$$

formundadır. (2.14.a) denkleminde kapalı (implicit) diferensiyel-cebirsel denklem denir. Burada $F \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in \mathbb{R}$ şeklindedir.

Diferensiyel-cebirsel denklemi açık olarak,

$$F(y', y, x, t) = 0 \quad (2.15.a)$$

$$G(y, x, t) = 0 \quad (2.15.b)$$

şeklinde yazabiliriz. Yukarıdaki sistemin (2.15.b) kısmında görüldüğü gibi diferensiyel-cebirsel denklemler üzerinde cebirsel kısıtlamalar vardır. Burada y diferensiyel değişken ve x de cebirsel değişkendir. Eğer (2.14.a) ve (2.14.b) sistemi n tane denkleme sahipse, p tanesi diferensiyel değişken ise $(n-p)$ tanesi cebirsel değişkendir (Ascher, Brenan, Campbell).

2.2.1. Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin İndex'i

Bir diferensiyel-cebirsel denklem index ile karakterize edilir. Bu yüzden diferensiyel-cebirsel denklemlerin incelenmesinde ve sınıflandırılmasında index önemli bir rol oynar. (2.15.a) ve (2.15.b) diferensiyel-cebirsel denklemlerinin bir özel formu

$$y' = f(y, x, t) \quad (2.16.a)$$

$$0 = g(x, y, t) \quad (2.16.b)$$

olarak yazılabilir. Bu özel forma yarı-açık (semi-explicit) diferensiyel-cebirsel denklem denir. Burada da y diferensiyel değişken ve x de cebirsel değişkendir. Eğer t 'ye göre (2.16.b) denkleminin diferensiyeli alınırsa,

$$y' = f(y, x, t) \quad (2.17.a)$$

$$g_y(y, x, t)y' + g_x(y, x, t)x' = -g_t(y, x, t) \quad (2.17.b)$$

sistemi elde edilir. Dolayısıyla (2.16.a) ve (2.16.b) sisteminin index'inin 1 olduğunu söyleyebiliriz.

2.2.1.1. Tanım: $F(t, y, y') = 0$ genel diferensiyel-cebirsel denkleminde, y 'nin index'i (sistemde y ve t cinsinden); y' 'nü elde etmek için gerekli olan diferensiyelin mertebesinin minimum sayısıdır veya

$$\begin{aligned} F(t, y, y') &= 0 \\ F(t, y, y', y'') &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{d^p F}{dt^p}(t, y, y', \dots, y^{(p+1)}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

sistemiyle de tanımlanabilir. Burada p en küçük tamsayıdır. Şimdi index için aşağıdaki örnekleri inceleyelim (Ascher 1998) :

- $y = q(t)$ 'yi alalım. Bu denklem index'i 1 olan diferensiyel denklemdir. Çünkü y 'ye göre bir diferensiyel denklem elde etmek için $q(t)$ 'nin diferensiyeli alınmalıdır.

- $y_1 = q_1(t)$ sistemine göre $y_2 = y_1' = q_1'(t)$ ifadesini elde etmek için ilk denklemin $y_2 = y_1'$

diferensiyelini alırız. Daha sonra $y_2' = y_1'' = q_1''(t)$ olur. $q_1(t)$ 'nin iki diferensiyeline ihtiyaç olduğundan index 2'dir.

- $u = q(t)$ sistemini göz önüne alalım. y_3 'e göre bir diferensiyel denklem elde etmek için $y_3 = u''$

$$y_3 = u'' = q_1''(t) \Rightarrow y_3' = q_1'''(t)$$

eşitlikleri yazılır dolayısıyla $q(t)$ 'nin üç kez diferensiyeline ihtiyaç olduğu için index'i 3'tür.

Index > 1 olan diferensiyel-cebirsal denklemleri çözmek genellikle zordur ve halen aktif araştırma alanıdır. Bu tür diferensiyel-cebirsal denklemleri çözmek için index indirgemesine gidilir. Yani denklem, index'i 1 olan diferensiyel-cebirsal denklemlere indirgenir. Bu çalışmada index'i 1 olan diferensiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümleri ile ilgilenilecektir.

2.3. Kuvvet Serileri

2.3.1. Tanım: x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots + a_n (x-c)^n + \dots \quad (2.19)$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir.

Eğer bu tanımda $c = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2.20)$$

elde edilir. Ayrıca $x = c$ olması durumunda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0$ olur.

2.3.2. Kuvvet Serilerinin Aritmetiği

$f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ birer kuvvet serisi olmak üzere,

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots \quad (2.21)$$

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \dots \quad (2.22)$$

$$h(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + \dots \quad (2.23)$$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer $h(x) = f(x) \mp g(x)$ ise f , g ve h 'nin katsayıları arasında

$$h_i = f_i \mp g_i \quad (2.24)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

$h(x) = f(x)g(x)$ ise f , g ve h 'nin katsayıları arasında

$$h_n = \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \quad (2.25)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ise ($g(x) \neq 0$, $g_0 \neq 0$) f , g ve h 'nin katsayıları arasında

$$h(x) = \frac{f_0}{g_0} \quad (2.26)$$

$$h_n = \frac{1}{g_0} \left(f_n - \sum_{k=0}^{n-1} h_k g_{n-k} \right), \quad (n \geq 1) \quad (2.27)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

2.3.2.1. Üstel Fonksiyon

Eğer,

$$h(x) = e^{f(x)} \text{ ise } \frac{dh}{dx} = h \frac{df}{dx}$$

şeklindedir. (2.21) ve (2.23) ifadeleri bu diferensiyel denklemde yerine yazılır ve kuvvet serilerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$h_0 = e^{f_0} \quad (2.28)$$

$$h_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k h_{n-k} f_k, \quad (n \geq 1) \quad (2.29)$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir.

2.3.2.2. Kuvvet Fonksiyonu

Eğer, $h(x) = f(x)^a$ ($a \in \mathbb{N}$) ise,

$$f(x) \frac{dh(x)}{dx} = ah(x) \frac{df(x)}{dx}$$

şeklindedir. (2.21) ve (2.23) kuvvet serileri bu diferensiyel denklemde yerine yazılır ve karşılaştırılırsa,

$$h_0 = f_0^a \quad (2.30)$$

$$h_n = \frac{1}{nf_0} \sum_{k=1}^n \{(a+1)k - n\} f_k h_{n-k}, \quad (n \geq 1) \quad (2.31)$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir.

2.4. Chebyshev Polinomları ve Özellikleri

2.4.1. Tanım: r herhangi bir tam sayı olmak üzere,

$$T_r(x) = \cos r\theta, \quad \cos \theta = x, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (2.32)$$

$$T_r^*(x) = \cos r\theta, \quad \cos \theta = 2x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.33)$$

bağıntıları ile tanımlanan tek değişkenli polinomlara tek değişkenli birinci mertebeden Chebyshev polinomları denir.

Chebyshev polinomlarının bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. Chebyshev polinomlarının tanımından,

$$T_{-r}(x) = T_r(x), \quad T_{-r}^*(x) = T_r^*(x) \quad (2.34)$$

yazılabilir.

2. Trigonometrik özdeşliklerden faydalanarak,

$$T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x) \quad (2.35)$$

$$T_{r+1}^*(x) = 2(2x-1)T_r^*(x) - T_{r-1}^*(x) \quad (2.36)$$

bağıntıları yazılabilir.

3. Genel olarak $r \geq 1$ için,

$$T_r(x) = \frac{1}{2} \left[(2x)^r - \left[2 \binom{r-1}{1} - \binom{r-2}{1} \right] (2x)^{r-2} + \dots \right] \quad (2.37)$$

$$T_{r+1}^*(x) = \frac{1}{2} \left[(2^{2r} x^r) - \left[2 \binom{2r-1}{1} - \binom{2r-2}{1} \right] (2^{2r-2} x^{r-1}) + \dots \right] \quad (2.38)$$

şeklinde yazılabilir.

4. x^r in $T_r(x)$ ve $T_r^*(x)$ polinomları cinsinden yazılımı için genel bağıntıları yazacak olursak,

$$x^r = \frac{1}{2^r} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} T_{2i-r}(x) \quad (2.39)$$

ve

$$x^r = \frac{1}{2^{2r}} \sum_{i=0}^r \binom{2r}{i} T_{i-r}^*(x) \quad (2.40)$$

olur.

5. Trigonometrik bazı özdeşlikleri kullanarak Chebyshev polinomlarının çarpımını,

$$2T_r(x)T_s(x) = T_{r+s}(x) + T_{r-s}(x) \quad (2.41)$$

$$2T_r^*(x)T_s^*(x) = T_{r+s}^*(x) + T_{r-s}^*(x) \quad (2.42)$$

şeklinde yazılabilir.

6. $T_m(x)$, $T_n(x)$ ve $T_r(x)$ Chebyshev polinomları olsun. Buna göre,

$$T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)) = T_{mn}(x) \quad (2.43)$$

$$T_r^*(x) = T_r(2x-1), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.44)$$

eşitlikleri yazılabilir.

7. Chebyshev polinomlarının bazı noktadaki değerleri; $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$T_r(-1) = \begin{cases} 1, & r \text{ çift ise,} \\ -1, & r \text{ tek ise,} \end{cases}, \quad T_r(0) = \begin{cases} (-1)^n, & r = 2n \\ 0, & r = 2n+1 \end{cases}, \quad T_r(1) = 1 \quad (2.45)$$

ve

$$T_r^*(0) = \begin{cases} 1, & r \text{ çift ise,} \\ -1, & r \text{ tek ise,} \end{cases}, \quad T_r^*\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n, & r = 2n \\ 0, & r = 2n+1 \end{cases}, \quad T_r^*(1) = 1 \quad (2.46)$$

şeklindedir.

8. $T_r(x)$ ve $T_r^*(x)$ polinomlarının belirsiz integralleri,

$$\int T_r(x) = \begin{cases} T_1(x) & (r=0) \\ \frac{1}{4}T_2(x) & (r=1) \\ \frac{T_{r+1}(x)}{2(r+1)} - \frac{T_{r-1}(x)}{2(r-1)} & (r>1) \end{cases} \quad (2.47)$$

ve

$$\int T_r^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}T_1^*(x) & (r=0) \\ \frac{1}{8}T_2^*(x) & (r=1) \\ \frac{T_{r+1}^*(x)}{4(r+1)} - \frac{T_{r-1}^*(x)}{4(r-1)} & (r>1) \end{cases} \quad (2.48)$$

olur.

Bu özellikler kullanılarak Chebyshev polinomlarının ilk altısı,

$$\begin{aligned}
 T_0(x) &= 1 \\
 T_1(x) &= x \\
 T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
 T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
 T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
 T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
 T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

ve

$$\begin{aligned}
 T_0^*(x) &= 1 \\
 T_1^*(x) &= 2x - 1 \\
 T_2^*(x) &= 8x^2 - 8x + 1 \\
 T_3^*(x) &= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1 \\
 T_4^*(x) &= 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1 \\
 T_5^*(x) &= 512x^5 - 1280x^4 + 1120x^3 - 400x^2 + 50x - 1 \\
 T_6^*(x) &= 2048x^6 - 6144x^5 + 6912x^4 - 3584x^3 + 840x^2 - 72x + 1 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
 1 &= T_0(x) \\
 x &= T_1(x) \\
 x^2 &= \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x)) \\
 x^3 &= \frac{1}{2^2}(3T_1(x) + T_3(x)) \\
 x^4 &= \frac{1}{2^3}(3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)) \\
 x^5 &= \frac{1}{2^4}(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)) \\
 x^6 &= \frac{1}{2^5}(10T_0(x) + 15T_2(x) + 6T_4(x) + T_6(x)) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

ve

$$\begin{aligned}
1 &= T_0^*(x) \\
2x &= T_0^*(x) + T_1^*(x) \\
8x^2 &= 3T_0^*(x) + 4T_1^*(x) + T_2^*(x) \\
32x^3 &= 10T_0^*(x) + 15T_1^*(x) + 6T_2^*(x) + T_3^*(x) \\
128x^4 &= 35T_0^*(x) + 56T_1^*(x) + 28T_2^*(x) + 8T_3^*(x) + T_4^*(x) \\
512x^5 &= 126T_0^*(x) + 210T_1^*(x) + 120T_2^*(x) + 45T_3^*(x) + 10T_4^*(x) + T_5^*(x) \\
1024x^6 &= 462T_0^*(x) + 792T_1^*(x) + 495T_2^*(x) + 220T_3^*(x) + 66T_4^*(x) + 12T_5^*(x) + T_6^*(x) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.52}$$

yazılır (Fox 1972).

2.5. Chebyshev Serileri

$f(x)$ fonksiyonu $-1 \leq x \leq 1$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda bu aralık boyunca düzgün yakınsayan,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) \tag{2.53}$$

şeklinde bir seri açılımı vardır. Burada $\sum'$ sembolü, ilk terimin yarısı alınan bir toplamı gösterir. Bu seriye tek değişkenli Chebyshev serisi ve a_r 'lere de Chebyshev katsayıları denir. Bu katsayılar,

$$a_r = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_r(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos r\theta d\theta, \quad r = 0, 1, 2, \dots \tag{2.54}$$

formülü ile hesaplanabilir (Clenshaw 1962).

Benzer şekilde $f(x)$ fonksiyonu, $0 \leq x \leq 1$ aralığında sürekli ve sınırlı ise,

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r^*(x) \tag{2.55}$$

şeklinde düzgün yakınsak bir seriye açılabilir.

Chebyshev serisi için aşağıdaki teorem verilebilir (Mason 1967).

2.5.1. Teorem: Eğer $f(x)$ fonksiyonu $\delta > 0$ için $[-1-\delta, 1+\delta]$ aralığında sınırlı ve sürekli ise $[-1, 1]$ aralığında,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_i(x) \quad (2.56)$$

formunda tek değişkenli Chebyshev serisi açılımına sahiptir.

Bu teorem, $f(x)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq 1$ aralığında sürekli ve sınırlı ise,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^* T_i^*(x) \quad (2.57)$$

serisi için de geçerlidir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Diferansiyel-Cebirsel Denklemleri Çözmek İçin Nümerik Metot

$$F(y, y', x) = 0 \quad (3.1)$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \quad (3.2)$$

şeklinde verilmiş diferansiyel-cebirsel denklemi göz önüne alalım. Burada F ve y her mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. Başlangıç değeri yerine yazıldığında bu denklem,

$$F(y(x_0), y'(x_0), x_0) = 0 \quad (3.3)$$

şeklini alır. (3.1) denkleminin çözümlerinin

$$y = y_0 + y_1 x + e x^2 \quad (3.4)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (3.1) denkleminde (3.4) ifadesi ve türevleri yerlerine yazılır sonra yüksek dereceden terimler ihmal edilirse,

$$Ae = B \quad (3.5)$$

şeklinde e ' ye göre lineer denklem elde edilir. Burada A ve B sabit matrislerdir. (3.5) denklemi çözümlerse e değeri bulunur ve bu e değeri (3.4) denkleminde yerine yazılır. Yüksek dereceden terimler için yukarıdaki işlemler tekrar edilirse (3.1) denkleminin çözümü için keyfi dereceden kuvvet serileri elde edilir. Sonra bu kuvvet serileri Chebyshev serilerine dönüştürülerek verilen diferansiyel-cebirsel denklemin keyfi mertebeden nümerik çözümü elde edilmiş olur.

3.2. Nümerik Metodun Kuvvet Serilerine Uygulanışı

(3.4) fonksiyonu (3.1) de yerine yazıldığında,

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + (f_n + p_1 e_1 + \dots + p_m e_m) x^n \quad (3.6)$$

şeklinde bilinen kuvvet serisinden farklı, (3.6) tipinde başka bir kuvvet serisi tanımlayalım. Burada $p_1, p_2, \dots, p_m$ 'ler sabitlerdir. (3.4) den

$$y_i = y_{i,0} + y_{i,1}x + y_{i,2}x^2 + \dots + e_i x^n \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır. y_i , y 'nin i . elemanıdır. (3.1) denkleminde, (3.7) ifadesi yerine yazılırsa,

$$f_i = (f_{i,n} + p_{i,1}e_m)x^{n-1} + O(x^{n-j+1}) \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada f_i , (3.1) denklemindeki $f(y, y', x)$ ' in i . elemanıdır. Eğer $f(y, y', x)$, y' 'yi ihtiva ediyorsa $j = 1$; ihtiva etmiyorsa $j = 0$ dır. (3.5) ve (3.8) den;

$$A_{i,j} = P_{i,j} \quad (3.9)$$

$$B_i = -f_{i,n} \quad (3.10)$$

şeklinde lineer denklem elde edilir. Bu denklem çözülürse $e_i (i = 1, 2, \dots, m)$ bulunur. Bu e_i değeri (3.7) denkleminde yerine yazılırsa n . dereceden bir polinom olan $y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ elde edilir. (3.7) denkleminde (3.10) denklemine kadar bu işlemler tekrar edilirse (3.1) denklemindeki diferensiyel-cebirselsel denklemin çözümü için keyfi dereceden kuvvet serileri elde edilir. Daha sonra bu kuvvet serilerini yine keyfi dereceden Chebyshev serisine dönüştürerek verilen diferensiyel-cebirselsel denklemin keyfi mertebeden nümerik çözümü elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, sunulan metot üç problem üzerinde test edildi. Bu problemlerin, nümerik çözümleri bu metotla bulunarak tablo ve şekil üzerinde tam çözümlerle karşılaştırıldı. Bu problemlerde Chebyshev serilerinin $-1 \leq x \leq 1$ aralığındaki değerleri alınmıştır.

4.1. Test Problemi

Aşağıdaki başlangıç değerleri ile birlikte verilen diferensiyel-cebirselsel denklem sistemini düşünelim:

$$\begin{aligned} y_1' + y_3 y_2' - (y_2 + 1) y_3' &= -y_1 + 1 + \sin(x) \\ (y_3 + 1) y' + y_1 y_2' &= -e^{-x} \\ y_1 y_2 y_3 - e^{-x} \sin(x) \cos(x) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Bu diferensiyel-cebirselsel denklemin tam çözümü,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-x} \\ y_2(x) &= \sin(x) \\ y_3(x) &= \cos(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklindedir. Başlangıç değerlerinden (4.1) denkleminin çözümlerinin,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_{0,1} + y_{0,1}'x + e_1 x^2 = 1 - x + e_1 x^2 \\ y_2(x) &= y_{0,2} + y_{0,2}'x + e_2 x^2 = x + e_2 x^2 \\ y_3(x) &= y_{0,3} + y_{0,3}'x + e_3 x^2 = 1 + e_3 x^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (4.4) denklemi ve türevleri (4.1) denkleminde yerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned}
e_2 x^2 + O(x^3) &= 0 \\
(-2 + 4e_1 + 2e_2)x + O(x^2) &= 0 \\
(-2 + 2e_1 + 2e_2 - 2e_3)x + O(x^2) &= 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde (3.8) formundaki denklemi elde ederiz. (3.9) ve (3.10) denklemlerine karşılık gelen lineer denklem sistemi,

$$Ae = B \tag{4.6}$$

şeklindedir. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

olur. (4.8) denklemi çözülürse,

$$e = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 - x + 0,5x^2 \\
y_2(x) &= x \\
y_3(x) &= 1 - 0,5x^2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olur. (4.10) denkleminde (4.1) denklem sisteminin çözümleri,

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 - x + 0,5x^2 + e_1 x^3 \\
y_2(x) &= x + e_2 x^2 \\
y_3(x) &= 1 - 0,5x^2 + e_3 x^3
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak kabul edebiliriz. Benzer durumda (4.1) denkleminde (4.11) denklemi ve türevleri yerlerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned}
(0,166667 + e_2)x^3 + O(x^4) &= 0 \\
(1,5 + 6e_1 + 3e_2)x^2 + O(x^3) &= 0 \\
(1 + 3e_1 + 3e_2 - 3e_3)x^2 + O(x^3) &= 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

denklemlerini elde ederiz. (4.12) den,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,166667 \\ -1,5 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

lineer denklemini elde ederiz. Bu lineer denklem çözülürse,

$$e = \begin{pmatrix} -0,166667 \\ -0,166667 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 - x + 0,5x^2 - 0,166667x^3 \\
y_2(x) &= x - 0,166667x^3 \\
y_3(x) &= 1 - 0,5x^2
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olur. Yukarıdaki işlemleri tekrar edersek,

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 - x + 0,5x^2 - 0,166666667x^3 + 0,0416666667x^4 - 0,008333333333x^5 \\
&\quad + 0,001388888889x^6 - 0,0001984126984x^7 + 0,00002480158730x^8 \\
&\quad - 0,2755731922x^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x - 0,166666667x^3 + 0,008333333333x^5 - 0,0001984126984x^7 \\
&\quad + 0,2755731922 \times 10^{-5}x^9
\end{aligned}$$

$$y_3(x) = 1 - 0,5x^2 + 0,0416666667x^4 - 0,001388888889x^6 + 0,00002480158730x^8$$

dokuzuncu dereceden $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $y_3(x)$ kuvvet serileri elde edilir. Bu kuvvet serilerinde (2.51) değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
y_1^*(x) = & -x + 1.2660725912T_0(x) - 0.2659505209T_1(x) + 0.2714952257T_2(x) \\
& - 0.1347583913T_3(x) + 0.005474175348T_4(x) - 0.03929501487T_5(x) \\
& + 0.00004495287699T_6(x) - 0.009691220236T_7(x) \\
& + 0.0000001937624008T_8(x) - 0.001076457782T_9(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2^*(x) = & 1.1198988173T_1(x) - 0.03912669996T_3(x) + 0.0004995194692T_5(x) \\
& - 0.000003003317212T_7(x) + 0.00000001076457782T_9(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3^*(x) = & 0.7652045356T_0(x) - 0.2298068577T_2(x) + 0.004953342016T_4(x) \\
& - 0.00004185267829T_6(x) + 0.0000001937624008T_8(x)
\end{aligned}$$

şeklinde Chebyshev serileri elde edilir. Bu defa da $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ ve $y_3^*(x)$ Chebyshev serilerinde (2.49) değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
y_1^{**}(x) = & -0.9999999994x + 0.5437934028x^2 - 0.2104600700x^3 + 0.04166666667x^4 \\
& - 0.0083333337x^5 + 0.001388888889x^6 - 0.0001984127x^7 \\
& + 0.00002480158730x^8 - 0.2755731922x^9 + 1.000006781
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2^{**}(x) = & 0.9999999997x - 0.1666666667x^3 + 0.008333333333x^5 \\
& - 0.0001984126984x^7 + 0.000002755731922x^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3^{**}(x) = & 1.000006782 - 0.4603732640x^2 + 0.04166666667x^4 \\
& - 0.03962673613x^3 - 0.001388888880x^6 + 0.00002480158730x^8
\end{aligned}$$

şeklinde $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $y_3(x)$ denklemlerinin nümerik çözümleri elde edilir.

Tam çözümler ile nümerik çözümler aşağıdaki tablo ve şekillerde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.1. (4.1) deki $y_1(x)$ 'in nümerik çözümü

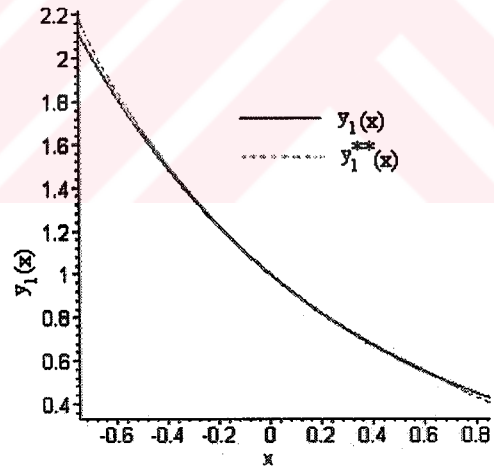
x	$y_1(x)$	$y_1^{**}(x)$	$ y_1(x) - y_1^{**}(x) $
0.1	0.9048374180	0.9052383394	0.0004009214
0.2	0.8187307531	0.8201387820	0.0014080289
0.3	0.7408182207	0.7435785621	0.0027603414
0.4	0.6703200460	0.6744587547	0.0041387087
0.5	0.6065306597	0.6114733925	0.0049427328
0.6	0.5488116361	0.5523475507	0.0035359146
0.7	0.4965853038	0.4919094469	0.0046758569
0.8	0.4496289641	0.4179548354	0.0313741287
0.9	0.4065696597	0.3033619843	0.1032076754
1.0	0.3678794412	0.0923155330	0.2755639082

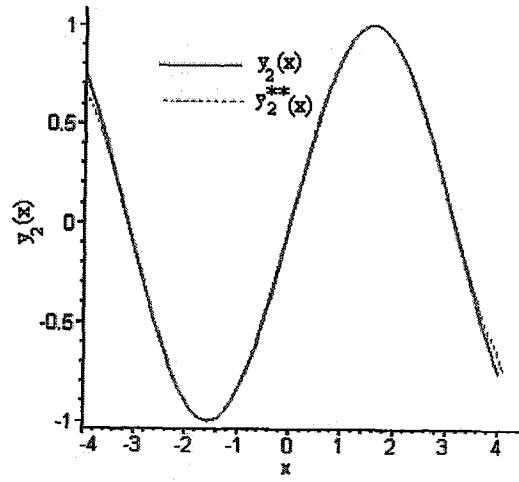
Çizelge 4.2. (4.1) deki $y_2(x)$ 'in nümerik çözümü

x	$y_2(x)$	$y_2^{**}(x)$	$ y_2(x) - y_2^{**}(x) $
0.1	0.09983341665	0.09983341661	0.00000000004
0.2	0.1986693308	0.1986693308	0.00000000000
0.3	0.2955202067	0.2955202066	0.00000000001
0.4	0.3894183423	0.3894183421	0.00000000002
0.5	0.4794255386	0.4794255385	0.00000000001
0.6	0.5646424734	0.5646424733	0.00000000001
0.7	0.6442176872	0.6442176875	0.00000000003
0.8	0.7173560909	0.7173560928	0.00000000019
0.9	0.7833269096	0.7833269171	0.00000000075
1.0	0.8414709848	0.8414710093	0.0000000245

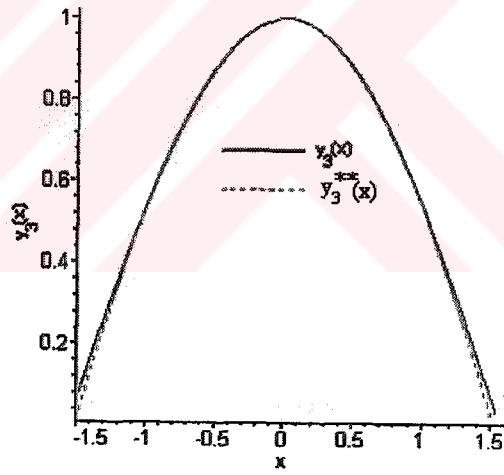
Çizelge 4.3. (4.1) deki $y_3(x)$ ' in nümerik çözümü

x	$y_3(x)$	$y_3^{**}(x)$	$ y_3(x) - y_3^{**}(x) $
0.1	0.9950041653	0.9953675880	0.0003634227
0.2	0.9800665778	0.9813414154	0.0012748376
0.3	0.9553364891	0.9578397554	0.0025032663
0.4	0.9210609940	0.9248719428	0.0038109488
0.5	0.8775825619	0.8825426862	0.0049601243
0.6	0.8253356149	0.8310486486	0.0057130337
0.7	0.7648421873	0.7706741072	0.0058319199
0.8	0.6967067093	0.7017857429	0.0050790336
0.9	0.6216099683	0.6248266114	0.0032166431
1.0	0.5403023059	0.5403093613	0.0000070554

Şekil 4.1. (4.1) deki $y_1(x)$ ' in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı



Şekil 4.2. (4.1) deki $y_2(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı



Şekil 4.3. (4.1) deki $y_3(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı

4.2. Test Problemi

Aşağıdaki başlangıç değerleri ile birlikte verilen diferensiyel-cebirsal denklem sistemini düşünelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v' + \begin{pmatrix} 1 & -(x+1) & (x^2+2x) \\ 0 & -1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin x \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Bu diferensiyel-cebirsal denklemin tam çözümü,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= e^{-x} + xe^x \\ v_2(x) &= e^x + x \sin x \\ v_3(x) &= \sin x \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklindedir. Burada,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Başlangıç değerlerinden (4.16) denkleminin çözümlerinin,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v_{0,1} + e_1 x = 1 + e_1 x \\ v_2(x) &= v_{0,2} + e_2 x = 1 + e_2 x \\ v_3(x) &= v_{0,3} + e_3 x = e_3 x \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (4.19) denklemini ve türevleri (4.16) denkleminde yerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} e_1 + O(x) &= 0 \\ -1 + e_2 + O(x) &= 0 \\ (-1 + e_3)x + O(x^2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklinde (3.8) formundaki denklem elde edilir. (3.9) ve (3.10) denklemlerine karşılık gelen lineer denklem,

$$Ae = B \quad (4.21)$$

şeklindedir. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

olur. (4.23) lineer denklem sistemi çözülürse,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 \\ v_2(x) &= 1 + x \\ v_3(x) &= x \end{aligned} \quad (4.25)$$

olur. (4.25) denkleminde (4.16) denklem sisteminin çözümleri,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 + e_1 x \\ v_2(x) &= 1 + x + e_2 x^2 \\ v_3(x) &= x + e_3 x^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

olarak kabul edilir. Benzer durumda (4.16) denkleminde (4.26) denklemini ve türevleri yerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} (-3 + 2e_1)x + O(x^2) &= 0 \\ (-3 + 2e_2)x + O(x^2) &= 0 \\ e_3 x^2 + O(x^3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

denklemleri elde edilir. (4.27) den,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

olur. Buradan,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

lineer denklemi elde edilir. Bu lineer denklem çözülürse,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 + 1,5x^2 \\ v_2(x) &= 1 + x + 1,5x^2 \\ v_3(x) &= x \end{aligned} \quad (4.31)$$

olur. (4.31) den (4.16) nın çözümleri,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 + 1,5x^2 + e_1x^3 \\ v_2(x) &= 1 + x + 1,5x^2 + e_2x^3 \\ v_3(x) &= x + e_3x^3 \end{aligned} \quad (4.32)$$

olarak kabul edilir. Bu ifade (4.16) da yerine yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} (-1 + 3e_1)x^2 + O(x^3) &= 0 \\ (-0,5 + 3e_2)x^2 + O(x^3) &= 0 \\ (0,1666667 + e_3)x^3 + O(x^4) &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

olur. Buradan,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -0,1666667 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -0,1666667 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

lineer denklemi elde edilir. Bu lineer denklem çözülürse,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,1666667 \\ -0,1666667 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

elde edilir. O halde (4.16) nın çözümü,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 + 1,5x^2 + 0,3x^3 \\ v_2(x) &= 1 + x + 1,5x^2 + 0,166667x^3 \\ v_3(x) &= x - 0,166667x^3 \end{aligned} \quad (4.37)$$

olur. Yukarıdaki işlemler tekrar edilirse,

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 + 1.500000000x^2 + 0.3333333333x^3 + 0.2083333333x^4 + 0.03333333333x^5 \\ &\quad + 0.009722222222x^6 + 0.001190476190x^7 + 0.0002232142857x^8 \\ &\quad + 0.00002204585538x^9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(x) &= 1 + x + 1.500000000x^2 + 0.1666666667x^3 - 0.1250000000x^4 \\ &\quad + 0.008333333333x^5 + 0.009722222222x^6 + 0.0001984126984x^7 \\ &\quad - 0.0001736111111x^8 + 0.000002755731922x^9 \end{aligned}$$

$$v_3(x) = x - 0,166667x^3 + 0,0083x^5 - 0,0001984x^7 + 0,2755731x10^{-2}x^9$$

dokuzuncu dereceden $v_1(x)$, $v_2(x)$ ve $v_3(x)$ kuvvet serileri elde edilir. Bu kuvvet serilerinde (2.51) değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} v_1^*(x) &= 1.831285264T_0(x) + 0.2714952257T_1(x) + 0.8588216145T_2(x) \\ &\quad + 0.09414785879T_3(x) + 0.02791341145T_4(x) + 0.00221664864T_5(x) \\ &\quad + 0.00031777033373T_6(x) + 0.00001937624007T_7(x) + 0.000001743861607T_8(x) \\ &\quad + 0.00000008611662258T_9(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2^*(x) = & x + 1.706068250T_0(x) + 0.1303181966T_1(x) + 0.6919813368T_2(x) \\
& + 0.04433684174T_3(x) - 0.01384006076T_4(x) + 0.0005429222470T_5(x) \\
& + 0.0002929687500T_6(x) - 0.000003197079612T_7(x) \\
& - 0.0000013563368005T_8(x) + 0.000000010764557782T_9(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3^*(x) = & 0.8814353110T_1(x) - 0.03823380077T_3(x) + 0.0008845746719T_5(x) \\
& + 0.00009378116797T_7(x) + 0.00001076457422T_9(x)
\end{aligned}$$

şeklinde Chebyshev serileri elde edilir. Buradan da $v_1^*(x)$, $v_2^*(x)$ ve $v_3^*(x)$ Chebyshev serilerinde (2.49) değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
v_1^{**}(x) = & 1.000061035 - 0.0000000001x + 1.72330729x^2 + 0.1100260417x^3 \\
& + 0.2083333333x^4 + 0.03333333331x^5 + 0.00972222219x^6 \\
& + 0.001190476189x^7 + 0.0002232142857x^8 + 0.00002204585538x^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2^{**}(x) = & 0.9999525269 + 0.9999999999x + 1.389279514x^2 + 0.2773871530x^3 \\
& - 0.1250000000x^4 + 0.008333333334x^5 + 0.009722222222x^6 \\
& + 0.0001984126984x^7 - 0.0001736111110x^8 + 0.000002755731922x^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3^{**}(x) = & 0.9999999997x - 0.1666667000x^3 + 0.008300000000x^5 \\
& - 0.000198400001x^7 + 0.002755731000x^9
\end{aligned}$$

şeklinde $v_1(x)$, $v_2(x)$ ve $v_3(x)$ denklemlerinin nümerik çözümleri elde edilir.

Tam çözümle nümerik çözümler aşağıdaki tablo ve şekillerde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.4. (4.16) daki $v_1(x)$ 'in nümerik çözümü

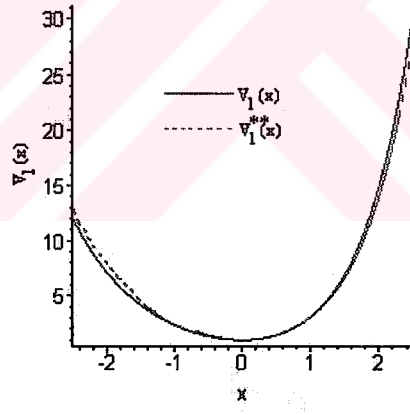
x	$v_1(x)$	$v_1^{**}(x)$	$ v_1(x) - v_1^{**}(x) $
0.1	1.015354510	1.017425310	0.002070800
0.2	1.063011305	1.070218173	0.007206868
0.3	1.145775863	1.159905257	0.014129394
0.4	1.267049925	1.288548460	0.021498535
0.5	1.430891295	1.458865738	0.027974443
0.6	1.642082916	1.674300182	0.032217266
0.7	1.906212199	1.939099314	0.032887115
0.8	2.229761706	2.258405725	0.028644019
0.9	2.620212460	2.638360240	0.018147780
1.0	3.086161269	3.086218992	0.000057723

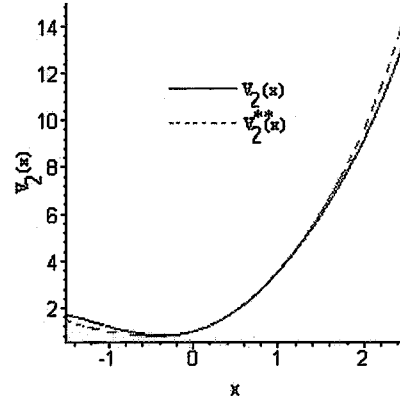
Çizelge 4.5. (4.16) daki $v_2(x)$ 'in nümerik çözümü

x	$v_2(x)$	$v_2^{**}(x)$	$ v_2(x) - v_2^{**}(x) $
0.1	1.115154260	1.114110302	0.001043958
0.2	1.261136624	1.257546096	0.003590528
0.3	1.438514870	1.431492006	0.007022864
0.4	1.647592035	1.636915394	0.010676641
0.5	1.888434040	1.874546503	0.013887537
0.6	2.160904284	2.144913043	0.015991241
0.7	2.464705088	2.448381618	0.016323470
0.8	2.799425801	2.785205780	0.014220021
0.9	3.164597330	3.155580439	0.009016891
1.0	3.559752813	3.559702307	0.000050506

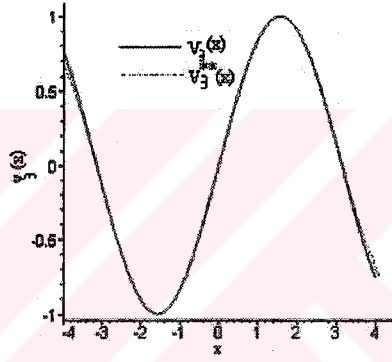
Çizelge 4.6. (4.16) daki $v_3(x)$ 'in nümerik çözümü

x	$v_3(x)$	$v_3^{**}(x)$	$ v_3(x) - v_3^{**}(x) $
0.1	0.09983341665	0.09983341625	0.00000000040
0.2	0.1986693308	0.19866932120	0.00000000960
0.3	0.2955202067	0.29552017880	0.00000002790
0.4	0.3894183423	0.38941872040	0.00000037810
0.5	0.4794255386	0.47942986960	0.00000433100
0.6	0.5646424734	0.56466761810	0.00002514470
0.7	0.6442176872	0.64432316730	0.00010548010
0.8	0.7173560909	0.71771465390	0.00035856300
0.9	0.7833269096	0.78437377500	0.00104686540
1.0	0.8414709848	0.84419063070	0.00271964590

**Şekil 4.4.** (4.16) daki $v_1(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı



Şekil 4.5. (4.16) daki $v_2(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı



Şekil 4.6. (4.16) daki $v_3(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı

4.3. Test Problemi

Aşağıdaki başlangıç değerleri ile birlikte verilen diferensiyel-cebirsal denklem sistemini düşünelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -(1+x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin x \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_1'(0) \\ z_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Bu diferensiyel-cebirsal denklemin tam çözümü,

$$\begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(-x)} + x \sin x \\ \sin x \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

şeklinde. Yukarıdaki metot kullanılırsa,

$$z_1(x) = 1 - x + 1.5x^2 - 0.1666667x^3 - 0.125x^4 - 0.00833333x^5 + 0.00138888x^6 \\ - 0.0001984x^7 - 0.0000128x^8 - 0.002755731x^9$$

$$z_2(x) = x - 0.1666667x^3 + 0.0083x^5 - 0.0001984x^7 + 0.002755731x^9$$

dokuzuncu dereceden $z_1(x)$ ve $z_2(x)$ kuvvet serileri elde edilir. Bu kuvvet serilerinde (2.51) değerleri yazılırsa,

$$z_1^*(x) = 1.7061157T_0(x) - 1.1303182T_1(x) + 0.69198133T_2(x) \\ - 0.44336842 \times 10^{-1}T_3(x) - 0.13840061 \times 10^{-1}T_4(x) - 0.54292224 \times 10^{-3}T_5(x) \\ + 0.29296875 \times 10^{-3}T_6(x) - 0.31970796 \times 10^{-5}T_7(x) - 0.13563368 \times 10^{-5}T_8(x) \\ - 0.10764578 \times 10^{-7}T_9(x)$$

$$z_2^*(x) = 0.88010118T_1(x) + 0.039126700T_3(x) + 0.00049951947T_5(x) \\ - 0.30033172 \times 10^{-5}T_7(x) + 0.10764578 \times 10^{-7}T_9(x)$$

şeklinde Chebyshev serileri elde edilir. Buradan da $z_1^*(x)$ ve $z_2^*(x)$ Chebyshev serilerinde (2.49) değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} z_1^{**}(x) = & 1.000000000 - 1.000000000x + 1.377060800x^2 - 0.04372750000x^3 \\ & - 0.1250000000x^4 - 0.008333300003x^5 + 0.001388800000x^6 \\ & - 0.000198399999x^7 - 0.00001280000000x^8 - 0.002755731000x^9 \end{aligned}$$

$$z_2^{**}(x) = x - 0,1666667x^3 + 0,0083x^5 - 0,0001984x^7 + 0,2755731x10^{-2}x^9$$

şeklinde $z_1(x)$ ve $z_2(x)$ denklemlerinin nümerik çözümleri elde edilir.

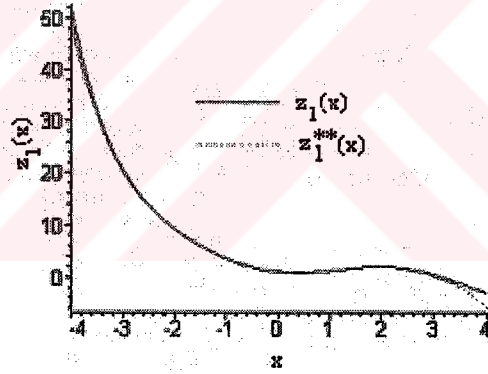
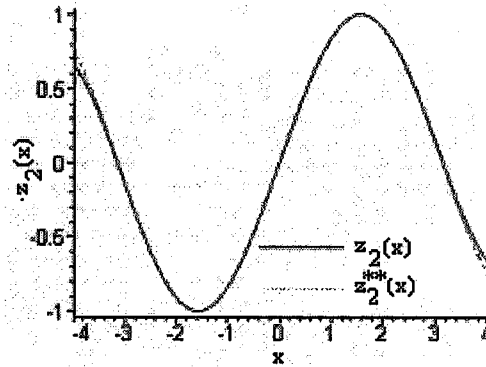
Tam çözümler ile nümerik çözümler aşağıdaki tablo ve şekillerde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.7. (4.38) deki $z_1(x)$ 'in nümerik çözümü

x	$z_1(x)$	$z_1^{**}(x)$	$ z_1(x) - z_1^{**}(x) $
0.1	0.91482076	0.91482070	0.00000006
0.2	0.85846462	0.85846456	0.00000006
0.3	0.82947428	0.82947423	0.00000005
0.4	0.82608739	0.82608732	0.00000007
0.5	0.84624343	0.84624335	0.00000008
0.6	0.88759712	0.88759704	0.00000008
0.7	0.94753768	0.94753750	0.00000018
0.8	1.02321380	1.02321340	0.00000040
0.9	1.11156390	1.11156280	0.00000110
1.0	1.20935040	1.20934900	0.00000140

Çizelge 4.8. (4.38) deki $z_2(x)$ 'in nümerik çözümü

x	$z_2(x)$	$z_2^{**}(x)$	$ z_2(x) - z_2^{**}(x) $
0.1	0.099833417	0.099833416	0.000000001
0.2	0.198669330	0.198669340	0.000000010
0.3	0.295520210	0.295520210	0.000000000
0.4	0.389418340	0.389418330	0.000000010
0.5	0.479425540	0.479425550	0.000000010
0.6	0.564642470	0.564642480	0.000000010
0.7	0.644217690	0.644217680	0.000000010
0.8	0.717356090	0.717356090	0.000000000
0.9	0.783326910	0.783326920	0.000000010
1.0	0.841470984	0.841470969	0.000000015

**Şekil 4.7.** (4.38) deki $z_1(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı**Şekil 4.8.** (4.38) deki $z_2(x)$ 'in grafiği ve Chebyshev yaklaşımı

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada sunulan nümerik metot, diferensiyel-cebırsel denklemlerin nümerik çözümleri için etkili bir metottur. Metot test problemlerine uygulandı.

Problemlerde tam çözümlerle, metotla elde edilen nümerik çözümler tablolar ve şekiller üzerinde karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma sonucunda tam çözümlerle nümerik çözümlerin uyumlu olduğu anlaşıldı.



KAYNAKLAR

- Ascher, U. M., Petzold L. R., 1998. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential- Algebraic Equations. SIAM J. Philadelphia: society for industrial and Applied Mathematics, 1998.
- Brenan, K. E., Campbell, S. L., Petzold, L. R., 1989. Numerical solution of Initial-value problems in Differential- Algebraic Equations, Nort-Holland, Amsterdam.
- Campbell, S. L., and Zhong, Y., 1992.1. Jacobian reuse in explicit integrators for higher index DAEs. Applied Numerical Mathematics. 25, 391-412.
- Clenshaw, C. W., (1956). The Numerical Solution of Linear Differential Equations in Chebyshev Series. Proc. Camb. Phil. Soc. 53, 134-149.
- Clenshaw, C. W., (1962). Chebyshev Series for Mathematical Functions. National Physical Laboratory (Mathematical Tables). 5, 1-15.
- Çelik, E., Karaduman, E. and Bayram, M., 2002. A Numerical Method to Solve Chemical Differential-Algebraic Equations. International Journal of Quantum Chemistry 89, 447-451.
- Çelik, E., and Bayram, M., 2003. Arbitrary Order Numerical Method for Solving Differential- Algebraic Equations by Padé Series. Applied Mathematics and Computation 137, 57-65.
- Çelik, E., and Bayram, M., 2003. On The Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations by Padé Series. Applied Mathematics and Computation 89, 447-451.
- Fox, L., Parker, I. B., 1972. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Pres, Ely House, London.
- Gear, C. W., 1971. The Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations. IEEE Trans. Circuit Theory, CT-18, 89-92.
- Hairer, E., Lubich, C. and Roche, M., 1989. The Numerical Solution of differential-algebraic systems by Runge-Kutta methods, Lecture Notes in Math. Vol. 1409, Springer, New York.
- Hairer, E., Wanner, G., 1991. Solving ordinary differential equations II: stiff and differential-algebraic problems, Springer-Verlang.
- Mason, J. C., (1967). Chebyshev Polynomial Approximations for the L-membrane Eigenvalue Problem. SIAM J. Appl. Math. 15, 1, 172-186.
- Müller, P. C., 2000. Descriptor systems: pros and cons of system modelling by differential- algebraic equations. Mathematics Computers in Simulation. 53, 273-279.
- Pierluigi, A., and Mazzia, F., 1992.1. Numerical solution of differential- algebraic equations and computation of consistent initial/boundary conditions. Journal of Computational and Applied Mathematics. 87, 135-142.
- Wang, F. S., 2000. A Modified Collocation Method For Solving Differential-Algebraic Equations. Applied Mathematics and Computation. 116, 257-278.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Sinop'un Erfelek ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erfelek'te tamamladı. 1995 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girerek 1999'da mezun oldu. 1999 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı. 1999-2003 yılları arasında Erzurum ilinin Karayazı ilçesinde ve Erzurum Merkez Dereboğazı Köyü'nde matematik öğretmeni olarak görev yaptı.

2003 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.