



**ALTERNE NOKTALAR VE PARALEL
ALGORİTMALAR ÜZERİNE**

Yasin Berkay CAN

Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2026

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ALTERNE NOKTALAR VE PARALEL ALGORİTMALAR ÜZERİNE
(On Alternating Points and Parallel Algorithms)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yasin Berkay CAN

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Erzurum
Ocak, 2026

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Yasin Berkay Can tarafından hazırlanan “Alterne Noktalar ve Paralel Algoritmalar Üzerine” başlıklı çalışması .. / .. / 20.. tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR
Erzurum Teknik Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM
Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Nazlı Kadioğlu KARACA
Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Alper NUHOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Prof. Dr. İsa YILDIRIM danışmanlığında sunulan “Alterne Noktalar ve Paralel Algoritmalar Üzerine” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	0	30
Kuramsal Temeller	21	30
Materyal ve Metot	22	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	20	20
Sonuçlar	0	20
Tezin Geneli	24	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Yasin Berkay CAN	Prof. Dr. İsa YILDIRIM
16.1.2026	16.1.2026
İmza:	İmza:

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunulan bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Lisansüstü eğitimim boyunca bilgi birikimi, sabrı ve samimiyetiyle yolumu aydınlatarak desteğini, emeğini ve güvenini hiçbir zaman esirgemeyen, öğrencisi olmaktan büyük gurur duyduğum kıymetli danışmanım Sayın Prof. Dr. İsa YILDIRIM'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan, her koşulda destekleyen ve sabır ile anlayışlarıyla daima güç veren aileme teşekkür ederim.

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na yüksek lisans öğrenimim boyunca TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ile desteğinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Yasin Berkay CAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALTERNE NOKTALAR VE PARALEL ALGORİTMALAR ÜZERİNE

Yasin Berkay CAN

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Amaç: Bu çalışmada, tek değerli ve çok değerli dönüşümlerin alterne noktaları için yeni paralel algoritma metotlarının tanımlanması ve bu metotlar kullanılarak bazı yakınsama sonuçlarının elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Yöntem: Tezdeki teoremler, matematiksel yöntemler ve lemmalar yardımı ile ispatlanmıştır.

Bulgular: Bu tez kapsamında paralel algoritma metotları incelenmiş ve yeni paralel algoritma metotları tanımlanmıştır. Tanımlanan yeni paralel algoritma metotları ile elde edilen dizilerin uygun şartlar altında yakınsama analizleri incelenmiş ve bunların veri bağımlılığı araştırılmıştır. Ayrıca bu algoritmaların lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik problemlerinin çözümüne uygulanabilir olduğu gösterilmiştir. Son olarak çok değerli dönüşümlerin alterne noktaları için tanımlanan paralel algoritmaların güçlü ve zayıf yakınsaması ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

Sonuç: Alterne noktalar için yeni algoritma yöntemleri sunulmuş, bu yöntemlerin uygun varsayımlar altında yakınsama analizleri incelenmiş ve bazı uygulamalarına yer verilmiştir. Elde edilen sonuçlar dikkate alınarak bu çalışmanın farklı hangi tür çalışmalara yol gösterebileceği belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: sabit nokta, alterne nokta, paralel algoritma yöntemleri, varyasyonel eşitsizlik problemleri

Ocak 2026, 70 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS ON ALTERNATING POINTS AND PARALLEL ALGORITHMS

Yasin Berkay CAN

Supervisor: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Purpose: This study it is aimed to define new parallel algorithm methods for the alternating points of single-valued and multivalued mappings and to obtain some convergence results by using these methods.

Method: The theorems in this thesis have been proven using mathematical methods and lemmas.

Findings: Within the scope of this thesis, parallel algorithm methods are examined and new parallel algorithm methods are defined. For the sequences obtained by the newly defined parallel algorithm methods, convergence analyses under appropriate conditions are investigated and their data dependence is studied. In addition, it is shown that these algorithms are applicable to the solution of nonlinear variational inequality problems. Finally, theorems concerning the strong and weak convergence of the parallel algorithms defined for the alternating points of multivalued mappings are proved.

Results: New algorithmic methods for alternating points are presented, the convergence analyses of these methods under suitable assumptions are examined, and some of their applications are included. Taking into account the results obtained, it is indicated what different types of studies this work may guide in the future.

Keywords: fixed point, altering points, parallel iteration methods, variational inequality problems

January 2026, 70 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	4
Bazı Uzay Sınıfları.....	4
Sabit Nokta, Ortak Sabit Nokta, Çift Sabit Nokta ve Alterne Nokta Kavramı.....	5
Temel dönüşüm sınıfları	11
Metrik Projeksiyonu ve Varyasyonel Eşitsizlikler.....	14
MATERYAL ve YÖNTEM	18
Sabit Nokta İle İlgili Teoremler	18
Alterne Nokta İle İlgili Teoremler	23
Varyasyonel Eşitsizlikler İle İlgili Teoremler.....	32
ARAŞTIRMA BULGULARI	35
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR.....	56
ÖZGEÇMİŞ.....	59

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Sabit Nokta ve Alterne Noktalar Arasındaki Özel Durumlar.....	11
---	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. T_1 ve T_2 dönüşümlerin alterne noktaları	9
Şekil 2. Dönüşümler arasındaki bağlantı.....	12
Şekil 3. Metrik projeksiyon	14



SİMGELER DİZİNİ

$\emptyset$	Boş küme
$\forall$	Her
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\ \cdot \ $	Norm
$(X, \ \cdot \)$	Normlu uzay
$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	İç çarpım uzayı
(X, d)	Metrik uzay
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalar kümesi
$x_n \rightarrow x$	Kuvvetli yakınsama
$x_n \rightharpoonup x$	Zayıf yakınsama
$VI(C, A)$	Varyasyonel eşitsizlikler
P_C	Metrik izdüşüm operatörü
$x_n = o(y_n)$	Sonsuz küçük
∇f	Gradyen f
$\ \cdot \ _\Lambda$	Λ üzerindeki norm

GİRİŞ

20. yüzyılın başlarına dayanan sabit noktanın tanımından ve buna dair teorilerden hareketle ortak sabit nokta, çift sabit nokta ve alterne nokta gibi pek çok tanım verilerek bunlarla ilgili farklı yazarlar tarafından çalışmalar yapılmıştır. Sabit nokta problemlerinin çok değişkenli ve birden fazla küme yapıları altında ele alınması Bhaskar ve Lakshmikantham'ın kısmi sıralı metrik uzaylarda çift sabit nokta (coupled fixed point) kavramını tanıtmalarıyla yeni bir boyut kazanmıştır (Bhaskar ve Lakshmikantham, 2006). Bu çalışmaların devamında, iki veya daha fazla küme arasında tanımlı dönüşümlerin ardışık etkileşimini inceleyen alterne nokta kavramı gelişmiş; özellikle Sahu (2014), Lipschitz dönüşümler altında paralel S-algoritmasının yakınsamasını ispatlayarak teorik bir standart oluşturmuştur. Bu alterne nokta genel olarak; $\Lambda \neq \emptyset$, C_1 ve C_2 , Λ in boştan farklı alt kümeleri olsun. $T_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $T_2: C_2 \rightarrow C_1$ dönüşümleri verilsin. Eğer

$$\begin{cases} T_1(\omega_1^*) = \omega_2^* \\ T_2(\omega_2^*) = \omega_1^* \end{cases}$$

denklem sistemini sağlayan $\omega_1^* \in C_1$ ve $\omega_2^* \in C_2$ noktaları şeklinde ifade edilir.

2007 yılında Agarwal ve arkadaşları tarafından tanıtılan S-algoritma metodunun (Agarwal et al. 2007), daraltan operatörün sabit noktasını bulmak için Picard, Mann ve Ishikawa algoritma metotlarından daha hızlı bir yöntem olduğu ispatlanmıştır. Hızlı yakınsama özelliğinden dolayı, S-algoritma metodu çeşitli lineer olmayan problemleri çözmek için bir alternatif algoritma metodu olarak birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Sahu, S-algoritması fikrinden yola çıkarak, T_1 ve T_2 dönüşümlerinin alterne noktalarını bulmak için bir paralel S-algoritmasını tanıtmıştır (Sahu 2014). Onun bu çalışması, özellikle optimizasyon, sabit nokta teorisi ve denge problemleri gibi çeşitli matematiksel ve uygulamalı alanlarda alterne noktaların nasıl kullanılabileceğine dair analizler sunmaktadır. Bu yaklaşımı hem teorik hem de uygulamalı problemlerin çözümünde alterne noktalarla ilgili yeni perspektifler ortaya koymuştur.

Verma, Shukla ve aynı yıl Shin Min K. ve arkadaşları (2017) S-algoritma metoduna dayalı yeni algoritmalar önererek doğrusal olmayan dönüşümlerin alterne noktalarına yakınsama özelliklerini araştırmışlardır. Sintunavarat ve Pitea (2016), yeni bir algoritma geliştirerek yakınsama analizleri yapmışlardır. 2022'de Khan ve arkadaşları alterne noktaların yaklaşık çözümlerini elde etmeye yönelik yeni bir algoritma önermiştir.

2022 yılında Maldar tarafından yeni paralel algoritmalar tanımlanmış, alterne noktaya sahip dönüşümler için bu algoritmaların güçlü yakınsaması incelenmiş ve nümerik örnekler üzerinde mevcut algoritmalara kıyasla daha iyi bir yakınsama davranışı sergiledikleri gözlemlenmiştir. Ayrıca bu algoritmaların veri bağımlılığı kavramı bu çalışmada ilk kez ele alınmıştır. 2023 yılında ise Atalan tasarladığı yeni bir paralel algoritma ile alandaki gelişmelere katkıda bulunmuştur.

Diğer yandan, optimizasyon, denge, sabit nokta ve denklem sistemlerinin çözümleri ile yakından ilişkili olan varyasyonel eşitsizlik problemleri Lions ve Stampacchia (1967) tarafından tanımlanmış ve analiz edilmiştir. Bu çalışmaların ardından Kinderlehrer (1980), Zeidler (1986) gibi birçok araştırmacı, varyasyonel eşitsizliklerin teorik ve uygulamalı yönlerini geliştirmişlerdir. Zamanla bu teori Hilbert uzaylarının ötesine taşınarak Banach uzaylarında tanımlı problemlere genişletilmiş. Özellikle Lipschitz sürekli operatörler için varlık, teklik ve yakınsama sonuçları elde edilmiştir.

2017 yılından Sahu, Kang ve Kumar, genelleştirilmiş varyasyonel eşitsizlik sisteminin çözümünü bulmak amacıyla paralel Mann ve paralel S-algoritmalarını ele almış ve bu algoritmalar tarafından üretilen dizilerin güçlü yakınsamasını tartışmışlardır. Sayısal bir örnek de vererek önerilen paralel S-algoritmasının, paralel Mann algoritmasına göre üstünlük sağladığını göstermişlerdir.

2018 yılında, Zhao, Sahu ve Wen tarafından varyasyonel eşitsizlik sistemleriyle ilişkilendirilmiş ve belirli izdüşüm yöntemleri altında bu sistemlerin alterne nokta problemine indirgenebileceği ispatlanmıştır. Böylece bu yazarlar alterne noktalar, çok değişkenli fonksiyonlar ve varyasyonel eşitsizlikler arasındaki yapısal bağı açık biçimde ortaya koymuş; bu üç teoremin ortak bir algoritmik ve kuramsal çerçevede ele alınabileceğini kanıtlamışlardır. 2022 yılında Maldar, uygun şartlar altında yeni tanımladığı paralel algoritmaları kullanarak bir varyasyonel eşitsizlik sisteminin çözümünün elde edileceğini ispatlamıştır.

Çok değerli dönüşümler (multivalued mappings); sabit nokta teorisi, kontrol teorisi, optimizasyon, ekonomi ve diferansiyel içermeler (differential inclusions) gibi geniş bir uygulama yelpazesine sahip, matematiğin temel dallarından biridir. Bu alandaki çalışmalar tarihsel olarak Kakutani (1941)'nin, Brouwer Sabit Nokta Teoremi'ni çok değerli dönüşümler için genelleştirmesiyle başlamıştır. Kakutani'nin bu çalışması, çok değerli dönüşümler kuramının gelişmesinin temelini atmıştır. 1969 yılında Nadler, Hausdorff metriğini kullanarak Banach'ın klasik daralma ilkesini çok değerli dönüşümlere başarılı bir şekilde uyarlamıştır. Nadler'in ortaya koyduğu bu yaklaşım Assad ve Kirk (1972), Markin (1978) ve Reich (1979) gibi araştırmacılar tarafından geliştirilerek daralma tipi çok değerli dönüşümler üzerine

kapsamlı çalışmalar yapmışlardır. Öte yandan Ekeland ve Temam (1976), çok değişkenli fonksiyonları varyasyonel eşitsizlik ve denge problemleriyle üzerine çalışmalar yapmış, Aubin ve Frankowska (1990) ise çok değişkenli ve çok değerli fonksiyonları birlikte ele alarak daha güçlü bir kuramsal çerçeve sunmuştur. Bu çalışmalar, çok değişkenli fonksiyonların hem teorik analizde hem de optimizasyon, varyasyonel eşitsizlikler ve denge problemlerindeki merkezi rolünü açıkça ortaya koymaktadır.

Çok değerli dönüşümlerden hareketle, Sahu tarafından 2014 yılında ifade edilen alterne nokta kavramı 2020 yılında Petruşel, Petruşel ve Yao tarafından bu dönüşümlere aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir ve tam metrik uzaylarda bunlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Λ_1 ve Λ_2 iki metrik uzay, $\mathcal{T}: \Lambda_1 \rightarrow 2^{\Lambda_2}$ ve $\mathcal{S}: \Lambda_2 \rightarrow 2^{\Lambda_1}$ çok değerli dönüşümler olsun. Eğer

$$\begin{cases} \omega_1^* \in \mathcal{S}(\omega_2^*) \\ \omega_2^* \in \mathcal{T}(\omega_1^*) \end{cases}$$

şartı sağlanıyorsa $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ çiftine çok değerli $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}$ dönüşümlerinin alterne noktası denir (Petruşel et al. 2020).

Yukarıda özetlenen çalışmalardan yola çıkarak bu tez çalışmasında bulgular kısmında elde edilen sonuçları üç bölümde toplayacak olursak;

Birinci bölümde; $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktalar için yeni bir paralel algoritma tanımlanarak güçlü yakınsama teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca ikiden fazla dönüşüm için yani $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ dönüşümleri için paralel bir algoritma tarafından elde edilen dizinin yakınsaklığı ve veri bağımlılığı incelenmiştir.

İkinci bölümde; birinci bölümde oluşturulan paralel algoritmalar kullanılarak uygun şartlar altında varyasyonel eşitsizlik probleminin çözümü incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise çok değerli dönüşümlerin alterne noktaları için literatürde ilk defa paralel bir algoritma oluşturularak elde edilen dizinin güçlü ve zayıf yakınsaması ile ilgili temel lemmalar ve teoremler ispatlanmıştır.

KURAMSAL TEMELLER

Bu başlıkta ilk olarak bazı temel uzay tanımları verilecek olup sabit nokta, ortak sabit nokta, çift sabit nokta, alterne nokta ve bazı temel dönüşüm sınıfları tanıtılacaktır. Daha sonra temel sabit nokta teoremleri ifade edilecek ve projeksiyon metodu ile varyasyonel eşitsizlik problemleri tanıtılacaktır.

Bazı Uzay Sınıfları

Bu başlıkta ilk olarak çalışmalarımızda kullanacağımız bazı temel uzay tanımlarına yer verilecektir.

Tanım 1: $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\zeta: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Lambda$ için

- i. $\zeta(\omega_1, \omega_2) = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2$
- ii. $\zeta(\omega_1, \omega_2) = \zeta(\omega_2, \omega_1)$
- iii. $\zeta(\omega_1, \omega_2) \leq \zeta(\omega_1, \omega_3) + \zeta(\omega_3, \omega_2)$

şartları sağlanıyorsa ζ ye Λ üzerinde bir metrik ve $\Lambda = (\Lambda, \zeta)$ ye de metrik uzay denir (Berinde 2007).

Tanım 2: Bir Λ metrik uzayının kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi $CB(\Lambda)$ ile gösterilsin. Her $M, N \in CB(\Lambda)$ için Λ üzerindeki Λ metriği tarafından üretilen Hausdorff metriği

$$H(M, N) = \max\{\sup_{\omega_1 \in M} \zeta(\omega_1, N), \sup_{\omega_2 \in N} \zeta(\omega_2, M)\}$$

şeklindedir. Burada $\zeta(\omega_1, N) = \inf_{\omega_2 \in N} \zeta(\omega_1, \omega_2)$ bir noktanın bir kümeye olan uzaklığıdır (Huttenlocher et al. 2002).

Hausdorff metriği, metrik aksiyomlarını sağlar. Dolayısıyla bir metrik uzaydır. Eğer tanımda geçen kümeler kapalı ve sınırlı değilse bazı supremum ve infimum ifadeler sonsuz olabileceği için metrik aksiyomları sağlanmaz. Bu durumda Hausdorff metriği genişletilmiş metrik olabilir.

Örnek 1: $(\mathbb{R}, \zeta)$ alışılmış metriğini alalım. $\mathbb{R}$ nin kapalı ve sınırlı alt kümeleri olan $M = [1, 2]$ ve $N = [2, 3]$ verilsin. Hausdorff uzaklığı

$$\sup_{\omega_1 \in M} \zeta(\omega_1, N) = \sup_{\omega_1 \in [1, 2]} |\omega_1 - 2| = 1,$$

$$\sup_{\omega_2 \in N} \zeta(\omega_2, M) = \sup_{\omega_2 \in [2, 3]} |\omega_2 - 2| = 1,$$

olduğundan

$$H(M, N) = \max\{1, 1\} = 1$$

dir.

Tanım 3: Λ bir vektör uzay olsun ve $\Delta: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda$ ve her $\theta \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

- i. $\Delta(\omega_1) = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 0$,
- ii. $\Delta(\theta\omega_1) = |\theta|\Delta(\omega_1)$,
- iii. $\Delta(\omega_1 + \omega_2) \leq \Delta(\omega_1) + \Delta(\omega_2)$.

Bu taktirde Δ dönüşümüne norm denir ve özel olarak $\Delta(\omega_1) = \|\omega_1\|$ şeklinde gösterilir. $(\Lambda, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Berinde 2007).

Tanım 4: Λ normlu lineer uzayında alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsıyorsa yani Λ uzayı tam ise Banach uzayı olarak adlandırılır (Berinde 2007).

Tanım 5: F bir cisim ve Λ da bir vektör uzayı olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle: \Lambda \times \Lambda \rightarrow F$ dönüşümü her $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Lambda$ ve $\delta \in F$ için

- i. $\langle \omega_1, \omega_1 \rangle \geq 0$, $\langle \omega_1, \omega_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \theta$
- ii. $\langle \omega_1 + \omega_2, \omega_3 \rangle = \langle \omega_1, \omega_3 \rangle + \langle \omega_2, \omega_3 \rangle$
- iii. $\langle \delta\omega_1, \omega_2 \rangle = \delta\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$
- iv. $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \overline{\langle \omega_2, \omega_1 \rangle}$

şartlarını sağlıyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne iç çarpım, $(\Lambda, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümü ile verilen bir Λ lineer uzayı, iç çarpım normu tarafından üretilen $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ normuna göre tam ise bu uzaya Hilbert uzayı denir. Her $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda$ için

$$\|\omega_1 + \omega_2\|^2 = \|\omega_1\|^2 + \|\omega_2\|^2 + 2\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$$

$$\|\omega_1 - \omega_2\|^2 = \|\omega_1\|^2 + \|\omega_2\|^2 - 2\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$$

ve

$$\langle \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2 \rangle = \|\omega_1\|^2 - \|\omega_2\|^2$$

eşitlikleri sağlanır (Soykan 2008).

Sabit Nokta, Ortak Sabit Nokta, Çift Sabit Nokta ve Alterne Nokta Kavramı

Tanım 6: $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüme tek değerli (single-valued) dönüşüm denir. Aksi belirtilmedikçe dönüşümler tek değerli olarak kabul edilecektir. $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow 2^\Lambda$ şeklinde tanımlanan dönüşüm ise çok değerli (multi-valued) dönüşüm olarak adlandırılır. Yani bir noktanın $\mathcal{T}$ altındaki görüntüsü, kümeye karşılık gelir.

Örnek 2: $\Lambda = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{T}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{T}\omega = \omega^2 + 2\omega$ dönüşümü tek değerli bir dönüşüm iken $\mathcal{T}: \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ dönüşümü

$$\mathcal{T}\omega = \begin{cases} \left[0, \frac{\omega}{2}\right], \omega > 0 \\ \{1, 2\}, \omega < 0 \end{cases}$$

çok değerli bir dönüşümdür.

Tanım 7: $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü verilsin. $\omega = \mathcal{T}(\omega)$ eşitliğini sağlayan $\omega \in \Lambda$ noktasına $\mathcal{T}$ nin sabit noktası denir ve $F(\mathcal{T})$ kümesi ile $\mathcal{T}$ nin sabit noktaları gösterilir (Agarwal et al. 2007).

Örnek 3: $\Lambda = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$, $\mathcal{T}\omega = 8 - \omega$ olsun. $\mathcal{T}\omega = \omega$ yani $8 - \omega = \omega$ dan bu dönüşümün sabit noktası $\omega = 4$ tür.

Örnek 4: $\Lambda = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olmak üzere $\mathcal{T}(\omega) = \frac{1}{\omega}$ dönüşümü için

$$\mathcal{T}(\omega) = \omega \Rightarrow \frac{1}{\omega} = \omega \Rightarrow \omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \mp 1$$

bulunur ve $F(\mathcal{T}) = \{-1, 1\}$ ile gösterilir.

Örnek 5: $\Lambda = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olmak üzere $\mathcal{T}(\omega) = \omega^3 - 3\omega$ dönüşümü için

$$\mathcal{T}(\omega) = \omega \Rightarrow \omega^3 - 3\omega = \omega \Rightarrow \omega^3 - 4\omega = 0 \Rightarrow \omega = 0 \text{ ve } \omega = \mp 2$$

bulunur ve $F(\mathcal{T}) = \{-2, 0, 2\}$ ile gösterilir.

Tanım 8: $\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ ve $\mathcal{S}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümleri verilsin. Eğer $\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{S}(\omega) = \omega$ olacak şekilde bir $\omega \in \Lambda$ noktası varsa bu ω noktasına $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}$ nin ortak sabit noktası (common fixed point) denir. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}$ nin bütün ortak sabit noktalarının kümesi $F(\mathcal{T}) \cap F(\mathcal{S})$ ile gösterilir (Agarwal et al. 2007).

Örnek 6: $\Lambda = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{T}, \mathcal{S}: \Lambda \rightarrow \Lambda$, $\mathcal{T}\omega = \omega^2 - 4\omega + 6$ ve $\mathcal{S}\omega = 2\omega - 3$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{T}(\omega) = \omega \Rightarrow \omega^2 - 4\omega + 6 = \omega \Rightarrow \omega^2 - 5\omega + 6 = 0 \Rightarrow \omega = 2, \omega = 3$$

$$\mathcal{S}(\omega) = \omega \Rightarrow 2\omega - 3 = \omega \Rightarrow \omega = 3$$

bulunur yani $F(\mathcal{T}) \cap F(\mathcal{S}) = \{3\}$ dür.

Tanım 9: $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\mathcal{T}: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü verilsin. Eğer

$$\mathcal{T}(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \text{ ve } \mathcal{T}(\omega_2, \omega_1) = \omega_2$$

olacak şekilde bir $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda \times \Lambda$ çifti varsa bu (ω_1, ω_2) noktası $\mathcal{T}$ dönüşümünün çift sabit noktası (coupled fixed point) olarak adlandırılır (Bhaskar 2006).

Örnek 7: $\mathcal{T}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{T}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\omega_1^2 + 3\omega_2}{3}$ dönüşümü verilsin. Buradan

$$\frac{\omega_1^2 + 3\omega_2}{3} = \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 - \frac{\omega_1^2}{3}$$

ve

$$\frac{\omega_2^2 + 3\omega_1}{3} = \omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 - \frac{\omega_2^2}{3}$$

denklemleri elde edilir. Yukarıdaki 1. denklemdeki ω_2 yi, 2. denklemde yerine yazarsak

$$\omega_1 = \omega_1 - \frac{\omega_1^2}{3} - \frac{\left(\omega_1 - \frac{\omega_1^2}{3}\right)^2}{3}$$

elde edilir. Bu denklem sadeleştirilirse

$$\left(\omega_1 - \frac{\omega_1^2}{3}\right)^2 = \omega_1^2 - 2\frac{\omega_1^3}{3} + \frac{\omega_1^4}{9}$$

olur. Buradan

$$\omega_1 = \omega_1 - \frac{\omega_1^2}{3} - \frac{1}{3}\left(\omega_1^2 - 2\frac{\omega_1^3}{3} + \frac{\omega_1^4}{9}\right)$$

ve

$$-\frac{\omega_1^2}{3} - \frac{\omega_1^2}{3} + 2\frac{\omega_1^3}{9} - \frac{\omega_1^4}{27} = 0$$

yazılır. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$-\omega_1^4 + 6\omega_1^3 - 18\omega_1^2 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $(\omega_1, \omega_2) = (0,0)$ noktası bu dönüşümün çift sabit noktasıdır.

Tanım 10: $\Lambda \neq \emptyset$, C_1 ve C_2 , Λ in boştan farklı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ dönüşümleri verilsin. Eğer

$$\begin{cases} \mathcal{T}_1(\omega_1^*) = \omega_2^* \\ \mathcal{T}_2(\omega_2^*) = \omega_1^* \end{cases}$$

denklem sistemini sağlayan $\omega_1^* \in C_1$ ve $\omega_2^* \in C_2$ noktaları varsa bu noktalara sırasıyla $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktaları denir.

$T_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $T_2: C_2 \rightarrow C_1$ dönüşümleri için alterne noktalar kümesi $Alt(T_1, T_2)$ olarak gösterilir. Yani

$$Alt(T_1, T_2) = \{(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2 : T_1(\omega_1^*) = \omega_2^* \text{ ve } T_2(\omega_2^*) = \omega_1^*\} \quad (1)$$

dır (Sahu 2014).

Örnek 8: Aşağıdaki denklem sistemini ele alalım.

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 3 \\ \omega_1 - \omega_2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

(2) deki denklemlerin belirttiği doğruların kesişme noktası olan (ω_1^*, ω_2^*) çözümünü (1) de verilen şekilde bulabiliriz. Burada geçen denklemleri

$$T_1(\omega_1) = 3 - \omega_1 \text{ ve } T_2(\omega_2) = 1 + \omega_2$$

dönüşümleriyle temsil edebiliriz. Bu dönüşümlerin alterne noktaları

$$T_1(\omega_1) = \omega_2 \Rightarrow 3 - \omega_1 = \omega_2$$

$$T_2(\omega_2) = \omega_1 \Rightarrow 1 + \omega_2 = \omega_1$$

denklemler sisteminin çözümünden (2,1) olarak elde edilir. Ayrıca (2) denklem sisteminde yer alan doğruların kesişme noktası olan (2,1), T_1 ve T_2 dönüşümlerinin alterne noktalarına karşılık gelir.

Örnek 9: $\Lambda = [0,1]$, $C_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $C_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ ve $T_1, T_2: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümlerini $\omega \in \Lambda$ ve $i = 1,2$ için $T_i \omega = 1 - \omega$ olarak tanımlayalım. $T_2 T_1: C_1 \rightarrow C_1$ dönüşümü $T_2 T_1 \omega = T_2(1 - \omega) = \omega$ olarak tanımlansın. Bu durumda, C_1 in her noktası $T_2 T_1$ in sabit noktasıdır. Eğer $\omega_1^* \in C_1$ ve $\omega_2^* \in C_2$ alterne noktalar ise, bu durumda $\omega_1^* + \omega_2^* = 1$ dir. Gerçekten de

$$Alt(T_1, T_2) = \{(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2 : \omega_1^* + \omega_2^* = 1\}$$

dir (Sahu 2014).

Sonuç: Örnek 9 dan $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in Alt(T_1, T_2)$ noktasının her zaman $\omega_2 = 1 - \omega_1$, $\omega_1 \in [0, 1/2]$ ve $\omega_2 = 1 - \omega_1$, $\omega_1 \in [1/2, 1]$ doğru parçalarının kesişme noktası olmadığı sonucuna varılır. Örneğin $\omega_1^* = 0$ ve $\omega_2^* = 1$, T_1 ve T_2 nin alterne noktaları olmasına rağmen bunlara karşılık gelen doğruların kesişim noktası değildir.

Örnek 10: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{R}^+$ ve $T_1: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2, T_2: \Lambda_2 \rightarrow \Lambda_1$ dönüşümleri $T_1(\omega_1) = e^{\omega_1}$ ve $T_2(\omega_2) = \ln \omega_2$ şeklinde tanımlansın. Böylece $T_2 T_1: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_1$ ve $T_1 T_2: \Lambda_2 \rightarrow \Lambda_2$ dönüşümleri kendi üzerine tanımlı dönüşümlerdir. Λ_1 kümesinin her noktası $T_2 T_1$ dönüşümünün bir sabit

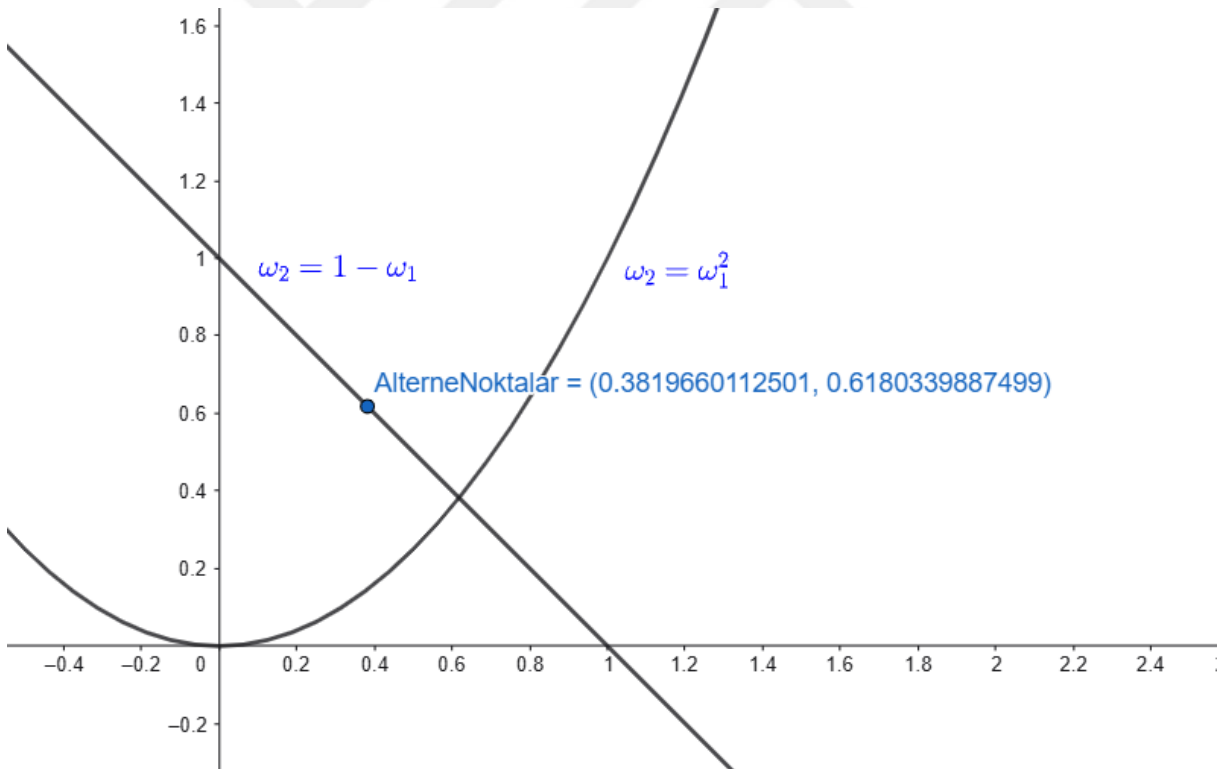
noktası iken Λ_2 kümesinin her noktası da $T_1 T_2$ dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Böylece (ω_1, ω_2) , T_1 ve T_2 dönüşümlerinin alterne noktalarıdır (Khan et al., 2023).

Yukarıda alterne noktalar için verilen tanım, ikiden fazla dönüşüm için aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir.

Tanım 11: Λ metrik uzay, $\emptyset \neq C_1, C_2, \dots, C_k \subset \Lambda$ ve $T_1: C_1 \rightarrow C_2, T_2: C_2 \rightarrow C_3, \dots, T_k: C_k \rightarrow C_1$ dönüşümleri verilsin. Eğer $\omega_1 \in C_1, \omega_2 \in C_2, \dots, \omega_k \in C_k$ olmak üzere $T_1(\omega_1) = \omega_2, T_2(\omega_2) = \omega_3, \dots, T_k(\omega_k) = \omega_1$ koşulları sağlanıyorsa, bu noktalar $T_1, T_2, \dots, T_k$ dönüşümlerinin alterne noktaları olarak adlandırılır (Sahu 2014).

Örnek 11: $\Lambda = C_1 = C_2 = [0,1]$ ve $T_1, T_2: \Lambda \rightarrow \Lambda$ olarak tanımlansın. $T_1 \omega = 1 - \omega$ ve $T_2 \omega = \omega^2$ olmak üzere her $\omega \in \Lambda$ için $T_2 T_1 \omega = T_2(1 - \omega) = (1 - \omega)^2$ ve $T_1 T_2 \omega = T_1(\omega^2) = 1 - \omega^2$ dir. Böylece $\omega_1^* = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ve $\omega_2^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, T_1 ve T_2 nin alterne noktalarıdır (Sahu 2014).

Alterne noktalar aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 1. T_1 ve T_2 dönüşümlerin alterne noktaları

Örnek 12: $\Lambda = C_1 = C_2 = [0,2]$ ve $T_1: \Lambda \rightarrow \Lambda$ ve $T_2: \Lambda \rightarrow \Lambda$ olarak tanımlansın. $T_1(\omega_1^*) = 2 - \omega_1^*$ ve $T_2(\omega_1^*) = \omega_1^*$ olmak üzere her $\omega \in \Lambda$ için

$$T_2(T_1(\omega_1^*)) = T_2(2 - \omega_1^*) = (2 - \omega_1^*)$$

$$\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2(\omega_1^*)) = \mathcal{T}_1(\omega_1^*) = (2 - \omega_1^*)$$

dir. $\mathcal{T}_1(\omega_1^*) = \omega_2^*$ ve $\mathcal{T}_2(\omega_2^*) = \omega_1^*$ olduğundan $\omega_1^* = \omega_2^*$ olur. Dolayısıyla

$$\omega_1^* = 2 - \omega_1^* \Rightarrow 2\omega_1^* = 2 \Rightarrow \omega_1^* = 1, \omega_2^* = 1$$

bulunur. $Alt(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \{(1,1)\}$ ile gösterilir.

Tanım 12: Λ boş olmayan bir küme ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow 2^\Lambda$ çok değerli dönüşümü verilsin. Eğer $\omega \in T\omega$ ise ω noktasına çok değerli $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası denir.

Örnek 13: $\mathcal{T}: [0, \infty) \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ çok değerli dönüşümü

$$\mathcal{T}\omega = \begin{cases} [0, \omega), \omega > 0 \\ \{0\}, \omega = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $0 \in \mathcal{T}0$ olduğundan $\omega = 0$ noktası $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasıdır.

Tanım 13: Λ_1 ve Λ_2 iki metrik uzay, $\mathcal{T}: \Lambda_1 \rightarrow 2^{\Lambda_2}$ ve $\mathcal{S}: \Lambda_2 \rightarrow 2^{\Lambda_1}$ çok değerli dönüşümler olsun. Eğer

$$\begin{cases} \omega_1^* \in \mathcal{S}(\omega_2^*) \\ \omega_2^* \in \mathcal{T}(\omega_1^*) \end{cases}$$

şartı sağlanıyorsa $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ çiftine çok değerli $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}$ dönüşümlerinin alterne noktası denir (Benterki 2024).

Örnek 14: Λ_1 ve Λ_2 metrik uzayları, alışılmış metrik uzaylar olsun. $\mathcal{T}: \Lambda_1 \rightarrow 2^{\Lambda_2}$, $\mathcal{T}\omega = [\omega, \omega + 3]$ ve $\mathcal{S}: \Lambda_2 \rightarrow 2^{\Lambda_1}$, $\mathcal{S}\omega = [\omega - 1, \omega + 1]$ dönüşümleri verilsin. $(\omega_1^*, \omega_2^*) = (1, 2)$ noktasını ele alalım.

i. $2 \in \mathcal{T}(1)$ midir?

$$\mathcal{T}(1) = [1, 4] \text{ olup } 2 \in [1, 4].$$

ii. $1 \in \mathcal{S}(2)$ midir?

$$\mathcal{S}(2) = [1, 3] \text{ olup } 1 \in [1, 3].$$

Dolayısıyla $(\omega_1^*, \omega_2^*) = (1, 2)$ noktası $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}$ dönüşümlerinin alterne noktasıdır.

Yukarıdaki tanımdan hareketle buraya kadar verilen tanımlarla ilgili aşağıdaki özel durumlar ifade edilebilir (Benterki 2024).

Tablo 1. Sabit Nokta ve Alterne Noktalar Arasındaki Özel Durumlar

$\Lambda_1 = \Lambda_2$	$\omega_1^* = \omega_2^*$	$\mathcal{S} = Id_\Lambda$ veya $\mathcal{S} = \mathcal{T}$	$\omega_1^* \in \mathcal{S}(\omega_1^*)$	$\mathcal{S}$ nin sabit noktası
		$\mathcal{S} \neq Id_\Lambda$ veya $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$	$\begin{cases} \omega_1^* \in \mathcal{S}(\omega_1^*) \\ \omega_1^* \in \mathcal{T}(\omega_1^*) \end{cases}$	$\mathcal{S}$ ve $\mathcal{T}$ nin ortak sabit noktası
	$\omega_1^* \neq \omega_2^*$	$\mathcal{S} = \mathcal{T}$	$\begin{cases} \omega_1^* \in \mathcal{S}(\omega_2^*) \\ \omega_2^* \in \mathcal{S}(\omega_1^*) \end{cases}$	$\tilde{\mathcal{S}}(\omega_1, \omega_2) = \mathcal{S}(\omega_2)$ dönüşümünün çift sabit noktası

Temel dönüşüm sınıfları

Tanım 14: (Λ, ζ) bir metrik uzay ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun.

- i. Her $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda$ için

$$\zeta(\mathcal{T}\omega_1, \mathcal{T}\omega_2) \leq L\zeta(\omega_1, \omega_2) \quad (3)$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ ye Lipschitz dönüşüm denir. (3) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük L sayısına da Lipschitz sabiti denir.

- ii. Eğer (3) eşitsizliği $0 \leq L < 1$ olması halinde sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ ye daraltan dönüşüm denir.
iii. Her $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda$ ve $\omega_1 \neq \omega_2$ için

$$\zeta(\mathcal{T}\omega_1, \mathcal{T}\omega_2) < \zeta(\omega_1, \omega_2)$$

ise $\mathcal{T}$ ye kesin daraltan dönüşüm denir.

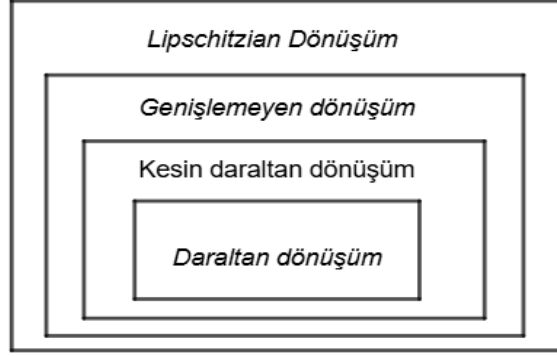
- iv. Her $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda$ için

$$\zeta(\mathcal{T}\omega_1, \mathcal{T}\omega_2) \leq \zeta(\omega_1, \omega_2)$$

ise $\mathcal{T}$ ye genişlemeyen dönüşüm denir (Agarwal et al. 2009).

Yukarıda tanımlanan dönüşümler göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir:

Daraltan dönüşüm $\Rightarrow$ Kesin daraltan dönüşüm $\Rightarrow$ Genişlemeyen dönüşüm $\Rightarrow$ Lipschitz dönüşüm



Şekil 2. Dönüşümler arasındaki bağlantı

Tanım 15: C , Λ Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $[0, \infty)$ aralığında $\{a_n\}$ dizisi için $a_n \rightarrow 0$ olsun. Ayrıca $\mathcal{T}: C \rightarrow C$ tanımlı bir dönüşüm alalım. Her $\omega_1, \omega_2 \in C$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|\mathcal{T}^n \omega_1 - \mathcal{T}^n \omega_2\| \leq L_n (\|\omega_1 - \omega_2\| + a_n) \quad (4)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $L_n \geq 0$ dizisi varsa $\mathcal{T}$ ye $\{a_n\}$ ye göre hemen hemen Lipschitzian dönüşüm denir.

(4) sağlandığında L_n sabitinin alt sınırının infimumu $\eta(\mathcal{T}^n)$ ile gösterilir ve hemen hemen Lipschitz sabiti olarak adlandırılır. Burada

$$\eta(\mathcal{T}^n) = \sup \left\{ \frac{\|\mathcal{T}^n \omega_1 - \mathcal{T}^n \omega_2\|}{\|\omega_1 - \omega_2\| + a_n} : \omega_1, \omega_2 \in C, \omega_1 \neq \omega_2 \right\}$$

olmak üzere, hemen hemen Lipschitzian dönüşüm, $\{(a_n, \eta(\mathcal{T}_n))\}$ dizisi ile birlikte;

- i. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\eta(\mathcal{T}^n) < 1$ ise hemen hemen daraltandır,
- ii. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\eta(\mathcal{T}^n) \leq 1$ ise hemen hemen genişlemeyendir,
- iii. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta(\mathcal{T}^n) \leq 1$ ve $\eta(\mathcal{T}^n) \geq 1$ ise hemen hemen asimptotik genişlemeyendir,
- iv. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\eta(\mathcal{T}^n) \leq L$ ise hemen hemen düzgün L -Lipschitzian,
- v. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\eta(\mathcal{T}^n) \leq L < 1$ ise hemen hemen düzgün L -daraltan,

olarak adlandırılır (Sahu 2005).

2014 yılında Sahu hemen hemen dönüşümlerin tanımından esinlenerek aşağıdaki tanımları ifade etmiştir.

Tanım 16: C, Λ Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $[0, \infty)$ aralığında $\{a_n\}$ dizisi için $a_n \rightarrow 0$ olacak şekilde her $\omega_1, \omega_2 \in C$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\| \mathcal{S}_n \omega_1 - \mathcal{S}_n \omega_2 \| \leq \| \omega_1 - \omega_2 \| + a_n$$

koşulu sağlanıyorsa $\{\mathcal{S}_n\}$ dönüşümlerin dizisine $[0, \infty)$ aralığında $\{a_n\}$ dizisi ile birlikte hemen hemen genişlemeyen denir (Sahu 2014).

Tanım 17: Λ bir normlu uzay ve $\mathcal{T}, \mathcal{S}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ iki operatör olsun. Her $\omega \in \Lambda$ için $\|\mathcal{T}\omega - \mathcal{S}\omega\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sabiti varsa $\mathcal{S}$ ye $\mathcal{T}$ nin yaklaşım operatörü denir (Soltuz and Grosan, 2008).

Tanım 18: Λ bir metrik uzay ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow CB(\Lambda)$ çok değerli dönüşümü verilsin. Her $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda$ için

i.

$$H(\mathcal{T}\omega_1, \mathcal{T}\omega_2) \leq L\|\omega_1 - \omega_2\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $L \in (0, 1]$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ ye daraltan dönüşüm;

ii.

$$H(\mathcal{T}\omega_1, \mathcal{T}\omega_2) \leq L\|\omega_1 - \omega_2\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $L > 0$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ ye Lipschitz dönüşüm;

iii.

$$H(\mathcal{T}\omega_1, \mathcal{T}\omega_2) \leq \|\omega_1 - \omega_2\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ ye genişlemeyen dönüşüm denir.

Tanım 19: H bir Hilbert uzayı ve $\mathcal{T}: H \rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega_1, \omega_2 \in H$ için

i.

$$\langle \omega_1 - \omega_2, \mathcal{T}\omega_1 - \mathcal{T}\omega_2 \rangle \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne monoton dönüşüm;

ii.

$$\langle \omega_1 - \omega_2, \mathcal{T}\omega_1 - \mathcal{T}\omega_2 \rangle \geq \eta \|\omega_1 - \omega_2\|^2$$

eşitsizliği eğer $\eta > 0$ için sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne güçlü monoton veya η -güçlü monoton dönüşüm;

iii.

$$\langle \omega_1 - \omega_2, \mathcal{T}\omega_1 - \mathcal{T}\omega_2 \rangle \geq \eta \|\mathcal{T}\omega_1 - \mathcal{T}\omega_2\|^2$$

eşitsizliği eğer $\eta > 0$ için sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne ters güçlü monoton dönüşüm denir (Hammad et al. 2020).

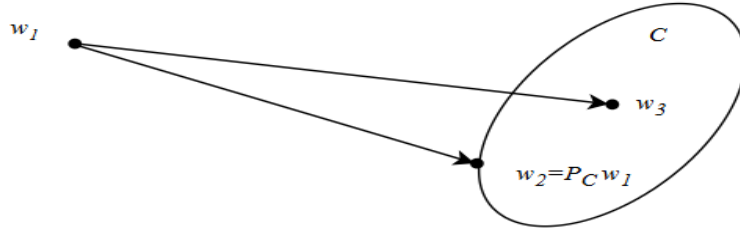
Metrik Projeksiyonu ve Varyasyonel Eşitsizlikler

Tanım 20: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $\omega_1 \in H$ olsun.

Eğer her $\omega_3 \in C$ için

$$\|\omega_2 - \omega_1\| \leq \|\omega_3 - \omega_1\|$$

olacak şekilde bir $\omega_2 \in C$ noktası varsa ω_2 ye ω_1 in C üzerine metrik izdüşümü denir ve $P_C \omega_1$ ile gösterilir. $s = P_C \omega_1 - \omega_1$ vektörüne de ω_1 in C üzerine izdüşüm vektörü adı verilir. Eğer her $\omega_1 \in H$ için $P_C \omega_1$ mevcut ve tek olarak tanımlıysa bu durumda $P_C: H \rightarrow C$ operatörüne (C üzerine) metrik izdüşüm denir (Cegielski, 2012).



Şekil 3. Metrik projeksiyon

Örnek 15: $H = \mathbb{R}^2$, $C = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2: \omega_2 = 0\}$ ve $\omega_1 = (4,5)$ olmak üzere verilen ω_1 noktasının C doğrusu üzerine izdüşümü C üzerindeki ω_1 e en yakın nokta olduğundan $P_C \omega_1 = (4,0)$ olur ve

$$\|\omega_1 - P_C \omega_1\| = \sqrt{(4-4)^2 + (5-0)^2} = 5$$

ω_1 in C ye olan metrik izdüşümü bulunmuş olur.

Teorem 1: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Her $\omega_1 \in H$ için $P_C \omega_1$ metrik projeksiyonu vardır ve tek bir şekilde belirlenmiştir (Cegielski, 2012).

Teorem 2: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı konveks bir alt kümesi, $\omega_1 \in H$ ve $\omega_2 \in C$ olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

- i. $P_C \omega_1 = \omega_2$,
- ii. Her $\omega_3 \in C$ için $\langle \omega_1 - \omega_2, \omega_3 - \omega_2 \rangle \leq 0$ (Cegielski, 2012).

Yani yukarıdaki teoremin ii. şartı bize eğer $\omega_1 - \omega_2$ ile $\omega_3 - \omega_2$ vektörleri sıfırdan farklı ise bunlar arasındaki açının $\frac{\pi}{2}$ ye eşit ya da büyük olduğunu söyler.

Sonuç: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı kapalı konveks bir alt kümesi, $T: H \rightarrow H$ dönüşümü ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Herhangi bir $\lambda > 0$ için $T_\lambda = I + \lambda(T - I)$ şeklinde tanımlanan dönüşümüne göre $F(P_C T) = F(P_C T_\lambda)$ eşitliği vardır (Cegielski, 2012).

Tanım 21: $C, \mathbb{R}^n$ Öklid uzayının boş kümeden farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli bir dönüşüm olsun. Her $x \in C$ için

$$T\omega_1^*(\omega_1 - \omega_1^*) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan ω_1^* elemanlarının bulunmasına sonlu boyutlu varyasyonel eşitsizlik problemi denir ve $VI(C, T)$ ile gösterilir. Varyasyonel eşitsizlik probleminin çözüm kümesi ise Ω ile gösterilir (Stampacchia, 1964).

Yukarıda tanım, Hilbert uzaylarında aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Tanım 22: H bir Hilbert uzayı ve $C \subset H$ boştan farklı, kapalı, konveks bir alt küme olsun. $T: C \rightarrow H$ lineer olmayan operatör olmak üzere varyasyonel eşitsizlik problemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

Her $v \in C$ için

$$\langle T\omega_1^*, v - \omega_1^* \rangle \geq 0 \quad (5)$$

eşitsizliğini sağlayan $\omega_1^* \in C$ noktasının bulunma problemidir ve $VI(C, A)$ ile gösterilir. Varyasyonel eşitsizlik probleminin çözüm kümesi ise $\Omega(C, A)$ ile gösterilir. Yani $\forall v \in C$ için

$$\Omega(C, A) = \{\omega_1^* \in C : \langle T\omega_1^*, v - \omega_1^* \rangle \geq 0\}$$

dır (Stampacchia 1964).

Örnek 16: $C = [0, 2]$ olmak üzere $T: C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $T\omega_1 = \omega_1^2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $\omega_1 \in [0, 2]$ için

$$T\omega_1^*(\omega_1 - \omega_1^*) = (\omega_1^*)^2(\omega_1 - \omega_1^*) \geq 0$$

varyasyonel eşitsizliğinin çözüm kümesi $\omega_1^* = 0$ dır.

Örnek 17: $C = [0, 1]$ olmak üzere $T: C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $T\omega_1 = -2\omega_1 + 3$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $\omega_1 \in [0, 1]$ için

$$T\omega_1^*(\omega_1 - \omega_1^*) = (-2\omega_1^* + 3)(\omega_1 - \omega_1^*) \geq 0$$

varyasyonel eşitsizliğinin çözüm kümesi $\omega_1^* = 1$ dir.

Sabit nokta problemleri ve varyasyonel eşitsizlik arasındaki ilişki, izdüşüm operatöründen faydalanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 3: i) C, H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\omega_1^* \in C$ nin $VI(C, \mathcal{T})$ varyasyonel eşitsizlik probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $\gamma > 0$ için x^* ın $P_C(I - \gamma\mathcal{T}): C \rightarrow C$ dönüşümünün sabit noktası olması yani

$$P_C(\omega_1^* - \gamma\mathcal{T}\omega_1^*) = \omega_1^*$$

olmasıdır. Bu durumda $\omega_1^* \in \text{Fix}P_C(I - \gamma\mathcal{T})$ dir.

ii) H bir Hilbert uzayı ve $\mathcal{T}: H \rightarrow H$ güçlü monoton ve Lipschitz sürekli operatör olsun. Böylece varyasyonel eşitsizlik problemin (5) in tek bir $\omega_1^* \in C$ çözümü vardır (Nagurney, 2002).

Birçok yazar tarafından genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaları üzerine varyasyonel eşitsizlik problemleri incelenmiştir. Bu tür problemler, hiyerarşik varyasyonel eşitsizlik problemi olarak adlandırılır ve şu şekilde tanımlanır.

Tanım 23: H Hilbert uzayının kapalı, konveks ve bir alt kümesi C olsun. $\mathcal{S}: C \rightarrow C$ kendi üzerine genişlemeyen bir dönüşüm ve $\text{Fix}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ 'nin sabit noktaları kümesini ifade etsin. Ayrıca, $\mathcal{T}: C \rightarrow H$ lineer olmayan bir operatör olarak tanımlansın. Hiyerarşik varyasyonel eşitsizlik problemi, her $v \in \text{Fix}(\mathcal{S})$ için

$$\langle \mathcal{T}\omega^*, v - \omega^* \rangle > 0$$

eşitsizliğini sağlayan $\omega^* \in \text{Fix}(\mathcal{S})$ noktasının bulunma problemidir (Eslamian et al 2024).

Varyasyonel eşitsizlik probleminin çözüm kümesi C üzerinde aranırken, hiyerarşik varyasyonel eşitsizlik probleminin çözüm kümesi C nin alt kümesi olan $\mathcal{S}$ dönüşümünün sabit noktalar kümesi $\text{Fix}(\mathcal{S})$ üzerinde aranır. Bu durumda hiyerarşik varyasyonel eşitsizlik problemi, varyasyonel eşitsizlik probleminin alt sınıfı olarak kabul edilebilir. Ayrıca varyasyonel eşitsizlik problemi daha genel olduğu için metrik izdüşüm yöntemleri ile çözülebilirken hiyerarşik varyasyonel eşitsizlik problemleri genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaları kullanılarak sabit nokta teoremleri ile çözülebilir.

Tanım 24: Bir $f(\cdot): C \subseteq \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ dönüşümü $\omega_0 \in C$ noktası ve $\mathcal{T}(\cdot): \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ doğrusal dönüşümü verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $\omega \in C$ ve $\|\omega_1 - \omega_0\| < \delta$ iken

$$\|f(\omega_1) - f(\omega_0) - \mathcal{T}(\omega_1 - \omega_0)\| \leq \varepsilon \|\omega_1 - \omega_0\|$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $f(\cdot)$ dönüşümüne ω_0 noktasında Frechet türevlenebilir denir. Eğer $f(\cdot)$ dönüşümü C kümesinin her noktasında Frechet türevlenebilir ise $f(\cdot)$ dönüşümüne C üzerinde Frechet türevlenebilir denir (Musayev 2000).

Tanım 25: i) Λ bir normlu uzay ve $\{\omega_n\}$ de bu uzayda bir dizi olsun. Her $f \in \Lambda'$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\omega_n) = f(\omega)$ olacak şekilde bir $\omega \in \Lambda$ varsa $\{\omega_n\}$ dizisi zayıf yakınsaktır denir ve $\omega_n \rightharpoonup \omega$ şeklinde gösterilir.

ii) Λ bir Banach uzayı, C , Λ in boş olmayan bir alt kümesi ve $\mathcal{T}: C \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Eğer C içindeki sınırlı her $\{\omega_n\}$ dizisi $\omega^* \in C$ ye zayıf yakınsak ve $\mathcal{T}\omega_n$ de 0 a kuvvetli yakınsak iken $\mathcal{T}\omega = 0$ ise $\mathcal{T}$ dönüşümüne 0 da yarı kapalı dönüşüm denir (Berinde 2006).

Tanım 26: Λ bir Banach uzayı, $\omega_1 \in \Lambda$ ve (ω_n) dizisi ω_1 elamanına zayıf yakınsayan bir dizi olmak üzere her $\omega_2 \in \Lambda - \{\omega_1\}$ için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_1\| \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_2\|$$

ise Λ Banach uzayı Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Yukarıdaki Opial şartı aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_1\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_2\|.$$

MATERYAL ve YÖNTEM

Sabit Nokta İle İlgili Teoremler

Aşağıda ifade edilen teoremler, hangi şartlar altında sabit noktalarının var ve tek olduğu ile ilgili gerekli ve yeterli şartları sunmaktadır.

Teorem 4: $[\omega_1, \omega_2]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık ve $\mathcal{T}: [\omega_1, \omega_2] \rightarrow [\omega_1, \omega_2]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathcal{T}(\omega^*) = \omega^*$ olacak şekilde en az bir $\omega^* \in [\omega_1, \omega_2]$ sayısı vardır (Agarwal et al. 2007).

İspat: $\mathcal{T}(\omega_1), \mathcal{T}(\omega_2) \in [\omega_1, \omega_2]$ olduğu için $\mathcal{T}(\omega_1) \geq \omega_1$ ve $\mathcal{T}(\omega_2) \leq \omega_2$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{T}(\omega_1) - \omega_1 \geq 0$ ve $\mathcal{T}(\omega_2) - \omega_2 \leq 0$ dir. Diğer taraftan $G(u) = \mathcal{T}(u) - u$ şeklindeki fonksiyonu tanımlayalım. Bu G fonksiyon yine $[\omega_1, \omega_2]$ aralığında sürekli olup $G(\omega_2) \leq 0 \leq G(\omega_1)$ dir. Ara değer teoreminden $G(\omega^*) = 0$ olacak şekilde bir $\omega^* \in (\omega_1, \omega_2)$ vardır. Buradan $G(\omega^*) = \mathcal{T}(\omega^*) - \omega^* = 0$ olup $\mathcal{T}(\omega^*) = \omega^*$ dir.

Teorem 5 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): C , $\mathbb{R}^n$ nin kompakt konveks alt kümesi olsun. Bu durumda, $\mathcal{T}: C \rightarrow C$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Brouwer Sabit Nokta Teoremi sonsuz boyutlu Banach uzaylarında geçerli değildir.

Teorem 6 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): C , Λ Banach uzayının $C \subseteq \Lambda$ boştan farklı kompakt konveks bir alt kümesi ve $\mathcal{T}: C \rightarrow C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ en az bir sabit noktaya sahiptir (Schauder 1930).

Teorem 7 (Banach Sabit Nokta Teoremi): Λ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ bir tek sabit noktaya sahiptir (Banach 1922).

Tam olmayan metrik uzaylarda daraltan bir dönüşümün sabit noktası olmak zorunda değildir. Ayrıca tam metrik uzayda da daraltan olmayan bir dönüşümün sabit noktası olmak zorunda değildir.

Teorem 8: (Λ, ζ) tam metrik uzayı ve $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{T}^n$ daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü verilsin. Bu durumda $\mathcal{T}$ bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Teorem 9: Λ bir kompakt metrik uzay ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ bir tek ω_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $\omega \in \Lambda$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^n \omega = \omega_0$$

dır (Khamssi and Kirk 2001).

Çok değerli dönüşümler (multivalued mappings) için sabit nokta teorisi, kontrol teorisi, optimizasyon, ekonomi ve diferansiyel içermeler (differential inclusions) gibi geniş bir uygulama yelpazesine sahip, matematiğin temel dallarından biridir. Bu alandaki çalışmalar tarihsel olarak Kakutani (1941)'nin, Brouwer Sabit Nokta Teoremi'ni çok değerli dönüşümler için genelleştirmesiyle başlamıştır. Kakutani'nin bu çalışması, çok değerli dönüşümler kuramının gelişmesinde öncü bir rol oynamıştır. 1969 yılında Nadler tarafından metrik sabit nokta teorisi alanında gerçekleştirilmiştir. Nadler, Hausdorff metriğini kullanarak Banach'ın klasik daralma ilkesini çok değerli dönüşümlere başarılı bir şekilde uyarlamış ve tam metrik uzayda çok değerli daraltan bir dönüşümün tek bir sabit noktaya sahip olduğunu aşağıdaki gibi ispatlamıştır.

Teorem 10 (Nadler Sabit Nokta Teoremi): Λ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow 2^\Lambda$ çok değerli daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ bir sabit noktaya sahiptir (Nadler 1969).

Yukarıdaki çalışma, özellikle 1970'li yıllarda metrik sabit nokta teorisinin hızla gelişmesine yol açmıştır. Assad ve Kirk (1972), Markin (1978) ve Reich (1979) gibi matematikçiler, Nadler'in başlattığı bu akımı takip ederek daralma tipi çok değerli dönüşümler üzerine kapsamlı çalışmalar yapmışlardır.

Teorem 11: Λ_1 ve Λ_2 vektör uzayları verilsin. Λ_1 ve Λ_2 nin kartezyen çarpımı $\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{(\omega_1, \omega_2): \omega_1 \in \Lambda_1, \omega_2 \in \Lambda_2\}$ olsun. $\|\cdot\|_1$, Λ_1 üzerinde bir norm ve $\|\cdot\|_2$ ise Λ_2 üzerinde bir norm olsun. O halde

$$\|(\omega_1, \omega_2)\| = \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_2$$

bir normlu uzaydır (Soykan 2008).

İspat: $(\omega_1, \omega_2), (\omega_3, \omega_4) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ ve $\alpha \in F$ olsun.

- i. $\|(\omega_1, \omega_2)\| = \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_2 \geq 0$ olduğunu gösterelim. $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ norm olduğundan $\|\omega_1\|_1 \geq 0$ ve $\|\omega_2\|_2 \geq 0$ dir. Bu durumda $\|(\omega_1, \omega_2)\| = \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_2 \geq 0$ sağlanır.
- ii. $(\omega_1, \omega_2) = 0$ ise o zaman $\omega_1 = 0$ ve $\omega_2 = 0$ dır. Bu nedenle $\|\omega_1\|_1 = 0$ ve $\|\omega_2\|_2 = 0$ ve böylece $\|(\omega_1, \omega_2)\| = 0$ bulunur. Eğer $\|(\omega_1, \omega_2)\| = 0$ ise o zaman $\|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_2 = 0$ ve $\|\omega_1\|_1 = \|\omega_2\|_2 = 0$ dır. Bu nedenle $\omega_1 = 0$ ve $\omega_2 = 0$ ve böylece $(\omega_1, \omega_2) = 0$ elde edilir.
- iii. $\|\alpha(\omega_1, \omega_2)\| = \|(\alpha\omega_1, \alpha\omega_2)\| = \|\alpha\omega_1\|_1 + \|\alpha\omega_2\|_2 = |\alpha|\|\omega_1\|_1 + |\alpha|\|\omega_2\|_2$

$$= |\alpha|(\|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_2) = |\alpha|\|(\omega_1, \omega_2)\|.$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \|(\omega_1, \omega_2) + (\omega_3, \omega_4)\| &= \|(\omega_1 + \omega_3, \omega_2 + \omega_4)\| = \|\omega_1 + \omega_3\|_1 + \|\omega_2 + \omega_4\|_2 \\ &\leq \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_1 + \|\omega_3\|_1 + \|\omega_4\|_2 = \|(\omega_1, \omega_2)\| + \|(\omega_3, \omega_4)\|. \end{aligned}$$

Norm şartları sağlandığından $\|(\omega_1, \omega_2)\| = \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_2$ ifadesi $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ vektör uzayı üzerinde bir norm tanımlar.

Örnek 18: Λ_1 vektör uzayı üzerinde bir norm $\|\cdot\|_1$ ve Λ_2 vektör uzayı üzerinde bir norm $\|\cdot\|_2$ olsun. $\Lambda_3 = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ vektör uzayı $\|(\omega_1, \omega_2)\| = \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_2$ normuna sahip olsun. Ayrıca $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$, $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ içinde bir dizi olsun.

- i. $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisinin Λ_3 de (ω_1, ω_2) ye yakınsaması için gerek ve yeter şart $\{\omega_n\}$ dizisinin Λ_1 de ω_1 e ve $\{\omega'_n\}$ dizisinin Λ_2 de ω_2 ye yakınsamasıdır.
- ii. $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisinin Λ_3 de bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\{\omega_n\}$ dizisinin Λ_1 de bir Cauchy dizisi ve $\{\omega'_n\}$ dizisinin Λ_2 de bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Çözüm: $\varepsilon > 0$ olsun.

- i. $(\Rightarrow)$ $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$, Λ_3 içinde (ω_1, ω_2) ye yakınsasın. O zaman bazı $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n \geq N$ için

$$\|(\omega_n - \omega_1, \omega'_n - \omega_2)\| = \|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1, \omega_2)\| \leq \varepsilon$$

dur. Böylece $n \geq N$ için

$$\|\omega_n - \omega_1\|_1 \leq \|\omega_n - \omega_1\|_1 + \|\omega'_n - \omega_2\|_2 = \|(\omega_n - \omega_1, \omega'_n - \omega_2)\| \leq \varepsilon$$

ve

$$\|\omega'_n - \omega_2\|_2 \leq \|\omega_n - \omega_1\|_1 + \|\omega'_n - \omega_2\|_2 = \|(\omega_n - \omega_1, \omega'_n - \omega_2)\| \leq \varepsilon$$

bulunur. Sonuç olarak $\{\omega_n\}$, Λ_1 içinde ω_1 e yakınsar ve $\{\omega'_n\}$, Λ_2 içinde ω_2 e yakınsar.

$(\Leftarrow)$ $\{\omega_n\}$, Λ_1 içinde ω_1 e yakınsasın ve $\{\omega'_n\}$, Λ_2 içinde ω_2 e yakınsasın. O zaman her $n \geq N_1$ için

$$\|\omega_n - \omega_1\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ve her $n \geq N_2$ için

$$\|\omega'_n - \omega_2\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. O zaman $n \geq N_0$ için

$$\|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1, \omega_2)\| = \|(\omega_n - \omega_1, \omega'_n - \omega_2)\| = \|\omega_n - \omega_1\|_1 + \|\omega'_n - \omega_2\|_2 \leq \varepsilon$$

olduğundan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$, Λ_3 içinde (ω_1, ω_2) ye yakınsar.

- ii. $(\Rightarrow)$ $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$, Λ_3 içinde bir Cauchy dizisi olsun. O zaman her $m, n \geq N$ için

$$\|(\omega_n - \omega_m, \omega'_n - \omega'_m)\| = \|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_m, \omega'_m)\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bazı $N \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $m, n \geq N$ için

$$\|\omega_n - \omega_m\|_1 \leq \|\omega_n - \omega_m\|_1 + \|\omega'_n - \omega'_m\|_2 = \|(\omega_n - \omega_m, \omega'_n - \omega'_m)\| \leq \varepsilon$$

ve

$$\|\omega'_n - \omega'_m\|_2 \leq \|\omega_n - \omega_m\|_1 + \|\omega'_n - \omega'_m\|_2 = \|(\omega_n - \omega_m, \omega'_n - \omega'_m)\| \leq \varepsilon$$

bulunur. Sonuç olarak $\{\omega_n\}$, Λ_1 içinde bir Cauchy dizisidir ve $\{\omega'_n\}$, Λ_2 içinde bir Cauchy dizisidir.

($\Leftarrow$) $\{\omega_n\}$, Λ_1 içinde bir Cauchy dizisi ve $\{\omega'_n\}$, Λ_2 içinde bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $m, n \geq N_1$ için

$$\|\omega_n - \omega_m\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ve $m, n \geq N_2$ için

$$\|\omega'_n - \omega'_m\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. O zaman $m, n \geq N_0$ için

$$\begin{aligned} \|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_m, \omega'_m)\| &= \|(\omega_n - \omega_m, \omega'_n - \omega'_m)\| \\ &= \|\omega_n - \omega_m\|_1 + \|\omega'_n - \omega'_m\|_2 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$, Λ_3 içinde bir Cauchy dizisidir.

Teorem 12: $(\Lambda_1, \|\cdot\|_1)$ ve $(\Lambda_2, \|\cdot\|_2)$ iki Banach uzayı olsun. Bu durumda $\Lambda_3 = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ vektör uzayı $\|(\omega_1, \omega_2)\|_{\Lambda_3} = \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_2$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır (Soykan 2008).

İspat: $\Lambda_3 = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ uzayının $\|(\omega_1, \omega_2)\|_{\Lambda_3} = \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_2$ normlu uzay olduğu yukarıdaki örnekte gösterilmiştir. Λ_1 ve Λ_2 normlu uzay iken Λ_3 de normlu uzaydır. Λ_3 ün bir Banach uzayı olduğunu göstermek için Λ_3 ün tam olduğunu, yani Λ_3 teki her Cauchy dizisinin Λ_3 içindeki bir noktaya yakınsadığını gösterelim.

$\Lambda_3 = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ uzayında rastgele bir $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ Cauchy dizisi alalım. Yukarıdaki örneğin ii) şikkından $\{\omega_n\}$, Λ_1 te , $\{\omega'_n\}$ de Λ_2 de bir Cauchy dizisidir. Λ_1 Banach uzayı olduğundan $\{\omega_n\}$ Λ_1 te bir Cauchy dizisi olduğu için, $\{\omega_n\}$ dizisi Λ_1 içinde bir ω_1 noktasına yakınsar. Yani $\omega_n \rightarrow \omega_1$ dir. Benzer şekilde $\omega'_n \rightarrow \omega_2$ dir. Böylece $\omega_1 \in \Lambda_1$ ve $\omega_2 \in \Lambda_2$ olan bir (ω_1, ω_2) limiti bulunur. Bu (ω_1, ω_2) noktası $\Lambda_3 = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ uzayının bir elemanıdır. Yukarıdaki örneğin i) şikkından $\{\omega_n\} \rightarrow \omega_1$ ve $\{\omega'_n\} \rightarrow \omega_2$ olması ancak ve ancak

$\{(\omega_n, \omega'_n)\} \rightarrow (\omega_1, \omega_2)$, Λ_3 de olmasını gerektirir. Dolayısıyla, Λ_3 de aldığımız $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ Cauchy dizisi, Λ_3 de bulunan (ω_1, ω_2) noktasına yakınsar. Λ_3 uzayında aldığımız rastgele bir Cauchy dizisinin, yine Λ_3 uzayında bir limite sahip olduğunu gösterdik. Bu, Λ_3 uzayının tam olduğunu kanıtlar. Dolayısıyla Λ_3 hem normlu bir uzay hem de tam bir uzay olduğundan, Λ_3 bir Banach uzayıdır.

Lemma 1: $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ olmak üzere $\mathcal{S}_i: \Lambda \rightarrow \Lambda$ genişlemeyen dönüşümler olsun. Bu durumda;

- i. $w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in \Delta_m$ olmak üzere $\mathcal{S} = \sum_{i \in I} w_i \mathcal{S}_i$ konveks kombinasyonu genişlemeyendir.
- ii. $\mathcal{S} = \mathcal{S}_m \mathcal{S}_{m-1} \dots \mathcal{S}_1$ bileşke dönüşümü genişlemeyendir. Ayrıca, eğer $\mathcal{S}_i$ dönüşümlerinden en az biri daraltan ise $\mathcal{S}$ dönüşümü de daraltandır (Cegielski 2012).

İspat: $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda$ ve $\mathcal{S}_i$ genişlemeyen dönüşüm olsun. Yani $\|\mathcal{S}_i \omega_1 - \mathcal{S}_i \omega_2\| \leq \alpha_i \|\omega_1 - \omega_2\|$ dir. Burada $\alpha_i \in (0, 1]$ ve $i \in I$ dır.

- i. $w \in \Delta_m, \mathcal{S} = \sum_{i \in I} w_i \mathcal{S}_i$ ve $\alpha = \sum_{j \in I} w_j \alpha_j$ olsun. Burada $\alpha \in (0, 1]$ olduğu açıktır. Normun konveksliğinden ve $i \in I$ için $\mathcal{S}_i$ lerin genişlemeyenliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S} \omega_1 - \mathcal{S} \omega_2\| &= \left\| \sum_{i \in I} w_i (\mathcal{S}_i \omega_1 - \mathcal{S}_i \omega_2) \right\| \\
 &\leq \sum_{i \in I} w_i \|\mathcal{S}_i \omega_1 - \mathcal{S}_i \omega_2\| \\
 &\leq \sum_{i \in I} w_i \alpha_i \|\omega_1 - \omega_2\| \\
 &= \sum_{i \in I} \frac{w_i \alpha_i}{\sum_{j \in I} w_j \alpha_j} \alpha \|\omega_1 - \omega_2\| \\
 &= \alpha \|\omega_1 - \omega_2\|
 \end{aligned}$$

olur. Yani $\mathcal{S}$, genişlemeyen bir dönüşümdür.

- ii. $\alpha = \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_1 \in (0, 1]$ olduğundan

$$\|\mathcal{S} \omega_1 - \mathcal{S} \omega_2\| = \|\mathcal{S}_m \mathcal{S}_{m-1} \dots \mathcal{S}_1 \omega_1 - \mathcal{S}_m \mathcal{S}_{m-1} \dots \mathcal{S}_1 \omega_2\| \leq \alpha \|\omega_1 - \omega_2\|$$

dir. Yani $\mathcal{S} = \mathcal{S}_m \mathcal{S}_{m-1} \dots \mathcal{S}_1$ bileşke dönüşümü genişlemeyendir. Eğer bazı $i_0 \in I$ için $\mathcal{S}_{i_0}$ daraltan yani $\alpha_{i_0} \in (0, 1]$ ise $\alpha \in (0, 1]$ olup $\mathcal{S}$ daraltandır.

Alterne Nokta İle İlgili Teoremler

Yukarıda kuramsal temeller kısmında ifade edilen dönüşümlerin sabit noktalarını, ortak sabit noktalarını, çift sabit noktalarını bulmak ve bu noktalar için yakınsaklık şartlarını incelemek üzere pek çok yazar tarafından çok farklı algoritmalar (Picard, Mann, Ishikawa, Noor, M-algoritması vd.) ifade edilmiştir. Bu algoritmaların yakınsama hızları, denklikleri, karalılıkları farklı çalışmalarda ele alınmıştır. Bu algoritmalarından birisi de aşağıda ifade edilmiştir.

Picard-Mann Hybrid Algoritması (S-algoritması): Λ bir normlu uzay, $C \subseteq \Lambda$ boş olmayan konveks alt küme, $\mathcal{T}: C \rightarrow C$ bir dönüşüm ve $\omega_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = \mathcal{T} \omega'_n \\ \omega'_n = \alpha_n \omega_n + (1 - \alpha_n) \mathcal{T} \omega_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

şeklinde Khan ve Sahu tarafından birbirinden bağımsız olarak tanımlanmış ve Khan tarafından Picard-Mann hybrid (PMH) algoritması olarak adlandırılmıştır. Ayrıca Khan bu algoritmanın daraltan dönüşümler için Picard, Mann ve Ishikawa algoritmalarından daha hızlı yakınsadığını göstermiştir (Khan 2013).

Sahu, S-algoritma metodu fikrinden yola çıkarak, $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktalarını bulmak için aşağıdaki gibi paralel S-algoritma metodunu tanıtmıştır (Sahu 2014).

Tanım 27: Λ Banach uzay, C_1 ve C_2 ise Λ 'nın boş olmayan, kapalı ve konveks alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki dönüşüm olmak üzere herhangi bir $(\omega_0, \omega'_0) \in C_1 \times C_2$ ve $\alpha \in (0,1)$ için paralel S-algoritması

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \mathcal{T}_2[(1 - \alpha_n)\omega'_n + \alpha_n \mathcal{T}_1 \omega_n] \\ \omega'_{n+1} &= \mathcal{T}_1[(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n \mathcal{T}_2 \omega'_n] \end{aligned} \quad (7)$$

şeklinde tanımlanır (Sahu 2014).

Teorem 13: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boştan farklı kapalı, konveks alt kümeleri ve $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2, \mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ genişlemeyen dönüşümler olsun. Ayrıca $Alt(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $\omega_1 \in C_1$ için tanımlanan normal S-algoritması

$$\omega_{n+1} = \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1[(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n]$$

şeklindedir. Burada $\alpha_n \in (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = \infty$ dur. Böylece aşağıdakiler sağlanır.

- i. $\{\|\omega_n - \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n\|\}$ dizisi 0 a yakınsar ve

$$\|\omega_n - \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n\| = o\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1 - \alpha_i)}}\right)$$

eşitliği vardır.

- ii. $\{\omega_n\}$ algoritması $\omega^* \in \text{Fix}(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)$ elemanına zayıf yakınsar. Burada $(\omega^*, \mathcal{T}_1\omega^*) \in \text{Alt}(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)$ dir (Xu and Sahu 2021).

2021 yılında Xu ve Sahu, iki genişlemeyen $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ operatör çiftinin alterne noktalarını bulmak için (7) algoritmasını kullanmış ve aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 14: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boştan farklı kapalı, konveks alt kümeleri ve $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2, \mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ genişlemeyen dönüşümler olsun. Ayrıca $\text{Alt}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için (7) tarafından elde edilen $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ algoritması verilsin. Bu durumda

- i. $\{\|(\omega_n, \omega'_n) - (\mathcal{T}_2\omega'_n, \mathcal{T}_1\omega_n)\|_*\}$ dizisi 0 a yakınsar ve

$$\|(\omega_n, \omega'_n) - (\mathcal{T}_2\omega'_n, \mathcal{T}_1\omega_n)\|_* = o\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1 - \alpha_i)}}\right)$$

eşitliği vardır.

- ii. $\mathcal{T}_1\omega_1^* = \omega_2^*$ ve $\mathcal{T}_2\omega_2^* = \omega_1^*$ sağlanacak şekilde $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ algoritması $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktasına zayıf yakınsar (Xu and Sahu, 2021).

Lemma 2: Λ tam metrik uzay, $\emptyset \neq C_1, C_2, \dots, C_N \subset \Lambda$ ve $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2, \mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_3, \dots, \mathcal{T}_N: C_N \rightarrow C_1$ Lipschitz sürekli dönüşümler olmak üzere sırasıyla bu dönüşümlerin Lipschitz sabitleri $L_1, L_2, \dots, L_N$ olsun. O halde aşağıdaki şartlar sağlanır.

- i. $\mathcal{T}_N\mathcal{T}_{N-1} \dots \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_1$ Lipschitz sürekli bir dönüşüm olup Lipschitz sabiti $L_1L_2 \dots L_N$ dir.
- ii. Eğer $L_1L_2 \dots L_N < 1$ ve C_1 kapalı ise o zaman $\mathcal{T}_N\mathcal{T}_{N-1} \dots \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_1$ bir daraltan dönüşüm olur ve $\mathcal{T}_1(\omega_1) = \omega_2, \mathcal{T}_2(\omega_2) = \omega_3, \dots, \mathcal{T}_N(\omega_N) = \omega_1$ koşulunu sağlayan $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \in C_1 \times C_2 \times \dots \times C_N$ elemanı vardır (Sahu 2014).

$N = 2$ ve $L_1L_2 < 1$ için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 15: Λ tam metrik uzay, C_1 ve C_2 ise Λ 'nın boştan farklı ve kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2, \mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ Lipschitz sürekli dönüşümler olmak üzere sırasıyla Lipschitz sabitleri L_1, L_2 olsun ve $L_1L_2 < 1$ koşulu sağlansın. O halde aşağıdakiler sağlanır.

- i. ω_1^* ve $\omega_2^*, \mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktaları olmak üzere $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ olan tek bir noktaya sahiptir.
- ii. Herhangi bir $\omega_0 \in C_1$ için

$$\begin{cases} \omega'_n = \mathcal{T}_1(\omega_n) \\ \omega_{n+1} = \mathcal{T}_2(\omega'_n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi (ω_1^*, ω_2^*) noktasına yakınsar (Sahu 2014).

İspat:

- i. $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_1$ bir daraltan dönüşümdür. Dolayısıyla $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ 'in $\omega_1^* \in C_1$ için tek bir noktası vardır ve bu nokta $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_1^* = \omega_1^*$ ı sağlar. Ayrıca $\omega_2^* \in C_2$ için $\mathcal{T}_1\omega_1^* = \omega_2^*$ sağlayan tek bir ω_2^* noktası vardır. Böylece $\mathcal{T}_2\omega_2^* = \omega_1^*$ olur. Bu nedenle $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktaları olan ω_1^* ve ω_2^* için tek bir $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktası mevcuttur.
- ii. Picard algoritması tarafından tanımlanan

$$\omega_{n+1} = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_n$$

$\{\omega_n\}$ dizisi ω_1^* a yakınsar. Ayrıca $\omega'_n = \mathcal{T}_1\omega_n$ ve $\mathcal{T}_1\omega_1^* = \omega_2^*$ olacak şekilde tanımlanan $\{\omega'_n\}$ dizisi, $n \rightarrow \infty$ için ω_2^* a yakınsar.

Sonuç olarak aşağıdaki Teorem 16 da $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ daraltan dönüşümler olmak zorunda değildir.

Teorem 16: Λ tam metrik uzay, $\emptyset \neq C_1, C_2 \subset \Lambda$, $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ daraltan dönüşümler olmak üzere $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$, $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ dönüşümleri verilsin. C_1 veya C_2 den herhangi biri kapalı olsun. O zaman, $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktaları olan ω_1^* ve ω_2^* için tek bir $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktası vardır (Sahu 2014).

Teorem 16 dan hareketle Sahu, aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 17: C , Λ tam metrik uzayın boş olmayan, kapalı bir alt kümesi olsun. $\mathcal{T}: C \rightarrow C$ dönüşümü verilsin ve $\mathcal{T}^2$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu taktirde $\omega^* \in C$ için $\mathcal{T}\omega^* = \omega^*$ olan tek bir ω^* noktası mevcuttur (Sahu 2014).

Teorem 18: Λ tam metrik uzay ve $\emptyset \neq C_1, C_2 \subset \Lambda$ olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ Lipschitz sürekli iki dönüşüm ve bunların Lipschitz sabitleri de L_1, L_2 olmak üzere $L_1L_2 < 1$ koşulu sağlansın. Bu durumda aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

- i. $\mathcal{T} := \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_1$ dönüşümü daraltandır ve dolayısıyla $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ şeklinde tek bir noktası vardır. Burada ω_1^* ve ω_2^* , $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır.
- ii. Herhangi bir $\omega_0 \in C_1$ ve $\alpha \in (0,1)$ için S-algoritması tarafından oluşturulan C_1 deki

$$\omega_{n+1} = \mathcal{T}[(1 - \alpha)\omega_n + \alpha\mathcal{T}\omega_n]$$

$\{\omega_n\}$ dizisi ω_1^* a yakınsar (Sahu 2014).

Teorem 19: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının iki boş olmayan, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki Lipschitz sürekli dönüşüm, $L_1 \leq 1$ ve $L_2 \leq 1$ Lipschitz sabitleri olmak üzere $L_1 L_2 < 1$ şartı sağlansın. (7) tarafından tanımlanan paralel S-algoritması $\{(\omega_n, \omega'_n)\}_{n=0}^\infty$ dizisi, tek bir $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktasına güçlü yakınsar. Burada ω_1^* ve ω_2^* , $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır (Sahu 2014).

İspat: Teorem 15 e göre bir tek $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktası vardır. Burada ω_1^* ve ω_2^* , $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ nin alterne noktalarıdır.

$$\lambda := \max\{L_1(1 - (1 - L_2)\alpha), L_2(1 - (1 - L_1)\alpha)\}$$

olsun. (7) den

$$\begin{aligned} \|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| &= \|\mathcal{T}_1[(1 - \alpha)\omega_n + \alpha\mathcal{T}_2(\omega'_n)] - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| \\ &\leq L_1\|[(1 - \alpha)\omega_n + \alpha\mathcal{T}_2(\omega'_n)] - \omega_1^*\| \\ &\leq L_1[(1 - \alpha)\|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha\|\mathcal{T}_2(\omega'_n) - \omega_1^*\|] \\ &= L_1[(1 - \alpha)\|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha\|\mathcal{T}_2(\omega'_n) - \mathcal{T}_2(\omega_2^*)\|] \\ &\leq L_1[(1 - \alpha)\|\omega_n - \omega_1^*\| + L_2 \alpha\|\omega'_n - \omega_2^*\|] \end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| \leq L_2[(1 - \alpha)\|\omega'_n - \omega_2^*\| + L_1 \alpha\|\omega_n - \omega_1^*\|]$$

bulunur. Taraf tarafa bu iki ifade toplanırsa

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| + \|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| &\leq L_1[(1 - \alpha)\|\omega_n - \omega_1^*\| + L_2 \alpha\|\omega'_n - \omega_2^*\| \\ &\quad + L_2[(1 - \alpha)\|\omega'_n - \omega_2^*\| + L_1 \alpha\|\omega_n - \omega_1^*\|] \\ &\leq L_1(1 - (1 - L_2)\alpha)\|\omega_n - \omega_1^*\| \\ &\quad + L_2(1 - (1 - L_1)\alpha)\|\omega'_n - \omega_2^*\| \\ &\leq \lambda(\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\|). \end{aligned}$$

Şimdi $\Lambda \times \Lambda$ üzerindeki $\|\cdot\|_1$ normunu her $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda \times \Lambda$ için $\|(\omega_1, \omega_2)\|_1 = \|\omega_1\| + \|\omega_2\|$ şeklinde tanımlayalım. Burada $\Lambda \times \Lambda$ için $(\Lambda, \|\cdot\|_1)$ bir Banach uzayıdır. Son eşitsizlikten

$$\|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|_1 \leq \lambda \|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|_1$$

elde edilir. $\lambda \in (0,1)$ aralığında olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|_1 = 0$$

dır. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_1^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega'_n - \omega_2^*\| = 0$$

yazılır. Dolayısıyla $\{\omega_n\}$ ve $\{\omega'_n\}$ dizileri ω_1^* ve ω_2^* a yakınsar.

Lemma 3: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının iki boş olmayan kapalı alt kümesi olsun. $\{\mathcal{S}_n\}$, C_1 den C_2 ye tanımlı dönüşümlerin bir dizisi ve bu $\{\mathcal{S}_n\}$ dizisi, $\{a_n\}$ dizisi için $[0, \infty)$ aralığında hemen hemen genişlemeyen olsun. Yani her $\omega_1, \omega_2 \in C_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|\mathcal{S}_n \omega_1 - \mathcal{S}_n \omega_2\| < \|\omega_1 - \omega_2\| + a_n$$

dir. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ dönüşümü her $\omega_3 \in C_1$ için $\mathcal{T}_1 \omega_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n \omega_3$ şeklinde tanımlansın. Böylece $\mathcal{T}_1$ dönüşümü genişlemeyendir (Sahu 2014).

Lemma 4: $\{a_n\}$ dizisi $a_n \geq 0$ ve $\sigma_n \geq 0$ için

$$a_{n+1} \leq \omega a_n + \sigma_n$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ ve $0 \leq \omega < 1$ dir. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ için $a_n \rightarrow 0$ dır (Sahu 2014).

Lemma 5: Λ düzgün konveks Banach uzayı ve $n \geq 1$ için $0 \leq p \leq t_n \leq q < 1$ olsun. $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$, Λ de iki dizi olmak üzere uygun bir $s \geq 0$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| \leq s, \limsup_{n \rightarrow \infty} \|b_n\| \leq s, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - t_n)b_n + t_n a_n\| = s$$

şartları sağlansın. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n - a_n\| = 0$ dır (Schu 1991).

Lemma 6: $\{\gamma_n\}$ gerçel değerli bir dizi olsun ve $n_0 \in \mathbb{N}$ herhangi bir sayı olsun, $n > n_0$ sağlayan tüm n ler için

$$\gamma_{n+1} < (1 - \sigma_n)\gamma_n + \sigma_n \rho_n$$

sağlansın. Burada $\sigma_n \in (0,1)$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \infty$ dir. Bu durumda

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \gamma_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$$

geçerlidir (Soltuz 2008).

Teorem 20: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümeleri olsun. $\{\mathcal{S}_n\}$, C_1 den C_2 ye tanımlı dönüşümlerin bir dizisi ve bu $\{\mathcal{S}_n\}$ dizisi $\{a_n\}$ dizisi ile birlikte hemen hemen genişlemeyen olsun. $\mathcal{T}_1$ dönüşümü, her $\omega_3 \in C_1$ için $\mathcal{T}_1 \omega_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n \omega_3$ olmak üzere C_1 den C_2 ye genişlemeyendir. Ayrıca $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ L -Lipschitz daraltandır. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

- i. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ olan tek bir noktası vardır.

ii. Her $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için

$$\begin{cases} \omega'_n = \mathcal{S}_n \omega_n \\ \omega_{n+1} = \mathcal{T}_2 \omega'_n \end{cases} \quad (8)$$

şeklinde tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi (ω_1^*, ω_2^*) noktasına güçlü yakınsar.

iii. $\alpha \in (0,1)$ ve herhangi bir $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için aşağıdaki gibi tanımlanan paralel S-algoritma metodu

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = \mathcal{T}_2[(1 - \alpha_n)\omega'_n + \alpha \mathcal{S}_n \omega_n] \\ \omega'_{n+1} = \mathcal{S}_n[(1 - \alpha)\omega_n + \alpha \mathcal{T}_2 \omega'_n] \end{cases} \quad (9)$$

(ω_1^*, ω_2^*) noktasına güçlü yakınsar (Sahu 2014).

İspat:

- i. Lemma 3 den $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ dönüşümü daraltandır. Ayrıca $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ dönüşümü de daraltandır. Teorem 15 den ω_1^* ve ω_2^* , $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktaları olmak üzere $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ olan tek bir noktaya sahiptir.
- ii. $n \in \mathbb{N}$ için (8) denkleminde

$$\begin{aligned} \|\omega'_n - \omega_2^*\| &= \|\mathcal{S}_n(\omega_n) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| \\ &\leq \|\mathcal{S}_n(\omega_n) - \mathcal{S}_n(\omega_1^*)\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| \\ &\leq \|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| + a_n \end{aligned} \quad (10)$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| &= \|\mathcal{T}_2(\omega'_n) - \mathcal{T}_2(\omega_2^*)\| \leq L\|\omega'_n - \omega_2^*\| \\ &\leq L\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| + a_n \end{aligned}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için $\|\mathcal{S}_n(\omega_n) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| + a_n \rightarrow 0$ olduğundan ve Lemma 4 ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_1^*\| = 0$$

olduğu görülür. (10) dan $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \omega_2^*$ elde edilir.

iii. $\lambda := 1 - (1 - L)\alpha$ olarak alalım. $L, \alpha \in (0,1)$ olduğundan $L < 1 - (1 - L)\alpha$ yazılır. (9) dan

$$\begin{aligned} \|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| &= \|\mathcal{S}_n[(1 - \alpha)\omega_n + \alpha \mathcal{T}_2 \omega'_n] - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| \\ &\leq \|\mathcal{S}_n[(1 - \alpha)\omega_n + \alpha \mathcal{T}_2 \omega'_n] - \mathcal{S}_n(\omega_1^*)\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| \\ &\leq \|[(1 - \alpha)\omega_n + \alpha \mathcal{T}_2 \omega'_n] - \omega_1^*\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| + a_n \\ &\leq (1 - \alpha)\|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha\|\mathcal{T}_2(\omega'_n) - \omega_1^*\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| + a_n \\ &= (1 - \alpha)\|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha\|\mathcal{T}_2(\omega'_n) - \mathcal{T}_2(\omega_2^*)\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| + a_n \end{aligned}$$

$$\leq (1 - \alpha) \| \omega_n - \omega_1^* \| + L\alpha \| \omega'_n - y^* \| + \| \mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*) \| + a_n$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \| \omega_{n+1} - \omega_1^* \| &= \| \mathcal{T}_2[(1 - \alpha)\omega'_n + \alpha\mathcal{S}_n\omega_n] - \mathcal{T}_2(\omega_2^*) \| \\ &\leq L \| [(1 - \alpha)\omega'_n + \alpha\mathcal{S}_n\omega_n] - \omega_2^* \| \\ &\leq L[(1 - \alpha) \| \omega'_n - \omega_2^* \| + \alpha \| \mathcal{S}_n\omega_n - \mathcal{T}_1\omega_1^* \|] \\ &\leq L[(1 - \alpha) \| \omega'_n - \omega_2^* \| + \alpha(\| \mathcal{S}_n\omega_n - \mathcal{S}_n\omega_1^* \| + \| \mathcal{S}_n\omega_1^* - \mathcal{T}_1\omega_1^* \|)] \\ &\leq L[(1 - \alpha) \| \omega'_n - \omega_2^* \| + \alpha(\| \omega_n - \omega_1^* \| + \| \mathcal{S}_n\omega_1^* - \mathcal{T}_1\omega_1^* \|) + a_n] \\ &\leq L[(1 - \alpha) \| \omega'_n - \omega_2^* \| + \alpha \| \omega_n - \omega_1^* \| + \| \mathcal{S}_n\omega_1^* - \mathcal{T}_1\omega_1^* \| + a_n] \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} \| \omega_{n+1} - \omega_1^* \| + \| \omega'_{n+1} - \omega_2^* \| &\leq (1 - \alpha) \| \omega_n - \omega_1^* \| \\ &\quad + L\alpha \| \omega'_n - \omega_2^* \| + \| \mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*) \| + a_n \\ &\quad + L[(1 - \alpha) \| \omega'_n - \omega_2^* \| + \alpha \| \omega_n - \omega_1^* \| + \| \mathcal{S}_n\omega_1^* - \mathcal{T}_1\omega_1^* \| + a_n] \\ &\leq [1 - (1 - L)\alpha] \| \omega_n - \omega_1^* \| + L \| \omega'_n - \omega_2^* \| \\ &\quad + 2(\| \mathcal{S}_n\omega_1^* - \mathcal{T}_1\omega_1^* \| + a_n) \\ &\leq \lambda(\| \omega_n - \omega_1^* \| + \| \omega'_n - \omega_2^* \|) + 2(\| \mathcal{S}_n\omega_1^* - \mathcal{T}_1\omega_1^* \| + a_n) \end{aligned} \quad (11)$$

elde edilir. Burada $(\Lambda \times \Lambda, \| \cdot \|_1)$ bir Banach uzaydır. $\| \cdot \|_1$ normu Teorem 19 ispatında tanımlandığı şekildedir. Dolayısıyla (11) i aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\| (\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*) \|_1 \leq \lambda \| (\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*) \|_1 + 2(\| \mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*) \| + a_n)$$

$\lambda \in (0,1)$ olduğundan Lemma 4 ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*) \|_1 = 0$$

dır. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \omega_n - \omega_1^* \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \| \omega'_n - \omega_2^* \| = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{\omega_n\}$ ve $\{\omega'_n\}$ dizileri ω_1^* ve ω_2^* a yakınsar.

Yukarıda tanımlanan paralel algoritmalarla hareketle Maldar aşağıdaki gibi Sintunavarat ve Pitea'nın (Sintunavarat ve Pitea, 2016) algoritmasını paralel olarak tanımlayarak bu algoritmanın Lipschitz dönüşümlerin alterne noktalarına yakınsamasını incelemiştir (Maldar, 2022).

Algoritma 1: C_1 ve C_2 , Λ metrik uzayının boştan farklı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ dönüşümleri verilsin. $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = (1 - \alpha_n)\mathcal{T}_2 z_n + \alpha_n \mathcal{T}_2 w_n & \omega'_{n+1} = (1 - \alpha_n)\mathcal{T}_1 u_n + \alpha_n \mathcal{T}_1 v_n \\ z_n = (1 - \beta_n)\omega'_n + \beta_n w_n & u_n = (1 - \beta_n)\omega_n + \beta_n v_n \\ w_n = (1 - \gamma_n)\omega'_n + \gamma_n \mathcal{T}_1 \omega_n & v_n = (1 - \gamma_n)\omega_n + \gamma_n \mathcal{T}_2 y_n \end{cases}$$

paralel algoritması tanımlansın. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dir.

Maldar, Sintunavarat ve Pitea tarafından üretilen algoritma metodunun daha iyi bir yakınsama hızına sahip olduğunu kanıtlamıştır. Yakınsama teoremleri ile ilgili aşağıdaki farklı sonuçları elde etmiştir.

Teorem 21: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının iki boş olmayan, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki Lipschitz dönüşüm, L_1 ve L_2 Lipschitz sabitleri olmak üzere $L_1 L_2 < 1$ şartı sağlansın. O halde aşağıdakiler sağlanır;

- i. ω_1 ve ω_2 , $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktaları olmak üzere $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ olan tek bir noktaya sahiptir.
- ii. Algoritma 1 tarafından oluşturulan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi (ω_1, ω_2) noktasına yakınsar ve

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1\| \leq L_1 L_2 \|\omega_n - \omega_1\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca Maldar, aşağıdaki paralel algoritmayı tanımlayarak alterne noktalarla ilgili diğer sonuçları elde etmiştir.

Algoritma 2: C_1 ve C_2 , Λ metrik uzayının boştan farklı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki dönüşüm olmak üzere $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = (1 - \alpha_n)\mathcal{T}_2 z_n + \alpha_n \mathcal{T}_2 w_n & \omega'_{n+1} = (1 - \alpha_n)\mathcal{T}_1 u_n + \alpha_n \mathcal{T}_1 v_n \\ z_n = (1 - \beta_n)\omega'_n + \beta_n w_n & u_n = (1 - \beta_n)\omega_n + \beta_n v_n \\ w_n = \mathcal{T}_1 \omega_n & v_n = \mathcal{T}_2 \omega'_n \end{cases}$$

tanımlansın. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dir (Maldar 2022).

Eğer Algoritma 1 de $\gamma_n = 1$ alınırsa Algoritma 2 nin elde edilir.

Teorem 22: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boştan farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$, $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ Lipschitz dönüşümler olmak üzere sırasıyla Lipschitz sabitleri L_1, L_2 olsun ve $L_1 L_2 < 1$ koşulu sağlansın. O halde aşağıdakiler sağlanır (Maldar, 2022).

- i. ω_1 ve ω_2 , $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktaları olmak üzere $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ olan tek bir noktaya sahiptir.
- ii. Algoritma 2 tarafından oluşturulan $\{(\omega_n, \omega'_n)\} \in C_1 \times C_2$ dizisi (ω_1, ω_2) noktasına yakınsar (Maldar 2022).

Teorem 23: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boştan farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$, $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ Lipschitz dönüşümler olmak üzere sırasıyla Lipschitz sabitleri L_1, L_2 olsun ve $L_1 + L_2 < 1$ koşulu sağlansın. Algoritma 2 tarafından oluşturulan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi tek bir (ω_1, ω_2) noktasına güçlü bir şekilde yakınsar. Ayrıca $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktaları sırasıyla ω_1 ve ω_2 noktalarıdır (Maldar 2022).

Algoritma 3: Λ bir Banach uzay ve $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü verilsin.

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = \mathcal{T}\omega'_n \\ \omega'_n = \mathcal{T}z_n \\ z_n = (1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n\mathcal{T}\omega_n \end{cases}$$

algoritması M-algoritması olarak tanımlanmıştır (Ullah and Arshad, 2018). Burada $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ dir.

2023 yılında Atalan tarafından yukarıda tanımlanan M-algoritmasından hareketle aşağıdaki paralel algoritma tanımlanarak bazı alterne noktalar için yakınsama sonuçları elde edilmiştir.

Algoritma 4: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boştan farklı ve konveks alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki dönüşüm olmak üzere $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1z_n & \omega'_{n+1} = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2u_n \\ z_n = \mathcal{T}_2w_n & u_n = \mathcal{T}_1v_n \\ w_n = (1 - \alpha_n)\omega'_n + \alpha_n\mathcal{T}_1\omega_n & v_n = (1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n\mathcal{T}_2\omega'_n \end{cases}$$

olsun. Burada $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ dir (Atalan 2023).

Teorem 24: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının iki boş olmayan, kapalı alt kümesi olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki Lipschitz dönüşüm, L_1 ve L_2 Lipschitz sabitleri olmak üzere $L_1L_2 < 1$ şartı sağlansın. O halde aşağıdakiler sağlanır;

- i. ω_1 ve ω_2 , $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktaları olmak üzere $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ olan tek bir noktaya sahiptir.
- ii. Algoritma 4 tarafından oluşturulan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi (ω_1, ω_2) noktasına yakınsar ve

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1\| \leq (L_1L_2)^2\|\omega_n - \omega_1\|$$

eşitsizliği sağlanır (Atalan 2023).

Teorem 25: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boştan farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$, $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ Lipschitz dönüşümler olmak üzere sırasıyla Lipschitz sabitleri L_1, L_2 olsun ve $L_1 L_2 < 1$ koşulu sağlansın. Bu durumda Algoritma 4 tarafından oluşturulan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktası olan tek bir (ω_1, ω_2) noktasına güçlü bir şekilde yakınsar. Ayrıca

$$\|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}) - (\omega_1, \omega_2)\|_* \leq L_1 L_2 \|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1, \omega_2)\|_*$$

eşitsizliği sağlanır (Atalan 2023).

Teorem 26: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boştan farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$, $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ Lipschitz dönüşümler olmak üzere sırasıyla Lipschitz sabitleri L_1, L_2 olsun ve $L_1 L_2 < \frac{1}{2}$ koşulu sağlansın. $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ sırasıyla $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ nin yaklaşım operatörleri olsunlar. $\{\omega_n\}$ ve $\{\omega'_n\}$ dizileri Algoritma 4 tarafından tanımlanan diziler ve $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri de aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1 c_n & b_{n+1} = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 k_n \\ c_n = \mathcal{S}_2 d_n & k_n = \mathcal{S}_1 h_n \\ d_n = (1 - \alpha_n) b_n + \alpha_n \mathcal{S}_1 a_n & h_n = (1 - \alpha_n) a_n + \alpha_n \mathcal{S}_2 b_n. \end{cases}$$

Burada $\{\alpha_n\} \in [0, 1]$ dir. Ayrıca her $\vartheta \in C_1$ ve her $\sigma \in C_2$ için $\|\mathcal{T}_1 \vartheta - \mathcal{S}_1 \vartheta\| \leq \varepsilon_1$ ve $\|\mathcal{T}_2 \sigma - \mathcal{S}_2 \sigma\| \leq \varepsilon_2$ eşitsizlikleri sağlanacak şekilde negatif olmayan ε_1 ve ε_2 sabitleri var olsun. Eğer $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$, $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ nin alterne noktası ve $(a, b) \in C_1 \times C_2$ de $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ nin alterne noktası ise $n \rightarrow \infty$ iken $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$ olup

$$\begin{aligned} \|(\omega_1, \omega_2) - (a, b)\|_* &= \|\omega_1 - a\| + \|\omega_2 - b\| \\ &\leq \frac{(1 + L_1 L_2 + \alpha_n L_1 L_2^2) \varepsilon_1 + (1 + L_1 L_2 + \alpha_n L_1^2 L_2) \varepsilon_2}{1 - L_1 L_2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Atalan 2023).

Varyasyonel Eşitsizlikler İle İlgili Teoremler

Lemma 7: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boştan farklı kapalı konveks alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$, $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki lineer olmayan operatör, δ ve θ ise pozitif iki reel sayı olsun. $Q = I - \delta \mathcal{T}_1$ ve $W = I - \theta \mathcal{T}_2$ dönüşümleri tanımlansın. Böylece aşağıdakiler denktir.

- i. ω_1^* ve ω_2^* , $P_{C_2} Q$ ve $P_{C_1} W$ nin alterne noktalarıdır. Yani

$$P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1)(\omega_1^*) = \omega_2^*$$

$$P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)(\omega_2^*) = \omega_1^* \quad (12)$$

dır.

- ii. $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$, aşağıdaki varyasyonel eşitsizliğin bir çözümüdür.

$$\begin{cases} \langle \omega_2^* - Q\omega_1^*, \omega_1 - \omega_2^* \rangle \geq 0 \text{ her } \omega_1 \in C_2 \text{ için} \\ \langle \omega_1^* - W\omega_2^*, \omega_1 - \omega_1^* \rangle \geq 0 \text{ her } \omega_1 \in C_1 \text{ için} \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktasını bulmaktır (Zhao et al. 2018).

C_1 ve C_2 , Λ nin boş olmayan kapalı konveks alt kümeleri, $F_{C_2} : \Lambda \rightarrow C_2$ ve $F_{C_1} : \Lambda \rightarrow C_1$ operatörler olsun. Ayrıca $\mathcal{T}_1 : C_1 \rightarrow \Lambda$ ve $\mathcal{T}_2 : C_2 \rightarrow \Lambda$ lineer olmayan operatörler ve $\delta, \theta \in (0, \infty)$ pozitif reel sayıları verilsin.

$$\begin{cases} F_{C_2}(I - \delta\mathcal{T}_1)(\omega_1^*) = \omega_2^* \\ F_{C_1}(I - \theta\mathcal{T}_2)(\omega_2^*) = \omega_1^* \end{cases} \quad (13)$$

denklemi sağlanacak şekilde $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktasını bulma problemi olan alterne problemini göz önüne alalım. (13) alterne nokta probleminin özel durumu aşağıda verilmiştir.

Eğer $F_{C_1} = P_{C_1}$ ve $F_{C_2} = P_{C_2}$ alınırsa, (13) sistemi Lemma 7 den aşağıdaki lineer olmayan varyasyonel eşitsizlikler sistemine denk olur.

$$\begin{aligned} P_{C_2}(I - \delta\mathcal{T}_1)(\omega_1^*) &= \omega_2^* \\ P_{C_1}(I - \theta\mathcal{T}_2)(\omega_2^*) &= \omega_1^* \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} \langle \delta\mathcal{T}_1(\omega_1^*) + \omega_2^* - \omega_1^*, \omega_1 - \omega_2^* \rangle &\geq 0, \quad \forall \omega_1 \in C_2 \\ \langle \theta\mathcal{T}_2(\omega_2^*) + \omega_1^* - \omega_2^*, \omega_1 - \omega_1^* \rangle &\geq 0, \quad \forall \omega_1 \in C_1 \end{aligned} \quad (14)$$

olacak şekilde $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktasının bulunmasıdır.

Yao, Liou ve Kang (Yao et al. 2013), $C_1 = C_2$ durumu için düzgün konveks ve 2-düzgün smooth Banach uzaylarında varyasyonel eşitsizlik sistemlerini incelemiştir. Daha sonra Zhao, Sahu ve Wen (Zhao et al. 2018), iki farklı C_1 ve C_2 kümesini içeren genel varyasyonel eşitsizlik sistemlerini 2-düzgün smooth Banach uzaylarında ele alarak bu çalışmayı genişletmiştir.

2018 yılında Xu ve Sahu, paralel normal S-algoritmasını kullanarak yukarıda tanımlanan genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik probleminin çözümü için aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 27: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boş olmayan, kapalı, konveks alt kümeler olsun. $\mathcal{T}_1 : C_1 \rightarrow \Lambda$ dönüşümü $\delta\mathcal{T}_1$ ters güçlü monoton (inverse strong monoton), $\mathcal{T}_2 : C_2 \rightarrow \Lambda$

dönüşümü ise $\delta_{\mathcal{T}_2}$ ters güçlü monoton operatörler olsun. Ayrıca $\delta \in (0, \frac{2}{\delta_{\mathcal{T}_1}})$, $\theta \in (0, \frac{2}{\delta_{\mathcal{T}_2}})$ ve $Alt(P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1), P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için $C_1 \times C_2$ de tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ paralel normal S-algoritması

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)[(1 - \alpha_n)\omega'_n + \alpha_n P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1)\omega_n] \\ \omega'_{n+1} = P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1)[(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)\omega'_n] \end{cases}$$

dür. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0, 1)$ aralığında olup $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = \infty$ koşulu sağlanır. Bu durumda $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi (14) varyasyonel eşitsizliğinin çözümü olan $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktasına zayıf yakınsar (Zhao et al. 2018).

$$\begin{cases} P_{C_1}(I - \theta \nabla g)\omega_1 = \omega_2 \\ P_{C_2}(I - \delta \nabla f)\omega_2 = \omega_1 \end{cases} \quad (15)$$

denklemini sağlayan $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ problemini ele alalım. Burada C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boş olmayan, kapalı, konveks alt kümeleri, $f, g: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ Frechet diferensiyellenebilir konveks fonksiyonlar ve $\delta, \theta \in (0, \infty)$ pozitif reel sayılardır.

Teorem 28: C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boş olmayan, kapalı, konveks alt kümeleri ve $f, g: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ Frechet diferensiyellenebilir konveks fonksiyonlar olsun. Burada ∇f , L_f -Lipschitz sürekli ve ∇g , L_g -Lipschitz sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca $\delta \in (0, \frac{2}{L_f})$, $\theta \in (0, \frac{2}{L_g})$ ve $Alt(P_{C_2}(I - \delta \nabla f), P_{C_1}(I - \theta \nabla g)) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için $C_1 \times C_2$ de tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ paralel normal S-algoritması

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = P_{C_1}(I - \theta \nabla g)[(1 - \alpha_n)\omega'_n + \alpha_n P_{C_2}(I - \delta \nabla f)\omega_n] \\ \omega'_{n+1} = P_{C_2}(I - \delta \nabla f)[(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n P_{C_1}(I - \theta \nabla g)\omega'_n] \end{cases}$$

dür. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0, 1)$ aralığında olup $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = \infty$ koşulu sağlanır. Bu durumda $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi (15) sisteminin çözümü olan $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktasına zayıf yakınsar (Zhao et al. 2018).

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, yukarıda literatür taramasında dikkate aldığımız çalışmalardan hareketle bu tez kapsamında aşağıdaki paralel algoritma metodu oluşturulacak ve bazı temel teoremler ispatlanacaktır.

Algoritma 5: C_1 ve C_2 , Λ normlu uzayının boştan farklı konveks alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ dönüşümlerini alalım. $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = \mathcal{T}_2 \omega_n'' & \omega_{n+1}' = \mathcal{T}_1 u_n \\ \omega_n'' = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 w_n & u_n = \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 v_n \\ w_n = \mathcal{T}_1[(1 - \alpha_n)\mathcal{T}_2 \omega_n' + \alpha_n \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n] & v_n = \mathcal{T}_2[(1 - \alpha_n)\mathcal{T}_1 \omega_n + \alpha_n \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 \omega_n'] \end{cases}$$

şeklindeki $\{(\omega_n, \omega_n')\}$ paralel algoritması tanımlansın. Burada $\alpha_n \in [0,1]$ dir (Can *et al.* 2024).

$C_1 \times C_2$ kartezyen çarpım uzayında verilen yukarıdaki paralel algoritmanın C_1 deki ifadesi

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = \mathcal{T} \omega_n'', \\ \omega_n'' = \mathcal{T}^2 w_n, \\ w_n = \mathcal{T}[(1 - \alpha_n)\mathcal{T} \omega_n' + \alpha_n \mathcal{T}^2 \omega_n'], n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (16)$$

şeklinde dir. Aşağıdaki teoremi daha basit bir yolla ispatlamak için bu algoritmayı kullanacağız (Can *et al.* 2024).

Teorem 29: $C_1, C_2 \neq \emptyset$ ve Λ Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki Lipschitz dönüşüm, L_1 ve L_2 bu dönüşümlerin Lipschitz sabitleri olmak üzere $L_1 L_2 < 1$ şartı sağlansın.

- i. $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ olacak şekilde tek bir nokta vardır ve buradaki ω_1^* ve ω_2^* , $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır.
- ii. Algoritma 5 tarafından oluşturulan $\{(\omega_n, \omega_n')\} \in C_1 \times C_2$ dizisi (ω_1^*, ω_2^*) noktasına yakınsar (Can *et al.* 2024).

İspat: $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki Lipschitz dönüşüm ve $L_1 L_2 < 1$ olduğundan bu dönüşümlerin bileşkesi olan $\mathcal{T} := \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_1$ dönüşümünün de daraltan bir dönüşüm olduğu açıktır. Bu yüzden $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ olacak şekilde tek bir nokta vardır ve buradaki ω_1^* ve ω_2^* , $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır. Algoritma 5, (16) ve alterne noktaların tanımından

$$\begin{aligned}
\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| &= \|\mathcal{T}\omega_n'' - \omega_1^*\| \\
&= \|\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_n'' - \mathcal{T}_2\omega_2^*\| \\
&\leq L_2\|\mathcal{T}_1\omega_n'' - \omega_2^*\| \\
&= L_2\|\mathcal{T}_1\omega_n'' - \mathcal{T}_1\omega_1^*\| \\
&\leq L_2L_1\|\omega_n'' - \omega_1^*\|
\end{aligned} \tag{17}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\omega_n'' - \omega_1^*\| &= \|\mathcal{T}^2\omega_n - \omega_1^*\| \\
&= \|(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)^2\omega_n - (\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\omega_1^*\| \\
&\leq L_1^2L_2^2\|\omega_n - \omega_1^*\|
\end{aligned} \tag{18}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten ve $L_1L_2 < 1$ den

$$\begin{aligned}
\|\omega_n - \omega_1^*\| &= \|\mathcal{T}[(1 - \alpha_n)\mathcal{T}\omega_n + \alpha_n\mathcal{T}^2\omega_n] - \omega_1^*\| \\
&= \|\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1[(1 - \alpha_n)\mathcal{T}\omega_n + \alpha_n\mathcal{T}^2\omega_n] - \mathcal{T}_2\omega_2^*\| \\
&\leq L_2\|\mathcal{T}_1[(1 - \alpha_n)\mathcal{T}\omega_n + \alpha_n\mathcal{T}^2\omega_n] - \omega_2^*\| \\
&= L_2\|\mathcal{T}_1[(1 - \alpha_n)\mathcal{T}\omega_n + \alpha_n\mathcal{T}^2\omega_n] - \mathcal{T}_1\omega_1^*\| \\
&= L_2L_1[(1 - \alpha_n)\|\mathcal{T}\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha_n\|\mathcal{T}^2\omega_n - \omega_1^*\|] \\
&= L_2L_1[(1 - \alpha_n)\|\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_n - \mathcal{T}_2\omega_2^*\| + \alpha_n\|(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)^2\omega_n - (\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\omega_1^*\|] \\
&\leq L_2L_1[(1 - \alpha_n)L_2\|\mathcal{T}_1\omega_n - \omega_2^*\| + \alpha_nL_2L_1\|(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\omega_n - \omega_1^*\|] \\
&= L_2L_1[(1 - \alpha_n)L_2\|\mathcal{T}_1\omega_n - \mathcal{T}_1\omega_1^*\| + \alpha_nL_2L_1\|(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\omega_n - (\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\omega_1^*\|] \\
&\leq L_2L_1[(1 - \alpha_n)L_2L_1\|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha_nL_2^2L_1^2\|\omega_n - \omega_1^*\|] \\
&= L_2^2L_1^2[(1 - \alpha_n + \alpha_nL_2L_1)\|\omega_n - \omega_1^*\|] \\
&= L_2^2L_1^2(1 - (1 - L_2L_1)\alpha_n)\|\omega_n - \omega_1^*\|
\end{aligned} \tag{19}$$

yazılır. (17), (18) ve (19) dan

$$\begin{aligned}
\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| &\leq L_2L_1L_2^2L_1^2L_2^2L_1^2[1 - (1 - L_2L_1)\alpha_n]\|\omega_n - \omega_1^*\| \\
&= L_2^5L_1^5[1 - (1 - L_2L_1)\alpha_n]\|\omega_n - \omega_1^*\| \\
&\leq (L_2L_1)^5\|\omega_n - \omega_1^*\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| \leq (L_2L_1)^5\|\omega_n - \omega_1^*\|$$

yazılır. Burada $L_2 L_1 < 1$ olup her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_1^*\| = 0$$

bulunur. Ayrıca $\mathcal{T}_1$ sürekli olduğundan $\omega'_n = \mathcal{T}_1 \omega_n \rightarrow \mathcal{T}_1 \omega_1^* = \omega_2^*$ dir. Böylece $(\omega_n, \omega'_n) \rightarrow (\omega_1^*, \omega_2^*)$ yakınsaklığı elde edilir.

Teorem 30: $C_1, C_2 \neq \emptyset$ ve Λ Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki Lipschitz dönüşüm, L_1 ve L_2 bu dönüşümlerin Lipschitz sabitleri olmak üzere $L_1 + L_2 < 1$ şartı sağlansın. Bu durumda Algoritma 5 ile tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\} \in C_1 \times C_2$ dizisi tek bir (ω_1^*, ω_2^*) noktasına kuvvetli bir şekilde yakınsar. Ayrıca ω_1^* ve ω_2^* noktaları $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır (Can *et al.* 2024).

İspat: Teorem 29 a göre $C_1 \times C_2$ de tek bir (ω_1^*, ω_2^*) noktası vardır ve bu ω_1^* ve ω_2^* noktası $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır. Algoritma 5 ve alterne noktaların tanımından

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| &= \|\mathcal{T}_2 \omega_n'' - \mathcal{T}_2 \omega_2^*\| \\ &\leq L_2 \|\omega_n'' - \omega_2^*\| \end{aligned} \quad (20)$$

ve

$$\begin{aligned} \|\omega_n'' - \omega_2^*\| &= \|\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 \omega_n - \omega_2^*\| \\ &= \|\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 \omega_n - \mathcal{T}_1 \omega_1^*\| \\ &\leq L_1 \|\mathcal{T}_2 \omega_n - \omega_1^*\| \\ &= L_1 \|\mathcal{T}_2 \omega_n - \mathcal{T}_2 \omega_2^*\| \\ &\leq L_1 L_2 \|\omega_n - \omega_2^*\| \end{aligned} \quad (21)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|\omega_n - \omega_2^*\| &= \|\mathcal{T}_1[(1 - \alpha_n)\mathcal{T}_2 \omega_n' + \alpha_n \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n] - \omega_2^*\| \\ &= \mathcal{T}_1[(1 - \alpha_n)\|\mathcal{T}_2 \omega_n' - \omega_2^*\| + \alpha_n \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n - \mathcal{T}_1 \omega_1^*\|] \\ &\leq L_1 L_2 (1 - \alpha_n) \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \alpha_n L_1 L_2 \|\omega_n - \omega_1^*\| \end{aligned} \quad (22)$$

yazılır. $L_1 + L_2 < 1$ ve L_1 ve L_2 pozitif reel sayılar olduğundan $L_1 < 1$ ve $L_2 < 1$ dir. Dolayısıyla (20), (21) ve (22) eşitsizlikleri birleştirilerek

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| &\leq L_2 [L_1 L_2 \|\omega_n - \omega_2^*\|] \\ &\leq L_1 L_2^2 [L_1 L_2 (1 - \alpha_n) \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \alpha_n L_1 L_2 \|\omega_n - \omega_1^*\|] \\ &\leq L_1 [\|\omega_n' - \omega_2^*\| + \|\omega_n - \omega_1^*\|] \end{aligned} \quad (23)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (20) ile (23) arasındaki işlemler kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik de yazılabilir:

$$\|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| \leq L_2[\|\omega'_n - \omega_2^*\| + \|\omega_n - \omega_1^*\|]. \quad (24)$$

(23) ve (24) den

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| + \|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| \leq \lambda[\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\|] \quad (25)$$

elde ederiz. Burada $\lambda = L_1 + L_2 < 1$ dir. Şimdi $\Lambda \times \Lambda$ üzerinde $\|\cdot\|$ normu her $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda \times \Lambda$ için $\|(\omega_1, \omega_2)\|_* = \|\omega_1\| + \|\omega_2\|$ şeklinde tanımlansın. Burada $(\Lambda \times \Lambda, \|\cdot\|_*)$ ifadesinin bir Banach uzayı olduğunu biliyoruz. $\Lambda \times \Lambda$ daki toplam normu kullanılırsa (25) eşitsizliği

$$\|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|_* \leq \lambda\|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|_* \quad (26)$$

şeklinde yazılabilir. Tümevarım metodundan

$$\|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|_* \leq \lambda^n\|(\omega_1, \omega_2) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|_* \quad (27)$$

bulunur. (27) deki eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|_* = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_1^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega'_n - \omega_2^*\| = 0$$

dır. Bu yüzden $\{\omega_n\}$ ve $\{\omega'_n\}$ dizileri sırasıyla ω_1^* ve ω_2^* noktalarına yakınsar.

Teorem 31: $C_1, C_2 \neq \emptyset$ ve Λ Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri olsun. $T_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $T_2: C_2 \rightarrow C_1$ iki Lipschitz dönüşüm, L_1 ve L_2 Lipschitz sabitleri olmak üzere $L_1 + L_2 < 1$ şartı sağlansın. $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ sırasıyla T_1 ve T_2 nin yaklaşık operatörleri olsun. Ayrıca Algoritma 5 tarafından oluşturulan $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri

$$\begin{cases} a_{n+1} = \mathcal{S}_2 k_n & b_{n+1} = \mathcal{S}_1 h_n \\ k_n = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 d_n & h_n = \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1 k_n \\ d_n = \mathcal{S}_1[(1 - \alpha_n)\mathcal{S}_2 b_n + \alpha_n \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1 a_n] & k_n = \mathcal{S}_2[(1 - \alpha_n)\mathcal{S}_1 a_n + \alpha_n \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 b_n] \end{cases} \quad (28)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\alpha_n \in [0,1]$ olup $\theta \in C_1$ ve $\sigma \in C_2$ için $\|T_1 \sigma - \mathcal{S}_1 \sigma\| \leq \varepsilon_1$ ve

$\|T_2 \theta - \mathcal{S}_2 \theta\| \leq \varepsilon_2$ olacak şekilde ε_1 ve ε_2 sıfırdan büyük sabitlerinin olduğunu kabul edelim.

Eğer $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için T_1 ve T_2 dönüşümlerinin alterne noktası, $(a, b) \in C_1 \times C_2$ için $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ dönüşümlerinin alterne noktası ve $n \rightarrow \infty$ için $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$ ise

$$\|(\omega_1, \omega_2) - (a, b)\|_* = \|\omega_1 - a\| + \|\omega_2 - b\| \leq \frac{L_2 \varepsilon_1 + L_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{1 - L_1 - L_2}$$

eşitsizliği sağlanır (Can et al. 2024).

İspat: Algoritma 5 ve (28) den

$$\begin{aligned}
\|\omega_{n+1} - a_{n+1}\| &\leq \|\mathcal{T}_2\omega_n'' - \mathcal{S}_2k_n\| \\
&\leq \|\mathcal{T}_2\omega_n'' - \mathcal{T}_2k_n\| + \|\mathcal{T}_2k_n - \mathcal{S}_2\omega_n''\| \\
&\leq L_2\|\omega_n'' - k_n\| + \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{29}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\omega_n'' - k_n\| &\leq L_1\|\mathcal{T}_2w_n - \mathcal{S}_2d_n\| \\
&\leq L_1\|\mathcal{T}_2w_n - \mathcal{T}_2d_n\| + \|\mathcal{T}_2d_n - \mathcal{S}_2d_n\| \\
&\leq L_1L_2\|w_n - d_n\| + \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{30}$$

bulunur. (30) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|w_n - d_n\| &\leq \|\mathcal{T}_1[(1 - \alpha_n)\mathcal{T}_2\omega_n' + \alpha_n[\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_n] \\
&\quad - \mathcal{S}_1[(1 - \alpha_n)\mathcal{S}_2b_n + \alpha_n\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1a_n]]\| \\
&\leq L_1\{(1 - \alpha_n)\|\mathcal{T}_2\omega_n' - \mathcal{S}_2b_n\| + \alpha_n\|\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_n - \mathcal{S}_2\mathcal{S}_1a_n\|\} \\
&\leq L_1\{(1 - \alpha_n)\|\mathcal{T}_2\omega_n' - \mathcal{T}_2b_n\| + \|\mathcal{T}_2b_n - \mathcal{S}_2b_n\| \\
&\quad + \alpha_nL_2[\|\mathcal{T}_1\omega_n - \mathcal{T}_1a_n\| + \|\mathcal{T}_1a_n - \mathcal{S}_1a_n\|]\} \\
&\leq L_1[L_2(1 - \alpha_n)\|\omega_n' - b_n\| + \varepsilon_2 + \alpha_nL_2L_1\|\omega_n - a_n\| + \varepsilon_1]
\end{aligned} \tag{31}$$

elde edilir. (29), (30) ve (31) den

$$\begin{aligned}
\|\omega_{n+1} - a_{n+1}\| &\leq L_2(L_2L_1\|w_n - d_n\| + \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \\
&\leq L_2^2L_1[L_1L_2(1 - \alpha_n)\|\omega_n' - b_n\| + \varepsilon_2 \\
&\quad + \alpha_nL_2L_1\|\omega_n - a_n\| + \varepsilon_1] + \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \\
&\leq L_2[\|\omega_n' - b_n\| + \|\omega_n - a_n\| + L_2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2]
\end{aligned} \tag{32}$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak

$$\|\omega_{n+1}' - b_{n+1}\| \leq L_1[\|\omega_n - a_n\| + \|\omega_n' - b_n\| + L_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1] \tag{33}$$

olduğu görülür. (32) ve (33) den

$$\begin{aligned}
\|\omega_{n+1} - a_{n+1}\| + \|\omega_{n+1}' - b_{n+1}\| &\leq L_2[\|\omega_n' - b_n\| + \|\omega_n - a_n\| + L_2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2] \\
&\quad + L_1[\|\omega_n - a_n\| + \|\omega_n' - b_n\| + L_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1] \\
&\leq (L_1 + L_2)[\|\omega_n - a_n\| + \|\omega_n' - b_n\|] \\
&\quad + L_2\varepsilon_1 + L_1\varepsilon_2 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)
\end{aligned} \tag{34}$$

yazılır. $L \in (0,1)$ için $1 - L = L_1 + L_2 < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1} - a_{n+1}\| + \|\omega'_{n+1} - b_{n+1}\| &\leq (1 - L)[\|\omega_n - a_n\| + \|\omega'_n - b_n\|] \\ &\quad + \frac{L[L_2\varepsilon_1 + L_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2]}{L} \end{aligned} \quad (35)$$

dir. Burada

$$\begin{cases} \gamma_n = \|\omega_n - a_n\| + \|\omega'_n - b_n\| \\ \sigma_n = L \in (0,1) \\ \rho_n = \frac{L_2\varepsilon_1 + L_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{L} \end{cases}$$

olmak üzere (35) eşitsizliğinin Lemma 6'nın şartlarını sağladığı görülür. Dolayısıyla

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} [\|\omega_n - a_n\| + \|\omega'_n - b_n\|] \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_2\varepsilon_1 + L_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{L}$$

ise $n \rightarrow \infty$ için $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$ olduğunda

$$\|\omega_1 - a\| + \|\omega_2 - b\| \leq \frac{L_2\varepsilon_1 + L_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{1 - L_1 - L_2}$$

elde edilir.

Şimdi üç Lipschitz dönüşümün alterne noktaları bulmak için aşağıdaki algoritma verilmiştir.

Algoritma 6: C_1, C_2 ve C_3, Λ Banach uzayının boştan farklı, konveks alt kümeleri olsun. Aynı zamanda $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2, \mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_3$ ve $\mathcal{T}_3: C_3 \rightarrow C_1$ olmak üzere üç dönüşüm tanımlansın. Herhangi bir $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in C_1 \times C_2 \times C_3$ için

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = \mathcal{T}_3\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_n \\ w_n = (1 - \alpha_n - \beta_n)\mathcal{T}_3\omega''_n + \alpha_n\mathcal{T}_3\mathcal{T}_2\omega'_n + \beta_n\mathcal{T}_3\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_n \\ \omega'_{n+1} = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_3\mathcal{T}_2u_n \\ u_n = (1 - \alpha_n - \beta_n)\mathcal{T}_1\omega_n + \alpha_n\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3\omega''_n + \beta_n\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3\mathcal{T}_2\omega'_n \\ \omega''_{n+1} = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3a_n \\ a_n = (1 - \alpha_n - \beta_n)\mathcal{T}_2\omega'_n + \alpha_n\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_n + \beta_n\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\mathcal{T}_3\omega''_n \end{cases}$$

algoritması tanımlansın. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[0,1]$ aralığında tanımlı dizilerdir (Can *et al.* 2024).

Teorem 32: $C_1, C_2, C_3 \neq \emptyset$ ve Λ Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri olsun. Aynı zamanda $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2, \mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_3$ ve $\mathcal{T}_3: C_3 \rightarrow C_1$ olmak üzere sırasıyla Lipschitz sabitleri $L_1 \leq 1, L_2 \leq 1$ ve $L_3 \leq 1$ olan üç Lipschitz dönüşüm olsun ve $L_1L_2L_3 < 1$ şartı sağlansın. Bu durumda, Algoritma 6 tarafından $C_1 \times C_2 \times C_3$ de oluşturulan $\{(\omega_n, \omega'_n, \omega''_n)\}$ dizisi,

$(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*) \in C_1 \times C_2 \times C_3$ şeklinde tek bir noktaya güçlü yakınsar. Burada, ω_1^* , ω_2^* ve ω_3^* sırasıyla $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır (Can *et al.* 2024).

İspat: Teorem 29 dan $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*) \in C_1 \times C_2 \times C_3$ şeklinde tek bir noktanın olduğunu ve ω_1^* , ω_2^* ve ω_3^* in da sırasıyla $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ dönüşümlerinin alterne noktaları olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\mu := \max \begin{pmatrix} (L_1 L_2 L_3)^2 \beta_n + L_1^2 L_2 L_3 (1 - \alpha_n - \beta_n) + \alpha_n (L_1 L_2)^2 L_3, \\ (L_1 L_2 L_3)^2 \beta_n + L_1 L_2 L_3^2 (1 - \alpha_n - \beta_n) + \alpha_n L_1 (L_2 L_3)^2, \\ (L_1 L_2 L_3)^2 \beta_n + L_1 L_2^2 L_3 (1 - \alpha_n - \beta_n) + \alpha_n (L_1 L_3)^2 L_2 \end{pmatrix}$$

olsun. Algoritma 6 dan

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| &= \|\mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_3 \omega_n'' + \alpha_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' + \beta_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n] - \omega_1^*\| \\ &\leq \|\mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_3 \omega_n'' + \alpha_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' + \beta_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n] - \mathcal{T}_3 \omega_3^*\| \\ &\leq L_3 \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_3 \omega_n'' + \alpha_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' + \beta_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n] - \omega_3^*\| \\ &\leq L_3 \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_3 \omega_n'' + \alpha_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' + \beta_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n] - \mathcal{T}_2 \omega_2^*\| \\ &\leq L_3 L_2 \|\mathcal{T}_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_3 \omega_n'' + \alpha_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' + \beta_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n] - \omega_2^*\| \\ &\leq L_3 L_2 \|\mathcal{T}_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_3 \omega_n'' + \alpha_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' + \beta_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n] - \mathcal{T}_1 \omega_1^*\| \\ &\leq L_3 L_2 L_1 \|(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_3 \omega_n'' + \alpha_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' + \beta_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n - \omega_1^*\| \\ &\leq L_3 L_2 L_1 \|(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_3 \omega_n'' - \omega_1^*\| + \|\alpha_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' - \omega_1^*\| \\ &\quad + \|\beta_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n - \omega_1^*\| \\ &\leq L_3 L_2 L_1 \|(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_3 \omega_n'' - \mathcal{T}_3 \omega_3^*\| + \|\alpha_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' - \mathcal{T}_3 \omega_3^*\| \\ &\quad + \|\beta_n \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n - \mathcal{T}_3 \omega_3^*\| \\ &\leq L_3 L_2 L_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \alpha_n L_3 \|\mathcal{T}_2 \omega_n' - \omega_3^*\| \\ &\quad + \beta_n L_3 \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n - \omega_3^*\|] \\ &\leq L_3 L_2 L_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \alpha_n L_3 \|\mathcal{T}_2 \omega_n' - \mathcal{T}_2 \omega_2^*\| \\ &\quad + \beta_n L_3 \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n - \mathcal{T}_2 \omega_2^*\|] \\ &\leq L_3 L_2 L_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \alpha_n L_3 L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\| \\ &\quad + \beta_n L_3 L_2 \|\mathcal{T}_1 \omega_n - \omega_2^*\|] \\ &\leq L_3 L_2 L_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \alpha_n L_3 L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\| \\ &\quad + \beta_n L_3 L_2 \|\mathcal{T}_1 \omega_n - \mathcal{T}_1 \omega_1^*\|] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq L_3 L_2 L_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \alpha_n L_3 L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\| \\ &\quad + \beta_n L_3 L_2 L_1 \|\omega_n - \omega_1^*\|] \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1}' - \omega_2^*\| &= \|\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_1 \omega_n + \alpha_n \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \omega_n'' + \beta_n \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n'] - \omega_2^*\| \\ &\leq L_1 L_3 L_2 \|[(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_1 \omega_n + \alpha_n \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \omega_n'' + \beta_n \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n'] - \omega_2^*\| \\ &\leq L_1 L_3 L_2 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \|\mathcal{T}_1 \omega_n - \mathcal{T}_1 \omega_1^*\| + \alpha_n \|\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \omega_n'' - \mathcal{T}_1 \omega_1^*\| \\ &\quad + \beta_n \|\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \omega_n' - \mathcal{T}_1 \omega_1^*\|] \\ &\leq L_1 L_3 L_2 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_1 \|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha_n L_1 L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\| \\ &\quad + \beta_n L_1 L_3 L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\|] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1}'' - \omega_3^*\| &= \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_2 \omega_n' + \alpha_n \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n + \beta_n \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \omega_n''] - \omega_3^*\| \\ &\leq L_2 L_1 L_3 \|[(1 - \alpha_n - \beta_n) \mathcal{T}_2 \omega_n' + \alpha_n \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n + \beta_n \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \omega_n''] - \omega_3^*\| \\ &\leq L_2 L_1 L_3 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \|\mathcal{T}_2 \omega_n' - \omega_3^*\| + \alpha_n \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n - \omega_3^*\| \\ &\quad + \beta_n \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \omega_n'' - \omega_3^*\|] \\ &= L_2 L_1 L_3 [(1 - \alpha_n - \beta_n) \|\mathcal{T}_2 \omega_n' - \mathcal{T}_2 \omega_2^*\| + \alpha_n \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \omega_n - \mathcal{T}_2 \omega_2^*\| \\ &\quad + \beta_n \|\mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 \omega_n'' - \mathcal{T}_2 \omega_2^*\|] \\ &\leq L_2 L_1 L_3 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \alpha_n L_2 L_1 \|\omega_n - \omega_1^*\| \\ &\quad + \beta_n L_2 L_1 L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\|] \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} &\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| + \|\omega_{n+1}' - \omega_2^*\| + \|\omega_{n+1}'' - \omega_3^*\| \tag{36} \\ &\leq L_3 L_2 L_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \alpha_n L_3 L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \beta_n L_3 L_2 L_1 \|\omega_n - \omega_1^*\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n - \beta_n) L_1 \|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha_n L_1 L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \beta_n L_1 L_3 L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n - \beta_n) L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \alpha_n L_2 L_1 \|\omega_n - \omega_1^*\| + \beta_n L_2 L_1 L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\|] \\ &= L_3 L_2 L_1 \{[(1 - \alpha_n - \beta_n) L_3 + \alpha_n L_1 L_3 + \beta_n L_2 L_1 L_3] \|\omega_n'' - \omega_3^*\| \\ &\quad + [\alpha_n L_3 L_2 + \beta_n L_1 L_3 L_2 + (1 - \alpha_n - \beta_n) L_2] \|\omega_n' - \omega_2^*\| \\ &\quad + [\beta_n L_3 L_2 L_1 + (1 - \alpha_n - \beta_n) L_1 + \alpha_n L_2 L_1] \|\omega_n - \omega_1^*\| \\ &\leq L_3 L_2 L_1 \{[(1 - \alpha_n - \beta_n) L_3 + \alpha_n L_1 L_3 + \beta_n L_2 L_1 L_3] \|\omega_n'' - \omega_3^*\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[\alpha_n L_3 L_2 + \beta_n L_1 L_3 L_2 + (1 - \alpha_n - \beta_n) L_2] \|\omega'_n - \omega_2^*\| \\
& +[\beta_n L_3 L_2 L_1 + (1 - \alpha_n - \beta_n) L_1 + \alpha_n L_2 L_1] \|\omega_n - \omega_1^*\| \\
& \leq \mu \|\omega_n - \omega_1^*\| + \mu \|\omega'_n - \omega_2^*\| + \mu \|\omega''_n - \omega_3^*\| \\
& = \mu (\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\| + \|\omega''_n - \omega_3^*\|)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi $\Lambda \times \Lambda \times \Lambda$ üzerinde $\|(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\|_1 = \|\omega_1\| + \|\omega_2\| + \|\omega_3\|$ normunu tanımlayalım. Böylece $(\Lambda \times \Lambda \times \Lambda, \|\cdot\|_1)$ in bir Banach uzayı olduğunu biliyoruz. (36) dan

$$\|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}, \omega''_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1 \leq \mu \|(\omega_n, \omega'_n, \omega''_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1$$

yazılır. Tümevarım metodundan

$$\|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}, \omega''_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1 \leq \mu^n \|(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1$$

bulunur. Burada $\mu \in (0,1)$ olduğundan her iki tarafının limiti alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}, \omega''_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_1^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega'_n - \omega_2^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega''_n - \omega_3^*\| = 0$$

dır. Bu nedenle $\{\omega_n\}$, $\{\omega'_n\}$ ve $\{\omega''_n\}$ dizileri sırasıyla ω_1^* , ω_2^* ve ω_3^* noktalarına güçlü yakınsar.

Teorem 33: $C_1, C_2, C_3 \neq \emptyset$ ve Λ Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri olsun. Aynı zamanda $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$, $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_3$ ve $\mathcal{T}_3: C_3 \rightarrow C_1$ olmak üzere sırasıyla Lipschitz sabitleri L_1, L_2 ve L_3 olan üç Lipschitz dönüşüm olsun ve $L_1 + L_2 + L_3 < 1$ şartı sağlansın. Bu durumda, Algoritma 6 tarafından $C_1 \times C_2 \times C_3$ de oluşturulan $\{(\omega_n, \omega'_n, \omega''_n)\}$ dizisi, $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*) \in C_1 \times C_2 \times C_3$ şeklinde tek bir noktaya güçlü şekilde yakınsar. Burada, ω_1^*, ω_2^* ve ω_3^* sırasıyla $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır (Can et al. 2024).

İspat: Teorem 32 in ispatından

$$\begin{aligned}
\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| & \leq L_3 L_2 L_1 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_3 \|\omega''_n - \omega_3^*\| + \alpha_n L_3 L_2 \|\omega'_n - \omega_2^*\| \\
& + \beta_n L_3 L_2 L_1 \|\omega_n - \omega_1^*\|]
\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. L_1, L_2 ve L_3 Lipschitz sabitleri, pozitif reel sayılar ve $L_1 + L_2 + L_3 < 1$ olduğundan $L_1 < 1, L_2 < 1$ ve $L_3 < 1$ dir. Dolayısıyla üstteki eşitsizlikten

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| \leq L_3 [\|\omega''_n - \omega_3^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\| + \|\omega_n - \omega_1^*\|] \quad (37)$$

yazılabilir. Benzer şekilde Teorem 32 in ispatından

$$\begin{aligned}\|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| &\leq L_1 L_3 L_2 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_1 \|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha_n L_1 L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\| \\ &\quad + \beta_n L_1 L_3 L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\|]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|\omega''_{n+1} - \omega_3^*\| &\leq L_2 L_1 L_3 [(1 - \alpha_n - \beta_n) L_2 \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \alpha_n L_2 L_1 \|\omega_n - \omega_1^*\| \\ &\quad + \beta_n L_2 L_1 L_3 \|\omega_n'' - \omega_3^*\|]\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| \leq L_2 [\|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \|\omega_n - \omega_1^*\|] \quad (38)$$

ve

$$\|\omega''_{n+1} - \omega_3^*\| \leq L_1 [\|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \|\omega_n - \omega_1^*\|] \quad (39)$$

olur. (37), (38) ve (39) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| + \|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| + \|\omega''_{n+1} - \omega_3^*\| \\ \leq (L_1 + L_2 + L_3) [\|\omega_n'' - \omega_3^*\| + \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \|\omega_n - \omega_1^*\|]\end{aligned} \quad (40)$$

elde edilir. $\Lambda \times \Lambda \times \Lambda$ üzerinde $\|(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\|_1 = \|\omega_1\| + \|\omega_2\| + \|\omega_3\|$ normunu tanımlayalım. Böylece $(\Lambda \times \Lambda \times \Lambda, \|\cdot\|_1)$ bir Banach uzayı olduğundan (40) da

$$\|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}, \omega''_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1 \leq (L_1 + L_2 + L_3) \|(\omega_n, \omega'_n, \omega''_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1$$

yazılır. Tümevarım prensibinden

$$\|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}, \omega''_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1 \leq (L_1 + L_2 + L_3)^n \|(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1$$

bulunur. Burada $L_1 + L_2 + L_3 \in (0,1)$ olduğundan her iki tarafının limiti alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}, \omega''_{n+1}) - (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)\|_1 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{(\omega_n, \omega'_n, \omega''_n)\}$ dizisi, $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*) \in C_1 \times C_2 \times C_3$ noktasına yakınsar.

Teorem 34: $C_1, C_2, C_3 \neq \emptyset$ ve Λ Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri olsun. $\{\mathcal{S}_n\}$ dizisi $\{a_n\}$ dizisi ile birlikte C_1 den C_2 ye tanımlı neredeyse genişlemeyen dönüşümlerin bir dizisi olsun. Ayrıca her $\omega_3 \in C_1$ için $\mathcal{T}_1 \omega_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n \omega_3$ olmak üzere $\mathcal{T}_1$, C_1 den C_2 ye tanımlı bir dönüşüm olsun. Benzer şekilde $\{\mathcal{R}_n\}$ dizisi $\{b_n\}$ dizisi ile birlikte C_2 den C_3 e tanımlı neredeyse genişlemeyen dönüşümlerin bir dizisi olsun. Ayrıca her $w \in C_2$ için $\mathcal{T}_2 w = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n w$, olmak üzere $\mathcal{T}_2$, C_2 den C_3 e tanımlı bir dönüşüm olarak verilsin. $\mathcal{T}_3: C_3 \rightarrow C_1$, Lipschitz sabiti L olan daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda

- i. Tek bir $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*) \in C_1 \times C_2 \times C_3$ noktası vardır ve $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ noktaları $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır.

ii. Herhangi bir $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*) \in C_1 \times C_2 \times C_3$ noktası için

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = \mathcal{T}_3 \omega_n'' \\ \omega_n'' = \mathcal{R}_n \omega_n' \\ \omega_n' = \mathcal{S}_n \omega_n \end{cases} \quad (41)$$

yöntemiyle oluşturulan $\{(\omega_n, \omega_n', \omega_n'')\}$ dizisi $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)$ noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Can *et al.* 2024).

İspat:

i. Lemma 3 ten biz $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_3$ dönüşümlerinin genişlemeyen dönüşümler olduğunu biliyoruz. Ayrıca hipotezden $\mathcal{T}_3: C_3 \rightarrow C_1$ dönüşümünün de daraltan bir dönüşüm olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Teorem 15 in i) şikkından $C_1 \times C_2 \times C_3$ için tek bir $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)$ noktası vardır ve ω_1^*, ω_2^* ve ω_3^* noktaları sırasıyla $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır.

ii. (41) den

$$\begin{aligned} \|\omega_n' - \omega_2^*\| &= \|\mathcal{S}_n(\omega_n) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| \\ &\leq \|\mathcal{S}_n(\omega_n) - \mathcal{S}_n(\omega_1^*)\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| \\ &\leq \|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| + a_n \end{aligned} \quad (42)$$

olur ve

$$\begin{aligned} \|\omega_n'' - \omega_3^*\| &= \|\mathcal{R}_n(\omega_n') - \mathcal{T}_2(\omega_2^*)\| \\ &\leq \|\mathcal{R}_n(\omega_n') - \mathcal{R}_n(\omega_2^*)\| + \|\mathcal{R}_n(\omega_2^*) - \mathcal{T}_2(\omega_2^*)\| \\ &\leq \|\omega_n' - \omega_2^*\| + \|\mathcal{R}_n(\omega_2^*) - \mathcal{T}_2(\omega_2^*)\| + b_n \end{aligned} \quad (43)$$

bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| &= \|\mathcal{T}_3 \omega_n'' - \mathcal{T}_3 \omega_3^*\| \\ &\leq L \|\omega_n'' - \omega_3^*\| \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| &\leq L[\|\omega_n' - \omega_2^*\| + \|\mathcal{R}_n(\omega_2^*) - \mathcal{T}_2(\omega_2^*)\| + b_n] \\ &\leq L[\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| + a_n \\ &\quad + \|\mathcal{R}_n(\omega_2^*) - \mathcal{T}_2(\omega_2^*)\| + b_n] \end{aligned} \quad (44)$$

bulunur. Burada $n \rightarrow \infty$ için

$$\|\mathcal{S}_n(\omega_1^*) - \mathcal{T}_1(\omega_1^*)\| + a_n \rightarrow 0$$

ve

$$\|\mathcal{R}_n(\omega_2^*) - \mathcal{T}_2(\omega_2^*)\| + b_n \rightarrow 0$$

olur. Lemma 4 ten $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_1^*\| = 0$ limiti elde edilir. Eğer (42) eşitsizliğinde limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega'_n - \omega_2^*\| = 0$ olur. Benzer şekilde (43) eşitsizliğinde limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega''_n - \omega_3^*\| = 0$ yazılır. Böylece $\{(\omega_n, \omega'_n, \omega''_n)\}$ dizisinin $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)$ noktasına güçlü yakınsadığı görülür.

Yukarıdaki temel sonuçlarımızı dikkate alarak, uygun şartlar altında lineer olmayan varyasyonel eşitsizliklerin çözümü için bir uygulama sunacağız. Bu amaçla, Algoritma 5 i aşağıda teoremdeki gibi yeniden düzenleyeceğiz:

C_1 ve C_2 , Λ nin boş olmayan kapalı konveks alt kümeleri, $F_{C_2} : \Lambda \rightarrow C_2$ ve $F_{C_1} : \Lambda \rightarrow C_1$ lineer olmayan operatörler ve δ ve θ pozitif gerçel sayılar olsun. $Q = I - \delta T_1$ ve $W = I - \theta T_2$ olarak tanımlansın. O halde aşağıdakiler denktir:

$T_1 : C_1 \rightarrow \Lambda$ ve $T_2 : C_2 \rightarrow \Lambda$ lineer olmayan operatörler ve $\delta, \theta \in (0, \infty)$ olsun. Aşağıdaki alterne nokta problemi göz önüne alınırsa $C_1 \times C_2 \subset \Lambda$ için

$$\begin{aligned} F_{C_2}(I - \delta T_1)(\omega_1^*) &= \omega_2^* \\ F_{C_1}(I - \theta T_2)(\omega_2^*) &= \omega_1^* \end{aligned} \quad (45)$$

(ω_1^*, ω_2^*) elemanı bulunur. Eğer $F_{C_1} = P_{C_1}$ ve $F_{C_2} = P_{C_2}$ ise, (45) yerine Lemma 7 den aşağıdaki lineer olmayan varyasyonel eşitsizlikler sistemi yazılabilir. Her $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ için

$$\begin{aligned} P_{C_2}(I - \delta T_1)(\omega_1^*) &= \omega_2^* \\ P_{C_1}(I - \theta T_2)(\omega_2^*) &= \omega_1^* \end{aligned} \quad (46)$$

yani

$$\begin{aligned} \langle \delta T_1(\omega_1^*) + \omega_2^* - \omega_1^*, \omega_1 - \omega_1^* \rangle &\geq 0, \quad \forall \omega_1 \in C_2 \\ \langle \theta T_2(\omega_2^*) + \omega_1^* - \omega_2^*, \omega_2 - \omega_2^* \rangle &\geq 0, \quad \forall \omega_2 \in C_1 \end{aligned}$$

yazılır.

Teorem 28 göz önüne alındığında, (46) sisteminin çözümü, belirli şartlar altında Algoritma 5 kullanılarak hesaplanabilir. Bu doğrultuda, lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik olan (46) nın çözümünü Algoritma 5 i kullanılarak hesaplayabiliriz.

Teorem 35. $C_1, C_2 \neq \emptyset$ ve Λ Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri olsun. $T_1 : C_1 \rightarrow \Lambda$ olmak üzere δ_{T_1} ters güçlü monoton (inverse strong monoton), $T_2 : C_2 \rightarrow \Lambda$ olmak üzere δ_{T_2} ters güçlü monoton operatörler olsun. Ayrıca $\delta \in (0, \frac{2}{\delta_{T_1}})$, $\theta \in (0, \frac{2}{\delta_{T_2}})$ ve $P_{C_2}(I - \delta T_1), P_{C_1}(I - \theta T_2) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için Algoritma 5 tarafından $C_1 \times C_2$ de tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ paralel algoritması

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)\omega_n'' \\ \omega_n'' = P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1)[P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)w_n] \\ w_n = P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1) \left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha_n)P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)\omega_n' \\ + \alpha_n P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)[P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1)\omega_n] \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega'_{n+1} = P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1)u_n \\ u_n = P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)[P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1)v_n] \\ v_n = P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2) \left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha_n)P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1)\omega_n \\ + \alpha_n P_{C_2}(I - \delta \mathcal{T}_1)[P_{C_1}(I - \theta \mathcal{T}_2)\omega_n'] \end{array} \right. \end{cases}$$

dür. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0, 1)$ aralığında olup $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = \infty$ koşulu sağlanır. O halde $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi (46) varyasyonel eşitsizliğin çözümü olan (ω_1^*, ω_2^*) noktasına zayıf yakınsar (Can et al. 2024).

İspat: $I - \delta \mathcal{T}_1$ ve $I - \delta \mathcal{T}_2$ nin $\delta \in (0, \frac{2}{\delta_{\mathcal{T}_1}})$ ve $\theta \in (0, \frac{2}{\delta_{\mathcal{T}_2}})$ için genişlemeyen dönüşümler olduklarını biliyoruz. Dolayısıyla bu teoremin ispatı, Teorem 28 den elde edilir.

$$\begin{cases} P_{C_1}(I - \theta \nabla g)\omega_2 = \omega_1 \\ P_{C_2}(I - \delta \nabla f)\omega_1 = \omega_2 \end{cases} \quad (47)$$

denklemini sağlayan $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ problemini ele alalım. Burada C_1 ve C_2 , Λ Banach uzayının boş olmayan, kapalı, konveks alt kümeleri, $f, g: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ Frechet diferensiyellenebilir konveks fonksiyonlar ve $\delta, \theta \in (0, \infty)$ pozitif reel sayılardır.

Yukarıdaki teoremden hareketle aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 36: $C_1, C_2 \neq \emptyset$, Λ Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri ve $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ Frechet diferensiyellenebilir konveks fonksiyonlar olsun. Burada ∇f , L_f -Lipschitz sürekli ve ∇g , L_g -Lipschitz sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca $\delta \in (0, \frac{2}{L_f})$, $\theta \in (0, \frac{2}{L_g})$ ve $Alt(P_{C_2}(I - \delta \nabla f), P_{C_1}(I - \theta \nabla g)) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ için $C_1 \times C_2$ de tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ paralel algoritması

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = P_{C_1}(I - \theta \nabla g)\omega_n'' \\ \omega_n'' = P_{C_2}(I - \delta \nabla f)[P_{C_1}(I - \theta \nabla g)w_n] \\ w_n = P_{C_2}(I - \delta \nabla f) \left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha_n)P_{C_1}(I - \theta \nabla g)\omega_n' \\ + \alpha_n P_{C_1}(I - \theta \nabla g)[P_{C_2}(I - \delta \nabla f)\omega_n] \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega'_{n+1} = P_{C_2}(I - \delta \nabla f)u_n \\ \omega_n'' = P_{C_1}(I - \theta \nabla g)[P_{C_2}(I - \delta \nabla f)v_n] \\ v_n = P_{C_1}(I - \theta \nabla g) \left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha_n)P_{C_2}(I - \delta \nabla f)\omega_n \\ + \alpha_n P_{C_2}(I - \delta \nabla f)[P_{C_1}(I - \theta \nabla g)\omega_n'] \end{array} \right. \end{cases}$$

dür. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0, 1)$ aralığında olup $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = \infty$ koşulu sağlanır. Bu durumda $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi (47) sisteminin çözümü olan $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ noktasına zayıf yakınsar.

Tezin son kısmında ise yukarıda tek değerli dönüşümler için elde ettiğimiz sonuçları, çok değerli dönüşümler için ispatlayacağız.

Algoritma 7: Λ normlu bir uzay ve C_1, C_2 kümeleri Λ in boştan farklı konveks kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow CB(C_2)$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow CB(C_1)$ çok değerli dönüşümlerini göz önüne alalım. Eğer $\omega_1^* \in \mathcal{T}_2(\omega_2^*)$ ve $\omega_2^* \in \mathcal{T}_1(\omega_1^*)$ ise ω_1^* ve ω_2^* ye $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ çok değerli dönüşümlerinin alterne noktaları denir. Herhangi bir $(\omega_1, \omega_2) \in C_1 \times C_2$ noktası için

$$\begin{cases} \omega_{n+1} = a_n & \omega'_{n+1} = a'_n \\ \omega''_n = (1 - \alpha_n)\omega'_n + \alpha_n b_n & w_n = (1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n b'_n \end{cases}$$

algoritmasını tanımlayalım. Burada $a_n \in \mathcal{T}_2\omega''_n$, $a'_n \in \mathcal{T}_1w_n$, $b_n \in \mathcal{T}_1\omega_n$ ve $b'_n \in \mathcal{T}_2\omega'_n$ dir.

Lemma 8: Λ normlu bir uzay ve C_1, C_2 kümeleri Λ in boştan farklı konveks kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow CB(C_2)$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow CB(C_1)$ çok değerli genişlemeyen dönüşümler ve ω_1^*, ω_2^* noktaları $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ nin alterne noktaları olsun. Bu durumda Algoritma 7 tarafından tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\|)$$

limiti vardır.

İspat: Hipotezdeki algoritma, dönüşümlerin özellikleri ve alterne nokta tanımından

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| = \|a_n - \omega_1^*\| \leq H(\mathcal{T}_2\omega''_n, \mathcal{T}_2\omega_2^*) \leq \|\omega''_n - \omega_2^*\|$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \|\omega''_n - \omega_2^*\| &= \|(1 - \alpha_n)\omega_2^* + \alpha_n b_n - \omega_2^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|\omega'_n - \omega_2^*\| + \alpha_n\|b_n - \omega_2^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|\omega'_n - \omega_2^*\| + \alpha_n H(\mathcal{T}_1\omega_n, \mathcal{T}_1\omega_1^*) \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|\omega'_n - \omega_2^*\| + \alpha_n\|\omega_n - \omega_1^*\| \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| \leq (1 - \alpha_n)\|\omega'_n - \omega_2^*\| + \alpha_n\|\omega_n - \omega_1^*\| \quad (48)$$

dur. Benzer şekilde

$$\|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| = \|a'_n - \omega_2^*\| \leq H(\mathcal{T}_1w_n, \mathcal{T}_1\omega_1^*) \leq \|w_n - \omega_1^*\|$$

ve

$$\begin{aligned}
\|w_n - \omega_1^*\| &= \|(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n b'_n - \omega_1^*\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha_n\|b'_n - \omega_1^*\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha_n H(\mathcal{T}_2 \omega'_n, \mathcal{T}_2 \omega_2^*) \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha_n\|\omega'_n - \omega_2^*\|
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| \leq (1 - \alpha_n)\|\omega_n - \omega_1^*\| + \alpha_n\|\omega'_n - \omega_2^*\| \quad (49)$$

elde edilir. (48) ve (49) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| + \|\omega'_{n+1} - \omega_2^*\| \leq \|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\|$$

olur. Burada $\{\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\|\}$ dizisi monoton azalan ve alttan sınırlı olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\|)$$

limiti vardır.

Lemma 9: $C_1, C_2 \neq \emptyset$ ve Λ düzgün konveks Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow CB(C_2)$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow CB(C_1)$ dönüşümleri çok değerli genişlemeyen dönüşümler ve ω_1^*, ω_2^* noktaları $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ nin alterne noktaları olsun. Algoritma 7 tarafından tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisini alalım. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(\omega_n, \mathcal{T}_2 \omega'_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(\omega'_n, \mathcal{T}_1 \omega_n)$$

dir.

İspat: Lemma 8 den, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|(\omega_n - \omega_1^*) + (\omega'_n - \omega_2^*)\|)$ limitinin var olduğunu biliyoruz. $c \geq 0$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|(\omega_n - \omega_1^*) + (\omega'_n - \omega_2^*)\|) = c$ olsun. Algoritma 7 den

$$\|\omega''_n - \omega_2^*\| \leq \|\omega'_n - \omega_2^*\| + \|\omega_n - \omega_1^*\|$$

yazabiliriz. Buradan her iki tarafın limit supremumunu alırsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|\omega''_n - \omega_2^*\| \leq c$$

olur. Yine Algoritma 7 den

$$\|w_n - \omega_1^*\| \leq \|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\|$$

elde edilir. Tekrar her iki tarafın limit supremumu alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|w_n - \omega_1^*\| \leq c$$

olur. Ayrıca

$$\|\omega_n'' - \omega_2^*\| \leq (1 - \alpha_n)\|\omega_n' - \omega_2^*\| + \alpha_n\|\omega_n - \omega_1^*\|$$

ve

$$\|w_n - \omega_1^*\| \leq (1 - \alpha_n)\|w_n - \omega_1^*\| + \alpha_n\|\omega_n' - \omega_2^*\|$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\|\omega_n'' - \omega_2^*\| + \|w_n - \omega_1^*\| \leq \|w_n - \omega_1^*\| + \|\omega_n' - \omega_2^*\|$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikten ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|(\omega_n - \omega_1^*) + (\omega_n' - \omega_2^*)\|) = c$ limitinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (\|\omega_n'' - \omega_2^*\| + \|w_n - \omega_1^*\|) \leq c \quad (50)$$

olur. Ayrıca

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| \leq \|\omega_n'' - \omega_2^*\|$$

ve

$$\|\omega_{n+1}' - \omega_2^*\| \leq \|w_n - \omega_1^*\|$$

olduğundan

$$\|\omega_{n+1} - \omega_1^*\| + \|\omega_{n+1}' - \omega_2^*\| \leq \|\omega_n'' - \omega_2^*\| + \|w_n - \omega_1^*\|$$

yazılır. Buradan

$$c \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\omega_n'' - \omega_2^*\| + \|w_n - \omega_1^*\|) \quad (51)$$

olur. (50) ve (51) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\omega_n'' - \omega_2^*\| + \|w_n - \omega_1^*\|) = c$$

dir. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|w_n, \omega_n''\| - \|\omega_1^*, \omega_2^*\|) = c$$

limiti elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\|(w_n, \omega_n'') - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|[(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n b_n', (1 - \alpha_n)\omega_n' + \alpha_n b_n] - (\omega_1^*, \omega_2^*)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n b_n' - \omega_1^*, (1 - \alpha_n)\omega_n' + \alpha_n b_n - \omega_2^*\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)(\omega_n - \omega_1^*) + \alpha_n(b_n' - \omega_1^*), (1 - \alpha_n)(\omega_n' - \omega_2^*) + \alpha_n(b_n - \omega_2^*)\| \\ &= c \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Çok değerli dönüşümün özelliğinden ve Algoritma 7 den

$$\|b_n' - \omega_1^*\| \leq H\|T_2\omega_n', T_2\omega_2^*\| \leq \|\omega_n' - \omega_2^*\|$$

ve

$$\|b_n - \omega_2^*\| \leq H \|T_1 \omega_n, T_1 \omega_1^*\| \leq \|\omega_n' - \omega_2^*\|$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerin her iki tarafları için limsup alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|b_n' - \omega_1^*\| \leq c$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|b_n - \omega_2^*\| \leq c$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|(\omega_n, \omega_n') - (\omega_1^*, \omega_2^*)\| = c$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|(\omega_n, \omega_n') - (\omega_1^*, \omega_2^*)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|(\omega_n - \omega_1^*, \omega_n' - \omega_2^*)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega_n' - \omega_2^*\|) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega_n' - \omega_2^*\|) = c \end{aligned}$$

dir. Bu ise

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)(\omega_n, \omega_n') + \alpha_n(b_n', b_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)(\omega_n - \omega_1^*, \omega_n' - \omega_2^*) + \alpha_n(b_n' - \omega_1^*, b_n - \omega_2^*)\| \\ &= c \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Lemma 5 kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\omega_n, \omega_n') - (b_n', b_n)\| = 0 \quad (52)$$

elde edilir. (52) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\omega_n - b_n'\| + \|\omega_n' - b_n\|) = 0$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \zeta(\omega_n, T_2 \omega_n') + \zeta(\omega_n', T_1 \omega_n) &\leq \|\omega_n - b_n'\| + \|\omega_n' - b_n\| \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [\zeta(\omega_n, T_2 \omega_n') + \zeta(\omega_n', T_1 \omega_n)] &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(\omega_n, T_2 \omega_n') &= \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(\omega_n', T_1 \omega_n) = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki Lemma 8 ve Lemma 9 dan hareketle aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç: $C_1, C_2 \neq \emptyset$ ve Λ düzgün konveks Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow CB(C_2)$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow CB(C_1)$ iki Lipschitz çok değerli dönüşüm, L_1 ve L_2 bu dönüşümlerin Lipschitz sabitleri olmak üzere $L_1 + L_2 < 1$ şartı sağlansın. Bu durumda Algoritma 7 ile tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi tek bir (ω_1^*, ω_2^*) noktasına kuvvetli bir şekilde yakınsar. Ayrıca ω_1^* ve ω_2^* noktaları $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktalarıdır.

Aşağıdaki teoremimizi ispatlamak için önce alterne noktaya sahip dönüşümlerin 0 da yarı kapalılığın tanımını ve bunlarla ilgili bazı özellikleri vereceğiz.

Tanım 28: $C \neq \emptyset$, Λ Banach uzayının bir alt kümesi ve $\mathcal{T}: C \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. C içindeki sınırlı her $\{\omega_n\}$ ve $\{\omega'_n\}$ dizisi sırasıyla $\omega_1^* \in C$ ve $\omega_2^* \in C$ ye zayıf yakınsasın ve $\|\mathcal{T}\omega_n - \omega'_n\|$ ve $\|\mathcal{T}\omega'_n - \omega_n\|$ dizileri de 0 a kuvvetli yakınsak olsun. Eğer $\mathcal{T}\omega_1^* = \omega_2^*$ ve $\mathcal{T}\omega_2^* = \omega_1^*$ ise $\mathcal{T}$ dönüşümüne 0 da yarı kapalı dönüşüm denir.

Sonuç: Yukarıdaki tanım $I - \mathcal{T}^2$ dönüşümünün 0 da yarı kapalı olmasıyla eş değerdir. Çünkü,

$$\mathcal{T}\omega_1 = \omega_2 \text{ ve } \mathcal{T}\omega_2 = \omega_1 \Leftrightarrow (I - \mathcal{T}^2)\omega_1 = 0$$

dır. Yani $\mathcal{T}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. $\omega_1 \in \Lambda$ in $\mathcal{T}$ nin bir alterne noktası olması için gerek ve yeter şart $(I - \mathcal{T}^2)\omega_1 = 0$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\omega_n \rightarrow \omega_1$ ve $(I - \mathcal{T}^2)\omega_n \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \mathcal{T}^2\omega_n\| = 0$$

olsun. Tanım gereği $\mathcal{T}(\omega_n) = \omega'_n$ olacak şekilde Λ de bir $\{\omega'_n\}$ dizisi vardır. Bu durumda

$$\mathcal{T}(\omega'_n) = \mathcal{T}^2(\omega_n) \rightarrow \omega_n$$

yazabiliriz. $\omega_n \rightarrow \omega_1$ ve $\mathcal{T}(\omega_n) = \omega'_n$ olduğundan $\omega'_n \rightarrow \omega_2$ elde edilir. Varsayımımıza göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}\omega_n - \omega'_n\| = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}\omega'_n - \omega_n\| = 0$$

dır. Alterne noktanın tanımından

$$\mathcal{T}\omega_1 = \omega_2 \text{ ve } \mathcal{T}\omega_2 = \omega_1$$

yazılır. Bu da

$$\mathcal{T}^2(\omega_1) = \omega_1 \Rightarrow (I - \mathcal{T}^2)\omega_1 = 0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla $I - \mathcal{T}^2$ dönüşümü 0 da yarı kapalıdır.

($\Leftarrow$) Şimdi tersini kabul edelim. Yani $I - \mathcal{T}^2$ dönüşümü 0 da yarı kapalı olsun. $\omega_n \rightarrow \omega_1$ ve $\omega'_n \rightarrow \omega_2$ olacak şekilde dizilerini alalım. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}\omega_n - \omega'_n\| = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}\omega'_n - \omega_n\| = 0$$

olduğunu biliyoruz. Üçgen eşitsizliğinden

$$\|\mathcal{T}^2\omega_n - \omega_n\| \leq \|\mathcal{T}^2\omega_n - \mathcal{T}\omega'_n\| + \|\mathcal{T}\omega'_n - \omega_n\|$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ limiti alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - \mathcal{T}^2)\omega_n = 0$$

olur. $I - \mathcal{T}^2$ dönüşümünün 0 da yarı kapalılığın tanımından

$$(I - \mathcal{T}^2)\omega_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{T}^2\omega_1 = \omega_1$$

dir. $\omega_n \rightarrow \omega_1$ ve $\mathcal{T}\omega_n \rightarrow \omega_2$ olup limit alınır

$$\mathcal{T}\omega_1 = \omega_2 \text{ ve } \mathcal{T}\omega_2 = \omega_1$$

bulunur. Yani (ω_1, ω_2) alterne noktadır.

Yukarıda $\mathcal{T}$ dönüşümü için verilen bu yarı kapalılık tanımı $\mathcal{T}_1: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ ve $\mathcal{T}_2: \Lambda_2 \rightarrow \Lambda_1$ dönüşüm çifti için de aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$\mathcal{T}_1: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ ve $\mathcal{T}_2: \Lambda_2 \rightarrow \Lambda_1$ dönüşümler verilsin. $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$, $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktası olsun. Yani $\mathcal{T}_1\omega_1 = \omega_2$ ve $\mathcal{T}_2\omega_2 = \omega_1$ dir. Buradan

$$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\omega_2 = \omega_2 \text{ ve } \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\omega_1 = \omega_1$$

yazılır.

Tanım 29: Λ_1 ve Λ_2 Banach uzayları, $\mathcal{T}_1: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ ve $\mathcal{T}_2: \Lambda_2 \rightarrow \Lambda_1$ birer dönüşüm olsunlar. Λ_1 ve Λ_2 deki sınırlı her $\{\omega_n\}$ ve $\{\omega'_n\}$ dizisi sırasıyla $\omega_1 \in \Lambda_1$ ve $\omega_2 \in \Lambda_2$ ye zayıf yakınsasın. Ayrıca $\|\mathcal{T}_1\omega_n - \omega'_n\|_{\Lambda_2}$ ve $\|\mathcal{T}_2\omega'_n - \omega_n\|_{\Lambda_1}$ dizileri de 0 a kuvvetli yakınsak olsun. Eğer $\mathcal{T}_1\omega_1 = \omega_2$ ve $\mathcal{T}_2\omega_2 = \omega_1$ ise $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ dönüşüm çifti 0 da yarı kapalıdır denir.

Not: Yukarıda verilen tanım, aşağıdaki ifadelere denktir:

i) $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_1$ dönüşümü için

$$\omega_n \rightarrow \omega_1, \|(I - \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\omega_n\|_{\Lambda_1} \rightarrow 0 \Rightarrow (I - \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\omega_1 = 0.$$

ii) $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2: \Lambda_2 \rightarrow \Lambda_2$ dönüşümü için

$$\omega'_n \rightarrow \omega_2, \|(I - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\omega'_n\|_{\Lambda_2} \rightarrow 0 \Rightarrow (I - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\omega_2 = 0.$$

Teorem 37: Λ , Opial şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayı ve C_1, C_2 kümeleri Λ nın boştan farklı konveks kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow CB(C_2)$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow CB(C_1)$ dönüşümleri çok değerli genişlemeyen dönüşümler ve ω_1^*, ω_2^* noktaları $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ nin alterne noktaları olsun. Algoritma 7 tarafından tanımlanan $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisini alalım. Eğer $I - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ ve $I - \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ dönüşümleri 0 da yarı kapalı ise böylece $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$, $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktası olsun. Lemma 8 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\omega_n - \omega_1^*\| + \|\omega'_n - \omega_2^*\|)$$

limitinin var olduğunu biliyoruz. Şimdi biz $C_1 \times C_2$ de $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisinin tek bir zayıf alt dizisel limitinin olduğunu göstereceğiz. ω_1^* ve ω_2^* noktaları sırasıyla $\{\omega_n\}$ ve $\{\omega'_n\}$ dizilerinin $\{\omega_{n_i}\}$ ve $\{\omega'_{n_i}\}$ alt dizilerinin zayıf limitleri olsun. $b_n \in \mathcal{T}_1\omega_n$ ve $b'_n \in \mathcal{T}_2\omega'_n$ olmak üzere Lemma 9 dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\omega_n - b_n\| + \|\omega'_n - b'_n\|) = 0$$

olduğunu biliyoruz. $I - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ ve $I - \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ dönüşümleri 0 da yarı kapalı olduğundan dolayı $\mathcal{T}_1\omega_1^* = \omega_2^*$ ve $\mathcal{T}_2\omega_2^* = \omega_1^*$ dir. Böylece $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in Alt(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ dir. Benzer şekilde ω_1^{**} ve ω_2^{**} noktaları sırasıyla $\{\omega_n\}$ ve $\{\omega'_n\}$ dizilerinin $\{\omega_{n_j}\}$ ve $\{\omega'_{n_j}\}$ alt dizilerinin zayıf limitleri olsun. Aynı yöntem kullanılarak $(\omega_1^{**}, \omega_2^{**}) \in Alt(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bulunur. Şimdi bu noktanın tek olduğunu gösterelim. Tersini kabul edelim yani $(\omega_1^*, \omega_2^*) \neq (\omega_1^{**}, \omega_2^{**})$ olsun. Opial şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|) &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} (\|(\omega_{n_i}, \omega'_{n_i}) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|) \\ &< \lim_{n_i \rightarrow \infty} (\|(\omega_{n_i}, \omega'_{n_i}) - (\omega_1^{**}, \omega_2^{**})\|) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1^{**}, \omega_2^{**})\|) \\ &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} (\|(\omega_{n_j}, \omega'_{n_j}) - (\omega_1^{**}, \omega_2^{**})\|) \\ &< \lim_{n_j \rightarrow \infty} (\|(\omega_{n_j}, \omega'_{n_j}) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|(\omega_n, \omega'_n) - (\omega_1^*, \omega_2^*)\|) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişki belirtir. Yani $(\omega_1^*, \omega_2^*) = (\omega_1^{**}, \omega_2^{**})$ dir. Dolayısıyla $\{(\omega_n, \omega'_n)\}$ dizisi $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ dönüşümlerinin alterne noktası olan $(\omega_1^*, \omega_2^*) \in C_1 \times C_2$ ye zayıf yakınsar.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri üzerinde $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$ ve $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_1$ gibi iki Lipschitz dönüşüm için tanımlanan paralel algoritmanın bu dönüşümlerin alterne noktalarına yakınsaması ile ilgili teoremler ispatlanmış ve bu algoritmanın uygun şartlar altında veri bağımlılığı incelenmiştir. Daha sonra yine Banach uzayının konveks ve kapalı alt kümeleri üzerinde $\mathcal{T}_1: C_1 \rightarrow C_2$, $\mathcal{T}_2: C_2 \rightarrow C_3$ ve $\mathcal{T}_3: C_3 \rightarrow C_1$ şeklindeki üç Lipschitz dönüşüm için paralel algoritma tanımlanarak bu dizinin güçlü yakınsaması ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca tanımlanan bu paralel algoritmaların varyasyonel eşitsizlik sisteminin çözümüne yakınsadığına dair bir uygulama verilmiştir. Tezin son kısmında ise çok değerli Lipschitz ve genişlemeyen dönüşümlerin alterne noktaları için literatürde ilk defa paralel bir algoritma tanımlanarak oluşturulan dizinin güçlü ve zayıf yakınsamasıyla ilgili bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Bu tez çalışmasındaki sonuçlar dikkate alınarak aşağıdaki öneriler sunulmuştur:

- 1) Sahu'nun 2014 yılında metrik uzaylarda tanımladığı alterne nokta kavramı, kısmi metrik uzay, b~metrik uzay, fuzzy metrik uzay ve G-metrik uzaya uyarlanabilir ve hangi koşullar altında sonuçların korunduğu incelenebilir.
- 2) Alterne nokta ile ilgili teoremlerde geçen tamlik, daraltanlık ve süreklilik şartları zayıflatılarak alterne nokta ile ilgili yeni sonuçlar elde edilebilir.
- 3) Aşağıdaki gibi farklı algoritmalar tanımlanarak dizinin yakınsaklığı, limitinin alterne nokta olup olmadığı incelenebilir;

$$\omega_{n+1} = \begin{cases} \mathcal{T}_1 \omega_n, n \text{ çift} \\ \mathcal{T}_2 \omega_n, n \text{ tek} \end{cases}$$

- 4) Tanımlanan farklı paralel algoritmaların genelleştirilmiş varyasyonel eşitsizliklerin veya denge problemlerinin çözümüne yakınsaması araştırılabilir.
- 5) Çok değerli dönüşümlerin alterne noktaları için farklı ve daha etkili algoritmalar tanımlanıp, bunların hangi şartlar altında limitlerinin alterne nokta olacağı ve bunların varyasyonel eşitsizlik ve denge problemleri üzerine uygulamaları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R. P., O'Regan, D., & Sahu, D. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8(1), 61.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D., & Sahu, D. R. (2009). Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications (Vol. 6, p. 368). New York: Springer.
- Assad, N., & Kirk, W. (1972). Fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type. *Pacific Journal of Mathematics*, 43(3), 553-562.
- Atalan, S. M. Y. (2023). Data dependence result for a new iterative algorithm. In *Conference Proceedings of Science* (Vol. 6, No. 1, pp. 168-172).
- Aubin, J. P., & Frankowska, H. (1990). Set-valued. Analysis, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.
- Banach. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations. *Fund. Math*, 133-181.
- Berinde, V. (2006). Iterative approximation of fixed points. Berlin: Springer.
- Bhaskar, T. G., & Lakshmikantham, V. (2006). Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 65(7), 1379-1393.
- Browder, F. E. (1967). Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 197-228.
- Can, Y. B., Karaca, N. K., & Yıldırım, I. (2024). Parallel iteration methods with application to variational inequality problems. *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, 14 (2).
- Cegielski, A. (2012). Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces (Vol. 2057). Springer.
- Ekeland, I., & Temam, R. (1976). Convex analysis and variational problems, *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland, 47-48.
- Eslamian, M., & Kamandi, A. (2024). Hierarchical variational inequality problem and split common fixed point of averaged operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 437, 115490.
- Hammad, H. A., Rehman, H. U., & De la Sen, M. (2020). Advanced algorithms and common solutions to variational inequalities. *Symmetry*, 12(7), 1198.
- Huttenlocher, D. P., Klanderman, G. A., & Rucklidge, W. J. (2002). Comparing images using the Hausdorff distance. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(9), 850-863.
- Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 147-150.
- Kakutani, S. (1941). A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Math. J.* 8(3): 457-459.

- Khamsi, M. A., & Kirk, W. A. (2011). An introduction to metric spaces and fixed point theory. John Wiley & Sons.
- Khan, A., Akram, M., & Dilshad, M. (2023). Approximation of iterative methods for altering points problem with applications. *Mathematical Modelling and Analysis*, 118-145.
- Kinderlehrer, D., & Stampacchia, G. (1980). An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press.
- Krasnoselskij, M. A. (1955). Two remarks on the method of successive approximations. *Uspehi Mat. Nauk.*, 123-127.
- Lions J. L. and Stampacchia, G. (1967). Variational inequalities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 493-519.
- Maldar, S. (2022). New parallel fixed point algorithms and their application to a system of variational inequalities. *Symmetry* 14(5), 1025.
- Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 506-510.
- Musayev, B., & Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz. Balcı yayınları, 470.
- Nadler Jr, S. B. (1969). Multi-valued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, 30(2).
- Nagurney, A. (2002). Variational Inequalities, Technical report. Isenberg School of Management University of Massachusetts Amherst.
- Opial, Z. (1967). Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(4), 591-597.
- Petruşel, A., Petruşel, G., & Yao, J. C. (2020). Multi-valued graph contraction principle with applications. *Optimization*, 69(7-8), 1541-1556.
- Picard, E. (1890). Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. *J. Math. Pures Appl.*, 145-210.
- Sahu, D. R. (2005). Fixed points of demicontinuous nearly Lipschitzian mappings in Banach spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 46 (4), 653-666.
- Sahu, D. R. (2014). Altering points and applications. *Nonlinear Studies*. 21(2), 349-365.
- Sahu, D. R., Kang, S. M., & Kumar, A. (2017). Convergence analysis of parallel S-iteration process for system of generalized variational inequalities. *Journal of Function Spaces*. 1-10.
- Schauder, J. (1930). Der fixpunktsatz in funktionalräumen. *Studia Mathematica*, 2(1), 171-180.
- Schu, J. (1991). Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 43(1), 153-159.
- Sintunavarat, W., & Pitea, A. (2016). On a new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Berinde mappings with convergence analysis. *J. Nonlinear Sci. Appl*, 2553-2562.
- Şoltuz, Ş. M., & Grosan, T. (2008). Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive-like operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 2008(1), 242916.
- Soykan, Y. (2008). Fonksiyonel analiz. Nobel Yayın Dağıtım.
- Stampacchia, G. (1964). Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes. *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences*.

- Reich, S. (1979). Fixed point theorems for set-valued mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 69(2), 353-358.
- Ullah, K., & Arshad, M. (2018). Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process. *Filomat*, 32(1), 187-196.
- Verma, M., & Shukla, K. K. (2017). A new accelerated proximal technique for regression with high-dimensional datasets. *Knowledge and Information Systems*, 423-438.
- Yao, Y., Liou, Y. C., & Kang, S. M. (2013). Two-step projection methods for a system of variational inequality problems in Banach spaces. *Journal of Global Optimization*, 55(4), 801-811.
- Zhao, X., Sahu, D. R., & Wen, C. F. (2018). Iterative methods for system of variational inclusions involving accretive operators and applications. *Fixed Point Theory*, 19(2), 801-822.
- Zeidler, E. (1986). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, III: Variational Methods and Applications*. New York: Springer.
- Xu, H. K., & Sahu, D. R. (2022). Parallel normal S-iteration methods with applications to optimization problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 42(16), 1925-1953.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Yasin Berkay CAN
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Mehmetçik Anadolu Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Orta
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
1. Can, Y. B., Karaca, N. K., & Yıldırım, I. (2024). Parallel iteration methods with application to variational inequality problems. Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 14 (2).	