



**KUANTUM KÜTRİT SİSTEMLER İÇİN GROVER
ALGORİTMASI KULLANILARAK BİR
OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ**

Orhan AMİROV

Danışman: Doç. Dr. Mesut KARABACAK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2025

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**KUANTUM KÜTRİT SİSTEMLER İÇİN GROVER ALGORİTMASI
KULLANILARAK BİR OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ**

(Solution of An Optimization Problem Using Grover's Algorithm For Quantum Qutrit Systems)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Orhan AMİROV

Danışman: Doç. Dr. Mesut KARABACAK

Erzurum
Ağustos, 2025

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Orhan AMİROV tarafından hazırlanan “Kuantum Kütrit Sistemler için Grover Algoritması Kullanılarak bir Optimizasyon Probleminin Çözümü” başlıklı çalışması .. / .. / 2025 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Danışman: Doç. Dr. Mesut KARABACAK

Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi İsrail OKUMUŞ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

.... / / 2025

Aslı ıslak imzalıdır

Prof. Dr. Alper NUHOĞLU

Enstitü Müdürü

ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Yüksek Lisans Tezi olarak Doç. Dr. Mesut KARABACAK danışmanlığında sunulan “**Kuantum Kütrit Sistemler için Grover Algoritması Kullanılarak bir Optimizasyon Probleminin Çözümü** ” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	1	30
Kuramsal Temeller	2	30
Materyal ve Yöntem	6	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	4	20
Sonuç ve Öneriler	0	20
Tezin Geneli	11	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Orhan AMİROV	Doç. Dr. Mesut KARABACAK
20.8.2025	20.8.2025
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanmasında öncelikle her anımda benim yanımda olan desteklerini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Mesut KARABACAK' a, değerli görüşlerini, desteklerini ve katkılarını sunan değerli öğretim üyesi Prof. Dr. Necati ÇELİK' e, hayatım boyunca arkamda duran hep destekleyen efsane babam Prof. Dr. Şerif AMİROV' a ve güzel aileme, hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen her anımda yanımda olan canım eşim Hale AMİROV' a çalışmalarımda bana destek veren Fatih KELEŞ' e çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresince ‘‘2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı’’ ile tarafıma vermiş olduğu burs desteği için TÜBİTAK'a çok teşekkür ederim.

Orhan AMİROV



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUANTUM KÜTRİT SİSTEMLER İÇİN GROVER ALGORİTMASI KULLANILARAK BİR OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Orhan AMİROV

Amaç: Bu çalışmanın temel amacı, klasik ve kubit tabanlı yaklaşımlara kıyasla, kütrit sistemleri üzerinde uygulanan Grover algoritmasının bir lojistik optimizasyon problemini çözmedeki etkinliğini ve hızlandırma potansiyelini araştırmaktır. Kütrit sistemlerin sunduğu daha zengin durum uzayının, arama sürecini daha az adımla tamamlayarak verimliliği nasıl artırdığı incelenmiştir.

Yöntem: Araştırmada, 5 bölgeli bir lojistik dağıtım problemi, 5 kütritten oluşan bir kuantum sistemiyle modellenmiştir. Problemin süre kısıtlarına uyan ve en düşük maliyetli optimal çözümleri bulmak için Grover algoritması kütrit tabanına uyarlanmıştır. Bu kapsamda genelleştirilmiş Hadamard kapısı, aranan durumları işaretleyen bir kâhin fonksiyonu ve difüzyon operatörü tasarlanmış ve teorik olarak uygulanmıştır.

Bulgular: 1024 olası durumdan oluşan arama uzayında, optimizasyon koşullarını sağlayan 45 geçerli durum ($M = 45$) tespit edilmiştir. Kubit tabanlı Grover algoritmasının, bu hedef durumlardan biri yüksek olasılıkla bulmak için yaklaşık olarak 3.75 iterasyona ihtiyaç duyduğu hesaplanmıştır. Yapılan analizde, 3 iterasyon ($r = 3$) sonucunda hedef durumları bulma olasılığının %99.06 gibi çok yüksek bir değere ulaştığı görülmüştür. Ardından aynı problem 243 olası durumdan oluşan arama uzayında, yine $M = 45$ geçerli durum için Kütrit tabanlı Grover algoritmasının hedef durumlarından birini yüksek olasılıkla bulmak adına yaklaşık olarak 1.82 iterasyona ihtiyaç duyduğu hesaplanmıştır. Yine yapılan analizde, sadece tek bir iterasyon ($r = 1$) sonucunda hedef durumların bulunma olasılığının %95 gibi yüksek değere ulaştığı görülmüştür. Bu durum arama uzayını dramatik ölçüde daraltarak çözüme hızla yakınsadığını göstermekle beraber problemin Kütrit sistemlerde çözülmesiyle çok daha hızlı istenen çözüme ulaştığı görülmüştür.

Sonuçlar: Grover algoritmasının kütrit sistemlerine uyarlanması, çok durumlu optimizasyon problemlerinin çözümlerinin bulunması probleminde belirgin bir kuadratik hızlanma sağladığı doğrulanmıştır. İncelenen lojistik probleminde, algoritma $O(\sqrt{243})$ adımla çözüme ulaşarak klasik $O(243)$ adıma kıyasla üstün bir verimlilik sergilemiştir. Bu çalışma, kuantum hesaplamanın ikili(binary) sistemin ötesine taşınarak daha karmaşık ve geniş ölçekli problemlerin çözümünde kütrit sistemlerin potansiyel bir araç olduğunu ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: Kuantum hesaplama, kubit sistemler, kütrit sistemler, kâhin operatörü, difüzyon operatörü, Grover algoritması, süperpozisyon, Kuantum Fourier Dönüşümü (KFD).

Ağustos 2025, 65 Sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

SOLUTION OF AN OPTIMIZATION PROBLEM USING GROVER'S ALGORITHM FOR QUANTUM QUTRIT SYSTEMS

Orhan AMIROV

Purpose: The primary purpose of this study is to investigate the effectiveness and acceleration potential of Grover's algorithm implemented on qutrit systems for solving a logistics optimization problem, in comparison to classical and qubit-based approaches. It is further examined how the richer state space offered by qutrit systems enhances efficiency by completing the search process in fewer steps.

Method: In this research, a logistics distribution problem involving 5 regions is modeled using a quantum system composed of 5 qutrits. To find the optimal, lowest-cost solutions that adheres to the problem's time constraints, Grover's algorithm has been adapted to qutrit basis. Within this framework, a generalized Hadamard gate, an oracle function to mark the searched states, and diffusion operator have been designed and theoretically implemented.

Findings: In the search space consisting of 1024 possible states, 45 valid states ($M = 45$) that satisfy the optimization criteria were identified. It was calculated that the qubit-based Grover's algorithm requires approximately 3.75 iterations to find one of these target states with high probability. The analysis revealed that after 3 iterations ($r = 3$), the probability of finding a target states reached a high value of 99.06%. Subsequently, the same problem was addressed in a search space consisting of 243 possible states. For the same number of valid states ($M = 45$), it was found that the qutrit-based Grover's algorithm requires approximately 1.82 iterations to locate a target state with high probability. Further analysis demonstrated that after only a single iteration ($r = 1$), the probability of successfully finding a target state reached as high as 95%. This result indicates that the search space is significantly narrowed and convergence to the solution is achieved much faster, demonstrating that solving the problem within a qutrit-based system leads to a significantly faster convergence towards the desired solution.

Conclusions: The study confirms that the adaptation of Grover's algorithm to qutrit systems provides a significant quadratic speedup in the problem of finding solutions to multi-state optimization problems. In the examined logistics problem, the algorithm reached the solution in $O(\sqrt{243})$ steps, exhibiting superior efficiency compared to the classical $O(243)$ approach. This work demonstrates that by extending quantum computation beyond binary systems, qutrit systems emerge as a potential tool for solving more complex and large-scale problems.

Keywords: Quantum computing, qubit systems, qutrit systems, oracle operator, diffusion operator, Grover's algorithm, superposition, Quantum Fourier Transform (QFT).

August 2025, 65 Pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ.....	1
GİRİŞ.....	2
Araştırmanın Amacı	5
Araştırmanın Önemi ve Gerekçesi	6
Araştırmanın Sınırlılıkları	7
KURAMSAL TEMELLER.....	8
Kuantum Hesaplama ve Temel Kavramlar	8
Kübit ve Kütrit Sistemleri	8
Hilbert Uzayı.....	8
Süperpozisyon İlkesi	9
Dolanıklık.....	10
Grover Algoritması	11
Kütrit Sistemler için Hadamard Kapısı	11
MATERYAL VE YÖNTEM	12
Kuantum Hesaplamanın Paradigmaları.....	12
Grover'ın Kuantum Arama Algoritması.....	12
Grover Algoritmasının Kütrit Tabanlı Sistemler Üzerine Genelleştirilmesi	13
Fourier Dönüşümü Temelli Tanımlama.....	14
H3 Operatörünün Hesaplanması	14
Kütrit Sistemler için Pauli Operatörleri	15
X3 (Generalized Pauli X) Operatörü	15
Y3 (Generalized Pauli Y) Operatörü.....	15
Z3 (Generalized Pauli Z) Operatörü	16

Grover Arama Algoritması ve Çalışma Prensipleri	16
Grover Algoritmasının Geometrik Yorumu	22
ARAŞTIRMA BULGULARI	24
Kuantum Kübit Sistemler için Grover Algoritması Kullanılarak Bir Optimizasyon Probleminin Çözülmesi	24
Temel Parametreler ve Kümeler	24
Çözüm Uzaı	24
Kısıtlar ve Amaç Fonksiyonu	25
Problemin Tanımı	26
Başlangıç Koşullarının Tanımlanması	28
Oracle(kâhin) Operatörü Tasarımı	29
Difüzyon Operatörü	29
Ortalama Genliğin Hesaplanması	29
Optimal İterasyon Sayısının Hesaplanması	29
Grover Algoritmasının Geometrik Olarak Hesaplanması	29
Grover Algoritması İterasyonlarının Hesaplanması	30
Kuantum Kürit Sistemler için Grover Algoritması Kullanılarak Bir Optimizasyon Probleminin Çözülmesi	34
Kürit Sistemler için Başlangıç Durumu	35
Kürit Sistemler için Oracle Operatörünün Tanımlanması	35
Kürit Sistemler için Difüzyon Operatörünün Tanımlanması	35
Ortalama Genliğin Hesaplanması	36
Kürit Sistemler için İterasyon Sayısının Hesaplanması	36
Kürit Sistemler için Grover İterasyonlarının Hesaplanması	36
SONUÇ VE ÖNERİLER	40
Sonuç	40
Öneriler	41
KAYNAKÇA	42
EKLER	44
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Grover Algoritması Devre Grafiği	17
Şekil 2. A ile B Arasındaki Yol Grafiği	17
Şekil 3. . U_f Operatörünün Uygulamandan Önceki Genlik Grafiği	19
Şekil 4.. U_f Operatörü Uygulandıktan Sonraki Genlik Grafiği.....	19
Şekil 5. Grover Algoritmasının Genelleştirilmiş Devre Grafiği	22
Şekil 6. Kübit Sistemlerde Python Kodlarıyla Problemi Modellediğimiz Devre Grafiği.....	33
Şekil 7. Kübit Sistemlerde Python Kodlarıyla Problemi Modellediğimiz Genlik Grafiği.....	34
Şekil 8. Kütrit Sistemlerde Python Kodlarıyla Problemi Modellediğimiz Devre Grafiği	38
Şekil 9. Kütrit Sistemlerde Python Kodlarıyla Problemi Modellediğimiz Genlik Grafiği	39

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

Qbit/Qubit	Quantum Bit (Kuantum Bit)
Qutrit	Quantum Trit (Üç seviyeli kuantum durumu)
QFT	Quantum Fourier Transform (Kuantum Fourier Dönüşümü)
H_3	Hadamard Kapısı (3 boyutlu kütrit versiyonu)
U_f	Oracle Function (Kâhin Fonksiyonu)
U_s	Diffusion Operator (Difüzyon Operatörü)
r	Grover iterasyon sayısı
$\otimes$	Tensör çarpımı (çoklu kuantum bitlerinin birleşimi)
F_3	3 boyutlu Fourier dönüşüm matrisi (kütritler için)
M	Hedef durum sayısı (Oracle tarafından işaretlenen geçerli çözümler)
N	Toplam durum sayısı (ör: $N = 3^n$ veya $N = 2^n$)
$\mathcal{H}$	Hilbert Uzayı

GİRİŞ

On dokuzuncu yüzyılın sonlarına gelindiğinde, fizik bilimi insanlık tarihindeki en parlak dönemlerinden birini yaşıyordu. Newton mekaniği, gezegenlerin hareketinden yeryüzündeki mekanik sistemlere kadar makro evrenin tüm dinamiklerini büyük bir hassasiyetle açıklıyordu. James Clerk Maxwell'in elektromanyetizma teorisi ise ışık, elektrik ve manyetizma gibi olguları tek bir zarif teorik çerçevede birleştirerek, klasik fiziğin entelektüel zaferini perçinlemişti. O dönemde bilim camiasında hâkim olan kanı, fiziğin temel yasalarının büyük ölçüde keşfedildiği, geriye yalnızca bu yasaların daha hassas ölçümlerle teyit edilmesi ve birkaç küçük pürüzün giderilmesi kaldığı yönündeydi.

Ancak bu görkemli yapının temellerini sarsacak olan çatlaklar, tam da bu "küçük pürüzler" olarak görülen fenomenlerden ortaya çıktı. Bunlardan en önemlisi, klasik fiziğin açıklamakta aciz kaldığı siyah cisim ışıması problemi idi. Klasik termodinamik ve elektromanyetizma teorileri, ısıtılan bir cismin yaydığı termal radyasyonun spektrumunu, özellikle yüksek frekanslarda (morötesi bölgede) doğru bir şekilde öngöremiyordu. Rayleigh-Jeans yasası olarak bilinen klasik model, yüksek frekanslara çıkıldıkça yayılan enerjinin sonsuza ıraksayacağını öngörüyordu. Bu durum, deneysel verilerle tamamen çelişiyordu ve literatüre "morötesi felaket" (ultraviolet catastrophe) olarak geçti. Bu felaket, mevcut fiziksel paradigmanın atomik ve atom-altı ölçeklerde geçerliliğini yitirdiğinin, doğanın temel işleyişine dair çok daha radikal ve devrimci bir anlayışa ihtiyaç duyulduğunun ilk ve en bariz işaretiydi. Klasik fiziğin sürekli (continuous) ve deterministik dünya görüşü, mikro evrenin kapılarını açmakta yetersiz kalmıştı.

Klasik fiziğin içine düştüğü bu derin krizden çıkış yolu, 1900 yılında Alman fizikçi Max Planck'ın cesur ve devrimci hipoteziyle açıldı. Planck, siyah cisim ışıması spektrumunu matematiksel olarak açıklayabilmek için, enerjinin sürekli bir akış halinde değil, "kuanta" (quanta) adını verdiği ayrık ve bölünemez enerji paketçikleri halinde alınıp verildiğini öne sürdü. Enerjinin bu temel birimlerinin değeri, $E = h\nu$ formülü ile radyasyonun frekansına (ν) bağlıydı ve ' h ' sabiti, daha sonra kuantum mekaniğinin temel taşı haline gelecek olan Planck sabitini temsil ediyordu. Başlangıçta Planck'ın kendisi tarafından bile sadece bir "matematiksel hile" olarak görülen bu fikir, aslında yirminci yüzyıl bilimini kökünden değiştirecek olan birinci kuantum devriminin başlangıç noktasıydı.

Planck'ın attığı bu tohum, takip eden yıllarda filizlenerek büyüdü:

Albert Einstein 1905 yılında fotoelektrik etkiyi açıklamak için, ışığın kendisinin "foton" adı verilen enerji kuantalarından oluştuğunu ileri sürerek Planck'ın fikrine fiziksel bir gerçeklik kazandırdı. Niels Bohr 1913'te kuantizasyon fikrini atom modeline uygulayarak elektronların yalnızca belirli, ayırık enerji seviyelerinde bulunabileceğini gösterdi. Louis de Broglie 1924'de madde parçacıklarının da dalga özelliği gösterebileceğini öne sürerek dalga-parçacık ikiliği kavramını ortaya attı. Erwin Schrödinger ve Werner Heisenberg 1926-1927 yıllarında sırasıyla, bir kuantum sisteminin evrimini betimleyen dalga denklemini ve bir parçacığın konumu ile momentumu gibi eşlenik özelliklerinin aynı anda kesin olarak bilinemeyeceğini ifade eden Belirsizlik İlkesini formüle ettiler.

Bu temel keşifler, evrene bakışımızı geri dönülmez bir şekilde değiştirdi. Newton'un saat gibi işleyen deterministik evreninin yerini; doğası gereği olasılıksal (probabilistic), gözlemcinin ölçüm eyleminin sistemin kendisini etkilediği, süperpozisyon ve dolanıklık gibi sezgilere tamamen aykırı prensiplerin geçerli olduğu bir kuantum gerçekliği aldı. Bu yeni anlayış, transistörden lazere, nükleer enerjiden tıbbi görüntüleme cihazlarına kadar sayısız teknolojinin temelini oluşturdu.

Birinci kuantum devrimi, kuantum fenomenlerini pasif bir şekilde kullanan teknolojiler yaratmışken, yirminci yüzyılın sonlarına doğru bilim insanları çok daha cürekâr bir soru sormaya başladılar: Kuantum mekaniğinin bu tuhaf ve güçlü prensiplerini, bilgi işlemek ve hesaplama yapmak için doğrudan ve aktif bir şekilde kullanabilir miyiz? Bu soru, "ikinci kuantum devrimi" olarak adlandırılan kuantum bilişim (quantum information) ve kuantum hesaplama (quantum computation) alanlarının doğuşunu müjdeledi.

Bu yeni alanın vizyoner öncüleri Richard Feynman ve David Deutsch oldu. Feynman, kuantum mekaniksel sistemleri klasik bilgisayarlarla simüle etmenin olağanüstü zorluğuna dikkat çekerek, bu tür sistemleri en verimli şekilde simüle edebilecek aracın, yine kuantum mekaniği kurallarına göre çalışan bir bilgisayar olacağını öne sürdü. Deutsch ise evrensel kuantum bilgisayar kavramını matematiksel olarak tanımlayarak bu yeni hesaplama paradigmasının teorik temellerini sağlamlaştırdı.

Kuantum hesaplama, gücünü klasik hesaplamada karşılığı olmayan birkaç temel prensipten alır:

Süperpozisyon (Superposition): Klasik bitin 0 ya da 1 olabilmesine karşın, bir kübit $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarının bir lineer kombinasyonu olarak aynı anda var olabilir buna

süperpozisyon ilkesi denir. Bu durum, n kubitlik bir sistemin 2^n adet klasik durumu aynı anda temsil edebilmesi anlamına gelir ve "kuantum paralelliği" olarak bilinen olguya yol açar.

Dolanıklık (Entanglement): İki veya daha fazla kubitin, aralarındaki mesafe ne olursa olsun birbirine bağlı olduğu, tek bir kuantum durumu oluşturduğu fenomendir. Bir kubit üzerinde yapılan ölçüm, diğerlerinin durumunu anında etkiler. Bu, klasik fizikte benzeri olmayan, son derece güçlü bir hesaplama kaynağıdır.

Bu prensipler, kuantum algoritmalarının belirli problem sınıflarında klasik algoritmalara göre üssel veya polinomsal hızlanma sağlamasına olanak tanır. Peter Shor' un büyük sayıları asal çarpanlarına ayırma algoritması ve Lov Grover' ın yapılandırılmamış veri tabanlarında arama algoritması, bu potansiyelin en çarpıcı örnekleridir.

Bugüne kadar kuantum hesaplama araştırmalarının büyük bir kısmı, en temel iki seviyeli kuantum sistemi olan kubitler üzerine odaklanmıştır. Ancak kuantum mekaniği, bilgi birimlerini iki seviye ile sınırlamaz. "Küdit" (quantum digit) olarak adlandırılan d -seviyeli kuantum sistemleri, daha zengin bir Hilbert uzayı ve dolayısıyla daha geniş bir hesaplama altyapısı sunma potansiyeli taşır. Bu tezin merkezinde, $d = 3$ durumuna karşılık gelen üç seviyeli kuantum sistemleri olan kütritler (qutrits) yer almaktadır.

Kütritler, $|0\rangle$, $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ olmak üzere üç temel durumun süperpozisyonunda bulunabilirler. Bu durum, kütrit tabanlı sistemlerin standart kubit tabanlı sistemlere kıyasla önemli avantajlar sunabileceğini göstermektedir. Kütritler daha zengin bir Hilbert uzayı sunarak daha yüksek bir bilgi işleme kapasitesi sağlarlar. Örneğin, n adet kubit 2^n durum kodlayabilirken n adet kütrit 3^n adet farklı durumu temsil edebilir. Bu, aynı sayıda kuantum parçacığı ile daha karmaşık hesaplamaların yapılabilmesi anlamına gelir. Bu avantaj, kütritleri özellikle arama ve optimizasyon gibi görevlerde kuantum algoritmalarının performansını artırmak için umut vadeden adaylar haline getirmektedir.

Kütrit tabanlı sistemlerin sunduğu bu zengin durum uzayı, Grover'in arama algoritması gibi temel kuantum algoritmalarının uyarlanması ve potansiyel olarak daha verimli hale getirilmesi için de yeni ufuklar açmaktadır. Her ne kadar kütritlerin fiziksel olarak gerçekleştirilmesi ve kontrolü (süper-iletken devreler, iyon tuzakları veya fotonik sistemler aracılığıyla), kubitlere göre daha karmaşık zorluklar barındırsa da hata düzeltme protokollerindeki potansiyel sağlamlıkları ve kuantum iletişimindeki avantajları, bu alandaki araştırmaları kritik hale getirmektedir.

Bu tez çalışmasında, bir optimizasyon probleminin çözümünü hızlandırmak için Grover algoritmasının kütrit sistemleri üzerinde uygulanmasını araştırmayı amaçlamaktadır. Klasik

bilgisayarlar için çözümünü zor olan optimizasyon problemleri, genellikle devasa bir çözüm uzayı içinde en uygun çözümü bulmayı gerektirir. Grover algoritması, bu arama işlemini karesel bir hızlanma ile gerçekleştirme potansiyeli sunarak bu tür problemler için güçlü bir kuantum aracı haline gelmektedir.

Bu çalışmanın temel motivasyonu, standart kübit tabanlı yaklaşımların ötesine geçerek, kütritlerin sunduğu daha geniş hesaplama uzayından faydalanmaktır. Bu bağlamda, tez kapsamında ele alınacak olan problem, lojistik alanında karşılaşılan ve birden fazla bölge arasında teslimat stratejilerinin optimize edilmesini hedefleyen bir problemdir. Her bölgedeki teslimat stratejisi (örneğin düşük maliyet-yavaş teslimat, orta maliyet-orta hız, yüksek maliyet-hızlı teslimat) bir kütritin üç temel durumu ile temsil edilecektir. Bu sayede, çok sayıda strateji kombinasyonundan oluşan karmaşık optimizasyon problemi, kütritlerden oluşan bir kuantum sisteminde modellenenecektir.

Grover algoritmasının kütrit sistemlerine uyarlanmasını soyut bir teorik çerçevede bırakmayıp, bunu somut bir lojistik optimizasyon problemi üzerinde modellemesi, gerekli kuantum operatörlerini (özellikle kütrit tabanlı Hadamard kapısı, oracle ve difüzyon operatörü) detaylı bir şekilde tasarlaması ve algoritmanın performansını teorik olarak analiz etmesidir. Bu çalışma, çok seviyeli kuantum hesaplama sistemlerinin, belirli problem sınıflarında standart ikili (binary) kuantum yaklaşımlarına göre daha verimli ve etkin çözümler sunabileceği hipotezini araştırmayı hedeflemektedir.

Araştırmanın Amacı

Hazırladığımız bu tezin temel amacı; klasik hesaplama paradigmalarının optimizasyon problemlerinin çözümünde karşılaştığı sınırlılıkları aşmak üzere, kuantum hesaplamanın sunduğu potansiyeli derinlemesine incelemektir. Araştırmanın odağında, geleneksel iki durumlu kuantum bitleri (kübit) yerine, üç durumlu kuantum sistemleri olan kütritlerin kullanılması yer almaktadır. Bu bağlamda çalışma, kütrit sistemlerinin Grover'ın kuantum arama algoritması ile entegre edilerek, belirli bir optimizasyon problemini çözmedeki etkinliğini ve verimliliğini ortaya koymayı hedeflemektedir.

Bu ana hedef doğrultusunda, araştırmanın alt amaçları şu şekilde belirlenmiştir:

Kütrit sistemlerinin, kübitlere kıyasla sunduğu daha zengin Hilbert uzayı ve artırılmış bilgi yoğunluğu gibi temel teorik avantajları detaylı bir şekilde analiz etmek. Kütritlerin süperpozisyon ve dolanıklık gibi kuantum mekaniksel özelliklerinin, optimizasyon problemlerinin arama uzayını nasıl daha verimli bir şekilde temsil edebileceğini matematiksel olarak temellendirmek.

Kuantum hesaplama literatüründe kanonik bir yere sahip olan Grover'ın arama algoritmasını, ikili (binary) mantıktan üçlü (ternary) mantığa dayalı kütrit sistemlerine uyarlamanın metodolojisini geliştirmek. Bu adaptasyon sürecinde, Hadamard kapısı, oracle (kâhin) fonksiyonu ve difüzyon operatörü gibi temel algoritmik bileşenlerin kütrit sistemleri için yeniden tasarlanmasını ve formüle edilmesini sağlamak.

Geliştirilen kütrit tabanlı Grover algoritmasını, makalede belirtilen çok bölgeci bir lojistik optimizasyon problemine uygulamak. Bu problem üzerinden, maliyet ve zaman kısıtları altında en uygun teslimat stratejisini bulma sürecini modellemek ve algoritmanın bu tür pratik problemlerdeki uygulanabilirliğini göstermek.

Algoritmanın uygulanmasıyla elde edilen sonuçları, aynı optimizasyon probleminin klasik hesaplama algoritmaları ve standart kübit tabanlı Grover algoritması ile elde edilen çözümleriyle nicel olarak karşılaştırmak. Bu karşılaştırma ile kütrit tabanlı yaklaşımın, çözüm için gereken iterasyon sayısı (adım sayısı), hesaplama hızı ve kaynak kullanımı (kütrit sayısı) gibi metrikler açısından sunduğu potansiyel üstünlükleri kanıta dayalı olarak sergilemek.

Nihai olarak bu çalışma, kütrit sistemlerinin optimizasyon problemlerindeki potansiyelini somut bir örnek üzerinden kanıtlayarak, kuantum algoritma tasarımının sınırlarını genişletmeyi ve gelecekteki daha karmaşık ve büyük ölçekli problemlerin çözümü için bir temel oluşturmayı amaçlamaktadır.

Araştırmanın Önemi ve Gerekçesi

Lojistik ve finans gibi alanlarda karşılaşılan optimizasyon problemlerinin artan karmaşıklığı, klasik hesaplama yöntemlerinin yetersiz kaldığı bir noktaya ulaşmıştır. Bu çalışma, kuantum hesaplamanın bu zorluklara sunduğu potansiyel çözümlere odaklanmakla birlikte, literatürde yaygın olarak incelenen kübit tabanlı yaklaşımların ötesine geçerek, büyük ölçüde keşfedilmemiş bir alan olan kütrit sistemlerini ele almasıyla önem arz etmektedir. Araştırmanın temel gerekçesi, kütritlerin sunduğu daha yüksek bilgi yoğunluğunun, optimizasyon problemlerini daha az kuantum kaynağıyla ve potansiyel olarak daha hızlı çözme imkânı sunmasıdır. Bu çalışma, Grover'ın arama algoritmasını kütrit tabanlı bir sisteme uyarlayarak somut bir lojistik problemi üzerinde modellemekte ve böylece kütritlerin teorik avantajlarını pratik bir uygulanabilirlik zeminine oturtmaktadır. Dolayısıyla bu araştırma, hem belirli bir optimizasyon sınıfı için daha verimli bir yol haritası sunmakta hem de kuantum algoritma tasarımının ikili (binary) sistemlerin dışına taşınması için kritik bir teorik ve uygulamalı temel oluşturmaktadır.

Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu çalışma, idealize edilmiş bir kuantum sistemi varsayımı altında teorik bir çerçevede yürütülmüştür. Kütrit tabanlı kuantum donanımlarının henüz deneysel aşamada olması ve gürültü gibi çevresel faktörlere karşı hassasiyeti, algoritmanın mevcut teknolojiyle fiziksel olarak gerçekleştirilmesini ve sonuçların pratik olarak doğrulanmasını kısıtlamaktadır. Ayrıca incelenen lojistik problemi, gerçek dünya uygulamalarının basitleştirilmiş bir modelini temsil etmekte olup, problemin ölçeği ve karmaşıklığı arttıkça kâhin fonksiyonunu tasarım zorluğu da artacaktır.



KURAMSAL TEMELLER

Kuantum Hesaplama ve Temel Kavramlar

Kuantum hesaplama; optimizasyon, kriptografi ve kuantum simülasyonları gibi karmaşık problemlerin çözümünde klasik hesaplama paradigmalarının ötesine geçen yeni nesil bir yaklaşım sunmaktadır. Klasik sistemlerde temel bilgi birimi olan bitlerin aksine, kuantum hesaplama kuantum bitleri (kübit) temel alır. Bu sistemler, kuantum mekaniğinin süperpozisyon ve dolanıklık gibi temel prensiplerini kullanarak paralel hesaplama kapasitesi sağlar ve böylece belirli problem sınıflarında önemli hızlanmalar elde edilebilir.

Kübit ve Kütrit Sistemleri

Kübit (Kuantum Bit): kuantum hesaplamanın temel bilgi birimidir. Bir kübit, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ temel durumlarının lineer bir süperpozisyonu biçiminde ifade edilir. Bu özellik, bir kübit'in ölçüm öncesinde bu iki durumda belirli olasılıklar dahilinde eşzamanlı olarak bulunmasını sağlar. Matematiksel olarak bir kübit şu şekilde ifade edilir:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.1)$$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 'dir. Burada α ve β 'lar kompleks kümenin elemanlarıdır ve olasılık genliklerini temsil eder, n adet kübit ise 2^n farklı durum aynı anda temsil edilebilir (Nielsen & Chuang, 2010).

Kütrit(Kuantum Trit): Bu çalışmada incelenen temel yapı taşlarından biri olan kütrit, üç seviyeli bir kuantum sistemidir. Kübit'lerden farklı olarak $|0\rangle$, $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ olmak üzere üç temel kuantum durumunu içerir. Kütrit'in genel durumu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle \quad (1.2)$$

Burada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ olmak üzere kompleks olasılık genlikleri olup, sistemin normalizasyon koşulu olarak $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ sağlanmalıdır. n adet kütrit, 3^n farklı durumu aynı anda temsil edebilme kapasitesine sahiptir. Bu durum, kütrit sistemlerinin bilgi yoğunluğu açısından kübit sistemlerine göre daha avantajlı bir yapı sunduğunu ve daha geniş bir Hilbert uzayı tanımladığını göstermektedir (Gottesman, 1997).

Hilbert Uzayı

Kuantum mekaniği ve kuantum hesaplamanın matematiksel temelini oluşturan en kritik kavramlardan biri Hilbert uzayıdır. Klasik sistemlerin durumları genellikle reel sayılarla ifade

edilen koordinatlarla (örneğin konum ve momentum) tanımlanırken, kuantum sistemlerinin durumları çok daha zengin ve soyut bir yapıda, bir Hilbert uzayında tanımlanır.

En temel tanımla bir Hilbert uzayı ($\mathcal{H}$), üzerinde bir iç çarpım (inner product) tanımlanmış olan ve bu iç çarpım tarafından üretilen metrik uzay normuna göre tam (complete) olan bir vektör uzayıdır. Bu tanımın kuantum mekaniği için anlamı şudur:

Vektör Uzayı Olması: Bir kuantum sisteminin alabileceği tüm olası durumlar, bu uzaydaki vektörler (spesifik olarak *ket* vektörleri, $|\psi\rangle$) ile temsil edilir. Süperpozisyon ilkesi, bu vektörlerin lineer kombinasyonlarının da geçerli bir kuantum durumu olmasından kaynaklanır.

İç Çarpım Bulunması: İç çarpım, uzaydaki iki vektör arasındaki ilişkiyi ölçmemizi sağlar. Kuantumda bu, bir sistem $|\psi\rangle$ durumundayken, onu $|\phi\rangle$ durumunda bulma olasılığının genliğini (probability amplitude) hesaplayan $\langle\phi|\psi\rangle$ işlemi anlamına gelir. Bu sayede vektörlerin uzunlukları (normları) ve aralarındaki "açılar" (ortogonallik) tanımlanabilir. Bir durum vektörünün normunun karesinin 1'e eşit olması ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) toplam olasılığın 1 olması gerektiği kuralının matematiksel yansımasıdır.

Tam (Complete) Olması: Bu özellik, uzayda "boşluk" veya "delik" olmadığını garanti eder. Matematiksel olarak, her Cauchy dizisinin uzay içinde bir limite yakınsadığı anlamına gelir. Bu, özellikle karmaşık ve sonsuz boyutlu sistemlerde analiz yaparken matematiksel tutarlılığı ve sağlamlığı sağlar.

Tezimiz bağlamında, tek bir kübitin durum uzayı 2 boyutlu bir kompleks Hilbert uzayıyla ($\mathbb{C}^2$) temsil edilirken, daha fazla bilgi taşıyabilen bir kütritin durum uzayı 3 boyutlu bir kompleks Hilbert uzayı ($\mathbb{C}^3$) ile ifade edilir. n adet kütritten oluşan bir sistemin toplam durum uzayı ise bu bireysel uzayların tensör çarpımıyla elde edilen ve boyutu (3^n) olan devasa bir Hilbert uzayıdır. Grover algoritmasının arama yaptığı bu uzayın zengin yapısı, kütritlerin klasik ve kübit tabanlı sistemlere göre potansiyel avantajlarının temelini oluşturur (Nielsen & Chuang, 2010).

Süperpozisyon İlkesi

Süperpozisyon ilkesi, bir kuantum sisteminin ölçüm yapılmadan önce birden fazla kuantum durumunun eşzamanlı bir bileşimi olarak var olabileceğini belirtir. Örneğin bir kütrit, ölçülmeden önce $|0\rangle$, $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ durumlarının bir lineer kombinasyonu şeklinde bulunur. Bu özellik, kuantum hesaplamada aynı anda çok sayıda olasılığın değerlendirilmesine olanak tanır ve bu yönüyle kuantum paralelliğin temelini oluşturur (Gottesman, 1997).

Dolanıklık

Dolanıklık (entanglement), kuantum mekaniğinin en temel ve en çarpıcı özelliklerinden biridir. İki veya daha fazla kuantum sisteminin öyle bir şekilde birbirine bağlanmasıdır ki, sistemler arasındaki toplam kuantum durumu, bireysel sistemlerin durumlarının çarpımı şeklinde ifade edilemez. Bu durumda, bir parçacık üzerinde yapılan herhangi bir ölçüm, diğer parçacığın durumunu anında etkiler; bu etki, sistemler arasında fiziksel bir etkileşim olmasa dahi geçerlidir. Matematiksel olarak, iki kübit'in dolanık bir durumu örneğin aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Bu durumdaki kübitler birbirinden ne kadar uzakta olursa olsun, biri ölçüldüğünde diğerinin durumu da belirlenmiş olur. Görüldüğü üzere $|\phi^+\rangle$ durum uzayı $|\psi_0\rangle = \alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle$ ve $|\psi_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ gibi iki durumun tensör çarpımı halinde yazılamaz bu bize $|\phi^+\rangle$ durum uzayının dolanık olduğunu gösterir. Bu özellik, kuantum sistemlerin klasik sistemlerden ayrıldığı en önemli noktalardan biridir. Dolanıklık durumunun nasıl oluştuğunu aşağıdaki gibi detaylandırılabilir (Nielsen & Chuang, 2010).

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle) \otimes (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \alpha_0\alpha_1|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \beta_0\alpha_1|10\rangle + \beta_0\beta_1|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Eşitliğini sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim...

$$\alpha_0\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_0\beta_1 = 0, \beta_0\alpha_1 = 0, \beta_0\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ olmalı}$$

Fakat, $\alpha_0\beta_1 = 0$ eşitliğinden ya $\alpha_0 = 0$ olmalı ya da $\beta_1 = 0$ olmalı ... (a)

$\beta_0\alpha_1 = 0$ eşitliğinden ya $\beta_0 = 0$ olmalı ya da $\alpha_1 = 0$ olmalı ... (b)

$$\alpha_0\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ eşitliğine göre } \alpha_0, \alpha_1 \neq 0 \text{ olmalı} \quad \dots (c)$$

$$\beta_0\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ eşitliğine göre de } \beta_0, \beta_1 \neq 0 \text{ olmalı,} \quad \dots (d)$$

Yani eğer yukarıdaki (a) eşitliğine göre $\alpha_0 = 0$ ise (c) eşitliği sağlanmaz $\beta_1 = 0$ ise (d) eşitliği sağlanmaz, eğer ki (b) eşitliğinde $\beta_0 = 0$ ise (d) eşitliği sağlanmıyor $\alpha_1 = 0$ ise bu sefer (c) eşitliği sağlanmayacağından böyle bir eşitlik olamaz bu da bize bu iki kübitin birbirlerine dolanık hâlde olduğunu gösteriyor.

Grover Algoritması

Grover algoritması, yapılandırılmamış bir veri tabanında hedeflenen bir öğeyi aramak amacıyla geliştirilmiş kuantum bir arama algoritmasıdır. Klasik algoritmaların N elemanlı bir listede ortalama $O(N)$ adımda arama yapmasına karşın, Grover algoritması bu işlemi $O(\sqrt{N})$ adımda gerçekleştirerek kuadratik hızlanma sağlar.

Algoritma iki temel adımdan oluşur:

Oracle(kâhin) Operatörü (U_f) : Aranan durumu işaretleyen, diğer tüm durumlara ise etkisiz kalan bir kara kutu fonksiyonudur. Hedef durumun fazını ters çevirerek onu ayırtılabilir hâle getirir.

Difüzyon Operatörü (U_s) : Tüm durumların genliklerini, ortalama genlik etrafında yansıtarak hedef durumun genliğini artırır. Bu işlem, aranan durumun ölçümle elde edilme olasılığını yükseltir fakat belli sayıda ölçümden sonra aranan durumun bulunma olasılığı düşmeye başlar.

Bu iki işlemin ardışık ve yeterli sayıda uygulanması sonucunda, hedef durumun ölçümle bulunma ihtimali yüksek düzeylere ulaşır (Nielsen & Chuang, 2010).

Kütrit Sistemler için Hadamard Kapısı

Kütrit sistemler, kübit'ler için kullanılan kuantum kapılarının daha yüksek boyutlu karşılıklarını gerektirir. Bu çalışmada üzerinde durulan temel kapılardan biri genelleştirilmiş Hadamard kapısıdır.

Hadamard Kapısı (H_3) : Kübit sistemlerinde kullanılan Hadamard kapısının kütrit sistemlerine uyarlanmış versiyonudur. Temel bir durumu, üç temel durumun eşit ağırlıklı süperpozisyonuna dönüştürür. Bu kapı, özellikle kütrit tabanlı Kuantum Fourier Dönüşümü'nün $d = 3$ için özel bir durumu olarak değerlendirilebilir. Matrisin gösterimi şu şekildedir:

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix}, \quad \text{burada } w = e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ dir.}$$

Buradaki w , üçüncü dereceden birim kök olup, H_3 kapısının kütrit uzayında süperpozisyon işlevini yerine getirmesini sağlar (Gottesman, 1997).

MATERYAL VE YÖNTEM

Kuantum Hesaplamanın Paradigmaları

Kuantum hesaplama, klasik bilgisayarların temel aldığı bitlerin aksine, kuantum mekaniği yasalarına göre çalışan kuantum bitleri (kübit) kullanarak bilgi işleyen bir hesaplama modelidir (Nielsen & Chuang, 2010). Klasik bitler yalnızca 0 veya 1 değerlerinden birini alabilirken, kübitler süperpozisyon ilkesi sayesinde aynı anda hem 0 hem de 1 durumlarının bir lineer kombinasyonu olarak var olabilirler. Bu durum, n adet kübitten oluşan bir kuantum sicilinin (register), klasik n bitin aksine, 2^n farklı durumu aynı anda temsil edebilmesine olanak tanır. Kuantum hesaplamanın gücünü ortaya çıkaran bir diğer temel fenomen ise dolanıklık (entanglement) olup, birden fazla kübitin durumlarının birbirine bağlı hale gelmesi ve birinin durumunun ölçülmesinin diğerlerinin durumunu anında etkilemesi olarak tanımlanır. Bu özellikler, Shor'un çarpanlara ayırma (Shor, 1997) ve Grover'in veri tabanı arama (Grover, 1996) gibi belirli problem türlerinde klasik algoritmalara göre üssel veya karesel hızlanma sağlayan kuantum algoritmalarının geliştirilmesine zemin hazırlamıştır.

Grover'in Kuantum Arama Algoritması

Grover'in algoritması, N elemanlı yapılandırılmamış bir veri tabanında belirli bir elemanı bulma problemini, klasik algoritmaların gerektirdiği $O(N)$ adım yerine, $O(\sqrt{N})$ adımda çözebilen bir kuantum algoritmasıdır (Grover, 1996). Bu karesel hızlanma, algoritmayı büyük arama uzaylarına sahip optimizasyon problemleri için son derece cazip kılmaktadır. Algoritma temel olarak iki ana adımdan oluşur ve bu adımlar optimal sonuca ulaşana kadar tekrarlanır:

Tanım 1: Oracle (Kâhin) Fonksiyonu (U_f) bu operatör, aranan elemanı "bilen" bir kara kutudur. Arama uzayındaki tüm durumlar eşit süperpozisyonda iken, oracle, aranan hedefe karşılık gelen durumun fazını tersine çevirir (örneğin, genliğini pozitiften negatife çevirir) ve diğer durumların fazını değiştirmeden bırakır. Bu işlem, hedef durumu diğerlerinden ayırır yani "işaretler". Bu operatör ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$U_f = I - 2|x^*\rangle\langle x^*| \quad (2.1)$$

x^* Burada hedef durumu temsil eder (Nielsen & Chuang, 2010).

Tanım 2: Difüzyon Operatörü (U_s) bu operatör, "ortalama etrafında ters çevirme" (inversion about the mean) olarak da bilinir. Amacı, oracle tarafından fazı ters çevrilen durumun

genliğini artırırken, diğer durumların genliklerini azaltmaktır. U_s Operatörü ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$U_s = 2|s\rangle\langle s| - I \quad (2.2)$$

Burada

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle \text{ 'dir. } \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \text{ tüm durumların başlangıç anındaki genliğini temsil eder.}\right)$$

Bu işlem, hedef durumun ölçülme olasılığını her iterasyonda sistematik olarak yükseltirken belli bir süre sonra hedef durumun ölçülme olasılığı düşmeye başlar. Bu iki adımın yaklaşık $\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{M}}$ kez tekrarlanması (burada N toplam eleman sayısı, M ise aranan eleman sayısıdır), aranan elemanın yüksek bir olasılıkla bulunmasını sağlar (Nielsen & Chuang, 2010).

Grover Algoritmasının Kütrit Tabanlı Sistemler Üzerine Genelleştirilmesi

Grover algoritmasının standart uygulaması kubitler üzerine olsa da teorik olarak d -seviyeli sistemlere (küdit) genelleştirilmesi mümkündür. Bu tez çalışmasının odaklandığı kütrit ($d = 3$) tabanlı genelleştirme, algoritmanın temel adımlarının üç boyutlu Hilbert uzayına uyarlanmasını gerektirir.

Kütrit oracle ve difüzyon operatörleri hem oracle fonksiyonu hem de difüzyon operatörü, 3×3 temel matrislerin tensör çarpımları ile oluşturulan 243×243 boyutlu matrisler olarak yeniden tanımlanır. Oracle, belirlenen maliyet ve süre kısıtlarına uyan hedef durumların fazını çevirirken, difüzyon operatörü bu işaretlenmiş durumların genliğini yükseltir.

Bu genelleştirme, kütritlerin daha yüksek bilgi yoğunluğu sayesinde, bazı durumlarda kubit tabanlı sistemlere göre daha verimli bir arama süreci sunma potansiyeli taşımaktadır.

Tanım 3: Başlangıç Süperpozisyonu Kubitlerde kullanılan standart Hadamard kapısı yerine, üç boyutlu sistemler için geliştirilmiş bir Hadamard kapısı (H_3) veya daha genel olarak Kuantum Fourier Dönüşümü (QFT) matrisi kullanılır. Bu, 243 durumun (5 kütrit için 3^5) tamamının eşit genlikli bir süperpozisyonunu oluşturur. (H_3) Operatörü ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Burada, $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 'dir (Gottesman, 1997).

Fourier Dönüşümü Temelli Tanımlama

d Boyutlu bir sistemde genelleştirilmiş Hadamard kapısı, Kuantum Fourier Dönüşüm (KFD) matrisinin bir formu olarak tanımlanabilir. $d = 3$ İçin Fourier matrisinin elemanları şu şekilde verilir;

$$F_{jk} = \frac{1}{\sqrt{d}} w^{jk} \quad (2.4)$$

(Gottesman, 1997).

Burada $w = e^{\frac{2\pi i}{d}}$ 'dir.

- $d = 3$ İçin $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$
- $j, k = 0, 1, 2$ (Satır, sütun indisleri)
- $w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $w^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$
 $w^3 = e^{\frac{6\pi i}{3}} = 1$ Olur.

H_3 Operatörünün Hesaplanması

$$(H_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i,j=0}^2 w^{ij} |i\rangle\langle j|) \quad (2.5)$$

(Klimov, 2003).

$F_{jk} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{jk}$ Formülüne göre matris oluşturacağız.

$$F_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{0.0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle\langle 0| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{01} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{0.1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle\langle 1| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{02} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{0.2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle\langle 2| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{1.0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} |1\rangle\langle 0| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{1.1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} w |1\rangle\langle 1| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{1.2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} w^2 |1\rangle\langle 2| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{20} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{2.0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} |2\rangle\langle 0| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{2.1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} w^2 |2\rangle\langle 1| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}} w^{2.2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w^4 = \frac{1}{\sqrt{3}} w \cdot w^3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} w |2\rangle\langle 2| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

Durumlar taraf tarafa toplandığında,

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} \quad \text{Olur.}$$

Kütrit Sistemler için Pauli Operatörleri

X_3 (Generalized Pauli X) Operatörü

Bu operatör, döngüsel kaydırma (cyclic shift) operatörü olarak bilinir. Kübitlerdeki Pauli X (σ_x) operatörünün kütrit versiyonudur ve baz durumlarını şu şekilde değiştirir;

- $X_3|0\rangle = |1\rangle = [0, 1, 0]^T$
- $X_3|1\rangle = |2\rangle = [0, 0, 1]^T$
- $X_3|2\rangle = |0\rangle = [1, 0, 0]^T$ İle bulunur.

Matris gösterimi: $X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Genel formül;

$$X_d = \sum_{k=0}^{d-1} |(k+1) \bmod d\rangle\langle k| \quad (2.6)$$

İle hesaplanır (Nielsen & Chuang, 2010; Gottesman, 1997).

Y_3 (Generalized Pauli Y) Operatörü

Kübit sisteminde Pauli $Y = iXZ$ şeklindedir. Bu eşitliği genelleştirmek için kütrit sistemlerde kullanılabilir (Nielsen & Chuang, 2010; Gottesman, 1997).

$$Y_3 = iX_3Z_3$$

Şimdi bu eşitliğin açık halini matris formunda yazalım;

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Z_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix} \quad , w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Y_3 = i.X_3Z_3 = i.\begin{bmatrix} 0 & 0 & w^2 \\ w & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & iw^2 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & iw & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & iw^2 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & iw & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Z_3 (Generalized Pauli Z) Operatörü

Faz kaydırma operatörüdür. Baz vektörlerine kompleks faz faktörlerini ekleyen diagonal bir matristir.

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix} \quad , w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bu operatör baz vektörleri için şu işlemi yapar;

- $Z_3|0\rangle = |0\rangle$
- $Z_3|1\rangle = w|1\rangle$
- $Z_3|2\rangle = w^2|2\rangle$

Genel formül;

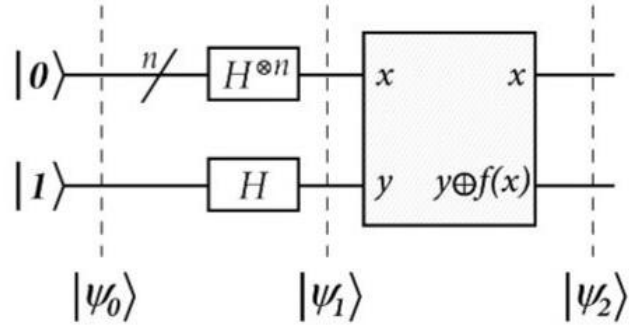
$$Z_d = \sum_{k=0}^{d-1} w^k |k\rangle\langle k| \quad (2.8)$$

İle hesaplanır (Nielsen & Chuang, 2010; Gottesman, 1997).

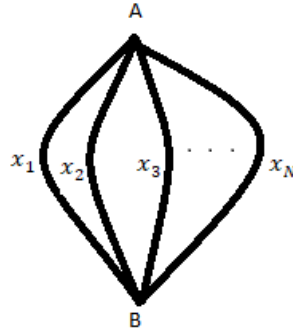
Grover Arama Algoritması ve Çalışma Prensibi

$O(N) \rightarrow$ Klasik ‘N’ kere sorgular. (En kısa yolu bulmak için)

$O(\sqrt{N}) \rightarrow$ Kuantum Grover Arama Algoritması $\sqrt{N}$ adımda bulur.



Şekil 1. Grover Algoritması Devre Grafiği



Şekil 2. A ile B Arasındaki Yol Grafiği

$$x_1, x_2, \dots, x^*, \dots, x_N$$

Buradaki x_i 'ler ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) A'dan B'ye giden yolların uzunluğunu temsil etsin.

x^* : En kısa yol olsun.

$$f(x^*) = 1$$

Diğer tüm x 'ler için;

$$f(x) = 0$$

$$|x\rangle |q\rangle \xrightarrow{U_f} |x\rangle |q \oplus f(x)\rangle$$

$$|x\rangle |0\rangle \xrightarrow{U_f} |x\rangle |0 \oplus f(x)\rangle$$

Eğer $x = x^*$ ise ,

$$|x^*\rangle |0\rangle \xrightarrow{U_f} |x^*\rangle |1\rangle$$

Eğer $x \neq x^*$ ise,

$$|x\rangle |0\rangle \rightarrow |x\rangle |0\rangle \text{ olur.}$$

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n} |1\rangle$$

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle \quad , \quad |-\rangle = \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] = |s\rangle \otimes |-\rangle$$

$$x \neq x^* , f(x) = 0 \text{ ise}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x |x\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \text{ olur.}$$

$$x = x^* , f(x^*) = 1 \text{ ise}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x -|x\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \text{ olur.}$$

Genel formülasyon;

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes |-\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x (-1)^{f(x)} |x\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \right) \otimes |-\rangle \text{ ' şeklindedir.}$$

$$U_f = I - 2|x^*\rangle\langle x^*|$$

$$U_f |x^*\rangle = (I - 2|x^*\rangle\langle x^*|) |x^*\rangle$$

$$= |x^*\rangle - 2|x^*\rangle\langle x^*|x^*\rangle , \langle x^*|x^*\rangle = 1 \quad \text{ortonormal}$$

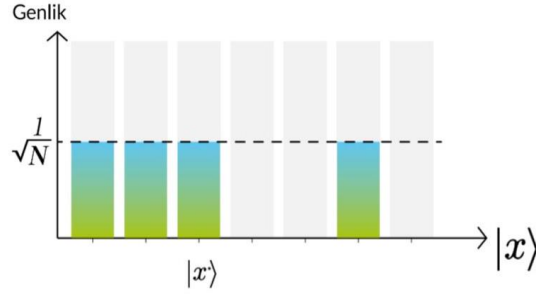
$$= |x^*\rangle - 2|x^*\rangle$$

$$= -|x^*\rangle$$

$$U_f |x\rangle = (I - 2|x^*\rangle\langle x^*|) |x\rangle$$

$$= |x\rangle - 2|x^*\rangle\langle x^*|x\rangle , \langle x^*|x\rangle = 0 \quad \text{ortogonal}$$

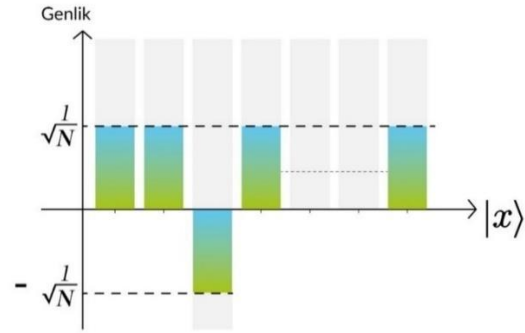
$$= |x\rangle$$



Şekil 3. U_f Operatörünün Uygulamandan Önceki Genlik Grafiği

Şekil 3 'e U_f Operatörü yani faz değıştirme operatörü uygulandığında $|x^*\rangle$ (hedef durum)

Şekil 4 'deki gibi olur.



Şekil 4. U_f Operatörü Uygulandıktan Sonraki Genlik Grafiği

Daha sonra genlik artırma operatörü olan difüzyon operatörünü uygulayacağız.

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle$$

$$\downarrow U_f$$

$$|\psi\rangle = U_f |s\rangle = \sum_x a_x |x\rangle$$

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad a_x^* = -\frac{1}{\sqrt{N}} \quad (U_s = 2|s\rangle\langle s| - I)$$

$U_s |\psi\rangle = U_s U_f |s\rangle$, $U_s U_f$ çarpımına Grover operatörü denir.

$$\langle s|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x'} \langle x'| \sum_x a_x |x\rangle$$

$$\langle s|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x'} \left(\sum_x a_x \langle x'|x\rangle \right)$$

$$\langle x'|x\rangle = \delta x'x$$

Kronocker δ $x = x^*$ ise 1,
 $x \neq x^*$ ise 0 olur.

$$\langle s|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x a_x \cdot \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}} \quad (\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}} \text{ ile çarpıp bölelim.})$$

$$\langle s|\psi\rangle = \left(\sum_x \frac{a_x}{N} \right) \sqrt{N}$$

$$\langle s|\psi\rangle = \langle a \rangle \sqrt{N} \quad , \quad \langle a \rangle : \text{ortalama genlik}$$

$$\langle a \rangle = \sum_x \frac{a_x}{N}$$

(Tüm genlikleri toplayarak toplam genlik sayısını bulduk.)

$$U_s|\psi\rangle = (2|s\rangle\langle s| - I) \sum_x a_x |x\rangle, \quad \sum_x a_x |x\rangle = |\psi\rangle$$

$$U_s|\psi\rangle = (2|s\rangle\langle s|\psi\rangle - \sum_x a_x |x\rangle)$$

$$U_s|\psi\rangle = 2\sqrt{N}\langle a \rangle \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x |x\rangle - \sum_x a_x |x\rangle$$

$$U_s|\psi\rangle = \sum_x (2\langle a \rangle - a_x) |x\rangle = |\emptyset\rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} |s\rangle \xrightarrow{U_f} |\psi\rangle \xrightarrow{U_s} |\emptyset\rangle \\ |\emptyset\rangle \xrightarrow{U_f} |x\rangle \xrightarrow{U_s} |\xi\rangle \end{array} \right\}$$

$\vdots$ (k defa iterasyon), $k \in \mathbb{Z}^+$

(Grover iterasyonu) $O(\sqrt{N})$ yani $\sqrt{N}$ mertebesinde iterasyon yapar.

Bu iterasyon sonucunda çözüm olan durumun genliği çok fazla artmış olur. ‘%98’ ihtimal gibi artış olur ve çözümü bulmuş oluruz.

$$|\psi\rangle = \sum_x a_x |x\rangle$$

$$U_s|\psi\rangle = |\emptyset\rangle = \sum_x (2\langle a \rangle - a_x) |x\rangle \quad (2.9)$$

Şimdi bu durumu örnekle gösterelim.

$n = 3$, $N = 2^3 = 8$ İçin Grover algoritmasına bakalım;

$|100\rangle = |x^*\rangle$ (hedef) olsun.

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|011\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|110\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle$$

$U_f \downarrow$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|010\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|011\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|110\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle$$

$U_s \downarrow$

$$\langle a \rangle = \frac{1}{8} \left(\frac{7}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{3}{8\sqrt{2}}$$

a_x 'lerin genliğı

$$2\langle a \rangle - a_x = 2 \frac{3}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Burada diğeri a_x 'lerin genliğı yarıya düşmüş oldu.

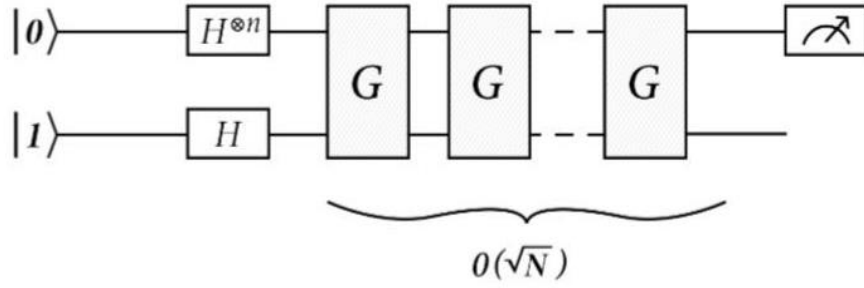
a_{x^*} 'ın genliğı

$$2\langle a \rangle - a_{x^*} = 2 \frac{3}{8\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$$

İşleminin sonucunda ise hedef durumun (a_{x^*} 'ın) genliğı artmış oldu.

Yani bu sayede istenilen çözümün genliğı belirgin bir şekilde artmış olmuş olup istenen çözüme kolayca ulaşıldığı görülmüştür.

Grover Algoritmasının Geometrik Yorumu



Şekil 5. Grover Algoritmasının Genelleştirilmiş Devre Grafiği

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} |x_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |x_2\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} |x^*\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} |x_N\rangle$$

$$U_f = I - 2|x^*\rangle\langle x^*|$$

$$U_f|s\rangle = |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} |x_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |x_2\rangle + \dots - \frac{1}{\sqrt{N}} |x^*\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} |x_N\rangle$$

$$U_s = 2|s\rangle\langle s| - I$$

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} |x_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |x_2\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} |x^*\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} |x_N\rangle$$

$$|s\rangle = \sqrt{\frac{N-1}{N}} |x\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |x^*\rangle$$

$$G = U_s U_f, \quad U_f = I - 2|x^*\rangle\langle x^*|, \quad U_s = 2|s\rangle\langle s| - I$$

$$U_f|s\rangle = (I - 2|x^*\rangle\langle x^*|) \left(\sqrt{\frac{N-1}{N}} |x\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |x^*\rangle \right)$$

$$U_f|s\rangle = \sqrt{\frac{N-1}{N}} |x\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} |x^*\rangle - \frac{1}{\sqrt{N}} |x^*\rangle$$

$$|\psi\rangle = U_f|s\rangle = \sqrt{\frac{N-1}{N}} |x\rangle - \frac{1}{\sqrt{N}} |x^*\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha|s\rangle + \beta|s^\perp\rangle, \quad \langle s|s^\perp\rangle = 0$$

$|s^\perp\rangle$: s vektörüne dik olan vektördür.

$$|s\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|x^*\rangle \text{ (Geometrik Olarak Gösterim)}$$

$$U_s|\psi\rangle = (2|s\rangle\langle s| - I)(\alpha|s\rangle + \beta|s^\perp\rangle)$$

$$U_s|\psi\rangle = 2\alpha|s\rangle - \alpha|s\rangle - \beta|s^\perp\rangle$$

$$U_s|\psi\rangle = \alpha|s\rangle - \beta|s^\perp\rangle$$

Geometrik yorum;

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$m(2\theta) \approx \frac{\pi}{2}$$

$$m \approx \frac{\pi}{4\theta}$$

$$m \approx \frac{\pi}{4}\sqrt{N}$$

$$O(\sqrt{N})$$

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, 5 bölgeli bir lojistik optimizasyon problemi ele alınarak, bu problemin çözümü için Grover algoritmasının performansı iki farklı kuantum mimarisi üzerinde karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. İlk olarak, problem standart kübit sistemleri kullanılarak 10-kübitlik geniş bir arama uzayında modellenmiş ve optimal çözüme ulaşmak için gereken iterasyon adımları ile başarı olasılığı teorik ve geometrik hesaplamalarla detaylandırılmıştır. Ardından, aynı optimizasyon problemi, daha yoğun bir bilgi temsili sunan 5-kübitlik bir sistemde yeniden formüle edilerek, arama uzayındaki dramatik daralmanın ve çözüm için gereken iterasyon sayısındaki belirgin azalmanın getirdiği verimlilik artışının ortaya konulması çalışılmıştır.

Kuantum Kübit Sistemler için Grover Algoritması Kullanılarak Bir Optimizasyon Probleminin Çözülmesi

Temel Parametreler ve Kümeler

Lojistik ağındaki toplam bölge (veya tedarikçi) sayısı n ile gösterilir. Bu çalışmada $n = 5$ olarak alınmıştır. Her bir bölge için uygulanabilecek farklı teslimat stratejileri kümesi S ile ifade edilir. Stratejiler, kuantum sistemindeki temel durumlarla temsil edilmektedir. Kübit sisteminde boyut $d = 3$ olup strateji kümesi şu şekilde tanımlanır:

$$S = \{S_0, S_1, S_2\}$$

Her bir stratejinin kendine özgü bir maliyet ve süre değeri bulunmaktadır. Bu ilişkiler aşağıdaki fonksiyonlarla tanımlanır:

Maliyet Fonksiyonu: $C: S \rightarrow \mathbb{R}^+$

$C(s_j) \rightarrow J$ -inci stratejinin maliyeti

Zaman Fonksiyonu: $T: S \rightarrow \mathbb{R}^+$

$T(s_j) \rightarrow J$ -inci stratejinin süresi

Çözüm Uzayı

Bir çözüm veya strateji konfigürasyonu, n adet bölge için birer strateji seçilmesiyle oluşan n elemanlı bir demettir.

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_i \in S$$

Tüm olası strateji konfigürasyonlarının oluşturduğu küme Ω ile gösterilir. Bu kümenin boyutu (toplam durum sayısı) şu şekilde hesaplanır:

$$N = |\Omega| = d^n$$

Kütrit sistemi için: $N = 3^5 = 243$

Kübit sistemi (2 kübit = 1 kütrit kodlaması) için: $N = (2^2)^5 = 1024$

Kısıtlar ve Amaç Fonksiyonu

Bir konfigürasyonun toplam teslimat süresi

$$T_{toplam}(\sigma) = \sum_{i=1}^n T(\sigma_i)$$

Temel kısıt, toplam sürenin belirli bir eşik değerini aşmaması şeklindedir:

$$T_{toplam}(\sigma) \leq T_{max}$$

Bu çalışmada $T_{max} = 18$ olarak belirlenmiştir. Bu koşulu sağlayan çözümler kümesi V ile gösterilir:

$$V = \{ \sigma \in \Omega \mid T_{toplam}(\sigma) \leq T_{max} \}$$

Bir konfigürasyonun toplam maliyeti:

$$C_{min} = \min\{C_{toplam}(\sigma') \mid \sigma' \in V\}$$

Hedef durumlar kümesi:

$$M = \{ \sigma \in V \mid C_{toplam}(\sigma) = C_{min} \}$$

Hedef durumları sayısı $|M|$, algoritmanın verimliliğini belirleyen önemli bir parametredir. Bu çalışmada yapılan analizler sonucunda:

$$|M| = 45$$

olarak bulunmuştur.

Problemin Tanımı

Bir lojistik şirketi, 5 farklı bölgedeki (A, B, C, D, E) depolarından ürünlerin dağıtımını optimize etmek istiyor. Her bölge 3 farklı teslimat stratejisine sahip olsun ve bunları aşağıdaki gibi bir kübit sistemle temsil edelim.

- Strateji 0 (S_0) $\rightarrow$ $|00\rangle$: Düşük maliyetli ama yavaş teslimat.
- Strateji 1 (S_1) $\rightarrow$ $|01\rangle$: Orta maliyetli ve orta hızlı teslimat.
- Strateji 2 (S_2) $\rightarrow$ $|10\rangle$: Yüksek maliyetli ama hızlı teslimat.

Bu kodlamada $|11\rangle$ durumu herhangi bir stratejiye karşılık gelmediği için “geçersiz” veya “kullanılmayan” bir durum olarak kabul edilir. 5 tedarikçili bu sistem için kullanılacak toplam kübit sayısı Toplam kübit = 5 Tedarikçi x 2 Kübit = 10 Kübit formülü ile yani toplam 10 kübit kullanacağız.

Bu 10 kübitlik sistem, toplamda $N = 2^{10} = 1024$ farklı durum içeren bir Hilbert arama uzayı tanımlar.

Şirketin amacı, toplam maliyeti minimize ederken teslimat süresini belirli bir eşik değerin (18 birim zaman) altında tutmaktır. Her strateji için maliyet ve süre değerleri şu şekilde tanımlansın;

- $|00\rangle$: Maliyet = 2 birim, Süre = 5 birim
- $|01\rangle$: Maliyet = 4 birim, Süre = 3 birim
- $|10\rangle$: Maliyet = 6 birim, Süre = 1 birim

Bir durum, beş bölgenin kombinasyonu olarak ifade edilir. Toplam maliyet ve süre, her bölgedeki seçimlerin toplamıdır.

Optimizasyon koşulu:

- Toplam süre ≤ 18 birim olmalı,
- Toplam maliyeti minimize etmeliyiz.

Oracle (kâhin) tanımı:

Grover algoritmasında kullanılacak oracle (kâhin), şu şekilde çalışır. Bir durumun toplam süresini hesaplar ve eğer süre ≤ 18 ise bu durumu “geçerli” olarak işaretler. Geçerli durumlar arasında en düşük maliyetli optimal çözümlerden birini bulmak için genlik yükseltme uygulanır.

Bu durumları sağlayan geçerli 45 durum tespit edilmiştir. Bu durumlar hedef kümesini (τ) oluşturur.

1. Konfigürasyon Tipi: $(3xS_0, 0xS_1, 2xS_2)$

Bu konfigürasyon, üç bölge için Strateji 0 ve iki bölge için Strateji 2'nin seçilmesini içerir.

Süre Doğrulaması: $(3x5) + (2x1) = 17 \leq 18$

Maliyet Doğrulaması: $(3x2) + (2x6) = 18 (C_{min})$

Kombinasyon Sayısı: Bu stratejilerin 5 bölgeye dağılımı, tekrarlı permütasyon formülüyle

$$\frac{5!}{(3!x2!)} = \frac{120}{12} = 10$$

Farklı durum olarak hesaplanır.

2. Konfigürasyon Tipi: $(2xS_0, 2xS_1, 1xS_2)$

Bu konfigürasyon, iki bölge için Strateji 0, iki bölge için Strateji 1 ve bir bölge için Strateji 2'nin seçilmesini içerir.

Süre Doğrulaması: $(2x5) + (2x3) + (1x1) = 17 \leq 18$

Maliyet Doğrulaması: $(2x2) + (2x4) + (1x6) = 18 (C_{min})$

Kombinasyon Sayısı: Dağılım sayısı

$$\frac{5!}{(2!x2!x1!)} = \frac{120}{4} = 30$$

Farklı durum oluşur.

3. Konfigürasyon Tipi: $(1xS_0, 4xS_1, 0xS_2)$

Bu konfigürasyon, bir bölge için Strateji 0 ve dört bölge için Strateji 1'in seçilmesini içerir.

Süre Doğrulaması: $(1x5) + (4x3) = 17 \leq 18$

Maliyet Doğrulaması: $(1 \times 2) + (4 \times 4) = 18 (C_{min})$

Kombinasyon Sayısı: Dağılım sayısı

$$\frac{5!}{(1! \times 4!)} = \frac{120}{24} = 5$$

Farklı durum oluşur.

Genel olarak tüm durumlar göze alındığında 1. Konfigürasyondan 10 farklı durum, 2. Konfigürasyondan 30 farklı durum ve son olarak 3. Konfigürasyondan 5 farklı durum oluşarak toplamda $10 + 30 + 5 = 45$ farklı hedef durum oluşur

Örnek Problem:

1024 olası durumdan birkaçını inceleyelim.

1. $|01\ 00\ 10\ 01\ 00\rangle = |10210\rangle$ Süre: $3+5+1+3+5=15$ ($17 \leq 18$) (Geçerli)

Maliyet: $4+2+6+4+2=18$

2. $|01\ 00\ 00\ 00\ 00\rangle = |10000\rangle$ Süre: $3+5+5+5+5=23$ ($23 \not\leq 18$) (Geçersiz)

Maliyet: $4+2+2+2+2=12$

3. $|00\ 10\ 00\ 10\ 01\rangle = |02011\rangle$ Süre: $5+1+5+3+3=15$ ($17 \leq 18$) (Geçerli)

Maliyet: $2+6+2+4+4=18$

Bu durumda oracle (kâhin) önce süre ≤ 18 olan durumları işaretler (örneğin; $|10220\rangle, |02001\rangle, vb.$) ardından bu geçerli durumlar arasında en düşük maliyetli optimal çözümlerden birini bulmak için Grover algoritmasını kullanacağız.

Başlangıç Koşullarının Tanımlanması

Tüm kubitler başlangıçta $|0\rangle$ durumundadır. Her birine Hadamard kapısı uygulanarak eşit genlikli süperpozisyon oluşturulur:

$$|\psi_0\rangle = H^{\otimes 10} |0000000000\rangle = \frac{1}{\sqrt{1024}} \sum_{x=0}^{1023} |x\rangle \quad (3.1)$$

Her bir durumun başlangıç genliği:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1024}} = \frac{1}{32} \approx 0.03125$$

Oracle(kâhin) Operatörü Tasarımı

Oracle operatörü, hedef durumların fazını tersine çevirir.

$$O = I - 2 \sum_{x \in \tau} |x\rangle\langle x| \quad (3.2)$$

Hedef durumlar: $\alpha \rightarrow -\alpha$ 'a çevirir.

Diğer durumlar: $1024 - 45 = 979$ durum sabit kalır.

Difüzyon Operatörü

Difüzyon operatörü U_s ile gösterilir.

$$U_s = 2|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - I \quad (3.3)$$

İle hesaplanır. Bu operatör, tüm genlikleri ortalama genlik etrafında yansıtarak hedef durumların genliğini iteratif olarak büyütürken istenen başarı olasılığı yakalandıktan sonra çözümlerin bulunma olasılığı düşmeye başlar.

Ortalama Genliğin Hesaplanması

$$\mu_1 = \frac{M \cdot \alpha_1 + (N - M) \cdot \beta_1}{N} \quad (3.4)$$

Formülüyle hesaplanır (Nielsen & Chuang, 2010).

Optimal İterasyon Sayısının Hesaplanması

$$R \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{M}} \quad (3.5)$$

ile hesaplanır. Bizim problemimizde ise ;

$$N = 1024 , \quad M = 45$$

$$R \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{M}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{1024}{45}} \approx 3.75 \Rightarrow r = 4 \text{ (tamsayı olarak alınır)}$$

Grover Algoritmasının Geometrik Olarak Hesaplanması

Grover algoritmasında, hedef durumların genlikleri istenilen çözüm bulunana kadar artar ve bu artış

$$\theta = \arcsin \left(\sqrt{\frac{M}{N}} \right) \quad (3.6)$$

Açısıyla modellenir (Nielsen & Chuang, 2010).

Genlik Değişimi: Her yinelemede (r), oracle (kâhin) hedef durumlarının fazını ters çevirir ve difüzyon operatör genlikleri ortalama etrafında yansır. Bir hedef durumun genliği yaklaşık olarak:

$$\sin((2r + 1)\theta) \quad (3.7)$$

olarak hesaplanır.

Olasılık ise genliğin karesi yani,

$$\sin^2((2r + 1)\theta) \quad (3.8)$$

ile hesaplanır (Nielsen & Chuang, 2010).

Grover Algoritması İterasyonlarının Hesaplanması

Öncelikle oracle (kâhin) operatörü uygulanarak hedef durumların fazı değiştirilir. Ardından difüzyon operatörüyle hedef durumların genlikleri iterasyonlar yardımıyla yükseltilir.

1.iterasyon:

Oracle uygulandıktan sonra

- $\alpha_1 = -0.03125$ (Hedef durumların genliği)
- $\beta_1 = 0.03125$ (Diğer durumların genliği)

Ortalama genlik:

$$\mu_1 = \frac{45 * (-0.03125) + (1024 - 45) * 0.03125}{1024} = \frac{-1.40625 + 30.59375}{1024} \approx 0.0285$$

Yeni genlikler:

- Hedef durum: $\alpha'_1 = 2 * 0.0285 + 0.03125 \approx 0.08825$
- Diğer durumlar: $\beta'_1 = 2 * 0.0285 - 0.03125 \approx 0.02575$

2.iterasyon:

Oracle uygulandıktan sonra

- $\alpha_2 = -0.08825$ (Hedef durumların genliği)
- $\beta_2 = 0.02575$ (Diğer durumların genliği)

Ortalama genlik:

$$\mu_2 = \frac{45 * (-0.08825) + (1024 - 45) * 0.02575}{1024} = \frac{-3.97125 + 25.20925}{1024} \approx 0.02073$$

Yeni genlikler:

- Hedef durum: $\alpha'_2 = 2 * 0.02073 + 0.08825 \approx 0.12971$
- Diğer durumlar: $\beta'_2 = 2 * 0.02073 - 0.02575 \approx 0.01571$

3. iterasyon:

Oracle uygulandıktan sonra

- $\alpha_3 = -0.12971$ (Hedef durumların genliği)
- $\beta_3 = 0.01571$ (Diğer durumların genliği)

Ortalama genlik:

$$\mu_3 = \frac{45 * (-0.12971) + (1024 - 45) * 0.01571}{1024} = \frac{-5.83695 + 15.39009}{1024} \approx 0.00933$$

Yeni genlikler:

- Hedef durum: $\alpha'_3 = 2 * 0.00933 + 0.12971 \approx 0.14837$
- Diğer durumlar: $\beta'_3 = 2 * 0.00933 - 0.01571 \approx 0.00295$

4. iterasyon:

Oracle uygulandıktan sonra

- $\alpha_3 = -0.14837$ (Hedef durumların genliği)
- $\beta_3 = 0.00295$ (Diğer durumların genliği)

Ortalama genlik:

$$\mu_4 = \frac{45 * (-0.14837) + (1024 - 45) * 0.00295}{1024} = \frac{-6.67665 + 2.88705}{1024} \approx -0.00370$$

Yeni genlikler:

- Hedef durum: $\alpha'_4 = 2 * (-0.00370) + 0.14837 \approx 0.14097$
- Diğer durumlar: $\beta'_4 = 2 * (-0.00370) - 0.00295 \approx -0.01035$

4. iterasyon sonucu;

- Tek bir hedefin ölçülme olasılığı;

$$P_{tek} = |\alpha_4|^2 = (0.14097)^2 \approx 0.0199$$

- Herhangi bir hedef durumun ölçülme olasılığı (toplam 45 hedef);

$$P_{toplam} = M * P_{tek} = 45 * 0.0199 \approx 0.896$$

Yani yaklaşık olarak %89.6 başarı olasılığı elde edilir fakat

3. iterasyonda

- Tek bir hedefin ölçülme olasılığı;

$$P_{tek} = |\alpha_3|^2 = (0.14837)^2 \approx 0.02201$$

- Herhangi bir hedef durumun ölçülme olasılığı (toplam 45 hedef);

$$P_{toplam} = M * P_{tek} = 45 * 0.02201 \approx 0.9906$$

Daha yüksek başarı oranı yakalandığı için 3. iterasyonda iterasyon adımlarını durdurmalıyız başarı şansımız yaklaşık %99.06' dır. 4. iterasyonda ise bu ihtimal 3. iterasyona göre daha aşağıda olduğundan bir sonraki iterasyonlarda başarı ihtimali düşeceğinden biz pik değerine ulaştığımız değerde iterasyonları bitiriyoruz yani sadece 3 iterasyonla istenilen çözüme ulaşmış bulunuyoruz.

Şimdi bulduğumuz sonucu geometrik olarak hesaplayarak doğruluğunu kanıtlayalım:

Öncelikle θ açısını hesaplayalım:

$$\theta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{M}{N}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{45}{1024}}\right) \approx 0.2112 \text{ radyan}$$

1. iterasyon:

$$r = 1 \text{ için } \sin((2 * 1 + 1) * 0.2112) \approx 0.592049833$$

$$\text{olasılık hesabı} \rightarrow \sin^2((2 * 1 + 1) * 0.2112) \approx 0.3525 \text{ (\%35)}$$

2. iterasyon:

$$r = 2 \text{ için } \sin((2 * 2 + 1) * 0.2112) \approx 0.8703930204$$

$$\text{olasılık hesabı} \rightarrow \sin^2((2 * 2 + 1) * 0.2112) \approx 0.7571 \text{ (\%76)}$$

3. iterasyon:

$$r = 3 \text{ için } \sin((2 * 3 + 1) * 0.2112) \approx 0.9957344953$$

$$\text{olasılık hesabı} \rightarrow \sin^2((2 * 3 + 1) * 0.2112) \approx 0.9906 \text{ (\%99)}$$

Geometrik olarak yaptığımız hesaba göre de aynı şekilde hedef durumların bulunma olasılığının %99 olarak bulunduğunda kanıtlamış oluyoruz.

Yine 4. iterasyona da bakalım burada genlik değerinin geometrik olarak da düştüğünü göreceğiz.

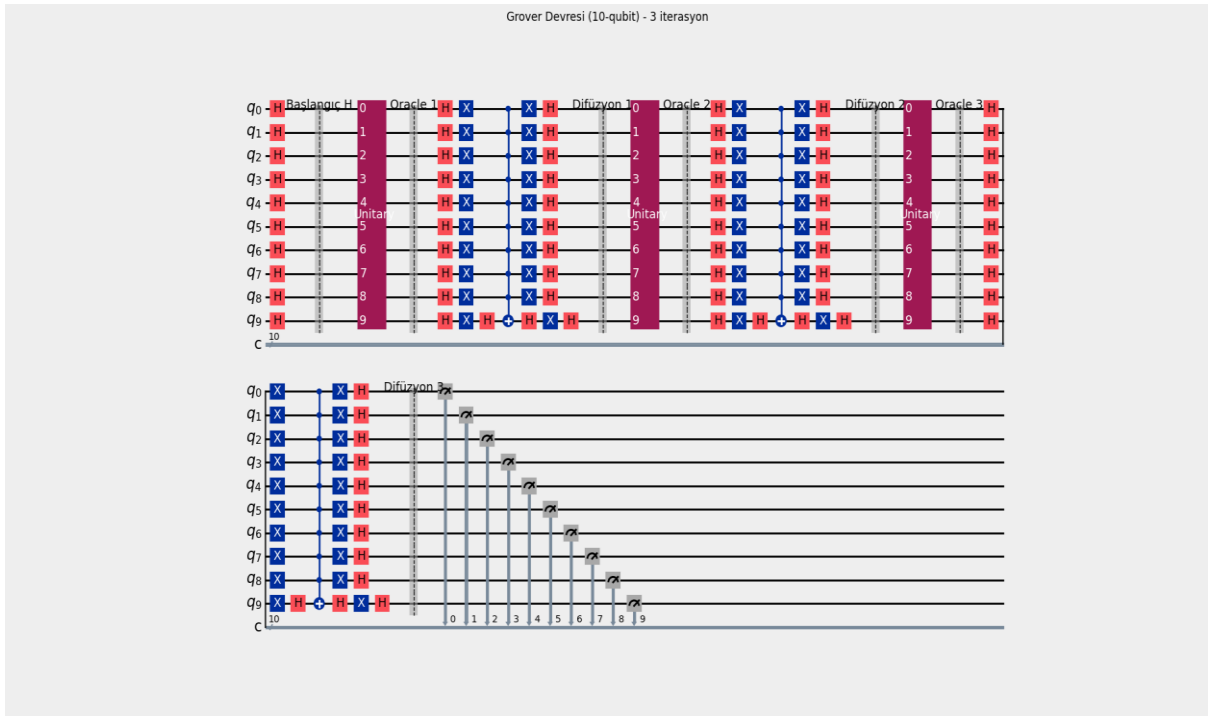
4. iterasyon:

$$r = 4 \text{ için } \sin((2 * 4 + 1) * 0.2112) \approx 0.9460411532$$

$$\text{olasılık hesabı} \rightarrow \sin^2((2 * 4 + 1) * 0.2112) \approx 0.8930 (\%89)$$

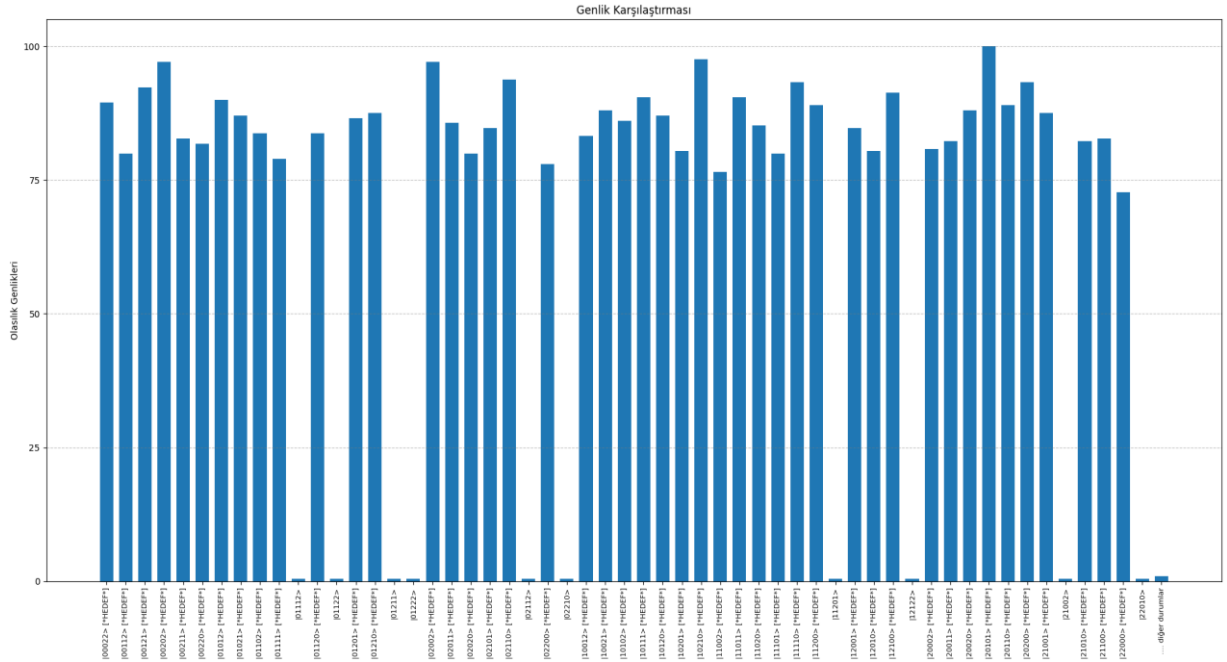
Görüldüğü üzere 4. iterasyon sonunda genlik değeri düştüğünden yine pik değerimiz olan 3. iterasyonda iterasyonları noktalıyoruz.

İlk olarak Python'da qiskit kodlarıyla elde ettiğimiz 3 iterasyonda çözüme ulaşılan devre grafiği Şekil 6 olarak veriyoruz.



Şekil 6. Kübit Sistemlerde Python Kodlarıyla Problemi Modellediğimiz Devre Grafiği

Şimdi iterasyonlar sonucunda oluşan genliklerin grafiğini Şekil 7 olarak veriyoruz.



Şekil 7. Kübit Sistemlerde Python Kodlarıyla Problemi Modellediğimiz Genlik Grafiği

Şimdi bu bulduğumuz sonuçların Python kodlarını paylaşmadan önce problemimizi birde Kütrit tabanlı sistemlere uyarlayarak çözelim.

Kuantum Kütrit Sistemler için Grover Algoritması Kullanılarak Bir Optimizasyon Probleminin Çözülmesi

Bir lojistik şirketi, 5 farklı bölgedeki (A, B, C, D, E) depolarından ürünlerin dağıtımını optimize etmek istiyor. Her bölge 3 farklı teslimat stratejisine sahip olsun ve bunları aşağıdaki gibi bir kütrit sistemle temsil edelim.

- $|0\rangle$: Düşük maliyetli ama yavaş teslimat.
- $|1\rangle$: Orta maliyetli ve orta hızlı teslimat.
- $|2\rangle$: Yüksek maliyetli ama hızlı teslimat.

olsun. Sistemimizdeki toplam durum, 5 kütritten oluşan bir kuantum registeridir. (Her olası kütritin 3 olası durumu olduğundan, $N = 3^5 = 243$ toplam olası durum oluşur.)

Şirketin amacı, toplam maliyeti minimize ederken teslimat süresini belirli bir eşik değerin (18 birim zaman) altında tutmaktır. Her strateji için maliyet ve süre değerleri şu şekilde tanımlansın;

- $|0\rangle$: Maliyet = 2 birim, Süre = 5 birim
- $|1\rangle$: Maliyet = 4 birim, Süre = 3 birim
- $|2\rangle$: Maliyet = 6 birim, Süre = 1 birim

Bir durum, beş bölgenin kombinasyonu olarak ifade edilir. Toplam maliyet ve süre, her bölgedeki seçimlerin toplamıdır.

Kütrit Sistemler için Optimizasyon koşulu

- Toplam süre ≤ 18 birim olmalı,
- Toplam maliyeti minimize etmeliyiz.

Kütrit Sistemler için Oracle tanımı

Grover algoritmasında kullanılacak oracle (kâhin), şu şekilde çalışır. Bir durumun toplam süresini hesaplar ve eğer süre ≤ 18 ise bu durumu “geçerli” olarak işaretler. Geçerli durumlar arasında en düşük maliyetli optimal çözümlerden birini bulmak için genlik yükseltme uygulanır.

Kütrit Sistemler için Başlangıç Durumu

Tüm kütritler başlangıçta $|0\rangle$ durumundadır. Her bir kütrite genelleştirilmiş Hadamard kapısı H_3 uygulanarak eşit genlikli süperpozisyon durumu elde edilir:

$$|\psi_0\rangle = H_3^{\otimes 5}|00000\rangle = \frac{1}{\sqrt{243}} \sum_{x=0}^{242} |x\rangle$$

Bu süperpozisyon durumunda her bir kombinasyonun başlangıç genliği:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{243}} \approx 0.0643$$

Kütrit Sistemler için Oracle Operatörünün Tanımlanması

Oracle O , aşağıdaki iki koşulu sağlayan durumları “hedef durum” olarak işaretler yani fazını “-” ile çarparak değiştirir. Hedef durumlar için oracle aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$O = I - 2 \sum_{x \in \tau} |x\rangle\langle x|$$

Burada τ kübit sistemlerde kullandığımız gibi yine hedef durumlar kümesi olarak tanımlanıyor. Bu kriterleri sağlayan kübit sistemlerdeki gibi 45 farklı durum vardır.

Kütrit Sistemler için Difüzyon Operatörünün Tanımlanması

Difüzyon operatörü, ortalama genlik etrafında yansıma yaparak hedef durumların genliklerini yükseltir:

$$U_s = 2|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - I$$

Bu operatör, sistemin tüm genliklerini ortalama etrafında yansıtarak, hedef durumların genliğini iteratif olarak artırır. Kütrit sistemlerde bu operatör, Fourier dönüşüm operatörü $F_3^{\otimes 5}$ ile fiziksel olarak uygulanabilir:

$$U_s = F_3^{\otimes 5} (2|00000\rangle\langle 00000| - I) F_3^{\otimes 5} \quad (3.9)$$

Ortalama Genliğin Hesaplanması

$$\mu_1 = \frac{M \cdot \alpha_1 + (N - M) \cdot \beta_1}{N}$$

Kübit sistemlerdeki gibi yine aynı formül ile hesaplanır.

Kütrit Sistemler için İterasyon Sayısının Hesaplanması

Toplam durum sayısı:

$$N = 3^5 = 243$$

Hedef durum sayısı:

$$M = 45$$

Optimal Grover iterasyon sayısı:

$$R \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{M}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{243}{45}} \approx 1.823 \Rightarrow r = 2$$

Kütrit Sistemler için Grover İterasyonlarının Hesaplanması

1.iterasyon:

Oracle uygulandıktan sonra

- $\alpha_1 = -0.0643$ (Hedef durumların genliği)
- $\beta_1 = 0.0643$ (Diğer durumların genliği)

Ortalama genlik:

$$\mu_1 = \frac{45 * (-0.0643) + (243 - 45) * 0.0643}{243} = \frac{-2.8935 + 12.7314}{243} \approx 0.0405$$

Yeni genlikler:

- Hedef durum: $\alpha'_1 = 2 * 0.0405 + 0.0643 \approx 0.1453$
- Diğer durumlar: $\beta'_1 = 2 * 0.0405 - 0.0643 \approx 0.0167$

İlk iterasyon sonunda;

- Tek bir hedefin ölçülme olasılığı;

$$P_{tek} = |\alpha'_1|^2 = (0.1453)^2 \approx 0.0211$$

- Herhangi bir hedef durumun ölçülme olasılığı (toplam 45 hedef);

$$P_{toplam} = M * P_{tek} = 45 * 0.0211 \approx 0.9495$$

Yani yaklaşık olarak %95 'e yakın bir başarı olasılığı elde edilir.

2. iterasyon:

Oracle uygulandıktan sonra

- $\alpha_2 = -0.1453$ (Hedef durumların genliği)
- $\beta_2 = 0.0167$ (Diğer durumların genliği)

Ortalama genlik:

$$\mu_2 = \frac{45 * (-0.1453) + (243 - 45) * 0.0167}{243} = \frac{-6.5385 + 3.3066}{243} \approx -0.0133$$

Yeni genlikler:

- Hedef durum: $\alpha'_1 = 2 * (-0.0133) + 0.1453 \approx 0.1187$
- Diğer durumlar: $\beta'_1 = 2 * (-0.0133) - 0.1453 \approx -0.0433$

İkinci iterasyon sonunda ise;

- Tek bir hedefin ölçülme olasılığı;

$$P_{tek} = |\alpha'_2|^2 = (0.1187)^2 \approx 0.0141$$

- Herhangi bir hedef durumun ölçülme olasılığı (toplam 45 hedef);

$$P_{toplam} = M * P_{tek} = 45 * 0.0141 \approx 0.6345$$

Buda yaklaşık olarak %63.5 'lik bir başarı şansı demek oluyor. Buradan şu sonuca varıyoruz verilen problemi kütrit sistemlerde sadece tek bir iterasyonla %95 'e yakın başarı ihtimaliyle bulmuş oluyoruz. 2. iterasyonda suboptimal bir durum olduğundan yani istenen başarı ihtimali düştüğünden tek iterasyon istediğimiz sonucu bize veriyor.

Şimdi yine kübit sistemlerde yaptığımız geometrik hesabı kütrit sistemlerde de uygulayalım.

Öncelikle θ açısını hesaplayalım:

$$\theta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{M}{N}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{45}{243}}\right) \approx 0.4450 \text{ radyan}$$

1. iterasyon:

$$r = 1 \text{ için } \sin((2 * 1 + 1) * 0.4450) \approx 0.9723286139$$

$$\text{olasılık hesabı} \rightarrow \sin^2((2 * 1 + 1) * 0.4450) \approx 0.9464 (\%95)$$

2. iterasyon:

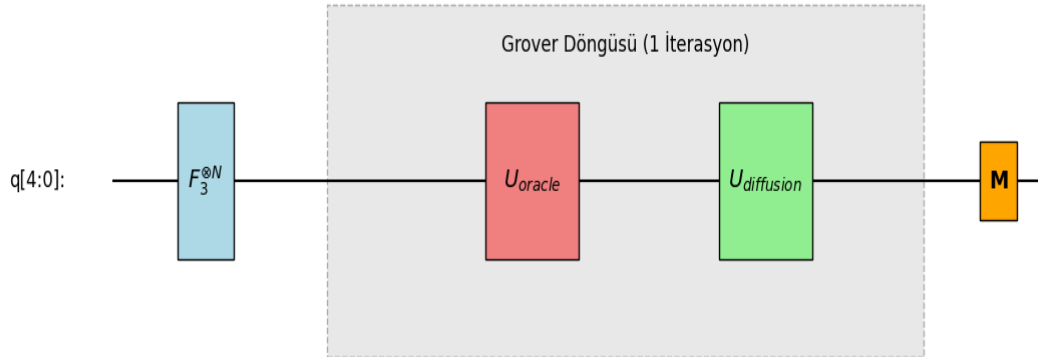
$$r = 2 \text{ için } \sin((2 * 2 + 1) * 0.4450) \approx 0.7935327664$$

$$\text{olasılık hesabı} \rightarrow \sin^2((2 * 2 + 1) * 0.4450) \approx 0.6327 (\%63)$$

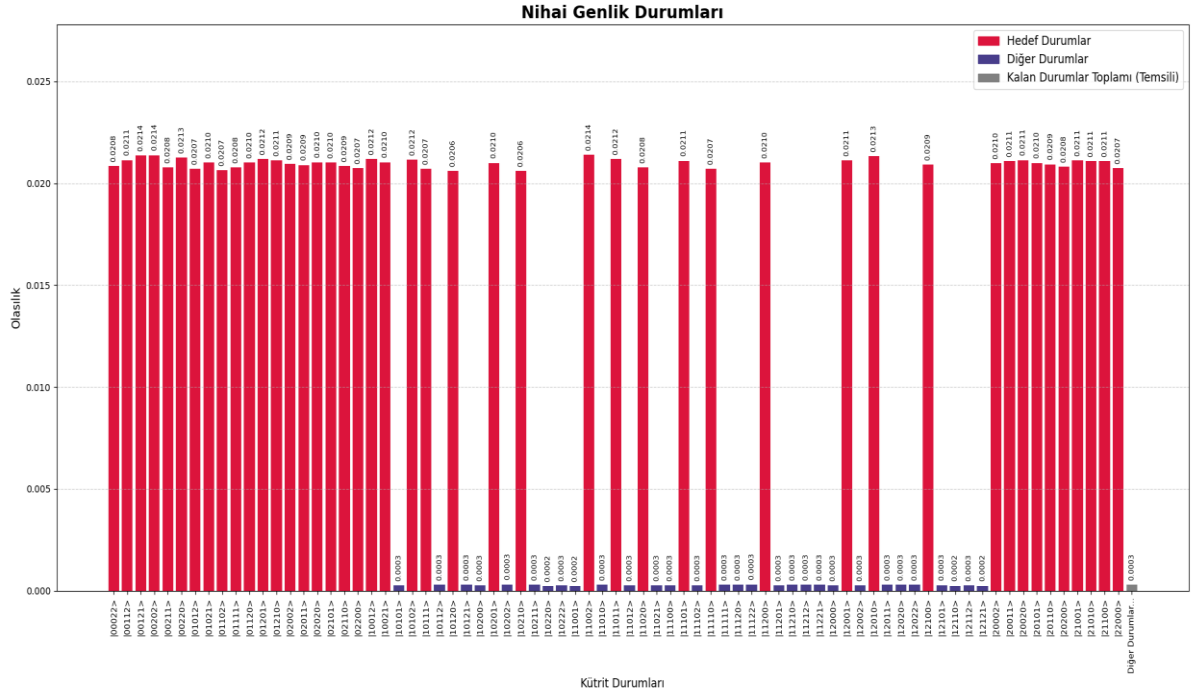
Görüldüğü üzere burada da 2. iterasyon sonucu genlik düştüğünden ilk iterasyonda iterasyon adımlarımızı bitiriyoruz. Bu şekilde çözümü geometrik olarak da kanıtlamış oluyoruz.

Şimdi tek iterasyonda bulduğumuz sonucun devre ve genlik grafiğini Şekil 8 (Devre Grafiği) ve Şekil 9 (Genlik Grafiği) olarak paylaşıyoruz.

Kuantum Kütrit Sistemler İçin Grover Algoritması(Qutip Devre Simülasyonu)



Şekil 8. Kütrit Sistemlerde Python Kodlarıyla Problemi Modellediğimiz Devre Grafiği



Şekil 9. Kütrit Sistemlerde Python Kodlarıyla Problemi Modellediğimiz Genlik Grafiği

SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç

Bu tez çalışmasında, çok seviyeli kuantum sistemlerin sunduğu avantajlardan yararlanarak, kütrit tabanlı Grover algoritmasının 5 tedarikçili bir lojistik optimizasyon problemine uygulanabilirliği araştırılmıştır. Her bir tedarikçinin üç farklı stratejiye sahip olduğu senaryo, geleneksel kübit yaklaşımının ötesine geçilerek kütrit mimarisi ile modellenmiş ve çözüme ulaştırılmıştır.

Çalışmanın temel katkısı, kütrit sistemlerinin klasik 2-seviyeli kübit sistemlerine kıyasla daha fazla bilgi yoğunluğu sağlayarak arama uzayını daha verimli temsil edebileceğini göstermesidir. Toplam

$$3^5 = 243$$

Olası strateji kombinasyonu içinde yalnızca 45 tanesi belirli maliyet ve süre kısıtlarını sağlamaktadır. Bu yapı, kütrit sistemlerin karmaşık optimizasyon problemlerinde etkili çözümler üretme potansiyelini artırmaktadır. Yapılan uygulamada, kütrit tabanlı Grover algoritması yalnızca 1 iterasyon sonunda yaklaşık

$$P_{başarı} \approx 0.95$$

(%95 başarı oranı) ile hedef durumlardan birini başarıyla tespit etmiştir. Bu sonuç, kütrit sistemlerde kuantum hızlanmanın etkin biçimde sağlanabileceğini ortaya koymaktadır.

Öte yandan, aynı optimizasyon problemi kübit tabanlı sistem ile çözüldüğünde, daha geniş bir arama uzayı

$$2^{10} = 1024$$

söz konusudur. Bu durumda hedef durum yine 45 olarak sabit kalmakla birlikte, algoritmanın optimal başarısı için 3 iterasyon uygulanmış ve bu süreç sonunda hedef durumlardan birini ölçme olasılığı yaklaşık

$$P_{başarı} \approx 0.99$$

olarak elde edilmiştir. Bu oran her ne kadar yüksek olsa da daha fazla işlem adımı ve daha geniş bir Hilbert uzayı gerektirdiğinden, sistem kaynaklarının kullanımı bakımından kütrit modeline göre daha maliyetlidir. Ayrıca, kütrit yaklaşımı daha az küdit ile daha yüksek bilgi yoğunluğu

sağladığından, özellikle büyük ölçekli optimizasyon problemlerinde daha verimli bir çözüm yolu sunmaktadır.

Sonuç olarak, bu tez çalışması kütrit sistemlerin yalnızca teorik düzeyde değil, aynı zamanda algoritmik performans açısından da güçlü bir alternatif sunduğunu göstermiştir. Kütrit temelli kuantum devrelerin ve kapıların fiziksel olarak daha erişilebilir hale gelmesiyle birlikte, bu tür çok seviyeli sistemlerin optimizasyon, veri madenciliği, karar verme ve yapay zekâ gibi alanlarda daha geniş uygulama potansiyeli taşıdığı değerlendirilmektedir.

Öneriler

Bu yaptığımız tez çalışması için öneriler olarak;

Kütrit sistemler için gerçek donanım simülasyonları (örn. IBM Qiskit'in kütrit benzeşimli uzantıları ya da QuTiP) üzerinden deneysel uygulamalar yapılabilir.

Kütrit tabanlı Grover algoritması, yalnızca arama değil, optimizasyon, kümelenme ve makine öğrenmesi problemlerine de genişletilerek test edilebilir.

Fiziksel kütrit kapılarının hata düzeltme algoritmaları ile birlikte uygulanabilirliği, algoritmanın güvenilirliği açısından kritik bir gelecek araştırma konusudur.

Kütrit sistemlerin yanı sıra kuartit (4-seviyeli sistem) gibi daha yüksek boyutlu küdit sistemlerinin performansı, Grover benzeri algoritmalarla kıyaslanabilir.

Tedarik zinciri veya lojistik gibi çok kriterli karar problemleri, kütrit sistemlere entegre edilerek çok hedefli optimizasyon yaklaşımları geliştirilebilir.

KAYNAKÇA

- Arute, F., et al. (2019). Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574(7779), 505–510.
- Barenco, A., et al. (1995). Elementary gates for quantum computation. *Physical Review A*, 52(5), 3457–3467.
- Biamonte, J., et al. (2017). Quantum machine learning. *Nature*, 549(7671), 195–202.
- Blok, M. S., et al. (2021). Quantum information processing with Josephson circuits for Qutrit-based quantum computing. *Physical Review X*, 11(2), 021010.
- Bocharov, A., Roetteler, M., & Svore, K. M. (2017). Efficient synthesis of quantum circuits for qutrits. *Physical Review A*, 96(1), 012306.
- Brassard, G., Høyer, P., & Tapp, A. (1997). Quantum counting. *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, 820–831.
- Cervera-Lierta, A. (2018). Exact Ising model simulation on a quantum computer. *Quantum*, 2, 114.
- Childs, A. M., & Kothari, R. (2017). Quantum algorithms for optimization problems. *Encyclopedia of Algorithms*, 1707–1712.
- Chow, J. M., et al. (2021). A 160-qubit quantum processor with flexible connectivity. *2021 IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM)*.
- Cîrstoiu, C., et al. (2020). Variational fast-forwarding for quantum simulation beyond the digital paradigm. *npj Quantum Information*, 6(1), 85.
- Dunjko, V., & Briegel, H. J. (2018). Machine learning & quantum computing: A primer. *Contemporary Physics*, 59(2), 79–93.
- Farhi, E., et al. (2014). A quantum approximate optimization algorithm. *arXiv preprint arXiv:1411.4028*.
- Galda, A., et al. (2021). Implementing a fast quantum search algorithm on a quantum computer. *npj Quantum Information*, 7(1), 84.
- Gong, M., et al. (2021). Quantum walks on a programmable two-dimensional 62-qubit superconducting processor. *Science*, 372(6545), 948-952.
- Google Quantum AI, et al. (2023). Suppressing quantum errors by scaling a surface code logical qubit. *Nature*, 614(7949), 676-681.
- Gottesman, D. (1997). A Theory of Fault-Tolerant Quantum Computation. *arXiv:quant-ph/9702029*.
- Gottesman, D. (1998). Fault-tolerant quantum computation with higherdimensional systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 10(11), 1749–1758.
- Grover, L. K. (1996). A fast quantum mechanical algorithm for database search. *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 212–219. 1
- He, Y., et al. (2021). A two-qubit gate between phosphorus donor electrons in silicon. *Nature*, 599(7886), 573-578.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Orhan AMİROV
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	
Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
Yüksek lisans:	
Doktora:	
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	C1
Almanca:	-
Rusça:	-
Diğer	
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
Bildiri: Solution Of An Optimization Problem Using Grover's Algorithm For Qutrit Systems 9th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences 17 – 19 May 2025, Diyarbakır – Türkiye	