



**RAINA TIPLİ KONVEKS FONKSİYONLAR
ÜZERİNE YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

Merve COŞKUN

Danışman: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2024

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**RAINA TİPLİ KONVEKS FONKSİYONLAR ÜZERİNE YENİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ**

(New Integral Inequalities on Raina-Type Convex Functions)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve COŞKUN

Danışman: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Erzurum
Haziran, 2024

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Merve COŞKUN tarafından hazırlanan “Raina Tipli Konveks Fonksiyonlar Üzerine Yeni İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı çalışması 28 / 06 / 2024 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Danışman: Prof. Dr. Çetin YILDIZ
Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Çağrı KARAMAN
Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Enstitü Yönetim
Kurulunun/....../.... tarih
ve sayılı kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN

Enstitü Müdürü

Aslı ıslak imzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriő, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak *Prof. Dr. Çetin YILDIZ* danışmanlığında sunulan “Raina Tipli Konveks Fonksiyonlar Üzerine Yeni İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	8	30
Kuramsal Temeller	15	30
Materyal ve Yöntem	19	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	12	20
Sonuç ve Öneriler	2	20
Tezin Geneli	16	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Merve COŞKUN	Prof. Dr. Çetin YILDIZ
24.6.2024	24.6.2024
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan ve beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Çetin YILDIZ’a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve tezi yazmamda her türlü yardımını esirgemeyen Sümeyra DEMİR’ e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim boyunca 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB)’na teşekkür ederim.

Merve COŞKUN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RAINA TIPLİ KONVEKS FONKSİYONLAR ÜZERİNE YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Merve COŞKUN

Danışman: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Amaç: Bu çalışmada s – tipi konvekslik, Raina fonksiyon tanımı ve eşitsizlik teorisinin özellikleri kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilmesi amaçlanmıştır.

Yöntem: Teorem ve sonuçları elde etmek amacıyla integraller için üçgen eşitsizliği, Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan, Young, Jensen İntegral Eşitsizliği ve Geliştirilmiş Power-Mean İntegral Eşitsizliği kullanıldı.

Bulgular: Raina fonksiyonu içeren yeni teoremler yazılmıştır. Ayrıca Raina tipli bir lemma ve s – tipi konveks fonksiyon tanımı kullanılarak yeni teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç: Bu tezde elde edilen tüm teoremlere özel değerler verilip eşitsizliklerle ilgili çeşitli sonuçlar yazılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Raina Fonksiyonu, s – tipi konveks fonksiyon, Hölder Eşitsizliği, Power-Mean Eşitsizliği, Hölder-İşcan Eşitsizliği, Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizliği, Jensen Eşitsizliği, Young Eşitsizliği.

Haziran 2024, 68 sayfa

ABSTRACT

MS THESIS

NEW INTEGRAL INEQUALITIES ON RAINA-TYPE CONVEX FUNCTION

Merve COŞKUN

Supervisor: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Purpose: In this study, it is aimed to obtain new inequalities by using the s – type convexity and Raina function with the properties of the inequality theory.

Method: Triangle inequality, Hölder, Power-Mean, Hölder-İscan, Jensen, Young Inequalities and Improved Power-Mean Inequality are used for integrals in order to obtain theorems and results.

Findings: New theorems have been written about Raina function. In addition, new theorems and results are obtained by using a lemma of Raina type and a definition of s – type convex function.

Results: All the theorems obtained in this thesis are given special values and various results about inequalities are written.

Keywords: Raina function, s – type convex function, Hölder Inequality, Power-Mean Inequality, Hölder-İscan Inequality, Improved Power-Mean Inequality, Jensen Inequality, Young Inequality.

June 2024, 68 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ.....	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	5
MATERYAL VE YÖNTEM	13
Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler	13
Raina Fonksiyonu İçin Elde Edilmiş Sonuçlar.....	16
ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	21
SONUÇ VE ÖNERİLER	54
KAYNAKLAR.....	56
ÖZGEÇMİŞ.....	58

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Konveks kümeler	5
Şekil 2. Konkav kümeler	5
Şekil 3. Konveks fonksiyon ($\varphi(x) = x$)	6
Şekil 4. Konveks fonksiyonun geometrik yorumu	7



KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Küme veya Eşit
$\in$	Eleman
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
I	$\mathbb{R}$ de Bir Aralık
I°	I nin İçi
$\mathcal{F}$	Raina Fonksiyonu
β	Beta Fonksiyonu
Γ	Gama Fonksiyonu
J_{h+}^α	α . Dereceden Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegral
J_{b-}^α	α . Dereceden Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$L[h, b]$	$[h, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
φ'	φ Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
φ''	φ Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi

GİRİŞ

İki çokluk arasındaki farkı bir değişkene bağlı olarak ifade etmek ve bunları kıyaslamak için kullanılan eşitsizlikler matematiksel ifade olarak $<, >, \neq, \leq, \geq$ sembolleri ile gösterilmektedir. Reel analizde matematiksel eşitsizliklerin temel amacı değeri tam olarak belirlenemeyen fonksiyon ve ifadelerin sonuçlarını daha iyi bildiğimiz fonksiyon ve ifadelerle sınırlandırıp karşılaştırma yapmaktır.

Eşitsizlikler kendine matematiğin geometri, analiz, topoloji, lineer cebir, olasılık gibi birçok alt disiplinde yer edinmiştir. Bununla beraber fizik, mühendislik, mekanik gibi alanlarda da birden fazla sorunun çözümü için öncülük etmiş, matematikte ve diğer birçok alanda uygulama alanı bulmuştur. Yani sadece matematik için değil ortak disiplinler için de gerekli temel kavramlardan biridir.

Eşitsizlikler üzerine yapılan her çalışmada kendinden önce yapılan çalışmalar referans alınıp yeni sonuçlar elde edilerek eşitsizlik kavramı geliştirilip, genişletilmiştir. Özellikle de 21. yüzyılın başlarına doğru matematiksel eşitsizlikler alanında çalışmalar hızla gelişmeye devam etmiştir.

Eşitsizlik Teorisi'nin temelleri A. L. Cauchy (1785-1857), K. F. Gauss (1775-1855) ve P. L. Chebyshev (1821-1894) tarafından 18. ve 19. yüzyılda atılmaya başlanmıştır. Eşitsizlik Teorisi alanında önemli eserler yazılmıştır. Bu eserler içerisinde en önemlisi Hardy, Polya ve Littlewood tarafından 1934 yılında kaleme alınmış "Inequalities" isimli eserdir. Bu eser, birçok yeni eşitsizlikler içeren ilk kaynak kitap olarak kabul edilir. Bu çalışmayı yine ilk kaynak kitapla aynı ismi taşıyan E. F. Beckenbach ve R. Bellman'ın 1961 yılında kaleme aldıkları "Inequalities" adlı kitap takip etmektedir. Bunların yanı sıra P. Agarwal, G. V. Milovanovic, C. P. Niculescu, C. E. M. Pearce, J. E. Pecaric, A. M. Fink, M. E. Özdemir, İ. İşcan, S. S. Dragomir, M. Z. Sarıkaya, A. O. Akdemir ve E. Set gibi bilim insanlarının eşitsizlikler konusunda birçok çalışması literatürde bulunmaktadır. Alan yazında eşitsizlik kavramı ile ilgili birçok çalışma yapılmış, yeni kitap ve makaleler yazılmıştır.

Eşitsizlik teorisiyle konveks fonksiyonlar yakından ilişkilidir ve önemli eşitsizliklerin çoğu konveks fonksiyonların uygulamalarının bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Buna örnek olarak Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri verilebilir. Bu iki eşitsizlikte Jensen eşitsizliğinin bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Bu eşitsizliklerin yanı sıra Hermite-Hadamard eşitsizliği de önemli bir yere sahiptir. Hermite-Hadamard eşitsizliği 1881 yılında Hermite tarafından ifade edilmiştir. "Konvekslik" kavramının ortaya çıkışı da Hermite tarafından Ekim 1881'de elde

edilen bir sonucun yayınlanmasıyla olmuştur. 1905-1906 yıllarında konveks fonksiyonlar J.L.W.V. Jensen tarafından sistematik olarak ilk kez ele alınmıştır. 1987 yılında J.E. Pećarić tarafından yazılan ve konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak kitap ise 'Convex Functions: Inequalities' isimli eserdir.

Eşitsizlik teorisine son yıllarda ivme kazandıran başka bir boyut ise kesirli türev ve kesirli integral kavramları olmuştur. Konveks fonksiyonlar yardımıyla da çalışılması açısından oldukça dikkat çekici ve hızlı gelişme gösteren bu konu büyük bir araştırmacı kitlesinin merak ve ilgisini de üzerine çekmekte oldukça başarılı olmuştur. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları “türev ve integraller yalnızca tam sayılar için mi vardır?” düşüncesinin sorgulanması sonucu ortaya çıkmıştır ve 17. yüzyılın başlarından günümüze kadar Leibniz, Euler, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin çalışmalarıyla gelişme göstermiştir. Bu alandaki ilk kapsamlı çalışma S.G., Samko, A.A., Kilbas ve O.I., Marichev tarafından yazılan “Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications” adlı eserdir. Kesirli integral operatörleri birçok matematiksel teoride önemli bir yere sahiptir. Kesirli integral operatörlerinden en yaygın olarak kullanılanı ise Reimann-Liouville integralidir. Reimann-Liouville kesirli integral operatörleri, integral hesabının genelleştirilmiş bir formu olup fonksiyonların türevlerinin tamsayı olmayan derecelerini tanımlamak için kullanılır. Bu operatörlerin tarihçesi ise oldukça zengindir. 19. yüzyılın başlarında Reimann tarafından geliştirilen Reimann integrali kesirli integral ve türevlerin gelişimine zemin hazırlamıştır. Joseph Liouville’nin kesirli türev ve integral konusunda çalışmaları ise Reimann’ın çalışmalarını genişleterek karmaşık düzlemde türev ve integral kavramlarını geliştirmiştir. 20. yüzyıl başlarında matematikçilerin çalışmalarıyla kesirli integral operatörleri daha geniş bir çerçevede ele alınmaya başlandı. Bunun dışında diğer kesirli integral operatörleri arasında Caputa integrali ve Grünwald-Letnikov integrali örnek verilebilir. Bu operatörler ise kesirli türevlerle birlikte çeşitli matematiksel modelleme problemlerinde ve mühendislikteki çeşitli uygulamalarda sıklıkla kullanılır.

Eşitsizlik teorisinde birçok çalışmaya alan açan Hermite- Hadamard eşitsizliği de karşımıza sıklıkla yeni formlarla çıkmaktadır. Mehmet Zeki Sarıkaya ve arkadaşları Hermite-Hadamard eşitsizliğinin kesirli integral operatörü içeren halini oluşturan ilk isimlerdir. O zamandan bu yana klasik eşitsizliklerin çeşitli kesirli operatörlerle elde edilmesine hem kesirli integral hesabı hem de konvekslikten elde edilen yöntemlerin birleşimi kullanılmıştır. Devam eden çalışmalardan ilham alınarak Reimann-Liouville kesirli integraller operatörünü kullanarak bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler oluşturulmuştur. Kendine literatürde oldukça geniş bir yer edinen Reimann-Liouville kesirli integral operatörü klasik integrale kolaylıkla

indirgenebildiğinden alan yazında da birçok makaleye rastlamak mümkündür. Konveks fonksiyonlar için Reimann–Liouville integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler de sıkça karşımıza çıkmaktadır.

Eşitsizlik teorisinin her geçen gün genişlemesi sonucu yeni fonksiyon sınıfları keşfedilip üzerine çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. 2005 yılında Raina tarafından geliştirilen ve kendi adı ile anılan yeni bir fonksiyon sınıfının ortaya atılması bu durumun sınırsız örneklerinden sadece bir tanesidir. Raina tarafından ortaya atılan bu yeni fonksiyon sınıfı eşitsizlik teorisinde kendine oldukça geniş bir çalışma alanı edinmiştir. Böylelikle eşitsizlik teorileri Raina fonksiyonu ile ilişkilendirilmeye başlanıp birçok konvekslik çeşidi üzerine matematikçiler tarafında yoğun bir ilgi ile çalışmalar yapılmıştır. Literatürde yer alan çalışmalar incelendiğinde Raina fonksiyonu içeren s -konvekslik, m -konvekslik, h -konvekslik, güçlü konvekslik gibi birçok konvekslik üzerine çalışmalara rastlamak mümkündür. Bu çalışmalarda Raina fonksiyonu içeren bu konveksliklerin cebirsel özellikleri incelenip yeni eşitsizlikler oluşturulmuştur. Araştırmacılar literatürde var olan konvekslik çeşitleriyle çalışmanın yanı sıra Raina fonksiyonu barındıran yeni konvekslik tanımlamaları ile farklı eşitsizlikler elde etme imkânı bulmuştur.

Raina fonksiyonu içeren teoremler kullanılarak Reimann-Liouville kesirli integral operatörü aracılığıyla bazı Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler oluşturulmuştur. Raina fonksiyonu içeren eşitsizliklere gerekli özel değerlerle sınırlama yapıldığında Raina fonksiyon içeren eşitsizliğin Reimann-Liouville kesirli integral operatörlü bir eşitsizliğe indirgendiği kolaylıkla gözlemlenebilir. Yine Reimann-Liouville kesirli integraline indirgenen eşitsizlik bir adım daha sınırlandırılarak klasik konvekslik içeren eşitsizliklere dönüşür. Yani Reimann-Liouville kesirli integrallerinin yeni bir genelleştirmesi Raina tarafından ortaya atılan fonksiyon sınıfı olmuştur. Son yıllarda yapılan çalışmalar dikkate alındığında yazarların bu konular üzerine oldukça yoğunlaştığı dikkat çekmektedir. Literatürde de birçok çalışmada kesirli integral operatörü içeren fonksiyonlar motivasyon kaynağı haline gelmiştir. Bu yeni operatörler yardımıyla da son zamanlarda Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson gibi eşitsizlikleri üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Eşitsizlik tarihinde klasik eşitsizlikler alanında konveks fonksiyonlar için birçok yeni sınıf keşfedilmiş ve çeşitli operatörlerle uygulamaları gerçekleştirilmiştir. Bu tez çalışması için de Raina tarafından keşfedilen yeni bir fonksiyon sınıfı ve bununla ilgili kesirli integral operatörleri için s – tipi konvekslik üzerine çeşitli uygulamalar geliştirilmiştir.

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde eşitsizlik teorisinin tarihi gelişiminden, konvekslik kavramının eşitsizlikler alanında yeri, önemi ve kullanımı, geçmişten günümüze kadar bu

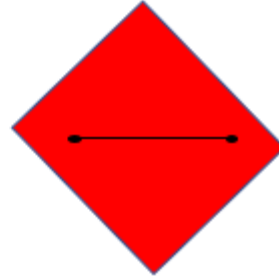
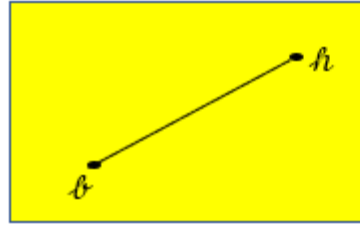
alanda çalışmalar yapmış ve alan yazında yer alan bilim insanlarından, Raina içeren fonksiyon sınıfı ve Reimann-Liouville kesirli integral operatör ilişkisinden bahsedilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde konveks fonksiyonlarla ilgili tanım, teorem gibi genel ifadelere ve konveks fonksiyonun geometrik olarak incelenmesine yer verilmiştir. nc bölümde konveks fonksiyonlar için temel eşitsizliklerden ve Raina konveks fonksiyonlar için daha önce elde edilmiş teoremlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde literatürde var olan lemmalar kullanılarak Raina sınıfını içeren s – tipi konveks fonksiyonlar ile ilgili Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan, Geliştirilmiş Power-Mean, Jensen ve Young İntegral Eşitsizlikleri kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Oluşturulan yeni integral eşitsizliklerinin $s = 1$, $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$, $w = 0$ ve $\lambda = \alpha = 1$ özel değerleri için yeni sonuçlara yer verilmiştir. Tezin beşinci bölümünde ise dördüncü bölümde elde edilen eşitsizlikleri farklı lemma ve tanımlara uygulayabilmek adına okuyucu için önerilere yer verilmiştir.

KURAMSAL TEMELLER

Tanım 1. (Konveks Küme) : $\mathcal{H}$ lineer uzay, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ ve $\mathcal{h}, \mathcal{b} \in \mathcal{M}$ keyfi elemanlar olduğuna göre;

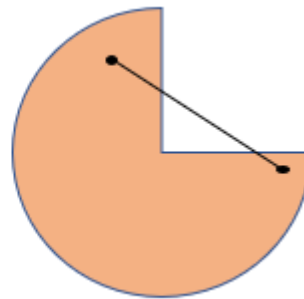
$$\mathcal{B} = \{\vartheta \in \mathcal{H} : \vartheta = t\mathcal{h} + (1-t)\mathcal{b}, t \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{M}$$

ise $\mathcal{M}$ kümesine konveks küme denir. Burada $\vartheta \in \mathcal{B}$ ise $\vartheta = t\mathcal{h} + (1-t)\mathcal{b}$ ifadesindeki $\mathcal{h}$ ve $\mathcal{b}$ nin katsayıları için $t + (1-t) = 1$ ifadesi her konveks küme için geçerlidir. Bu nedenle konveks küme tanımındaki $1-t = g$ yazılırsa $t + g = 1$ şartı sağlanır. Geometrik olarak incelendiğinde $\mathcal{B}$ kümesi uç noktaları $\mathcal{h}$ ve $\mathcal{b}$ olan doğru parçasını göstermektedir. Bu durumda konveks küme, aşağıda da görüldüğü üzere, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içinde bulunduran kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 1. Konveks kümeler

Tanım 2. (Konkav Küme) : Bir küme konveks küme değil ise bu küme konkav küme olarak ifade edilir.



Şekil 2. Konkav kümeler

Tanım 3. (Konveks Fonksiyon) : $I, \mathbb{R}$ de bir aralık $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\mathcal{h}, \mathcal{b} \in I$ olsun. $t \in [0,1]$ ise,

$$\varphi(t\mathcal{h} + (1-t)\mathcal{b}) \leq t\varphi(\mathcal{h}) + (1-t)\varphi(\mathcal{b})$$

φ konveks fonksiyon olarak ifade edilir (Pečarić *et al.*1992).

Burada $t \in (0,1)$ seçilirse konveks fonksiyon tanımı

$$\varphi(t\hbar + (1-t)\ell) < t\varphi(\hbar) + (1-t)\varphi(\ell)$$

haline gelir. Bu φ fonksiyonuna da kesin konveks fonksiyon adı verilir.

Örnek 1. $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için $\varphi(x) = |x|$ fonksiyonu I kümesi üzerinde konveks bir fonksiyondur.

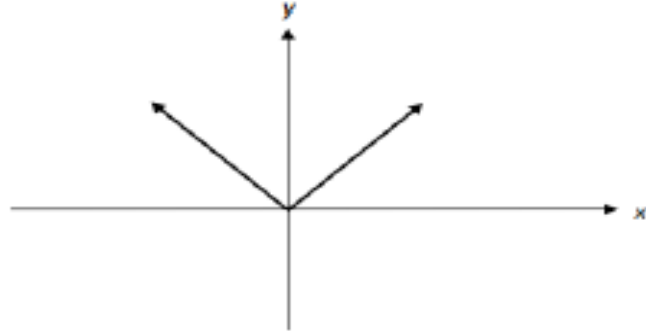
Çözüm 1. $\hbar, \ell \in I$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere, φ fonksiyonunun konveks olduğunu göstermek için

$$\varphi(t\hbar + (1-t)\ell) \leq t\varphi(\hbar) + (1-t)\varphi(\ell)$$

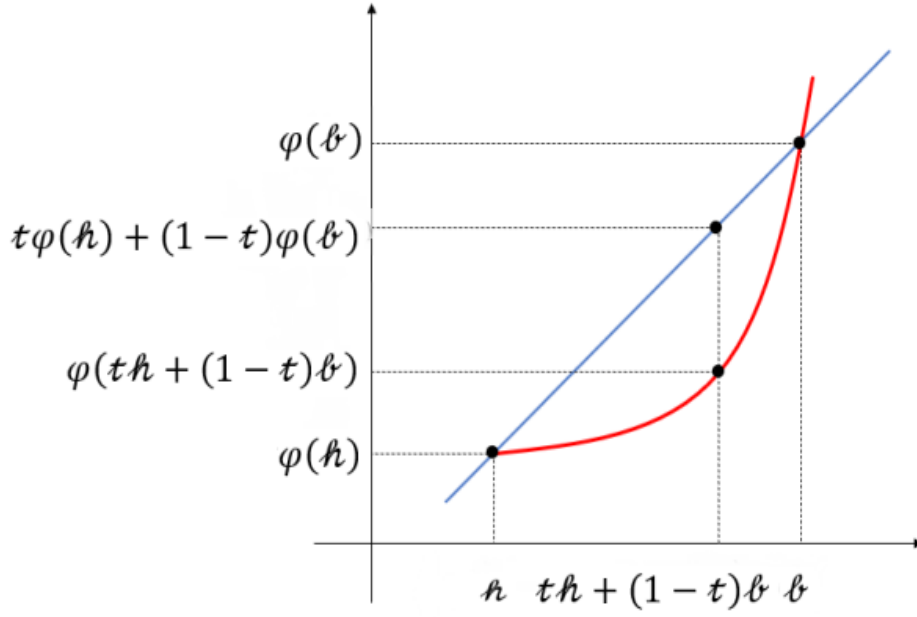
olduğu gösterilmelidir. Buna göre

$$\begin{aligned}\varphi(t\hbar + (1-t)\ell) &= |t\hbar + (1-t)\ell| \\ &\leq |t\hbar| + |(1-t)\ell| \\ &= t|\hbar| + (1-t)|\ell| \\ &= t\varphi(\hbar) + (1-t)\varphi(\ell)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\varphi(x) = |x|$ fonksiyonunun I kümesi üzerinde konveks olduğu görülür.



Şekil 3. Konveks fonksiyon ($\varphi(x) = |x|$)



Şekil 4. Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Şekil 4’ te bulunan konveks fonksiyonun geometrik olarak ifadesi şöyledir:

h nin φ fonksiyonu üzerinde aldığı değer $\varphi(h)$, b nin φ fonksiyonu üzerinde aldığı değer $\varphi(b)$ olmak üzere $(h, \varphi(h))$ ve $(b, \varphi(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasını inceleyelim. Şekilde de görüldüğü gibi $t h + (1 - t)b$ noktasının φ fonksiyonu üzerinde aldığı değer aynı t değeri için doğru üzerinde oluşan değerden küçük veya eşittir. Bu durumda φ fonksiyonu konveks olur.

Tanım 3. Eğer φ fonksiyonu hem konveks hem de konkav fonksiyon ise φ ye afindir (lineerdir) denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 1. $I \subset \mathbb{R}$ için bir φ fonksiyonunun I kümesinde konveks bir fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart her $h, b \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$\varphi\left(\frac{ph + qb}{p + q}\right) \leq \frac{p\varphi(h) + q\varphi(b)}{p + q}$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Tanım 4. (J-Konveks Fonksiyon): $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere ve her $h, b \in I$ için

$$\varphi\left(\frac{h + b}{2}\right) \leq \frac{\varphi(h) + \varphi(b)}{2}$$

ifadesini sağlayan φ fonksiyonuna $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde Jensen anlamında konveks veya J – konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Sonuç 2. Her konveks fonksiyon aynı zamanda J –konveks fonksiyondur.

Tanım 5. (Kesin J -Konveks Fonksiyon): Her $\hbar, \ell \in I$ ve $\hbar \neq \ell$ için

$$\varphi\left(\frac{\hbar + \ell}{2}\right) < \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2}$$

eşitsizliği yazılıyor ise φ fonksiyonuna $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde kesin J -konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 6. (Beta Fonksiyonu): $\beta: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $\hbar, \ell > 0$

$$\beta(\hbar, \ell) = \int_0^1 t^{\hbar-1} (1-t)^{\ell-1} dt$$

biçiminde tanımlanır (Dragomir *et al.* 2000b).

Beta fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

Her $\hbar, \ell > 0$ olmak üzere

1. $\beta(\hbar, \ell) = \beta(\ell, \hbar)$
2. $\beta(\hbar + 1, \ell) = \frac{\hbar}{\hbar + \ell} \beta(\hbar, \ell)$
3. $\beta(\hbar, \ell) = \frac{\Gamma(\hbar)\Gamma(\ell)}{\Gamma(\hbar + \ell)}$

Tanım 7. (Gama Fonksiyonu): $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$$

biçiminde tanımlanır (Dragomir *et al.* 2000b).

Gama fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

1. $\Gamma(k) = (k-1)!$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$.

Tanım 8. (Riemann–Liouville Fractional İntegral): $L \in [\hbar, \ell]$ olsun. $\hbar \geq 0, \alpha > 0$ için Reimann Liouville integralleri

$$J_{\hbar+}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\hbar}^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, x > \hbar$$

$$J_{b-}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x < b$$

şeklinde tanımlanır (Samko *et al.* 1993). Burada $\Gamma(\alpha)$ Gama fonksiyonudur.

Eğer $\alpha = 1$ olması halinde Reimann-Liouville kesirli integrali klasik integrale indirgenir. Ayrıca $\alpha = 0$ durumunda $J_{h+}^0 \varphi(x) = J_{b-}^0 \varphi(x) = \varphi(x)$ dir.

Sarıkaya ve arkadaşları çalışmalarında kesirli integraller için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğe gibi yer vermiştir.

Teorem 1: $\varphi: [h, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pozitif bir fonksiyon ve $\varphi \in L[h, b]$ olsun . $0 \leq h < b$ olmak üzere φ , $[h, b]$ aralığında konveks fonksiyon ise bu durumda

$$\varphi\left(\frac{h+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-h)^{\alpha}} [J_{h+}^{\alpha} \varphi(b) + J_{b-}^{\alpha} \varphi(h)] \leq \frac{\varphi(h) + \varphi(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya *et al.* 2013).

Aşağıdaki gibi tanımlanan, Riemann-Liouville kesirli integrallerinin yeni bir genelleştirmesi olan fonksiyon sınıfı 2005 yılında Raina tarafından oluşturuldu.

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^{\sigma}(x) = \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^{\sigma(0), \sigma(1), \dots}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda)} x^k$$

burada $\sigma = \sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)$ ve $\varepsilon, \lambda > 0, |x| < \mathbb{R}$ (Raina 2005).

Bu yeni tanım ile Raina ve Agarwal aşağıda verilen kesirli integral operatörlerini sırasıyla şu şekilde tanımladı:

$$(J_{\varepsilon, \lambda, h+}^{\sigma} \varphi)(x) = \int_h^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^{\sigma} [w(x-t)^{\varepsilon}] \varphi(t) dt, \quad x > h,$$

$$(J_{\varepsilon, \lambda, b-}^{\sigma} \varphi)(x) = \int_x^b (t-x)^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^{\sigma} [w(t-x)^{\varepsilon}] \varphi(t) dt, \quad x < b,$$

$\varepsilon, \lambda > 0, w \in \mathbb{R}$ (Agarwal *et.al.* 2016).

Bu yeni operatörler yardımıyla son zamanlarda Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson gibi eşitsizlikler için yeni birçok çalışma yapılmış ve bu çalışmalar gelecekte yapılacak olan diğer çalışmalar için ilham kaynağı haline gelmiştir.

Tanım 9. (Raina Konveks Fonksiyon): $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa Raina konveks fonksiyon denir:

$$\varphi(t\hbar + (1-t)\flat) \leq \varphi(\flat) + t\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}^{\sigma}(\varphi(\hbar) - \varphi(\flat))$$

Burada $\forall [\hbar, \flat] \in I, t \in [0,1], [\varepsilon, \lambda]$ ve $\sigma = \sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)$ pozitif gerçek sayıların sınırlı bir dizisidir (Butt *et al.* 2021).

$\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}^{\sigma}(\varphi(\hbar) - \varphi(\flat)) = \varphi(\hbar) - \varphi(\flat)$ olarak seçilirse Raina konveks fonksiyon klasik konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 10. (P – Konveks Fonksiyon): $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall \hbar, \flat \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\varphi(t\hbar + (1-t)\flat) \leq \varphi(\hbar) + \varphi(\flat)$$

şartını sağlıyorsa φ fonksiyonuna P – konveks fonksiyon denir (Dragomir *et al.* 1995).

Tanım 11. (Birinci Anlamda s – Konveks Fonksiyonlar) : $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ için

$$\varphi(t\hbar + (1-t)\flat) \leq t^s \varphi(\hbar) + (1-t^s) \varphi(\flat)$$

şartını sağlıyorsa φ fonksiyonuna birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. $\varphi \in K_s^1$ ile gösterilir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 12. (İkinci Anlamda s – Konveks Fonksiyonlar) : $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \forall \hbar, \flat \in \mathbb{R}^+, 0 < s \leq 1$ olmak üzere $t \in [0,1]$,

$$\varphi(t\hbar + (1-t)\flat) \leq t^s \varphi(\hbar) + (1-t)^s \varphi(\flat)$$

şartını sağlıyorsa φ fonksiyonuna ikinci anlamda s – konveks fonksiyon denir. $\varphi \in K_s^2$ ile gösterilir (Hudzik and Maligranda 1994).

Eğer $s = 1$ seçilirse ikinci anlamda s – konveks fonksiyonun klasik konveks fonksiyon haline indirgendiği kolaylıkla görülebilir.

Örnek 2. $s \in (0,1)$ ve $\hbar, \flat, c \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Hudzik and Maligranda 1994).

$$\varphi(t) = \begin{cases} \hbar, & t = 0 \\ \flat t^s + c & t > 0 \end{cases}$$

Bu şekilde tanımlanan φ fonksiyonu aşağıdaki durumları sağlar:

I. $\flat \geq 0$ ve $0 < c \leq \hbar$ ise $\varphi \in K_s^2$

II. $\flat > 0$ ve $c < 0$ ise $\varphi \notin K_s^2$

Literatürde kendine oldukça geniş bir çalışma alanı edinen s – konveks fonksiyonlar için birçok tez ve makale yazılmış olup yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak kendine Raina tip fonksiyonlar başlığı altında çalışmalarda da yer edinmiş olup kesirli integral operatörleriyle farklı eşitsizlikler elde edilmiştir.

Tanım 13. (s – tipi Konveks Fonksiyon) : $s \in [0,1]$ olsun. $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall \hbar, \ell \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\varphi(t\hbar + (1-t)\ell) \leq [1-s(1-t)]\varphi(\hbar) + (1-st)\varphi(\ell)$$

sağlıyorsa s -tipi konveks fonksiyon denir (Rashid *et al.* 2020).

Özel durumlar:

- i. $s = 1$ seçilirse s – tipi konveks fonksiyon tanımı klasik konveks fonksiyon tanımına dönüşür.
- ii. $s = 0$ seçilirse s – tipi konveks fonksiyon tanımı P – fonksiyon tanımına dönüşür.

Sonuç 3. Negatif olmayan her konveks fonksiyon aynı zamanda s –tipi konveks fonksiyondur.

Teorem 2. (Üçgen Eşitsizliği): m, v reel sayıları için

$$|m + v| \leq |m| + |v|,$$

$$||m| - |v|| \leq |m - v|,$$

$$||m| - |v|| \leq |m + v|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|m_1 + \dots + m_n| \leq |m_1| + \dots + |m_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinovic *et al.* 1993).

Teorem 3. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Formu): φ reel değerli ve $[\hbar, \ell]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left| \int_{\hbar}^{\ell} \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\hbar}^{\ell} |\varphi(x)| dx \quad (\hbar < \ell)$$

eşitsizliği yazılır (Mitrinovic *et al.* 1993).

Teorem 4. $\varphi, [\hbar, \ell]$ aralığında konveks ise

- a. $\varphi, (\hbar, \ell)$ aralığında sürekli ve
- b. $\varphi, [\hbar, \ell]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).



MATERYAL VE YÖNTEM

Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler

Teorem 5. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık $\hbar, \ell \in I$ olsun. $\hbar < \ell$ olmak üzere $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise

$$\varphi\left(\frac{\hbar + \ell}{2}\right) \leq \frac{1}{\ell - \hbar} \int_{\hbar}^{\ell} \varphi(x) dx \leq \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 6. (Fejer Eşitsizliği): $\varphi: [\hbar, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, konveks, $g: [\hbar, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir, negatif olmayan ve $\frac{\hbar + \ell}{2}$ ye göre simetrik fonksiyon ise,

$$\varphi\left(\frac{\hbar + \ell}{2}\right) \leq \int_{\hbar}^{\ell} g(x) dx \leq \int_{\hbar}^{\ell} \varphi(x) g(x) dx \leq \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} \int_{\hbar}^{\ell} g(x) dx$$

eşitsizliği geçerlidir (Fejer 1906).

Eğer $g = 1$ seçilirse Fejer eşitsizliği Hermite Hadamard eşitsizliğine indirgenmiş olur.

Teorem 7. (Ostrowski Eşitsizliği): $\varphi: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\varphi' \in L[\hbar, \ell]$ ve $\hbar, \ell \in I$ için $\hbar < \ell$ olsun. Eğer $|\varphi'(x)| \leq M$ ise

$$\left| \varphi(x) - \frac{1}{\ell - \hbar} \int_{\hbar}^{\ell} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{M}{\ell - \hbar} \left[\frac{(x - \hbar)^2 + (\ell - x)^2}{2} \right]$$

eşitsizliği yazılır (Ostrowski 1938).

Teorem 8. (Simpson Eşitsizliği): $\varphi: [\hbar, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \ell)$ üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|\varphi^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (\hbar, \ell)} |\varphi^{(4)}| < \infty$ olsun. Bu durumda;

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} + 2\varphi\left(\frac{\hbar + \ell}{2}\right) \right] - \frac{1}{\ell - \hbar} \int_{\hbar}^{\ell} \varphi(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|\varphi^{(4)}\|_{\infty} (\ell - \hbar)^4$$

eşitsizliği yazılır (Dragomir *et al.* 2000a).

Teorem 9. (Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $\varphi: [h, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: [h, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de tanımlı integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $|\varphi|^p, |g|^q$ $[h, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise bu durumda;

$$\int_h^b |\varphi(x)g(x)|dx \leq \left(\int_h^b |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_h^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır (Mitrinović *et al.* 1993).

Çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği ise

$$\int_h^b \int_h^b |\varphi(x)g(x)|dxdy \leq \left(\int_h^b \int_h^b |\varphi(x)|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_h^b \int_h^b |g(x)|^q dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 10. (Hölder-İşcan Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. φ ve g , $[h, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|\varphi|^p$ ve $|g|^q$ $[h, b]$ üzerinde integrallenebilir ise,

$$\begin{aligned} \int_h^b |\varphi(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{b-h} \left\{ \left(\int_h^b (b-x)|\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_h^b (b-x)|g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_h^b (x-h)|\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_h^b (x-h)|g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &\leq \left(\int_h^b |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_h^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (İşcan 2019).

Teorem 11. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. φ ve g , $[h, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|\varphi|$ ve $|g|^q$, $[h, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyon ise;

$$\int_h^b |\varphi(x)g(x)|dx \leq \left(\int_h^b |\varphi(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_h^b |\varphi(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır (Mitrinović *et al.* 1993).

Benzer şekilde çift katlı integraller için Power Mean eşitsizliği ise

$$\int_h^b \int_h^b |\varphi(x)g(x)|dxdy \leq \left(\int_h^b \int_h^b |\varphi(x)|dxdy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_h^b \int_h^b |\varphi(x)||g(x)|^q dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç 4. Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power-Mean eşitsizliği kullanılarak daha iyi üst sınırlar bulunmaktadır.

Teorem 12. (Geliştirilmiş Power-Mean İntegral Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. φ ve g $[h, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar olsun. $|\varphi|$ ve $|\varphi||g|^q, [h, b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} \int_h^b |\varphi(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{b-h} \left\{ \left(\int_h^b (b-x)|\varphi(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_h^b (b-x)|\varphi(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_h^b (x-h)|\varphi(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_h^b (x-h)|\varphi(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (Kadakal et al. 2019).

Teorem 13. (Young Eşitsizliği): h, b negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$hb \leq \frac{1}{p} h^p + \frac{1}{q} b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğe Young Eşitsizliği denir (Niculescu ve Persson 2006).

Eşitsizliğin ters çevrilmiş hali ise

$$hb \geq \frac{1}{p} h^p + \frac{1}{q} b^q, \quad 0 < p < 1, \quad h, b > 0$$

olur.

Matematiksel analizdeki en önemli eşitsizliklerden olan Hölder eşitsizliği de Teorem 13 te bulunan Young eşitsizliği kullanılarak elde edilmiştir.

Teorem 14. (Jensen Eşitsizliği): $\varphi: [h, b] \rightarrow \mathbb{R}$, konveks fonksiyon $x_i \in [h, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. Bu durumda $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ve $\alpha_i > 0$ ise

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x_i)$$

eşitsizliği sağlanır (Jensen 1905).

Teorem 15. (İntegraller için Jensen Eşitsizliği): $\varphi: I = [\hbar, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, konveks fonksiyon $h: I \rightarrow (0, \infty)$ ve $u = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi \left(\frac{\int_{\hbar}^{\ell} h(t) u(t) dt}{\int_{\hbar}^{\ell} h(t) dt} \right) \leq \frac{\int_{\hbar}^{\ell} h(t) \varphi(u(t)) dt}{\int_{\hbar}^{\ell} h(t) dt}$$

eşitsizliği geçerlidir (Kufner *et al.* 1977).

Kırmacı 2004 yılında konveks fonksiyonlarla ilgili yaptığı çalışmalar sonucunda aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

Teorem 16. $\varphi: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyallenebilen bir dönüşüm ve $\hbar, \ell \in I^\circ$, $\hbar < \ell$ olsun. Eğer $|\varphi'|$, $[\hbar, \ell]$ aralığında konveks ise

$$\left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} - \frac{1}{(\ell - \hbar)} \int_{\hbar}^{\ell} \varphi(x) dx \right| \leq \frac{(\ell - \hbar)}{8} (|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\ell)|)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğe trapezoid eşitsizliği denir (Kırmacı 2004).

Sarıkaya ve arkadaşları 2013 yılında yaptıkları çalışma ile Reimann-Liouville kesirli integral operatörünü kullanarak aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

Teorem 17. $\varphi: [\hbar, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \ell)$ üzerinde türevi olan bir dönüşüm ve $\hbar < \ell$ olsun. Eğer $|\varphi'|$, $[\hbar, \ell]$ aralığında konveks ise bu durumda

$$\left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\ell - \hbar)^\alpha} [J_{\hbar+}^\alpha \varphi(\ell) + J_{\ell-}^\alpha \varphi(\hbar)] \right| \leq \frac{(\ell - \hbar)}{2(\alpha + 1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha} \right) [|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\ell)|]$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya *et al.* 2013).

Raina Fonksiyonu İçin Elde Edilmiş Sonuçlar

Raina fonksiyonu üzerine literatürde var olan teoremler ve elde edilmiş sonuçlar aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 18. $\varphi: [\hbar, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu $[\hbar, \ell]$ üzerinde konveks fonksiyon $\hbar < \ell$ ve $\varepsilon, \lambda > 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\hbar + \mathfrak{b}}{2}\right) &\leq \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \\ &\leq \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (Yaldız and Sarıkaya 2020).

İspat: $t \in [0,1]$ için $x = t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}$, $y = (1-t)\hbar + t\mathfrak{b}$ dönüşümü ve φ nin konveksliği kullanılırsa

$$\varphi\left(\frac{\hbar + \mathfrak{b}}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$$

Yani

$$2\varphi\left(\frac{\hbar + \mathfrak{b}}{2}\right) \leq \varphi(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) + \varphi((1-t)\hbar + t\mathfrak{b})$$

Bu eşitsizlikte her iki taraf $t^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon]$ çarpılıp $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}2\varphi\left(\frac{\hbar + \mathfrak{b}}{2}\right) \int_0^1 t^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] dt \\ \leq \int_0^1 t^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \\ + \int_0^1 t^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi((1-t)\hbar + t\mathfrak{b}) dt\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma(x) = \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^{\sigma(0), \sigma(1), \dots}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda)} x^k \text{ kullanılırsa}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] dt &= \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon], \\ \int_0^1 t^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \\ &= \frac{1}{(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda} \int_\hbar^\mathfrak{b} (\mathfrak{b} - x)^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b} - x)^\varepsilon] \varphi(x) dx\end{aligned}$$

yazılır ve

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi((1-t)\hbar + t\mathfrak{b}) dt \\ = \frac{1}{(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda} \int_\hbar^\mathfrak{b} (x - \hbar)^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma[w(x - \hbar)^\varepsilon] \varphi(x) dx\end{aligned}$$

$$2\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]\varphi\left(\frac{\mathfrak{h}+\mathfrak{b}}{2}\right) \leq \frac{1}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{h}^+;w}^\sigma\varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{b}^-;w}^\sigma\varphi)(\mathfrak{h})]$$

elde edilir. $t \in [0,1]$ için φ nin konveksliği kullanılırsa

$$\varphi((1-t)\mathfrak{h} + t\mathfrak{b}) + \varphi(t\mathfrak{h} + (1-t)\mathfrak{b}) \leq \varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})$$

yazılır.

Bu eşitsizlikte her iki taraf $t^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon t^\varepsilon]$ çarpılıp $[0,1]$ üzerinde integrali alınır

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon t^\varepsilon]\varphi((1-t)\mathfrak{h} + t\mathfrak{b})dt \\ & + \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon t^\varepsilon]\varphi(t\mathfrak{h} + (1-t)\mathfrak{b})dt \\ & \leq [\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})] \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}^\sigma[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon t^\varepsilon]dt \end{aligned}$$

Böylece

$$\frac{1}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\lambda} [(J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{h}^+;w}^\sigma\varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{b}^-;w}^\sigma\varphi)(\mathfrak{h})] \leq [\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})]\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]$$

eşitsizliği ile ikinci eşitsizlik de kanıtlanmış olur.

Sonuç 5. Teoremde $\lambda = \alpha, \sigma(0) = 1, w = 0$ dönüşümü yapılırsa Teorem 1 deki

$$\varphi\left(\frac{\mathfrak{h}+\mathfrak{b}}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\alpha} [J_{\mathfrak{h}^+}^\alpha\varphi(\mathfrak{b}) + J_{\mathfrak{b}^-}^\alpha\varphi(\mathfrak{h})] \leq \frac{\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 6. Teoremde $\lambda = 1, \sigma(0) = 1, w = 0$ dönüşümü yapılırsa Teorem 5 teki

$$\varphi\left(\frac{\mathfrak{h}+\mathfrak{b}}{2}\right) \leq \frac{1}{\mathfrak{b}-\mathfrak{h}} \int_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{b}} \varphi(x)dx \leq \frac{\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})}{2}$$

Hermite–Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Teorem 19. $\varphi: [\mathfrak{h}, \mathfrak{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ üzerinde türevi olan bir dönüşüm olsun. $\mathfrak{h} < \mathfrak{b}$, $\varepsilon, \lambda > 0$. Eğer $|\varphi'|$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{b}]$ aralığında konveks ise kesirli integraller için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{h}^+;w}^\sigma\varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{b}^-;w}^\sigma\varphi)(\mathfrak{h})] \right| \\ & \leq (\mathfrak{b}-\mathfrak{h}) \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+2}^{\sigma_1}[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]}{\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]} \frac{|\varphi'(\mathfrak{h})| + |\varphi'(\mathfrak{b})|}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği oluşur (Yaldız and Sarıkaya 2020).

Burada

$$\sigma^1(k) = \sigma(k) \left(1 - \frac{1}{2^{\varepsilon k + \lambda}}\right).$$

Sonuç 7. Teoremde $\lambda = \alpha, \sigma(0) = 1, w = 0$ dönüşümü yapılırsa Teorem 17 deki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 8. Teoremde $\lambda = \alpha = 1, \sigma(0) = 1, w = 0$ dönüşümü yapılırsa Teorem 16 daki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 20. $\varphi: [\hbar, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \ell)$ üzerinde türevi olan bir dönüşüm olsun. $\hbar < \ell$, $\varepsilon, \lambda > 0$, $w \in \mathbb{R}$. Eğer $|\varphi'|^q$, $[\hbar, \ell]$ aralığında konveks ve $q > 1$ ise kesirli integraller için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} - \frac{1}{2(\ell - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\ell - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\ell) + (J_{\varepsilon, \lambda, \ell^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\ell - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\ell - \hbar)^\varepsilon]} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^2}[w(\ell - \hbar)^\varepsilon] \\ & \quad \times \left[\left(\frac{|\varphi'(\hbar)|^q + 3|\varphi'(\ell)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\ell)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği oluşur (Yaldız and Sarıkaya 2020).

Burada

$$\sigma^2(k) = \sigma(k) \left(\frac{1}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{(\varepsilon k + \lambda)p}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Yaldız ve Sarıkaya 2020 yılında yaptıkları çalışma ile aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

Sonuç 9. Teorem 20 de $\lambda = \alpha, \sigma(0) = 1, w = 0$ alınır

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\ell - \hbar)^\alpha} [J_{\hbar^+}^\alpha \varphi(\ell) + J_{\ell^-}^\alpha \varphi(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\ell - \hbar)}{2} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{|\varphi'(\hbar)|^q + 3|\varphi'(\ell)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\ell)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 10. Sonuç 9 da $\alpha = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{L})}{2} - \frac{1}{(\mathcal{L} - \hbar)} \int_{\hbar}^{\mathcal{L}} \varphi(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{|\varphi'(\hbar)|^q + 3|\varphi'(\mathcal{L})|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\mathcal{L})|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.



ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde literatürde mevcut olan lemmalardan faydalanarak $s -$ tipi konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu eşitsizlikleri bulabilmek için Raina fonksiyon tanımı, $s -$ tipi konveks fonksiyon tanımı ve özellikleri, Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan, Geliştirilmiş Power-Mean, Jensen ve Young İntegral Eşitsizlikleri kullanılmıştır. Oluşturulan yeni integral eşitsizliklerinin özel değerleri için hem literatürde var olan hem de yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Lemma 1. $\varphi: [\hbar, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \ell)$ üzerinde türevi olan bir dönüşüm olsun $\hbar < \ell$, $\varepsilon, \lambda > 0, w \in \mathbb{R}$. Eğer $\varphi' \in L[\hbar, \ell]$ ise bu durumda kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} - \frac{1}{2(\ell - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\ell - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\ell) + (J_{\varepsilon, \lambda, \ell^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \\ &= \frac{(\ell - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\ell - \hbar)^\varepsilon]} \left[\int_0^1 (1-t)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\ell - \hbar)^\varepsilon (1-t)^\varepsilon] \varphi'(t\hbar + (1-t)\ell) dt \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\ell - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi'(t\hbar + (1-t)\ell) dt \right] \end{aligned}$$

eşitliği oluşur.

Burada

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^\sigma(x) = \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda}^{\sigma(0), \sigma(1), \dots}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda)} x^k$$

dır (Yaldız and Sarıkaya 2020).

İspat: Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integrallerde kısmi integrasyon metodu uygulanırsa bu durumda

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-t)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\ell - \hbar)^\varepsilon (1-t)^\varepsilon] \varphi'(t\hbar + (1-t)\ell) dt \\ & \quad - \int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\ell - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi'(t\hbar + (1-t)\ell) dt \\ &= (1-t)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\ell - \hbar)^\varepsilon (1-t)^\varepsilon] \frac{\varphi(t\hbar + (1-t)\ell)}{\hbar - \ell} \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\mathfrak{b}-\mathfrak{h}} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon (1-t)^\varepsilon] \varphi(t\mathfrak{h} + (1-t)\mathfrak{b}) dt \\
& + t^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon t^\varepsilon] \frac{\varphi(t\mathfrak{h} + (1-t)\mathfrak{b})}{\mathfrak{b}-\mathfrak{h}} \Big|_0^1 \\
& -\frac{1}{\mathfrak{b}-\mathfrak{h}} \int_0^1 t^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi(t\mathfrak{h} + (1-t)\mathfrak{b}) dt
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

Teorem 21. $\varphi: [\mathfrak{h}, \mathfrak{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ üzerinde türevi olan bir dönüşüm ve $\mathfrak{h} < \mathfrak{b}$, $\varepsilon, \lambda > 0$, $w \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $|\varphi'|$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{b}]$ aralığında s – tipi konveks ise kesirli integraller için,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{h}^+;w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{b}^-;w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{h})] \right| \\
& \leq (\mathfrak{b}-\mathfrak{h})(2-s) \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+2}^{\sigma^1} [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]}{2\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]} \frac{|\varphi'(\mathfrak{h})| + |\varphi'(\mathfrak{b})|}{2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada

$$\sigma^1(k) = \sigma(k) \left(1 - \frac{1}{2^{\varepsilon k + \lambda}} \right)$$

dır.

İspat: $\varphi: [\mathfrak{h}, \mathfrak{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\mathfrak{h}, \mathfrak{b}]$ üzerinde s – tipi konveks fonksiyon olmak üzere $\mathfrak{h} < \mathfrak{b}$ ve $L[\mathfrak{h}, \mathfrak{b}]$ olsun. Lemma 1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \frac{\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{h}^+;w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{b}^-;w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{h})] \\
& = \frac{(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]} \left[\int_0^1 (1-t)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon (1-t)^\varepsilon] \varphi'(t\mathfrak{h} + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right. \\
& \quad \left. - \int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi'(t\mathfrak{h} + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Raina fonksiyon tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{h}^+;w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon,\lambda,\mathfrak{b}^-;w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{h})] \\
& = \frac{(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^\varepsilon]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b}-\mathfrak{h})^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left\{ \int_0^1 [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] \varphi'(t\mathfrak{h} + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right\} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Mutlak değeri özelliği ve $|\varphi'|$ in s – tipi konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \int_0^1 |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}| [1 - s(1-t)t|\varphi'(\hbar)| + (1-st)|\varphi'(\mathfrak{b})|] dt \right\} \right] \end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ & \quad \times \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] [1 - s(1-t)t|\varphi'(\hbar)| + (1-st)|\varphi'(\mathfrak{b})|] dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}] [1 - s(1-t)t|\varphi'(\hbar)| + (1-st)|\varphi'(\mathfrak{b})|] dt \right\} \\ & = \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \frac{2-s}{(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left(1 - \frac{1}{2^{\varepsilon k + \lambda}}\right) [|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\mathfrak{b})|] \\ & = \frac{(2-s)(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \left(1 - \frac{1}{2^{\varepsilon k + \lambda}}\right)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)(\varepsilon k + \lambda + 1)} [|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\mathfrak{b})|] \\ & = \frac{(2-s)(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \left(1 - \frac{1}{2^{\varepsilon k + \lambda}}\right)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 2)} [|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\mathfrak{b})|] \\ & = \frac{(2-s)(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^1(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 2)} [|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\mathfrak{b})|] \\ & = (\mathfrak{b} - \hbar)(2-s) \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+2}^{\sigma^1}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \frac{|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\mathfrak{b})|}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 11. Teorem 21 de $s = 1$ alınırsa Teorem 19 daki

$$\left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right|$$

$$\leq (\mathfrak{b} - \hbar) \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+2}^{\sigma^1}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \frac{|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\mathfrak{b})|}{2}$$

eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 12. Teorem 21 de $s = 1$, $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa Teorem 17 deki

$$\left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\alpha} [J_{\hbar^+}^\alpha \varphi(\mathfrak{b}) + J_{\mathfrak{b}^-}^\alpha \varphi(\hbar)] \right|$$

$$\leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2(\alpha + 1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) [|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\mathfrak{b})|]$$

eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 13. Teorem 21 de $s = 1$, $\lambda = 1$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa Teorem 16 daki

$$\left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{(\mathfrak{b} - \hbar)} \int_{\hbar}^{\mathfrak{b}} \varphi(x) dx \right| \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{8} (|\varphi'(\hbar)| + |\varphi'(\mathfrak{b})|)$$

eşitsizlik elde edilir.

Teorem 22. $\varphi: [\hbar, \mathfrak{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \mathfrak{b})$ üzerinde türevi olan bir dönüşüm ve $\hbar < \mathfrak{b}$, $\varepsilon, \lambda > 0$, $w \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $|\varphi'|^q$, $[\hbar, \mathfrak{b}]$ aralığında s – tipi konveks ve $p > 1$ ise kesirli integraller için,

$$\left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right|$$

$$\leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2} \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^2}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]}$$

$$\times \left[\left(\frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Burada

$$\sigma^2(k) = \sigma(k) \left(\frac{1}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{(\varepsilon k + \lambda)p}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

İspat: Teorem 21 e benzer olarak Lemma 1 uygulanarak

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \\ &= \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \left[\int_0^1 (1-t)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon (1-t)^\varepsilon] \varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right] \end{aligned}$$

yazılır. Raina fonksiyon tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \\ &= \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left\{ \int_0^1 [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] \varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right\} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Mutlak değer özelliği ve Hölder eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\int_0^1 |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right. \\ & \quad \times \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır ve $|\varphi'|^q$ in s – tipi konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right. \\
& \quad \times \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [1-s(1-t)]|\varphi'(\hbar)|^q + (1-st)|\varphi'(\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [1-s(1-t)]|\varphi'(\hbar)|^q + (1-st)|\varphi'(\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $(A - B)^p \leq A^p - B^p$, $A > B \geq 0$ ve $p \geq 1$ özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right. \\
& \quad \times \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{(\varepsilon k + \lambda)p} - t^{(\varepsilon k + \lambda)p}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [1-s(1-t)]|\varphi'(\hbar)|^q + (1-st)|\varphi'(\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{(\varepsilon k + \lambda)p} - (1-t)^{(\varepsilon k + \lambda)p}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [1-s(1-t)]|\varphi'(\hbar)|^q + (1-st)|\varphi'(\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left(\frac{-2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(\varepsilon k + \lambda)p+1}}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} + \frac{1}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \sigma(k) \left(\frac{1}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{(\varepsilon k + \lambda)p}} \right)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\
& \times \left[\left(\frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^2(k) w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\
& \times \left[\left(\frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2} \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^2}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \\
& \times \left[\left(\frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

Burada

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-\mathfrak{t})^{(\varepsilon k + \lambda)p} - \mathfrak{t}^{(\varepsilon k + \lambda)p}] d\mathfrak{t} \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [\mathfrak{t}^{(\varepsilon k + \lambda)p} - (1-\mathfrak{t})^{(\varepsilon k + \lambda)p}] d\mathfrak{t} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{(\varepsilon k + \lambda)p}} \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

dır.

Sonuç 14. Teorem 22 de $s = 1$ alınırsa Teorem 20 deki

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^2}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]
\end{aligned}$$

$$\times \left[\left(\frac{|\varphi'(\hbar)|^q + 3|\varphi'(\mathfrak{b})|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\mathfrak{b})|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 15. Teorem 22 de $s = 1, \lambda = \alpha, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa Sonuç 9 daki

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\alpha} [J_{\hbar+}^\alpha \varphi(\mathfrak{b}) + J_{\mathfrak{b}-}^\alpha \varphi(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \times \left[\left(\frac{|\varphi'(\hbar)|^q + 3|\varphi'(\mathfrak{b})|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\mathfrak{b})|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 16. Sonuç 15 te $\alpha = 1$ alınırsa Sonuç 10 daki

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{(\mathfrak{b} - \hbar)} \int_{\hbar}^{\mathfrak{b}} \varphi(\tau) d\tau \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2} \left(\frac{1}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \times \left[\left(\frac{|\varphi'(\hbar)|^q + 3|\varphi'(\mathfrak{b})|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\mathfrak{b})|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 23. $\varphi: [\hbar, \mathfrak{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \mathfrak{b})$ üzerinde türevi olan bir dönüşüm ve $\hbar < \mathfrak{b}$, $\varepsilon, \lambda > 0$, $w \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $|\varphi'|^q$, $[\hbar, \mathfrak{b}]$ aralığında s – tipi konveks ve $q \geq 1$ ise kesirli integraller için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \\ & \times \left[\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_3} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] \left(\frac{(6 - 5s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6 - s)}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^{\sigma_4}[w(\mathcal{b}-\mathcal{h})^\varepsilon]\left(\frac{(6-4s)}{48}|\varphi'(\mathcal{h})|^q+\frac{(6-2s)}{48}|\varphi'(\mathcal{b})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^{\sigma_5}[w(\mathcal{b}-\mathcal{h})^\varepsilon]\left(\frac{(6-2s)}{48}|\varphi'(\mathcal{h})|^q+\frac{(6-4s)}{48}|\varphi'(\mathcal{b})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^{\sigma_6}[w(\mathcal{b}-\mathcal{h})^\varepsilon]\left(\frac{(6-s)}{48}|\varphi'(\mathcal{h})|^q+\frac{(6-5s)}{48}|\varphi'(\mathcal{b})|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]
\end{aligned}$$

Burada

$$c = (\varepsilon k + \lambda)p$$

$$\sigma_3(k) = \sigma(k) \left(\frac{1}{(c+2)} - \frac{1}{2(c+1)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sigma_4(k) = \sigma(k) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{c+1}}{(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sigma_5(k) = \sigma(k) \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{c+1} - 1}{(c+1)} + \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sigma_6(k) = \sigma(k) \left(\frac{1}{2(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

İspat: Teorem 22 ye benzer şekilde Lemma 1 ve Raina fonksiyon tanımından faydalanarak

$$\begin{aligned}
& \frac{\varphi(\mathcal{h}) + \varphi(\mathcal{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{b}-\mathcal{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b}-\mathcal{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon,\lambda,\mathcal{h}^+;w}^\sigma \varphi)(\mathcal{b}) + (J_{\varepsilon,\lambda,\mathcal{b}^-;w}^\sigma \varphi)(\mathcal{h})] \\
& = \frac{(\mathcal{b}-\mathcal{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b}-\mathcal{h})^\varepsilon]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathcal{b}-\mathcal{h})^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left\{ \int_0^1 [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] \varphi'(t\mathcal{h} + (1-t)\mathcal{b}) dt \right\} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Mutlak değer özelliği ve Hölder-İşcan eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\mathcal{h}) + \varphi(\mathcal{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{b}-\mathcal{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b}-\mathcal{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon,\lambda,\mathcal{h}^+;w}^\sigma \varphi)(\mathcal{b}) + (J_{\varepsilon,\lambda,\mathcal{b}^-;w}^\sigma \varphi)(\mathcal{h})] \right| \\
& \leq \frac{(\mathcal{b}-\mathcal{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b}-\mathcal{h})^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathcal{b}-\mathcal{h})^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(\int_0^1 (1-t) |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\int_0^1 (t-0) |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t-0) |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ & \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2} - 0} \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t \right) [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t \right) |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \end{aligned}$$

yazılır. $(A - B)^p \leq A^p - B^p$, $A > B \geq 0$ ve $p \geq 1$ özdeşliği ile $|\varphi'|^q$ 'in s - tipi konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ & 2. \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t \right) [(1-t)^{(\varepsilon k + \lambda)p} - t^{(\varepsilon k + \lambda)p}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t \right) [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\ell)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t [(1 - t)^{(\varepsilon k + \lambda)p} - t^{(\varepsilon k + \lambda)p}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\ell)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - t) [t^{(\varepsilon k + \lambda)p} - (1 - t)^{(\varepsilon k + \lambda)p}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - t) [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\ell)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) [t^{(\varepsilon k + \lambda)p} - (1 - t)^{(\varepsilon k + \lambda)p}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\ell)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \\
& = \frac{(\ell - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\ell - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\ell - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\
& \quad 2 \left[\left(\frac{1}{(c+2)} - \frac{1}{2(c+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{(6-5s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-s)}{48} |\varphi'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{c+1}}{(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{(6-4s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-2s)}{48} |\varphi'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{c+1} - 1}{(c+1)} + \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{(6-2s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-4s)}{48} |\varphi'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{(6-s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-5s)}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \\
& = \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \\
& \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \left(\frac{1}{(c+2)} - \frac{1}{2(c+1)} \right)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left(\frac{(6-5s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-s)}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{c+1}}{(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left(\frac{(6-4s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-2s)}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{c+1} - 1}{(c+1)} + \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left(\frac{(6-2s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-4s)}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \left(\frac{1}{2(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left(\frac{(6-s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-5s)}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \\
& \times \left[\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_3} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] \left(\frac{(6-5s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-s)}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_4} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] \left(\frac{(6-4s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-2s)}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_5} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] \left(\frac{(6-2s)}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(6-4s)}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_6} [w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] \left(\frac{(6-s)}{48} |\varphi'(\mathcal{h})|^q + \frac{(6-5s)}{48} |\varphi'(\mathcal{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Sonuç 17. Teorem 23 te $s = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\mathcal{h}) + \varphi(\mathcal{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{h}^+; w}^\sigma \varphi)(\mathcal{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\mathcal{h})] \right| \\ & \leq \frac{(\mathcal{b} - \mathcal{h})}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon]} \\ & \quad \times \left[\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_3} [w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] \left(\frac{1}{48} |\varphi'(\mathcal{h})|^q + \frac{5}{48} |\varphi'(\mathcal{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_4} [w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] \left(\frac{2}{48} |\varphi'(\mathcal{h})|^q + \frac{4}{48} |\varphi'(\mathcal{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_5} [w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] \left(\frac{4}{48} |\varphi'(\mathcal{h})|^q + \frac{2}{48} |\varphi'(\mathcal{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_6} [w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] \left(\frac{5}{48} |\varphi'(\mathcal{h})|^q + \frac{1}{48} |\varphi'(\mathcal{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 18. Teorem 23 te $s = 1, \lambda = \alpha, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\mathcal{h}) + \varphi(\mathcal{b})}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\alpha} [J_{\mathcal{h}^+}^\alpha \varphi(\mathcal{b}) + J_{\mathcal{b}^-}^\alpha \varphi(\mathcal{h})] \right| \\ & \leq (\mathcal{b} - \mathcal{h}) \times \left[\left(\frac{1}{(\alpha p + 2)} - \frac{1}{2(\alpha p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{48} |\varphi'(\mathcal{h})|^q + \frac{5}{48} |\varphi'(\mathcal{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha p + 1}}{(\alpha p + 1)} - \frac{1}{(\alpha p + 2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{48} |\varphi'(\mathcal{h})|^q + \frac{4}{48} |\varphi'(\mathcal{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha p + 1} - 1}{(\alpha p + 1)} + \frac{1}{(\alpha p + 2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{4}{48} |\varphi'(\mathcal{h})|^q + \frac{2}{48} |\varphi'(\mathcal{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{2(\alpha p + 1)} - \frac{1}{(\alpha p + 2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{5}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{1}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

elde edilir.

Sonuç 19. Teorem 23 te $s = 1, \lambda = \alpha = 1, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{\mathfrak{b} - \hbar} \int_{\hbar}^{\mathfrak{b}} \varphi(t) dt \right| \\ & \leq (\mathfrak{b} - \hbar) \left[\left(\frac{1}{(p+2)} - \frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{5}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{4}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} - 1}{(p+1)} + \frac{1}{(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{4}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{2}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{5}{48} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{1}{48} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 24. $\varphi: [\hbar, \mathfrak{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \mathfrak{b})$ üzerinde türevlenebilen bir dönüşüm, $\varphi' \in L[\hbar, \mathfrak{b}]$ ve $\hbar, \mathfrak{b} \in I, \hbar < \mathfrak{b}$. $\varepsilon, \lambda > 0$, $w \in \mathbb{R}$ olsun. $|\varphi'|^q$, $[\hbar, \mathfrak{b}]$ üzerinde s -tipi konveks ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ ise kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^{\sigma} \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^{\sigma} \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}]} \\ & \quad \times \left[\frac{2}{p} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_7} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}] + \frac{2-s}{q} \frac{|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\mathfrak{b})|^q}{2} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}] \right] \end{aligned}$$

yazılır.

Burada

$$\sigma_7(k) = \sigma(k) \left(\frac{1}{c+1} \right) \left(1 - \frac{1}{2^c} \right)$$

$$c = (\varepsilon k + \lambda)p$$

dır.

İspat: Teorem 21 e benzer olarak Lemma 1 ve Young eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ & \quad \times \left[\left(\int_0^1 \frac{1}{p} |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}|^p dt \right) + \left(\int_0^1 \frac{1}{q} |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right) \right] \end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{1}{p} \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt + \frac{1}{q} \int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{p} \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt + \frac{1}{q} \int_{\frac{1}{2}}^1 |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $|\varphi'|^q$, $[\hbar, \mathfrak{b}]$ üzerinde s – tipi konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ & \quad \times \left[\frac{1}{p} \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt + \frac{1}{q} \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - s(1-t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1-st) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q dt \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{p} \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}]^p dt + \frac{1}{q} \int_{\frac{1}{2}}^1 [1 - s(1-t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1-st) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q dt \right) \right] \end{aligned}$$

olur. Burada $(A - B)^p \leq A^p - B^p$, $A > B \geq 0$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{L})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{L} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathcal{L}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{L}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\
& \times \left[\left(\frac{1}{p} \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{(\varepsilon k + \lambda)p} - t^{(\varepsilon k + \lambda)p}] dt + \frac{1}{q} \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - s(1-t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1-st) |\varphi'(\mathcal{L})|^q dt \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{p} \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{(\varepsilon k + \lambda)p} - (1-t)^{(\varepsilon k + \lambda)p}] dt + \frac{1}{q} \int_{\frac{1}{2}}^1 [1 - s(1-t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1-st) |\varphi'(\mathcal{L})|^q dt \right) \right] \\
& = \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\
& \quad \times \left[\frac{1}{p} \left(\frac{1}{c+1} \right) \left(1 - \frac{1}{2^c} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\mathcal{L})|^q \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{c+1} \right) \left(1 - \frac{1}{2^c} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{(4-3s)}{8} |\varphi'(\hbar)|^q + \frac{(4-s)}{8} |\varphi'(\mathcal{L})|^q \right) \right] \\
& = \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\
& \quad \times \left[\frac{2}{p} \left(\frac{1}{c+1} \right) \left(1 - \frac{1}{2^c} \right) + \frac{2-s}{q} \frac{(|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\mathcal{L})|^q)}{2} \right] \\
& = \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} \\
& \quad \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \frac{2}{p} \left(\frac{1 - 2^{-c}}{c+1} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \frac{2-s}{q} \frac{(|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\mathcal{L})|^q)}{2} \right] \\
& = \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} \\
& \quad \times \left[\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k} \left(\frac{1 - 2^{-c}}{c+1} \right)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} + \frac{2-s}{q} \frac{(|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\mathcal{L})|^q)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right]
\end{aligned}$$

yazılır ve

$$\left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{L})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{L} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathcal{L}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{L}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right|$$

$$\leq \frac{(\mathcal{b} - \mathcal{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon]} \left[\frac{2}{p} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_7}[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] + \frac{2-s}{q} \frac{|\varphi'(\mathcal{h})|^q + |\varphi'(\mathcal{b})|^q}{2} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] \right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 20. Teorem 24 te $s = 1$ alınır

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\mathcal{h}) + \varphi(\mathcal{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{h}^+; w}^\sigma \varphi)(\mathcal{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\mathcal{h})] \right| \\ & \leq \frac{(\mathcal{b} - \mathcal{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon]} \\ & \quad \times \left[\frac{2}{p} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_7}[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] + \frac{1}{q} \frac{|\varphi'(\mathcal{h})|^q + |\varphi'(\mathcal{b})|^q}{2} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 21. Teorem 24 te $s = 1, \lambda = \alpha, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınır

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\mathcal{h}) + \varphi(\mathcal{b})}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\alpha} [J_{\mathcal{h}^+}^\alpha \varphi(\mathcal{b}) + J_{\mathcal{b}^-}^\alpha \varphi(\mathcal{h})] \right| \\ & \leq \frac{(\mathcal{b} - \mathcal{h})}{2} \left[\frac{2}{p} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right) \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha p}} \right) + \frac{1}{q} \frac{|\varphi'(\mathcal{h})|^q + |\varphi'(\mathcal{b})|^q}{2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 22. Teorem 24 te $s = 1, \lambda = \alpha = 1, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınır

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\mathcal{h}) + \varphi(\mathcal{b})}{2} - \frac{1}{(\mathcal{b} - \mathcal{a})} \int_{\mathcal{h}}^{\mathcal{b}} \varphi(\mathcal{t}) d\mathcal{t} \right| \\ & \leq \frac{(\mathcal{b} - \mathcal{h})}{2} \left[\frac{2}{p} \left(\frac{1}{p + 1} \right) \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) + \frac{1}{q} \frac{|\varphi'(\mathcal{h})|^q + |\varphi'(\mathcal{b})|^q}{2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 25. $\varphi: [\mathcal{h}, \mathcal{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathcal{h}, \mathcal{b})$ üzerinde türevi olan bir dönüşüm olsun. $\mathcal{h} < \mathcal{b}$, $\varepsilon, \lambda > 0$, $w \in \mathbb{R}$. Eğer $|\varphi'|^q, [\mathcal{h}, \mathcal{b}]$ aralığında s - tipi konveks ve $q \geq 1$ ise kesirli integraller için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\mathcal{h}) + \varphi(\mathcal{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{h}^+; w}^\sigma \varphi)(\mathcal{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\mathcal{h})] \right| \\ & \leq \frac{(\mathcal{b} - \mathcal{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon]} [\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_8}[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_9}[w(\mathcal{b} - \mathcal{h})^\varepsilon]] \end{aligned}$$

yazılır.

Burada

$$\sigma^8(k) = \sigma(k)\gamma_1(\lambda, \varepsilon, k, s)$$

$$\sigma^9(k) = \sigma(k)\gamma_2(\lambda, \varepsilon, k, s)$$

$$c = \varepsilon k + \lambda$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(\lambda, \varepsilon, k, s) &= \left(\left(\frac{1}{c+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^c} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\times \left\{ \left(\frac{(1 - 2^{-c-1})(c+2) - s(1 - 2^{-c-2})(c+1)}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2^{-c-2}(2cs + 4c + 4s - 8 + 2^{c+2}(c-s+2))}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ \gamma_2(\lambda, \varepsilon, k, s) &= \left(\left(\frac{1}{c+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^c} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\times \left\{ \left(\frac{2^{-c-2}(2cs + 4c + 4s - 8 + 2^{c+2}(c-s+2))}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1 - 2^{-c-1})(c+2) - s(1 - 2^{-c-2})(c+1)}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

İspat: Teorem 21 e benzer olarak Lemma 1 uygulanarak

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \\ &= \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \left[\int_0^1 (1-t)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon (1-t)^\varepsilon] \varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon t^\varepsilon] \varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right] \end{aligned}$$

yazılır. Raina fonksiyon tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \\ &= \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left\{ \int_0^1 [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] \varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right\} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Mutlak değeri özelliği ve Power-Mean eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^{\sigma} \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^{\sigma} \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \left(\int_0^1 |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}| dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}| |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^{\sigma} \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^{\sigma} \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right. \\ & \quad \times \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}] |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \left. \right] \end{aligned}$$

yazılır. Daha sonra $|\varphi'|^q$ in s - tipi konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^{\sigma} \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^{\sigma} \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon}]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right. \\ & \quad \times \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left. \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] [1 - s(1-t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1-st) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1 - t)^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1 - t)^{\varepsilon k + \lambda}] [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\mathcal{L})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \\
& = \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\
& \times \left\{ \left(\left(\frac{1}{c+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^c} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\frac{(1 - 2^{-c-1})(c+2) - s(1 - 2^{-c-2})(c+1)}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2^{-c-2}(2cs + 4c + 4s - 8 + 2^{c+2}(c - s + 2))}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\mathcal{L})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left(\frac{1}{c+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^c} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\frac{2^{-c-2}(2cs + 4c + 4s - 8 + 2^{c+2}(c - s + 2))}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(1 - 2^{-c-1})(c+2) - s(1 - 2^{-c-2})(c+1)}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\mathcal{L})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{L})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{L} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathcal{L}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{L}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathcal{L} - \hbar)^\varepsilon]} \\
& \times \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left(\left(\frac{1}{c+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^c} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \right. \\
& \quad \times \left[\left(\frac{(1 - 2^{-c-1})(c+2) - s(1 - 2^{-c-2})(c+1)}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2^{-c-2}(2cs + 4c + 4s - 8 + 2^{c+2}(c - s + 2))}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\mathcal{L})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \left(\left(\frac{1}{c+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^c} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
& \times \left(\frac{2^{-c-2}(2cs + 4c + 4s - 8 + 2^{c+2}(c - s + 2))}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\mathfrak{h})|^q \right. \\
& \left. + \frac{(1 - 2^{-c-1})(c+2) - s(1 - 2^{-c-2})(c+1)}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \frac{(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon k} \gamma_1(\lambda, \varepsilon, k, s)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon k} \gamma_2(\lambda, \varepsilon, k, s)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right\} \\
& = \frac{(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}]} \left[\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^8}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^9}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}] \right]
\end{aligned}$$

oluşur ve

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}]} \left[(J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{h}^+; w}^{\sigma} \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^{\sigma} \varphi)(\mathfrak{h}) \right] \right| \\
& \leq \frac{(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}]} \left[\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^8}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^9}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}] \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 23. Teorem 25 te $s = 1$ alınır

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}]} \left[(J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{h}^+; w}^{\sigma} \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^{\sigma} \varphi)(\mathfrak{h}) \right] \right| \\
& \leq \frac{(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}]} \left[\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^8}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^9}[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon}] \right]
\end{aligned}$$

dir.

Burada

$$\sigma^8(k) = \sigma(k) \gamma_1(\lambda, \varepsilon, k, 1)$$

$$\sigma^9(k) = \sigma(k) \gamma_2(\lambda, \varepsilon, k, 1)$$

$$\gamma_1(\lambda, \varepsilon, k, 1) = \left(\left(\frac{1}{c+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^c} \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{(1 - 2^{-c-1})(c+2) - (1 - 2^{-c-2})(c+1)}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\hbar)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{2^{-c-2}(6c-4+2^{c+2}(c+1))}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
\gamma_2(\lambda, \varepsilon, k, 1) &= \left(\left(\frac{1}{c+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^c} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
& \times \left(\frac{2^{-c-2}(6c-4+2^{c+2}(c+1))}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\hbar)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{(1 - 2^{-c-1})(c+2) - (1 - 2^{-c-2})(c+1)}{(c+1)(c+2)} |\varphi'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\sigma^8(k) = \sigma(k) \gamma_1(\lambda, \varepsilon, k, 1)$$

$$\sigma^9(k) = \sigma(k) \gamma_2(\lambda, \varepsilon, k, 1)$$

dır.

Sonuç 24. Teorem 25 te $s = 1, \lambda = \alpha, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\ell-\hbar)^\alpha} [J_{\hbar+}^\alpha \varphi(\ell) + J_{\ell-}^\alpha \varphi(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\ell-\hbar)}{2} \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{(1 - 2^{-\alpha-1})(\alpha+2) - (1 - 2^{-\alpha-2})(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2^{-\alpha-2}(6\alpha-4+2^{\alpha+2}(\alpha+1))}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |\varphi'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2^{-\alpha-2}(6\alpha-4+2^{\alpha+2}(\alpha+1))}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(1 - 2^{-\alpha-1})(\alpha+2) - (1 - 2^{-\alpha-2})(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |\varphi'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 25. Teorem 25 te $s = 1, \lambda = \alpha = 1, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{L})}{2} - \frac{1}{\mathcal{L} - \hbar} \int_{\hbar}^{\mathcal{L}} \varphi(t) dt \right| \\
& \leq \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{\left(2^{1-\frac{2}{p}}\right)} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|\varphi'(\hbar)|^q + 5|\varphi'(\mathcal{L})|^q}{12} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{5|\varphi'(\hbar)|^q + |\varphi'(\mathcal{L})|^q}{12} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 26. $\varphi: [\hbar, \mathcal{L}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \mathcal{L})$ üzerinde türevi olan bir dönüşüm olsun. $\hbar < \mathcal{L}$, $\varepsilon, \lambda > 0$, $w \in \mathbb{R}$. Eğer $|\varphi'|^q, [\hbar, \mathcal{L}]$ aralığında s – tipi konveks ve $q > 1$ ise kesirli integraller için,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{L})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{L} - \hbar)^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma}[w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^{\sigma} \varphi)(\mathcal{L}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{L}^-; w}^{\sigma} \varphi)(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma}[w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}]} \\
& \quad \times [\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{10}}[w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{11}}[w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}] \\
& \quad + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{12}}[w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{13}}[w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}]]
\end{aligned}$$

Burada

$$c = (\varepsilon k + \lambda)$$

$$\sigma^{10}(k) = \sigma(k) \gamma_3(\lambda, \varepsilon, k, s)$$

$$\sigma^{11}(k) = \sigma(k) \gamma_4(\lambda, \varepsilon, k, s)$$

$$\sigma^{12}(k) = \sigma(k) \gamma_5(\lambda, \varepsilon, k, s)$$

$$\sigma^{13}(k) = \sigma(k) \gamma_6(\lambda, \varepsilon, k, s)$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_3(\lambda, \varepsilon, k, s) &= \left(\frac{1}{(c+2)} - \frac{1}{2(c+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{4s \cdot 2^{-c-3} - 2s}{c+3} - \frac{4s \cdot 2^{-c-2} - s - 2}{c+2} + \frac{s \cdot 2^{-c-1} - 1}{c+1} \right) |\varphi'(\hbar)|^q \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{4s \cdot 2^{-c-2} - 3s + 2}{c+2} - \frac{4s \cdot 2^{-c-3} - 2s}{c+3} - \frac{s \cdot 2^{-c-1} - s + 1}{c+1} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
\gamma_4(\lambda, \varepsilon, k, s) &= \left(\frac{-2^{-c-1} + 1}{(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\left(\frac{-2^{-c-1} + 1}{c+1} + \frac{2s \cdot 2^{-c-2} - s - 1}{c+2} + \frac{s - 2s \cdot 2^{-c-3}}{c+3} \right) |\varphi'(\mathfrak{h})|^q \right. \\
& \left. + \left(\frac{2s \cdot 2^{-c-3} - s}{c+3} - \frac{2s \cdot 2^{-c-2} - 2s + 1}{c+2} + \frac{(s-1)(2^{-c-1} - 1)}{c+1} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
\gamma_5(\lambda, \varepsilon, k, s) &= \left(\frac{-2^{-c-1} + 1}{(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\left(\frac{(2^{-c-1} - 1)(s-1)}{c+1} - \frac{2s \cdot 2^{-c-2} - 2s + 1}{c+2} + \frac{2s \cdot 2^{-c-3} - s}{c+3} \right) |\varphi'(\mathfrak{h})|^q \right. \\
& \left. + \left(\frac{-2^{-c-1} + 1}{c+1} + \frac{2s \cdot 2^{-c-2} - s - 1}{c+2} + \frac{s - 2s \cdot 2^{-c-3}}{c+3} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
\gamma_6(\lambda, \varepsilon, k, s) &= \left(\frac{-1}{2(c+1)} + \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{4s \cdot 2^{-c-2} - 3s + 2}{c+2} - \frac{4s \cdot 2^{-c-3} - 2s}{c+3} - \frac{s \cdot 2^{-c-1} - s + 1}{c+1} \right) |\varphi'(\mathfrak{h})|^q \right. \\
& \left. + \left(\frac{4s \cdot 2^{-c-3} - 2s}{c+3} - \frac{4s \cdot 2^{-c-2} - s - 2}{c+2} + \frac{s \cdot 2^{-c-1} - 1}{c+1} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dır.

İspat. Teorem 25 in ispatına benzer olarak Lemma 1 ve Geliştirilmiş Power-Mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\mathfrak{h}) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{h}^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{h})] \right| \\
& \leq \frac{(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)w^k(\mathfrak{b} - \mathfrak{h})^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\
& \times \left\{ \left(\int_0^1 (1-t) |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}| dt \right)^{\frac{1}{p}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 (1-t) |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}| |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (t-0) |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}| dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 (t-0) |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}| |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-; w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\
& \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\
& \times \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2} - 0} \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t \right) [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t \right) [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t [(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left. \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1-t)^{\varepsilon k + \lambda}] |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1 - t)^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1 - t)^{\varepsilon k + \lambda}] |\varphi'(t\hbar + (1 - t)\mathcal{B})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

elde edilir. Daha sonra $|\varphi'|^q$ in s - tipi konveksliği kullanılarak

$$\left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{B})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{B} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda + 1}^\sigma [w(\mathcal{B} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathcal{B}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{B}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ \leq \frac{(\mathcal{B} - \hbar)}{2\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda + 1}^\sigma [w(\mathcal{B} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathcal{B} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ \times \left\{ 2 \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t \right) [(1 - t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \right. \\ \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t \right) [(1 - t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\mathcal{B})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left. \left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t [(1 - t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \right. \\ \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t [(1 - t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}] [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\mathcal{B})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \\ + 2 \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - t) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1 - t)^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - t) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1 - t)^{\varepsilon k + \lambda}] [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\mathcal{B})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left. \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1 - t)^{\varepsilon k + \lambda}] dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \right. \\ \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1 - t)^{\varepsilon k + \lambda}] [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\mathcal{B})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

$$\times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) [t^{\varepsilon k + \lambda} - (1 - t)^{\varepsilon k + \lambda}] [1 - s(1 - t)] |\varphi'(\hbar)|^q + (1 - st) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \\ & \quad \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \gamma_3(\lambda, \varepsilon, k, s)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \gamma_4(\lambda, \varepsilon, k, s)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \gamma_5(\lambda, \varepsilon, k, s)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k} \gamma_6(\lambda, \varepsilon, k, s)}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \right] \\ & = \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \\ & \quad \times [\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{10}}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{11}}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] \\ & \quad + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{12}}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{13}}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 26. Teorem 26 da $s = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \\ & \quad \times [\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{10}}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{11}}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] \\ & \quad + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{12}}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] + \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma_{13}}[w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır.

Burada

$$\gamma_3(\lambda, \varepsilon, k, 1) = \left(\frac{-1}{2(c+1)} + \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{4 \cdot 2^{-c-3} - 2}{c+3} - \frac{4 \cdot 2^{-c-2} - 3}{c+2} + \frac{2^{-c-1} - 1}{c+1} \right) |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{4 \cdot 2^{-c-2} - 1}{c+2} - \frac{4 \cdot 2^{-c-3} - 2}{c+3} - \frac{2^{-c-1}}{c+1} \right) |\varphi'(\ell)|^q \right] \right)^{\frac{1}{q}} \\
\gamma_4(\lambda, \varepsilon, k, 1) &= \left(\frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{c+1} + 1}{(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\left(\frac{-2^{-c-1} + 1}{c+1} + \frac{2 \cdot 2^{-c-2} - 2}{c+2} + \frac{1 - 2 \cdot 2^{-c-3}}{c+3} \right) |\varphi'(\hbar)|^q \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{2 \cdot 2^{-c-3} - 1}{c+3} - \frac{2 \cdot 2^{-c-2} - 1}{c+2} \right) |\varphi'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
\gamma_5(\lambda, \varepsilon, k, 1) &= \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{c+1} - 1}{(c+1)} + \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\left(-\frac{2 \cdot 2^{-c-2} - 1}{c+2} + \frac{2 \cdot 2^{-c-3} - 1}{c+3} \right) |\varphi'(\hbar)|^q \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{-2^{-c-1} + 1}{c+1} + \frac{2 \cdot 2^{-c-2} - 2}{c+2} + \frac{1 - 2 \cdot 2^{-c-3}}{c+3} \right) |\varphi'(\ell)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
\gamma_6(\lambda, \varepsilon, k, 1) &= \left(\frac{1}{2(c+1)} - \frac{1}{(c+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{4 \cdot 2^{-c-2} - 1}{c+2} - \frac{4 \cdot 2^{-c-3} - 2}{c+3} - \frac{2^{-c-1}}{c+1} \right) |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{4 \cdot 2^{-c-3} - 2}{c+3} - \frac{4 \cdot 2^{-c-2} - 3}{c+2} + \frac{2^{-c-1} - 1}{c+1} \right) |\varphi'(\ell)|^q \right] \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitlikleri dikkate alınır.

Sonuç 27. Teorem 26 da $s = 1, \lambda = \alpha, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınır

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\ell - \hbar)^\alpha} [J_{\hbar+}^\alpha \varphi(\ell) + J_{\ell-}^\alpha \varphi(\hbar)] \right| \\
& \leq (\ell - \hbar)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{1}{2(\alpha+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{2^{-\alpha-1}-2}{\alpha+3} - \frac{2^{-\alpha}-3}{\alpha+2} + \frac{2^{-\alpha-1}-1}{\alpha+1} \right) |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \left(\frac{2^{-\alpha}-1}{\alpha+2} - \frac{2^{-\alpha-1}-2}{\alpha+3} - \frac{2^{-\alpha-1}}{\alpha+1} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right] \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} - \frac{1}{(\alpha+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{-2^{-\alpha-1}+1}{\alpha+1} + \frac{2^{-\alpha-1}-2}{\alpha+2} + \frac{1-2^{-\alpha-2}}{\alpha+3} \right) |\varphi'(\hbar)|^q \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{2^{-\alpha-2}-1}{\alpha+3} - \frac{2^{-\alpha-1}-1}{\alpha+2} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - 1}{(\alpha+1)} + \frac{1}{(\alpha+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(-\frac{2^{-\alpha-1}-1}{\alpha+2} + \frac{2^{-\alpha-2}-1}{\alpha+3} \right) |\varphi'(\hbar)|^q \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{-2^{-\alpha-1}+1}{\alpha+1} + \frac{2^{-\alpha-1}-2}{\alpha+2} + \frac{1-2^{-\alpha-2}}{\alpha+3} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\frac{1}{2(\alpha+1)} - \frac{1}{(\alpha+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{2^{-\alpha}-1}{c+2} - \frac{2^{-\alpha}-2}{c+3} - \frac{2^{-\alpha-1}}{c+1} \right) |\varphi'(\hbar)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{2^{-\alpha-1}-2}{\alpha+3} - \frac{2^{-\alpha}-3}{\alpha+2} + \frac{2^{-\alpha-1}-1}{\alpha+1} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right] \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 28. Teorem 26 da $s = 1, \lambda = \alpha = 1, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{\mathfrak{b} - \hbar} \int_{\hbar}^{\mathfrak{b}} \varphi(t) dt \right| \\
& \leq (\mathfrak{b} - \hbar) \left[\left(\frac{1}{12} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{25}{48} \right) |\varphi'(\hbar)|^q + \left(\frac{7}{48} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right] \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{24} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{1}{96} \right) |\varphi'(\hbar)|^q + \left(\frac{3}{96} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{24} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{3}{96} \right) |\varphi'(\hbar)|^q + \left(\frac{1}{96} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \left(-\frac{1}{12} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{7}{48} \right) |\varphi'(\hbar)|^q + \left(\frac{25}{48} \right) |\varphi'(\mathfrak{b})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

elde edilir.

Teorem 27. $\varphi: [\hbar, \mathfrak{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \mathfrak{b})$ üzerinde türevlenebilen bir dönüşüm, $\varphi' \in L[\hbar, \mathfrak{b}]$ ve $\hbar, \mathfrak{b} \in I, \hbar < \mathfrak{b}, \varepsilon, \lambda > 0, w \in \mathbb{R}$ olsun. $|\varphi'|^q, [\hbar, \mathfrak{b}]$ üzerinde konkav ve $q > 1$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2^{1+\frac{1}{q}} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^2} [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon] \\ & \quad \times \left[\left| \varphi' \left(\frac{\hbar + 3\mathfrak{b}}{4} \right) \right| + \left| \varphi' \left(\frac{3\hbar + \mathfrak{b}}{4} \right) \right| \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $\sigma^2(k)$ Teorem 22 de olduğu gibi

$$\sigma^2(k) = \sigma(k) \left(\frac{1}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{(\varepsilon k + \lambda)p}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ifadesi dikkate alınmıştır.

İspat: Teorem 22 ye benzer olarak Lemma 1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 |(1-t)^{\varepsilon k + \lambda} - t^{\varepsilon k + \lambda}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathfrak{b})}{2} - \frac{1}{2(\mathfrak{b} - \hbar)^\lambda \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+, w}^\sigma \varphi)(\mathfrak{b}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathfrak{b}^-, w}^\sigma \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathfrak{b} - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^\sigma [w(\mathfrak{b} - \hbar)^\varepsilon]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathfrak{b} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k+\lambda} - t^{\varepsilon k+\lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k+\lambda} - (1-t)^{\varepsilon k+\lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

yazılır. $|\varphi'|^q$, $[\hbar, \mathfrak{b}]$ üzerinde konkav olup Jensen integral eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \\ & \leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^0 dt \right) \left| \varphi' \left(\frac{1}{\int_0^{\frac{1}{2}} t^0 dt} \int_0^{\frac{1}{2}} (t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right) \right|^q \\ & = \left| \varphi' \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} (t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right) \right|^q \\ & = \frac{1}{2} \left| \varphi' \left(\frac{\hbar + 3\mathfrak{b}}{4} \right) \right|^q \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^1 |\varphi'(t\hbar + (1-t)\mathfrak{b})|^q dt \\ & \leq \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 t^0 dt \right) \left| \varphi' \left(\frac{1}{\int_{\frac{1}{2}}^1 t^0 dt} \int_{\frac{1}{2}}^1 (t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right) \right|^q \\ & = \left| \varphi' \left(2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (t\hbar + (1-t)\mathfrak{b}) dt \right) \right|^q \\ & = \frac{1}{2} \left| \varphi' \left(\frac{3\hbar + \mathfrak{b}}{4} \right) \right|^q \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\varepsilon k+\lambda} - (1-t)^{\varepsilon k+\lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\varepsilon k+\lambda} - t^{\varepsilon k+\lambda}]^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{(\varepsilon k + \lambda)p}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{L})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{L} - \hbar)^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^{\sigma} \varphi)(\mathcal{L}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{L}^-; w}^{\sigma} \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ & \times \left\{ \left(\frac{1}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{(\varepsilon k + \lambda)p}} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{2^{\frac{1}{q}}} \left[\left(\left| \varphi' \left(\frac{\hbar + 3\mathcal{L}}{4} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left| \varphi' \left(\frac{3\hbar + \mathcal{L}}{4} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{L})}{2} - \frac{1}{2(\mathcal{L} - \hbar)^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}]} [(J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^+; w}^{\sigma} \varphi)(\mathcal{L}) + (J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{L}^-; w}^{\sigma} \varphi)(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2 \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k (\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon k} \left(\frac{1}{(\varepsilon k + \lambda)p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{(\varepsilon k + \lambda)p}} \right)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(\varepsilon k + \lambda + 1)} \\ & \quad \times \frac{1}{2^{\frac{1}{q}}} \left[\left| \varphi' \left(\frac{\hbar + 3\mathcal{L}}{4} \right) \right| + \left| \varphi' \left(\frac{3\hbar + \mathcal{L}}{4} \right) \right| \right] \\ & = \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2^{1+\frac{1}{q}} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}]} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma^2} [w(\mathcal{L} - \hbar)^{\varepsilon}] \left[\left| \varphi' \left(\frac{\hbar + 3\mathcal{L}}{4} \right) \right| + \left| \varphi' \left(\frac{3\hbar + \mathcal{L}}{4} \right) \right| \right] \end{aligned}$$

bulunur. İspat tamamlanmış olur.

Sonuç 29. Teorem 27 de , $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\mathcal{L})}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\mathcal{L} - \hbar)^{\alpha}} [J_{\hbar^+}^{\alpha} \varphi(\mathcal{L}) + J_{\mathcal{L}^-}^{\alpha} \varphi(\hbar)] \right| \\ & \leq \frac{(\mathcal{L} - \hbar)}{2^{1+\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{\alpha p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\left| \varphi' \left(\frac{\hbar + 3\mathcal{L}}{4} \right) \right| + \left| \varphi' \left(\frac{3\hbar + \mathcal{L}}{4} \right) \right| \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 30. Teorem 27 de , $\lambda = \alpha = 1$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\ell)}{2} - \frac{1}{(\ell - \hbar)} \int_{\hbar}^{\ell} \varphi(t) dt \right| \\
& \leq \frac{(\ell - \hbar)}{2^{1+\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[\left| \varphi' \left(\frac{\hbar + 3\ell}{4} \right) \right| + \left| \varphi' \left(\frac{3\hbar + \ell}{4} \right) \right| \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.



SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Raina fonksiyonlar için s – tipi konvekslik üzerine Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan, Geliştirilmiş Power-Mean, Young İntegral Eşitsizlikleri kullanılarak yeni teoremler oluşturulmuş ve özel değerler için hem yeni hem de literatürde olan sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca konkav fonksiyonlar için de Jensen eşitsizliği yardımıyla yeni teorem ve sonuçlara ulaşılmıştır.

Tanım 9 da verilen

$$\varphi(t\hbar + (1-t)\flat) \leq \varphi(\flat) + t\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda}^{\sigma}(\varphi(\hbar) - \varphi(\flat))$$

Raina konveks fonksiyon eşitsizliğine farklı integral eşitsizlikleri uygulanarak Raina fonksiyonu üzerine yeni teorem ve sonuçlar elde edilip bulunan eşitsizlikler ile tezde bulunan eşitsizlikler arasında kıyaslama yapılabilir.

Aynı zamanda elde edilen teoremlerin ikinci türevleri üzerine de çalışmalar gerçekleştirilebilir. İkinci türevler üzerine okuyucuya ilham ve motivasyon kaynağı olması açısından Set tarafından 2017 ve 2019 yıllarında yapılan çalışmalarda bulunan Lemma 2 ve Lemma 3 incelenebilir. Bu lemmalar farklı konvekslik çeşitleri üzerine çalışma yapılması açısından okuyucuya farklı bir bakış açısı sunabilir. Elde edilen teorem ve sonuçlar tezde yer alan sonuçlar ile karşılaştırılabilir.

Lemma 2. $\varphi: [\hbar, \flat] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \flat)$ üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun $(\hbar < \flat)$. Ayrıca $\varepsilon, \lambda > 0$ ve $w \in \mathbb{R}$. Eğer $\varphi'' \in L[\hbar, \flat]$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+1}^{\sigma}[w(\flat - \hbar)^{\varepsilon}] \frac{\varphi(\hbar) + \varphi(\flat)}{2} - \frac{1}{2(\flat - \hbar)^{\lambda}} [(J_{\varepsilon,\lambda,\flat^{-};w}^{\sigma}\varphi)(\hbar) + (J_{\varepsilon,\lambda,\hbar^{+};w}^{\sigma}\varphi)(\flat)] \\ &= \frac{(\flat - \hbar)^2}{2} \times \int_0^1 \{ t\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+2}^{\sigma}[w(\flat - \hbar)^{\varepsilon}] \\ & \quad - t^{\lambda+1}\mathcal{F}_{\varepsilon,\lambda+2}^{\sigma}[w(\flat - \hbar)^{\varepsilon}t^{\varepsilon}][\varphi''(t\hbar + (1-t)\flat) \\ & \quad + \varphi''((1-t)\hbar + t\flat)] \} dt. \end{aligned}$$

eşitliği oluşur (Set *et al.* 2019).

Lemma 3. $\varphi: [\hbar, \mathcal{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(\hbar, \mathcal{b})$ üzerinde türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer $\varphi' \in L[\hbar, \mathcal{b}]$ ise genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için

$$L_{\varphi}(\hbar, \mathcal{b}; w; J) = \frac{1}{2(\mathcal{b} - \hbar)^{\lambda}} [(J_{\varepsilon, \lambda, \mathcal{b}^{-}; w}^{\sigma} \varphi)(\hbar) + (J_{\varepsilon, \lambda, \hbar^{+}; w}^{\sigma} \varphi)(\mathcal{b})] \\ - \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{b} - \hbar)^{\varepsilon}] \varphi\left(\frac{\hbar + \mathcal{b}}{2}\right)$$

$$L_{\varphi}(\hbar, \mathcal{b}; w; J) =$$

$$\frac{\mathcal{b} - \hbar}{2} \left\{ \int_0^1 k(t) \varphi'(t\hbar + (1-t)\mathcal{b}) dt \right. \\ \left. - \int_0^1 (1-t)^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{b} - \hbar)^{\varepsilon} (1-t)^{\varepsilon}] \varphi'(t\hbar + (1-t)\mathcal{b}) dt \right. \\ \left. + \int_0^1 t^{\lambda} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{b} - \hbar)^{\varepsilon} t^{\varepsilon}] \varphi'(t\hbar + (1-t)\mathcal{b}) dt \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada

$$k(t) = \begin{cases} \mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{b} - \hbar)^{\varepsilon}], & 0 < t < \frac{1}{2} \\ -\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda+1}^{\sigma} [w(\mathcal{b} - \hbar)^{\varepsilon}], & 0 < t < 1, \end{cases}$$

$\varepsilon, \lambda > 0, w \in \mathbb{R}$ (Set et al. 2017).

KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Luo, M.J., Raina, R.K., (2016). On Ostrowski Type Inequalities. *Fasc Math*, 56, 5-27.
- Azpetia, A.G., (1994). Convex functions and the Hadamard inequality, *Rev. Colombiana Math. Lett.*, 28, 7- 12.
- Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.
- Butt, S. I., Nadeem, M., Tariq, M. & Aslam, A. (2021). New integral type inequalities via Raina-convex functions and its applications, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 70(2): 1011-1035.
- Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Cerone, P. (2000). On Simpson's Inequality and Applications. *J. of Inequal. & Appl*, 5, 533-579.
- Dragomir, S., Agarwal, R., & Barnett, N.S. (2000). Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities *J. of Inequal. and Appl*, 5 (2), 103-165.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J., and Persson, L.E., (1995) Some inequalities of Hadamard Type, *Soochow J. of Mathematics*, Vol.21, No:3, pp. 335-341.
- Fejer, L. (1906). Über die Fourierreihen, II, *Math. Naturwiss, Anz. Ungar. Akad. Wiss.*, 369-390. (In Hungarian).
- Gözpinar, A., Set, E., Dragomir, S.S., (2019). Some generalized Hermite-Hadamard type inequalities involving fractional integral operator for functions whose second derivatives in absolute value are s -convex, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 88(1) , 87-100.
- Greenberg, H., & Pierskalla, W. (1971). A review of quasi convex functions. *Operations*, 7, 1553-1570.
- Hudzik, H., ve Maligranda, L. (1994). Some Remarks on s -Convex Functions, *Aequationes Math.*, vol. 48, pp. 100-111.
- İşcan, İ. (2019). New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality. *J. of Inequal. and Appl.*, (304), 1-11.
- Jensen, J.L.W.V., (1905). Om konvekse funktioner og uligheder imellem middelveerdier. *Nyt tidsskrift for matematik*, 16, 49-68.
- Kadakal, M., İşcan, İ., Kadakal, H. & Bekar, K., (2019). On improvements of some integral inequalities. *Honam Math. Jour.*, 43(3), 441-452.
- Kırmacı, U.S., (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, *Applied Mathematics and Computation*, c. 147, ss. 137-146.
- Kufner, A., John, O., and Fucik, S., (1977). *Function spaces* (Vol. 3), Springer Science & Business Media.
- Mitrinović, D., (1970). *Analytic Inequalities*. Berlin.: Springer-Verlag

- Mitrinovic, D. S., Pečarić, J. & Fink, A. M., (1993). Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic, Dordrecht.
- Niculescu, C.P., and Persson, L.E., (2006). Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, Springer Science+Business Media, Inc.
- Ostrowski, A. (1938). Über die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von. Comment. Math. Hel , 1 (17), 226-230.
- Pečarić, J. E., Proschan, F. and Tong, Y. L., (1992). Convex functions, Partial Ordering and Statistical Appl., Academic Press, Inc.
- Raina, R. K., (2005). On generalized Wrights hypergeometric functions and fractional calculus operators. East Asian Mathematical Journal 21(2) ,191.203.
- Rashid, S., İscan, İ. Baleanu, D., Chu, Y. M. (2020). Generation of new fractional inequalities via n –polynomials s –type convexity with applications. Adv. Differ. Equ., 264.
- Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I. (1993) Fractional integrals and derivaties: Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, USA, 976 pp.
- Sarıkaya, M.Z., Set E., Yıldız H., Başak N. (2013). Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Math. and Comp. Model.,57(9): 2403-2407.
- Set E, Noor M.A., Awan M.U., Gözpinar A. (2017) Generalized Hermite-Hadamard type inequalities involving fractional integral operators. J. Inequal. Appl., 2017(1),169.
- Set, E., Dragomir, S., Gözpinar, A. (2019). Some generalized hermite-hadamard type inequalities involving fractional integral operator for functions whose second derivatives in absolute value are s –convex. Acta Mathematica Universitatis Comenianae. 88.
- Yıldız, H. and Sarıkaya, M. Z., (2020). On the Hermite-Hadamard Type Inequalities for Fractional Integral Operator, Kragujevac J. of Mathematics, 44, 3, 369-378.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Merve COŞKUN
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Erzurum Nevzat Karabağ Anadolu Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	İyi
Makaleler	
Tatar, M.Ç., Coşkun, M., Yıldız, Ç. (2023) Some New Applications for Weighted Hermite-Hadamard Type Inequalities, Turkish Journal of Inequalities, 7(2) (2023) 15-28	
Çifçi, Z., Coşkun, M., Yıldız, Ç., Cotirla L.I., Breaz, D. (2024), On New Generalized Hermite-Hadamard-Mercer Type Inequalities for Raina Functions, Submitted	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
Coşkun, M., Yıldız, Ç., Cotirla L.I. (2024), Novel Estimations of Hermite-Hadamard Type Integral for Raina's Fractional Operators Fractal Fract.,2024,8 302 https://www.mdpi.com/2504-3110/8/5/302	