



**HEMİKONTRAKTİF VE DEMİKONTRAKTİF
DÖNÜŞÜMLERİN SINIFLARI**

Hülya ALTINOK

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2025

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ BİLİM DALI

HEMİKONTRAKTİF VE DEMİKONTRAKTİF DÖNÜŞÜMLERİN SINIFLARI
(Classes of Hemicontractive and Demicontractive Mappings)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hülya ALTINOK

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Erzurum
2025

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Hülya ALTINOK tarafından hazırlanan “Hemikontraktif ve Demikontraktif Dönüşümlerin Sınıfları” başlıklı çalışması 28 / 07 / 2025 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR
Atatürk Üniversitesi
Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM
Atatürk Üniversitesi
Jüri Üyesi: Doç. Dr. İbrahim KARAHAN
Erzurum Teknik Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Aslı ıslak imzalıdır

Aslı ıslak imzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Aslı ıslak imzalıdır

Prof. Dr. Alper NUHOĞLU
Enstitü Müdürü

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Prof. Dr. İsa YILDIRIM'ın danışmanlığında sunulan "Hemikontraktif ve Demikontraktif Dönüşümlerin Sınıfları" başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	6	30
Kuramsal Temeller	21	30
Materyal ve Metot	6	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	20	20
Sonuçlar	5	20
Tezin Geneli	14	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Hülya ALTINOK	Prof. Dr. İsa YILDIRIM
15.7.2025	15.7.2025
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunulan bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim süresince ve bu tezin hazırlanmasında bana her zaman yol gösteren, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen, sabırla beni yönlendiren değerli tez danışmanım Sayın Prof. Dr. İsa Yıldırım'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendilerinin yapıcı eleştirileri ve değerli yönlendirmeleri sayesinde bu çalışmayı tamamlayabildiğimi düşünüyorum.

Eğitim hayatım boyunca bana her zaman destek olan, sevgisini ve anlayışını esirgemeyen özellikle eşim Lokman Altınok'a ve aileme sonsuz teşekkür ederim. Varlıkları bana güç verdi.

Ayrıca, çalışmam sırasında bana yardımcı olan, katkı sağlayan ve fikirleriyle ufkumu açan tüm hocalarıma ve arkadaşım Ümmügülsüm Günay'a da teşekkür ederim.

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na yüksek lisans öğrenimim boyunca TUBİTAK 2210-A Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ile desteğinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEMİKONTRAKTİF VE DEMİKONTRAKTİF DÖNÜŞÜMLERİN SINIFLARI

Hülya ALTINOK

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Amaç: Bu çalışmada, hemikontraktif ve demikontraktif dönüşüm türlerinin farklı sınıfları ve bu dönüşümlerin sonlu aileleri göz önüne alınarak bu dönüşüm sınıfları için oluşturulan farklı iterasyon metotlarının Hilbert uzaylarında yakınsama analizi incelenmiştir.

Yöntem: Bu tezde yer alan teoremler, ilgili matematiksel yöntemler ve lemmalar aracılığıyla ispatlanmıştır.

Bulgular: Bu çalışmada, hemikontraktif ve demikontraktif dönüşüm türleri ve bunların farklı sınıfları tanıtılmıştır. Oluşturduğumuz yeni iterasyon metotlarını kullanarak bu dönüşüm sınıfları için bazı yakınsama teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca Hilbert uzayda veya Banach uzayda bilinen bir teoremin metrik uzaya genelleştirmesi son derece önemli olduğundan bu uzaylarda elde edilen sonuçların metrik uzaydaki versiyonları ifade edilmiştir. Böylece elde edilen yeni bulgular ve sonuçlarla literatüre yeni bir bakış açısı kazandırılmıştır.

Sonuç: Elde edilen bulgular ve literatürdeki mevcut çalışmalar dikkate alınarak, bu çalışmanın gelecekte hangi çalışmalara katkı sağlayabileceği ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemikontraktif ve demikontraktif dönüşüm, sabit nokta, Hilbert uzay, iterasyon yöntemleri, Banach uzay

Temmuz 2025, 51 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

CLASSES OF HEMICONTRACTIVE AND DEMICONTRACTIVE MAPPINGS

Hülya ALTINOK

Supervisor: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Purpose: In this study, the convergence analysis of various iterative methods developed for different classes of hemicontractive and demicontractive mappings, as well as finite families of such mappings, has been examined in Hilbert spaces.

Method: The theorems in the thesis are proven using mathematical methods and lemmas.

Findings: In this study, hemicontractive and demicontractive types of mappings, along with their various classes, have been introduced. By employing the newly developed iterative methods, several convergence theorems for these classes of mappings have been proven. Moreover, since generalizing a well-known theorem from Hilbert or Banach spaces to metric spaces is of significant importance, the versions of the results obtained in these spaces have been formulated for metric spaces as well. In this way, the new findings and results presented in this study provide a fresh perspective to the existing literature.

Results: Based on the findings and the existing literature, this study shows which future studies it may support.

Keywords: Hemicontractive and demicontractive mappings, fixed point, Hilbert space, iterative methods, Banach space

July 2025, 51 pages

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ	x
GİRİŞ	1
KURAMSAL TEMELLER VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	3
Uzayların Tanımı.....	3
Dönüşümlerin Tanımı	6
Araştırmanın Önemi ve Gerekçesi	14
Tez Öneri Konusunun Enstitü ve Ana Bilim Dalı Öncelikli Araştırma Alanlarıyla İlişkisi.....	14
MATERYAL VE METOD	15
ARAŞTIRMA BULGULARI	26
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	46
KAYNAKÇA	48

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Uzayların Birbirine Göre Durumu	5
Şekil 2. Dönüşümlerin Birbirine Göre Durumu	13



KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$\emptyset$	: Boş küme
$\forall$	: Her
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu reel uzay
$(X, \ \cdot\)$	: Normlu uzay
$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	: İç çarpım uzayı
(X, d)	: Metrik uzay
(X, d, W)	: Hiperbolik uzay
f_p	: Sabit nokta
$F(T)$	: T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
L^p	: $\{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f(x) ^p dx < \infty\}$
P_c	: P 'nin C üzerine metrik projeksiyonu
l^p	: $\{x: (x_i): \sum_{i=1}^{\infty} x_i ^p < \infty, 1 \leq p \leq \infty\}$

GİRİŞ

Matematikte uzay kavramı belirli bir matematiksel yapıya sahip küme olarak tanımlanmıştır. Antik Yunan matematiğinde "uzay", günlük yaşamda gözlemlenen üç boyutlu gerçekliğin geometrik bir soyutlamasıdır. MÖ 300 lü yıllarda Öklid, uzayın özellikleri için aksiyomlar vermiş ve tüm matematiği bu geometrik temeller üzerine kurmuştur. Dolayısıyla Öklid uzaylar, metrik uzaylar, normlu uzaylar, Hilbert uzaylar, Banach uzaylar ve hiperbolik uzaylar gibi pek çok uzay türü çeşitli matematiksel çalışmaların temel taşı olmuştur.

1902-1912 yıllarında ünlü matematikçi David Hilbert, ilk olarak Hilbert uzayını Fourier serileri ve integral denklemleri üzerine yaptığı çalışmasında tanımlamıştır. Dolayısıyla Hilbert uzaylar, onları integral denklemler bağlamında inceleyen David Hilbert'in adını almıştır. Hilbert uzaylarının keşfi ile fonksiyonel analiz literatüre girmiştir.

Stefan Banach'ın adını taşıyan önemli matematiksel kavramından biri de Banach uzayıdır. Banach'ın 1920 yılında bitirilen ve 1922 yılında yayınlanan tezinde, tam bir normlu vektör uzay yani Banach uzay kavramını tanıtmış, fonksiyonel analiz ve modern matematiğin temel yapı taşlarından birini atmıştır.

Hiperbolik metrik uzaylarının tanımını ilk veren matematikçi Mikhail Gromov'dur. 1980'lerde, Gromov, hiperbolik metrik uzaylar (veya Gromov hiperbolik uzayları) kavramını geliştirmiştir. Hiperbolik uzay genel anlamda, negatif eğrilikli geometriye sahip bir uzaydır. Yani, bu uzaylarda üçgenlerin iç açıları toplamı her zaman 180° den küçüktür. Hiperbolik uzaylarda da 2005 yılında Kohlenbach tarafından yapılan tanım, Geobel ve Kirk tarafından verilen hiperbolik uzay tanımına göre daha kısıtlı, Reich ve Shafrir tarafından ortaya atılan hiperbolik uzay tanımından ise daha geneldir. Bu uzay sınıfı; normlu uzayları, Hilbert uzayları, Banach uzayları gibi tüm yapıları içinde barındırır.

Matematiğin tarihsel gelişimine ve literatür taramalarına baktığımızda sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar uzayların genelleştirmeleri üzerinde yoğunlaşmaktadır. Yani sabit nokta kavramı normlu uzaylardan Banach uzaylarına, metrik uzaylardan hiperbolik metrik uzaylara kadar birçok matematiksel yapı üzerinde çalışılmıştır. Sabit nokta teorisi üzerindeki çalışmaların çok yaygın olduğu alanlardan birisi de dönüşümlerin genelleştirmeleridir. Bu dönüşümlerden bazıları daraltan, kesin daraltan, genişlemeyen, quasi genişlemeyen, hemikontraktif, demikontraktif, asimptotik hemikontraktif, asimptotik demikontraktif

dönüşümlerdir. Zaman içerisinde bu dönüşümlerin tanımları farklı yazarlar tarafından verilmiş ve sabit noktaları araştırılmıştır.

Konuyla ilgili literatür taraması yapıldığında hemikontraktif ve demikontraktif dönüşüm kavramlarının ilk olarak 1967 yılında Tae-Hwa Kim tarafından tanımlandığı görülmektedir. Daha sonra birçok yazar tarafından bu kavramların farklı türleri elde edilmiş ve sabit noktaları ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

Bu tezde hemikontraktif, demikontraktif, α -hemikontraktif, asimptotik demikontraktif dönüşüm türlerinin ve bunların sonlu aileleri için oluşturulan açık ve kapalı iterasyon metotlarının yakınsaması üzerine gerekli koşulların araştırılması amaçlanmıştır. Temel lemmalar ve teoremler Hilbert uzaylarında ispatlanacak olup, tezin son kısmında bulunan sonuç bölümünde Hilbert uzaylarından daha genel olan tam hiperbolik uzaylarda bazı sonuçlar verilecektir.

KURAMSAL TEMELLER VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Uzayların Tanımı

Tanım 1: X bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve her λ skaleri için,

- i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- ii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlansın. Bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay denir (Maddox 1970).

Tanım 2: Normlu uzayda alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir (Aktaş 2017).

Örnek 1: $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesi toplama, skalerle çarpma ilemlerine göre bir lineer uzaydır. $\|x\|_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir normdur. Ayrıca bu norma göre $\mathbb{R}^n$ bir reel Banach uzayıdır.

Tanım 3: X bir normlu uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ ve her $x, y \in X$ için $\|x - y\| \geq \varepsilon$ (yani x ve y arasındaki mesafe en az ε kadar büyükse) olduğunda

$$\frac{1}{2} \|x + y\| < 1 - \delta$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine düzgün konveks uzay denir. Eğer normlu uzay tam ise bu uzaya düzgün konveks Banach uzayı denir (Berinde 2007).

Yukarıda tanımda geçen ifade aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

X normlu uzayının düzgün konveks olması için $\Leftrightarrow$

$$\delta(x, \varepsilon) = \inf_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \|x + y\| \right\}$$

şeklinde tanımlanan $\delta: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun her $\varepsilon > 0$ için kesin artan olmasıdır (Ball et al. 1994).

Düzgün konveks uzay, normlu uzay ve konvekslik kavramlarının birleşiminin bir halidir. Böyle uzaylar, özellikle fonksiyonel analiz ve optimizasyon teorisi alanlarında son

derece önemlidir. Burada, δ bir pozitif sayı olup, bu eşitsizliğin sağlanması için gerekli olan bir düzgünlük parametresidir. Bir normlu uzayda birim kürede alınan vektörler arasındaki mesafe büyüdükçe, toplamalarının normunun belirli bir oranla küçülmesini garanti eder. Yani, vektörler arasındaki mesafe ne kadar büyükse, bu vektörlerin toplamının normunun 1 den daha küçük bir değere sıkıştırılması da o kadar güçlü olur. Kabaca söylemek gerekirse düzgün konveks uzaylarda birim yuvarların hiçbir yeri düz değildir.

Örnek 2: l^p ($1 < p < \infty$) ve Hilbert uzayları düzgün konveks Banach uzaylardır.

Tanım 4: X normlu uzayı verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^p \leq \frac{1}{2}\|x\|^p + \frac{1}{2}\|y\|^p - \frac{1}{c^p} \left\| \frac{1}{2}(x-y) \right\|^p$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $c \geq 1$ sabiti varsa X uzayına p -düzgün konveks uzay denir ($2 \leq p < \infty$) (Ball et al. 1994).

Tanım 5: X lineer uzayı üzerinde tanımlanan $\langle ., . \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü,

- i. $\forall x \in X$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii. $\forall x, y \in X$ için, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- iii. $\forall x, y, z \in X$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için, $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$

yukarıdaki şartları sağlarsa $(X, \langle ., . \rangle)$ ikilisine iç çarpım uzayı denir.

Tanım 6: Tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Berinde 2007).

Tanımdan anlaşıldığı gibi bir iç çarpım uzayının Hilbert uzayı olması için gerek ve yeter şart bu uzayda tanımlanan her Cauchy dizisinin yakınsak olmasıdır. Bu durumda her Hilbert uzayı aynı zamanda bir Banach uzayıdır.

Örnek 3: $\langle ., . \rangle: l_2(\mathbb{C}) \times l_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ dönüşümü $l_2(\mathbb{C})$ üzerinde bir iç çarpım olup $l_2(\mathbb{C})$ de bir Hilbert uzayıdır.

Hiperbolik uzay tanımı için literatürde farklı ifadeler olmasına rağmen (Kirk 1982, Goebel and Kirk 1983, Goebel and Reich 1984, Kirk and Martinez-Yanez 1990, Reich and Shafrir 1990, Kohlenbach 2005) bu tez çalışmasında aşağıdaki gibi Kohlenbach (2005) tarafından verilen hiperbolik uzay tanımı dikkate alınacaktır.

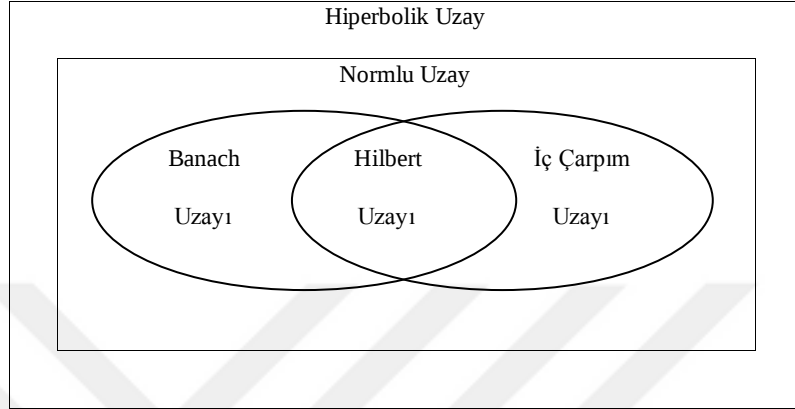
Tanım 7: X bir metrik uzay ve her $x, y, z, w \in X$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $W: X \times X \times [0,1] \rightarrow X$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa (X, d, W) üçlüsüne hiperbolik uzay denir:

- i. $d(z, W(x, y, \alpha)) \leq (1 - \alpha)d(z, x) + \alpha d(z, y);$
- ii. $d(W(x, y, \alpha), W(x, y, \beta)) = |\alpha - \beta| d(x, y);$

- iii. $W(x, y, \alpha) = W(y, x, 1 - \alpha)$;
- iv. $d(W(x, z, \alpha), W(y, w, \alpha)) \leq (1 - \alpha)d(x, y) + \alpha d(z, w)$ (Kohlenbach 2005).

Yukarıdaki tanımın i. şartından dolayı her hiperbolik uzay bir konveks metrik uzaydır fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

Yukarıda tanımlarını verdiğimiz uzayların birbirlerini gerektirme durumlarını aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.



Şekil 1. Uzayların Birbirine Göre Durumu

Tanım 8: X bir hiperbolik uzay olmak üzere her $a \in X, r > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(r, \varepsilon) = \inf_{d(a,x) \leq r, d(a,y) \leq r, d(x,y) \geq r\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{1}{r} d\left(a, \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y\right) \right\} > 0$$

ise X uzayına düzgün konveks hiperbolik uzay denir (Fukhar-ud-Din and Khan 2021).

Tanım 9: X metrik uzayı ve $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in [a, b]$ için,

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|$$

şartı sağlanıyorsa γ ya bir geodezik yol yada kısaca geodezik denir. Yani bir uzaydaki geodezik yol, o uzayda alınan herhangi iki noktayı birleştiren en kısa yoldur (Kirk 2003).

Tanım 10: X metrik uzayında herhangi iki noktayı birleştiren bir geodezik varsa bu uzaya geodezik metrik uzay denir (Kirk 2003).

Tanım 11: X bir geodezik metrik uzay olsun. Her $x, y, z \in X$ ve $\gamma: [0,1] \rightarrow X, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ geodeziği için

$$d^p(z, \gamma(t)) \leq (1 - t)d^p(z, x) + td^p(z, y) - ct(1 - t)d^p(x, y), \quad t \in [0,1]$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $0 < c \leq 1$ sabiti varsa X metrik uzayına p -düzgün konveks metrik uzay denir. Burada $2 \leq p < \infty$ dur (Ohta 2007).

Daha sonra Naor ve Silberman, $1 < p < \infty$ için p -düzgün konveks metrik uzayı aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 12: X bir geodezik metrik uzayın p -düzgün konveks metrik uzay olması için $\Leftrightarrow$ her $x, y, z \in X$ ve $t \in [0,1]$ için

$$d^p(z, (1-t)x \oplus ty) \leq (1-t)d^p(z, x) + td^p(z, y) - \frac{c}{2}t(1-t)d^p(x, y)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Naor and Silberman 2011).

Lemma 1: X bir p -düzgün konveks geodezik metrik uzay ve X kümesindeki her x ve y noktalarını birleştiren tek bir geodezik varsa her p -düzgün konveks geodezik metrik uzay, bir tek geodeziktir (Puiwong and Saejung 2021).

Eğer X tek bir geodezik uzay ise γ , x ve y noktalarını birleştiren bir tek geodezik olmak üzere

$$\gamma(t) = (1-t)x \oplus ty$$

şeklinde yazılır. Eğer (X, d) bir p -düzgün konveks ise böylece sabit bir $z \in X$ için $d^p(x, z)$ fonksiyonu konvektir.

Xu, çalışmalarında yoğun bir şekilde p -düzgün konveks kavramını kullanmıştır (Xu 1991). Daha sonra, Khamsi ve Khan tarafından $p = 2$ için aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 13: X bir hiperbolik uzay ve $x, y, a \in X, r > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\psi(r, \varepsilon) = \inf_{d(a,x) \leq r, d(a,y) \leq r, d(x,y) \geq r\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2}d^2(a, x) + \frac{1}{2}d^2(a, y) - d^2\left(a, \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y\right) \right\}$$

ifade edilsin. Eğer

$$c_M = \min_{r>0, \varepsilon>0} \frac{\psi(r, \varepsilon)}{r^2 \varepsilon^2} > 0$$

ise X hiperbolik uzayına 2-düzgün konveks uzay denir (Khamsi and Khan 2011).

Örnek 4: $CAT(0)$ uzayları, $c_M = \frac{1}{4}$ için bir 2-düzgün konveks hiperbolik uzaydır. Hilbert uzaylar, L^p (veya l^p) ve Sobolev uzayları da birer 2-düzgün konveks hiperbolik uzaylardır (Khamsi and Khan 2011).

Dönüşümlerin Tanımı

Dönüşümlerin tanımında da kullanacağımız sabit noktanın tanımıyla bu kısma başlayalım.

Tanım 14: X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

$$F(T) = \{x \in X: Tx = x\}$$

kümesine T dönüşümünün sabit noktalar kümesi denir.

Örnek 5: X bir metrik uzay, $X = \mathbb{R}$ ve d de X üzerinde alışılmış metrik olsun. $T: X \rightarrow X$, $Tx = x^2 + x - 1$ dönüşümünün sabit noktaları

$$Tx = x \Rightarrow x^2 + x - 1 = x$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

dir.

Tanım 15: X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşümü her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa T ye genişlemeyen dönüşüm denir.

Örnek 6: X bir metrik uzay $X = \mathbb{R}$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü, $Tx = \frac{x}{3} + \frac{1}{7}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $x, y \in X$ ve $y \neq 0$ için,

$$d(T(x), T(y)) = |T(x) - T(y)| = \left| \frac{x}{3} + \frac{1}{7} - \frac{y}{3} - \frac{1}{7} \right| = \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| = \frac{|x - y|}{3} \leq d(x, y)$$

olduğundan T genişlemeyen bir dönüşümdür.

Tanım 16: X metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $f_p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in X$ için

$$d(Tx, f_p) \leq d(x, f_p)$$

ise, T ye quasi genişlemeyen dönüşüm denir (Petryshyn and Williamson 1973).

Sabit noktaya sahip olan genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda quasi genişlemeyen bir dönüşümdür fakat tersi doğru değildir.

Örnek 7: $T = [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ dönüşümü,

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x = 0$ noktası $Tx = x$ eşitliğini sağladığından dolayı T nin sabit noktasıdır. Her $x \in [0, 2]$ için,

$$d(Tx, 0) = |Tx - 0| \leq |x - 0| = d(x, 0)$$

olduğundan T quasi genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat T dönüşümü $x = 2$ noktasında sürekli olmadığından genişlemeyen bir dönüşüm değildir.

Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere her genişlemeyen dönüşüm sürekli iken quasi genişlemeyen bir dönüşüm sürekli olmak zorunda değildir. Bu tür dönüşümler sadece sabit noktalar kümesi üzerinde süreklidir.

Tanım 17: H bir Hilbert uzayı ve $T: H \rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in H$ için,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|x - y - Tx + Ty\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $k < 1$ sabiti varsa T dönüşümüne Browder-Petryshyn tipli k -kesin sözde-daraltan dönüşüm denir. Yukarıdaki eşitsizlik $k = 1$ için sağlanırsa bu T dönüşümüne sözde-daraltan denir (Browder and Petryshyn 1966).

Örnek 8: $T: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü,

$$T(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ x - 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

olarak verilsin. Burada T dönüşümü sözde-daraltandır (Gürsaç 2019).

Tanım 18: X bir reel normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. $\forall x, y \in X$ için,

$$\|x - y\| \leq \|(1 + r)(x - y) - rk(Tx - Ty)\|$$

eşitsizliği her $r > 0$ ve bazı $k > 1$ için sağlanıyorsa bu dönüşüme güçlü sözde-daraltan dönüşüm denir (Osilike 1996).

Tanım 19: C , X normlu lineer uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in C$ için,

$$\|Tx - Ty\|^p \leq \|x - y\|^p + k\|(I - T)x - (I - T)y\|^p \quad (1)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $p > 0$ ve $k \in [0, \infty)$ sabitleri varsa T dönüşümüne genelleştirilmiş sözde daraltan denir (Huang 2007).

Yukarıdaki tanımda eğer $k = 0$ alınırsa,

$$\|Tx - Ty\|^p \leq \|x - y\|^p \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

elde edilir. Dolayısıyla T dönüşümü genişlemeyen bir dönüşüme karşılık gelir. Ayrıca yukarıdaki tanımda geçen eşitsizliğin $p = 2$ için Browder-Petryshyn tipli k -kesin sözde-daraltan dönüşüme karşılık geldiği açıkça görülmektedir.

Demikontraktif dönüşüm sınıfları, genişlemeyen tip dönüşümlerin en genel sınıflarından birini oluşturur. Maruşter, Hicks ve Kubicek birbirlerinden bağımsız olarak demikontraktif dönüşüm sınıflarının tanımlarını vermişlerdir. 1977 yılında Hicks ve Kubicek, aşağıda demikontraktif dönüşüm sınıfının tanımını vermiştir. Diğer yandan Maruşter, 1973 de $\mathbb{R}^n$ de ve 1977 de Hilbert uzaylarında farklı bir isimle ve farklı bir yolla demikontraktif dönüşümlerin tanımını vermiştir (Maruşter 1973, Maruşter 1977, Hicks and Kubicek 1977).

Tanım 20: C, H Hilbert uzayının konveks kapalı bir alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ bir dönüşümü olsun. Ayrıca $F(T) \neq \emptyset$ verilsin. Eğer her $f_p \in F(T)$ ve $x \in C$ için,

$$\langle x - Tx, x - f_p \rangle \geq \lambda \|Tx - x\|^2 \quad (2)$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sabiti varsa T dönüşümü (A) şartını sağlıyor denir (Maruşter 1977).

Tanım 21: C, X normlu lineer uzayının bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ ye bir dönüşüm olsun. $F(T) \neq \emptyset$, her $f_p \in F(T)$ ve $x \in C$ için,

$$\|Tx - f_p\|^2 \leq \|x - f_p\|^2 + k\|x - Tx\|^2 \quad (3)$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ bir sabit var ise bu dönüşüme demikontraktif dönüşüm denir (Maruşter 1977, Hicks and Kubicek 1977).

Yukarıdaki iki tanımdan ilki Maruşter tarafından ilk olarak verildiği için ilk önce bu tanıma yer verilmiştir. Sonraki yirmi yılda Profesör Chidume'nin öğrencisi olan Moore tarafından Hilbert uzaylarında (2) ve (3) dönüşümlerin tanımlarının yapıldığı çalışmalar görülebilir. Burada

$$\|x - f_p\|^2 + k\|x - Tx\|^2 - \|Tx - f_p\|^2 = 2\langle x - Tx, x - f_p \rangle - (1 - k)\|x - Tx\|^2$$

olup (3) den her $f_p \in F(T)$ ve $x \in C$ için

$$\|x - f_p\|^2 + k\|x - Tx\|^2 - \|Tx - f_p\|^2 \geq 0$$

yazılır. (2) den her $f_p \in F(T)$ ve $x \in C$ için

$$\langle x - Tx, x - f_p \rangle \geq \lambda \|Tx - x\|^2$$

eşitsizliği $\lambda = \frac{1-k}{2} > 0$ ile (3) eşitsizliğine denktir (Berinde 2023).

Örnek 9: $X = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1] \subset X$ alt kümesi alınsın. $T: C \rightarrow C$ bir dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $F(T) = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ olup T dönüşümü bir demikontraktif dönüşümdür (Naimpally and Singh 1983).

2011 yılında Maruster ve arkadaşları Hilbert uzayında bu yeni dönüşüm sınıfı olan α demikontraktif kavramını tanıtmış ve bazı güçlü yakınsama teoremleri elde etmişlerdir.

Tanım 22: C boştan farklı bir küme, $T: C \rightarrow C$ ye bir dönüşüm olsun. Her $x \in C$, $f_p \in F(T)$ için,

$$\|Tx - \alpha f_p\|^2 \leq \|x - \alpha f_p\|^2 + k\|x - Tx\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $k \in [0,1)$ ve $\alpha \geq 1$ sabitleri varsa T dönüşümüne α -demikontraktif dönüşüm denir (Măruşter 2011).

Eğer T bir α -demikontraktif dönüşüm ise o zaman αf_p , T nin bir sabit noktasıdır. Çünkü

$$\begin{aligned} \|Tx - \alpha f_p\|^2 &\leq \|x - \alpha f_p\|^2 + k\|x - Tx\|^2 \\ \Rightarrow \|T\alpha f_p - \alpha f_p\|^2 &\leq \|\alpha f_p - \alpha f_p\|^2 + k\|\alpha f_p - T\alpha f_p\|^2 \\ \Rightarrow \|T\alpha f_p - \alpha f_p\|^2 &\leq k\|\alpha f_p - T\alpha f_p\|^2 \\ \Rightarrow (1 - k)\|T\alpha f_p - \alpha f_p\|^2 &\leq 0 \\ \Rightarrow T\alpha f_p &= \alpha f_p \end{aligned}$$

yazılır.

Her demikontraktif dönüşüm, $\alpha = 1$ ile bir α -demikontraktif dönüşümdür. Ancak tersi doğru değildir.

Örnek 10: $X = \mathbb{R}$ ve $C = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, X 'in sınırlı alt kümesi $T: C \rightarrow C$ bir dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} x - 2.5\left(x - \frac{1}{4}\right), & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $k = 0.2$ ve $p = \frac{1}{4}$ ile T bir demikontraktif dönüşümdür. $\alpha = 1.5$ için,

$$Tx = \begin{cases} x - 2.5(x - \alpha p), & 0 \leq x \leq \alpha p \\ \alpha p, & \alpha p < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde verilen T , α -demikontraktif dönüşüm olur.

2015 yılında Maruşter ve Rus aşağıdaki koşullarla güçlü demikontraktif dönüşümlerin bir sınıfını tanıtmıştır.

Tanım 23: C boştan farklı bir küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in C, f_p \in F(T)$ için,

$$\|Tx - f_p\|^2 \leq \alpha \|x - f_p\|^2 + k \|x - Tx\|^2,$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\alpha \in (0,1)$, $k \in [0,1)$ sabitleri varsa T dönüşümüne güçlü demikontraktif dönüşüm denir (Maruster and Rus 2015).

Tanım 24: C , X normlu lineer uzayının bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in C$ ve $f_p \in F(T)$ için,

$$\|Tx - f_p\|^2 \leq \|x - f_p\|^2 + \|x - Tx\|^2$$

eşitsizliği sağlanırsa T dönüşümüne hemikontraktif dönüşüm denir.

Demikontraktif bir dönüşümün $k = 1$ için hemikontraktif dönüşümü vereceği açık olarak görülmektedir.

Tanım 25: C , X normlu bir lineer uzayının bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in C$ ve $f_p \in F(T) \neq \emptyset$ için,

$$\|Tx - f_p\|^p \leq \|x - f_p\|^p + k \|x - Tx\|^p \quad (4)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $p > 0$ ve $\theta \in [0, \infty)$ sabitleri varsa T dönüşümüne genelleştirilmiş hemikontraktif dönüşüm denir (Huang 2007).

Osilike ve arkadaşları yakın zamanda α -hemikontraktif kavramını tanıtmış ve Hilbert uzayda Ishikawa iterasyon yöntemini kullanarak bu dönüşüm sınıfıyla ilgili bazı güçlü yakınsama teoremlerini elde etmişlerdir.

Tanım 26: C, X Hilbert uzayının bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in C, f_p \in F(T)$ için,

$$\|Tx - \alpha f_p\|^2 \leq \|x - \alpha f_p\|^2 + \|x - Tx\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\alpha \geq 1$ sayısı varsa T dönüşümüne α -hemikontraktif dönüşüm denir (Osilike and Onah 2015).

Her hemikontraktif dönüşüm $\alpha = 1$ ile bir α -hemikontraktif dönüşümdür. Ancak tersi doğru değildir. Ayrıca her α -demikontraktif dönüşüm aynı zamanda bir α -hemikontraktif dönüşümdür. Fakat bunun da tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 11: $X = \mathbb{R}$ ve $C = [1,4]$, X 'in sınırlı alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} x^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T dönüşümü, $\alpha = 2$ ile bir α -hemikontraktif dönüşümdür.

Örnek 12: $X = \mathbb{R}$ ve $C = (-\infty, 1)$ olarak alalım. $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x}{x-1}, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Bu durumda T dönüşümü hem hemikontraktif hem de $\alpha > 1$ için α -hemikontraktif dönüşümdür. Fakat T dönüşümü ne demikontraktif ne de α -demikontraktif dönüşümdür (Osilike and Isiogugu 2005).

Tanım 27: C , X normlu lineer uzayının bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in C$ için,

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|$$

eşitsizliği $L > 0$ sayısı için sağlanıyorsa T dönüşümüne Lipschitzian dönüşüm denir.

Yukarıda tanımlanan dönüşüm sınıflarıyla ilgili aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

- (i) Eğer (1) ve (4) deki dönüşümlerde $p = 1$ ve $k = 0$ alınırsa sırasıyla genişlemeyen ve quasi-genişlemeyen dönüşümler elde edilir.
- (ii) Eğer X bir Hilbert uzayı ve $p = 2$ ve $k \in [0, 1)$ alınırsa, (1) ve (4) deki dönüşümler Browder ve Petryshyn tipi kesin sözde-daraltan ve demikontraktif dönüşümler olur.
- (iii) Eğer X bir Hilbert uzayı ve $p = 2$ ve $k = 1$ alınırsa, (1) ve (4) deki dönüşümler sırasıyla sözde-daraltan ve hemikontraktif dönüşümler olur.

Yukarıda tanımlarını verdiğimiz dönüşüm sınıflarının aralarındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

Genişlemeyen	$\Rightarrow$	Quasi Genişlemeyen
$\Downarrow$		$\Downarrow$
Güçlü Sözde Daraltan	$\Rightarrow$	Demikontraktif $\Rightarrow \alpha$ -Demikontraktif
$\Downarrow$		$\Downarrow$ $\Downarrow$
Sözde Daraltan	$\Rightarrow$	Hemikontraktif $\Rightarrow \alpha$ -Hemikontraktif
$\Downarrow$		$\Downarrow$
Genelleştirilmiş Sözde Daraltan	$\Rightarrow$	Genelleştirilmiş Hemikontraktif

Şekil 2. Dönüşümler arasındaki ilişki

Tanım 28: C , X normlu uzayın boştan farklı bir alt kümesi, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $n \in N$, $x \in C$ ve $f_p \in F(T)$ için,

$$\|T^n x - f_p\|^2 \leq a_n^2 \|x - f_p\|^2 + k \|x - T^n x\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $k \in [0,1)$ sabiti ve $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) < \infty$ şartını sağlayan $\{a_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa T dönüşümüne asimptotik demikontraktif dönüşüm denir (Qihou 1996).

Bu eşitsizlikte $k = 0$ alınırsa T dönüşümüne asimptotik quasi genişlemeyen denir.

Tanım 29: C , X normlu uzayın boştan farklı bir alt kümesi, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $n \in N$, $x \in C$ ve $f_p \in F(T)$ için,

$$\|T^n x - f_p\|^2 \leq a_n \|x - f_p\|^2 + \|x - T^n x\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) < \infty$ şartını sağlayan $\{a_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa T dönüşümüne asimptotik hemikontraktif dönüşüm denir (Qihou 1996).

Tanım 30: C , X normlu uzayın bir alt kümesi, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $n \in N$ ve $x \in C$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L \|x - y\|$$

eşitsizliği $L > 0$ sayısı için sağlanıyorsa T dönüşümüne düzgün L -Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 31: H bir Hilbert uzay ve C de H 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $z \in C$ için

$$\|y - z\| \leq \|z - x\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $y \in C$ noktası varsa y, x in C üzerine bir metrik projeksiyonu olarak adlandırılır ve $P_C x$ ile gösterilir. Eğer her $x \in H$ için $P_C x$ var ve tekse $P_C: H \rightarrow C$ operatörü (C üzerinde) metrik projeksiyonu olarak isimlendirilir (Rudin 1991).

Tanım 32: (i) C, X normlu uzayın bir alt kümesi, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm ve $\{x_n\}, C$ de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf ve $\{Tx_n\}$ dizisi de 0 a güçlü yakınsak iken $Tx = 0$ ise T dönüşümü 0 da yarı-kapalıdır denir.

(ii) C, X normlu uzayın bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer C deki herhangi bir sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olacak şekilde C de f_p noktasına yakınsayacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi varsa T ye yarı-kapalı dönüşüm denir.

Hilbert uzaylarda asimptotik demikontraktif ve asimptotik hemikontraktif dönüşümlerin sınıfları 1987 yılında Liu tarafından verilmiştir. Liu, Schu'nun sonuçlarını genelleştirmiş ve Hilbert uzaylarında düzgün L –Lipschitzian güçlü asimptotik demikontraktif dönüşümler ve düzgün L –Lipschitzian k -kesin güçlü asimptotik sözde daraltan dönüşümler için Mann iterasyon metodunu kullanarak bazı yakınsama sonuçları ispatlamıştır. Bununla birlikte, Osilike 1998'de Liu'nun sonuçlarını daha genel p -düzgün konveks Banach uzaylarına genişletmiştir.

Araştırmanın Önemi ve Gerekçesi

Bu çalışmada, klasik Banach Sabit Nokta Teoremi'nin ifade edildiği daraltan dönüşüm sınıflarının ötesine geçilerek bu tür dönüşümleri ve farklı genelleştirmelerini kapsayan hemikontraktif ve demikontraktif dönüşüm türleri ve bunların farklı sınıfları tanıtılacak. Oluşturacağımız yeni iterasyon metotlarını kullanarak bu dönüşüm sınıfları için bazı yakınsama teoremlerini ispatlayacağız. Ayrıca Hilbert uzayda veya Banach uzayda bilinen bir teoremin metrik uzaya genelleştirmesi son derece önemli olduğundan bu uzaylarda elde edilen sonuçların metrik uzaydaki versiyonları ifade edilecektir. Böylece elde edilecek olan bulgular ve sonuçlarla literatüre yeni bir bakış açısı kazandırılacaktır.

Tez Öneri Konusunun Enstitü ve Ana Bilim Dalı Öncelikli Araştırma Alanlarıyla İlişkisi

Tez önerisi olarak ele aldığımız “Hemikontraktif ve Demikontraktif Dönüşüm Sınıfları” Matematik bilim dalında Sabit Nokta Teorisi alanıyla ilgilidir.

MATERYAL VE METOD

Bu bölümde öncelikle açık (explicit) ve kapalı (implicit) iterasyon metotları ile ilgili yapılan çalışmalara değinilecektir ve daha sonra çalışmamızın temel sonuçlarını ispatlamak için kullanacağımız yardımcı teoremlere yer verilecektir.

Mann iterasyon metodu üzerinden açık ve kapalı iterasyonları açıklamaya çalışalım. X bir normlu uzay ve C de X in boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \rightarrow C$ dönüşümü $x_0 \in C$ başlangıç noktası ve $[0,1]$ aralığındaki $\{\alpha_n\}$ dizisi için

$$(\text{Açık}) \text{ Mann iterasyon metodu: } x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n$$

$$\text{Kapalı Mann iterasyon metodu: } x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_{n+1}$$

şeklinde tanımlanır. Birinci iterasyonumuzda $n = 0$ alındığında $x_1 = (1 - \alpha_0)x_0 + \alpha_0 T x_0$ ifadesinden T dönüşümünü, $\{\alpha_n\}$ dizisini ve x_0 noktasını bildiğimiz için bu eşitliğin sağ tarafında bilinen değerler yerine koyulup gerekli cebirsel işlem yapılarak x_1 bulunur. Her $n \in \mathbb{N}$ için bu işlem devam ettirilerek $\{x_n\}$ dizisi olan Mann iterasyonu elde edilir. Yukarıdaki ikinci iterasyonda $n = 0$ alındığında ise $x_1 = (1 - \alpha_0)x_0 + \alpha_0 T x_1$ eşitliğini elde ederiz. Burada x_0 başlangıç noktasından hareketle x_1 değerini elde edebilmek için bu denklemi çözmemiz gerekiyor. Çünkü elde etmek istediğimiz x_1 değeri bu eşitliğin hem sol hem de sağ tarafında yer almaktadır. Dolayısıyla birinci iterasyonda farklı olarak, kapalı Mann iterasyonu $\{x_n\}$ dizisini elde edebilmek için her adımda karşılaşacağımız denklemi çözüp iterasyonun bir sonraki adımını bulmamız gerekiyor.

Açık iterasyon metotları

Genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasını çalışmak için, 1966 yılında Browder ve Petryshyn tarafından tanımlanan asimptotik regülerlik kavramını tekrar hatırlayalım.

Tanım 33: Bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı T dönüşümü, eğer her $x \in X$ için $T^{n+1}x - T^n x \rightarrow 0$ şeklinde X 'te kuvvetli yakınsaksa, T dönüşümüne X üzerinde **asimptotik regülerdir** denir (Browder and Petryshyn 1966).

Krasnoselskij, eğer T dönüşümü genişlemeyen bir dönüşüm ise (ki bu durum, genel olarak asimptotik regülerliği sağlamaz) $\lambda \in [0,1]$ için

$$T_\lambda := (1 - \lambda)I + \lambda T,$$

dönüşümünü T ye göre ortalı dönüşüm olarak tanımlamıştır. Bu durumda

- (i) T_λ genişlemeyen bir dönüşümdür;
- (ii) $Fix(T) = Fix(T_\lambda)$;
- (iii) T_λ asimptotik regülerdir (Krasnoselskij 1955).

Sabit nokta teorisi açısından bakıldığında, (ii) ve (iii) maddeleri, ortalı dönüşüm T_λ 'nın, orijinal dönüşüm T 'den daha güçlü veya daha avantajlı olduğunu gösterirken, (i) maddesi ise her iki dönüşümün de aynı sabit noktalara sahip olduğunu belirtir. Bu durum, iterasyon yöntemleri için önemli bir fayda sağlar. Orijinal dönüşüm T 'nin sabit noktasını doğrudan bulmak zor olabilir, ama daha düzenli ve iyi özelliklere sahip olan T_λ dönüşümünü kullanarak bu sabit nokta yaklaşık olarak bulunabilir.

Örneğin, sabit nokta kümesi boş olmayan $F(T) \neq \emptyset$ bir genişlemeyen T dönüşümü için, T 'ye karşılık gelen Picard iterasyonu, yani $\{x_n = T^n x\}$, genel olarak yakınsamaz; hatta yakınsasa bile, limit noktası T 'nin bir sabit noktası olmayabilir. Buna karşılık, T_λ 'ya karşılık gelen Picard iterasyonu, yani $\{y_n = T_\lambda^n x\}$, Krasnoselskij'nin makalesinde verilen türden uygun varsayımlar altında, T 'nin bir sabit noktasına yakınsar.

Lemma 2: H bir Hilbert uzayı ve $C \subset H$ kapalı ve konveks bir küme olsun. Eğer $T: C \rightarrow C$ dönüşümü k -demikontraktif ise, o zaman T 'nin Krasnoselskij pertürbasyonu olan T_λ , $(1 + k/\lambda - 1/\lambda)$ -demikontraktif olur (Berinde 2023).

İspat: Her $x \in C$ ve $f_p \in F(T)$ için

$$\|Tx - f_p\|^2 \leq \|x - f_p\|^2 + k\|x - Tx\|^2,$$

olacak şekilde $k < 1$ sabiti vardır. Yukarıdaki eşitsizlik her $x \in C$ ve $f_p \in F(T)$ için

$$\langle Tx - x, x - f_p \rangle \leq \frac{k-1}{2} \cdot \|x - Tx\|^2,$$

ifadesini gerektirir. Dolayısıyla her $x \in C$ ve $f_p \in F(T)$ için,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda x - f_p\|^2 &\leq \|\lambda(Tx - x) + x - f_p\|^2 = \|x - f_p\|^2 + 2\lambda\langle Tx - x, x - f_p \rangle + \lambda^2\|Tx - x\|^2 \\ &\leq \|x - f_p\|^2 + (\lambda^2 + \lambda k - \lambda)\|Tx - x\|^2 \\ &= \|x - f_p\|^2 + \frac{(\lambda^2 + \lambda k - \lambda)}{\lambda^2} \|T_\lambda x - x\|^2 \end{aligned}$$

olur. Bu ise, $k, \lambda \in (0,1)$ ve $0 < 1 + k/\lambda - 1/\lambda < 1$ olduğu için T_λ 'nın $(1 + k/\lambda - 1/\lambda)$ -demikontraktif olduğunu gösterir.

Lemma 3: H reel bir Hilbert uzayı ve $C \subset H$ kapalı ve konveks bir küme olsun. Eğer $T: C \rightarrow C$ dönüşümü k -demikontraktif ise, bu durumda keyfi $\lambda \in (0, 1 - k)$ için, T_λ quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür (Berinde 2023).

İspat: Her $x \in C$ ve $f_p \in F(T)$ için, Lemma 2'nin ispatından aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir

$$\|T_\lambda x - f_p\|^2 = \|x - f_p\|^2 + \frac{(\lambda^2 + \lambda k - \lambda)}{\lambda^2} \|T_\lambda x - x\|^2.$$

Böylece, eğer

$$\lambda^2 + \lambda k - \lambda < 0,$$

yani

$$\lambda < 1 - k,$$

ise, yukarıdaki eşitsizlikten $x \in C$, $f_p \in F(T)$ için

$$\|T_\lambda x - f_p\|^2 = \|x - f_p\|^2$$

elde edilir. Dolayısıyla, T_λ quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür.

Farklı dönüşüm sınıflarının ifade edilmesi ile birlikte bu dönüşümlerin sabit noktasını elde etmek için doğal olarak farklı iterasyon metotlarına ihtiyaç duyulmuştur. Yani, daraltan bir dönüşümün sabit noktasına Picard iterasyonu yakınsarken genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktasına bu iterasyonun yakınsaması gerekmez.

Demikontraktif dönüşümlerin tanımlarını birbirlerinden bağımsız olarak ifade eden Maruşter, Hicks ve Kubicek Mann iterasyon metodunu kullanarak aşağıdaki teoremleri ispatlamışlardır.

Teorem 1: C , bir Hilbert uzayın konveks, kapalı alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ dönüşümü;

- i) $F(T) \neq \emptyset$,
- ii) T , k katsayılı demikontraktif bir dönüşüm,
- iii) Eğer herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf ve $\{(I - T)x_n\}$ dizisi 0 a güçlü yakınsak iken $(I - T)x = 0$ dir.

şartları sağlansın. Böylece $\alpha_n \rightarrow a$ ve $0 < a < 1 - k$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T 'nin sabit noktasına zayıf yakınsar (Hicks and Kubicek 1977).

Teorem 2: C , bir Hilbert uzayın konveks, kapalı alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ lineer olmayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü (A) şartını sağlasın ve $I - T$ dönüşümü 0 da yarı kapalı olsun. Bu durumda $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 2\lambda$ olmak üzere (5) tarafından tanımlanan iterasyon metodu C kümesinde yer alır ve $\{x_n\}$ dizisi T 'nin sabit noktasına zayıf yakınsar (Maruşter 1977).

2023 yılında Berinde, yukarıda ifade edilen Teorem 1 ve Teorem 2 yi birleştirerek aşağıdaki sonucu ispatlamıştır.

Teorem 3: C , bir Hilbert uzayın konveks, kapalı alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ lineer olmayan bir demikontraktif dönüşüm olsun. Ayrıca $I - T$ dönüşümü yarı kapalı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 < a < b < 1$ ve $\alpha_n \in [a, b]$ olmak üzere (5) tarafından tanımlanan iterasyon metodu T 'nin sabit noktasına zayıf yakınsar (Berinde 2023).

Ayrıca yazar bazı ek şartlar altında Hilbert uzaylarda aynı dönüşüm sınıfı için (5) iterasyon metodunun güçlü yakınsamasını göstermiştir. Daha sonra Chidume, Hilbert uzaylarında iç çarpım yerine dual çifti kullanarak Banach uzaylarında da demikontraktif dönüşümlerin sınıfını ifade etmiş ve çalışmıştır (Chidume 1986).

Son yirmi yılda pek çok araştırmacı Lipchitz sözde-daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için Mann iterasyon metodunu kullanmışlardır. Hilbert uzaylarında elde edilen sonuçlar daha genel Banach uzaylarına genelleştirilmiştir (Schu 1991, Xu and Roach 1992, Chidume 1987, Chidume 1994, Chidume 1998, Chidume and Moore 1999, Chidume and Osilike 1995, Chidume and Mutangadura 2001, Cho et al. 2010).

1974 yılında Ishikawa, Mann iterasyonundan daha genel olan ve uygun şartlar altında T dönüşümünün sabit noktasına yakınsayan bir iterasyon metodu ifade etti.

Teorem 4: C , bir Hilbert uzayın konveks, kompakt alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ Lipschitz sözde-daraltan dönüşüm olsun. $x_0 \in C$ başlangıç noktası verilsin. Ayrıca $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri için;

- i) $0 \leq \alpha_n, \beta_n \leq 1$,
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$
- iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty$,

şartları sağlansın. Böylece

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n T y_n + (1 - \alpha_n) x_n, \\ y_n = \beta_n T x_n + (1 - \beta_n) x_n, \end{cases} \quad (6)$$

şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T 'nin sabit noktasına güçlü yakınsar.

Rhoades aşağıdaki örneği dönüşümler arasındaki kapsama için vermiştir (Rhoades 1976).

Örnek 12: $X = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$Tx = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

şeklinde tanımlansın. T dönüşümü Lipschitz değildir. Dolayısıyla genişlemeyen bir dönüşüm de değildir (Schu 1991). Fakat T dönüşümü sözde-daraltan bir dönüşümdür (Xu and Roach 1992).

1990 yılında Qihou, yukarıdaki teoremi Lipschitz hemikontraktif dönüşümlerin sınıfına genişletmiş ve aşağıdaki sonucu ispatlamıştır.

Teorem 5: C , bir Hilbert uzayın konveks, kompakt alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ sürekli bir hemikontraktif dönüşüm olsun. T 'nin sabit noktalarının sayısının sonlu olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 4 de verilen Ishikawa iterasyon metodu $\{x_n\}$, T 'nin sabit noktasına yakınsar (Qihou 1990).

1997 yılında Xu, hatalı Mann ve hatalı Ishikawa iterasyon metotlarından hareketle burada kullanılan şartlara göre daha anlamlı olan aşağıdaki Xu'ya göre hatalı Mann ve hatalı Ishikawa iterasyon metotlarını ifade etmiştir.

C , bir X normlu uzayının boştan farklı alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Böylece $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$, C de sınırlı diziler ve $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n = 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T x_n + \gamma_n u_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

algoritmasına Xu'ya göre hatalı Mann,

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T y_n + \gamma_n u_n, \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n + \gamma'_n v_n, \end{cases} \quad (8)$$

algoritmasına ise Xu'ya göre hatalı Ishikawa iterasyon metodu denir.

1999 yılında Chidume ve Moore, Hilbert uzaylarında sürekli hemikontraktif dönüşümlerin sabit noktasına (8) iterasyon metodunun yakınsadığını göstermişlerdir.

Yukarıdaki iterasyon metotlarından esinlenerek Owojori tarafından tanımlanan aşağıdaki algoritmalar tanımlanmıştır:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T y_n + \gamma_n u_n, \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T z_n + \gamma'_n v_n, \\ z_n = \alpha''_n x_n + \beta''_n T z_n + \gamma''_n w_n, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T y_n + \gamma_n S x_n, \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T z_n + \gamma'_n v_n, \\ z_n = \alpha''_n x_n + \beta''_n T z_n + \gamma''_n w_n. \end{cases} \quad (10)$$

(9) daki iterasyon metodu sürekli hemikontraktif T dönüşümünün sabit noktasını, (10) daki iterasyon metodu ise düzgün sürekli hemikontraktif T ve S dönüşümlerinin sabit noktasını bulmak için kullanılmıştır.

Kapalı iterasyon metotları

2007 yılında Rafiq, reel Hilbert uzaylarında hemikontraktif dönüşümler için (11) deki gibi Mann tipi kapalı iterasyon yöntemini ifade etmiş ve aşağıdaki sonucu ispatlamıştır.

Bu iterasyon şeması;

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (11)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Rafiq 2007).

Teorem 6: C , reel Hilbert uzayı H 'nin kompakt, konveks bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir hemikontraktif dönüşüm olsun. $[0,1]$ kapalı aralığında yer alan $\{a_n\}$ dizisi bazı $\delta \in (0,1)$ için $\{a_n\} \subset [\delta, 1 - \delta]$ şartını sağlasın. Herhangi $x_1 \in C$ için (11) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T 'nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Rafiq 2007).

Daha sonra Song, reel Banach uzaylarda sürekli sözde-daraltan dönüşümlerin sabit noktasına (10) iterasyon yönteminin güçlü yakınsamasını ispatlamıştır (Song 2007).

Teorem 7: C , reel Hilbert uzayı H 'nin kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ sabit noktalar kümesi boş kümeden farklı bir demikontraktif dönüşüm olsun. Ayrıca $I - T$ dönüşümü 0 da yarı-kapalı ve bazı $\alpha > 1$ için T dönüşümü α -demikontraktif olsun. $[0,1]$ kapalı aralığında yer alan $\{a_n\}$ dizisi bazı $\delta \in (0,1)$ için $\{a_n\} \subset [\delta, 1 - \delta]$ şartını sağlasın. Herhangi $x_1 \in C$ için (11) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T 'nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Das and Diwan 2018).

2013 yılında Hussain ve arkadaşları aşağıdaki iterasyon şemasını kullanarak sürekli hemikontraktif dönüşümlerin bir ailesi için yakınsama sonucu elde etmişlerdir.

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_n = \gamma_n x_{n-1} + \sum_{i=1}^m \delta_n^i T_i x_n \end{cases} \quad (12)$$

Teorem 8: C, H Hilbert uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $T_i: C \rightarrow C$ sürekli hemikontraktif dönüşümlerin bir ailesi olsun. $\{\gamma_n\}, \{\delta_n^i\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında bulunmak üzere bazı $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\gamma_n\}, \{\delta_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ve $\gamma_n + \sum_{i=1}^m \delta_n^i = 1$ olsun. O zaman keyfi $x_0 \in C$ için (12) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, $\bigcap_{i=1}^m F(T_i) \neq \emptyset$ kümesindeki ortak sabit noktaya güçlü bir şekilde yakınsar (Hussain et al. 2013).

2018 yılında Diwan ve arkadaşları yukarıda tanımlanan (12) iterasyonunu kullanarak Hilbert uzaylarında sürekli α -demikontraktif dönüşümlerin ailesi için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 9: C, H Hilbert uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $T_i: C \rightarrow C$ sürekli α -demikontraktif dönüşümlerin bir ailesi olsun. $\{\gamma_n\}, \{\delta_n^i\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında bulunmak üzere bazı $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\gamma_n\}, \{\delta_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ve $\gamma_n + \sum_{i=1}^m \delta_n^i = 1$ olsun. O zaman keyfi $x_0 \in C$ için (12) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, $\bigcap_{i=1}^m F(T_i) \neq \emptyset$ kümesindeki ortak sabit noktaya güçlü bir şekilde yakınsar (Diwan, Das and Dashputre 2018).

2022 yılında da Joseph ve arkadaşları, Diwan ve arkadaşları tarafından hemikontraktif ve α -demikontraktif dönüşüm sınıfları için elde edilen sonuçları genelleştirerek daha genel bir sınıf olan α -hemikontraktif dönüşümler üzerine aşağıdaki sonucu ispatlamışlardır.

Teorem 10: C, H Hilbert uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $T_i: C \rightarrow C$ sürekli α -hemikontraktif dönüşümlerin bir ailesi olsun. $\{\gamma_n\}, \{\delta_n^i\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında bulunmak üzere bazı $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\gamma_n\}, \{\delta_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ve $\gamma_n + \sum_{i=1}^m \delta_n^i = 1$ olsun. O zaman keyfi $x_0 \in C$ için (12) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, $\bigcap_{i=1}^m F(T_i) \neq \emptyset$ kümesindeki ortak sabit noktaya güçlü bir şekilde yakınsar (Joseph et al. 2022).

Teorem 11: C, H Hilbert uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $T_i: C \rightarrow C$ sürekli α -hemikontraktif dönüşümlerin bir ailesi olsun. $\{\gamma_n\}, \{\delta_n^i\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında bulunmak üzere bazı $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\gamma_n\}, \{\delta_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ve $\gamma_n + \sum_{i=1}^m \delta_n^i = 1$ olsun. Ayrıca $P_K: H \rightarrow K$ bir projeksiyon operatörü olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_n = P_K(\gamma_n x_{n-1} + \sum_{i=1}^m \delta_n^i T_i x_n) \end{cases} \quad (13)$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, $\cap_{i=1}^m F(T_i) \neq \emptyset$ kümesindeki ortak sabit noktaya güçlü bir şekilde yakınsar (Joseph et al. 2022).

Asimptotik dönüşümler için kullanılan iterasyonlar

1996 yılında Qihou, asimptotik demikontraktif dönüşümlerin sınıfları için aşağıdaki yakınsama teoremini ispatladı.

Teorem 12: C, H Hilbert uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ tamamen sürekli, düzgün L -Lipschitzian asimptotik demikontraktif dönüşüm olsun. Burada $\{a_n\}$ dizisi, $a_n \in [1, +\infty)$, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 - 1) < +\infty$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon \leq a_n \leq 1 - k - \varepsilon$ şartlarını sağlasın. Bu durumda

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n x_n \end{cases} \quad (14)$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, T nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Qihou 1996).

Osilike, asimptotik demikontraktif dönüşümlerin sınıfı için Qihou'nun sonuçlarını daha genel q -düzgün smooth Banach uzaylarına ($1 < q < \infty$) genelleştirmiştir (Osilike 1998). Osilike ve Aniagbosor, Osilike'nin C kümesi üzerinde koymuş olduğu sınırlılık şartının düşürebileceğini ispatlamışlardır (Osilike and Aniagbosor 2001). Moore ve Nnoli ise düzgün L -Lipschitzian ve asimptotik demikontraktif bir dönüşümün sabit noktasına gerekli ve yeterli şartlar altında Mann iterasyonunun güçlü yakınsamasını göstermişlerdir (Moore and Nnoli 2005).

C , bir X normlu uzayının boştan farklı alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun.

Böylece $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$, C de sınırlı diziler ve $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n = 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T^n x_n + \gamma_n u_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

hatalı Mann,

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T^n y_n + \gamma_n u_n, \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T^n x_n + \gamma'_n v_n, \end{cases}$$

hatalı Isikawa iterasyon metotları kullanılarak pek çok yazar çeşitli araştırmalar yapmışlardır. Igbokwe, Banach uzaylarında tanımlı tamamen sürekli, düzgün L -Lipschitzian asimptotik demikontraktif dönüşümün sabit noktasına yukarıda tanımlanan hatalı Ishikawa iterasyonunun yakınsadığını göstermiştir (Igbokwe 2002). Daha sonra Cho ve arkadaşları 2002 yılında, Igbowke'nin teoremlerindeki şartlarını genelleştirerek normlu uzaylarda,

düzgün L -Lipschitzian asimptotik demikontraktif dönüşümler ve sürekli demikontraktif dönüşümlerin sabit noktaları için hatalı Mann ve hatalı Ishikawa iterasyon metotlarını kullanarak bazı yakınsama sonuçları vermişlerdir (Cho et al. 2002).

Hilbert uzaylarında veya normlu uzaylarda yapılan bu çalışmalar, daha genel uzay olan hiperbolik uzaylara genelleştirilmiştir. Mann ve Ishikawa iterasyonları hiperbolik uzaylarda

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n \oplus \alpha_n T^n x_n, \end{cases} \quad n \geq 1 \quad (15)$$

ve

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n \oplus \alpha_n T^n y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n \oplus \beta_n T^n x_n, \end{cases} \quad (16)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $0 \leq \alpha_n \leq 1$ ve $0 \leq \beta_n \leq 1$ dir.

Fukhar-ud-Din ve Khan, 2021 yılında düzgün L -Lipschitzian ve asimptotik demikontraktif dönüşümler ile düzgün L - Lipschitzian ve asimptotik hemikontraktif dönüşümler için 2-düzgün konveks hiperbolik uzaylarda (15) ve (16) iterasyon metotlarını kullanarak güçlü yakınsama teoremleri ispatlamışlardır. Yazarların bu çalışmaları bu konu ile ilgili yapılan ve yukarıda da bahsedilen normlu uzaylarda, Banach uzaylarında ve Hilbert uzaylarındaki çalışmaları genelleştirmektedir (Fukhar-ud-Din and Khan 2021).

Yukarıda literatür taramasında yazarların sonuçlarını ispatlamak için kullandıkları lemmalar ve bizim de teoremlerimizi ispatlarken kullanacağımız temel lemmalar aşağıda ifade edilmiştir.

Lemma 4: $\{\rho_n\}$ ve $\{\sigma_n\}$ 'nin negatif olmayan iki sayı dizisi olduğunu varsayalım. Her $n \geq N_0$ için,

$$\rho_{n+1} \leq \rho_n + \sigma_n$$

olsun. Bu durumda,

- i. Eğer $\sum \sigma_n < \infty$ ise $\lim \rho_n$ vardır.
- ii. Eğer $\sum \sigma_n < \infty$ ve $\{\rho_n\}$ 'nin sıfıra yakınsayan bir alt dizileri varsa o zaman $\lim \rho_n = 0$ 'dır (Tan, Xu 1993).

Lemma 5: H bir Hilbert uzay ve her $x, y \in H$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\|^2 = (1 - \lambda)\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

özdeşliği geçerlidir (Ishikawa 1974).

Aşağıdaki lemma, yukarıdaki lemmada $x, y \in H$ vektörleri için geçerli olan özdeşliğin $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $m + 1$ tane vektöre genelleştirilmiş halidir.

Lemma 6: H bir Hilbert uzayı, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, m$ ve $\alpha + \sum_{i=1}^m \beta^i = 1$ olsun. Bu durumda her $x, x_i \in H$ ve $i = 1, 2, \dots, m$ için,

$$\left\| \alpha x + \sum_{i=1}^m \beta^i x_i \right\|^2 = \alpha \|x\|^2 + \sum_{i=1}^m \beta^i \|x_i\|^2 - \sum_{i=1}^m \alpha \beta^i \|x_i - x\|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \beta^i \beta^j \|x_i - x_j\|^2$$

özdeşliği geçerlidir (Hussain et al. 2013).

İspat: Keyfi $x_i \in H$ ve $i = 1, 2, \dots, m$ için,

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \operatorname{Re} \langle x_i, x_j \rangle. \quad (17)$$

eşitliği yazılabilir. Aşağıdakileri göz önünde bulunduralım:

$$\begin{aligned} \left\| \alpha x + \sum_{i=1}^m \beta^i x_i \right\|^2 &= \left\| \left(1 - \sum_{i=1}^m \beta^i \right) x + \sum_{i=1}^m \beta^i x_i \right\|^2 \\ &= \left\| x + \sum_{i=1}^m \beta^i (x_i - x) \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^m \beta^{i^2} \|x_i - x\|^2 + 2 \sum_{i=1}^m \beta^i \operatorname{Re} \langle x_i - x, x \rangle \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \beta^i \beta^j \operatorname{Re} \langle x_i - x, x_j - x \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Her $i = 1, 2, \dots, m$ için,

$$2 \operatorname{Re} \langle x_i - x, x \rangle = \|x_i\|^2 - \|x_i - x\|^2 - \|x\|^2 \quad (19)$$

ve

$$2 \operatorname{Re} \langle x_i - x, x_j - x \rangle = -\|x_i - x_j\|^2 + \|x_i - x\|^2 + \|x_j - x\|^2 \quad (20)$$

elde edilir. (19) ve (20)'yi (18) denkleminde yerine koyduğumuzda aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \left\| \alpha x + \sum_{i=1}^m \beta^i x_i \right\|^2 \\
&= \alpha \|x\|^2 + \sum_{i=1}^m \beta^i \|x_i\|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \beta^i \beta^j \|x_i - x_j\|^2 - \sum_{i=1}^m \beta^i (1 - \beta^i) \|x_i - x\|^2 \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \beta^i \beta^j (\|x_i - x\|^2 + \|x_j - x\|^2) \\
&= \alpha \|x\|^2 + \sum_{i=1}^m \beta^i \|x_i\|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \beta^i \beta^j \|x_i - x_j\|^2 - \sum_{i=1}^m \left(1 - \sum_{i=1}^m \beta^j\right) \beta^i \|x_i - x\|^2 \\
&= \alpha \|x\|^2 + \sum_{i=1}^m \beta^i \|x_i\|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \beta^i \beta^j \|x_i - x_j\|^2 - \sum_{i=1}^m \alpha \beta^i \|x_i - x\|^2.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 7: X reel normlu lineer uzay olsun. Bu durumda $\forall x, y \in E$ ve $j(x + y) \in J(x + y)$ için

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, (x + y) \rangle$$

eşitsizliği geçerli olur (Chidume and Nnoli 2002).

Lemma 8: X uzayı, 2-düzgün konveks hiperbolik uzay olsun. Her $u, x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& d(u, \lambda x \oplus (1 - \lambda)y)^2 \\
& \leq \lambda d(u, x)^2 + (1 - \lambda)d(u, y)^2 - 4c_M \min\{\lambda^2, (1 - \lambda)^2\} d(x, y)^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Dehaish et al. 2013).

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümün ilk kısmında kapalı iterasyon metotları yardımıyla hemikontraktif ve demikontraktif dönüşümler için bazı sonuçlar verilecektir.

Teorem 13: C , H Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi, $T, S: C \rightarrow C$ birer sürekli hemikontraktif dönüşümler olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizilerinin $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ şartını sağlayacak şekilde birer reel dizi olduklarını varsayalım. Herhangi $x_1 \in C$ için $\{x_n\}$ dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_n = \alpha_n x_{n-1} + \beta_n T x_n + \gamma_n S x_n \end{cases} \quad (21)$$

Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi, T ve S 'nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar.

İspat: $f_p \in (F(T) \cap F(S))$ alalım. Yukarıdaki (21) numaralı $\{x_n\}$ dizisini ve Lemma 5'i kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} \|x_n - f_p\|^2 &= \|\alpha_n x_{n-1} + \beta_n T x_n + \gamma_n S x_n - f_p\|^2 \\ &= \|\alpha_n(x_{n-1} - f_p) + \beta_n(T x_n - f_p) + \gamma_n(S x_n - f_p)\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - f_p\|^2 + \beta_n \|T x_n - f_p\|^2 + \gamma_n \|S x_n - f_p\|^2 \\ &\quad - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - T x_n\|^2 - \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - S x_n\|^2 \\ &\quad - \beta_n \gamma_n \|T x_n - S x_n\|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

T ve S birer hemikontraktif dönüşümler olduğu için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$$\|T x_n - f_p\|^2 \leq \|f_p - x_n\|^2 + \|x_n - T x_n\|^2, \quad (23)$$

$$\|S x_n - f_p\|^2 \leq \|f_p - x_n\|^2 + \|x_n - S x_n\|^2. \quad (24)$$

(22) numaralı eşitsizliğin içine (23) ve (24) numaralı eşitsizlikleri yerleştirirsek,

$$\begin{aligned} \|f_p - x_n\|^2 &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - f_p\|^2 + \beta_n [\|x_n - f_p\|^2 + \|x_n - T x_n\|^2] \\ &\quad + \gamma_n [\|x_n - f_p\|^2 + \|x_n - S x_n\|^2] - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - T x_n\|^2 \\ &\quad - \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - S x_n\|^2 - \beta_n \gamma_n \|T x_n - S x_n\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

bulunur. Ayrıca $\|T x_n - x_n\|^2$ ifadesinden,

$$\begin{aligned} \|T x_n - x_n\|^2 &= \|\alpha_n x_{n-1} + \beta_n T x_n + \gamma_n S x_n - T x_n\|^2 \\ &= \|\alpha_n(x_{n-1} - T x_n) + \gamma_n(S x_n - T x_n)\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - T x_n\|^2 + \gamma_n \|S x_n - T x_n\|^2 - \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - S x_n\|^2 \end{aligned} \quad (26)$$

elde edilir. Şimdi de $\|x_n - S x_n\|^2$ normundan,

$$\begin{aligned}
\|x_n - Sx_n\|^2 &= \|\alpha_n x_{n-1} + \beta_n Tx_n + \gamma_n Sx_n - Sx_n\|^2 \\
&= \|\alpha_n(x_{n-1} - Sx_n) + \beta_n(Tx_n - Sx_n) + \gamma_n(Sx_n - Sx_n)\|^2 \\
&\leq \alpha_n \|Sx_n - x_{n-1}\|^2 + \beta_n \|Tx_n - Sx_n\|^2 - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2
\end{aligned} \tag{27}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliklerden (25)'in içerisinde (26) ve (27)'yi yerleştirirsek,

$$\begin{aligned}
\|f_p - x_n\|^2 &\leq \alpha_n \|f_p - x_{n-1}\|^2 + \beta_n \|f_p - x_n\|^2 \\
&\quad + \beta_n [\alpha_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \gamma_n \|Sx_n - Tx_n\|^2 - \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2] \\
&\quad + \gamma_n \|x_n - f_p\|^2 \\
&\quad + \gamma_n [\alpha_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 + \beta_n \|Tx_n - Sx_n\|^2 - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2] \\
&\quad - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 - \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 - \beta_n \gamma_n \|Tx_n - Sx_n\|^2
\end{aligned} \tag{28}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin en sade hali şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\|f_p - x_n\|^2 &\leq \|f_p - x_{n-1}\|^2 - \beta_n \gamma_n [\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \|x_{n-1} - Sx_n\|^2] \\
&\quad + \frac{\beta_n \gamma_n}{\alpha_n} \|Tx_n - Sx_n\|^2
\end{aligned} \tag{29}$$

S ve T , düzgün sürekli dönüşümler olduğundan $\|Tx_n - Sx_n\|^2 < M$ şartını sağlayan $M \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Dolayısıyla bu eşitsizliği kullanılırsak,

$$\|f_p - x_n\|^2 \leq \|f_p - x_{n-1}\|^2 - \beta_n \gamma_n [\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \|x_{n-1} - Sx_n\|^2] + \frac{\beta_n \gamma_n}{\alpha_n} M \tag{30}$$

şeklinde yazabiliriz.

Bazı $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ dizilerini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|x_n - f_p\|^2 \leq \|x_{n-1} - f_p\|^2 - \varepsilon^2 [\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \|x_{n-1} - Sx_n\|^2] + \varepsilon M. \tag{31}$$

Buradan,

$$\varepsilon^2 [\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \|x_{n-1} - Sx_n\|^2] \leq \|x_{n-1} - f_p\|^2 - \|x_n - f_p\|^2 + \varepsilon M \tag{32}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın toplamı alınırsa,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} (\|x_{j-1} - Tx_j\|^2 + \|x_{j-1} - Sx_j\|^2) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\|x_{j-1} - f_p\|^2 - \|x_j - f_p\|^2) + \varepsilon M \\
&= \|x_0 - f_p\|^2 + \varepsilon M
\end{aligned} \tag{33}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\|x_{j-1} - Tx_j\|^2 + \|x_{j-1} - Sx_j\|^2) < \infty \tag{34}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \|x_{n-1} - Sx_n\|^2) = 0$$

limitini gerektirir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 = 0 \quad (35)$$

olup (26) ve (27) eşitsizliklerinden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\|^2 = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\|^2 = 0$$

limitleri elde edilir.

(31), (32) ve Lemma 4'ten aşağıdaki limiti elde ederiz,

$$\|x_n - f_p\| \rightarrow 0.$$

Bu da $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow f_p$ anlamına gelir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 14: H, C kümeleri ve $T, S: C \rightarrow H$ dönüşümleri Teorem 13'teki gibi tanımlansın. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$, $[0,1]$ aralığında tanımlı bir reel sayı dizileri olsun. Bu diziler $\varepsilon \in (0,1)$ olmak üzere $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ koşulunu sağlasın. $P_C: H \rightarrow C$, H uzayının C 'ye olan izdüşüm operatörü olsun. O halde aşağıdaki şekilde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi,

$$x_n = P_C(\alpha_n x_{n-1} + \beta_n Tx_n + \gamma_n Sx_n)$$

T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarına kuvvetli yakınsar.

İspat: P_C , genişlemeyen bir dönüşüm ve C kümesi de H 'nin Chebyshev bir alt kümesi olduğundan P_C , tek değerli bir dönüşümdür. Dolayısıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \|x_n - f_p\|^2 &= \|P_C(\alpha_n x_{n-1} + \beta_n Tx_n + \gamma_n Sx_n) - P_C f_p\|^2 \\ &\leq \|\alpha_n x_{n-1} + \beta_n Tx_n + \gamma_n Sx_n - f_p\|^2 \\ &= \|\alpha_n(x_{n-1} - f_p) + \beta_n(Tx_n - f_p) + \gamma_n(Sx_n - f_p)\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - f_p\|^2 + \beta_n \|Tx_n - f_p\|^2 + \gamma_n \|Sx_n - f_p\|^2 - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 - \\ &\quad \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 - \beta_n \gamma_n \|Tx_n - Sx_n\|^2 \end{aligned}$$

Bu da şu anlama gelir:

$$\begin{aligned} \|x_n - f_p\|^2 &\leq \|x_{n-1} - f_p\|^2 - \beta_n \gamma_n [\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \|x_{n-1} - Sx_n\|^2] \\ &\quad + \frac{\beta_n \gamma_n}{\alpha_n} \|Tx_n - Sx_n\|^2. \end{aligned}$$

$C \cup (T(C) \cup S(C))$ kümesi kompakttır ve bu nedenle $\{\|x_n - Tx_n\|\}$ ve $\{\|x_n - Sx_n\|\}$ dizileri sınırlıdır. İspatın kalan kısmı Teorem 13'ün ispatında olduğu gibi devam eder ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 15: H, C ve T, S Teorem 13'deki gibi tanımlansın. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$, $[0,1]$ aralığında tanımlı bir reel sayı dizileri olsun. Bu diziler $\varepsilon \in (0,1)$ olmak üzere $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ koşulunu sağlasın. Eğer T ve S dönüşümlerinden biri yarı-kompakt ise (21) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarına kuvvetli yakınsar.

İspat: Teorem 13'ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\|^2 = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\|^2 = 0$$

limitleri vardır. T dönüşümünün yarı-kompakt olduğunu kabul edelim. Bu durumda yarı-kompaktlığın tanımından $\{x_n\}$ dizisinin f_p noktasına yakınsayacak şekilde $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Böylece

$$\|f_p - Tf_p\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - Tx_{n_j}\| = 0$$

dır. Bu ise $f_p \in (F(T) \cap F(S))$ olmasını gerektirir. O halde Teorem 13'ten $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - f_p\|$ limiti vardır. Yani (21) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarına kuvvetli yakınsar.

Teorem 16: H bir Hilbert uzay; C, H 'nin kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $T, S: C \rightarrow C$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalar kümesi boş kümeden farklı olmak üzere $(F(T) \cap F(S) \neq \emptyset)$ düzgün sürekli ve demikontraktif dönüşümler olsun. Ayrıca T ve S 'nin $\alpha > 1$ için birer α -demikontraktif dönüşüm olduklarını kabul edelim. Keyfi $x_1 \in C$ başlangıç noktası için $\{x_n\}$ dizisi (21)'deki gibi tanımlansın. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dizileri $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ ve bazı $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T 'nin sabit noktasına güçlü yakınsar.

İspat: $\alpha f_p \in (F(T) \cap F(S))$ alalım. Yukarıdaki (21) numaralı $\{x_n\}$ dizisini ve Lemma 5'i kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} \|x_n - \alpha f_p\|^2 &= \|\alpha_n x_{n-1} + \beta_n Tx_n + \gamma_n Sx_n - \alpha f_p\|^2 \\ &= \|\alpha_n(x_{n-1} - \alpha f_p) + \beta_n(Tx_n - \alpha f_p) + \gamma_n(Sx_n - \alpha f_p)\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - \alpha f_p\|^2 + \beta_n \|Tx_n - \alpha f_p\|^2 + \gamma_n \|Sx_n - \alpha f_p\|^2 \\ &\quad - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 - \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 - \beta_n \gamma_n \|Tx_n - Sx_n\|^2 \end{aligned} \tag{36}$$

T ve S birer α -demikontraktif dönüşümler olduğu için

$$\|Tx_n - \alpha f_p\|^2 \leq \|x_n - \alpha f_p\|^2 + k\|x_n - Tx_n\|^2, \quad k \in (0,1) \quad (37)$$

$$\|Sx_n - \alpha f_p\|^2 \leq \|x_n - \alpha f_p\|^2 + k\|x_n - Sx_n\|^2, \quad k \in (0,1) \quad (38)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. (36) numaralı eşitsizliğin içine (37) ve (38) numaralı eşitsizlikleri yerleştirirsek,

$$\begin{aligned} \|x_n - \alpha f_p\|^2 &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - \alpha f_p\|^2 + \beta_n \left[\|x_n - \alpha f_p\|^2 + k\|x_n - Tx_n\|^2 \right] \\ &\quad + \gamma_n \left[\|x_n - \alpha f_p\|^2 + k\|x_n - Sx_n\|^2 \right] - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 \\ &\quad - \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 - \beta_n \gamma_n \|Tx_n - Sx_n\|^2 \end{aligned} \quad (39)$$

olur. Şimdi $\|Tx_n - x_n\|^2$ ifadesinden,

$$\begin{aligned} \|Tx_n - x_n\|^2 &= \|\alpha_n x_{n-1} + \beta_n Tx_n + \gamma_n Sx_n - Tx_n\|^2 \\ &= \|\alpha_n (x_{n-1} - Tx_n) + \beta_n (Tx_n - Tx_n) + \gamma_n (Sx_n - Tx_n)\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|Tx_n - x_{n-1}\|^2 + \gamma_n \|Sx_n - Tx_n\|^2 - \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 \end{aligned} \quad (40)$$

yazılır. Şimdi de $\|x_n - Sx_n\|^2$ normundan,

$$\begin{aligned} \|x_n - Sx_n\|^2 &= \|\alpha_n x_{n-1} + \beta_n Tx_n + \gamma_n Sx_n - Sx_n\|^2 \\ &= \|\alpha_n (x_{n-1} - Sx_n) + \beta_n (Tx_n - Sx_n) + \gamma_n (Sx_n - Sx_n)\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 + \beta_n \|Tx_n - Sx_n\|^2 - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 \end{aligned} \quad (41)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliklerden (39)'un içerisine (40) ve (41)'i yerleştirirsek,

$$\begin{aligned} \|x_n - \alpha f_p\|^2 &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - \alpha f_p\|^2 + \beta_n \|x_n - \alpha f_p\|^2 \\ &\quad + k\beta_n [\alpha_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \gamma_n \|Sx_n - Tx_n\|^2 - \alpha_n \gamma_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2] \\ &\quad + \gamma_n \|x_n - \alpha f_p\|^2 + k\gamma_n [\alpha_n \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 + \beta_n \|Tx_n - Sx_n\|^2 - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2] \\ &\quad - \alpha_n \beta_n \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 \end{aligned} \quad (42)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin sade hali,

$$\begin{aligned} \|x_n - \alpha f_p\|^2 &\leq \|x_{n-1} - \alpha f_p\|^2 - \beta_n (1 - k(1 - \gamma_n)) \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 \\ &\quad - \gamma_n (1 - k(1 - \beta_n)) \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 + \frac{2k\beta_n \gamma_n}{\alpha_n} \|Tx_n - Sx_n\|^2 \end{aligned} \quad (43)$$

dir.

S ve T , sınırlı küme olan X üzerinde düzgün sürekli olduğundan $\|Tx_n - Sx_n\|^2 < M < \infty$ olmak şartıyla pozitif reel bir M sayısı vardır. Dolayısıyla bu eşitsizliği kullanılırsak,

$$\begin{aligned}\|x_n - \alpha f_p\|^2 &\leq \|x_{n-1} - \alpha f_p\|^2 - \beta_n(1 - k(1 - \gamma_n))\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 \\ &\quad - \gamma_n(1 - k(1 - \beta_n))\|x_{n-1} - Sx_n\|^2 + \frac{2k\beta_n\gamma_n}{\alpha_n}M\end{aligned}\quad (44)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bazı $\varepsilon \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ dizilerini kullanarak

$$\begin{aligned}\|x_n - \alpha f_p\|^2 &\leq \|x_{n-1} - \alpha f_p\|^2 - \varepsilon(1 - k(1 - \varepsilon))\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 \\ &\quad - \varepsilon(1 - k(1 - \varepsilon))\|x_{n-1} - Sx_n\|^2 + 2k\varepsilon M.\end{aligned}\quad (45)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned}\varepsilon(1 - k(1 - \varepsilon))\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \varepsilon(1 - k(1 - \varepsilon))\|x_{n-1} - Sx_n\|^2 \\ \leq \|x_{n-1} - \alpha f_p\|^2 - \|x_n - \alpha f_p\|^2 + 2k\varepsilon M\end{aligned}\quad (46)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın toplamı alınırsa,

$$\begin{aligned}\varepsilon(1 - k(1 - \varepsilon)) \sum_{j=1}^{\infty} (\|x_{j-1} - Tx_j\|^2 + \|x_{j-1} - Sx_j\|^2) \\ \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\|x_{j-1} - \alpha f_p\|^2 - \|x_j - \alpha f_p\|^2) + 2k\varepsilon M \\ = \|x_0 - \alpha f_p\|^2 + 2k\varepsilon M\end{aligned}\quad (47)$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\|x_{j-1} - Tx_j\|^2 + \|x_{j-1} - Sx_j\|^2) < \infty \quad (48)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_{n-1} - Tx_n\|^2 + \|x_{n-1} - Sx_n\|^2) = 0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n-1} - Tx_n\|^2 = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n-1} - Sx_n\|^2 = 0 \quad (49)$$

olup (40) ve (41) nolu eşitsizliklerinden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\|^2 = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\|^2 = 0$$

limitleri elde edilir.

(45), (46) ve Lemma 4'ten aşağıdaki limiti elde ederiz,

$$\|x_n - \alpha f_p\| \rightarrow 0.$$

Bu da $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow \alpha f_p$ anlamına gelir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Aşağıda hemikontraktif dönüşümlerin sonlu iki ailesi için bazı teoremler ve sonuçlar verilecektir.

Teorem 17: C, H Hilbert uzayının kompakt ve konveks bir alt kümesi ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $T_i, S_i: C \rightarrow C$ sürekli hemikontraktif dönüşümlerin birer aileleri olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \in [0,1]$ dizileri bazı $\varepsilon \in (0,1)$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ve $\alpha_n + \sum_{i=1}^k \beta_n^i + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i = 1$ şartlarını sağlayan dizileri verilsin. Herhangi $x_1 \in C$ için, $\{x_n\}$ dizisi

$$\{x_n = \alpha_n x_{n-1} + \sum_{i=1}^k \beta_n^i T_i x_n + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i S_i x_n \quad (50)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi, $\cap_{i=1}^k (F(T_i) \cap F(S_i)) \neq \emptyset$ kümesinin bir elemanına güçlü yakınsar.

İspat: $f_p \in \cap_{i=1}^k (F(T_i) \cap F(S_i))$ alalım. T_i ve S_i , $i = 1, 2, \dots, k$ birer hemikontraktif dönüşüm oldukları için

$$\|T_i x_n - f_p\|^2 \leq \|f_p - x_n\|^2 + \|x_n - T_i x_n\|^2 \quad (51)$$

$$\|S_i x_n - f_p\|^2 \leq \|f_p - x_n\|^2 + \|x_n - S_i x_n\|^2 \quad (52)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. (50)'deki $\{x_n\}$ dizisini ve Lemma 6'yı kullanarak

$$\begin{aligned} \|x_n - f_p\|^2 &= \left\| \alpha_n x_{n-1} + \sum_{i=1}^k \beta_n^i T_i x_n + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i S_i x_n - f_p \right\|^2 \\ &= \left\| \alpha_n (x_{n-1} - f_p) + \sum_{i=1}^k \beta_n^i (T_i x_n - f_p) + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i (S_i x_n - f_p) \right\|^2 \\ &= \alpha_n \|f_p - x_{n-1}\|^2 + \sum_{i=1}^k \beta_n^i \|T_i x_n - f_p\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|S_i x_n - f_p\|^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \beta_n^i \|T_i x_n - x_{n-1}\|^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_n \gamma_n^i \|S_i x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{j=1}^k \gamma_n^j \|T_i x_n - S_j x_n\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha_n \|f_p - x_{n-1}\|^2 + \sum_{i=1}^k \beta_n^i \|f_p - T_i x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|f_p - S_i x_n\|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \beta_n^i \|x_{n-1} - T_i x_n\|^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_n \gamma_n^i \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2
\end{aligned} \tag{53}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (51) ve (52) nolu eşitsizlikleri (53)'te kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\|f_p - x_n\|^2 &\leq \alpha_n \|f_p - x_{n-1}\|^2 + \sum_{i=1}^k \beta_n^i \|f_p - x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \beta_n^i \|x_n - T_i x_n\|^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|f_p - x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|x_n - S_i x_n\|^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_n \beta_n^i \|T_i x_n - x_{n-1}\|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \gamma_n^i \|S_i x_n - x_{n-1}\|^2
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin en sade hali,

$$\begin{aligned}
\alpha_n \|x_n - f_p\|^2 &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - f_p\|^2 + \sum_{i=1}^k \beta_n^i \|x_n - T_i x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|x_n - S_i x_n\|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \beta_n^i \|x_{n-1} - T_i x_n\|^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_n \gamma_n^i \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2
\end{aligned} \tag{54}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\|T_i x_n - x_n\|^2 &= \left\| \alpha_n x_{n-1} + \sum_{i=1}^k \beta_n^i T_i x_n + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i S_i x_n - T_i x_n \right\|^2 \\
&= \left\| \alpha_n (x_{n-1} - T_i x_n) + \sum_{i=1}^k \beta_n^i (T_i x_n - T_i x_n) + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i (S_i x_n - T_i x_n) \right\|^2 \\
&= \alpha_n \|x_{n-1} - T_i x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \beta_n^i \|T_i x_n - T_i x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|S_i x_n - T_i x_n\|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \beta_n^i \|x_{n-1} - T_i x_n\|^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_n \gamma_n^i \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|T_i x_n - S_i x_n\|^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|T_i x_n - x_n\|^2 &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - T_i x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|S_i x_n - T_i x_n\|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \gamma_n^i \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2
\end{aligned} \tag{55}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Dolayısıyla aynı işlemleri $\|S_i x_n - x_n\|^2$ normuna da uygularsak,

$$\begin{aligned}
\|S_i x_n - x_n\|^2 &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \beta_n^i \|S_i x_n - T_i x_n\|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \beta_n^i \|x_{n-1} - T_i x_n\|^2
\end{aligned} \tag{56}$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

(55) ve (56) nolu eşitsizlikleri (54)'ün içerisine yerleştirdiğimizde

$$\begin{aligned}
\alpha_n \|x_n - f_p\|^2 &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - f_p\|^2 + \sum_{i=1}^k \beta_n^i [\alpha_n \|x_{n-1} - T_i x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|S_i x_n - T_i x_n\|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \gamma_n^i \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2] + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i [\alpha_n \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \beta_n^i \|S_i x_n - T_i x_n\|^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_n \beta_n^i \|T_i x_n - x_{n-1}\|^2] \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \beta_n^i \|T_i x_n - x_{n-1}\|^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_n \gamma_n^i \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2
\end{aligned}$$

elde ederiz. Gerekli işlemleri yaptığımızda,

$$\begin{aligned}
\alpha_n \|x_n - f_p\|^2 &\leq \alpha_n \|x_{n-1} - f_p\|^2 - \left(\sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \alpha_n \right) (\|T_i x_n - x_{n-1}\|^2 + \|S_i x_n - x_{n-1}\|^2) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|T_i x_n - S_i x_n\|^2
\end{aligned} \tag{57}$$

olur. Son olarak,

$$\begin{aligned}
\|x_n - f_p\|^2 &\leq \|x_{n-1} - f_p\|^2 - \left(\sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \right) (\|T_i x_n - x_{n-1}\|^2 + \|S_i x_n - x_{n-1}\|^2) \\
&\quad + \frac{2 \sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{i=1}^k \gamma_n^i}{\alpha_n} \|S_i x_n - T_i x_n\|^2
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

S ve T , X üzerinde düzgün sürekli olduğundan $\|S_i x_n - T_i x_n\|^2 < M < \infty$ olmak şartıyla pozitif reel bir M sayısı vardır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\begin{aligned} \|f_p - x_n\|^2 &\leq \|f_p - x_{n-1}\|^2 - \left(\sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \right) (\|x_{n-1} - T_i x_n\|^2 + \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2) \\ &\quad + \frac{2 \sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{i=1}^k \gamma_n^i}{\alpha_n} M \end{aligned} \quad (58)$$

elde edilir.

Böylece, (58) ve hipotezdeki $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ koşulu kullanılırsa

$$\|f_p - x_n\|^2 \leq \|f_p - x_{n-1}\|^2 - \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^k \|T_i x_n - x_{n-1}\|^2 + \sum_{i=1}^k \|S_i x_n - x_{n-1}\|^2 \right) + 2\delta M$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\varepsilon^2 (\sum_{i=1}^k \|T_i x_n - x_{n-1}\|^2 + \sum_{i=1}^k \|S_i x_n - x_{n-1}\|^2) \leq \|x_{n-1} - f_p\|^2 - \|x_n - f_p\|^2 + 2\varepsilon M \quad (59)$$

olur. Böylece, her $i = 1, 2, \dots, k$ için,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{j-1} - T_i x_j\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|x_{j-1} - S_i x_j\|^2 \right) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\|x_{j-1} - f_p\|^2 - \|x_j - f_p\|^2) \\ &= \|x_0 - f_p\|^2 \end{aligned} \quad (60)$$

yazılır. Buradan her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|T_i x_j - x_{j-1}\|^2 < \infty \quad \text{ve} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|S_i x_j - x_{j-1}\|^2 < \infty \quad (61)$$

serileri yazılır. Bu da her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n-1} - T_i x_n\| = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n-1} - S_i x_n\| = 0$$

olmasını gerektirir. Ayrıca her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i x_n - x_n\| = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_i x_n - x_n\| = 0$$

yazılır. C 'nin kompakt bir küme olması, $\{x_n\}$ dizisinin $\cap_{i=1}^k (F(T_i) \cap F(S_i)) = f_p$ ortak sabit noktasına yakınsayan bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisinin var olduğunu gösterir. Bu da $\cap_{i=1}^k (F(T_i) \cap F(S_i))$ 'nin tüm sabit noktaları için geçerli olduğundan,

$$\|f_p - x_n\|^2 \leq \|f_p - x_{n-1}\|^2 - \delta^2 \left(\sum_{i=1}^k \|x_{n-1} - T_i x_n\|^2 + \sum_{i=1}^k \|x_{n-1} - S_i x_n\|^2 \right)$$

şeklinde yazabiliriz.

Lemma 4 ve (61)'i göz önünde bulundurarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - f_p\| = 0$$

olur. Bu da $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow f_p$ anlamına gelir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 18: C , H kümeleri ve $T_i, S_i: C \rightarrow H$ dönüşümleri Teorem 17'deki gibi tanımlansın. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \in [0,1]$ dizileri bazı $\varepsilon \in (0,1)$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ve $\alpha_n + \sum_{i=1}^k \beta_n^i + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i = 1$ şartlarını sağlayan dizileri verilsin. Eğer $P_C: H \rightarrow C$, H 'nin C üzerine bir izdüşüm operatörü ise

$$x_n = P_C(\alpha_n x_{n-1} + \sum_{i=1}^k \beta_n^i T_i x_n + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i S_i x_n)$$

şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, $\cap_{i=1}^k (F(T_i) \cap F(S_i)) \neq \emptyset$ kümesinin bir elemanına güçlü yakınsar.

İspat: P_C , genişlemeyen bir dönüşüm ve C kümesi de H 'nin Chebyshev bir alt kümesi olduğundan P_C , tek değerli bir dönüşümdür. Bu nedenle aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} \|f_p - x_n\|^2 &= \left\| P_C(\alpha_n x_{n-1} + \sum_{i=1}^k \beta_n^i T_i x_n + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i S_i x_n) - P_C f_p \right\|^2 \\ &\leq \left\| \alpha_n x_{n-1} + \sum_{i=1}^k \beta_n^i T_i x_n + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i S_i x_n - f_p \right\|^2 \\ &= \left\| \alpha_n (x_{n-1} - f_p) + \sum_{i=1}^k \beta_n^i (T_i x_n - f_p) + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i (S_i x_n - f_p) \right\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|f_p - x_{n-1}\|^2 + \sum_{i=1}^k \beta_n^i \|T_i x_n - f_p\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \|S_i x_n - f_p\|^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \alpha_n \beta_n^i \|T_i x_n - x_{n-1}\|^2 - \sum_{i=1}^k \alpha_n \gamma_n^i \|S_i x_n - x_{n-1}\|^2. \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\|x_n - f_p\|^2 &\leq \|x_{n-1} - f_p\|^2 - \left(\sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{i=1}^k \gamma_n^i \right) (\|T_i x_n - x_{n-1}\|^2 + \|S_i x_n - x_{n-1}\|^2) \\ &\quad + \frac{2 \sum_{i=1}^k \beta_n^i \sum_{i=1}^k \gamma_n^i}{\alpha_n} \|S_i x_n - T_i x_n\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. $C \cup (T(C) \cup S(C))$ kümesi kompakttır ve bu nedenle $\{\|x_n - T_i x_n\|\}$ ve $\{\|x_n - S_i x_n\|\}$ dizileri sınırlıdır. İspatın kalan kısmı Teorem 17'nin ispatında olduğu gibi devam eder. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 17 ve Teorem 18'de sürekli hemikontraktif için verilen sonuçlar sürekli α -hemikontraktif dönüşümler için de verilebilir. İspat yöntemleri benzer olduğundan bu teoremler aşağıda ispatsız olarak ifade edilecektir.

Teorem 19: C, H Hilbert uzayının kompakt ve konveks bir alt kümesi ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $T_i, S_i: C \rightarrow C$ sürekli α -hemikontraktif dönüşümlerin birer aileleri olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \in [0, 1]$ dizileri bazı $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ve $\alpha_n + \sum_{i=1}^k \beta_n^i + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i = 1$ şartlarını sağlayan dizileri verilsin. Bu durumda (50) tarafından tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, $\bigcap_{i=1}^k (F(T_i) \cap F(S_i)) \neq \emptyset$ kümesinin bir elemanına güçlü yakınsar.

Teorem 20: C, H kümeleri ve $T_i, S_i: C \rightarrow H$ dönüşümleri Teorem 19'daki gibi tanımlansın. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \in [0, 1]$ dizileri bazı $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ve $\alpha_n + \sum_{i=1}^k \beta_n^i + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i = 1$ şartlarını sağlayan dizileri verilsin. Ayrıca $P_C: H \rightarrow C$, H 'nin C üzerine bir izdüşüm operatörü olsun. Teorem 18'deki gibi tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, $\bigcap_{i=1}^k (F(T_i) \cap F(S_i)) \neq \emptyset$ kümesinin bir elemanına güçlü yakınsar.

Teorem 21: C, H ve $T_i, S_i: C \rightarrow C$, $i = 1, 2, \dots, k$ ifadeleri Teorem 19'daki gibi tanımlansın. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \in [0, 1]$ dizileri bazı $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\}, \{\gamma_n^i\} \subset [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ve $\alpha_n + \sum_{i=1}^k \beta_n^i + \sum_{i=1}^k \gamma_n^i = 1$ şartlarını sağlayan dizileri verilsin. Ayrıca T_i veya S_i dönüşüm ailelerinden en az bir dönüşümün yarı-kompakt olduğunu kabul edelim. Bu durumda (50) tarafından tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, $\bigcap_{i=1}^k (F(T_i) \cap F(S_i)) \neq \emptyset$ kümesinin bir elemanına güçlü yakınsar.

Bu bölümün son kısmında ise Banach uzaylarında asimptotik demikontraktif dönüşüm sınıflarıyla ilgili bazı teoremler ve ispatlar verilecektir.

Lemma 9: X reel bir Banach uzayı, C kümesi X 'nin konveks alt kümesi ve $T, S: C \rightarrow C$ dönüşümleri düzgün L -Lipschitzian asimptotik demikontraktif dönüşümler olsun. Burada

$\{k_n\} \subseteq [1, \infty)$ dizisi, $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^2 - 1) < \infty$ şartını sağlasın.

Ayrıca $\{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri $a_n + b_n + c_n = 1$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $[0,1]$ aralığındaki reel diziler olsun.

$$\text{i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n < \infty,$$

$$\text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty.$$

Keyfi $x_1 \in C$ için $\{x_n\}$ dizisi

$$\{x_{n+1} = a_n x_n + b_n T^n x_n + c_n S^n x_n \quad (62)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T x_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - S x_n\| = 0$$

dır.

İspat: Lemma 7 ve (62) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - f_p\|^2 &= \|(1 - b_n - c_n)x_n + b_n T^n x_n + c_n S^n x_n - f_p\|^2 \\ &= \|(x_n - f_p) + b_n(T^n x_n - x_n) + c_n(S^n x_n - x_n)\|^2 \\ &\leq \|x_n - f_p\|^2 + 2 \langle b_n(T^n x_n - x_n) + c_n(S^n x_n - x_n), j(x_{n+1} - f_p) \rangle \\ &= \|x_n - f_p\|^2 - 2b_n \langle x_{n+1} - T^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) \rangle - 2c_n \\ &\quad \langle x_{n+1} - S^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) \rangle + 2b_n \langle x_{n+1} - T^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) \rangle \\ &\quad > +2c_n \langle x_{n+1} - S^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) \rangle + 2b_n \langle T^n x_n - x_n, j(x_{n+1} - f_p) \rangle \\ &\quad > +2c_n \langle S^n x_n - x_n, j(x_{n+1} - f_p) \rangle \\ &= \|x_n - f_p\|^2 - 2b_n \langle x_{n+1} - T^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) \rangle - 2c_n \\ &\quad \langle x_{n+1} - S^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) \rangle + 2b_n \langle x_{n+1} - x_n, j(x_{n+1} - f_p) \rangle + 2b_n \\ &\quad \langle T^n x_n - T^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) \rangle + 2c_n \langle x_{n+1} - x_n, j(x_{n+1} - f_p) \rangle + 2c_n \\ &\quad \langle S^n x_n - S^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) \rangle \end{aligned} \quad (63)$$

elde edilir. Buradan

$$x_{n+1} - x_n = c_n(S^n x_n - x_n) + b_n(T^n x_n - x_n)$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki ifadeyi, Tanım 28 ve (63)'ü kullanırsak

$$\begin{aligned}
\|f_p - x_{n+1}\|^2 &\leq \|f_p - x_n\|^2 - b_n(1-k)\|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 + b_n(k_n^2 - 1)\|f_p - x_{n+1}\|^2 \\
&\quad - c_n(1-k)\|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 + c_n(k_n^2 - 1)\|x_{n+1} - f_p\|^2 + 2b_n^2 \\
&\quad < T^n x_n - x_n, j(x_{n+1} - f_p) > + 2b_n c_n < S^n x_n - x_n, j(x_{n+1} - f_p) \\
&\quad > + 2b_n T^n x_n - T^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) > + 2c_n b_n < T^n x_n - x_n, j(x_{n+1} - f_p) \\
&\quad > + 2c_n^2 < S^n x_n - x_n, j(x_{n+1} - f_p) > + 2c_n < S^n x_n - S^n x_{n+1}, j(x_{n+1} - f_p) \\
&\quad > \\
&\leq \|x_n - f_p\|^2 - b_n(1-k)\|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 + b_n(k_n^2 - 1)\|x_{n+1} - f_p\|^2 \\
&\quad - c_n(1-k)\|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 + c_n(k_n^2 - 1)\|x_{n+1} - f_p\|^2 \\
&\quad + 2b_n^2 \|T^n x_n - x_n\| \|x_{n+1} - f_p\| + 2b_n c_n \|S^n x_n - x_n\| \|x_{n+1} - f_p\| \\
&\quad + 2b_n \|T^n x_n - T^n x_{n+1}\| \|x_{n+1} - f_p\| + 2c_n b_n \|T^n x_n - x_n\| \|x_{n+1} - f_p\| \\
&\quad + 2c_n^2 \|S^n x_n - x_n\| \|f_p - x_{n+1}\| \\
&\quad + 2c_n \|S^n x_n - S^n x_{n+1}\| \|f_p - x_{n+1}\|
\end{aligned} \tag{64}$$

elde edilir. T ve S , L -Lipschitzian dönüşüm olduklarından,

$$\begin{aligned}
\|T^n x_n - x_n\| &\leq \|f_p - T^n x_n\| + \|f_p - x_n\| \\
&\leq L\|f_p - x_n\| + \|f_p - x_n\| \\
&= (1 + L)\|f_p - x_n\|
\end{aligned} \tag{65}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|S^n x_n - x_n\| &\leq \|f_p - S^n x_n\| + \|f_p - x_n\| \\
&\leq L\|f_p - x_n\| + \|f_p - x_n\| \\
&= (1 + L)\|f_p - x_n\|
\end{aligned} \tag{66}$$

şeklinde yazabiliriz.

(65) ve (66) nolu eşitsizlikleri (64)'ün içerisinde kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - f_p\|^2 &\leq \|f_p - x_n\|^2 - b_n(1-k)\|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 - c_n(1-k)\|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n)(k_n^2 - 1)\|x_{n+1} - f_p\|^2 + 2b_n^2(1 + L)\|f_p - x_n\| \|x_{n+1} - f_p\| \\
&\quad + 2b_n c_n(1 + L)\|f_p - x_n\| \|x_{n+1} - f_p\| + 2b_n \|T^n x_n - T^n x_{n+1}\| \|x_{n+1} - f_p\| \\
&\quad + 2c_n b_n(1 + L)\|f_p - x_n\| \|x_{n+1} - f_p\| + 2c_n^2(1 + L)\|x_n - f_p\| \|x_{n+1} - f_p\| \\
&\quad + 2c_n \|S^n x_n - S^n x_{n+1}\| \|x_{n+1} - f_p\|
\end{aligned} \tag{67}$$

elde ederiz.

$$\|x_n - f_p\| \leq 1 + \|x_n - f_p\|^2$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - f_p\| &\leq a_n \|f_p - x_n\| + b_n \|T^n x_n - f_p\| + c_n \|S^n x_n - f_p\| \\ &\leq a_n \|f_p - x_n\| + b_n L \|f_p - x_n\| + c_n L \|f_p - x_n\| \\ &= (a_n + b_n L + c_n L) \|f_p - x_n\| \end{aligned} \quad (68)$$

yazılır. Şimdi, (68)'i (67)'de kullanırsak,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - f_p\|^2 &\leq \|f_p - x_n\|^2 - b_n(1 - k) \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 - c_n(1 - k) \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n)(k_n^2 - 1)(a_n + (1 - a_n)L) \|x_n - f_p\|^2 \\ &\quad + 2b_n^2(1 + L)(a_n + (1 - a_n)L) \|x_n - f_p\|^2 \\ &\quad + 2b_n c_n(1 + L)(a_n + (1 - a_n)L) \|x_n - f_p\|^2 \\ &\quad + 2b_n L \|x_n - x_{n+1}\| \|x_{n+1} - f_p\| \\ &\quad + 2c_n b_n(1 + L)(a_n + (1 - a_n)L) \|x_n - f_p\|^2 \\ &\quad + 2c_n^2(1 + L)(a_n + (1 - a_n)L) \|x_n - f_p\|^2 \\ &\quad + 2c_n L \|x_n - x_{n+1}\| \|x_{n+1} - f_p\| \end{aligned} \quad (69)$$

elde ederiz. (62) nolu iterasyon metodundan,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+1}\| &\leq b_n \|T^n x_n - x_n\| + c_n \|S^n x_n - x_n\| \\ &\leq b_n(1 + L) \|x_n - f_p\| + c_n(1 + L) \|x_n - f_p\| \\ &= (1 - a_n)(1 + L) \|x_n - f_p\| \end{aligned} \quad (70)$$

yazılır. Buradan hareketle (69) ve (70) nolu eşitsizlikler kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - f_p\|^2 &\leq \|f_p - x_n\|^2 - b_n(1-k)\|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 - c_n(1-k)\|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 \\
&\quad + (1-a_n)(k_n^2 - 1)(a_n + (1-a_n)L)\|x_n - f_p\|^2 \\
&\quad + 2b_n^2(1+L)(a_n + L(1-a_n))\|x_n - f_p\|^2 \\
&\quad + 2b_n c_n(1+L)(a_n + L(1-a_n))\|x_n - f_p\|^2 \\
&\quad + 2b_n L(1-a_n)(1+L)(a_n + (1-a_n)L)\|x_n - f_p\|^2 \\
&\quad + 2c_n b_n(1+L)(a_n + (1-a_n)L)\|x_n - f_p\|^2 \\
&\quad + 2c_n^2(1+L)(a_n + (1-a_n)L)\|x_n - f_p\|^2 \\
&\quad + L2c_n(1-a_n)(1+L)(a_n + (1-a_n)L)\|x_n - f_p\|^2
\end{aligned} \tag{71}$$

olur. Yukarıdaki (71) nolu eşitsizliğini $\|x_n - f_p\|^2$ ortak parantezine alırsak,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - f_p\|^2 &\leq (1 + \delta_n)\|x_n - f_p\|^2 - b_n(1-k)\|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 \\
&\quad - c_n(1-k)\|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2
\end{aligned} \tag{72}$$

elde etmiş oluruz. Ayrıca δ_n ifadesinin açılımından

$$\begin{aligned}
\delta_n &= (1-a_n)(k_n^2 - 1)(a_n + L(1-a_n)) + 2b_n^2(1+L)(a_n + L(1-a_n)) \\
&\quad + 2b_n c_n(1+L)(a_n + (1-a_n)L) + 2b_n L(1-a_n)(1+L)(a_n + L(1-a_n)) \\
&\quad + 2c_n b_n(1+L)(a_n + (1-a_n)L) + 2c_n^2(1+L)(a_n + L(1-a_n)) \\
&\quad + 2c_n L(1-a_n)(1+L)(a_n + L(1-a_n)) \\
&= (a_n + (1-a_n)L)[(1-a_n)(k_n^2 - 1) + 2b_n^2(1+L)] + 2b_n c_n(1+L) \\
&\quad + 2b_n(1-a_n)L(1+L) + 2c_n b_n(1+L) + 2c_n^2(1+L) \\
&\quad + 2c_n(1-a_n)L(1+L) \\
&\leq L[(k_n^2 - 1) + 2b_n^2(1+L) + 4c_n b_n(1+L) + 2c_n^2(1+L) \\
&\quad + 2L(1+L)(1-a_n)^2]
\end{aligned}$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ elde edilir. Dolayısıyla (72)'den şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - f_p\|^2 &\leq (1 + \delta_n)\|x_n - f_p\|^2 \\
&\leq (1 + \delta_n)(1 + \delta_{n-1})\|x_n - f_p\|^2 \\
&\vdots \\
&\leq \prod_{j=1}^n (1 + \delta_j)\|x_n - f_p\|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Bu nedenle $\{\|x_n - f_p\|\}$ dizisi sınırlıdır. Yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n - f_p\| \leq M$ olmak şartıyla pozitif bir M reel sayısı vardır. O zaman (72) ifadesini,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - f_p\|^2 &\leq \|f_p - x_n\|^2 + \delta_n M^2 - b_n(1-k)\|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 \\ &\quad - c_n(1-k)\|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 \end{aligned} \quad (73)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} b_n(1-k)\|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 + c_n(1-k)\|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 \\ \leq \|x_n - f_p\|^2 - \|x_{n+1} - f_p\|^2 + M^2 \delta_n \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$(1-k) \left[\sum_{j=1}^n (b_j \|T^j x_{j+1} - x_{j+1}\|^2 + c_j \|S^j x_{j+1} - x_{j+1}\|^2) \right] \leq \|x_1 - f_p\|^2 + \sum_{j=1}^n M^2 \delta_n < \infty$$

olur. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \|T^n x_{n+1} - x_{n+1}\|^2 < \infty$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \|S^n x_{n+1} - x_{n+1}\|^2 < \infty$$

şeklinde yazarız. (ii). şarttan,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - T x_{n+1}\| = 0$$

ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - S x_{n+1}\| = 0$$

olur. Hipotezdeki iterasyon metodundan

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 &= \|(1 - b_n - c_n)x_n + b_n T^n x_n + c_n S^n x_n - T^n x_{n+1}\|^2 \\ &= \|x_n - T^n x_n + b_n(T^n x_n - x_n) + T^n x_n - T^n x_{n+1} + c_n(S^n x_n - x_n)\|^2 \end{aligned} \quad (74)$$

eşitliği yazılabilir. Herhangi $u, v \in B$ için, $x = u + v$ ve $y = -v$ olarak Lemma 7 de bunlar yerine konulursa,

$$\|u + v\|^2 \geq \|u\|^2 + 2\langle v, j(u) \rangle \quad (75)$$

elde edilir.

(74) ve (75)'den de,

$$\begin{aligned} \|T^n x_{n+1} - x_{n+1}\|^2 &\geq \|T^n x_n - x_n\|^2 \\ &\quad + 2\langle b_n(T^n x_n - x_n) + T^n x_n - T^n x_{n+1} + c_n(S^n x_n - x_n), j(x_n - T^n x_n) \rangle \end{aligned}$$

eşitsizliği gelir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} \|T^n x_n - x_n\|^2 &\leq \|T^n x_{n+1} - x_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2\|b_n(T^n x_n - x_n) + T^n x_n - T^n x_{n+1} + c_n(S^n x_n - x_n)\| \|x_n - T^n x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 + 2(b_n \|x_n - T^n x_n\| + \|T^n x_n - T^n x_{n+1}\| + \\ &\quad c_n \|S^n x_n - x_n\|) \|x_n - T^n x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 + 2(b_n \|x_n - T^n x_n\| + L b_n \|T^n x_n - x_n\| \\ &\quad + L c_n \|S^n x_n - x_n\| + c_n \|S^n x_n - x_n\|) \|x_n - T^n x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2(1+L) \|x_n - f_p\| [(b_n(1+L) \|T^n x_n - x_n\| + c_n(1+L) \|S^n x_n - x_n\|)] \\ &\leq \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2(1+L) \|x_n - f_p\| [(b_n(1+L)^2 \|x_n - f_p\| + c_n(1+L)^2 \|x_n - f_p\|)] \end{aligned}$$

elde edilir. $\|x_n - f_p\| \leq M$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \|x_n - T^n x_n\|^2 &\leq \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 + 2M(1+L) [(b_n(1+L)^2 M + c_n(1+L)^2 M)] \\ &\leq \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 + 2b_n M^2 (1+L)^3 + 2c_n M^2 (1+L)^3 \end{aligned} \quad (76)$$

sonucuna varırız.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\| = 0$$

olduğundan (76) nolu denklemden,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T^n x_n\| = 0$$

olur.

Benzer işlemler S dönüşümü için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 &= \|(1 - b_n - c_n)x_n + b_n T^n x_n + c_n S^n x_n - S^n x_{n+1}\|^2 \\ &= \|x_n - S^n x_n + b_n(T^n x_n - x_n) + S^n x_n - S^n x_{n+1} + c_n(S^n x_n - x_n)\|^2 \end{aligned}$$

(75) denkleminde,

$$\|x_{n+1} - T^n x_{n+1}\|^2 \geq \|x_n - S^n x_n\|^2 + 2\langle b_n(T^n x_n - x_n) + S^n x_n - S^n x_{n+1} + c_n(S^n x_n - x_n), j(x_n - S^n x_n) \rangle$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \|x_n - S^n x_n\|^2 &\leq \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2\|b_n(T^n x_n - x_n) + S^n x_n - S^n x_{n+1} + c_n(S^n x_n - x_n)\| \|x_n - S^n x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 + 2(b_n \|x_n - T^n x_n\| + \|S^n x_n - S^n x_{n+1}\| + \\ &\quad c_n \|S^n x_n - x_n\|) \|x_n - S^n x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 + 2(b_n \|x_n - T^n x_n\| + L b_n \|S^n x_n - x_n\| \\ &\quad + L c_n \|T^n x_n - x_n\| + c_n \|S^n x_n - x_n\|) \|x_n - S^n x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2(1+L) \|x_n - f_p\| [(1+L)(b_n + c_n) \|T^n x_n - x_n\| + (b_n \\ &\quad + c_n)(1+L) \|S^n x_n - x_n\|] \\ &\leq \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2(1+L) \|x_n - f_p\| [(b_n + c_n)(1+L)^2 \|x_n - f_p\| + (b_n \\ &\quad + c_n)(1+L)^2 \|x_n - f_p\|] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. $\|x_n - f_p\| \leq M$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \|x_n - S^n x_n\|^2 &\leq \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 + 2(1+L)M \\ &\quad [(b_n + c_n)(1+L)^2 M + (b_n + c_n)(1+L)^2 M] \\ &\leq \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\|^2 + 2(b_n + c_n)(1+L)^3 M^2 + 2(b_n + c_n)(1+L)^3 M^2 \quad (78) \end{aligned}$$

sonucuna varırız. Hipotezin şartlarından $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + c_n) = 0$ olur.

$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - S^n x_{n+1}\| = 0$ olduğundan (77) nolu denklemden,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - S^n x_n\| = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 22: X reel bir Banach uzayı, C kümesi X 'nin konveks alt kümesi ve $T, S: C \rightarrow C$ dönüşümleri düzgün L -Lipschitzian asimptotik demikontraktif dönüşümler olsun. Burada $\{k_n\} \subseteq [1, \infty)$ dizisi, $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^2 - 1) < \infty$ şartını sağlasın. Ayrıca Lemma 9'da tanımlandığı şekilde $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ de $[0,1]$ aralığında reel diziler verilsin. Bu koşullar

altında keyfi $x_1 \in C$ için $\{x_n\}$ dizisi (62)'de tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarına kuvvetli yakınsar.

İspat: Lemma 9'a göre,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T^n x_n\| = 0 \text{ ve } \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - S^n x_n\| = 0$$

dir. Bu ise $\{x_n\}$ dizinin $\{x_{n_j}\}$ şeklinde bir alt dizisinin olduğu ve

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - T x_{n_j}\| = 0 \text{ ve } \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - S x_{n_j}\| = 0$$

limitlerinin var olduğu anlamına gelir. $\{x_{n_j}\}$ dizisi sınırlı olduğundan, T ve S de tamamen sürekli olduğundan $\{T x_{n_j}\}$ ve $\{S x_{n_j}\}$ dizilerinin kuvvetli yakınsayan $\{T x_{n_{j_k}}\}, \{S x_{n_{j_k}}\}$ alt dizileri vardır. Bu durumda $\{x_{n_{j_k}}\}$ dizisi de kuvvetli yakınsar. Varsayalım ki,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_{j_k}} = f_p.$$

Bu durumda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T x_{n_{j_k}} = T f_p \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} S x_{n_{j_k}} = S f_p$$

dir. Ayrıca,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_{j_k}} - T x_{n_{j_k}}\| = \|f_p - T f_p\| = 0$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_{j_k}} - S x_{n_{j_k}}\| = \|f_p - S f_p\| = 0$$

olur. Bu da demektir ki $f_p \in (F(T) \cap F(S))$ yani f_p , T ve S 'nin ortak sabit noktasıdır.

Denklem (73)'den,

$$\|x_{n+1} - f_p\|^2 \leq \|x_n - f_p\|^2 + M^2 \delta_n$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da Lemma 3'e göre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - f_p\| = 0$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçları üç kısma ayıracak olursak; birinci kısımda, Hilbert uzaylarında iki sürekli hemikontraktif dönüşümün ve iki düzgün sürekli α -demikontraktif dönüşümün ortak sabit noktasına yakınsamak için kapalı iterasyon metodu ifade edilmiş ve uygun şartlar altında bazı yakınsama teoremleri ispatlanmıştır.

Tezin ikinci kısmında; Hilbert uzaylarında iki sürekli hemikontraktif sonlu dönüşüm ailesinin ve iki sürekli α -demikontraktif sonlu dönüşüm ailesinin ortak sabit noktaları için birinci kısımda verilen kapalı iterasyon metodu kullanılarak bazı yakınsama sonuçları ispatlanmıştır.

Tezin son kısmında ise Banach uzaylarında iki düzgün L -Lipschitzian asimptotik demikontraktif dönüşümlerin ortak sabit noktasını bulmak için açık bir iterasyon metodu ifade edilmiş ve gerekli koşullar altında bazı ispatlar yapılmıştır.

Bu elde edilen sonuçlardan hareketle, okurlar ve araştırmacılar için aşağıdaki öneriler yapılmıştır:

- 1) Yukarıda tezin üç kısmında da elde edilen bulgular, Hilbert uzaylar ve Banach uzaylarından daha genel olan geodezik metrik uzaylara veya hiperbolik metrik uzaylara genelleştirilebilir.
- 2) 2007 yılında Huang'ın yaptığı genelleştirilmiş hemikontraktif dönüşüm tanımından hareketle genelleştirilmiş α -demikontraktif dönüşüm tanımı yapıp p -düzgün konveks geodezik metrik uzaylarda yakınsama sonuçları incelenebilir.
- 3) 2-düzgün konveks hiperbolik uzaylarda düzgün L -Lipschitzian asimptotik demikontraktif ve düzgün L -Lipschitzian asimptotik hemikontraktif dönüşümler için aşağıdaki ifade edilen iterasyon metotlarının yakınsamaları Lemma 3 ve Lemma 7 kullanılarak gösterilebilir:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n)x_n \oplus \alpha_n T^n x_n \oplus \beta_n S^n x_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T^n x_n \oplus \alpha_n S^n y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n \oplus \beta_n T^n x_n. \end{cases}$$

Burada $0 \leq \alpha_n \leq 1$ ve $0 \leq \beta_n \leq 1$ dir.

- 4) Genelleştirilmiş hemikontraktif dönüşüm tanımından hareketle, genelleştirilmiş asimptotik hemikontraktif ve demikontraktif dönüşüm tanımları yapıp p -düzgün konveks geodezik metrik uzaylarda bu dönüşümlerin sabit noktaları incelenebilir.
- 5) Materyal ve metot bölümünde de bahsedildiği gibi, bulgular kısmında ispatlanan sonuçlar veya yukarıda önerilen araştırmalar hatalı iterasyon metotları için incelenebilir.



KAYNAKÇA

- Aktaş, R., (2017). Normlu uzaylarda ve Banach ve Hilbert uzaylarında elemanların yaklaşım problemleri üzerine (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Ball, K., Carlen, E. A., & Lieb, E. H. (2002). Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms. *Inequalities: Selecta of Elliott H. Lieb*, 171-190.
- Berinde, V., & Takens, F. (2007). Iterative approximation of fixed points (Vol. 1912, pp. xvi+-322). Berlin: Springer.
- Berinde, V., (2023). Approximating fixed points of demicontractive mappings via the quasi-nonexpansive case. *Carpathian Journal of Mathematics*, 39(1), 73-85.
- Browder, F.E., & Petryshyn, W. (1966). The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces.
- Chidume, C.E., (1984). The solution by iteration of nonlinear equations in certain Banach spaces. *J. Nigerian Math. Soc*, 3, 57-62.
- Chidume, C.E., (1987). Iterative approximation of fixed points of Lipschitzian strictly pseudocontractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 99(2), 283-288.
- Chidume, C.E., (1994). Approximation of fixed points of strongly pseudocontractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 120(2), 545-551.
- Chidume, C.E., & Osilike, M. O. (1995). Ishikawa iteration process for nonlinear Lipschitz strongly accretive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 192(3), 727-741.
- Chidume, C., (1998). Global iteration schemes for strongly pseudo-contractive maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(9), 2641-2649.
- Chidume, C.E., (1998). Iterative solutions of nonlinear equations of the strongly accretive type. *Mathematische Nachrichten*, 189(1), 49-60.
- Chidume, C., & Moore, C. (1999). Fixed point iteration for pseudocontractive maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(4), 1163-1170.
- Chidume, C., & Mutangadura, S. (2001). An example on the Mann iteration method for Lipschitz pseudocontractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(8), 2359-2363.
- Chidume, C. E., & Nnoli, B. V. C. (2002). A necessary and sufficient condition for the convergence of the Mann sequence for a class of nonlinear operators. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 39(2), 269-276.
- Chidume, C., (2009). Some geometric properties of Banach spaces (pp. 1-9). Springer London.
- Cho, Y. J., Zhou, H., & Kang, S. M. (2002). Strong convergence theorems for iterative schemes with errors for asymptotically demicontractive mappings in arbitrary real normed linear spaces. *J. Inequal. Pure Appl. Math*, 3, 1-11.
- Cho, Y. J., Kang, S. M., & Qin, X. (2010). Strong convergence of an implicit iterative process for an infinite family of strict pseudocontractions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 47(6), 1259-1268.
- Dehaish, B. I., Khamsi, M. A., & Khan, A. R. (2013). Mann iteration process for asymptotic pointwise nonexpansive mappings in metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 397(2), 861-868.
- Diwan, S. D., Das, A. K., & Dashputre, S. (2018). On Mann-type Implicit Iteration Method for a Family of α -demicontractive Mappings in Hilbert Spaces. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 16(2), 443-450.
- Fukhar-ud-Din, H., & Khan, S. H., (2021). Fixed point iterations of asymptotically demicontractive and asymptotically hemicontractive mappings in hyperbolic spaces. *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(09), 2150154.

- Gürsaç, (2019) N. Banach uzaylarında accretive operatörlerin sıfırlarının incelenmesi (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Huang, J. C., & Hu, T. (2007). Strong Convergence Theorems of an Implicit Iteration Process for Generalized Hemi-contractive Mappings. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences* (Tojms), 23(3).
- Hussain, N., Ćirić, L. B., Cho, Y. J., & Rafiq, A. (2013). On Mann-type iteration method for a family of hemicontractive mappings in Hilbert spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, 1-11.
- Igbokwe, D. I., (2002). Approximation of fixed points of asymptotically demicontractive mappings in arbitrary Banach spaces.
- Ishikawa, S., (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(1), 147-150.
- Jailoka, P., Berinde, V., & Suantai, S. (2020). Strong convergence of Picard and Mann iterations for strongly demicontractive multi-valued mappings. *Carpathian Journal of Mathematics*, 36(2), 269-276.
- Khamsi, M. A., & Khan, A. R., (2011). Inequalities in metric spaces with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74(12), 4036-4045.
- Kirk, W.A., (2003). *Geodesic geometry and fixed point theory*.
- Krasnoselski, M. A., (1955). *Uspekhi Mat. Nauk* (NS), 10, 123-127.
- Kohlenbach, U., (2005). Some logical metatheorems with applications in functional analysis. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(1), 89-128.
- Maddox, I. J., *Element of Functional Analysis*, Cambridge University Press, London, UK, 1970.
- Mann, W. R., (1953). Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4(3), 506-510.
- Mărușter, L., & Mărușter, Ș., (2011). Strong convergence of the Mann iteration for α -demikontraktif mappings. *Mathematical and computer modelling*, 54(9-10), 2486-2492.
- Maruster, S. T. E. F. A. N., & Rus, I. A., (2015). Kannan contractions and strongly demikontraktif mappings. *Creative Mathematics and Informatics*, 24, 171-180.
- Naimpally, S. A., & Singh, K. L. (1983). Extensions of some fixed point theorems of Rhoades. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 96(2), 437-446.
- Naor, A., & Silberman, L. (2011). Poincaré inequalities, embeddings, and wild groups. *Compositio Mathematica*, 147(5), 1546-1572.
- Ohta, S. I. (2007). Convexities of metric spaces. *Geometriae Dedicata*, 125, 225-250.
- Osilike, M. (1996). Nonlinear accretive and pseudo-contractive operator equations in Banach spaces. *Nonlinear Anal*, 31, 779-789.
- Osilike, M. O., & Isiogugu, F. O. (2005). Fixed points of asymptotically phi (variant)-demicontractive maps in arbitrary Banach spaces. *Pan American Mathematical Journal*, 15(3), 59.
- Osilike, M. O., & Onah, A. C. (2015). Strong convergence of the Ishikawa iteration for Lipschitz α -hemikontraktif mappings. *Annals of West University of Timisoara-Mathematics and Computer Science*, 53(1), 151-161.
- Owojori, O. O. (2008). Approximation methods for fixed points of hemicontractive operators in Hilbert spaces. *Analele Stiintifice Ale Universitatii Al I Cuza Din-Iasi-Serie Noua-Matematica*. v54 i1, 97-115.
- Petryshyn, W. V., & Williamson Jr, T. E. (1973). Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 43(2), 459-497.
- Puiwong, J., & Saejung, S. (2021). On convergence theorems for single-valued and multi-valued mappings in p-uniformly convex metric spaces. *Carpathian Journal of Mathematics*, 37(3), 513-527.

- Qihou, L. (1990). The convergence theorems of the sequence of Ishikawa iterates for hemicontractive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 148(1), 55-62.
- Qihou, L. (1996). Convergence theorems of the sequence of iterates for asymptotically demicontractive and hemicontractive mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 26(11), 1835-1842.
- Rafiq, A. (2007). On Mann iteration in Hilbert spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 66(10), 2230-2236.
- Rhoades, B. E. (1976). Comments on two fixed point iteration methods. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56(3), 741-750.
- Rudin, W. (1991). *Functional analysis* 2nd ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York
- Schu, J. (1991). Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 158(2), 407-413.
- Schu, J. (1991). On a theorem of CE Chidume concerning the iterative approximation of fixed points. *Mathematische Nachrichten*, 153(1), 313-319.
- Song, Y. (2007). On a Mann type implicit iteration process for continuous pseudo-contractive mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 67(11), 3058-3063.
- Tan, K. K., & Xu, H. K. (1993). Approximating fixed points of non-expansive mappings by the Ishikawa iteration process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 178, 301-308.
- Xu, H. K. (1991). Inequalities in Banach spaces with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 16(12), 1127-1138.
- Xu, Z., & Roach, G. F. (1992). A necessary and sufficient condition for convergence of steepest descent approximation to accretive operator equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 167(2), 340-354.
- Xu, Y. (1998). Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive operator equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 224(1), 91-101.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Hülya Altınok
Eğitim	
Lise:	Erzurum Anadolu Ticaret ve Meslek Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Programı
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2022)
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Orta
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	