

**METRİK UZAYLARDA KUVVETSEL VE
ZAYIF KUVVETSEL DARALTAN TİPİ
DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ**

Yunus Serdar ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. İsa YILDIRIM

2023

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**METRİK UZAYLARDA KUVVETSEL VE ZAYIF KUVVETSEL DARALTAN
TİPİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ**

(Fixed Point Theorem For Interpolative And Weak Interpolative Type Contraction In
Metric Spaces)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yunus Serdar ŞAHİN

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Erzurum

Temmuz, 2023



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Graduate School of Natural and
Applied Sciences

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

METRİK UZAYLARDA KUVVETSEL VE ZAYIF KUVVETSEL DARALTAN TİPİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ

Prof. Dr. İsa YILDIRIM danışmanlığında, Yunus Serdar ŞAHİN tarafından hazırlanan bu çalışma, 28/07/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Sezgin AKBULUT Atatürk Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır
Danışman:	Prof. Dr. İsa YILDIRIM Atatürk Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Veysel NEZİR Kafkas Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır

Enstitü Yönetim
Kurulunun/....../.... tarih
ve sayılı kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof.Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN

Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır

Not:Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak *Prof. Dr. İsa YILDIRIM* danışmanlığında sunulan “Metrik Uzaylarda Kuvvetsel ve Zayıf Kuvvetsel Daraltan Tipi Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teorisi” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	0	30
Kuramsal Temeller	12	30
Materyal ve Metot	8	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	6	20
Sonuçlar ve Öneriler	0	20
Tezin Geneli	10	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Sunulan bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ettiğimizi beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Yunus Serdar ŞAHİN	Prof. Dr. İsa YILDIRIM
18.7.2023	18.7.2023
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

*Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her anında yardımlarını esirgemeyen, özverili bir şekilde her zaman destekleyici olan ve öğrenmeyi teşvik eden değerli hocam Sayın Prof. Dr. İsa YILDIRIM'a, teşekkürü bir borç bilir, en içten dileklerimle saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu tez çalışmasında emeği geçen ve bana yardımcı olan üniversite hocalarıma, ailem ve arkadaşlarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Yunus Serdar ŞAHİN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

METRİK UZAYLARDA KUVVETSEL VE ZAYIF KUVVETSEL DARALTAN TİPİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ

Yunus Serdar ŞAHİN

Atatürk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Amaç: Bu çalışmada, mevcut literatürdeki kuvvetsel daraltan ve zayıf kuvvetsel daraltan dönüşümler incelenecektir. Daha sonra bu dönüşüm sınıfları için sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

Yöntem: Tezdeki teoremler, literatür taraması yapılarak ispat edilmiştir.

Bulgular: Bu tez çalışmasında ilk olarak kuvvetsel daraltan ve zayıf kuvvetsel daraltan tipi dönüşümlerin tanımı verilecektir ve b – metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerinin ispatı yapılacaktır. Ayrıca bu sabit nokta teoreminin bir homotopi teorisine uygulaması gösterilecektir. Son olarak konveks b –metrik uzaylarda uygun şartlar altında bazı sabit nokta teoremleri ispatlanacak ve bununla ilgili bir örnek verilecektir.

Sonuç: Kuvvetsel daraltan ve zayıf kuvvetsel daraltan dönüşümler incelenerek bu dönüşümlerin farklı metrik uzaylardaki sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuvvetsel ve zayıf kuvvetsel daraltan dönüşümler, sabit nokta, konveks metrik uzaylar, homotopi teorisi.

Temmuz 2023, 52 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

FIXED POINT THEOREM FOR INTERPOLATIVE AND WEAK INTERPOLATIVE TYPE CONTRACTION IN METRIC SPACES

Yunus Serdar ŞAHİN

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Purpose: In this thesis, interpolative and weak interpolative contractive type mappings in the current literature will be examined. Then fixed point theorems will be obtained for such type mappings.

Method: The theorems in the thesis have been proved by a literature review.

Findings: In this thesis, firstly some definitions of interpolative and weak interpolative contractive type mappings have been introduced and some fixed points theorems in the context of b –metric are provided. Moreover as an application of fixed point theorems to the homotopy theory is shown. Finally, fixed point theorems under appropriate conditions on convex b –metric spaces are provided and an example about it is given.

Results: By examining the interpolative and weak interpolative contractive type mappings fixed point theorems of these mappings were obtained in different metric spaces.

Keywords: Interpolative and weak interpolative mappings, fixed point, convex metric spaces, homotopy theory.

July 2023, 52 pages

İÇİNDEKİLER

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Özetleri	2
1.2. Araştırmanın Amacı	2
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Genel Kavramlar	4
2.2. Bazı Dönüşüm Sınıfları	9
3. MATERYAL VE YÖNTEM	16
3.1. İterasyon Yöntemleri	16
3.2. Metrik ve Konveks Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri	19
3.3. Homotopi Teorisi	24
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	26
4.1. Zayıf Kuvvetsel Hardy ve Rogers Daraltan Dönüşümü	26
4.2. Zayıf Kuvvetsel Hardy ve Rogers Daraltan Dönüşümünün Homotopi Teorisine Uygulaması	31
4.3. Konveks b –Metrik Uzaylarda Kuvvetsel Dönüşümlerin Sabit Nokta Teoremleri	34
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	49
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	52

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Uzaylar Arasında Bağlantılar.....	9
Şekil 2.2. Dönüşümler Arası Bağlantılar	15
Şekil 3.1. $H(, t)$ dönüşümünün şekli.....	25

SİMGELER DİZİNİ

(C, ρ)	Metrik Uzay
(C, ρ, w)	Konveks Metrik Uzay
(C, ρ_b, w)	Konveks b –Metrik Uzay
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Reel Uzay
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\bar{D}$	D Kümesinin Kapanışı
l_p	Dizi Uzayı
∂U	U Kümesinin Sınırı
$B(\zeta_0, r)$	ζ_0 Merkezli r Yarıçaplı Açık Yuvar
$\overline{B(\zeta_0, r)}$	ζ_0 Merkezli r Yarıçaplı Kapalı Yuvar
$Fix(F)$	F Dönüşümün Sabit Noktalar Kümesi

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisinde nihai amaçlar, dönüşüm sınıflarını genişletmek ve bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının incelendiği uzayları genelleştirmektir. Özellikle dönüşüm sınıflarını genişletmek için Berinde (2004), zayıf daraltan dönüşümleri sınıflandırmış ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını tam metrik uzaylarda göstermiştir.

Karapınar (2018), Karapınar *et al.* (2018a) ve Karapınar *et al.* (2018b) kuvvetsel daraltan notasyonlu yeni daraltan dönüşümü tanımlamıştır. Metrik ve kısmi metrik uzaylarda bu dönüşümlerin sabit noktalarını incelemiştir. Ayrıca kuvvetsel tipi daraltan dönüşümlerin birçok genellemesini tanıtmıştır.

Yukarıdaki çalışmalardan yola çıkarak Roy and Saha (2021), zayıf daraltan dönüşümünün yeni tanımını ve zayıf kuvvetsel daraltan dönüşümleri tanıtmış ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını Picard iterasyonu kullanarak b – metrik uzaylarda ispatlamışlardır. Ayrıca zayıf kuvvetsel daraltan ve kuvvetsel daraltan dönüşümleri arasındaki ilişkileri açıklayan örnekler vererek homotopik dönüşümlerde bu sabit nokta teoremlerinin uygulamasını yapmışlardır.

Panja and Roy (2021) ise metrik uzaylara alternatif zayıf kuvvetsel Berinde tipi daraltan dönüşümü tanımlamıştır. Bu dönüşümü kullanarak kuvvetsel daraltan dönüşümleri topolojik olarak incelemişlerdir. Kuvvetsel dönüşümlerin, Ciri'-c-quasi daraltan dönüşümünün özel bir hâli olduğunu ispatlamışlardır.

Literatürde birçok farklı uzay genellemesi vardır. Bunlardan birisi metrik uzayların daha genel hâli olan b –metrik uzaylardır. Bakhtin (1989), b –metrik uzay kavramını tanımlamıştır ve Banach daralma prensibinin bu uzayda sağlandığını ispat etmiştir. Bir diğer metrik uzay genellemesi ise konveks metrik uzaylardır.

Takahashi (1970), metrik uzaylarda konvekslik kavramını tanımlamış ve genişlemeyen dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamıştır.

2022 yılında Yıldırım, Picard iterasyonu dışında farklı iterasyon metotları kullanılarak da kuvvetsel daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının incelenebileceğine dair bir çalışma yapmıştır. Yazar, çalışmasında konveks metrik uzaylarda kuvvetsel Kannan daraltan, kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi ve kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan tipi dönüşüm sınıflarının sabit noktalarını incelemiş ve Mann iterasyonun bu dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsadığını göstermiştir (Yıldırım 2022).

Chen *et al.* (2020), konveks b – metrik uzayın tanımını yapmışlar ve Mann iterasyonu metodunu bu uzayda genişletmişlerdir. Ayrıca konveks b – metrik uzaylarda Kannan ve daraltan dönüşüm sınıflarının sabit noktalarını incelemişlerdir.

1.1. Kaynak Özetleri

Homotopi teorisi ve kuvvetsel daraltan dönüşümlerle ilgili tanımlar, bu dönüşümlerin sabit nokta teoremleri ve bu dönüşümlerin birbiriyle ilişkisini açıklayan örneklerle ilgili literatür çalışmaları için Berinde (2004), Berinde (2007), Karapınar (2018), Karapınar *et al.* (2018a), Karapınar *et al.* (2018b), Errai *et al.* (2020), Roy and Saha (2021) ve Gaba *et al.* (2021) kaynakları kullanılmıştır. Diğer taraftan kuvvetsel daraltan dönüşümlerin konveks uzaylarda Mann iterasyonu kullanılarak incelenmesi ile ilgili teoremler için, Takahashi (1970), Kim *et al.* (2006), Khan and Ahmed (2010), Liu *et al.* (2010), Yıldırım and Khan (2012), Gunduz ve Akbulut (2013), Chen *et al.* (2020), Yıldırım (2022) ve Yıldırım ve Sahin (2022) kaynakları referans alınmıştır.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada, mevcut literatürdeki kuvvetsel daraltan ve zayıf kuvvetsel daraltan dönüşümler incelenecektir. Zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşüm sınıfı tanıtılacaktır. Picard iterasyon metodu kullanılarak b – metrik uzaylarda zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşüm sınıfı için sabit nokta

teoremleri elde edilecektir. Aynı zamanda kuvvetsel daraltan ve zayıf kuvvetsel daraltan dönüşümler arasındaki ilişkiler örneklerle gösterilecektir. Daha sonra zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümünün homotopi teorisinin uygulaması verilecektir. Son olarak konveks b – metrik uzaylarda Mann iterasyonu metodu kullanılarak kuvvetsel Kannan daraltan, kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi ve kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşüm sınıfları için sabit nokta teoremleri elde edilecektir. Bu amaçla kurumsal temeller adlı bölümde, temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde kullanacağımız uzay tanımları, dönüşüm tanımları ve dönüşümlerin arasındaki bağlantılar, bu bağlantıları içeren bazı örnekler verilecektir.

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde metrik uzay çeşitlerinden bahsedilecektir. Bu tez çalışmasında dönüşümlerin sabit noktalarını incelemek için kullanılacak b –metrik uzay, konveks metrik uzay, konveks b –metrik ve kısmi metrik uzay tanıtılmıştır.

Tanım 2.1.1. C boş olmayan bir küme ve $F: C \times C$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $F\zeta = \zeta$ olacak şekilde bir $\zeta \in C$ varsa, bu ζ noktasına F dönüşümün sabit noktası denir. $F\zeta = \zeta$ denkleminin çözümü veya çözümleri F nin sabit noktalarıdır. F nin bütün sabit noktalarının kümesi $Fix(F)$ ile gösterilir (Berinde 2007).

Tanım 2.1.2. (C, ρ) metrik uzay ve $w: C \times C \times [0,1] \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $r, \zeta, \eta \in C$ ve $\mu \in [0,1]$ için,

$$\rho(r, w(\zeta, \eta; \mu)) \leq \mu\rho(r, \zeta) + (1 - \mu)\rho(r, \eta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, w dönüşümüne C üzerinde bir konveks yapı ve w konveks yapısı ile birlikte C ye konveks metrik uzay denir. Bu uzayı göstermek için (C, ρ, w) notasyonu kullanılır (Takahashi 1970).

Örnek 2.1.3. $C = \mathbb{R}$ olsun ve her $\zeta, \eta \in C$ için $\rho(\zeta, \eta) = |\zeta - \eta|$ olacak şekilde bir $\rho: C \times C \rightarrow [0, \infty)$ metrik fonksiyonu tanımlansın. Kabul edelim ki $w: C \times C \times \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow C$ dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$w(\zeta, \eta; \mu) = \frac{\zeta + \eta}{2}$$

O zaman (C, ρ, w) , bir konveks metrik uzaydır.

Tanım 2.1.4. C boştan farklı bir küme ve $s \geq 1$ olmak üzere bir reel sayı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\rho: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne b –metrik denir:

$$B1) \rho(\zeta, \eta) \geq 0,$$

$$B2) \rho(\zeta, \eta) = 0 \Leftrightarrow \zeta = \eta,$$

$$B3) \rho(\zeta, \eta) = \rho(\eta, \zeta),$$

$$B4) \rho(\zeta, r) \leq s[\rho(\zeta, \eta) + \rho(\eta, r)] \text{ (Bakhtin 1989).}$$

b – metrik uzaylar, metrik uzayların daha genel hâlidir. Eğer $s = 1$ alınırsa b –metrik uzayların aynı zamanda metrik uzaylar olduğu görülür.

Örnek 2.1.5. (C, ρ) bir metrik uzay ve $l > 1$ olmak üzere, $\rho(\zeta, \eta) = [d(\zeta, \eta)]^l$ olsun. $s = 2^{l-1}$ için ρ dönüşümünün bir b –metrik olduğunu gösterelim. Tanım 2.1.4 teki $B1$, $B2$) ve $B3$) durumlarının sağlandığı açıktır. Eğer $1 < l < \infty$ ve $f(\zeta) = \zeta^l$ ise fonksiyonunun konveks olmasından dolayı $(\frac{a+b}{2})^l \leq \frac{1}{2}(a^l + b^l)$ sağlanır. Bu durumda $(a + b)^l \leq 2^{l-1}(a^l + b^l)$ elde edilir. Böylece her $\zeta, \eta, r \in C$ için

$$\begin{aligned} \rho(\zeta, \eta) &= (d(\zeta, \eta))^l \leq (d(\zeta, r) + d(r, \eta))^l \\ &\leq 2^{l-1}[(d(\zeta, r))^l + (d(r, \eta))^l] \\ &= 2^{l-1}(\rho(\zeta, r) + \rho(r, \eta)) \end{aligned}$$

olduğundan $s = 2^{l-1}$ ile $B4$) eşitsizliği de sağlanır (Huang *et al.* 2017).

Örnek 2.1.6. $C = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\rho(\zeta, \eta) = |\zeta - \eta|$ bir alışılmış bir metrik olsun. $\rho(\zeta, \eta) = [d(\zeta, \eta)]^3$ dönüşümü $s = 2^{3-1}$ katsayılı bir b – metriktir. Fakat $\mathbb{R}$ de bir metrik değildir. Çünkü verilen dönüşüm, üçgen eşitsizliğini sağlamamaktadır.

Tanım 2.1.7. C boş olmayan bir küme ve $\rho: C \times C \rightarrow [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta, r \in C$ için

$$P1) \zeta = \eta \Leftrightarrow \rho(\zeta, \zeta) = \rho(\zeta, \eta) = \rho(\eta, \eta),$$

$$P2) \rho(\zeta, \zeta) \leq \rho(\zeta, \eta),$$

$$P3) \rho(\zeta, \zeta) = \rho(\eta, \zeta).$$

$$P4) \rho(\zeta, \eta) \leq \rho(\zeta, r) + \rho(r, \eta) - \rho(r, r),$$

şartları sağlanıyorsa (C, ρ) ikilisine kısmi metrik uzay denir (Matthew 1994). P1) ve P2) özelliğinden dolayı $\rho(\zeta, \eta) = 0$ ise $\zeta = \eta$ dir. Fakat, $\zeta = \eta$ iken $\rho(\zeta, \eta) = 0$ olmak zorunda değildir (Matthew 1994). Dolayısıyla, her kısmi metrik bir metrik değildir.

Örnek 2.1.8. $\rho: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\rho(\zeta, \eta) = \max\{\zeta, \eta\}$ olarak tanımlanan dönüşüm bir kısmi metriktir fakat metrik değildir (Matthew 1994). Tanımlanan dönüşümün P1), P2) ve P3) şartlarını sağladığı açıktır. Şimdi ise P4) şartının sağlandığını gösterelim.

- (i) $\zeta \geq \eta \geq r$ ise $\zeta \leq \zeta + \eta - r$ olduğu açıktır.
- (ii) $\zeta \geq r \geq \eta$ ise $\zeta \leq \zeta + r - r$ olduğu açıktır.
- (iii) $\eta \geq \zeta \geq r$ ise $\eta \leq \zeta + \eta - r$ olduğu açıktır.
- (iv) $\eta \geq r \geq \zeta$ ise $\eta \leq r + \eta - r$ olduğu açıktır.
- (v) $r \geq \zeta \geq \eta$ ise $\zeta \leq r + r - r$ olduğu açıktır.
- (vi) $r \geq \eta \geq \zeta$ ise $\zeta \leq r + r - r$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\rho(\zeta, \eta) = \max\{\zeta, \eta\}$ dönüşümü bir kısmi metriktir.

Tanım 2.1.9. (C, ρ) bir b – metrik uzay olsun. C kümesindeki herhangi bir $\{\zeta_n\}$ dizisinin:

(a) yakınsak olması için gerek yeter şart $\zeta \in C$ olacak şekilde $n \rightarrow +\infty$ iken $\rho(\zeta_n, \zeta) \rightarrow 0$ olmasıdır. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta$ dir.

(b) Cauchy dizisi olması için gerek yeter şart $n, m \rightarrow +\infty$ iken $\rho(\zeta_n, \zeta_m) \rightarrow 0$ olmasıdır (Bayraktar 2017).

Tanım 2.1.10. (C, ρ) bir b – metrik uzay olsun. Eğer D, C kümesinin boştan farklı bir alt kümesi ise $\bar{D}$ (D kümesinin kapanışı), D kümesindeki bütün dizilerin yakınsadığı noktalar kümesidir (Bayraktar 2017).

$$\bar{D} = \left\{ \zeta \in C: D \text{ kümesinde } \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta \text{ olacak şekilde bir } \{\zeta_n\} \text{ dizisi vardır.} \right\}$$

Tanım 2.1.11. (C, ρ) bir b – metrik uzay olsun. $D \subset C$ olacak şekilde, herhangi bir alt kümenin kapalı olabilmesi için gerek ve yeter şart $\zeta \in D$ olacak şekilde D kümesinden alınan her bir $\{\zeta_n\}$ dizisinin bir ζ elamanına yakınsamasıdır (Bayraktar 2017).

Tanım 2.1.12. (C, ρ) b –metrik uzayının tam olabilmesi için gerek ve yeter şart C deki her $\{\zeta_n\}$ Cauchy dizisinin yakınsak olmasıdır (Bayraktar 2017).

Tanım 2.1.13. (C, ρ_b) bir b –metrik uzay, $s \geq 1$ ve $\mu = [0,1]$ aralığı verilsin. Ayrıca $w: C \times C \times [0,1] \rightarrow C$ dönüşümü bu metrik uzay üzerinde konveks bir yapı olsun. Yani, her $r \in C$ ve $(\zeta, \eta; \mu) \in C \times C \times [0,1]$ için

$$\rho_b(r, w(\zeta, \eta; \mu)) \leq \mu \rho_b(r, \zeta) + (1 - \mu) \rho_b(r, \eta)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda (C, ρ_b, w) üçlüsü bir konveks b –metrik uzayıdır (Chen et al. 2020).

Örnek 2.1.14. $C = \mathbb{R}^n$ ve her $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in C$ ve $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in C$ için $\rho_b(\zeta, \eta) = (\sum_{i=1}^n |\zeta_i - \eta_i|^2)$ olsun. (C, ρ_b) ikilisi $s = 2$ katsayılı bir b –metrik uzayıdır. Her $\zeta, \eta \in C$ için $w: C \times C \times [0,1] \rightarrow C$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$w(\zeta, \eta; \mu) = \mu\zeta + (1 - \mu)\eta.$$

Her $r, \zeta, \eta \in C$ için,

$$\begin{aligned} \rho_b(r, w(\zeta, \eta; \mu)) &= \sum_{i=1}^n (r_i - (\mu\zeta_i + (1 - \mu)\eta_i))^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n ((\mu|r_i - \zeta_i| + (1 - \mu)|r_i - \eta_i|))^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\mu^2(r_i - \zeta_i)^2 + (1 - \mu)^2(r_i - \eta_i)^2 \\ &\quad + (2\mu(1 - \mu) \sum_{i=1}^n |r_i - \zeta_i| |r_i - \eta_i|)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\mu^2(r_i - \zeta_i)^2 + (1 - \mu)^2(r_i - \eta_i)^2 \\ &\quad + \mu(1 - \mu)(\sum_{i=1}^n |r_i - \zeta_i|^2 + |r_i - \eta_i|^2)) \\ &= \mu\rho_b(r, \zeta) + (1 - \mu)\rho_b(r, \eta) \end{aligned}$$

olur. Böylece (C, ρ_b, w) bir konveks b – metrik uzaydır (Chen *et al.* 2020).

Örnek 2.1.15. $C = \mathbb{R}$ ve her $\zeta, \eta \in C$ için $\rho_b(\zeta, \eta) = |\zeta - \eta|^l$, $l > 1$ olacak şekilde $\rho_b: C \times C \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü tanımlayalım. Açıktır ki (C, ρ_b) , $s = 2^{l-1}$ katsayılı bir b – metrik uzaydır. $w: C \times C \times \{\frac{1}{2}\} \rightarrow C$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$w(\zeta, \eta; \mu) = \frac{\zeta + \eta}{2},$$

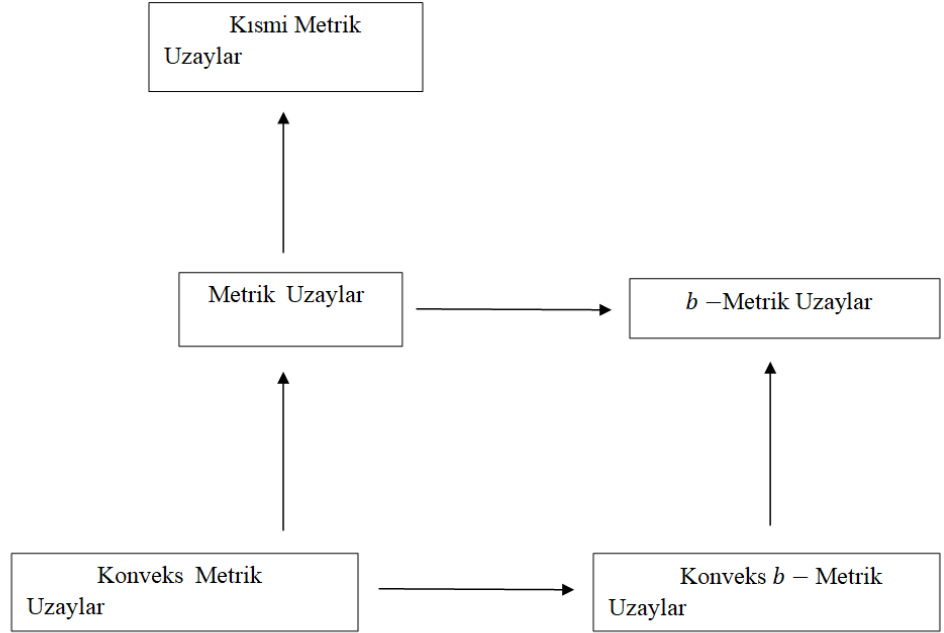
her $r, \zeta, \eta \in C$ için,

$$\begin{aligned} \rho_b(r, w(\zeta, \eta; \mu)) &= \left| r - \left[\frac{\zeta + \eta}{2} \right] \right|^l \\ &= \left| \frac{r - \zeta}{2} + \frac{r - \eta}{2} \right|^l \\ &\leq 2^{l-1} [2^{-l} |r - \zeta|^l + 2^{-l} |r - \eta|^l] \end{aligned}$$

$$= 2^{-1}[|r - \zeta|^l + |r - \eta|^l]$$

$$= \mu \rho_b(r, \zeta) + (1 - \mu) \rho_b(r, \eta)$$

olur. Bu yüzden (C, ρ_b, w) bir konveks b -metrik uzaydır (Chen *et al.* 2020).



Şekil 2.1. Uzaylar Arasında Bağlantılar

2.2. Bazı Dönüşüm Sınıfları

Tanım 2.2.1. $F: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda \rho(\zeta, \eta) + K \rho(\eta, F\zeta)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ ve $K \geq 0$ sayıları varsa F ye zayıf daraltan dönüşüm denir. Yukarıdaki eşitsizlikte $K = 0$ alınırsa, daraltan dönüşüm elde edilir. Bu sebeple zayıf daraltan dönüşümler birçok daraltan dönüşümlerin daha genel hâlidir (Berinde 2004).

Tanım 2.2.2. (C, ρ) bir metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho(\zeta, F\zeta)]^\xi [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi}$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ ve $\xi \in (0,1)$ sayıları varsa F ye kuvvetsel Kannan daraltan dönüşümü denir (Karapınar 2018).

Tanım 2.2.3. (C, ρ) bir metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma}$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ ve $\xi, \sigma \in (0,1)$ sayıları varsa F ye kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi dönüşümü denir (Karapınar *et al.* 2018a).

Tanım 2.2.4. (C, ρ) bir metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^\tau \left[\frac{1}{2} (\rho(\eta, F\zeta) + \rho(\zeta, F\eta)) \right]^{1-\xi-\sigma-\tau}$$

olacak şekilde $\lambda \in (0,1)$; $\xi, \sigma, \tau \in (0,1)$ ve $\xi + \sigma + \tau < 1$ sayıları varsa F ye kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümü denir (Karapınar *et al.* 2018b).

Tanım 2.2.5. (C, ρ) bir metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda\rho(\zeta, \eta) + K\rho(\zeta, F\eta)\rho(\eta, F\zeta)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ ve $K \geq 0$ sayıları varsa bu dönüşüme özel tipli zayıf daraltan dönüşüm denir (Roy and Saha 2021).

Tanım 2.2.6. (C, ρ) bir b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda\rho(\zeta, \eta) + K[\rho(\eta, F\zeta)]^\gamma [\rho(\zeta, F\eta)]^\delta$$

olacak şekilde $\lambda \in (0, \frac{1}{s})$, $\gamma, \delta > 0$ ve $K \geq 0$ sayıları varsa F ye zayıf kuvvetsel daraltan dönüşüm denir (Roy and Saha 2021).

Yukarıdaki tanımda $K = 0$ alınırsa daraltan dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir daraltan dönüşümün zayıf kuvvetsel daraltan dönüşüm olduğu anlaşılır.

Örnek 2.2.7. $C = [0,4] \subset \mathbb{R}$ olsun ve metrik fonksiyonu ise mutlak değer metriği ile tanımlansın. $F: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$F\zeta = \begin{cases} 0, & 0 \leq \zeta \leq 2 \\ 4, & 2 < \zeta \leq 4 \end{cases}$$

yukarıdaki gibi tanımlanırsa $\lambda = 1/3$, $\gamma = \delta = 1$ ve $K = 1$ katsayıları için dönüşüm sağlanır. $\zeta = 0$ ve $\zeta = 4$ noktaları, bu dönüşümün sabit noktaları olduğu aşikârdır.

Örnek 2.2.7 yi göstermek için dönüşümü üç farklı durumda inceleyeceğiz:

- (i) Eğer $\zeta, \eta \in [0,2]$ ise dönüşümün sağlandığı açıktır.
- (ii) Eğer $\zeta, \eta \in (2,4]$ ise yine dönüşüm sağlanır.
- (iii) Kabul edelim ki $\zeta \in [0,2]$ ve $\eta \in (2,4]$ ve $A = \lambda\rho(\zeta, \eta)$ olsun.

Tanım 2.2.6 dan

$$\begin{aligned} \rho(F\zeta, F\eta) &\leq A + K[\rho(\eta, F\zeta)]^\gamma [\rho(\zeta, F\eta)]^\delta \\ 4 &= A + K[\rho(\eta, 0)][\rho(\zeta, 4)] \\ &\leq A + 1[\rho(4, 0)][\rho(0, 4)] \\ &= A + 16 \end{aligned}$$

olup F dönüşümü zayıf kuvvetsel daraltan dönüşüm şartını sağlar.

Tanım 2.2.8. (C, ρ) bir b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için;

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho(\zeta, F\zeta)]^\xi [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi} + K[\rho(\eta, F\zeta)]^\gamma [\rho(\zeta, F\eta)]^\delta$$

olacak şekilde $\lambda \in (0, \frac{1}{s})$, $\xi \in (0, 1)$; $\gamma, \delta > 0$ ve $K \geq 0$ sayıları varsa F ye zayıf kuvvetsel Kannan daraltan dönüşüm denir.

Yukarıdaki tanımda $K = 0$ alınırsa kuvvetsel Kannan daraltan dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir kuvvetsel Kannan daraltan dönüşümün, zayıf kuvvetsel Kannan daraltan tipi bir dönüşüm olduğu anlaşılır (Roy and Saha 2021).

Örnek 2.2.9. $C = [0,3] \subset \mathbb{R}$ olsun ve metrik uzay ise mutlak değer metriği ile verilsin. $F: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$F\zeta = \begin{cases} 0, & 0 \leq \zeta \leq 1 \\ 3, & 1 < \zeta \leq 3 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. F dönüşümü $\lambda = \xi = 1/2$, $\gamma = \delta = 1$ ve $K = 5$ için Tanım 2.2.8 i sağlar. Fakat F dönüşümü $\zeta = 1$ ve $\eta = 2$ için Tanım 2.2.2 yi sağlamaz. İlk önce F dönüşümünün bir zayıf kuvvetsel Kannan daraltan dönüşümü olduğunu gösterelim:

(i) Eğer $\zeta, \eta \in [0,1]$ ise dönüşümün sağlandığı açıktır.

(ii) Eğer $\zeta, \eta \in (1,3]$ ise yine dönüşüm sağlanır.

(iii) Kabul edelim ki $\zeta \in [0,1]$ ve $\eta \in (1,3]$ ve $A = \lambda[\rho(\zeta, F\zeta)]^\xi[\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi}$ olsun.

Tanım 2.2.8 den;

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq A + K[\rho(\eta, F\zeta)]^\gamma[\rho(\zeta, F\eta)]^\delta$$

elde edilir. Örnekteki katsayılar yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \rho(F\zeta, F\eta) &\leq A + 5[\rho(\eta, 0)]^1[\rho(\zeta, 3)]^1 \\ 3 &= A + 5[\rho(3,0)][\rho(0,3)] \\ &\leq A + 45 \end{aligned}$$

olur. Şimdi ise bu dönüşümün kuvvetsel Kannan daraltan dönüşümünü sağlamadığını göstereceğiz. $\zeta = 1$ ve $\eta = 2$ için Tanım 2.2.2 den

$$\rho(F1, F2) \leq \lambda[\rho(1, F1)]^\xi[\rho(2, F2)]^{1-\xi}$$

elde ederiz. Örnekteki katsayıların değeri eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$3 \leq \frac{1}{2}\rho(1,0)^{\frac{1}{2}}.\rho(2,3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu ise bir zıtlık belirtir. Bu yüzden F dönüşümü kuvvetsel Kannan daraltan dönüşümünü sağlamaz.

Tanım 2.2.10. (C, ρ) bir b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma} + K[\rho(\eta, F\zeta)]^\gamma [\rho(\zeta, F\eta)]^\delta$$

olacak şekilde $\lambda \in (0, \frac{1}{s})$, $\xi \in (0, 1)$, $\sigma \in [0, 1)$; $\gamma, \delta > 0$ ve $K \geq 0$ sayıları varsa F ye zayıf kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c tipi daraltan dönüşüm denir. $K = 0$ alınırsa kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi dönüşüm elde edilir. Buradan herhangi bir kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi dönüşümün, zayıf kuvvetsel daraltan Reich–Rus–Ciri’c tipi dönüşüm olduğu anlaşılır (Roy and Saha 2021).

Örnek 2.2.11. $(C = \mathbb{N}, \rho)$ alışılmış bir metrik uzay olsun. $F: C \rightarrow C$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$F(\zeta) = \begin{cases} \zeta, & \zeta = 3, 5 \text{ ise} \\ 5, & \zeta = 4 \text{ ise} \\ \frac{\zeta}{2}, & \zeta (\neq 4) \text{ çift ise} \\ \frac{\zeta + 1}{2}, & \zeta (\neq 3, 5) \text{ tek ise} \end{cases}$$

F dönüşümü $\lambda = 3/7$, $\xi = 1/2 = \sigma$, $\gamma = 2 = \delta$ ve $K = 10$ için zayıf kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi dönüşümünü sağlarken $\zeta = 2$ ve $\eta = 4$ için kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi dönüşümünü sağlamaz. Bu örneği göstermek için üç durumda inceleyeceğiz:

(i) Kabul edelim ki ζ ve η çift ve $A = \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma}$ olsun.

$$\rho\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{\eta}{2}\right) \leq A + 10\rho\left(\eta, \frac{\zeta}{2}\right)^2 \rho\left(\zeta, \frac{\eta}{2}\right)^2$$

eşitsizliğin doğru olduğu açıktır.

(ii) Kabul edelim ki ζ ve η tek sayı ve $A = \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma}$ olsun.

$$\rho\left(\frac{\zeta+1}{2}, \frac{\eta+1}{2}\right) \leq A + 10\rho\left(\eta, \frac{\zeta+1}{2}\right)^2 \rho\left(\zeta, \frac{\eta+1}{2}\right)^2$$

eşitsizliğin doğru olduğunu açıktır.

(iii) Kabul edelim ki ζ çift, η tek sayı ve

$A = \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma}$ olsun.

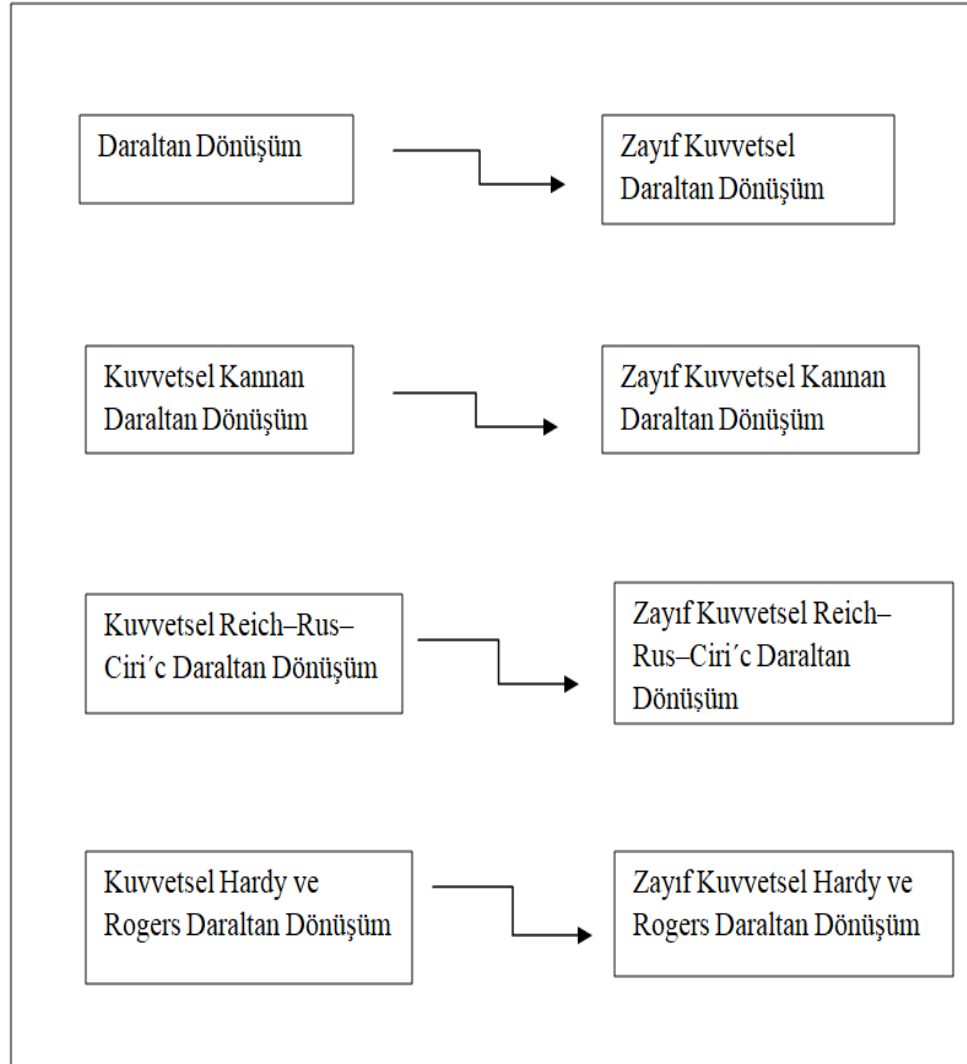
$$\rho\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{\eta+1}{2}\right) \leq A + 10\rho\left(\eta, \frac{\zeta}{2}\right)^2 \rho\left(\zeta, \frac{\eta+1}{2}\right)^2$$

eşitsizliğin doğru olduğu açıktır.

Böylece zayıf kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi dönüşüm sağlanır. Şimdi ise bu dönüşümün kuvvetsel Reich daraltan tipi dönüşümünü sağlamadığını gösterelim. $\zeta = 2$ ve $\eta = 4$ için

$$\begin{aligned} \rho(F2, F4) &\leq \frac{3}{7} \rho(2, 4)^{\frac{1}{2}} \rho(2, F2)^{\frac{1}{2}} \rho(4, F4)^0 \\ &= \frac{3}{7} 2^{\frac{1}{2}} \cdot 1^{\frac{1}{2}} \cdot 1^0 \\ 4 &\leq \frac{3\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

dir. Bu durum zıtlık belirtir (Roy and Saha 2021).



Şekil 2.2. Dönüşümler Arası Bağlantılar

3.MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde araştırma bulguları kısmındaki kuvvetsel daraltan dönüşümlerin, sabit noktalarına yakınsamak için gerekli olan iterasyon metotlarına ve teoremlere yer verilmiştir.

3.1. İterasyon Yöntemleri

Yapılan çalışmalarda genel olarak iterasyon metotlarının dönüşümlerin sabit noktasına yakınsama durumu incelenmiş ve farklı uzaylar için farklı iterasyon yöntemleri kullanılmıştır. Öncelikle yakınsama ile ilgili kavramlar verilecek, daha sonrasında farklı iterasyon yöntemlerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.1.1. (C, ρ) bir metrik uzay ve $\{\zeta_n\}$, C de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\zeta_n, \zeta) = 0$$

olacak şekilde bir $\zeta \in C$ varsa bu ζ_n dizisi ζ ye yakınsar denir. Bu durum kısaca

$$\zeta_n \rightarrow \zeta$$

ile gösterilir. Burada ζ ye $\{\zeta_n\}$ dizisinin limiti denir (Bayraktar 2017).

Teorem 3.1.2. (C, ρ) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde, (C, ρ) de yakınsak bir dizi sınırlı ve limiti tektir (Bayraktar 2017).

İspat: $\zeta_n \rightarrow \zeta$ olsun. Bu takdirde $\varepsilon = 1$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\rho(\zeta_n, \zeta) < 1$ olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır.

$$\alpha = \max\{\rho(\zeta_1, \zeta), \dots, \rho(\zeta_{n_0}, \zeta), 1\}$$

olsun. Bu takdirde her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(\zeta_n, \zeta) < \alpha$ dır. Böylece her n ve m için $\rho(\zeta_n, \zeta_m) \leq \rho(\zeta_n, \zeta) + \rho(\zeta_m, \zeta) \leq 2\alpha$ dır. O halde $\{\zeta_n\}$ sınırlıdır.

Yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu göstermek için $\zeta_n \rightarrow \zeta$ ve $\zeta_n \rightarrow \eta$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$0 \leq \rho(\zeta, \eta) \leq \rho(\zeta, \zeta_n) + \rho(\zeta_n, \eta) \rightarrow 0 + 0 = 0$$

dır. Metriğin birinci aksiyomundan dolayı $\zeta = \eta$ dır (Bayraktar 2017). Bu teoremin ispatı sabit nokta teoremleri için büyük bir önem arz etmektedir.

Tanım 3.1.3. C herhangi bir küme ve $F: C \rightarrow C$ kendi üzerine bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $\zeta \in C$ için $F^0(\zeta) = \zeta$ ve $F^{n+1}(\zeta) = F(F^n(\zeta))$ biçiminde tanımlanan $F^n(\zeta)$ ye ζ nin F altındaki n . iterasyonu denir.

Herhangi bir $\zeta_0 \in C$ için

$$\zeta_n = F\zeta_{n-1} = F^n\zeta_0 \quad (n \geq 1)$$

ifadesine, başlangıç değeri ζ_0 olan ardışık terimler dizisi denir. Ayrıca başlangıç noktası ζ_0 olan Picard iterasyonu olarak da bilinir (Picard 1890).

Kendi üzerine tanımlanan bir F dönüşümü için aşağıdaki ifadelerin sağlandığı açıktır:

- 1) F dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $Fix(F)$ olarak gösterilirse her $n \in \mathbb{N}^*$ için $Fix(F) \subset Fix(F^n)$ dir.
- 2) Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $Fix(F^n) = \{\zeta\}$ ise $Fix(F) = \{\zeta\}$ dir. $Fix(F^n)$ nin eleman sayısı birden fazla ise (1) in tersi genelde doğru değildir (Berinde 2007).

Örnek 3.1.4. $F: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dönüşümü için $F(1) = 5$, $F(2) = 4$, $F(3) = 3$, $F(4) = 2$ ve $F(5) = 1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $Fix(F^2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmasına karşın $Fix(F) = \{3\}$ olur.

Metrik ve b –metrik uzaylarda dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamak için genellikle Picard iterasyonu kullanılır. Bu uzaylar konveks yapı ihtiva etmediğinden Mann, Ishikawa, Noor gibi iterasyon metotlarının yakınsaması incelenemez. Eğer

çalışılan metrik uzay konveks ise bu taktirde farklı iterasyon metotlarının yakınsamaları incelenebilir. Şimdi konveks metrik uzayda Mann iterasyon şemasının tanımını vereceğiz. Mann tarafından 1953 yılında kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. Rhoades (1974), çalışmasıyla herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm için Mann iterasyonunun bu dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir. Chen ve arkadaşları konveks metrik uzaylarda Mann iterasyonunu kullanarak bazı sabit nokta teoremleri ifade etmiş ve ispatlamışlardır (Chen *et al.* 2020).

Tanım 3.1.5. (C, ρ, w) bir konveks metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ kendi üzerine bir dönüşüm olsun. Konveks metrik uzaylarda Mann iterasyon şeması aşağıdaki gibidir:

$\zeta_n \in C$ ve $\mu_n \in I$ olmak üzere

$$\zeta_{n+1} = w(\zeta_n, F\zeta_n; \mu_n), n \geq 1$$

şeklindedir. Bu iterasyon normlu uzaylarda

$$\zeta_{n+1} = \mu_n \zeta_n + (1 - \mu_n) F\zeta_n$$

şeklinde tanımlanır (Mann 1953). $\mu_n = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir.

Örnek 3.1.6. $C = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olsun. $F\zeta = \frac{\zeta}{5}$ ve $\zeta \in C$ olmak üzere $F: C \rightarrow C$ tanımlı bir dönüşüm tanımlansın. $\mu_{n-1} = \frac{1}{10}$ ve $\zeta_0 = 1$ ise Mann iterasyonu F dönüşümünün sabit noktası olan $\zeta = 0$ noktasına yakınsar.

$\zeta_0 \in C \setminus \{0\}$ olarak seçilsin.

$$\zeta_n = \mu_{n-1} \zeta_{n-1} + (1 - \mu_{n-1}) F\zeta_{n-1}$$

ve $F\zeta = \frac{\zeta}{5}$ eşitlikleri kullanırsa;

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \mu_{n-1} \zeta_{n-1} + (1 - \mu_{n-1}) F\zeta_{n-1} \\ &= \mu_{n-1} \zeta_{n-1} + (1 - \mu_{n-1}) \left(\frac{\zeta_{n-1}}{5} \right) \end{aligned}$$

$$= \zeta_{n-1}(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\mu_{n-1})$$

elde edilir. Böylece $\zeta_n = \zeta_{n-1}(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\mu_{n-1})$ olduğundan

$$\zeta_{n-1} = \zeta_{n-2}(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\mu_{n-2}),$$

$$\zeta_{n-2} = \zeta_{n-3}(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\mu_{n-3}), \dots, \zeta_1 = \zeta_0(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\mu_0)$$

elde ederiz.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_{n-1} = \frac{1}{10}$ olduğundan

$$\zeta_n = (\frac{7}{25})^n \zeta_0 \text{ ve } F\zeta_n = \frac{1}{5} (\frac{7}{25})^n \zeta_0$$

$n \rightarrow \infty$ için, $\zeta_n \rightarrow 0 \in C$ ve $F\zeta_n \rightarrow 0 \in C$ bulunur. 0, F dönüşümünün sabit noktası olduğundan Mann iterasyonu, bu dönüşümün sabit noktasına yakınsar (Chen *et al.* 2020).

3.2. Metrik ve Konveks Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3.2.1. (C, ρ) bir tam kısmi metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi dönüşüm ise her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma}$$

olacak şekilde $\lambda \in [0, 1)$, $\xi, \sigma \in (0, 1)$ sayıları vardır. F dönüşümü C kümesinde bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar *et al.* 2018a).

Örnek 3.2.2. $C = \{1, 3, 4, 7\}$ ve $\rho(\zeta, \eta) = \max\{\zeta, \eta\}$ olsun. Dolayısıyla (C, ρ) bir kısmi metrik uzaydır. Burada

$\rho(\zeta, \eta)$	1	3	4	7
1	1	3	4	7
3	3	3	4	7
4	4	4	4	7
7	7	7	7	7

C kümesinde kendi üzerine tanımlı $F: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir F dönüşümü tanımlayalım. $\lambda = \frac{7}{10}$, $\xi = \frac{1}{2}$ ve $\sigma = \frac{2}{5}$ seçilsin. $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için $(\zeta, \eta) \in \{(4, 7), (7, 4), (4, 4), (7, 7)\}$. Böylece aşağıdaki durumlarda geçerli olur:

Durum 1 : $\zeta = \eta = 4$ için

$$\rho(F\zeta, F\eta) = 1 \leq 4\lambda = \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma}.$$

Durum 2 : $\zeta = \eta = 7$ için

$$\rho(F\zeta, F\eta) = 3 \leq 7\lambda = \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma}.$$

Durum 3 : $\zeta = 4$ ve $\eta = 7$ için

$$\begin{aligned} \rho(F\zeta, F\eta) &= 3 \leq \lambda 7^{1-\sigma} 4^\sigma \\ &= \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma} \end{aligned}$$

Yani yukarıdaki teoremin şartları sağlanır ve F dönüşümü sabit noktaya sahiptir (Karapınar *et al.* 2018a).

Teorem 3.2.3. (C, ρ) bir tam metrik uzay ve F , kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan tipi dönüşüm ise F dönüşümü C kümesinde bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar *et al.* 2018b).

Teorem 3.2.4. (C, ρ) bir tam kısmi metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan tipi dönüşüm ise her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda [\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^\tau \left[\frac{1}{2} (\rho(\eta, F\zeta) + \rho(\zeta, F\eta)) \right]^{1-\xi-\sigma-\tau}$$

olacak şekilde $\lambda \in [0, 1)$; $\xi, \sigma, \tau \in (0, 1)$ sayıları vardır. Burada $\xi + \sigma + \tau < 1$ dir. Dolayısıyla F dönüşümü C kümesinde bir sabit noktaya sahiptir (Karapınar *et al.* 2018b).

Örnek 3.2.5. $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $\rho(\zeta, \eta) = |\zeta - \eta|$ olsun. $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\xi = \frac{1}{3}$, $\sigma = \frac{1}{2}$ ve $\tau = \frac{1}{7}$ katsayıları seçilsin. Burada $F: C \rightarrow C$ dönüşümü, yukarıda tanımlanan kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan tipi dönüşüm şartını sağlar. Dolayısıyla F dönüşümü 0 ve 1 sabit noktalarına sahiptir (Karapınar *et al.* 2018b).

Teorem 3.2.6. (C, ρ_b, w) , $s > 1$ katsayılı bir tam konveks b – metrik uzay olsun. $F: C \rightarrow C$ dönüşümü daraltan bir dönüşüm ise her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho_b(F\zeta, F\eta) \leq \lambda \rho_b(\zeta, \eta)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0, 1)$ sayısı vardır. $\rho_b(\zeta_0, F\zeta_0) = M < \infty$ olmak üzere $\zeta_0 \in C$ seçelim ve her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \mu_{n-1} < 1$ olmak üzere $\zeta_n = w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1})$ dizisi tanımlansın. Eğer, her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda s^4 < 1$ ve $0 < \mu_{n-1} < \frac{\frac{1}{s^4} - \lambda}{1 - \lambda}$ ise F dönüşümü C de tek bir sabit noktaya sahiptir (Chen *et al.* 2020).

Teorem 3.2.7. (C, ρ_b, w) , $s > 1$ katsayılı bir tam konveks b – metrik uzay olsun. $F: C \rightarrow C$ dönüşümü Kannan daraltan dönüşümü ise her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho_b(F\zeta, F\eta) \leq \lambda [\rho_b(\zeta, F\zeta) + \rho_b(\eta, F\eta)]$$

olacak şekilde $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ sayısı vardır. $\rho_b(\zeta_0, F\zeta_0) = M < \infty$ olacak şekilde $\zeta_0 \in C$ seçelim ve her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \mu_{n-1} < 1$ ve $\mu_{n-1} \in (0, \frac{1}{4s^2}]$ olmak üzere $\zeta_n =$

$w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1})$ dizisi tanımlansın. Eğer, her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda \in \left[0, \frac{1}{4s^2}\right]$ ise F dönüşümü C de tek bir sabit noktaya sahiptir (Chen *et al.* 2020).

Örnek 3.2.8. $C = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olsun ve $F: C \rightarrow C$ ye dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F\zeta = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \zeta \in \left[0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ \frac{1}{\zeta}, & \text{eğer } \zeta \in \left[\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

Her $\zeta, \eta \in C$ ve $\rho_b(\zeta, \eta) = (\zeta - \eta)^2$ için $w: C \times C \times [0,1] \rightarrow C$ dönüşümü ise

$$w(\zeta, \eta; \mu) = \mu\zeta + (1 - \mu)\eta$$

şeklinde olsun. ζ_0 başlangıç değeri ve $\mu_{n-1} = \frac{1}{4s}$ iken $\zeta_n = w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1})$ dizisini alınsın. Eğer $\lambda = \frac{1}{4s^2}$ ise F tek bir sabit noktaya sahiptir (Chen *et al.* 2020).

Teorem 3.2.9. (C, ρ) bir tam b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ zayıf kuvvetsel daraltan bir dönüşüm olsun. F dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Roy and Saha 2021).

Teorem 3.2.10. (C, ρ) bir tam b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ zayıf kuvvetsel Kannan bir dönüşüm olsun. F dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Roy and Saha 2021).

Teorem 3.2.11. (C, ρ) bir tam b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ zayıf kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi bir dönüşüm olsun. F dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Roy and Saha 2021).

Teorem 3.2.12. w konveks yapısı ile (C, ρ, w) tam konveks metrik uzay olsun. $F: C \rightarrow C$ kuvvetsel Kannan daraltan tipi dönüşüm ise her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho(\zeta, F\zeta)]^\xi[\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi}$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ sayısı vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ için $0 \leq \mu_{n-1} \leq b < 1$ olmak üzere $\zeta_n = w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1})$ dizisi tanımlayalım. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $b + \lambda < 1$ ise F dönüşümü C de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca bu sabit nokta Mann iterasyonu yardımıyla elde edilebilir (Yıldırım 2022).

Teorem 3.2.13. w konveks yapısı ile (C, ρ, w) tam konveks metrik uzay olsun. $F: C \rightarrow C$ kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi dönüşüm ise her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma}$$

olacak şekilde $\lambda \in (0,1]$, $\xi, \sigma \in (0,1)$, sayıları vardır. $0 \leq \mu_{n-1} \leq b < 1$ olmak üzere $\zeta_n = w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1})$ dizisi tanımlayalım. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{\lambda}{(1-b)^{1-\xi}} < 1$ ise F dönüşümü C de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca bu sabit nokta Mann iterasyonu yardımıyla elde edilebilir (Yıldırım 2022).

Teorem 3.2.14. w konveks yapısı ile (C, ρ, w) tam konveks metrik uzay olsun. $F: C \rightarrow C$ kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan tipi dönüşüm ise her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\rho(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^\tau \left[\frac{1}{2}(\rho(\eta, F\zeta) + \rho(\zeta, F\eta)) \right]^{1-\xi-\sigma-\tau}$$

olacak şekilde $\lambda \in (0,1)$; $\xi, \sigma, \tau \in (0,1)$ sayıları vardır. $0 \leq \mu_{n-1} \leq b < 1$ olmak üzere $\zeta_n = w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1})$ dizisi tanımlayalım. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{\lambda}{(1-b)^{1-\xi}} < 1$ ise F dönüşümü C de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca bu sabit nokta Mann iterasyonu yardımıyla elde edilebilir (Yıldırım 2022).

3.3. Homotopi Teorisi

Tanım 3.3.1. C, Y iki topolojik uzay ve $R, S: C \rightarrow Y$ iki sürekli dönüşüm olsun. R den S ye bir homotopi, $H: C \times [0,1] \rightarrow Y$ olacak şekilde bir sürekli fonksiyondur. Öyle ki her $\zeta \in C$ ve $t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ için, $H(\zeta, 0) = R(\zeta)$ ve $H(\zeta, 1) = S(\zeta)$ dir. Burada R ve S homotopik dönüşümler olarak adlandırılır (Roy and Saha 2021).

Teorem 3.3.2. (C, ρ) bir tam metrik uzay ve U, C nin bir açık alt kümesi olsun. $H: \bar{U} \times [0,1] \rightarrow Y$ operatörü aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) Her $\zeta \in \partial U$ ($\partial U, C$ de U nun sınırını belirtir.) ve her bir $t \in [0,1]$ için $\zeta \neq H(\zeta, t)$ dir.

(ii) Her $\zeta, \eta \in \bar{U}$ ve her bir $t \in [0,1]$, $\lambda \in (0,1)$ ve $K, \gamma > 0$ için,

$$\rho(H(\zeta, t), H(\eta, t)) \leq \lambda \rho(\zeta, \eta) + K[\rho(\eta, H(\zeta, t))]^\gamma [\rho(\zeta, H(\eta, t))]$$

dir.

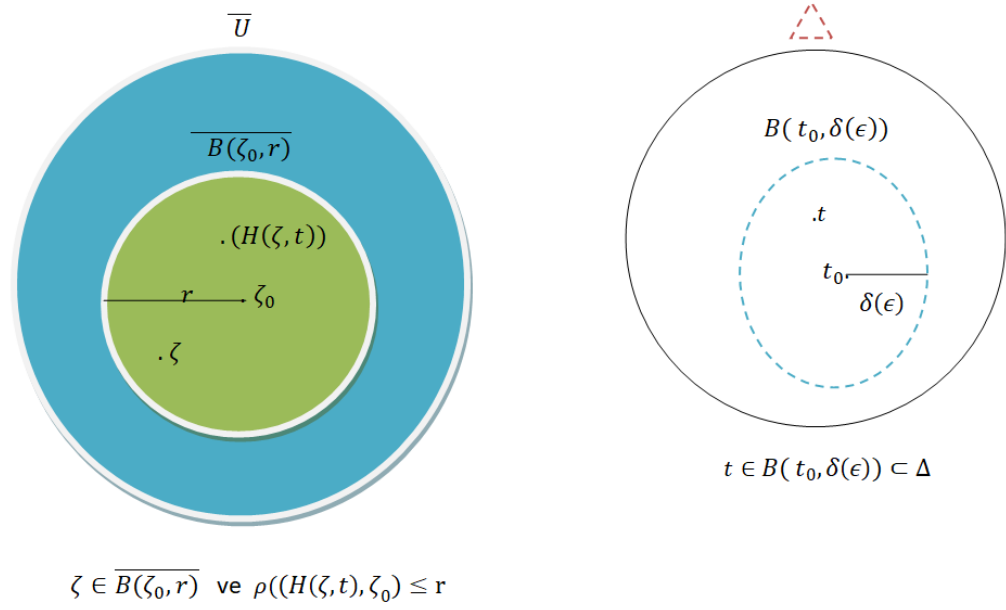
(iii) $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon vardır, öyle ki;

$$\rho(H(\zeta, t), H(\zeta, s)) \leq |g(t) - g(s)|$$

her bir $t, s \in [0,1]$ ve her $\zeta \in \bar{U}$ için yukarıdaki eşitsizlik sağlanır.

(iv) $\sup_{\zeta, \eta \in \bar{U}, t \in [0,1]} \rho(\zeta, H(\eta, t)) < (\frac{1-\lambda}{K})^{\frac{1}{\gamma}}$.

Bu durumda $H(., 0)$ dönüşümünün bir sabit noktası olabilmesi için gerek ve yeter şart $H(., 1)$ dönüşümünün bir sabit noktasının olmasıdır (Roy and Saha 2021).



$$H: \overline{B(\zeta_0, r)} \times B(t_0, \delta(\epsilon)) \rightarrow \overline{B(\zeta_0, r)}$$

Şekil 3.1. $H(., t)$ dönüşümünün şekli

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde tezin orijinal kısmını oluşturan çalışmalara yer verilecektir. İlk olarak zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşüm sınıfı tanıtılacaktır. Picard iterasyon metodu kullanılarak b –metrik uzaylarda zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşüm sınıfı için sabit nokta teoremleri elde edilecektir. Aynı zamanda kuvvetsel daraltan ve zayıf kuvvetsel daraltan dönüşümleri arasındaki ilişkiler örneklerle gösterilecektir.

4.1. Zayıf Kuvvetsel Hardy ve Rogers Daraltan Dönüşümü

Tanım 4.1.1. (C, ρ) bir b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için,

$$\begin{aligned} \rho(F\zeta, F\eta) &\leq \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^\tau \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho(\eta, F\zeta) + \rho(\zeta, F\eta))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\ &\quad + K[\rho(\eta, F\zeta)]^\gamma [\rho(\zeta, F\eta)]^\delta \end{aligned} \quad (3.1)$$

olacak şekilde $\lambda \in \left(0, \frac{1}{s^{1+\frac{1}{1-\tau}}}\right)$; $\xi, \sigma, \tau \in (0,1)$; $\gamma, \delta > 0$ ve $K \geq 0$ sayıları varsa F ye zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümü denir.

Sonuç 4.1.2. (i) Eğer (3.1) de $K = 0$ alırsak kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümü elde ederiz.

(ii) Eğer (3.1) de $\xi + \sigma + \tau = 1$ alınırsa zayıf kuvvetsel daraltan Reich–Rus–Ciri’c tipi dönüşümünü elde ederiz.

Teorem 4.1.3. (C, ρ) bir tam b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ bir zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümü olsun. F dönüşümü C de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\zeta_n = F^n(\zeta_0)$ olacak şekilde $\{\zeta_n\}$ bir Picard iterasyonu alalım ve $\zeta_0 \in C$, bu dizinin başlangıç noktası olsun. Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_n = \zeta_{n+1}$ alırsak ζ_n, F nin bir sabit noktası olduğunu elde ederiz. Bu yüzden her $n \geq 0$ için $\zeta_n \neq \zeta_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Tanım (3.1) ve Picard iterasyonundan

$$\begin{aligned}
\rho(\zeta_{n+1}, \zeta_n) &= \rho(F\zeta_n, F\zeta_{n-1}) \\
&\leq \lambda[\rho(\zeta_n, \zeta_{n-1})]^\xi [\rho(\zeta_n, F\zeta_n)]^\sigma [\rho(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\tau \quad (3.2) \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho(\zeta_n, F\zeta_{n-1}) + \rho(\zeta_{n-1}, F\zeta_n))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\quad + K[\rho(\zeta_{n-1}, F\zeta_n)]^\gamma [\rho(\zeta_n, F\zeta_{n-1})]^\delta \\
&= \lambda[\rho(\zeta_n, \zeta_{n-1})]^\xi [\rho(\zeta_n, F\zeta_n)]^\sigma [\rho(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho(\zeta_{n-1}, F\zeta_n))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\leq \lambda[\rho(\zeta_n, \zeta_{n-1})]^\xi [\rho(\zeta_n, F\zeta_n)]^\sigma [\rho(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\tau \\
&\quad \times s\left[\frac{1}{2}(\rho(\zeta_{n-1}, \zeta_n) + \rho(\zeta_n, \zeta_{n+1}))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi, kabul edelim ki bazı $n \geq 1$ için $\rho(\zeta_{n-1}, \zeta_n) < \rho(\zeta_n, \zeta_{n+1})$. Böylece,

$$\frac{1}{2}(\rho(\zeta_{n-1}, \zeta_n) + \rho(\zeta_n, \zeta_{n+1})) \leq \rho(\zeta_n, \zeta_{n+1})$$

olur. (3.2) deki eşitsizliği kullanarak,

$$[\rho(\zeta_{n+1}, \zeta_n)]^\tau \leq s\lambda[\rho(\zeta_n, \zeta_{n-1})]^\tau$$

yazarız.

$s\lambda < 1$ olduğundan

$$[\rho(\zeta_{n+1}, \zeta_n)]^\tau \leq [\rho(\zeta_n, \zeta_{n-1})]^\tau \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) deki eşitsizlik zıtlık içerir. Yani, elimizde her $n \geq 1$ için $\rho(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \leq \rho(\zeta_n, \zeta_{n-1})$ vardır. Bu yüzden, $\{\rho(\zeta_{n-1}, \zeta_n)\}$ bir artmayan dizidir. Her $n \geq 1$ için,

$$\frac{1}{2}(\rho(\zeta_{n-1}, \zeta_n) + \rho(\zeta_n, \zeta_{n+1})) \leq \rho(\zeta_{n-1}, \zeta_n). \quad (3.4)$$

olur. Tanım (3.1) deki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
\rho(\zeta_1, \zeta_2) &= \rho(F\zeta_0, F\zeta_1) \leq \lambda[\rho(\zeta_0, \zeta_1)]^\xi [\rho(\zeta_0, F\zeta_0)]^\sigma [\rho(\zeta_1, F\zeta_1)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho(\zeta_0, F\zeta_1) + \rho(\zeta_1, F\zeta_0))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\quad + K[\rho(\zeta_0, F\zeta_1)]^\gamma [\rho(\zeta_1, F\zeta_0)]^\delta \\
&= \lambda[\rho(\zeta_0, \zeta_1)]^\xi [\rho(\zeta_0, \zeta_1)]^\sigma [\rho(\zeta_1, \zeta_2)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho(\zeta_0, \zeta_2))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\leq \lambda[\rho(\zeta_0, \zeta_1)]^\xi [\rho(\zeta_0, \zeta_1)]^\sigma [\rho(\zeta_1, \zeta_2)]^\tau \\
&\quad \times s\left[\frac{1}{2}(\rho(\zeta_0, \zeta_1) + \rho(\zeta_1, \zeta_2))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.4) ü kullanarak yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\rho(\zeta_1, \zeta_2) \leq \lambda[\rho(\zeta_0, \zeta_1)]^\xi [\rho(\zeta_0, \zeta_1)]^\sigma [\rho(\zeta_1, \zeta_2)]^\tau s[\rho(\zeta_0, \zeta_1)]^{1-\xi-\sigma-\tau}$$

olur bu ise

$$[\rho(\zeta_1, \zeta_2)]^{1-\tau} \leq (\lambda s)[\rho(\zeta_0, \zeta_1)]^{1-\tau}$$

eşitsizliğini gerektirir. Buradan

$$\begin{aligned}
\rho(\zeta_1, \zeta_2) &\leq (\lambda s)^{\frac{1}{1-\tau}} \rho(\zeta_0, \zeta_1) \\
&\leq \lambda s^{\frac{1}{1-\tau}} \rho(\zeta_0, \zeta_1)
\end{aligned}$$

dir. $s \geq 1$ ve $\lambda \in (0, \frac{1}{s^{1+\frac{1}{1-\tau}}})$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik yazılabilir. Her $r \geq 1$ için,

$$\begin{aligned}
\rho(\zeta_n, \zeta_{n+r}) &\leq s[\rho(\zeta_n, \zeta_{n+1}) + \rho(\zeta_{n+1}, \zeta_{n+r})] \\
&\leq s\lambda^n s^{\frac{n}{1-\tau}} \rho(\zeta_0, \zeta_1) + s\rho(\zeta_{n+1}, \zeta_{n+r}) \\
&\leq s\lambda^n s^{\frac{n}{1-\tau}} \rho(\zeta_0, \zeta_1) + s^2[\rho(\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}) + \rho(\zeta_{n+2}, \zeta_{n+r})] \\
&\leq s\lambda^n s^{\frac{n}{1-\tau}} \rho(\zeta_0, \zeta_1) + s^2\lambda^{n+1} s^{\frac{n+1}{1-\tau}} \rho(\zeta_0, \zeta_1) + s^2\rho(\zeta_{n+2}, \zeta_{n+r})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq [s\lambda^n s^{\frac{n}{1-\tau}} + s^2\lambda^{n+1}s^{\frac{n+1}{1-\tau}} + \dots + s^{r-1}\lambda^{n+r-2}s^{\frac{n+r-2}{1-\tau}}]\rho(\zeta_0, \zeta_1) \\
&\quad + s^{r-1}\rho(\zeta_{n+r-1}, \zeta_{n+r}) \\
&\leq [(s\lambda s^{\frac{1}{1-\tau}})^n + (s\lambda s^{\frac{1}{1-\tau}})^{n+1} + \dots + (s\lambda s^{\frac{1}{1-\tau}})^{n+r-1}]\rho(\zeta_0, \zeta_1) \\
&= (s\lambda s^{\frac{1}{1-\tau}})^n \cdot \frac{1 - (s\lambda s^{\frac{1}{1-\tau}})^r}{1 - s\lambda s^{\frac{1}{1-\tau}}} \rho(\zeta_0, \zeta_1) \\
&\leq \frac{(s\lambda s^{\frac{1}{1-\tau}})^n}{1 - s\lambda s^{\frac{1}{1-\tau}}} \rho(\zeta_0, \zeta_1) \rightarrow 0 \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

eşitsizliği gelir. Öyleyse, $\{\zeta_n\}$, C de bir Cauchy dizisidir. C tam olduğundan, $\{\zeta_n\}$ dizisi yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta \in C$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\rho(\zeta_{n+1}, F\zeta) &= \rho(F\zeta_n, F\zeta) \leq \lambda[\rho(\zeta_n, \zeta)]^\xi [\rho(\zeta_n, F\zeta_n)]^\sigma [\rho(\zeta, F\zeta)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\rho(\zeta_n, F\zeta)}{\rho(\zeta, F\zeta_n)} + 1 \right) \right]^{1-\xi-\sigma-\tau}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) deki eşitsizlikte, $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\zeta_{n+1}, F\zeta) \leq 0$ bulunur. Bu durum $\zeta = F\zeta$ olmasını sağlar, yani $\zeta \in C$, F nin bir sabit noktasıdır.

Örnek 4.1.4. $C = [0,6] \subset \mathbb{R}$ ve her $\zeta, \eta \in C$ için, $\rho(\zeta, \eta) = |\zeta - \eta|^2$ olacak şekilde $\rho: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı bir dönüşüm verilsin. Ayrıca (C, ρ) bir b –metrik uzay ve $s = 2$ katsayısı ile tanımlansın. $F: C \rightarrow C$ dönüşümü

$$F(\zeta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \zeta \leq 3 \\ 6, & 3 < \zeta \leq 6 \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Katsayıları $\lambda = \left(\frac{1}{5}\right), \xi = \sigma = \tau = \left(\frac{1}{9}\right), \gamma = \delta = 1$ ve $K = \frac{1}{36}$ olacak şekilde kabul edelim. İddia ediyoruz ki F dönüşümü, $\zeta = 3$ ve $\eta = 4$ için zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümünü sağlarken kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümünü sağlamaz. Bunu göstermek için dönüşümü üç farklı durumda inceleyeceğiz:

- (i) Eğer $\zeta, \eta \in [0,3]$ ise (3.1) in sağlandığı açıktır.
- (ii) Eğer $\zeta, \eta \in (3,6]$ ise (3.1) in sağlandığı açıktır.

(iii) Kabul edelim ki $\zeta \in [0,3]$ ve $\eta \in (3,6]$ ve

$$A = \lambda[\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho(\eta, F\eta)]^\tau \left[\frac{1}{2} (\rho(\eta, F\zeta) + \rho(\zeta, F\eta)) \right]^{1-\xi-\sigma-\tau}$$

olsun. (3.1) den $\rho(F\zeta, F\eta) \leq A + K[\rho(\eta, F\zeta)]^\gamma [\rho(\zeta, F\eta)]^\delta$ elde ederiz.

Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} 36 &\leq A + K[\rho(\eta, 0)]^\gamma [\rho(\zeta, 6)]^\delta \\ &\leq A + K36^\gamma 36^\delta. \end{aligned}$$

elde ederiz. $\gamma = \delta = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} 36 &\leq A + K36^\gamma 36^\delta \\ &= A + K36^2 \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte $K = \frac{1}{36}$ alınırsa F dönüşümü, zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümünü sağlar. Şimdi ise F dönüşümünün $\zeta = 3$ ve $\eta = 4$ için kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümünü sağlamadığını gösterelim:

$$\begin{aligned} \rho(F3, F4) &\leq \frac{1}{5} [\rho(3,4)]^\xi [\rho(3, F3)]^\sigma \rho(4, F4)^\tau \cdot \left[\frac{1}{2} (\rho(3, F4) + \rho(4, F3)) \right]^{\frac{2}{3}} \\ 36 &= \frac{1}{5} (1)^\xi (9)^\sigma (4)^\tau \cdot \left[\frac{9 + 36}{2} \right]^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{5} (36)^{\frac{1}{9}} \cdot [22,5]^{\frac{2}{3}} \\ &\approx \left(\frac{1}{5} \right) \cdot 1,489.7,969 \approx 2,373 \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlik zıtlık belirtir. Böylece F dönüşümü kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşüm değildir.

Şimdi ise zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan dönüşümünün homotopi teorisine uygulamasını vereceğiz.

4.2. Zayıf Kuvvetsel Hardy ve Rogers Daraltan Dönüşümünün Homotopi Teorisine Uygulaması

Teorem 4.2.1. (C, ρ) bir tam metrik uzay ve U, C nin bir açık alt kümesi olsun. $H: \bar{U} \times [0,1] \rightarrow C$ operatörü aşağıdaki şartları sağlasın;

- (i) Her $\zeta \in \partial U(\partial U, C$ de U nun sınırını belirtir) ve her bir $t \in [0,1]$ için $\zeta \neq H(\zeta, t)$ dir.
- (ii) Her $\zeta, \eta \in \bar{U}$ ve her bir $t \in [0,1], \lambda \in (0,1)$ ve $K, \gamma > 0$ olmak üzere,

$$\rho(H(\zeta, t), H(\eta, t)) \leq \lambda [\rho(\zeta, \eta)]^\xi [\rho(\zeta, H(\zeta, t))]^\sigma [\rho(\eta, H(\eta, t))]^\tau \times \\ \left[\frac{1}{2} (\rho(\zeta, H(\eta, t)) + \rho(\eta, H(\zeta, t)))^{1-\xi-\sigma-\tau} + K[\rho(\eta, H(\zeta, t))]^\gamma [\rho(\zeta, H(\eta, t))] \right]$$

dir.

- (iii) $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon vardır, öyle ki;

$$\rho(H(\zeta, t), H(\zeta, s)) \leq |g(t) - g(s)|$$

her bir $t, s \in [0,1]$ ve her $\zeta \in \bar{U}$ için yukarıdaki eşitsizlik sağlanır.

- (iv) $\sup_{\zeta, \eta \in \bar{U}, t \in [0,1]} \rho(\eta, H(\zeta, t)) < K^{-\frac{1}{\gamma}}$.

Bu durumda $H(., 0)$ dönüşümünün bir sabit noktası olabilmesi için gerek ve yeter şart $H(., 1)$ dönüşümünün bir sabit noktasının olmasıdır.

İspat: Δ kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Delta = \{t \in [0,1]: H(., t), U \text{ kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.}\}$$

Kabul edelim ki $H(., 0), \bar{U}$ da bir sabit noktaya sahip olsun. (i) şartından dolayı $H(\zeta, 0) = \zeta$ olacak şekilde $\zeta \in U$ vardır. Bu yüzden $0 \in \Delta$ ve $\Delta, [0,1]$ kümesinin boş olmayan bir alt kümesidir. Diğer yandan, Δ kümesinin $[0,1]$ aralığının hem açık hem de kapalı bir alt kümesi olduğunu göstereceğiz. İlk olarak Δ kümesinin açık bir küme olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $t_0 \in \Delta$ ise o zaman $H(\zeta_0, t_0) = \zeta_0$ olacak şekilde $\zeta_0 \in U$ vardır. U kümesi açık olduğundan $B(\zeta_0, r) \subset U$

olacak şekilde, $r > 0$ vardır. $0 < \epsilon \leq r[1 - \lambda - K(\sup_{\zeta \in B(\zeta_0, r)} \rho(\zeta_0, H(\zeta, t_0))^\gamma)]$ olsun.

g dönüşümü sürekli olduğundan her $t \in (t_0 - \delta(\epsilon), t_0 + \delta(\epsilon)) \subset [0, 1]$ için, $|g(t) - g(t_0)| < \epsilon$ olacak şekilde $\delta(\epsilon) > 0$ vardır. Şimdi varsayalım ki $\zeta \in \overline{B(\zeta_0, r)}$ olsun. (ii), (iii) ve (iv) teki şartlardan dolayı her $t \in (t_0 - \delta(\epsilon), t_0 + \delta(\epsilon)) \subset [0, 1]$ için,

$$\begin{aligned}
\rho(H(\zeta, t), \zeta_0) &= \rho(H(\zeta, t), H(\zeta_0, t_0)) \\
&\leq \rho(H(\zeta, t), H(\zeta, t_0)) + \rho(H(\zeta, t_0), H(\zeta_0, t_0)) \\
&\leq |g(t) - g(t_0)| + \lambda(\rho(\zeta, \zeta_0))^\xi \rho(\zeta, H(\zeta, t_0))^\sigma \rho(\zeta_0, H(\zeta_0, t_0))^\eta \\
&\quad \times \left[\frac{\rho(\zeta, H(\zeta_0, t_0)) + \rho(\zeta_0, H(\zeta, t_0))}{2} \right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\quad + K\rho(\zeta_0, H(\zeta, t_0))^\gamma \rho(\zeta, H(\zeta_0, t_0)) \\
&< \epsilon + \lambda\rho(\zeta, \zeta_0)^\xi \rho(\zeta, H(\zeta, t_0))^\sigma \rho(\zeta_0, \zeta_0)^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{\rho(\zeta, \zeta_0) + \rho(\zeta_0, H(\zeta, t_0))}{2} \right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\quad + K\rho(\zeta_0, H(\zeta, t_0))^\gamma \rho(\zeta, H(\zeta_0, t_0)) \\
&= \epsilon + K\rho(\zeta_0, H(\zeta, t_0))^\gamma \rho(\zeta, \zeta_0) \\
&< \epsilon + K(\sup_{\zeta \in B(\zeta_0, r)} \rho(\zeta_0, H(\zeta, t_0))^\gamma)r \\
&\leq r
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, her sabit $t \in (t_0 - \delta(\epsilon), t_0 + \delta(\epsilon))$ için $\overline{B(\zeta_0, r)}$ kapalı yuvarında $H(., t)$ kendi üzerine bir dönüşümdür. $H(., t)$ dönüşümü Teorem 3.3.2 deki bütün şartları sağladığından dolayı $\overline{B(\zeta_0, r)} \subset \overline{U}$ da bir sabit noktaya sahiptir.

O zaman her $t \in (t_0 - \delta(\epsilon), t_0 + \delta(\epsilon))$ için $t \in \Delta$ dir. Bu yüzden $(t_0 - \delta(\epsilon), t_0 + \delta(\epsilon)) \subset \Delta$ ve Δ kümesi $[0, 1]$ aralığında açıktır.

Şimdi Δ kümesinin kapalı olduğunu göstereceğiz: $\{t_n\} \subset \Delta$ olsun. Öyle ki $n \rightarrow \infty$ için $t_n \rightarrow t^* \in [0, 1]$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_n = H(\zeta_n, t_n)$ olacak şekilde $\zeta_n \in U$ vardır. Ayrıca tüm $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\rho(\zeta_n, \zeta_m) &= \rho(H(\zeta_n, t_n), H(\zeta_m, t_m)) \\
&\leq \rho(H(\zeta_n, t_n), H(\zeta_n, t_m)) + \rho(H(\zeta_n, t_m), H(\zeta_m, t_m)) \\
&\leq |g(t_n) - g(t_m)| + \lambda \rho(\zeta_n, \zeta_m)^\xi \rho(\zeta_n, H(\zeta_n, t_m))^\sigma \\
&\quad \times \rho(\zeta_m, H(\zeta_m, t_m))^\tau \left[\frac{\rho(\zeta_n, H(\zeta_m, t_m)) + \rho(\zeta_m, H(\zeta_n, t_m))}{2} \right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\quad + K \rho(\zeta_m, H(\zeta_n, t_m))^\gamma \rho(\zeta_n, H(\zeta_m, t_m)) \\
&= |g(t_n) - g(t_m)| + K \rho(\zeta_m, H(\zeta_n, t_m))^\gamma \rho(\zeta_n, \zeta_m)
\end{aligned}$$

sağlanır. Buradan

$$[1 - K \rho(\zeta_m, H(\zeta_n, t_m))^\gamma] \rho(\zeta_n, \zeta_m) \leq |g(t_n) - g(t_m)|$$

ve

$$\rho(\zeta_n, \zeta_m) \leq [1 - K(\sup_{\zeta, \eta \in \bar{U}, t \in [0,1]} \rho(\eta, H(\zeta, t))^\gamma)^{-1} |g(t_n) - g(t_m)|$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n, m \rightarrow \infty$ için limit alırsak $\{\zeta_n\}$, C de bir Cauchy dizisidir. C bir tam metrik uzay olduğundan dolayı $\{\zeta_n\}$ dizisi yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n \rightarrow \zeta^* \in \bar{U}$ olsun.

Son olarak $H(\zeta^*, t^*) = \zeta^*$ olduğunu göstereceğiz. Teorem 3.3.2 deki şartlardan,

$$\begin{aligned}
\rho(\zeta_n, H(\zeta^*, t^*)) &= \rho(H(\zeta_n, t_n), H(\zeta^*, t^*)) \\
&\leq \rho(H(\zeta_n, t_n), H(\zeta_n, t^*)) + \rho(H(\zeta_n, t^*), H(\zeta^*, t^*)) \\
&\leq |g(t_n) - g(t^*)| + \lambda (\rho(\zeta_n, \zeta^*))^\xi \rho(\zeta_n, H(\zeta_n, t^*))^\sigma \\
&\quad \times \rho(\zeta^*, H(\zeta^*, t^*))^\tau \left[\frac{\rho(\zeta_n, H(\zeta^*, t^*)) + \rho(\zeta^*, H(\zeta_n, t^*))}{2} \right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\quad + K \rho(\zeta^*, H(\zeta_n, t^*))^\gamma \rho(\zeta_n, H(\zeta^*, t^*)) \\
&\leq [1 - K(\sup_{\zeta, \eta \in \bar{U}} \rho(\eta, H(\zeta, t))^\gamma)^{-1} |g(t_n) - g(t^*)| \\
&\quad + \lambda \rho(\zeta_n, \zeta^*)^\xi \rho(\zeta_n, H(\zeta_n, t^*))^\sigma \rho(\zeta^*, H(\zeta^*, t^*))^\tau
\end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{\rho(\zeta_n, H(\zeta^*, t^*)) + \rho(\zeta^*, H(\zeta_n, t^*))}{2} \right]^{1-\xi-\sigma-\tau}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafından $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $\zeta_n \rightarrow H(\zeta^*, t^*)$ olduğunu görülür. $H(\zeta^*, t^*) = \zeta^*$ olması $\zeta^* \in \overline{U}$ olmasını gerektirir ve böylece $t^* \in \Delta$ dir. Yani, Δ kapalı ve sonuç olarak $\Delta = [0,1]$ dir. Bu yüzden, Δ kümesinin tanımından dolayı $H(\cdot, 1)$ dönüşümü C de bir sabit noktaya sahiptir.

Literatürdeki kuvvetsel daraltan tipi dönüşümler incelendiğinde bu tür dönüşümlerin sabit noktası Picard iterasyonu kullanılarak incelenmiştir. Tezin bu bölümdeki amacı farklı iterasyon metotları kullanarak bu dönüşümlerin sabit noktalarını incelemektir. Konveks yapı, farklı iterasyon şemalarını gerektirir. Konveks b – metrik uzaylarda Mann iterasyon şemasını kullanarak üç farklı kuvvetsel daraltan dönüşümün sabit nokta teoremlerini ispatlayacağız.

İlk olarak kuvvetsel Kannan daraltan tipi bir dönüşümün konveks b –metrik uzaylarda sabit noktasını inceleyeceğiz.

4.3. Konveks b – Metrik Uzaylarda Kuvvetsel Dönüşümlerin Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.3.1. (C, ρ_b, w) bir konveks b – metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$, kuvvetsel Kannan daraltan tipi bir dönüşüm olsun. Öyle ki;

$$\rho_b(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho_b(\zeta, F\zeta)]^\xi[\rho_b(\eta, F\eta)]^{1-\xi} \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlansın. Her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için $(\text{Fix}) = \{\zeta \in C: F\zeta = \zeta\}$ olmak üzere $\lambda \in (0,1)$ ve $\xi \in (0,1)$ sayıları vardır. $\{\zeta_n\}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^+$ ve $0 \leq \mu_{n-1} \leq b < 1$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\zeta_n = w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1}). \quad (3.7)$$

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $b + \lambda < \frac{1}{s}$ ve $b < \frac{1}{s^2}$ ise F bir sabit noktaya sahiptir ve Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktasına yakınsar.

İspat. Konveks metrik uzayın yapısından ve (3.6) ile (3.7) den,

$$\rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) = \rho_b(\zeta_n, w(\zeta_n, F\zeta_n; \mu_n)) \leq (1 - \mu_n)\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n), \quad (3.8)$$

ve

$$\begin{aligned} \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) &\leq s\rho_b(\zeta_n, F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(F\zeta_{n-1}, F\zeta_n) \\ &= s\rho_b(w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1}), F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(F\zeta_{n-1}, F\zeta_n) \\ &\leq s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \\ &\quad + s\lambda[\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi \cdot [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{1-\xi} \end{aligned} \quad (3.9)$$

olduğunu elde ederiz.

Kabul edelim ki, bazı $n \geq 1$ için $\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) < \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)$ olsun. (3.9) dan

$$\begin{aligned} \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) &\leq s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \\ &\quad + s\lambda[\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi \\ &\quad \times [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{1-\xi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve

$$(1 - s\mu_{n-1})[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\xi \leq s\lambda[\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi$$

buluruz. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\xi &\leq \frac{s\lambda}{1 - s\mu_{n-1}} [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi \\ &\leq s\lambda/(1 - sb)[\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

yazılır. $b + \lambda < \frac{1}{s}$ olduğundan, $\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \geq \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)$ elde ederiz. Fakat, bu durum bir zıtlık belirtir. Bu yüzden, her $n \geq 1$ için $\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \leq \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})$ olur. Bu durum $\{\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})\}$ dizisinin, bir artmayan dizi olmasını gerektirir. Böylece, aşağıdaki gibi $v \geq 0$ sayısı vardır;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) = v. \quad (3.12)$$

Şimdi, $v = 0$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $v > 0$ olsun. Her $n \geq 1$ için $\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \leq \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})$ olduğundan, (3.11) i kullanarak

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) &\leq \frac{s\lambda}{1 - s\mu_{n-1}} \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \\
&\leq s\lambda/(1 - sb) \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde ederiz.

(3.13) eşitsizliğinde limit alırsak

$$v \leq \frac{s\lambda}{1 - sb} v \leq v$$

olur. Bu durum bir zıtlık belirtir. Bu yüzden, $v = 0$ olduğunu buluruz. (3.8) den

$$\rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \leq (1 - \mu_n) \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \leq \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)$$

yazılır. Bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) = 0 \tag{3.14}$$

olmasını gerektirir. Şimdi, $\{\zeta_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek gerekmektedir. Bunun için, kabul edelim ki $\{\zeta_n\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. Böylece, $\theta(k) > \vartheta(k) > k$ olacak şekilde $\{\zeta_n\}$ dizisinin aşağıdaki şartları sağlayan $\{\zeta_{\theta(k)}\}$ ve $\{\zeta_{\vartheta(k)}\}$ alt dizileri ve bir $\bar{\epsilon}$ vardır:

$$\rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)}) \geq \bar{\epsilon}$$

ve

$$\rho_b(\zeta_{\theta(k)-1}, \zeta_{\vartheta(k)}) < \bar{\epsilon}.$$

Bu durumda

$$\bar{\epsilon} \leq \rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)}) \leq s\rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)+1}) + s\rho_b(\zeta_{\vartheta(k)+1}, \zeta_{\vartheta(k)}) \tag{3.15}$$

dır. (3.8) den ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) = 0$ limitinden

$$\frac{\bar{\epsilon}}{s} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)+1})$$

elde edilir. Ayrıca diğer taraftan

$$\rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)+1}) = \rho_b(w(\zeta_{\theta(k)-1}, F\zeta_{\theta(k)-1}; \mu_{\theta(k)-1}), \zeta_{\vartheta(k)+1})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) + (1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\leq \mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\leq \mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \lambda [\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\theta_{(k)-1}})]^\xi [\rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^{1-\xi} \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\leq s\mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)}}) + s\mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \lambda [\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\theta_{(k)-1}})]^\xi [\rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^{1-\xi} \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}})
\end{aligned}$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki tarafının $k \rightarrow \infty$ iken limsup alınır ve (3.12), (3.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\epsilon}}{s} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\leq s\mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)}}) \\
&\leq sb\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)}})
\end{aligned}$$

olur. $b < \frac{1}{s^2}$ olduğundan ,

$$\frac{\bar{\epsilon}}{s} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \leq b \frac{\bar{\epsilon}}{s} < \frac{\bar{\epsilon}}{s}$$

yazılabilir. Bu bir zıtlık belirtir. Böylece $\{\zeta_n\}$, C de bir Cauchy dizisidir. (C, ρ_b, w) bir konveks b –metrik uzay olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta^* \in C$ olacak şekilde $\zeta^* \in C$ vardır. Şimdi, ζ^* noktasının F nin bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz. Bu bağlamda;

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*) &\leq s[\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + \rho_b(\zeta_n, F\zeta^*)] \\
&\leq s\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + s^2[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) + \rho_b(F\zeta_n, F\zeta^*)] \\
&\leq s\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + s^2\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) + s^2\lambda[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\xi [\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*)]^{1-\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq s\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + s^2\left(\frac{s\lambda}{1-sb}\right)^n \rho_b(\zeta_0, F\zeta_0) \\ &\quad + s^2\lambda\left(\frac{s\lambda}{1-sb}\right)^n [\rho_b(\zeta_0, F\zeta_0)]^\xi [\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*)]^{1-\xi} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer eşitsizliğin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ iken limiti alınırsa, $\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*) = 0$ sonucunu elde ederiz ki bu durum $F\zeta^* = \zeta^*$ olmasını gerektirir.

Şimdi ise konveks b –metrik uzaylarda kuvvetsel Reich–Rus–Ciri’c daraltan tipi bir dönüşümün sabit noktasını inceleyelim.

Teorem 4.3.2. (C, ρ_b, w) bir konveks b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$, kuvvetsel Reich daraltan tipi bir dönüşüm olsun. Öyle ki;

$$\rho_b(F\zeta, F\eta) \leq \lambda[\rho_b(\zeta, \eta)]^\xi [\rho_b(\zeta, F\zeta)]^\sigma [\rho_b(\eta, F\eta)]^{1-\xi-\sigma}, \quad (3.16)$$

her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için $\text{Fix}(F) = \{\zeta \in C: F\zeta = \zeta\}$ olmak üzere $\lambda \in (0,1)$ ve $\xi, \sigma \in (0,1)$ sayıları vardır. $\{\zeta_n\}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^+$ ve $0 \leq \mu_{n-1} \leq b < 1$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\zeta_n = w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1}). \quad (3.17)$$

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $b + \lambda < \frac{1}{s}$ ve $b < \frac{1}{s^2}$ ise F bir sabit noktaya sahiptir ve Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktasına yakınsar.

İspat: Konveks yapıdan dolayı,

$$\rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) = \rho_b(\zeta_n, w(\zeta_n, F\zeta_n; \mu_n)) \leq (1 - \mu_n)\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n), \quad (3.18)$$

ve

$$\begin{aligned} \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) &\leq s\rho_b(\zeta_n, F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(F\zeta_{n-1}, F\zeta_n) \\ &= s\rho_b(w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1}), F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(F\zeta_{n-1}, F\zeta_n) \\ &\leq s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \\ &\quad + s\lambda[\rho_b(\zeta_{n-1}, \zeta_n)]^\xi [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\sigma [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{1-\xi-\sigma} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
&= s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \\
&\quad + s\lambda[\rho_b(\zeta_{n-1}, w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1}))]^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\sigma [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{1-\xi-\sigma} \\
&\leq s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) + s\lambda(1 - \mu_{n-1})[\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\sigma [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{1-\xi-\sigma}
\end{aligned}$$

bulunur. Farz edelim ki bazı $n \geq 1$ için, $\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) < \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)$ olsun.

(3.19) dan dolayı

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) &\leq s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \\
&\quad + s\lambda(1 - \mu_{n-1})^\xi [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^{\xi+\sigma} [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{1-\xi-\sigma}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir ve sonuç olarak;

$$\frac{(1 - s\mu_{n-1})\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)}{[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{1-\xi-\sigma}} \leq s\lambda(1 - \mu_{n-1})^\xi [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^{\xi+\sigma}$$

ve

$$[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{\xi+\sigma} \leq \frac{s\lambda(1-\mu_{n-1})^\xi}{(1-s\mu_{n-1})} [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^{\xi+\sigma} \tag{3.21}$$

bulunur. $\frac{s\lambda(1-\mu_{n-1})^\xi}{(1-s\mu_{n-1})} \leq \frac{s\lambda}{(1-s\mu_{n-1})} < 1$ olduğundan dolayı yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\begin{aligned}
[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{\xi+\sigma} &\leq \frac{s\lambda}{(1 - s\mu_{n-1})} [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^{\xi+\sigma} \\
&\leq s\lambda/(1 - sb) [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^{\xi+\sigma}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. $b + \lambda < \frac{1}{s}$ olduğundan, $\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \geq \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)$ bulunur. Fakat, bu durum bir zıtlık belirtir. Bu yüzden, her $n \geq 1$ için, $\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \leq \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})$ olur. Böylece $\{\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})\}$ dizisi, bir artmayan dizidir. Yani, aşağıdaki gibi $v \geq 0$ sayısı vardır;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) = v. \tag{3.23}$$

Şimdi, $v = 0$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $v > 0$ olsun. Her $n \geq 1$ için $\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \leq \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})$ olduğundan (3.22) yi kullanarak

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) &\leq \frac{s\lambda}{1 - s\mu_{n-1}} \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \\
&\leq s\lambda/(1 - sb) \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})
\end{aligned} \tag{3.24}$$

elde ederiz. (3.24) eşitsizliğinde her iki tarafın da limitini alırsak,

$$v \leq \frac{s\lambda}{1 - sb} v \leq v.$$

bulunur. Bu bir zıtlıktır. Bu yüzden, $v = 0$ olarak bulunur. (3.18) ve (3.23) den

$$\rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \leq (1 - \mu_n) \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \leq \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)$$

yazılır. Bu da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) = 0 \tag{3.25}$$

limitinin var olduğunu gösterir. Şimdi, $\{\zeta_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek gerekmektedir. Önceki teoremdeki benzer bir yol kullanılacaktır. Bunun için, kabul edelim ki $\{\zeta_n\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. Böylece, $\theta(k) > \vartheta(k) > k$ olacak şekilde $\{\zeta_n\}$ dizisinin aşağıdaki şartları sağlayan $\{\zeta_{\theta(k)}\}$ ve $\{\zeta_{\vartheta(k)}\}$ alt dizileri ve bir $\bar{\epsilon}$ vardır:

$$\rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)}) \geq \bar{\epsilon}$$

ve

$$\rho_b(\zeta_{\theta(k)-1}, \zeta_{\vartheta(k)}) < \bar{\epsilon}. \tag{3.26}$$

Dolayısıyla

$$\bar{\epsilon} \leq \rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)}) \leq s\rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)+1}) + s\rho_b(\zeta_{\vartheta(k)+1}, \zeta_{\vartheta(k)})$$

olur. (3.18) ve (3.25) ten

$$\frac{\bar{\epsilon}}{s} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)+1})$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)+1}) &= \rho_b(w(\zeta_{\theta(k)-1}, F\zeta_{\theta(k)-1}; \mu_{\theta(k)-1}), \zeta_{\vartheta(k)+1}) \\
&\leq \mu_{\theta(k)-1} \rho_b(\zeta_{\theta(k)-1}, \zeta_{\vartheta(k)+1}) + (1 - \mu_{\theta(k)-1}) \rho_b(F\zeta_{\theta(k)-1}, \zeta_{\vartheta(k)+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\leq \mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\quad \times s \left(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}} \right) \lambda[\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\theta_{(k)-1}})]^\sigma [\rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^{1-\xi-\sigma} \\
&\leq s\mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)}}) + s\mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \lambda[\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\theta_{(k)-1}})]^\sigma [\rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^{1-\xi-\sigma} \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}})
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ iken limsup alınır ve (3.23), (3.25) ve (3.26) kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\epsilon}}{s} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\leq s\mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)}}) \\
&\leq sb\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)}}).
\end{aligned}$$

$b < \frac{1}{s^2}$ olduğundan

$$\frac{\bar{\epsilon}}{s} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \leq b \frac{\bar{\epsilon}}{s} < \frac{\bar{\epsilon}}{s}.$$

yazılır. Böylece $\{\zeta_n\}$, C de bir Cauchy dizisidir. (C, ρ_b, w) bir konveks b – metrik uzay olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta^* \in C$ olacak şekilde $\zeta^* \in C$ vardır. Şimdi, ζ^* noktasının F nin bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz. Bu bağlamda;

(3.16) ve (3.17) yi kullanarak

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*) &\leq s[\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + \rho_b(\zeta_n, F\zeta^*)] \\
&\leq s\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + s^2[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) + \rho_b(F\zeta_n, F\zeta^*)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq s\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + s^2\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \\
&\quad + s^2\lambda[\rho_b(\zeta_n, \zeta^*)]^\xi[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\sigma[\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*)]^{1-\xi-\sigma} \\
&\leq s\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + s^2\left(\frac{s\lambda}{1-sb}\right)^n\rho_b(\zeta_0, F\zeta_0) \\
&\quad + s^2\lambda[\rho_b(\zeta_n, \zeta^*)]^\xi[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\sigma[\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*)]^{1-\xi-\sigma}
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer eşitsizliğin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ iken limiti alınır, $\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*) = 0$ sonucunu çıkarırız ki bu durum, $F\zeta^* = \zeta^*$ olmasını sağlar. Böylece ispat tamamlanır.

Son olarak, konveks b –metrik uzaylarda kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan tipi bir dönüşümün sabit noktasını inceleyeceğiz.

Teorem 4.3.3. (C, ρ_b, w) tam konveks b –metrik uzay ve $F: C \rightarrow C$ kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan tipi bir dönüşüm olsun. Öyle ki;

$$\begin{aligned}
\rho_b(F\zeta, F\eta) &\leq \lambda[\rho_b(\zeta, \eta)]^\xi[\rho_b(\zeta, F\zeta)]^\sigma[\rho_b(\eta, F\eta)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho_b(\zeta, F\eta) + \rho_b(\eta, F\zeta)) \right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

her $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için $\text{Fix}(F) = \{\zeta \in C : F\zeta = \zeta\}$ olmak üzere $\lambda \in (0,1)$ ve $\xi, \sigma, \theta \in (0,1)$ sayıları vardır. $\{\zeta_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ için $0 \leq \mu_{n-1} \leq b < 1$ olduğunda aşağıdaki gibidir;

$$\zeta_n = w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1}). \quad (3.28)$$

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için, $b + s\lambda < \frac{1}{s}$ ve $b < \frac{1}{s^2}$ ise F bir sabit noktaya sahiptir ve Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktasına yakınsar.

İspat: Konveks yapıdan dolayı,

$$\rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) = \rho_b(\zeta_n, w(\zeta_n, F\zeta_n; \mu_n)) \leq (1 - \mu_n)\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n), \quad (3.29)$$

ve

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) &\leq s\rho_b(\zeta_n, F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(F\zeta_{n-1}, F\zeta_n) \\
&= s\rho_b(w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1}), F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(F\zeta_{n-1}, F\zeta_n)
\end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
&\leq s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \\
&\quad + s\lambda[\rho_b(\zeta_{n-1}, \zeta_n)]^\xi [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\sigma [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho_b(\zeta_n, F\zeta_{n-1}) + \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_n))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\leq s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \\
&\quad + s\lambda[(\rho_b(\zeta_{n-1}, w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1})))^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\sigma [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho_b(w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1}), F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(\zeta_{n-1}, \zeta_n) + s\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\leq s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) + s\lambda(1 - \mu_{n-1})^\xi [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\sigma [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(\zeta_{n-1}, w(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}; \mu_{n-1})) + s\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&= s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) + s\lambda(1 - \mu_{n-1})^\xi [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\sigma [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) + s(1 - \mu_{n-1})\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&= s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) + s\lambda(1 - \mu_{n-1})^\xi [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\sigma [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}((s - \mu_{n-1}(s - 1))\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) + s\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau}
\end{aligned}$$

bulunur. Farz edelim ki bazı $n \geq 1$ için, $\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) < \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)$ olsun.

(3.30) dan dolayı

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) &\leq s\mu_{n-1}\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \\
&\quad + s\lambda(1 - \mu_{n-1})^\xi [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi + \sigma
\end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \left((2s - \mu_{n-1}(s-1)) \times \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \right) \right]^{1-\xi-\sigma} \quad (3.31)$$

elde edilir ve sonuç olarak;

$$\frac{(1-s\mu_{n-1})\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)}{\left[\frac{1}{2} (2s - \mu_{n-1}(s-1)) \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \right]^{1-\xi-\sigma}} \leq s\lambda(1 - \mu_{n-1})^\xi [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi + \sigma \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{\xi+\sigma} &\leq \frac{\frac{1}{2} (2s - \mu_{n-1}(s-1))^{1-\xi-\sigma} s\lambda(1 - \mu_{n-1})^\xi}{(1 - s\mu_{n-1})} \\ &\times [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi + \sigma \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{1}{2} (2s - \mu_{n-1}(s-1))^{1-\xi-\sigma} s\lambda(1 - \mu_{n-1})^\xi}{(1 - s\mu_{n-1})} \\ &\leq \frac{(2s - \mu_{n-1}(s-1))s\lambda}{2(1 - s\mu_{n-1})} \leq \frac{s^2\lambda}{(1 - s\mu_{n-1})} < 1 \end{aligned}$$

olduğundan dolayı yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\begin{aligned} [\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^{\xi+\sigma} &\leq \frac{s^2\lambda}{(1 - s\mu_{n-1})} [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi + \sigma \\ &\leq s^2\lambda/(1 - sb) [\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})]^\xi + \sigma \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde edilir. $b + s\lambda < \frac{1}{s}$ olduğundan, $\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \geq \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)$ bulunur. Fakat, bu durum bir zıtlık belirtir. Bu yüzden, her $n \geq 1$ için, $\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \leq \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})$ olur. Böylece $\{\rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})\}$ dizisinin, bir artmayan dizi olmasını gerektirir. Yani, aşağıdaki gibi $v \geq 0$ sayısı vardır;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) = v. \quad (3.34)$$

Şimdi, $v = 0$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $v > 0$ olsun. Her $n \geq 1$ için, $\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \leq \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})$ olduğundan (3.33) ü kullanarak

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) &\leq \frac{s^2\lambda}{(1-s\mu_{n-1})} \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1}) \\
&\leq s^2\lambda/(1-sb) \rho_b(\zeta_{n-1}, F\zeta_{n-1})
\end{aligned} \tag{3.35}$$

elde ederiz. (3.35) eşitsizliğinde her iki tarafın da limitini alırsak,

$$v \leq \frac{s^2\lambda}{(1-sb)} v \leq v$$

bulunur. Bu bir zıtlıktır. Bu yüzden, $v = 0$ olarak bulunur. (3.29) ve (3.34) ten ayrıca

$$\rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \leq (1 - \mu_n) \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \leq \rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_n, \zeta_{n+1}) = 0 \tag{3.36}$$

yazılır. Şimdi, $\{\zeta_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek gerekmektedir. Önceki teoremdaki benzer bir yol kullanılacaktır. Bunun için, kabul edelim ki $\{\zeta_n\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. Böylece, $\theta(k) > \vartheta(k) > k$ olacak şekilde $\{\zeta_n\}$ dizisinin aşağıdaki şartları sağlayan $\{\zeta_{\theta(k)}\}$ ve $\{\zeta_{\vartheta(k)}\}$ alt dizileri ve bir $\bar{\epsilon}$ vardır.

$$\rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)}) \geq \bar{\epsilon}$$

ve

$$\rho_b(\zeta_{\theta(k)-1}, \zeta_{\vartheta(k)}) < \bar{\epsilon} \tag{3.37}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\bar{\epsilon} \leq \rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)}) \leq s\rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)+1}) + s\rho_b(\zeta_{\vartheta(k)+1}, \zeta_{\vartheta(k)})$$

(3.29) ve (3.36) dan

$$\frac{\bar{\epsilon}}{s} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)+1})$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta_{\theta(k)}, \zeta_{\vartheta(k)+1}) &= \rho_b(w(\zeta_{\theta(k)-1}, F\zeta_{\theta(k)-1}; \mu_{\theta(k)-1}), \zeta_{\vartheta(k)+1}) \\
&\leq \mu_{\theta(k)-1} \rho_b(\zeta_{\theta(k)-1}, \zeta_{\vartheta(k)+1}) + (1 - \mu_{\theta(k)-1}) \rho_b(F\zeta_{\theta(k)-1}, \zeta_{\vartheta(k)+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\leq \mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\quad \times s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \lambda[\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\theta_{(k)-1}})]^\sigma [\rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^\tau \\
&\quad \times [\frac{1}{2}(\rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, F\zeta_{\theta_{(k)-1}}) + \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}))]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\leq s\mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)}}) + s\mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \lambda[\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^\xi \\
&\quad \times [\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\theta_{(k)-1}})]^\sigma [\rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}})]^\tau \\
&\quad \times [\frac{1}{2}(\rho_b(\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, F\zeta_{\theta_{(k)-1}}) + \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}))]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\quad + s(1 - \mu_{\theta_{(k)-1}}) \rho_b(F\zeta_{\vartheta_{(k)+1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}})
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ iken limsup alınır ve (3.32), (3.34) ve (3.35) i kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\epsilon}}{s} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \\
&\leq s\mu_{\theta_{(k)-1}} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)}}) \\
&\leq sb\rho_b(\zeta_{\theta_{(k)-1}}, \zeta_{\vartheta_{(k)}}).
\end{aligned}$$

$b < \frac{1}{s^2}$ olduğundan

$$\frac{\bar{\epsilon}}{s} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_b(\zeta_{\theta_{(k)}}, \zeta_{\vartheta_{(k)+1}}) \leq b \frac{\bar{\epsilon}}{s} < \frac{\bar{\epsilon}}{s}$$

elde edilir. Böylece $\{\zeta_n\}$, C de bir Cauchy dizisidir. (C, ρ_b, w) bir konveks b –metrik uzay olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta^* \in C$ olacak şekilde $\zeta^* \in C$ vardır. Şimdi, ζ^* noktasının F nin bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz. Bu bağlamda;

(3.27) ve (3.28) i kullanarak

$$\begin{aligned}
\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*) &\leq s[\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + \rho_b(\zeta_n, F\zeta^*)] \\
&\leq s\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + s^2[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) + \rho_b(F\zeta_n, F\zeta^*)] \\
&\leq s\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + s^2\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n) \\
&\quad + s^2\lambda[\rho_b(\zeta_n, \zeta^*)]^\xi[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\sigma[\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho_b(\zeta^*, F\zeta_n) + \rho_b(\zeta_n, F\zeta^*))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
&\leq s\rho_b(\zeta^*, \zeta_n) + s^2\left(\frac{s^2\lambda}{1-sb}\right)^n\rho_b(\zeta_0, F\zeta_0) \\
&\quad + s^2\lambda[\rho_b(\zeta_n, \zeta^*)]^\xi[\rho_b(\zeta_n, F\zeta_n)]^\sigma[\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*)]^\tau \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}(\rho_b(\zeta^*, F\zeta_n) + \rho_b(\zeta_n, F\zeta^*))\right]^{1-\xi-\sigma-\tau}
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer eşitsizliğin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ iken limiti alınır, $\rho_b(\zeta^*, F\zeta^*) = 0$ sonucunu çıkarırız ki bu durum, $F\zeta^* = \zeta^*$ olmasını sağlar. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.3.4. $C = \{1, 2, 3, 5\}$ ve $\rho_b(\zeta, \eta) = |\zeta - \eta|^2$ olsun. Her $\zeta, \eta \in C$ için $w: C \times C \times [0,1] \rightarrow C$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$w(\zeta, \eta; \mu) = \mu\zeta + (1 - \mu)\eta.$$

Böylece ρ_b dönüşümü $s = 2$ katsayılı bir konveks b -metrik uzayıdır.

C kümesinde kendi üzerine tanımlı $F: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir F dönüşümü tanımlayalım. $\xi = \sigma = \tau = \frac{1}{16}$ seçilsin. $\zeta, \eta \in C \setminus \text{Fix}(F)$ için $(\zeta, \eta) \in \{(3, 5), (5, 3), (3, 3), (5, 5)\}$. $b + s\lambda < \frac{1}{s}$ ve $b < \frac{1}{s^2}$ olduğundan $b + 2\lambda < \frac{1}{2}$ ve $b < \frac{1}{4}$ olup $b = \frac{1}{5}$ seçilsin. $2\lambda < \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ ise $\lambda = \frac{1}{7}$ olsun.

Durum 1 : $\zeta = \eta = 3$ için dönüşümün sağlandığı açıktır.

Durum 2 : $\zeta = \eta = 5$ için dönüşüm yine sağlanır.

Durum 3 : $\zeta = 3$ ve $\eta = 5$ için

$$\rho_b(F\zeta, F\eta) = 1 \leq \lambda[\rho_b(3, 5)]^\xi[\rho_b(3, F3)]^\sigma[\rho_b(5, F5)]^\tau$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{1}{2} (\rho_b(3, F5) + \rho_b(5, F3)) \right]^{1-\xi-\sigma-\tau} . \\
& = \frac{1}{7} \times (4)^{\xi+\sigma} \times 9^\tau \times (8,5)^{1-\xi-\sigma-\tau} \\
& = \frac{1}{7} \times 4^{\frac{1}{8}} \times 9^{\frac{1}{16}} \times 8,5^{\frac{13}{16}} \\
& = 1,1090534902.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla F dönüşümü, kuvvetsel Hardy ve Rogers daraltan tipi bir dönüşüm olup 1 ve 2 sabit noktalarına sahiptir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

- i. Bu tezde konveks b –metrik uzaylarda ispatlanan teoremler, Yıldırım (2022) nin konveks metrik uzaylarda kuvvetsel daraltan dönüşümler için elde ettiği sonuçları genelleştirir.
- ii. Tanım 4.1.1 de literatürde mevcut olmayan zayıf kuvvetsel Hardy ve Rogers dönüşümünün tanımı yapılmış ve Teorem 4.1.3 de bu dönüşümün b –metrik uzaylarda sabit noktasının ispatı verilmiştir.
- iii. Mevcut literatüre ve bizim tez çalışmamıza bakıldığında aşağıdaki sorular tartışmaya ve ispatlanmaya açıktır;
 - 1) Kuvvetsel daraltan dönüşümlerin sabit noktaları, Picard-Mann iterasyonu, S – iterasyonu, Ishikawa iterasyonu gibi farklı iterasyon metotlarıyla incelenebilir mi?
 - 2) Konveks metrik uzaylarda, kuvvetsel daraltan dönüşümler için yukarıda bahsedilen iterasyon metotlarının yakınsama hızları karşılaştırılabilir mi?
 - 3) Mann iterasyonu, kuvvetsel daraltan dönüşümler için kararlı mıdır?
 - 4) Konveks b – metrik uzaylarda zayıf kuvvetsel daraltan dönüşümlerin sabit noktaları incelenebilir mi?

KAYNAKLAR

- Bakhtin, I., 1989. The contraction mapping principle in quasi metric spaces. *Functional analysis*, 30, 26-37.
- Bayraktar, M., 2017. Fonksiyonel Analiz. Korza Yayıncılık Basım San. Ve Tic. A. Ş, 445 s, Ankara
- Berinde, V., 2004. Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum*, 9, 43-54.
- Berinde, V., 2007. *Iterative Approximation of Fixed Points*. Springer Berlin Heidelberg, 326 p, New York.
- Chen, L., Li, C., Kaczmarek, R., and Zhao, Y., 2020. Several fixed point theorems in convex b-metric spaces and applications. *Mathematics*, 8(2), 242.
- Errai, Y., Marhrani, E., and Aamri, M., 2020. Some remarks on fixed point theorems for interpolative Kannan contraction. *Journal of Function Spaces*, 1-7.
- Gaba, Y. U., Aphane, M., and Aydi, H., 2021. Interpolative Kannan contractions in-quasi-metric spaces. *Journal of Mathematics*, 1-5.
- Gunduz, B., and Akbulut, S., 2013. Strong convergence of an explicit iteration process for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces. *Miskolc Mathematical Notes*, 14(3), 905-913.
- Huang, H., Radenovic, S., and Deng, G., 2017. A sharp generalization on cone b-metric space over Banach algebra. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10(2), 429-435.
- Karapınar, E., 2018. Revisiting the Kannan type contractions via interpolation. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application*, 2(2), 85-87.
- Karapınar, E., Agarwal, R., and Aydi, H., 2018a. Interpolative Reich–Rus–Ćirić type contractions on partial metric spaces. *Mathematics*, 6(11), 256.
- Karapınar, E., Alqahtani, O. and Aydi, H., 2018b. On interpolative Hardy-Rogers type contractions. *Symmetry*, 11(1), 8.
- Khan, A. R., and Ahmed, M. A., 2010. Convergence of a general iterative scheme for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces and applications. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8), 2990-2995.
- Kim, J. K., Kim, K. S., and Kim, S. M., 2006. Convergence Theorems of Implicit Iteration Process for a Finite Family of Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mappings in Convex Metric Spaces. *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*. 1484, 40-51.
- Liu, Q. Y., Liu, Z. B., and Huang, N. J., 2010. Approximating the common fixed points of two sequences of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces. *Applied Mathematics and Computation*, 216(3), 883-889.
- Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 506-610.
- Matthews, S. G., 1994. Partial Metric Topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 728(1), 183-197.
- Panja, S., Roy, K., and Saha, M., 2020. Weak interpolative type contractive mappings on b-metric spaces and their applications. *Indian Journal of Mathematics*. 62(3), 371-405.

- Picard, E., (Charles), 1890. Jour. Math. Apple., 6 (4), 145-210.
- Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using infinite matrices. Trans. Amer. Math. Soc., 196, 161-176
- Roy, K., and Panja, S., 2021. From interpolative contractive mappings to generalized Ciric-quasi contraction mappings. Applied General Topology. 22(1), 109-120.
- Roy, K., and Saha, M., 2019. Fixed point theorems for a pair of generalized contractive mappings over a metric space with an application to homotopy. Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 60, 1-17.
- Roy, K., and Saha, M., 2020. Generalized contractions and fixed point theorems over bipolar conetvs b-metric spaces with an application to homotopy theory. Mat. Vesnik., 72(4), 281-296.
- Takahashi, W., 1970. A convexity in metric space and nonexpansive mappings. I. Kodai Mathematical Seminar Reports., 22(2), 142-149.
- Yıldırım, I., 2022. Fixed Point Results for interpolative Type Contractions via Mann Iteration Process. J. Adv. Math. Stud., 15(1), 35-45.
- Yıldırım, I., and Khan, S. H., 2012. Convergence theorems for common fixed points of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces. Applied Mathematics and Computation. 218(9), 4860-4866.
- Yıldırım, I., Khan, S. H., and Ozdemir, M., 2012. Some fixed point results for uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces. Journal of Nonlinear Analysis and Optimization. 4(2), 143-148.
- Yıldırım, I., and Sahin, Y. S., 2022. Interpolative Contractions in Convex b– Metric Spaces. Proceedings of International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences, A Selçuk Meeting (p. 151), Konya.
- Yıldırım, I., and Sahin, Y. S., 2023. On Weak interpolative Contractions with Application to Homotopy Theory. Journal of Science and Arts.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Yunus Serdar ŞAHİN
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Nevzat Karabağ Anadolu Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	İyi
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
1) Yıldırım, I., and Sahin, Y. S., 2022. Interpolative Contractions in Convex b– Metric Spaces. Proceedings of International E-Conference on Mathematical and Statistical Sciences, A Selçuk Meeting (p. 151), Konya. 2) Yıldırım, I., and Sahin, Y. S., 2023. On Weak interpolative Contractions with Application to Homotopy Theory, Journal of Science and Arts.	