



**HİPERBOLİK UZAYLARDA BAZI DÖNÜŞÜM
SINIFLARI İÇİN YENİ SABİT NOKTA
YAKLAŞIM METOTLARI**

Osman ALAGÖZ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

2018

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**HİPERBOLİK UZAYLARDA BAZI DÖNÜŞÜM SINIFLARI İÇİN YENİ SABİT
NOKTA YAKLAŞIM METOTLARI**

Osman ALAGÖZ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı**

**ERZURUM
2018**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
TEZ ONAY FORMU



**HİPEBOLİK UZAYLARDA BAZI DÖNÜŞÜM SINIFLARI İÇİN
YENİ SABİT NOKTA YAKLAŞIM METOTLARI**

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Osman ALAGÖZ tarafından hazırlanan bu çalışma, 07/09/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ali OLGUN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

İmza :

Üye : Prof. Dr. İshak ALTUN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Doç Dr. İsa YILDIRIM

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun **13.09/2018** tarih ve ...**36**.../**35**..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

HİPERBOLİK UZAYLARDA BAZI DÖNÜŞÜM SINIFLARI İÇİN YENİ SABİT NOKTA YAKLAŞIM METOTLARI

Osman ALAGÖZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Bu tezin ana kısmını oluşturan araştırma bulguları bölümü iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda küme değerli quasi-genişlemeyen dönüşümler için Banach uzaylarında tanımlı yeni bir 3-adım iterasyon şeması teşkil edildi. Sonra bu şema kullanılarak bazı şartlar altında kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri ispatlandı. Daha sonra elde edilen teoremleri destekleyen analitik ve nümerik örnekler verildi. Ayrıca tanımlanan bu yeni 3-adım iterasyonun yakınsama hızının, Mann, Ishikawa, Noor, Agarwal *et al.*, Abbas *et al.* iterasyonlarına göre daha hızlı olduğu nümerik bir örnekle gösterildi. İkinci kısımda ise düzgün konveks W-hiperbolik uzaylarında tanımlı küme değerli genişlemeyen sonlu dönüşüm ailesi için yeni bir n-adım iterasyon şeması tanımlandı. Sonrada uygun şartlar altında bu şema ile ilgili Δ –yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri verildi.

2018, 73 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, küme değerli dönüşüm, W-hiperbolik uzay, zayıf ve güçlü yakınsama.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

NEW FIXED POINT ITERATIVE SCHEMES FOR SOME CLASSES OF MAPPING IN HYPERBOLIC SPACES

Osman ALAGÖZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Dicipline of Analysis and Functional Theory

Supervisor: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

The research findings section which constitutes the main part of this thesis is divided into two parts. In the first part, a new 3-step iteration scheme was formed for multivalued quasi-nonexpansive mappings defined in Banach spaces. Then by using this iteration scheme some weak and strong convergence theorems were proved under some conditions. Finally, analytical and numerical examples were given to support the theorems which are obtained. Furthermore, it was shown with a numerical example that the convergence rate of this 3-step iteration is faster than the convergence rates of Mann, Ishikawa, Noor, Agarwal *et al.* and Abbas *et al.* iterations. In the second part, a new n -step iteration scheme was defined for a finite family of multivalued nonexpansive mappings defined in uniformly convex W -hyperbolic spaces and then some Δ –convergence and strong convergence theorems were obtained under appropriate conditions.

2018, 73 pages

Keywords: Fixed point, multivalued mapping, W -hyperbolic space, weak and strong convergence.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarım ve tezin hazırlanışında bana sağladığı bilgi ve tecrübeleriyle beni her zaman destekleyen çok değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Sezgin AKBULUT'a ve yine bu süreçte bana destek olan kendisinden çok şey öğrendiğim değerli hocam sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e en içten dileklerle teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Doktora öğrenimim boyunca benimle bilgi ve tecrübelerini paylaşan değerli arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Birol GÜNDÜZ'e ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı değerli eşime, kızıma ve tüm dostlarıma en içten dileklerle teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca “Yurt İçi Doktora Burs Programı” ile tarafıma vermiş olduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Osman ALAGÖZ

Ağustos, 2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Tek Değerli Dönüşümlerin Sabit Noktaları	3
2.2. Küme Değerli Dönüşümlerin Sabit Noktaları	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
3.1. Hiperbolik Uzaylar	13
3.1.1. Geodezik uzay	20
3.1.2. CAT(0) uzayı.....	22
3.1.3. Hiperbolik tipte uzaylar	25
3.1.4. Reich ve Shafrir anlamında hiperbolik uzaylar	26
3.2. Δ –yakınsaklık.....	28
3.3. İterasyon Yöntemleri.....	33
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	39
4.1. Yeni 3-adım İterasyon Şeması.....	39
4.2. Banach Uzaylarında Küme Değerli Dönüşümler için Kuvvetli ve Zayıf Yakınsama Teoremleri.....	41
4.3. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması	54
4.4. Hiperbolik Uzaylarda Küme Değerli Genişlemeyen Dönüşüm Ailesi için Kuvvetli ve Zayıf Yakınsama Teoremleri	57
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	69
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGELER DİZİNİ

2^C	C nin kuvvet kümesi
$x_n \rightarrow x$	x_n nin x e kuvvetli yakınsaması
$x_n \rightharpoonup x$	x_n nin x e zayıf yakınsaması
$C(X)$	X in kapalı alt kümelerinin ailesi
$CB(X)$	X in kapalı sınırlı alt kümelerinin ailesi
$Dom(T)$	T dönüşümünün tanım kümesi
$Graph(T)$	T dönüşümünün grafiği
$Im(T)$	T dönüşümünün görüntü kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$P(X)$	X in proximal alt kümelerinin ailesi
$T: X \rightarrow Y$	X den Y ye küme değerli dönüşüm
$d(x, C)$	x den C ye uzaklık
$A(K, \{x_n\})$	$\{x_n\}$ dizisinin K kümesine göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi
$A(\{x_n\})$	$\{x_n\}$ dizisinin X uzayına göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi
$r(K, \{x_n\})$	$\{x_n\}$ dizisinin K kümesine göre asimptotik yarıçapı
$r(\{x_n\})$	$\{x_n\}$ dizisinin X uzayına göre asimptotik yarıçapı
(X, d, W)	Konveks metrik veya hiperbolik uzay
$\Delta(x_1, x_2, x_3)$	Geodezik üçgen
$\Delta - \lim_n x_n$	$\{x_n\}$ dizisinin Δ -limiti
$\eta(r, \epsilon)$	X uzayının konvekslik modülü
$H(A, B)$	A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff mesafesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Örnek 2.2.2 deki T dönüşümünün grafiği.....	5
Şekil 2.2. Örnek 2.2.3 deki T dönüşümünün grafiği.....	6
Şekil 2.3. Örnek 2.2.4 deki T dönüşümünün grafiği.....	6
Şekil 3.1. Geodezik doğru parçası	21
Şekil 4.1. Örnek 4.3.1 de verilen T dönüşümü için bazı iterasyon adımlarının grafiği ..	57



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Bazı iterasyonların tek değerli ve küme değerli versiyonları40

Çizelge 4.2. Küme değerli farklı iterasyon şemaların yakınsama hızları 55



1. GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerde ve mühendislik alanlarında genellikle bir fonksiyonel denklem ile formüle edilen birçok fiziksel problem, kolaylıkla bir sabit nokta denklemi formunda yazılabilir. Dolayısıyla böyle bir sabit nokta denkleminin çözümleri yardımıyla asıl denklemin çözümü araştırılır.

Sabit nokta teorisi adıyla bilinen bu eski teori modern matematiğin önemli, güçlü ve verimli araçlarından biridir. Şüphesiz bu teorinin en çok bilinen yönü 1922’de Stefan Banach tarafından tanıtılan “Banach Daralma Dönüşüm Prensibi” ilkesidir. Bu prensip üzerine inşa edilen çalışmalar; topolojik ve metrik sabit nokta teorisi, küme değerli nonlinear analiz, adi ve kısmi inklüzyonlar, konveks analiz, oyun teorisi ve matematiksel ekonomi alanlarında hızlı bir gelişme göstermiştir.

İlk olarak 1911’de Brouwer tarafından ortaya atılan “Kapalı bir aralıkta kendi üzerine tanımlı sürekli bir dönüşümün en az bir sabit noktası vardır” teoremiyle tarih sahnesine çıkan sabit nokta kavramı zaman içinde araştırmacıların büyük ölçüde ilgisini çekmiş ve köklü bir teori haline gelmiştir.

Daraltan, genişlemeyen, quasi-genişlemeyen, zayıf daraltan vb. çeşitli dönüşümler, metrik uzaylar, Banach uzayları ve daha genel olan birçok uzayda çalışılmış ve bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının bulunması için birçok farklı iteratif yöntemler tanımlanmıştır.

Nadler (1969) da Hausdorff metriğini kullanarak tam metrik uzayda tanımlı küme değerli daraltan bir dönüşümün sabit noktasının varlığını ispatlayarak Banach sabit nokta teoreminin küme değerli dönüşümler için bir genellemesini elde etmiştir.

Diğer taraftan Takahashi (1970), konveks metrik uzay tanımını vererek metrik uzaylara konvekslik yapısını kazandırmıştır. Daha sonra Kohlenbach (2007) de konveks metrik

uzay kavramını genişleterek bu uzaylardan ve normlu uzaylardan daha genel olan W-hiperbolik uzay tanımını vermiştir.

Tezimizde çalıştığımız W-hiperbolik uzaylar ve küme değerli dönüşümler için çok ilgi çekici uygulama alanları mevcut olup bunlardan bazıları; plastik nesnelerin davranışı, akışkanların yüzey dalgaları, gazlardaki şok dalgalar, viskoz akışkanların hareketi, astrofiziksel nesnelerin manyetik alanlarının davranışı, erime süreçleri, kimyasal reaksiyonlar, ısı radyasyonu, doğrusal olmayan salınım, gök mekaniğinde periyodik ve quasi-periyodik yörüngelerin varlığı ve kararlılığı, ekolojik ve ekonomik istikrar süreçleri ve difüzyon süreçleri uygulamalarıdır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra Kuramsal Temeller adlı bölümde küme değerli dönüşümler için sabit nokta kavramı verilip küme değerli bazı dönüşüm sınıfları tanıtıldı.

Tezimizin üçüncü bölümü olan Materyal ve Yöntem bölümünde hiperbolik uzaylar ile ilgili tanım ve açıklamalar yapıp literatürde kullanılan diğer hiperbolik uzay çeşitleri genel olarak ele alınmıştır. Ayrıca iterasyon yöntemleri verilip bu iterasyonlar ile ilgili yapılan önemli çalışmalardan bahsedilmiştir. Tezimizin öz kısmını oluşturan Araştırma Bulguları adlı dördüncü bölümünde de tezde elde ettiğimiz bulgular anlatılmıştır. Son olarak tezimizin beşinci bölümü olan Tartışma ve Sonuç bölümünde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Tek Değerli Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Bu bölümde önce tek değerli dönüşümler için sabit nokta kavramı verildi. Sonra da tek değerli bazı dönüşüm sınıfları ve aralarındaki ilişki incelenerek Banach Daralma İlkesi verilecektir.

Tanım 2.1.1: $X \neq \emptyset$ olmak üzere ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu x noktasına T nin sabit noktası denir.

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $k \in [0,1)$ sayısı varsa T ye daraltan dönüşüm denir. Bu eşitsizlik $k = 1$ için sağlanıyorsa bu durumda T ye genişlemeyen dönüşüm denir.

Tanım 2.1.3: (X, d) bir metrik uzay, K da X in boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$ için

$$d(Tx, p) \leq d(x, p)$$

ise T ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

$F(T) \neq \emptyset$ olması durumunda genişlemeyen her dönüşüm quasi- genişlemeyendir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Ayrıca tanımdan da anlaşılacağı üzere daraltan bir dönüşüm aynı zamanda genişlemeyen bir dönüşümdür.

Örnek 2.1.4: $X = l_\infty$ ve $C = B_x = \{x \in l_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ kümeleri verilsin. Her $x = (x_1, x_2, \dots) \in C$ için $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ normu verilsin. $T: C \rightarrow C$ dönüşümü $Tx = (0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda T dönüşümü quasi- genişlemeyen dönüşüm olup genişlemeyen dönüşüm değildir.

Teorem 2.1.5: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T nin bir tek sabit noktası vardır. $x_0 \in X$ olmak üzere bu sabit nokta $x_{n+1} = Tx_n$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisinin limitidir.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının olması gerekmez.

Örnek 2.1.6: $X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \rightarrow X, Tx = \frac{x}{5}$ olarak tanımlandığında T dönüşümü daraltan olmasına rağmen (X, d) tam olmadığından T dönüşümünün bir sabit noktası yoktur.

Diğer taraftan herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen ve quasi- genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının var olması gerekmez. Bunun için uzay veya dönüşümler üzerine bazı ilave şartların konulması gerekir.

2.2. Küme Değerli Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Bu bölümde küme değerli dönüşümler için sabit nokta kavramı tanımlanacak ve bazı özel küme değerli dönüşüm sınıfları verilecektir.

Tanım 2.2.1: X ve Y boştan farklı iki küme ve 2^Y , Y nin tüm alt kümelerinin ailesi olmak üzere, $T: X \rightarrow 2^Y$ fonksiyonuna küme değerli dönüşüm denir. Bu dönüşüm $T: X \rightarrow Y$ şeklinde gösterilir (Ansari 2010).

$Tx \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ varsa T ye has (proper) dönüşüm denir. Bu durumda T nin tanım kümesi, görüntü kümesi ve grafiği sırasıyla

$$Dom(T) = \{x \in X: Tx \neq \emptyset\}$$

$$Graph(T) = \{(x, y) \in X \times Y: y \in Tx\}$$

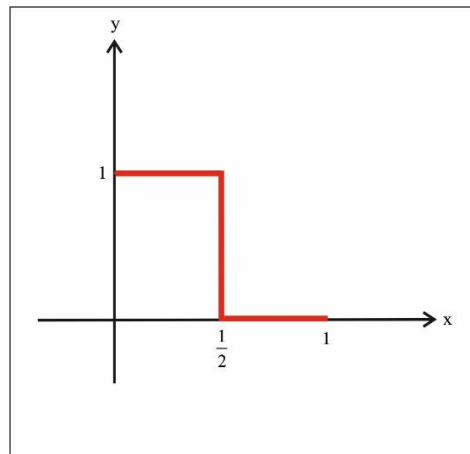
$$Im(T) = \{y \in Y: y \in Tx\}$$

şeklinde gösterilir. Aşağıda küme değerli dönüşümlere bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 2.2.2: $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$,

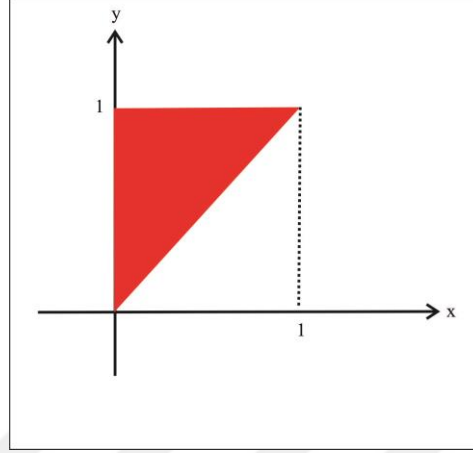
$$Tx = \begin{cases} \{1\}, & x < 1/2 \\ [0,1], & x = 1/2 \\ \{0\}, & x > 1/2 \end{cases}$$

dönüşümü küme değerli bir dönüşümdür. Bu dönüşümün grafiği Şekil 2.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1. Örnek 2.2.2 deki T dönüşümünün grafiği

Örnek 2.2.3: $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $Tx = [x, 1]$ dönüşümü küme değerli bir dönüşümdür. Bu dönüşümün grafiği Şekil 2.2 de verilmiştir.

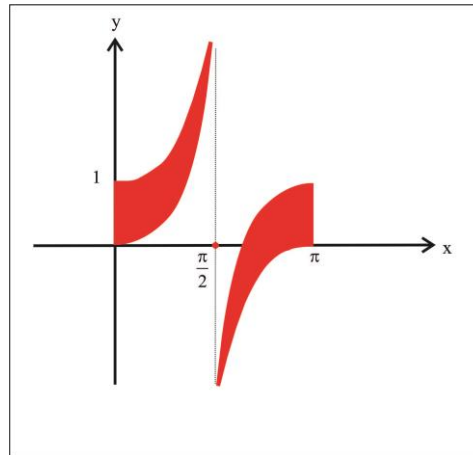


Şekil 2.2. Örnek 2.2.3 deki T dönüşümünün grafiği

Örnek 2.2.4: $T: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Tx = \begin{cases} [\tan x, 1 + \tan x], & x \neq \pi/2 \\ \{0\}, & x = \pi/2 \end{cases}$$

dönüşümü küme değerli bir dönüşümdür. Bu dönüşümün grafiği Şekil 2.3 te verilmiştir.



Şekil 2.3. Örnek 2.2.4 deki T dönüşümünün grafiği

Örnek 2.2.5: $f: X \rightarrow Y$ tek değerli örten bir dönüşüm ise bu durumda f nin f^{-1} tersi küme değerli bir dönüşüm olur. Buna göre $F: Y \rightarrow X$ dönüşümü her $y \in Im(f)$ için

$$F(y) = f^{-1}(y)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer f birebir ise bu durumda F dönüşümü tek değerli dönüşüm olur.

2^X in boş olmayan A ve B alt kümeleri verilsin. $x \in A$ için $d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$

sayısına x in B kümesine olan uzaklığı denir.

Örnek 2.2.6: (X, d) bir metrik uzay ve K, X in kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda $P: X \rightarrow K$ olmak üzere her $x \in K$ için

$$P(x) = \{y \in K; d(x, y) = d(x, K)\}$$

şeklinde tanımlanan metrik projeksiyonu küme değerli bir dönüşümdür.

Tanım 2.2.7. X ve Y boştan farklı iki küme ve $X \subseteq Y$ olsun. $T: X \rightarrow Y$ küme değerli dönüşüm olmak üzere $x \in Tx$ ise x e T nin sabit noktası denir. T nin sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Buna göre,

$$F(T) = \{x \in X; x \in Tx\}$$

dir.

Aşağıda küme değerli bazı dönüşümler ile bu dönüşümlerin sabit nokta kümeleri verilmiştir.

Örnek 2.2.8: $K = [0, 1]$, $T: K \rightarrow K$ dönüşümü $Tx = \left[0, \frac{2x+1}{4}\right]$ şeklinde tanımlanırsa, $F(T) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ dir.

Örnek 2.2.9: $K = [1, \infty)$, $T: K \rightarrow K$ dönüşümü $Tx = \left[1, 1 + \frac{x}{2}\right]$ şeklinde tanımlanırsa, $F(T) = [1, 2]$ dir.

Örnek 2.2.10: $K = [0, \infty)$, $T: K \rightarrow K$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{0\}, & x \leq 1 \\ \left[x - \frac{3}{4}, x - \frac{1}{3}\right], & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, $F(T) = \{0\}$ dır.

Örnek 2.2.11: $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{1\}, & x < 1/2 \\ \{0, 1\}, & x = 1/2 \\ \{0\}, & x > 1/2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dönüşümün sabit noktası yoktur.

Tanım 2.2.12: (X, d) bir metrik uzay ve K , X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x \in X$ için

$$d(x, y) = \inf\{d(x, z); z \in K\} = d(x, K)$$

olacak şekilde bir $y \in K$ varsa K kümesine proksimal (en iyi yaklaşım kümesi) denir. K kümesi proksimal ise kapalıdır.

X bir metrik uzay olmak üzere $C(X)$ ile X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin ailesi, $CB(X)$ ile X in boş olmayan kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi, $K(X)$ ile X in boş olmayan kompakt alt kümelerinin ailesi ve $P(X)$ ile X in boş olmayan proksimal alt kümelerinin ailesi gösterilecektir.

Tanım 2.2.13: (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $A, B \in CB(X)$ için

$$H(A, B) := \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme Hausdorff metriği denir.

Teorem 2.2.14: (X, d) bir metrik uzay olsun. Tanım 2.2.13 deki $H(.,.)$ dönüşümü $CB(X)$ üzerinde tanımlı bir metriktir (Ansari 2010).

Örnek 2.2.15: $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ olmak üzere $A = \{(x, 0); 5 \leq x \leq 8\}$ ve $B = \{(0, y); 6 \leq y \leq 12\}$ kümeleri verilsin. Bu durumda

$$H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\} = \max\{10, 13\} = 13$$

olur.

Örnek 2.2.16: Alışılmış metrik ile $\mathbb{R}$ uzayında $A = [-3, 4]$ ve $B = [5, 7]$ alt kümeleri verilsin. Bu durumda

$$H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\} = \max\{8, 3\} = 8$$

olarak bulunur.

Tanım 2.2.17: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $T: X \rightarrow K(Y)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x, y \in X$ için $d_1(x, y) < \delta$ olduğunda $H(Tx, Ty) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T dönüşümü H-süreklidir denir (Ansari 2010).

Şimdi bazı özel küme değerli dönüşüm sınıflarından bahsedilecektir.

Tanım 2.2.18: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $T: X \rightarrow CB(Y)$ küme değerli dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha d_1(x, y)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde

- a) $\alpha \geq 0$ varsa T ye küme değerli Lipschitz dönüşüm denir.
- b) $0 \leq \alpha < 1$ varsa T ye küme değerli daraltan dönüşüm denir.
- c) $\alpha = 1$ ise T ye küme değerli genişlemeyen dönüşüm denir (Ansari 2010).

Uzayımızın normlu uzay olması halinde $H(Tx, Ty) \leq \alpha d_1(x, y)$ yerine $H(Tx, Ty) \leq \alpha \|x - y\|$ olacağı açıktır.

Örnek 2.2.19: Alışılmış metrik ile $\mathbb{R}$ uzayının $M = \mathbb{R} - \{0\}$ alt kümesinde tanımlı $T: M \rightarrow CB(M)$ dönüşümü

$$T(x) = \left\{ \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \dots, \frac{x}{10} \right\} \subset M$$

küme değerli daraltan bir dönüşümdür.

Tanım 2.2.20: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $T: X \rightarrow CB(Y)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere; her $x \in X$ ve her $p \in F(T)$ için

$$H(Tx, \{p\}) \leq d_1(x, p)$$

ise T ye küme değerli quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Shiau *et al.* 1975).

$F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere her küme değerli genişlemeyen T dönüşümü, quasi-genişlemeyendir. Fakat tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.2.21: $X = [0, \infty)$ olmak üzere, her $x \in X$ için $T: X \rightarrow CB(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{1}{7}\right\}; & x \leq 1 \\ \left[x - \frac{1}{3}, x - \frac{1}{5}\right]; & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F(T) = \left\{\frac{1}{7}\right\}$ ve her $x \in X$ için

$$H\left(Tx, \left\{\frac{1}{7}\right\}\right) = \left|x - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right| \leq \left|x - \frac{1}{7}\right|$$

dir. Böylece T quasi-genişlemeyendir. Eğer $x = 2$ ve $y = 1$ alınırsa;

$$H(T(2), T(1)) = H\left(\left[\frac{5}{3}, \frac{9}{5}\right], \left\{\frac{1}{7}\right\}\right) = \frac{32}{21} > |2 - 1|$$

olduğundan T genişlemeyen değildir.

Küme değerli dönüşümlerle ilgili ilk sabit nokta teoremi Nadler tarafından 1969 yılında verilmiştir. Nadler bu teoremle Banach daralma ilkesinin bir genellemesini elde etmiştir. Teoremi vermeden önce Hausdorff metriğın tanımından elde edilen aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.2.22: $A, B \in CB(X)$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $\eta > 0$ ise $d(a, b) \leq H(A, B) + \eta$ olacak şekilde $b \in B$ vardır (Nadler 1969).

Teorem 2.2.23: (X, d) tam metrik uzay olsun. Eğer $T: X \rightarrow CB(X)$ küme değerli daraltan dönüşüm ise T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Nadler 1969).

İspat: $0 < \alpha < 1$ reel sayısı T için bir daraltan sabiti ve $x_0 \in X$ olsun. $x_1 \in Tx_0$ olarak seçelim. Buna göre $Tx_0, Tx_1 \in CB(X)$ için

$$d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + \alpha$$

olacak şekilde bir $x_2 \in Tx_1$ noktası vardır. $Tx_1, Tx_2 \in CB(X)$ için

$$d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + \alpha^2$$

olacak şekilde bir $x_3 \in Tx_2$ noktası vardır. Bu şekilde devam ettirilirse her $n \geq 1$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + \alpha^n$$

olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisi oluşturulur. Her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + \alpha^n \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \alpha^n \\ &\leq \alpha[H(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + \alpha^{n-1}] + \alpha^n \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2\alpha^n \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + n\alpha^n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise herhangi m ve n için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + n\alpha^n + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + (n+1)\alpha^{n+1} + \\ &\quad \dots + \alpha^{n+m-1} d(x_0, x_1) + (n+m-1)\alpha^{n+m-1} \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} \alpha^k d(x_0, x_1) + \sum_{k=n}^{n+m-1} k\alpha^k \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Yani $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsar. T dönüşümü H-sürekli olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} H(Tx_n, Tx) = 0$ olur. Ayrıca $x_n \in Tx_{n-1}$ olduğundan $x \in Tx$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Hiperbolik Uzaylar

Sabit nokta teorisi alanında lineer olmayan dönüşümlerin yanı sıra çalışılan uzayların yapısı da önemli bir role sahiptir. Konveks yapıya sahip Banach uzaylarının çok geniş bir yelpazede çalışıldığı bilinmektedir. Bunun nedeni Banach uzayının vektör uzayı olmasından kaynaklanmaktadır. Çünkü vektör uzaylarında konveks bir yapı tanıtmak çok daha kolaydır. Hâlbuki metrik uzaylar için aynı durum söz konusu değildir. Bu nedenle metrik uzaylarda konveks yapı oluşturma ihtiyacı ortaya çıkmıştır.

Konveks metrik uzay kavramı ilk olarak Takahashi (1970) tarafından tanıtıldı. Ardından bu uzaya bazı ilave şartlar eklenerek Kohlenbach anlamında hiperbolik uzay tanımı yapıldı (Kohlenbach 2005). Bununla beraber literatürde bazı farklı hiperbolik uzay tanımları da mevcuttur. Bunlar; hiperbolik tipte uzaylar (Goebel and Kirk 1983), Reich ve Shafrir anlamında hiperbolik uzaylar (Reich and Sahfrir 1990).

Tanım 3.1.1: (X, d) metrik uzay ve $W: X^2 \times [0,1] \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y, u \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$d(u, W(x, y, \alpha)) \leq \alpha d(u, x) + (1 - \alpha)d(u, y)$$

şartı sağlanıyorsa W dönüşümüne X üzerinde bir konveks yapı ve W konveks yapısı ile birlikte X e konveks metrik uzay denir ve (X, d, W) ile gösterilir (Takahashi 1970).

Konveks metrik uzaylar normlu uzaylardan ve Banach uzaylarından daha geneldir. Çünkü; X normlu uzay ve her $x, y, u \in X$, $\alpha \in [0,1]$ için W dönüşümü $W(x, y, \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha)y$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(u, W(x, y, \alpha)) &= \|u - (\alpha x + (1 - \alpha)y)\| \\ &\leq \alpha \|u - x\| + (1 - \alpha)\|u - y\| \end{aligned}$$

$$= \alpha d(u, x) + (1 - \alpha)d(u, y)$$

olur. Dolayısıyla her normlu uzay bir konveks metrik uzaydır. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.1.2: $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ olsun. Her $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in [0, 1]$ için $W: X^2 \times [0, 1] \rightarrow X$ dönüşümünü

$$W(x, y, \alpha) = \left(\alpha x_1 + (1 - \alpha)y_1, \frac{\lambda x_1 x_2 + (1 - \lambda)y_1 y_2}{\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1} \right)$$

ve $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ metriğini

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_1 x_2 - y_1 y_2|$$

şeklinde tanımlayalım. (X, d, W) bir konveks metrik uzay olduğu halde normlu uzay değildir.

Bu tezde, Kohlenbach (2005) tarafından tanıtılan hiperbolik uzaylarda çalışılmıştır. Literatürde var olan diğer hiperbolik uzaylardan ayırt etmek için hiperbolik uzay yerine “W-hiperbolik uzay” terimi kullanılmıştır.

Tanım 3.1.3: (X, d) metrik uzay, $W: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$ konveks dönüşümü her $x, y, z, w \in X$ ve her $\alpha, \beta \in [0, 1]$ için

$$(W1). \quad d(z, W(x, y, \alpha)) \leq (1 - \alpha)d(z, x) + \alpha d(z, y),$$

$$(W2). \quad d(W(x, y, \alpha), W(x, y, \beta)) = |\alpha - \beta|d(x, y),$$

$$(W3). \quad W(x, y, \alpha) = W(y, x, 1 - \alpha)$$

$$(W4). \quad d(W(x, z, \alpha), W(y, w, \alpha)) \leq (1 - \alpha)d(x, y) + \alpha d(z, w)$$

şartlarını sağlıyorsa (X, d, W) uzayına W-hiperbolik uzay denir.

Aşağıdaki tanımlar herhangi bir (X, d) metrik uzayında da geçerlidir.

Tanım 3.1.4: (X, d, W) W-hiperbolik uzay olsun. Herhangi $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $d(z, x) = \lambda d(x, y)$ ve $d(z, y) = (1 - \lambda)d(x, y)$ olacak şekilde bir tek $z = W(x, y, \lambda) \in X$ varsa bu uzaya kesin konveks W-hiperbolik uzay denir (Takahashi 1970).

Banach uzaylarının düzgün konveks yapıya sahip olması önemli bir özelliktir. Bu kavram ilk olarak Clarkson (1936) tarafından ardından Goebel ve Reich (1984) tarafından tanıtılmıştır. Düzgün konvekslik kavramı hiperbolik uzaylar için de tanımlanabilir.

Tanım 3.1.5: (X, d, W) bir W-hiperbolik uzay olsun. Herhangi $r > 0$, $\epsilon \in (0, 2]$ ve her $a, x, y \in X$ için

$$\left. \begin{array}{l} d(x, a) \leq r \\ d(y, a) \leq r \\ d(x, y) \geq \epsilon r \end{array} \right\} \Rightarrow d\left(W\left(x, y, \frac{1}{2}\right), a\right) \leq (1 - \delta)r$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0, 1]$ varsa (X, d, W) uzayına düzgün konveks hiperbolik uzay denir (Shimizu and Takahashi 1996).

Tanım 3.1.6: Herhangi $r > 0$ ve $\epsilon \in (0, 2]$ için $\delta := \eta(r, \epsilon)$ olacak şekilde $\eta: (0, \infty) \times (0, 2] \rightarrow (0, 1]$ dönüşümüne düzgün konvekslik modülü denir. Sabit bir ϵ için η dönüşümü r ye göre artan ise η dönüşümüne monoton denir.

Önerme 3.1.7: $\eta: (0, \infty) \times (0, 2] \rightarrow (0, 1]$ dönüşümü verilsin. Aşağıdakiler denktir.

- a) (X, d, W) uzayı düzgün konvekslik modülü η olan bir düzgün konveks hiperbolik uzaydır.
- b) Her $r > 0$, $\epsilon \in (0, 2]$, $\lambda \in [0, 1]$ ve $a, x, y \in X$ için

$$\begin{cases} d(x, a) \leq r \\ d(y, a) \leq r \\ d(x, y) \geq \epsilon \cdot r \end{cases} \Rightarrow d(W(x, y, \lambda), a) \leq (1 - \gamma(r, \epsilon, \lambda))r$$

dir. Burada

$$\gamma(r, \epsilon, \lambda) = \begin{cases} 2\lambda\mu(r, \epsilon), & \lambda \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - \lambda)\mu(r, \epsilon), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir (Leustean 2007).

Hiperbolik uzaylardaki düzgün konvekslik ve kesin konvekslik kavramlarının Banach uzaylarındaki karşılığı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.1.8: B bir Banach uzayı olsun. Eğer $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in S_B = \{x \in B : \|x\| = 1\}$ ve her $\lambda \in (0, 1)$ için

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1$$

şartı sağlanıyorsa B Banach uzayına kesin konveks uzay denir (Agarwal *et al.* 2009).

Bu tanım B deki S_B birim yuvarın yüzeyine ait birbirinden farklı x ve y noktalarının orta noktasının S_B de olmadığını gösterir.

Tanım 3.1.9: B bir Banach uzayı olsun. Her $\epsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \epsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in B$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta(\epsilon) > 0$ varsa B ye düzgün konveks uzay adı verilir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım $x, y \in \overline{S_B} = \{x \in B : \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \epsilon > 0$ için $\frac{x+y}{2}$ orta noktasının $\overline{S_B}$ den bir δ uzaklığında ve $\overline{S_B}$ kapalı birim yuvarın içinde olduğunu ifade eder.

Aşağıdaki teoremler Banach uzaylarında ve hiperbolik uzaylarda kesin konveks ve düzgün konveks uzaylar arasındaki bağıntıyı göstermektedir.

Teorem 3.1.10: Her düzgün konveks Banach uzayı, kesin konveks uzaydır (Agarwal *et al.* 2009).

Önerme 3.1.11: Herhangi düzgün konveks hiperbolik uzayı kesin konvektir (Leustean 2007).

Lemma 3.1.12: (X, d, W) , düzgün konvekslik modülü η olan düzgün konveks hiperbolik uzay ver $r > 0$, $\epsilon \in (0, 2]$, $a, x, y \in X$ için $d(x, a) \leq r$, $d(y, a) \leq r$ ve $d(x, y) \geq \epsilon \cdot r$ olsun. Bu durumda $\lambda \in [0, 1]$ ve $s \geq r$ olmak üzere

$$d(W(x, y, \lambda), a) \leq (1 - 2\lambda(1 - \lambda)\eta(s, \epsilon))r$$

dir (Leustean 2007).

Tanım 3.1.13: (X, d) bir metrik uzay ve $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli verilsin. $x_0 \in X$ için

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

ise f, x_0 da alttan yarı süreklidir denir (Kurdila *et al.* 2005).

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty, \lambda])$ kümesinin X de kapalı olmasıdır (Ansari 2010).

Önerme 3.1.14: (X, d, W) , düzgün konvekslik monoton modülü η olan tam düzgün konveks hiperbolik uzay olsun. X in boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks alt

kümelerinin azalan dizisinin keyfi kesişimi boştan farklıdır (Kohlenbach and Luestean 2007).

Önerme 3.1.15: C , X in boştan farklı, kapalı, konveks alt kümesi ve $f: C \rightarrow [0, \infty)$ konveks ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki C deki tüm $\{x_n\}$ dizileri bir $a \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = \infty$ olması $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ olmasını gerektirir. Bu durumda f , C de bir minimuma sahip olur. Ayrıca her $x, y \in C$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise bu durumda f bir tek noktada minimuma sahip olur. (Leuestean 2008)

İspat: α , C üzerinde f nin infimumu olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_n := \left\{x \in C \mid f(x) \leq \alpha + \frac{1}{n}\right\}$$

olarak tanımlansın. f alttan yarı sürekli olduğundan C_n kapalıdır. f nin infimumu mevcut olduğundan $C_n \neq \emptyset$ dir. f konveks olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için C_n konvektir. Hipotezden C_n sınırlıdır. Böylece, Önerme 3.1.14 ten dolayı $x^* \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ olacak şekilde bir x^* elemanı vardır. Buradan her $n \geq 1$ için $f(x^*) \leq \alpha + \frac{1}{n}$ elde edilir. Böylece $f(x^*) \leq \alpha$ olur. α , f nin infimumu olduğu için $f(x^*) = \alpha$ sonucuna ulaşılır. Yani; f , C üzerinde bir minimuma sahiptir. İspatın ikinci kısmı açıktır. Eğer f , x^* ve y^* gibi iki farklı minimuma sahipse bu durumda C konveks olduğundan $W\left(x^*, y^*, \frac{1}{2}\right) \in C$ ve

$$f\left(W\left(x^*, y^*, \frac{1}{2}\right)\right) < \max\{f(x^*), f(y^*)\} = \alpha$$

olup çelişki elde edilir. O halde $x^* = y^*$ olmalıdır.

Lemma 3.1.16: (X, d, W) , düzgün konveksliğin monoton modülü η olan bir düzgün konveks hiperbolik uzay olsun. $x \in X$ ve $b, c \in (0,1)$ olmak üzere $\{\alpha_n\}$, $[b, c]$ aralığında bir dizi olsun. En az bir r için $r \geq 0$ olmak üzere $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) \leq r$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x) \leq r$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(W(x_n, y_n, \alpha_n), x) = r$ şartlarını sağlayan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri varsa bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ olur (Khan *et al.* 2012).

İspat: $r = 0$ için ispat açıktır. $r > 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

$n_1 \in \mathbb{N}$ ise $\lambda > 0$ ve $n \geq n_1$ için $d(x_n, y_n) \geq \frac{\lambda}{2} > 0$ dir. $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) \leq r$ ve

$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x) \leq r$ olduğundan her $n \geq 1$ için

$$\text{a) } d(x_n, x) \leq r + \frac{1}{n}$$

$$\text{b) } d(y_n, x) \leq r + \frac{1}{n}$$

ifadeleri sağlanır. Üstelik $\frac{\lambda}{2(r+1)} \leq 1$ olmak üzere $d(x_n, y_n) \geq \frac{\lambda}{2} \geq \left(r + \frac{1}{n}\right) \frac{\lambda}{2(r+1)}$ dir.

Lemma 3.1.12 den

$$\begin{aligned} d(W(x_n, y_n, \alpha_n), x) &\leq \left(1 - 2\alpha_n(1 - \alpha_n)\eta\left(r + \frac{1}{n}, \frac{\lambda}{2(r+1)}\right)\right)\left(r + \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \left(1 - 2\alpha_n(1 - \alpha_n)\eta\left(r + 1, \frac{\lambda}{2(r+1)}\right)\right)\left(r + \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \left(1 - 2b(1 - c)\eta\left(r + 1, \frac{\lambda}{2(r+1)}\right)\right)\left(r + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

olup $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(W(x_n, y_n, \alpha_n), x) \leq \left(1 - 2b(1 - c)\eta\left(r + 1, \frac{\lambda}{2(r+1)}\right)\right)r < r$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $d(W(x_n, y_n, \alpha_n), x) = r$ olması ile çelişir. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ olduğu ispatlanır.

Yukarıdaki teorem düzgün konveks Banach uzaylarında aşağıdaki formuyla verilir.

Lemma 3.1.17: X düzgün konveks Banach uzayı olsun. $t \in (0,1)$ ve $a \geq 0$ olmak üzere, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq a$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq a$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|tx_n + (1-t)y_n\| = a$ ise bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ dır (Schu 1991).

W-hiperbolik uzayın şartlarından sadece (W1) şartı sağlanırsa (X, d, W) uzayının konveks metrik uzay olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki şartlardan (W1)-(W3) sağlanırsa bu durumda (X, d, W) uzayına Goebel ve Kirk (1983) anlamında hiperbolik uzay (hiperbolik tipte uzay) denir. (W4) şartı ilk olarak Itoh (1979) tarafından ele alındı. Reich, Shafrir (1990) ve Kirk (1982), (W4) şartını kullanarak kendi hiperbolik uzay kavramlarını tanımladılar.

Bu uzaylar ile W-hiperbolik uzay arasındaki ilişkileri incelemek için geodezik uzay ve CAT(0) uzay kavramlarını tanımlamalıyız. Bunun için bazı tanımlara ihtiyaç duyarız. Literatürde $W(x, y, \alpha)$ yerine $\alpha x \oplus (1 - \alpha)y$ gösterimi de kullanılır. Bundan sonra yeri geldiğinde ikinci gösterimi kullanacağız.

3.1.1. Geodezik uzay

Tanım 3.1.1.1: (X, d) metrik uzay olmak üzere $c: [a, b] \rightarrow X$ dönüşümü her $s, t \in [a, b]$ için

$$d(c(s), c(t)) = |s - t|$$

şartını sağlarsa c dönüşümüne mesafe koruyan veya geodezik yol ya da kısaca geodezik denir (Leuestean 2009).

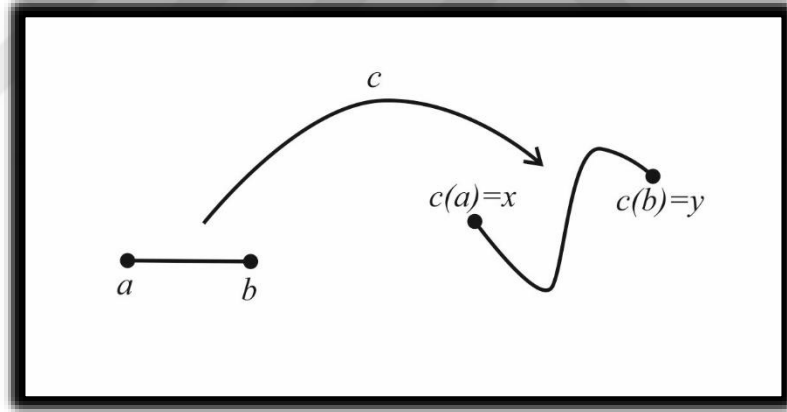
Tanım 3.1.1.2: (X, d) metrik uzay olmak üzere $c: [0, \infty) \rightarrow X$ mesafe koruyan dönüşüme geodezik ışın denir (Leuestean 2009).

Tanım 3.1.1.3: (X, d) metrik uzay olmak üzere $c: \mathbb{R} \rightarrow X$ mesafe koruyan dönüşümüne geodezik doğru denir (Leuestean 2009).

Tanım 3.1.1.4: (X, d) metrik uzay olmak üzere $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü X de bir geodezik $vec(a) = x$, $c(b) = y$ ise $c([a, b])$ ye geodezik denir. Bu şartı sağlayan geodezik doğru parçası tek türlü ise $[x, y]$ notasyonu kullanılır (Leuestean 2009).

Burada c geodeziği x ile y yi bağlar ya da $c([a, b])$ geodezik doğru parçası x ile y yi bağlar denir. Ayrıca x ile y noktalarına c nin bitim noktaları denir.

Tanım 3.1.1.5: (X, d) metrik uzayındaki her nokta çifti tek bir geodezik doğru parçası ile birbirine bağlı ise bu uzaya geodezik uzay denir (Leuestean 2009).



Şekil 3.1. Geodezik doğru parçası

Aşağıdaki önerme W-hiperbolik uzay ile geodezik uzay arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Önerme 3.1.1.6: Her W-hiperbolik uzayı bir geodezik uzaydır (Leuestean 2009).

İspat: (X, d, W) bir W-hiperbolik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$[x, y] := \{(1 - \lambda)x \oplus \lambda y: \lambda \in [0, 1]\}$$

şeklinde yazılırsa $[x, x] = \{x\}$ ve $x \neq y$ için $\gamma_{xy}: [0, d(x, y)] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\gamma(\alpha) := \left(1 - \frac{\alpha}{d(x, y)}\right)x \oplus \frac{\alpha}{d(x, y)}y$$

şeklinde tanımlandığında $\gamma_{xy}([0, d(x, y)]) = [x, y]$ olduğu görülür. Böylece $[x, y]$, x ve y yi birbirine bağlayan bir geodeziktir. O halde her W-hiperbolik uzay bir geodezik uzaydır.

3.1.2. CAT(0) uzayı

Tanım 3.1.2.1: (X, d) bir geodezik uzay ve $p, q, r \in X$ olsun. p, q, r noktaları ve bu noktaları birleştiren geodezik doğru parçalarının birleşimine geodezik üçgen denir ve $\Delta([p, q], [q, r], [r, s])$ ile gösterilir (Leuestean 2009).

Eğer bir x noktası $[p, q]$, $[q, r]$ ve $[r, s]$ nin birleşiminde ise bu durumda $x \in \Delta$ yazılır.

Eğer $d_{\mathbb{R}^2}(\bar{p}, \bar{q}) = d(p, q)$, $d_{\mathbb{R}^2}(\bar{q}, \bar{r}) = d(q, r)$ ve $d_{\mathbb{R}^2}(\bar{r}, \bar{p}) = d(r, p)$ oluyorsa $\mathbb{R}^2$ deki $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ üçgenine $\Delta([p, q], [q, r], [r, s])$ geodezik üçgeni için bir karşılaştırma üçgeni denir. Eğer $d(p, x) = d_{\mathbb{R}^2}(\bar{p}, \bar{x})$ ise $\bar{x} \in [\bar{p}, \bar{q}]$ noktasına $x \in [p, q]$ noktası için bir karşılaştırma noktası denir. Buna göre, $[\bar{q}, \bar{r}]$ ve $[\bar{r}, \bar{p}]$ deki karşılaştırma noktaları da benzer şekilde tanımlanır (Leuestean 2009).

Tanım 3.1.2.2: Δ , X de bir geodezik üçgen ve $\bar{\Delta}$, $\mathbb{R}^2$ de Δ için bir karşılaştırma üçgeni olsun. Her $x, y \in \Delta$ ve her $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$ karşılaştırma noktaları için

$$d(x, y) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}, \bar{y})$$

eşitsizliği sağlanıyorsa Δ geodezik üçgenine, CAT(0) eşitsizliğini sağlıyor denir (Leuestean 2009).

Tanım 3.1.2.3: Eğer uygun boyuttaki tüm geodezik üçgenler $CAT(0)$ eşitsizliğini sağlıyorsa bu geodezik uzaya $CAT(0)$ uzayı denir (Leuestean 2009).

$CAT(0)$ uzayları Hadamard uzayları olarak da bilinir. $CAT(0)$ uzayı aynı zamanda bir geodezik uzay olup bir normlu uzayın $CAT(0)$ uzay olması için gerek ve yeter şart normlu uzayın iç çarpım uzayı olmasıdır (Leuestean 2009).

Şimdi Bruhat-Tits (1972) tarafından verilen (CN) eşitsizliği olarak bilinen ve $CAT(0)$ uzaylarına denk gelen bir karakterizasyonu vereceğiz.

Her $x, y, z \in X$ ve $d(x, m) = d(y, m) = \frac{1}{2}d(x, y)$ şartını sağlayan $m \in X$ için

$$d(z, m)^2 \leq \frac{1}{2}d(z, x)^2 + \frac{1}{2}d(z, y)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 \quad (CN)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizliği W -hiperbolik uzaylarda ilgili notasyonlara uyarlayarak aşağıdaki gibi CN^- eşitsizliği adıyla verebiliriz. Buna göre her $x, y, z \in X$ için

$$d\left(z, \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y\right)^2 \leq \frac{1}{2}d(z, x)^2 + \frac{1}{2}d(z, y)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 (CN^-)$$

dir (Leuestean 2009).

Önerme 3.1.2.4: (X, d) bir metrik uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- a) X bir $CAT(0)$ uzayıdır.
- b) X uzayı CN eşitsizliğini sağlayan bir geodezik uzaydır
- c) (X, d, W) hiperbolik uzay olacak şekilde CN eşitsizliğini sağlayan bir W konveks dönüşümü vardır

- d) (X, d, W) hiperbolik uzay olacak şekilde CN^- eşitsizliğini sağlayan bir W konveks dönüşümü vardır (Leuestean 2009).

Böylece yukarıdaki önermeden görülür ki $CAT(0)$ uzayı CN eşitsizliğini sağlayan bir W -hiperbolik uzaydır.

Önerme 3.1.2.5: $CAT(0)$ uzayları düzgün konvekslik modülü $\eta(r, \epsilon) = \frac{\epsilon^2}{8}$ olan düzgün konveks hiperbolik uzaylardır (Leuestean 2007).

İspat: $r > 0$, $\epsilon \in (0, 2]$ için $d(x, a) \leq r$, $d(y, a) \leq r$ ve $d(x, y) \geq \epsilon \cdot r$ olacak şekilde $x, y, a \in X$ olsun. CN eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y, a\right) &\leq \sqrt{\frac{1}{2}d(x, a)^2 + \frac{1}{2}d(y, a)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2} \\
 &\leq \sqrt{\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}\epsilon^2 r^2} \\
 &= \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} \cdot r \\
 &= \left[1 - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}\right)\right] \cdot r \\
 &= \left[1 - \frac{1 - \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}}\right] \cdot r \\
 &\leq \left[1 - \frac{\frac{\epsilon^2}{4}}{2}\right] \cdot r \\
 &= \left(1 - \frac{\epsilon^2}{8}\right) \cdot r
 \end{aligned}$$

olup $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{8}$ dir.

Dolayısıyla düzgün konveks hiperbolik uzaylar hem düzgün konveks normlu uzayların hem de CAT(0) uzayların doğal bir genellemesidir.

3.1.3. Hiperbolik tipte uzaylar

Hiperbolik tipte uzaylar ilk olarak Goebel ve Kirk (1983) tarafından tanıtıldı.

Tanım 3.1.3.1: (X, d) bir metrik uzay ve S , X deki geodezik doğru parçalarının bir ailesi olsun. Bu durumda

- a) Her $x, y \in X$ için x ve y yi birbirine bağlayan S de $[x, y]$ ile gösterilen tek bir geodezik doğru parçası vardır.
- b) Her $p, x, y \in X$, her $m \in [x, y]$ ve bazı $\alpha \in [0, 1]$ için $d(x, m) = \alpha d(x, y)$ ise

$$d(p, m) \leq (1 - \alpha)d(p, x) + \alpha d(p, y)$$

şartları sağlanırsa (X, d, S) yapısına hiperbolik tipte uzay denir (Leuestean 2009).

Aşağıdaki sonuç gösterir ki, herhangi bir hiperbolik tipli uzay W dönüşümü ile beraber (W1), (W2) ve (W3) şartlarının sağlandığı bir metrik uzaydır

Önerme 3.1.3.2: (X, d) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki iki ifade birbirine denktir.

- a) (X, d, S) hiperbolik tipte uzay olacak şekilde metrik doğru parçalarının bir S ailesi vardır.
- b) (X, d, W) uzayı (W1), (W2) ve (W3) şartlarını sağlayacak şekilde bir W konveks dönüşümü vardır (Leuestean 2009).

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b): Her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$d(x, m) = \lambda d(x, y) \text{ ve } d(y, m) = (1 - \lambda)d(x, y)$$

olacak şekilde bir tek $m \in [x, y]$ vardır. $W: X^2 \times [0,1] \rightarrow X$, $W(x, y, \lambda) = m$ olarak tanımlanırsa (X, d, W) uzayı (W1), (W2) ve (W3) şartlarını sağlar.

(b) $\Rightarrow$ (a): Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için x ve y yi birbirine bağlayan γ_{xy} geodeziği $\gamma_{xy}: [0, d(x, y)] \rightarrow X$, $\gamma(\alpha) := \left(1 - \frac{\alpha}{d(x, y)}\right)x \oplus \frac{\alpha}{d(x, y)}y$ şeklinde tanımlansın. $x = y$ için $\gamma_{xx}: \{0\} \rightarrow X, \gamma(0) = x$ olsun. $S := \{ \gamma_{xy} \mid x, y \in X \}$ olarak tanımlanırsa (X, d, S) hiperbolik tipte uzay olur.

Sonuç olarak W-hiperbolik uzay, hiperbolik tipte uzaydır. Aslında tam olarak W-hiperbolik uzay (W4) şartını sağlayan hiperbolik tipte bir uzaydır.

Aşağıda verilen hiperbolik uzay sınıfı, Reich ve Shafrir (1990) tarafından tanımlandı.

3.1.4. Reich ve Shafrir anlamında hiperbolik uzaylar

(X, d) bir metrik uzay ve M, X deki doğru parçalarının boştan farklı bir sınıfı olsun. M sınıfında, her farklı $x, y \in X$ için x ve y yi birleştiren bir tek doğru parçası vardır. M sınıfı ile birlikte (X, d) metrik uzayını (X, d, M) ile göstereceğiz.

Önerme 3.1.4.1: (X, d) bir metrik uzay ve M, X deki doğru parçalarının boştan farklı bir sınıfı olsun. Bu durumda,

- a) Her $x \in X$ için M de x den geçen en az bir doğru parçası vardır.
- b) Her farklı $x, y \in X$ için x ve y den geçen tek türlü doğru parçası x ve y yi birbirine bağlayan bir geodeziği tek türlü olarak belirler.

c) Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $d(x, z) = \lambda d(x, y)$ ve $d(y, z) = (1 - \lambda)d(x, y)$ olacak şekilde bir tek $z \in [x, y]$ vardır. Buradakiz $\in X$ tek türlü olup $(1 - \lambda)x \oplus \lambda y$ olarak gösterilir (Leuestean 2009).

(X, d, M) yapısı için;

$$d\left(\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}z\right) \leq \frac{1}{2}d(y, z)$$

şartı sağlanıyorsa (X, d, M) yapısına Reich ve Shafrir anlamında hiperbolik uzay denir.

Önerme 3.1.4.2: (X, d, M) Reich ve Shafrir anlamında hiperbolik uzay olsun. Bu durumda her $x, y, z, w \in X$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$$d((1 - \alpha)x \oplus \alpha z, (1 - \alpha)y \oplus \alpha w) \leq (1 - \alpha)d(x, y) + \alpha d(z, w)$$

sağlanır (Leuestean 2009).

Eğer $W: X \times X \times [0,1] \rightarrow X$ olmak üzere $W(x, y, \alpha) = (1 - \alpha)x \oplus \alpha y$ dönüşümü tanımlanırsa (X, d, W) uzayının W-hiperbolik uzay olduğu görülür. Böylece Reich ve Shafrir anlamındaki her hiperbolik uzay bir W-hiperbolik uzaydır.

W-hiperbolik uzaylara bir örnek de aşağıda tanımını verilen Hilbert yuvarıdır.

Tanım 3.1.4.3: H bir kompleks Hilbert uzayı ve B de H da açık birim yuvar olsun.

$$\sigma(x, y) = \frac{(1 - \|x\|^2) \cdot (1 - \|y\|^2)}{|1 - \langle x, y \rangle|^2}$$

olmak üzere B de tanımlanan $\rho(x, y) := \arg \tanh(1 - \sigma(x, y))^{1/2}$ metriğine *Poincaré* metriği, bu metrikle birlikte B ye de Hilbert yuvarı denir (Leuestean 2009).

3.2. Δ –yakınsaklık

Bu bölümde Δ -yakınsaklık kavramı ile ilgili bazı tanım, notasyon ve teoremler verilecektir. Öncelikle asimptotik merkez tekniğini verelim.

Tanım 3.2.1: (X, d) bir metrik uzay, $\{x_n\}$ dizisi X de sınırlı bir dizi ve K kümesi X in boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere her $x \in X$ için

$$r(x, \{x_n\}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, \{x_n\})$$

şeklinde tanımlanır.

$\{x_n\}$ dizisinin asimptotik yarıçapı $r(\{x_n\})$ ile gösterilir ve

$$r(\{x_n\}) = \inf\{r(x, \{x_n\}) : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\{x_n\}$ dizisinin $K \subset X$ e göre asimptotik yarıçapı $r_K(\{x_n\})$ ile gösterilir ve

$$r_K(\{x_n\}) = \inf\{r(x, \{x_n\}) : x \in K\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\{x_n\}$ dizisinin asimptotik merkezi $A(\{x_n\})$ ile gösterilir ve

$$A(\{x_n\}) = \{x \in X : r(x, \{x_n\}) = r(\{x_n\})\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\{x_n\}$ dizisinin $K \subset X$ e göre asimptotik merkezi $A_K(\{x_n\})$ ile gösterilir ve

$$A_K(\{x_n\}) = \{x \in K: r(x, \{x_n\}) = r_K(\{x_n\})\}$$

şeklinde tanımlanır (Nanjaras and Panyanak 2010).

(X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de sınırlı bir dizi olsun. Her $m \in \mathbb{N}$ ve $y \in X$ için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım.

$$r_m(\cdot, \{x_n\}): X \rightarrow [0, \infty), \quad r_m(y, \{x_n\}) = \sup\{d(y, x_n): n \geq m\}$$

$$\begin{aligned} r_m(\cdot, \{x_n\}): X \rightarrow [0, \infty), \quad r(y, \{x_n\}) &= \limsup_n d(y, x_n) = \inf_m r_m(y, \{x_n\}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} r_m(y, \{x_n\}) \end{aligned}$$

dir. Bu fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki lemma verilmiştir.

Lemma 3.2.2: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- a) Her $m \in \mathbb{N}$ için $r_m(\cdot, \{x_n\})$ genişlemeyendir.
- b) $r(\cdot, \{x_n\})$ süreklidir. Ayrıca $a \in X$ olmak üzere her $y \in X$ için $d(y, a) \rightarrow \infty$ iken $r(y, \{x_n\}) \rightarrow \infty$ olur.
- c) $r(y, \{x_n\}) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ olmasıdır.
- d) Eğer (X, d, W) konveks metrik uzay ve C konveks ise bu durumda $r(\cdot, \{x_n\})$ konveks bir fonksiyondur (Leustean 2008).

Teorem 3.2.3: (X, d, W) , η monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. Ayrıca K da X in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. Bu durumda X deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi K ya göre bir tek asimptotik merkeze sahiptir (Leustean 2010).

İspat: η monoton düzgün konvekslik modülü olsun. Önerme 3.1.15 i kullanarak $r(\cdot, \{x_n\}): K \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun minimum değerini bir tek noktada aldığını

göstereceğiz. Lemma 3.2.2 den dolayı $r(\cdot, \{x_n\}): K \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu sürekli ve bir $a \in X$ için $d(y, a) \rightarrow \infty$ iken $r(y, \{x_n\}) \rightarrow \infty$ dir. Böylece geriye $y \neq z$ olmak üzere, $z \in K$ için

$$r\left(W\left(y, z, \frac{1}{2}\right), \{x_n\}\right) < \max\{r(y, \{x_n\}), r(z, \{x_n\})\}$$

olduğunu göstermek kalır. $M := \max\{r(y, \{x_n\}), r(z, \{x_n\})\} > 0$ olsun. Her $\varepsilon \in (0, 1]$ ve $n \geq N$ için

$$d(y, x_n), d(z, x_n) \leq M + \varepsilon \leq M + 1$$

olacak şekilde N doğal sayısı vardır. Ayrıca

$$d(y, z) = \frac{d(y, z)}{M + \varepsilon} (M + \varepsilon) \geq \frac{d(y, z)}{M + 1} (M + \varepsilon)$$

dir. Böylece Lemma 3.1.12 den $n \geq N$ için

$$d\left(W\left(y, z, \frac{1}{2}\right), x_n\right) \leq \left(1 - \eta\left(M + 1, \frac{d(y, z)}{M + 1}\right)\right) (M + \varepsilon)$$

ve buradan

$$r\left(W\left(y, z, \frac{1}{2}\right), \{x_n\}\right) \leq \left(1 - \eta\left(M + 1, \frac{d(y, z)}{M + 1}\right)\right) (M + \varepsilon)$$

elde edilir. $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alınırsa

$$r\left(W\left(y, z, \frac{1}{2}\right), \{x_n\}\right) \leq \left(1 - \eta\left(M + 1, \frac{d(y, z)}{M + 1}\right)\right) M$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Metrik uzaylarda Δ -yakınsama kavramı Lim (1976) tarafından tanıtılmış ve CAT(0) uzaylarında Dhompongsa ve Panyanak (2008) tarafından incelenmiştir. Khanet *al.* (2012) daha genel hiperbolik uzaylarda Δ -yakınsama kavramını incelemeye devam etmiştir.

Tanım 3.2.4: (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin her $\{u_n\}$ alt dizisi bir tek x asimptotik merkezine sahipse $\{x_n\}$ dizisi x e Δ -yakınsar denir. Bu durum $\Delta - \lim_n x_n = x$ şeklinde yazılır ve x e $\{x_n\}$ dizisinin $\Delta -$ limiti denir.

Lemma 3.2.5: X düzgün konveks hiperbolik uzay ve K , X in boştan farklı kapalı alt kümesi, $A(\{x_n\}) = y$, $r(\{x_n\}) = \rho$ ve $\{x_n\}$, K da sınırlı bir dizi olsun. Eğer $\lim_{m \rightarrow \infty} r(y_m, \{x_n\}) = \rho$ olacak şekilde K da bir $\{y_m\}$ dizisi varsa bu durumda $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y$ dir (Khan *et al.* 2012).

İspat: $y_m \nrightarrow y$ olsun. Bu durumda $M > 0$ olmak üzere her j için $d(y_{m_j}, y) \geq \frac{M}{2}$ olacak şekilde $\{y_m\}$ dizisinin bir $\{y_{m_j}\}$ alt dizisi vardır. $\epsilon \in (0,1]$ ve ρ , $\{x_n\}$ nin asimptotik yarıçapı olmak üzere

$$(\rho + \epsilon) \cdot \left(1 - \eta \left(\rho + 1, \frac{M}{2(\rho + 1)} \right) \right) < \rho$$

eşitsizliği $\epsilon \rightarrow 0$ için sağlanır. $A(\{x_n\}) = \{y\}$ olduğundan her $\epsilon \in (0,1]$ ve her $n \geq N_1$ için $d(y, x_n) \leq \rho + \epsilon$ olacak şekilde bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. $\lim_{m \rightarrow \infty} r(y_m, \{x_n\}) = \rho = \lim_{j \rightarrow \infty} r(y_{m_j}, \{x_n\})$ olduğundan her $j^* \geq j$ için $r(y_{m_{j^*}}, \{x_n\}) \leq \rho + \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde $j^* \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq N_2$ için $d(y_{m_{j^*}}, x_n) \leq \rho + \epsilon$ olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Yani,

$$d(y, x_n) \leq \rho + \epsilon \leq \rho + 1 \text{ ve } d(y_{m_{j^*}}, x_n) \leq \rho + \epsilon \leq \rho + 1$$

dir. Lemma 3.1.12 kullanılırsa,

$$d\left(W\left(y, y_{m_{j^*}}, \frac{1}{2}\right), x_n\right) \leq \left(1 - \eta\left(\rho + \epsilon, \frac{M}{2(\rho + 1)}\right)\right)(\rho + \epsilon)$$

$$\leq \left(1 - \eta\left(\rho + 1, \frac{M}{2(\rho + 1)}\right)\right)(\rho + \epsilon)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$r\left(W\left(y, y_{m_j}, \frac{1}{2}\right), \{x_n\}\right) \leq \left(1 - \eta\left(\rho + 1, \frac{M}{2(\rho + 1)}\right)\right)(\rho + \epsilon)$$

olduğu görülür. $\epsilon \rightarrow 0$ ve (3.15) kullanılırsa $r(W(y, y_{m_j}, \{x_n\})) < \rho$ sonucuna ulaşılır.

Bu ise ρ nun $\{x_n\}$ nin asimptotik yarıçapı olması ile çelişir. Böylece $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y$ dir.

Hiperbolik uzaylardaki Δ –yakınsama kavramı ile Opial şartı arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişkiden bahsetmeden önce Opial şartını verelim.

Tanım 3.2.6: X Banach uzayında $x_n \rightarrow x$ zayıf yakınsaması, $y \neq x$ olmak üzere her $y \in X$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa X , Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Dikkat edilirse X bir hiperbolik uzay olmak üzere x noktasına Δ -yakınsayan $\{x_n\} \subset X$ dizisi ve $y \neq x$ olacak şekilde $y \in X$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) < \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y)$$

dir. Dolayısıyla X , Opial şartını sağlar. O halde Δ -yakınsama kavramı Opial şartını sağlayan Banach uzaylarındaki zayıf yakınsama ile çakışır (Kirk and Panyanak 2008)

3.3. İterasyon Yöntemleri

Metrik sabit nokta teorisinde dönüşümün sabit noktası varsa bu sabit noktayı hesaplamak için sabit noktaya yakınsayan iterasyonlar kullanılır. Bu durumda iterasyonun seçimi çok önemlidir. Kullanılan iterasyonun, dönüşümün sabit noktasına hangi şartlarda yakınsadığı, nasıl yakınsadığı gibi soruların cevabında önemli bir rol oynar. Aşağıda, bu tez çalışmasında kullanılan ve en bilinen iterasyonların önce tek değerli dönüşümler için olan versiyonları verilmiş, sonra da Shahzad ve Zegeye'nin (2009) da tanımladığı $P_T(x) = \{y \in Tx: \|x - y\| = d(x, Tx)\}$ dönüşümü kullanılarak Mann, Ishikawa, Noor, Agarwal *et al.* ve Abbas *et al.* tarafından verilen iterasyonların küme değerli versiyonları verilmiştir.

Mann iterasyonu: Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için W. R. Mann tarafından tanımlanmıştır. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\} \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dir (Mann 1953).

Mann iterasyonunun küme değerli versiyonu; K , düzgün konveks bir X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve T küme değerli bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_1 \in K$ ve $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ için $\{x_n\}$ dizisi,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n u_n$$

şeklinde verilir. Burada $u_n \in P_T(x_n)$ dir.

Ishikawa iterasyonu: 1974 yılında S. Ishikawa tarafından kurulmuş ve Lipschitzian ve pseudo-contractive dönüşümler için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda

yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dir (Ishikawa 1976).

(3.2) iterasyonunda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

Sastry ve Babu (2005) de, kompakt bir küme üzerinde tanımlı küme değerli dönüşümler için Mann ve Ishikawa iterasyonlarını yeniden tanımlamış ve bazı çalışmalar yapmıştır. Ardından Panyanak (2007) de kompaktlık şartını kaldırarak Sastry ve Babu'nun çalışmalarını genelleştirmiştir. Son olarak Shahzad ve Zegeye (2009) da, Mann ve Ishikawa iterasyonlarının küme değerli versiyonlarını P_T dönüşümü yardımıyla yeniden tanımlamış ve Panyanak'ın sonuçlarını genelleştirmiştir.

Ishikawa iterasyonunun küme değerli versiyonu; K , düzgün konveks bir X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve T küme değerli bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_1 \in K$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$ için $\{x_n\}$ dizisi,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n v_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n u_n \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada $u_n \in P_T(x_n)$ ve $v_n \in P_T(y_n)$ dir.

Noor iterasyonu: 2000 yılında M. A. Noor tarafından Hilbert uzaylarında çeşitli varyasyonel eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini bulmak için bu iterasyon

tanımlanmıştır. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0,1)$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir (Noor 2000).

Daha sonra 2015 yılında Pathak *et al.* Noor iterasyonunu CAT(0) uzayında küme değerli quasi-genişlemeyen dönüşümler için ele alarak bazı yakınsaklık teoremleri elde ettiler (Pathak *et al.* 2015).

Noor iterasyonunun küme değerli versiyonu; K , düzgün konveks bir X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve T küme değerli bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_1 \in K$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0,1)$ için $\{x_n\}$ dizisi,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n v_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n w_n, \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n u_n \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(y_n)$ ve $w_n \in P_T(z_n)$ dir.

İterasyonların yakınsama hızlarının karşılaştırılması pek çok yazar tarafından çalışılmıştır (Berinde 2004), (Babu *et al.* 2006) ve (Akbulut ve Ozdemir 2012). Yakınsama hızlarının karşılaştırılmasında kullanılan tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.3.1: $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri sırasıyla a ve b reel sayılarına yakınsayan iki dizi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - a|}{|b_n - b|} = l$$

olsun.

- a) $l = 0$ ise $\{a_n\}$ dizisi $\{b_n\}$ dizisinden daha hızlıdır.
- b) $l = \infty$ ise $\{b_n\}$ dizisi $\{a_n\}$ dizisinden daha hızlıdır.
- c) $0 < l < \infty$ ise $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizisi aynı oranda yakınsar (Berinde 2001).

Tanım 3.3.2: $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$ aynı p sabit noktasına yakınsayan iki iterasyon dizisi olsun.

Her $n \geq 1$ için

$$\|x_n - p\| \leq a_n \text{ ve } \|u_n - p\| \leq b_n$$

hata tahmini mevcuttur. Burada $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ sifıra yakınsayan pozitif terimli dizilerdir. Eğer $\{a_n\}$ dizisi $\{b_n\}$ dizisinden hızlı ise bu durumda $\{x_n\}$ dizisi de, p ye $\{u_n\}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

Agarwal et al. iterasyonu: Agarwal et al.(2007)de daraltan dönüşümler için Picard iterasyonu ile aynı oranda fakat Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsayan yeni bir iterasyon (S iterasyonu) tanımladılar. $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere S iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_nTy_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n \end{cases} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n(1 - \beta_n) = \infty$ dir.

Khan ve Yildirim (2012) de (3.4) iterasyon metodunun küme değerli versiyonunu tanımladılar ve bu iterasyonu kullanarak Banach uzaylarında genişlemeyen küme değerli dönüşümlerinin sabit noktalarını hesapladılar.

Agarwal *et al.* iterasyon metodunun küme değerli versiyonu; K , düzgün konveks bir X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve T küme değerli bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_1 \in K$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0,1)$ için $\{x_n\}$ dizisi,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n v_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n u_n \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada $u_n \in P_T(x_n)$ ve $v_n \in P_T(y_n)$ dir.

Abbas *et al.* iterasyonu: Mujahid Abbas ve Talat Nazir (2014) te yeni bir iterasyon tanımladılar. Tanımladıkları bu iterasyonun daraltan dönüşümler için Picard, Mann, Ishikawa ve S-iterasyonundan daha hızlı olduğunu ispatladılar.

K , X in boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere bu iterasyon,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_n Tz_n \\ y_n = (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\} \in (0,1)$ dir (Abbas *et al.* 2014).

2014 te Khan *et al.* (3.5) iterasyonunu küme değerli dönüşümler için yeniden teşkil ederek Banach uzaylarında küme değerli quasi-genişlemeyen dönüşümler için bazı kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri elde etti (Khan and Abbas 2014).

Abbas *et al.* iterasyonunun küme değerli versiyonu; K , düzgün konveks bir X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve T küme değerli bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_1 \in K$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0,1)$ için $\{x_n\}$ dizisi,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)v_n + \alpha_n w_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_n w_n, \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n u_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(y_n)$ ve $w_n \in P_T(z_n)$ dir.

Gunduz ve Akbulut (2013)de Kettapun *et al.* (2010) tarafından verilen iterasyon metodunu modifiye ederek aşağıda verilen iterasyon şemasını tanımladılar. X konveks metrik uzay olmak üzere $x_1 \in X$ olsun. $\{x_n\}$ iterasyon dizisi,

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(T_k^n y_{(k-1)n}, y_{(k-1)n}, \alpha_{kn}), \\ y_{(k-1)n} = W(T_{k-1}^n y_{(k-2)n}, y_{(k-2)n}, \alpha_{(k-1)n}), \\ y_{(k-2)n} = W(T_{k-2}^n y_{(k-3)n}, y_{(k-3)n}, \alpha_{(k-3)n}), \\ \vdots \\ y_{2n} = W(T_2^n y_{1n}, y_{1n}, \alpha_{2n}), \\ y_{1n} = W(T_1^n y_{0n}, y_{0n}, \alpha_{1n}) \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada her n için $y_{0n} = x_n$ ve $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için $\alpha_{in} \in [0, 1]$ dir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yeni 3-adım İterasyon Şeması

Thakur *et al.* (2016) da genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarını hesaplamak için yeni bir iterasyon tanımladı. K , X in boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tz_n + \alpha_nTy_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_nTz_n, \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_nTx_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\} \in (0,1)$. dir.

Ayrıca tanımladıkları bu iterasyonunun daraltan dönüşümler için Mann, Ishikawa, Noor, Agarwal *et al.*, Abbas *et al.* iterasyonlarından daha hızlı olduğunu gösterdiler.

Tek değerli dönüşümler için daha önce verilen bazı iterasyonlar ile Shahzad ve Zegeye'nin (2009) da tanımladığı $P_T(x) = \{y \in Tx: \|x - y\| = d(x, Tx)\}$ dönüşümü kullanılarak elde edilen küme değerli dönüşümler için versiyonları Çizelge 4.1 de birlikte verilmiştir.

K , düzgün konveks bir X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve T , tek değerli veya küme değerli bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_1 \in K$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0,1)$ dizileri için iterasyonlar aşağıdaki bağıntılarla Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Bazı iterasyonların tek değerli ve küme değerli versiyonları

İterasyon	Tek değerli versiyon	Küme değerli versiyon
Mann	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n$	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n u_n$
Ishikawa	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n$ $y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n$	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n v_n$ $y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n u_n$
Noor	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n$ $y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tz_n$ $z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n$	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n v_n$ $y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n w_n$ $z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n u_n$
Agarwal <i>et al.</i>	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n$ $y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n$	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n v_n$ $y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n u_n$
Abbas <i>et al.</i>	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Ty_n + \alpha_n Tz_n$ $y_n = (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n$ $z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n$	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)v_n + \alpha_n w_n$ $y_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_n w_n$ $z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n u_n$
Thakur <i>et al.</i>	$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tz_n + \alpha_n Ty_n$ $y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n Tz_n$ $z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n$	İlk kez bu tezde verilecektir.

Burada $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(y_n)$ ve $w_n \in P_T(z_n)$ dir.

Çizelge 4.1 deki iterasyonların tek değerli versiyonları arasında Thakur *et al.* tarafından tanımlanan iterasyonun daha hızlı olduğu bilinir. Biz de bu iterasyondan esinlenerek küme değerli quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarını bulmak için daha önce tanımlanmamış ilk defa bu tezde kullanılan yeni bir iterasyon şeması tanımladık. Bu şema $x_1 \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)w_n + \alpha_n v_n \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n w_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n u_n \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(y_n)$, $w_n \in P_T(z_n)$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1]$ dir.

Aşağıdaki lemma temel teoremlerde kullandığımız Song (2011) tarafından verilen önemli bir sonuçtur.

Lemma 4.1.1: X bir Banach uzayı ve K da X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli bir dönüşüm olmak üzere

$$P_T(x) = \{y \in Tx : \|x - y\| = d(x, Tx)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir (Song 2011).

- a) $x \in F(T)$. Bir başka ifade ile $x \in Tx$ dir.
- b) $P_T(x) = \{x\}$. Bir başka ifade ile her $y \in P_T(x)$ için $x = y$ dir.
- c) $x \in F(P_T)$. Bir başka ifade ile $x \in P_T(x)$ dir. Üstelik $F(T) = F(P_T)$ dir.

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$: $x \in Tx$ olduğundan $d(x, Tx) = 0$ dir. Bu nedenle $y \in P_T(x)$ için $\|x - y\| = d(x, Tx) = 0$ olup $x = y$ elde edilir. Böylece $P_T(x) = \{x\}$ bulunur.

$(b) \Rightarrow (c)$: $P_T(x) = \{x\}$ olduğundan $x \in P_T(x) \Rightarrow x \in F(P_T)$ dir.

$(c) \Rightarrow (a)$: $x \in P_T(x)$ olduğu için $d(x, Tx) = \|x - x\| = 0$ olup Tx in kapalı olmasından dolayı $x \in Tx$ elde edilir.

4.2. Banach Uzaylarında Küme Değerli Dönüşümler için Kuvvetli ve Zayıf Yakınsama Teoremleri

Lemma 4.2.1: X düzgün konveks Banach uzayı ve K kümesi, X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. P_T quasi-genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi

tanımlansın. Bu durumda her $p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_T(x_n)) = 0$ dır.

İspat : $p \in F(T)$ için (4.1) den,

$$\begin{aligned}
 \|z_n - p\| &= \|(1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n u_n - p\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|u_n - p\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n H(P_T(x_n), P_T(p)) \\
 &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|x_n - p\| \\
 &\leq \|x_n - p\|
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 \|y_n - p\| &= \|(1 - \beta_n)z_n + \beta_n w_n - p\| \\
 &\leq (1 - \beta_n)\|z_n - p\| + \beta_n\|w_n - p\| \\
 &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n H(P_T(z_n), P_T(p)) \\
 &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|z_n - p\| \\
 &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|x_n - p\| \\
 &\leq \|x_n - p\|
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

bulunur. (4.2) ve (4.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \alpha_n)w_n + \alpha_n v_n - p\| \\
 &\leq (1 - \alpha_n)\|w_n - p\| + \alpha_n\|v_n - p\| \\
 &\leq (1 - \alpha_n)H(P_T(z_n), P_T(p)) + \alpha_n H(P_T(y_n), P_T(p)) \\
 &\leq (1 - \alpha_n)\|z_n - p\| + \alpha_n\|y_n - p\| \\
 &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\|x_n - p\| \\
 &\leq \|x_n - p\|
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti mevcuttur. Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0$ olduğu gösterelim. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c$ olsun. (4.2) ve (4.3) kullanılırsa

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \leq c \quad (4.4)$$

ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \leq c \quad (4.5)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|u_n - p\| &\leq H(P_T(x_n), P_T(p)) \leq \|x_n - p\|, \\ \|v_n - p\| &\leq H(P_T(y_n), P_T(p)) \leq \|y_n - p\| \end{aligned}$$

ve

$$\|w_n - p\| \leq H(P_T(z_n), P_T(p)) \leq \|z_n - p\|$$

eşitsizlikleri de sağlanır. Yukarıdaki eşitsizliklerde limsup alınırsa

$$\begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| \leq c \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n - p\| \leq c \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| \leq c \end{cases} \quad (4.6)$$

elde edilir. Öte yandan

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)(w_n - p) + \alpha_n(v_n - p)\|$$

dir. Lemma 2.3.17 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - v_n\| = 0$$

elde edilir.

$$\|x_{n+1} - p\| = \|(1 - \alpha_n)w_n + \alpha_n v_n - p\| \leq \|w_n - p\| + \alpha_n \|w_n - v_n\|$$

eşitsizliğinde liminf alınır

$$c \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| \quad (4.7)$$

sonucuna ulaşılır. Ardından (4.6) ve (4.7) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - p\| = c$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \|w_n - p + v_n - v_n\| \leq \|w_n - v_n\| + \|v_n - p\| \\ &\leq \|w_n - v_n\| + \|y_n - p\| \end{aligned}$$

olduğundan

$$c \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \quad (4.8)$$

olur. (4.5) ve (4.8) kullanıldığında

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \beta_n)(z_n - p) + \beta_n(w_n - p)\|$$

elde edilir. Şimdi (4.4), (4.6) ve Lemma 2.3.17 kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - w_n\| = 0$$

olduğu görülür. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|(1 - \beta_n)z_n + \beta_n w_n - p\| \\ &\leq \|z_n - p\| + \beta_n \|w_n - z_n\| \end{aligned}$$

olduğundan

$$c \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \quad (4.9)$$

bulunur. Dolayısıyla (4.4) ve (4.9) birlikte kullanılırsa

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)(x_n - p) + \alpha_n(u_n - p)\|$$

sonucu elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c$ olduğu, (4.6) ve Lemma 2.3.17 kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir ki buradan da $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_T(x_n)) = 0$ sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2: X düzgün konveks Banach uzayı ve K kümesi, X in boştan farklı kompakt konveks bir alt kümesi olsun. P_T quasi-genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

İspat: Her $p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ mevcut ve K kompakt olduğundan $\{x_n\}$ nin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır ve bir $q \in K$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - q\| = 0$ dir. Bu durumda üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(q, P_T(q)) &\leq d(x_{n_k}, q) + d(x_{n_k}, P_T(x_{n_k})) + H(P_T(x_{n_k}), P_T(q)) \\ &\leq \|x_{n_k} - q\| + \|x_{n_k} - u_{n_k}\| + \|x_{n_k} - q\| \end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve Lemma 4.2.1 kullanılırsa $d(q, P_T(q)) = 0$ bulunur. Yani q, P_T nin bir sabit noktasıdır. Lemma 4.1.1 den $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Örnek 4.2.3: $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ alışılmış normlu uzay ve $K = [0, 2]$ kümesi verilsin. $T: K \rightarrow P(K)$ dönüşümü

$$Tx = \left[0, \frac{x+1}{2}\right]$$

şeklinde tanımlansın. K kümesinin $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi olduğu açıktır. Ayrıca $F(T) = [0, 1] \neq \emptyset$ dir. $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \frac{1}{2^n}$ olsun. Eğer $x \in [0, 1]$ ise $P_T(x) = \{x\}$ dir. $x \notin [0, 1]$ ise bu durumda,

$$\begin{aligned} P_T(x) &= \left\{y \in Tx : |y - x| = d\left(x, \left[0, \frac{x+1}{2}\right]\right)\right\} \\ &= \left\{y \in Tx : |y - x| = \left|x - \frac{x+1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right|\right\} \\ &= \left\{y \in Tx : |y - x| = \frac{x-1}{2}\right\} \\ &= \left\{y \in Tx : y = \frac{x+1}{2}\right\} \end{aligned}$$

dir. Şimdi her $x \in K$ için $P_T(x)$ in quasi-genişlemeyen dönüşüm olduğunu gösterelim. Eğer $x \in [0, 1]$ ise $P_T(x) = \{x\}$ tir. $P_T(x)$ in quasi-genişlemeyen olduğu açıktır. $x \notin [0, 1]$ ise

$$H(P_T(x), P_T(p)) = H\left(\left\{\frac{x+1}{2}\right\}, \{p\}\right) = \left|\frac{x+1}{2} - p\right| \leq |x - p|$$

olduğundan $P_T(x)$ quasi-genişlemeyendir. Bu durumda T dönüşümü Teoremin 4.2.2. nin şartlarını sağlar. Şimdi de (4.1) ile verilen $\{x_n\}$ dizisini oluşturalım:

$x_1 = \frac{3}{2} \in K = [0, 2]$ olsun. Bu durumda

$$P_T(x_1) = \left\{\frac{x_1+1}{2}\right\} = \left\{\frac{\frac{3}{2}+1}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{1}{4}\right\}$$

bulunur. $u_1 \in P_T(x_1) = \left\{1 + \frac{1}{4}\right\}$ seçilirse $u_1 = 1 + \frac{1}{4}$ olur. Bu durumda

$$z_1 = (1 - \gamma_1)x_1 + \gamma_1 u_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{3}{8}$$

ve

$$P_T(z_1) = \left\{\frac{z_1 + 1}{2}\right\} = \left\{\frac{1 + \frac{3}{8} + 1}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{3}{16}\right\}$$

dır. $w_1 \in P_T(z_1) = \left\{1 + \frac{3}{16}\right\}$ alınırsa $w_1 = 1 + \frac{3}{16}$ olur. Buradan

$$y_1 = (1 - \beta_1)z_1 + \beta_1 w_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{16}\right) = 1 + \frac{9}{32}$$

ve

$$P_T(y_1) = \left\{\frac{y_1 + 1}{2}\right\} = \left\{\frac{1 + \frac{9}{32} + 1}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{9}{64}\right\}$$

bulunur. $v_1 \in P_T(y_1) = \left\{1 + \frac{9}{64}\right\}$ olarak alınırsa $v_1 = 1 + \frac{9}{64}$ olur. Bu durumda

$$x_2 = (1 - \alpha_1)w_1 + \alpha_1 v_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{16}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{9}{64}\right) = 1 + \frac{21}{128} < 1 + \frac{1}{4}$$

ve

$$P_T(x_2) = \left\{\frac{x_2 + 1}{2}\right\} = \left\{\frac{1 + \frac{21}{128} + 1}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{21}{256}\right\}$$

bulunur. x_3 terimini bulmak için $u_2 \in P_T(x_2) = \left\{1 + \frac{21}{256}\right\}$ alınırsa $u_2 = 1 + \frac{21}{256}$ olup;

bu durumda

$$z_2 = (1 - \gamma_2)x_2 + \gamma_2 u_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{21}{128}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{21}{256}\right) = 1 + \frac{147}{1024}$$

ve

$$P_T(z_2) = \left\{ \frac{z_2 + 1}{2} \right\} = \left\{ \frac{1 + \frac{147}{1024} + 1}{2} \right\} = \left\{ 1 + \frac{147}{2048} \right\}$$

elde edilir. $w_2 \in P_T(z_2) = \left\{ 1 + \frac{147}{2048} \right\}$ alınırsa $w_2 = 1 + \frac{147}{2048}$ olur. Buradan

$$y_2 = (1 - \beta_2)z_2 + \beta_2 w_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{147}{1024}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{147}{2048}\right) = 1 + \frac{1029}{8192}$$

ve

$$P_T(y_2) = \left\{ \frac{y_2 + 1}{2} \right\} = \left\{ \frac{1 + \frac{1029}{8192} + 1}{2} \right\} = \left\{ 1 + \frac{1029}{8192} \right\}$$

olur. $v_2 \in P_T(y_2) = \left\{ 1 + \frac{1029}{8192} \right\}$ olarak seçilirse $v_2 = 1 + \frac{1029}{8192}$ olup; bu durumda

$$\begin{aligned} x_3 &= (1 - \alpha_2)w_2 + \alpha_2 v_2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{147}{2048}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1029}{16384}\right) \\ &= 1 + \frac{4557}{65536} < 1 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $1 < x_4 < 1 + \frac{1}{8}$, $1 < x_5 < 1 + \frac{1}{10}$, ..., $1 < x_n < 1 + \frac{1}{2n}$ olduğu görülür. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $F_T = [0,1]$ in bir noktasına kuvvetli yakınsar.

Tanım 4.2.4: $T: K \rightarrow CB(K)$ küme değerli dönüşümü verilsin. $F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$ için $d(x, Tx) \geq f(d(x, F(T)))$ olacak şekilde her $r \in (0, \infty)$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ şartını sağlayan sürekli ve azalmayan bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu varsa T ye (I) şartını sağlar denir (Senter and Dotson 1974).

Bir K kümesinin kompaktlığına göre (I) şartının daha zayıf bir şart olduğu bilinir. Bu kısımda Teorem 4.2.2 nin şartlarından biri olan K kümesinin kompakt olma özelliği yerine daha zayıf bir şart olan Senter ve Dotson (1974) tarafından verilen (I) şartı kullanılarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 4.2.5: X düzgün konveks Banach uzayı ve K kümesi, X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. P_T quasi-genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli dönüşümü (I) şartını sağlasın. Bu durumda (4.1) ile verilen $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat. Lemma 4.2.1 de bir $p \in F(T) = F(P_T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limitinin mevcut olduğu gösterildi. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ olması halinde ispat açıktır. Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c > 0$ olsun. Lemma 4.2.1 den her $n \in \mathbb{N}$ ve bir p için $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ olduğu bilinir. Buna göre $d(x_{n+1}, F(T)) \leq d(x_n, F(T))$ yazılır. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, F(T))$ limiti mevcut olur.

Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, F(T)) = 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, F(T)) = b > 0$$

olduğunu kabul edelim.

$$t_n = \frac{u_n - p}{\|x_n - p\|}, \quad t'_n = \frac{x_n - p}{\|x_n - p\|}$$

olsun. $\|u_n - p\| \leq H(P_T(x_n), P_T(p)) \leq \|x_n - p\|$ olduğundan $\|t_n\| \leq 1$ ve $\|t'_n\| = 1$ olarak elde edilir. (I) şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} \|t'_n - t_n\| &= \left\| \frac{x_n - p}{\|x_n - p\|} - \frac{u_n - p}{\|x_n - p\|} \right\| \\ &= \left\| \frac{x_n - u_n}{\|x_n - p\|} \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|x_n - u_n\|}{\|x_n - p\|} \\
&= \frac{d(x_n, Tx_n)}{\|x_n - p\|} \\
&\geq \frac{f(d(x_n, F(T)))}{\|x_n - p\|}
\end{aligned}$$

elde edilir. f sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|t'_n - t_n\| \geq \frac{f(b)}{c} > 0$$

olur. Lemma 4.2.1 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = c$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| = c$ olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \gamma_n)t'_n + \gamma_n t_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (1 - \gamma_n) \frac{x_n - p}{\|x_n - p\|} + \gamma_n \frac{u_n - p}{\|x_n - p\|} \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n u_n - p}{\|x_n - p\|} \right\| \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|} = \frac{c}{c} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle Lemma 2.3.17 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|t'_n - t_n\| = 0$$

bulunur. Bu ise $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|t'_n - t_n\| > 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, F(T)) = 0$$

olur. Bu ise $p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ demektir. Yani $\{x_n\}$ dizisi T nin p sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Aşağıda Teorem 4.2.5 i destekleyen bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.2.6: $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $K = [a, b]$ olsun. K kümesinin $\mathbb{R}$ nin boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır. $0 < a < b - 1$ olmak üzere $T: K \rightarrow P(K)$ dönüşümünü

$$Tx = \left[a, a + \frac{x}{b} \right]$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $F_T = \left[a, \frac{ab}{b-1} \right] \neq \emptyset$ olur. $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \frac{1}{2}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(r) = \frac{r}{2b/(b-1)}$ sürekli ve azalmayan fonksiyonunu göz önüne alalım. Öncelikle her $x \in K$ için $d(x, Tx) \geq f(d(x, F_T))$ olduğu gösterilecektir. Eğer $x \in F_T = \left[a, \frac{ab}{b-1} \right]$ ise bu durumda $d(x, Tx) = 0 = f(d(x, F_T))$ olduğu açıktır. $x \in \left[\frac{ab}{b-1}, b \right]$ iken

$$d(x, Tx) = d\left(x, \left[a, a + \frac{x}{b} \right]\right) = \left| x - \left(a + \frac{x}{b} \right) \right| = \frac{|(b-1)x - ab|}{b}$$

ve böylece

$$f(d(x, F_T)) = f\left(d\left(x, \left[a, \frac{ab}{b-1} \right]\right)\right) = f\left(\left| x - \frac{ab}{b-1} \right|\right) = \frac{|(b-1)x - ab|}{2b}$$

elde edilir. Sonuç olarak her $x \in K$ için $d(x, Tx) \geq f(d(x, F_T))$ olur. $x \in \left[a, \frac{ab}{b-1} \right]$ iken

$P_T(x) = \{x\}$ olur. $x \in \left[\frac{ab}{b-1}, b \right]$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} P_T(x) &= \left\{ y \in Tx : |y - x| = d\left(x, \left[a, a + \frac{x}{b} \right]\right) \right\} \\ &= \left\{ y \in Tx : |y - x| = \left| x - \left(a + \frac{x}{b} \right) \right| \right\} \\ &= \left\{ y \in Tx : |y - x| = \frac{|(b-1)x - ab|}{b} \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ y \in Tx : y = a + \frac{x}{b} \right\}$$

olarak bulunur. Şimdi her $x \in K$ için P_T nin quasi-genişlemeyen dönüşüm olduğunu gösterelim. Eğer $x \in F_T$ ise bu durumda $P_T(x) = \{x\}$ olduğundan

$$H(P_T(x), p) = H(\{x\}, p) = |x - p|$$

elde edilir. Eğer $x \in \left[\frac{ab}{b-1}, b \right]$ ise

$$H(P_T(x), \{p\}) = H\left(\left\{a + \frac{x}{b}\right\}, \{p\}\right) = \left|a + \frac{x}{b} - p\right| \leq |x - p|$$

elde edilir. Yani her $x \in K$ için P_T nin quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Son olarak (4.1) deki gibi bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturup bu dizinin T nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını gösterelim. $a = 1$ ve $b = 3$ alındığında $K = [1, 3]$ ve

$$Tx = \left[1, 1 + \frac{x}{3}\right]$$

olup $F_T = \left[1, \frac{3}{2}\right] \neq \emptyset$ dir. $x_1 = \frac{9}{4} \in K$ seçilsin. Bu durumda $P_T(x_1) = \left\{1 + \frac{x_1}{3}\right\} = \left\{\frac{7}{4}\right\}$ bulunur. $u_1 \in P_T(x_1) = \left\{\frac{7}{4}\right\}$ seçilsin. Yani, $u_1 = \frac{7}{4}$ olup; bu durumda

$$z_1 = (1 - \gamma_1)x_1 + \gamma_1 u_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} = 2$$

ve

$$P_T(z_1) = \left\{1 + \frac{z_1}{3}\right\} = \left\{1 + \frac{2}{3}\right\} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

olarak bulunur. $w_1 \in P_T(z_1) = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ seçilsin. Yani, $w_1 = \frac{5}{3}$ olup; bu durumda

$$y_1 = (1 - \beta_1)z_1 + \beta_1 w_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{11}{6}$$

ve

$$P_T(y_1) = \left\{1 + \frac{y_1}{3}\right\} = \left\{1 + \frac{11}{18}\right\} = \left\{\frac{29}{18}\right\}$$

elde edilir. $v_1 \in P_T(y_1) = \left\{\frac{29}{18}\right\}$ seçilsin. Yani, $v_1 = \frac{29}{18}$ olup; bu durumda

$$x_2 = (1 - \alpha_1)w_1 + \alpha_1 v_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{18} = \frac{59}{36} = \frac{54}{36} + \frac{5}{36} < \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{3}{2} < x_n < \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}$ sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak $\{x_n\}$ dizisi T nin $\frac{3}{2} \in F_T = \left[1, \frac{3}{2}\right]$ noktasına kuvvetli yakınsar.

Son olarak Opial şartı kullanılarak (4.1) iterasyonunun zayıf yakınsaklık teoremi verilecektir.

Tanım 4.2.7: $T: K \rightarrow CB(K)$ küme değerli bir dönüşüm olmak üzere, K daki x e zayıf yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi ve Tx_n deki y ye kuvvetli yakınsayan her $\{y_n\}$ dizisi için $y \in Tx$ ise T ye y de demicloseddir denir.

Teorem 4.2.8: X Opial şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayı ve K kümesi de X nin boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. P_T quasi-genişlemeyen dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli dönüşümü verilsin. Ayrıca $I - P_T$ sıfırda demiclosed olsun. Bu durumda (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $p \in F(T) = F(P_T)$ olsun. Lemma 4.2.1 de her $p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limitinin mevcut olduğu ispatlandı. z_1 ve z_2 , $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizilerinin zayıf limitleri olsun. (4.10) dan dolayı $u_n \in Tx_n$ olacak şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0$

limiti vardır. $I - P_T$ dönüşümü sıfırda demiclosed olduğundan $z_1 \in F(P_T) = F(T)$ dir. Benzer muhakeme ile $z_2 \in F(P_T) = F(T)$ olduğu görülür. Şimdi $z_1 = z_2$ olduğu ispatlanacaktır. $z_1 \neq z_2$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda Opial şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_1\| &= \lim_{n_i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z_1\| \\
 &< \lim_{n_i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z_2\| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_2\| \\
 &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z_2\| \\
 &< \lim_{n_j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z_1\| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_1\|
 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $z_1 = z_2$ olup $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ de bir noktaya yakınsar.

4.3. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması

Bu bölümde (4.1) ile tanımladığımız iterasyon ile bazı diğer iterasyonların yakınsama hızlarının karşılaştırmasını aşağıdaki örnek üzerinden göstereceğiz. Şu ana kadar yapılan çalışmalarda küme değerli dönüşüm sınıflarının yakınsama hızlarını karşılaştırmak için kullanılabilecek teorik bir sonuç elde edilmemiştir.

Örnek 4.3.1: $K = [0,3]$ ve $T: K \rightarrow P(K)$ dönüşümü her $x \in K$ için

$$Tx = \left[0, \frac{3x+8}{11}\right]$$

olarak tanımlansın. T küme değerli dönüşümü için $F_T = [0,1] \neq \emptyset$ ve P_T nin de küme değerli quasi-genişlemeyen dönüşüm olduğu açıktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0,83$ ve $x_1 = 2,5$ olsun. (4.1) iterasyonu ile Çizelde 4.1 de verilen iterasyonların ilk 30

terimi Çizelge 4.2 de gösterilmiş olup tüm iterasyonlar $p = 1 \in F_T = [0,1]$ noktasına yakınsamaktadır.

Shahzad and Zegeye (2009) tarafından tanımlanan $P_T(x) = \{y \in Tx: \|x - y\| = \|x - Tx\|\}$ dönüşümü, (4.1) iterasyonu ile Çizelge 4.1 de bahsedilen iterasyonların T nin aynı sabit noktasına yakınsamasını garanti eder.

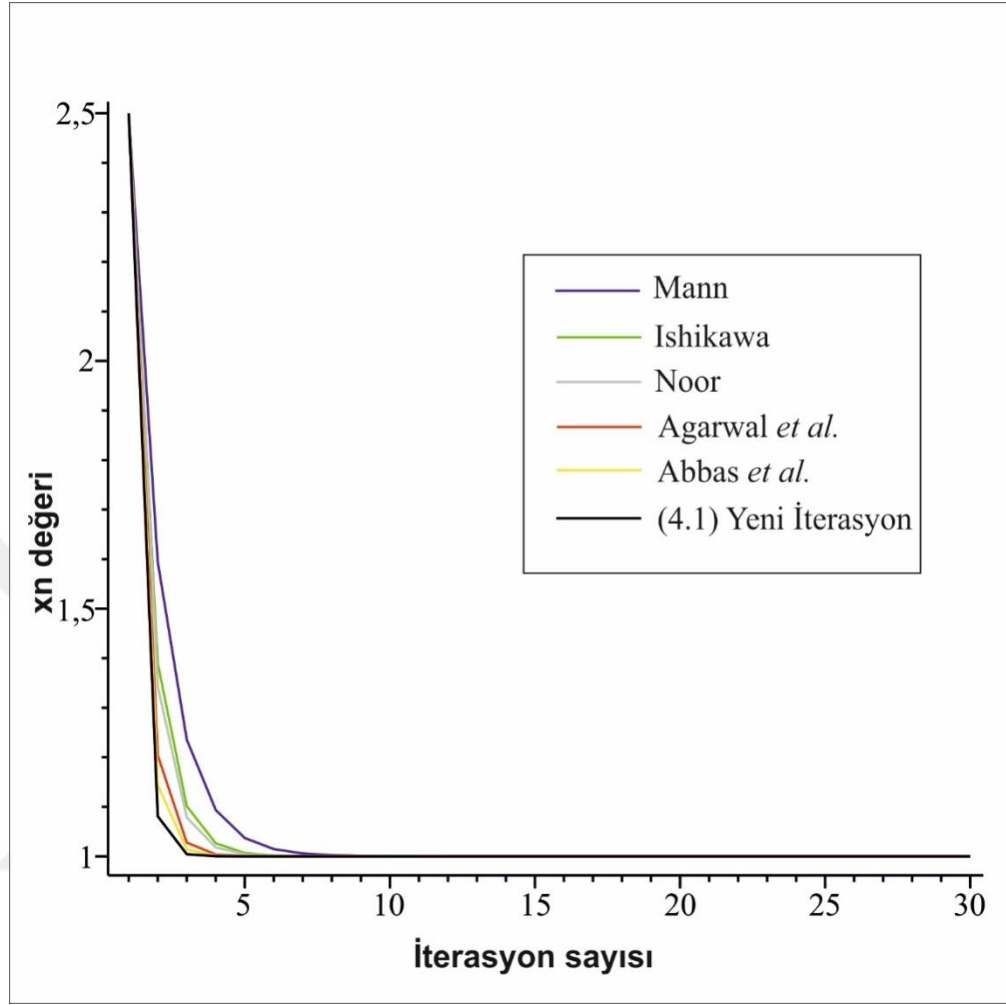
Çizelge 4.2. Küme değerli farklı iterasyon şemaların yakınsama hızları

Adım	Mann	Ishikawa	Noor	Agarwal <i>et al.</i>	Abbas <i>et al.</i>	(4.1) iterasyonu
1	2,500000000	2,500000000	2,500000000	2,500000000	2,500000000	2,500000000
2	1,594545454	1,389583471	1,343187532	1,204128925	1,144047630	1,080909283
3	1,235656198	1,101183521	1,078518455	1,027779079	1,013833147	1,004364208
4	1,093405548	1,026279618	1,017964370	1,003780342	1,001328422	1,000235404
5	1,037022562	1,006825403	1,004110099	1,000514452	1,000127570	1,000012697
6	1,014674397	1,001772710	1,000940356	1,000070010	1,000012251	1,000000685
7	1,005816397	1,000460413	1,000215146	1,000009527	1,000001176	1,000000038
8	1,002305408	1,000119579	1,000049224	1,000001297	1,000000113	1,000000002
9	1,000913780	1,000031057	1,000011262	1,000000176	1,000000011	1,000000000
10	1,000362189	1,000008066	1,000002577	1,000000024	1,000000001	1,000000000
11	1,000143559	1,000002095	1,000000590	1,000000004	1,000000000	1,000000000
12	1,000056901	1,000000544	1,000000135	1,000000001	1,000000000	1,000000000
13	1,000022553	1,000000142	1,000000031	1,000000000	1,000000000	1,000000000
14	1,000008939	1,000000036	1,000000007	1,000000000	1,000000000	1,000000000
15	1,000003543	1,000000009	1,000000002	1,000000000	1,000000000	1,000000000
16	1,000001404	1,000000002	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
17	1,000000557	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000

Çizelge 4.2. (devam)

18	1,000000221	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
19	1,000000087	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
20	1,000000035	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
21	1,000000014	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
22	1,000000006	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
23	1,000000003	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
24	1,000000001	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
25	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
26	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
27	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
28	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
29	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000
30	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000

Örnek 4.3.1 de verilen T dönüşümü için Mann, Ishikawa, Noor, Agarwal *et al.* Abbas *et al.* ile (4.1) iterasyonunun yakınsama hızlarının grafikleri Şekil (4.1) de verilmiştir.



Şekil 4.1. Örnek 4.3.1 de verilen T dönüşümü için bazı iterasyon adımlarının grafiği

4.4. Hiperbolik Uzaylarda Küme Değerli Genişlemeyen Dönüşüm Ailesi için Kuvvetli ve Zayıf Yakınsama Teoremleri

Gunduz ve Akbulut (2013) tarafından verilen (3.6) iterasyonundan esinlenerek W -hiperbolik uzaylarda küme değerli genişlemeyen sonlu bir dönüşüm ailesi için literatürde var olmayan ilk defa bu tezde kullanılan yeni bir iterasyon şeması tanımlanmıştır.

X bir W -hiperbolik uzay, K kümesi X in konveks bir alt kümesi, $T_i : K \rightarrow P(K)$ olmak üzere $\{T_i : i = 1, 2, \dots, k\}$ küme değerli dönüşümlerin bir ailesi ve $i = 1, 2, \dots, k$ için

$P_{T_i}(x) = \{y \in T_i x: d(x, y) = d(x, T_i x)\}$ küme değerli genişlemeyen dönüşüm olsun.

Her $n = 1, 2, \dots$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\alpha_{in} \in [0, 1]$ ve $x_0 \in K$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi,

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(u_{(k-1)n}, y_{(k-1)n}, \alpha_{kn}), \\ y_{(k-1)n} = W(u_{(k-2)n}, y_{(k-2)n}, \alpha_{(k-1)n}), \\ y_{(k-2)n} = W(u_{(k-3)n}, y_{(k-3)n}, \alpha_{(k-2)n}), \\ \vdots \\ y_{2n} = W(u_{1n}, y_{1n}, \alpha_{2n}), \\ y_{1n} = W(u_{0n}, y_{0n}, \alpha_{1n}) \end{cases} \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada her n için $y_{0n} = x_n$ ve $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ için $u_{in} \in P_{T_{i+1}}(y_{in})$ dir.

Şimdi (4.11) ile verilen iterasyon şeması kullanılarak bazı önemli lemmalar ve yakınsama teoremleri verilecektir.

Lemma 4.4.1: X bir W-hiperbolik uzay, K kümesi X in kapalı, konveks ve boş olmayan bir alt kümesi, $T_i : K \rightarrow P(K)$ olmak üzere $\{T_i: i = 1, 2, \dots, k\}$ küme değerli dönüşümlerin bir ailesi, $i = 1, 2, \dots, k$ için $P_{T_i}x = \{y \in T_i x: d(x, y) = d(x, T_i x)\}$ küme değerli genişlemeyen dönüşüm ve $p \in F(T_i)$ olsun. Kabul edelim ki $F = \bigcap_{i=1}^k F(T_i) \neq \emptyset$, $x_1 \in K$ ve $\{x_n\}$ dizisi (4.11) deki gibi tanımlansın. Bu durumda her $p \in F$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

- (1) Her $i = 1, 2, \dots, k$ için $d(x_n, P_{T_i}(x_n)) \leq 2d(x_n, p)$ dir.
- (2) Her $i = 1, 2, \dots, k$ için $d(y_{(i-1)n}, u_{(i-1)n}) \leq 2d(y_{(i-1)n}, p)$ dir.
- (3) Her $i = 1, 2, \dots, k$ için $d(u_{(i-1)n}, p) \leq d(y_{(i-1)n}, p)$ dir.
- (4) Her $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $d(y_{in}, p) \leq d(x_n, p)$ dir.
- (5) $d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$ dir.
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$ mevcuttur.

İspat:

(1) $p \in F$ olsun. Her $i = 1, 2, \dots, k$ için,

$$\begin{aligned}
 d(x_n, P_{T_i}(x_n)) &\leq d(x_n, p) + d(p, P_{T_i}x_n) \\
 &\leq d(x_n, p) + H(P_{T_i}p, P_{T_i}x_n) \\
 &\leq d(x_n, p) + d(p, x_n) \\
 &\leq 2d(x_n, p)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

olur.

(2) $p \in F$ olsun. Her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned}
 d(y_{(i-1)n}, u_{(i-1)n}) &\leq d(y_{(i-1)n}, p) + d(p, u_{(i-1)n}) \\
 &\leq d(y_{(i-1)n}, p) + H(P_{T_i}p, P_{T_i}y_{(i-1)n}) \\
 &\leq d(y_{(i-1)n}, p) + d(p, y_{(i-1)n}) \\
 &\leq 2d(y_{(i-1)n}, p)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

bulunur.

(3) $p \in F$ olsun. Her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned}
 d(u_{(i-1)n}, p) &\leq d(u_{(i-1)n}, P_{T_i}p) \\
 &\leq H(P_{T_i}y_{(i-1)n}, P_{T_i}p) \\
 &\leq d(y_{(i-1)n}, p) \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

dir.

(4) $p \in F$ olsun. İlk olarak

$$\begin{aligned}
 d(y_{1n}, p) &= d(W(u_{0n}, y_{0n}, \alpha_{1n}), p) \\
 &\leq (1 - \alpha_{1n})d(u_{0n}, p) + \alpha_{1n}d(y_{0n}, p) \\
 &\leq (1 - \alpha_{1n})d(u_{0n}, P_{T_1}p) + \alpha_{1n}d(y_{0n}, p) \\
 &\leq (1 - \alpha_{1n})H(P_{T_1}y_{0n}, P_{T_1}p) + \alpha_{1n}d(y_{0n}, p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \alpha_{1n})d(y_{0n}, p) + \alpha_{1n}d(y_{0n}, p) \\
&\leq d(x_n, p)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Her $j = 1, 2, \dots, k - 2$ için $d(y_{jn}, p) \leq d(x_n, p)$ eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
d(y_{(j+1)n}, p) &= d(W(u_{jn}, y_{jn}, \alpha_{(j+1)n}), p) \\
&\leq (1 - \alpha_{(j+1)n})d(u_{jn}, p) + \alpha_{(j+1)n}d(y_{jn}, p) \\
&\leq (1 - \alpha_{(j+1)n})d(u_{jn}, P_{T_{(j+1)n}}(p)) + \alpha_{(j+1)n}d(y_{jn}, p) \\
&\leq (1 - \alpha_{(j+1)n})H(P_{T_{(j+1)n}}(y_{jn}), P_{T_{(j+1)n}}(p)) + \alpha_{(j+1)n}d(y_{jn}, p) \\
&\leq (1 - \alpha_{(j+1)n})d(y_{jn}, p) + \alpha_{(j+1)n}d(y_{jn}, p) \\
&\leq d(y_{jn}, p) \\
&\leq d(x_n, p)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olur. Son olarak

$$\begin{aligned}
d(y_{(k-1)n}, p) &= d(W(u_{(k-2)n}, y_{(k-2)n}, \alpha_{(k-1)n}), p) \\
&\leq (1 - \alpha_{(k-1)n})d(u_{(k-2)n}, p) + \alpha_{(k-1)n}d(y_{(k-2)n}, p) \\
&\leq (1 - \alpha_{(k-1)n})d(u_{(k-2)n}, P_{T_{k-1}}(p)) + \alpha_{(k-1)n}d(y_{(k-2)n}, p) \\
&\leq (1 - \alpha_{(k-1)n})H(P_{T_{k-1}}(y_{(k-2)n}), P_{T_{k-1}}(p)) + \alpha_{(k-1)n}d(y_{(k-2)n}, p) \\
&\leq (1 - \alpha_{(k-1)n})H(P_{T_{k-1}}(y_{(k-2)n}), P_{T_{k-1}}(p)) + \alpha_{(k-1)n}d(y_{(k-2)n}, p) \\
&\leq d(y_{(k-2)n}, p)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Böylece, tümevarım ilkesine göre her $i = 1, 2, \dots, k - 1$ için

$$d(y_{in}, p) \leq d(x_n, p) \tag{4.18}$$

eşitsizliği ispatlanmış olur.

(5) (4.18) eşitsizliğinde $i = k - 1$ için $d(y_{(k-1)n}, p) \leq d(x_n, p)$ ifadesi ve (4.11) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, p) &= d(W(u_{(k-1)n}, y_{(k-1)n}, \alpha_{kn}), p) \\
&\leq (1 - \alpha_{kn})d(u_{(k-1)n}, p) + \alpha_{kn}d(y_{(k-1)n}, p) \\
&\leq (1 - \alpha_{kn})d(u_{(k-1)n}, P_{T_k}(p)) + \alpha_{kn}d(y_{(k-1)n}, p) \\
&\leq (1 - \alpha_{kn})H(P_{T_k}(y_{(k-1)n}), P_{T_k}(p)) + \alpha_{kn}d(y_{(k-1)n}, p) \\
&\leq (1 - \alpha_{kn})d(y_{(k-1)n}, p) + \alpha_{kn}d(y_{(k-1)n}, p) \\
&\leq d(y_{(k-1)n}, p) \\
&\leq d(x_n, p)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olduğu görülür.

(6) (5) den her $n = 1, 2, \dots$ için $d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$ olup, $\{d(x_n, p)\}$ azalan bir dizidir. Böylece her $p \in F$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$ mevcuttur.

Lemma 4.4.2: X düzgün konveks W -hiperbolik uzay, K kümesi X in boştan farklı kapalı ve konveks alt kümesi, her $i = 1, 2, \dots, k$ için $T_i : K \rightarrow P(K)$ küme değerli dönüşümlerin bir ailesi ve P_{T_i} küme değerli genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $F = \bigcap_{i=1}^k F(T_i) \neq \emptyset$ ve $\{x_n\}$ dizisi (4.11) deki gibi tanımlansın. Bu durumda her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_{T_i}(x_n)) = 0$$

dır.

İspat: Lemma 4.4.1 den dolayı her $p \in F$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$ mevcuttur. Bu nedenle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p) = c \tag{4.20}$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ reel sayısı vardır. (4.18) eşitsizliğinde limsup alınırsa her $i = 1, 2, \dots, k - 1$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(y_{in}, p) \leq c \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.14) ve (4.18) kullanılırsa her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_{(i-1)n}, p) \leq c \quad (4.22)$$

eşitsizliği elde edilir. $\{d(x_{n+1}, p)\}$ dizisi $\{d(x_n, p)\}$ dizisinin alt dizisi olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, p) = c$ dir. Buradan (4.11) kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(W(u_{(k-1)n}, y_{(k-1)n}, \alpha_{kn}), p) = c$$

elde edilir. Lemma 3.1.16, (4.21) ve (4.22) kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{(k-1)n}, u_{(k-1)n}) = 0$$

bulunur. Her $j = 2, 3, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{(j-1)n}, u_{(j-1)n}) = 0 \quad (4.23)$$

olduğunu kabul edelim. Lemma 4.4.1 den her $i = 1, 2, \dots, k - 1$ için

$$d(x_{n+1}, p) \leq d(y_{in}, p) \quad (4.24)$$

olur. Bu nedenle (4.20) den her $i = 2, 3, \dots, k$ için

$$c \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(y_{(i-1)n}, p) \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.21) ve (4.25) eşitsizlikleri kullanılırsa her $j = 2, 3, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{(j-1)n}, p) = c \quad (4.26)$$

bulunur. (4.11) iterasyonu yardımıyla ve (4.26) dan dolayı her $i = 2, 3, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{(j-1)n}, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(W(u_{(j-2)n}, y_{(j-2)n}, \alpha_{(j-1)n}), p) = c$$

olduğu görülür. Şimdi Lemma 3.1.16, (4.21) ve (4.22) kullanılırsa her $j = 2, 3, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_{(j-2)n}, y_{(j-2)n}) = 0$$

olur. Tümevarımla her $j = 1, 2, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_{(j-1)n}, y_{(j-1)n}) = 0 \quad (4.27)$$

elde edilir. Aşağıdaki eşitsizlikte (4.11) iterasyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned} d(y_{in}, y_{(i-1)n}) &= d(W(u_{(i-1)n}, y_{(i-1)n}, \alpha_{in}), y_{(i-1)n}) \\ &\leq (1 - \alpha_{in})d(u_{(i-1)n}, y_{(i-1)n}) \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlikte limit alınırsa (4.27) den dolayı her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{in}, y_{(i-1)n}) = 0 \quad (4.28)$$

olur. Yine (4.11) iterasyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned} d(x_n, y_{1n}) &= d(x_n, W(u_{0n}, y_{0n}, \alpha_{1n})) \\ &\leq (1 - \alpha_{1n})d(x_n, u_{0n}) + \alpha_{1n}d(x_n, y_{0n}) \\ &= (1 - \alpha_{1n})d(x_n, u_{0n}) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.27) ifadesinde $j = 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{0n}, u_{0n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, u_{0n}) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_{1n}) = 0 \quad (4.29)$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n, y_{(i-1)n}) \leq d(x_n, y_{1n}) + d(y_{1n}, y_{2n}) + \cdots + d(y_{(i-2)n}, y_{(i-1)n})$$

yazılır. $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında (4.28) ve (4.29) kullanılırsa her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_{(i-1)n}) = 0 \quad (4.30)$$

olur. Son olarak yine üçgen eşitsizliğinden her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, P_{T_i} x_n) &\leq d(x_n, y_{(i-1)n}) + d(y_{(i-1)n}, u_{(i-1)n}) + d(u_{(i-1)n}, P_{T_i} x_n) \\ &\leq d(x_n, y_{(i-1)n}) + d(y_{(i-1)n}, u_{(i-1)n}) + H(P_{T_i} y_{(i-1)n}, P_{T_i} x_n) \\ &\leq 2d(x_n, y_{(i-1)n}) + d(y_{(i-1)n}, u_{(i-1)n}) \end{aligned}$$

yazılır. (4.27) ve (4.30) kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_{T_i} x_n) = 0$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.3: X düzgün konvekslik modülün olan tam düzgün konveks W -hiperbolik uzay, K kümesi X in boştan farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. T_i ve P_{T_i} Lemma 4.4.1 deki gibi tanımlansın. Bu durumda (4.11) ile verilen $\{x_n\}$ dizisi $p \in F$ ye Δ -yakınsar.

İspat : $p \in F$ olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, \dots, k$ için $p \in F(T_i) = F(P_{T_i})$ olur. Lemma 4.4.1 den $\{x_n\}$ sınırlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$ mevcuttur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ bir tek

asimptotik merkeze sahiptir. Yani $A(\{x_n\}) = \{x\}$ dir. $\{v_n\}$ dizisi, $A(\{v_n\}) = \{v\}$ olacak şekilde $\{x_n\}$ nin bir alt dizisi olsun. Lemma 4.4.2 den $\lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, P_{T_1}(v_n)) = 0$ elde edilir. İddia ediyoruz ki v , P_{T_1} in bir sabit noktasıdır. Bunu ispatlamak için $P_{T_1}(v)$ de bir başka $\{z_m\}$ dizisi alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 r(z_m, \{v_n\}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(z_m, v_n) \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{d(z_m, P_{T_1}(v_n)) + d(P_{T_1}(v_n), v_n)\} \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{H(P_{T_1}(v), P_{T_1}(v_n)) + d(P_{T_1}(v_n), v_n)\} \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v, v_n) \\
 &= r(v, \{v_n\})
 \end{aligned}$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için $|r(z_m, \{v_n\}) - r(v, \{v_n\})| \rightarrow 0$ olur. Böylece Lemma 3.2.5 ten $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = v$ elde edilir. $T_1(v) \in P(K)$ proksimal olduğundan dolayı kapalıdır. Bu yüzden $P_{T_1}(v)$ kapalı ve sınırlıdır. Sonuç olarak $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = v \in P_{T_1}(v)$ dir. Benzer şekilde $v \in P_{T_2}(v), v \in P_{T_3}(v), \dots, v \in P_{T_k}(v)$ olduğu gösterilir. Yani $v \in F$ olup $\{x_n\}$ dizisi p ye Δ -yakınsar.

Teorem 4.4.4: X tam ve düzgün konveks W-hiperbolik uzay ve K kümesi X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. T_i , P_{T_i} ve F Lemma 4.4.1 deki gibi tanımlansın. (4.11) ile verilen $\{x_n\}$ dizisinin $p \in F$ ye güçlü yakınsaması için gerek ve yeter şart $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olmasıdır.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi $p \in F$ ye yakınsak ise bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p) = 0$ olur.

$$0 \leq d(x_n, F) \leq d(x_n, p)$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ ve böylece $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ elde edilir.

Diğer taraftan $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ ise Lemma 4.4.1 den $d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$ dir. Bu durumda $d(x_{n+1}, F) \leq d(x_n, F)$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F)$ limiti vardır. Hipotezden dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olur. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin K da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m < n$ olsun. Bu durumda her $p \in F$ için $d(x_m, p) \leq d(x_n, p)$ olur. Böylece

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, p) + d(p, x_n) \leq 2d(x_n, p) \quad (4.31)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte F kümesi üzerinden infimum alınırsa $d(x_m, x_n) \leq 2d(x_n, F)$ elde edilir. (4.31) de $m, n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ olur. Yani $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $\{x_n\} \rightarrow q \in K$ olsun. Şimdi $q \in F(T_1)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten de

$$d(x_n, F(P_{T_1})) = \inf_{y \in F(P_{T_1})} d(x_n, y)$$

olduğundan her $\epsilon > 0$ için

$$d(x_n, p_n^{(\epsilon)}) < d(x_n, F(P_{T_1})) + \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde $p_n^{(\epsilon)} \in F(P_{T_1})$ vardır. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p_n^{(\epsilon)}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ elde edilir. Ayrıca $d(p_n^{(\epsilon)}, q) \leq d(x_n, p_n^{(\epsilon)}) + d(x_n, q)$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n^{(\epsilon)}, q) \leq \frac{\epsilon}{2}$ olur. Son olarak

$$\begin{aligned} d(P_{T_1}q, q) &\leq d(q, p_n^{(\epsilon)}) + d(p_n^{(\epsilon)}, P_{T_1}q) \\ &\leq d(q, p_n^{(\epsilon)}) + H(P_{T_1}p_n^{(\epsilon)}, P_{T_1}q) \\ &\leq 2d(p_n^{(\epsilon)}, q) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $d(P_{T_1}q, q) < \epsilon$ olup $d(P_{T_1}q, q) = 0$ bulunur. Benzer şekilde her $i = 1, 2, \dots, k$ için $d(P_{T_i}q, q) = 0$ sonucu elde edilir. F kapalı olduğundan $q \in F$ dir. Böylece ispat tamamlanır. Aşağıda Santer ve Dotson (1974) tarafından verilen (I) şartının küme değerli sonlu bir dönüşüm ailesi için tanımı verilmiştir.

Tanım 4.4.5: $T_1, T_2, \dots, T_k: K \rightarrow CB(K)$ küme değerli dönüşümler ve $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olsun. Eğer $F \neq \emptyset$ olmak üzere her $r \in (0, \infty)$ için $f(0) = 0$ ve $f(r) > 0$ şartını sağlayan azalmayan bir dönüşüm olsun.

$$d(x_n, T_i x_n) \geq f(d(x_n, F))$$

şartı sağlanıyorsa $T_1, T_2, \dots, T_k$ dönüşümlerine (I) şartını sağlıyor denir.

Teorem 4.4.6: X , düzgün konvekslik modülü η olan düzgün konveks tam W -hiperbolik uzay, K kümesi X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. T_i ve P_{T_i} Lemma 4.4.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca her P_{T_i} dönüşümü (I) şartını sağlasın. Bu durumda (4.11) ile verilen $\{x_n\}$ dizisi $p \in F$ ye güçlü yakınsar.

İspat: Lemma 4.4.1 den dolayı her $p \in F$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$ mevcuttur. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p) = c$ olsun. Eğer $c = 0$ ise ispat tamamlanır. Farz edelim ki $c > 0$ olsun. $d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$ olması $\inf_{p \in F(T_i)} d(x_{n+1}, p) \leq \inf_{p \in F(T_i)} d(x_n, p)$ olmasını gerektirdiğinden $d(x_{n+1}, F) \leq d(x_n, F)$ elde edilir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F)$ mevcut olur. (I) şartı ve Lemma 4.4.2 kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_{T_i} x_n) \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) = 0$ olur. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ elde edilir. Son olarak Teorem 4.4.4 kullanılırsa ispat tamamlanır.

Tanım 4.4.7: X deki $d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$ olacak şekilde her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa $T: K \rightarrow P(K)$ dönüşümüne semi-kompakt denir.

Teorem 4.4.8: X , düzgün konvekslik modülü η olan düzgün konveks tam W- hiperbolik uzay, K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. T_i, P_{T_i} ve F , Lemma 4.4.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca sabit bir i için P_{T_i} dönüşümü semi-kompakt olsun. Bu durumda (4.11) ile verilen $\{x_n\}$ dizisi $p \in F$ ye güçlü yakınsar.

İspat: Genelliği bozmaksızın P_{T_1} in semi-kompakt olduğunu kabul edelim. Lemma 4.4.1 den $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır. Ayrıca Lemma 4.5.2 den her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_{T_i} x_n) = 0$$

dır. P_{T_1} semi-kompakt olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, P_{T_1} x_n) = 0$ ve $\{x_n\}$ nin $x_{n_j} \rightarrow p \in K$ olacak şekilde bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Böylece her $j = 1, 2, \dots, k$ için

$$d(p, P_{T_i} p) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{n_j}, P_{T_i} x_{n_j}) = 0$$

bulunur. Buradan da $p \in F = \bigcap_{i=1}^k F(P_{T_i})$ elde edilir. Dolayısıyla her $j > n$ için $d(x_n, p) \leq d(x_{n_j}, p)$ olur. Bu eşitsizlikte F üzerinden infimum alınırsa $d(x_n, F) \leq d(x_{n_j}, F)$ elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{n_j}, F) \\ &= d(p, F) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Teorem 4.4.4 den $\{x_n\}$ dizisi $p \in F$ ye güçlü yakınsar.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu başlıkta tez çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçları ve bu sonuçların literatüre yaptığı katkıları tartışacağız.

X düzgün konveks Banach uzayı ve K kümesi X in boştan farklı kompakt konveks bir alt kümesi olmak üzere $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli bir dönüşüm, $F(T) \neq \emptyset$ ve P_T quasi-genişlemeyen bir dönüşüm olsun. (4.1) deki gibi tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsadığı Teorem 4.2.2 de verildi. Ayrıca Teorem 4.2.2 nin şartlarından olan K kümesinin kompakt olma özelliği yerine daha zayıf bir şart olan (I) şartı kullanılarak (4.1) de verilen $\{x_n\}$ dizisinin T nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsadığı Teorem 4.2.5 te ispatlandı.

Diğer taraftan X Opial şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayı ve K kümesi de X in boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi olmak üzere, $T: K \rightarrow P(K)$ küme değerli dönüşüm, $F(T) \neq \emptyset$ ve P_T quasi-genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $I - P_T$, sıfırda demiclosed olmak üzere (4.1) ile verilen $\{x_n\}$ dizisinin T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsadığı Teorem 4.2.7 de verildi.

Yukarıdaki sonuçlar Shahzad ve Zegeye (2009), Khan *et al.*(2012), Khan *et al.*(2014) ve Thakur *et al.*(2016) ın sonuçlarını genelleştirir.

Tezin son kısmında W-hiperbolik uzaylarda küme değerli genişlemeyen sonlu dönüşüm ailesi için (4.11) iterasyonu tanımlanarak aşağıdaki yakınsama teoremleri verildi.

X , düzgün konvekslik modülü η olan düzgün konveks tam W-hiperbolik uzay, K kümesi X in boştan farklı kapalı ve konveks alt kümesi olsun. T_i ve P_{T_i} Lemma 4.4.1deki gibi tanımlansın. Bu durumda (4.11) ile verilen $\{x_n\}$ dizisinin $p \in F$ ye Δ –yakınsadığı Teorem 4.4.3 te ispatlandı.

X tam ve düzgün konveks W -hiperbolik uzay ve K kümesi X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. T_i , P_{T_i} ve F Lemma 4.5.1 deki gibi tanımlansın. (4.11) de verilen $\{x_n\}$ dizisinin $p \in F$ ye güçlü yakınsaması için gerek ve yeter şartın $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olduğu Teorem 4.4.4 te ispatlandı.

X , düzgün konvekslik modülü η olan tam ve düzgün konveks W -hiperbolik uzay, K kümesi X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. T_i ve P_{T_i} Lemma 4.4.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca her P_{T_i} dönüşümünün (I) şartı altında (4.11) de verilen $\{x_n\}$ dizisinin $p \in F$ ye güçlü yakınsadığını Teorem 4.4.6 da ispatladık.

Son olarak X , düzgün konvekslik modülü η olan düzgün konveks W - hiperbolik uzay, K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. T_i , P_{T_i} ve F , Lemma 4.4.1 deki gibi tanımlansın. Ayrıca sabit bir i için P_{T_i} dönüşümünün semi-kompakt olması halinde (4.11) ile verilen $\{x_n\}$ dizisinin $p \in F$ ye güçlü yakınsadığı Teorem 4.4.8 de ispatlandı.

Yukarıdaki sonuçlar Gunduz ve Akbulut (2013) ve Khan *et al.* (2016) sonuçlarının genellemesidir.

Bu tezden aşağıdaki makaleler elde edilmiştir.

Alagoz, O., Gunduz, B., Akbulut, S., 2016. Convergence theorems for a family of multivalued nonexpansive mappings in hyperbolic spaces, Open Mathematics, 141065-1073.

Gunduz, B., Alagoz, O., Akbulut, S., Convergence Theorems of a Faster Iteration Process Including Multivalued Mappings with Analytical and Numerical Examples, Filomat, (Basım aşamasında)

KAYNAKLAR

- Abbas, M., and Nazir, T., 2014. A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. *Mat. Vesn.*, 66, 2, 223–234.
- Akbulut, S., Ozdemir, M., 2012. Picard iteration converges faster than Noor iteration for a class of quasi-contractive operators, *Chiang Mai J. Sci.*, 39 4 688-692.
- Aksoy, A. G. and Khamisi, M. A., 1990. *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory*. ISBN 0-387-97364-8.
- Ansari, Q. H., 2010. *Metric spaces including fixed point theory and set-valued maps*. ISBN 978-1-84365-655-6.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D., and Sahu, D. R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *J. Nonlinear Convex Anal.* 8, 1, 61–79.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D., and Sahu, D. R., 2009. *Fixed Point Theory and for Lipschitzian-type Mappings with applications*, Springer-Verlag New York.
- Babu, G. V. R., Vara Prasad, K. N. V. V., 2006. Comparison of fastness of convergence among Krasnoselskij, Mann and Ishikawa iterations in arbitrary real Banach spaces, *Fixed point theory and applications*, 1-12.
- Berinde, V., 2001. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasicontractive operators, *Fixed Point Theory and Applications* 2, 97-105.
- Berinde, V., 2004. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi contractive operators, *Fixed point theory and application*, 2 97-105.
- Berinde, V., 2006. *Iterative Approximation of Fixed Points*. Lecture Notes in Math.
- Bruhat, F. and Tits, J., 1972. Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 41, 5-251.
- Clarkson, J.A., 1936. Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 40, 396-414.
- Dhompongsa, S. and Panyanak, B., 2008. On convergence theorems in CAT(0) Spaces. *Computers & Mathematics with Applications* 56, 2572-2579.
- Edelstein, M., 1972. The construction of an asymptotic center with a fixed-point property, *Bull. Amer. Math. Soc.* 78, 206-208.
- Ishikawa, S., 1976. Fixed points by a new iteration method. *Proc. Amer. Math. Soc.* 44, 147-150.
- Itoh, S., 1979, Some fixed point theorems in metric spaces, *Fund. Math.* 102, 109–117.
- Goebel, K. ve Kirk, W.A., 1983. Iteration processes for nonexpansive mappings, In *Topological Methods in nonlinear functional Analysis*, S. P. Singh. S. Thomeier. and B. Watson. Eds., vol. 21 of *Contemporary Mathematics*, 115-123, American Mathematical Society. Providence. RI. USA.
- Goebel, K. ve Reich, S., 1984. *Uniform convexity hyperbolic geometry and nonexpansive mappings*. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.
- Gunduz, B., Akbulut S., 2013. Strong convergence of an explicit iteration process for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces. *Miskolc Mathematical Notes*, 14 (3), 905-913
- Kettapun, A., Kananthai, A., and Suantai, S., 2010. A new approximation method for common fixed points of a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces. *Comput. Math. Appl.*, 60, 5, 1430-1439.

- Kohlenbach, U. 2005. Some logical metatheorems with applications in functional analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.* 357, 89–128.
- Kohlenbach, U. And Luestean, L., 2007. Asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex hyperbolic spaces., *J. of the European Math. Soc.* 12, 71-92.
- Kirk, W. and Panyanak, B., 2008. A concept of convergence in geodesic spaces. *Nonlinear Anal.*, 68, 3689-3696.
- Khan, S. H. and Yildirim, I., 2012. Fixed points of multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:73.
- Khan, S. H., Abbas, M., Ali, S., 2014. Fixed points of multivalued quasi-nonexpansive mappings using a faster iterative process, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.* 30 7 1231–1241.
- Khan, S. H., Agbebeku, D., Abbas, M., 2016. Three Step Iteration Process for Two Multivalued Nonexpansive Maps in Hyperbolic Spaces, *Journal of Mathematical Extension*, 10 4 87-109.
- Kurdila, A. J. and Zabaranin, M., 2005. *Convex Functional Analysis*. Birkhauser Basel, 228, Berlin, Germany.
- Lim, T. C., 1976. Remarks on some Fixed point theorems. *Proc Am Math Soc.*, 60, 179–182.
- Leuestean, L. 2007. A quadratic rate of asymptotic regularity for CAT(0)-spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 325, 386-399.
- Leuestean, L. 2008. Nonexpansive iterations in uniformly convex W-hyperbolic spaces, *arxiv: 0810.4117v1*.
- Leuestean, L. 2009. Proof mining in fixed point theory and ergodic theory. *arXiv:09003.1529v1*.
- Mann, W. 1953. Mean Value Methods in Iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4, 506-510.
- Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 251, 217-229.
- Nadler, S. B., 1969. Jr. Multivalued contraction mappings, *Pacific J. Math.* 30. 475-488
- Nanjaras, B., Panyanak, B., 2010. Demiclosed principle for asymptotically nonexpansive mappings in CAT(0) spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, Article ID 268780, 14 pages
- Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 591-597.
- Panyanak, B., 2007. Mann and Ishikawa iterative process for multivalued mappings in Banach spaces, *Comp. Math. Appl.*, 54, 872-877.
- Pathak, R. P., Dashputre, S., Diwan, S. D., Gupta, R., 2015. On Noor-type iteration schemes for multivalued mappings in CAT(0) spaces. *Fixed point theory and application*, 2015:133, Doi: 10.1186/s13663-015-0380-8.
- Reich, S. and Shafrir, I., 1990. Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces. *Nonlinear Anal.* 15, 537 558.
- Sastry, K. P. R. and Babu, G. V. R., 2005. Convergence of Ishikawa Iterates for a multivalued mappings with a fixed point, *Czechoslovak Math. J.* 55, 817-826.
- Senter, H. F. and Dotson, W. G., 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 375-380.
- Shahzad, N., and Zegeye, H., 2009. On Mann and Ishikawa iteration schemes for multivalued maps in Banach spaces, *Nonlinear Anal.* 71, no.3-4 838-844.

- Schu, J., 1991. Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, *Bull. Aust. Math. Soc.* 43, 153-159.
- Shimizu, T. and Takahashi, W., 1996. Fixed points of multivalued mappings in certain convex metric spaces. *Topological Methods Nonlinear Anal.*, 8, 197–203.
- Shiau, C., Tan, K. K., and Wong, C.S., 1975. Quasi nonexpansive multivalued maps and selections, *Fund. Math.* 87,109-119.
- Song, Y.,and Wang, H., 2008. Convergence of iterative algorithms for multivalued mappings in Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, doi: 10.1016/j.na2008.02.034.
- Takahashi, W., 1970. A convexity in metric spaces and nonexpansive mappings. *Kodai Math Sem Rep.*, 2, 142–149.
- Thakur, B. S., Thakur, D. and Postolache, M., 2016. A new iteration scheme for approximating fixed points of nonexpansive mappings. *Filomat* 30 (10), 2711-2720.



ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Erzurum’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir’de tamamladı. 2004 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 2008 yılında mezun oldu. 2011 yılına kadar bazı özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği yaptı. 2011 de Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında bütünleşik doktora eğitimine başladı. 2014 yılında Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaya başladı. Halen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesinde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaya devam etmektedir.