



**S-GODUNOVA-LEVİN FONKSİYONU
VE İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

Leyla YOLCU

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Prof. Dr. Sezgin AKBULUT
2018
Her Hakkı Saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**S-GODUNOVA-LEVİN FONKSİYONU VE İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ**

Leyla YOLCU

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

ERZURUM
2018

Her Hakkı Saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

S-GODUNOVA-LEVİN FONKSİYONU VE İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Leyla YOLCU tarafından hazırlanan bu çalışma, 20/09/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak ~~oybirliği / oy çokluğu~~ (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tuba AĞIRMAN AYDIN

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 04/10/2018 tarih ve 39/84 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

S-GODUNOVA-LEVİN FONKSİYONU VE İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Leyla YOLCU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Bu tezde, s - Godunova-Levin fonksiyonu Hermite-Hadamard integral eşitsizliği bağlamında incelendi.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş başlığı altında tarihsel arka plana, ikinci bölüm, konu başlığıyla ilintili olan temel kavramlara, Godunova-Levin fonksiyonu tanımına ve diğer bazı konvekslik türlerine ayrıldı. Üçüncü bölüm, Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgilidir. Ayrıca diğer çalışmalarda etkin rol oynayan ve diferensiyellenebilen fonksiyonlara uygulanabilen klasik eşitsizlikler bir araya getirildi. Dördüncü bölümde çalışmamızın temelini teşkil eden s -Godunova-Levin fonksiyonu ve bu fonksiyon ile ilgili literatürde olan eşitsizliklere yer verilmiştir. Son bölümde tezde bulunan teoremler göz önüne alınarak bilgi organize ve tasnif edildi, kısa yorumlar yapıldı ve önemli görülen noktalar vurgulandı.

2018, 34 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyon, Quasi-konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Ostrowski Eşitsizliği, Hölder Eşitsizliği, Godunova-Levin fonksiyonu, s -Godunova-Levin fonksiyonu.

ABSTRACT

Master Thesis

S-GODUNOVA-LEVİN FUNCTIONS AND İNTEGRAL INEQUALITIES

Leyla YOLCU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Analysis and Functions Theory

Supervisor: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

In this thesis, s- Godunova-Levin function examined in the context of Hermite-Hadamard integral inequality.

This thesis consists of five chapter. The first chapter is devoted to historical background under the entry title heading, the second part is devoted to the basic concepts associated with the topic title; the definition of Godunova-Levin function and some other kind of convexity. Third chapter are related to Hermite-Hadamard inequality. Furthermore, The classical inequalities that can be applied to functions that play an active role in other studies and can be differentiated are combined. In the fourth chapter, s-Godunova-Levin function, which is the basis of the study and the integral inequalities in the literatür are written. In this sense, a number of comments were made in their context for the related lemma and inequalities. In the last part, the information of the literatüre was brought together and the information was organized and the important points wee marked.

2018, 34 pages

Key Words: Inequalities, convex function, quasi-convex function, Hermite-Hadamard's inequality, Ostrowski inequality, Hölder inequality, Godunova-Levin function, s-Godunova-Levin function.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, engin bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım danışman hocalarım, Sayın Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR ve Sayın Prof. Dr. Sezgin AKBULUT hocalarıma sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca tezimin hazırlanması sürecinde Matematik Bölümünde gerekli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Aydın GEZER'e ve Sayın Doç. Dr. Çetin YILDIZ'a teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim. Çalışmam boyunca yanımda olup bana hep destek olan sevgili eşim Hüseyin YOLCU'ya teşekkür ederim.

Leyla YOLCU

Eylül, 2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Genel Kavramlar	4
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi.....	12
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	15
3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler	15
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	20
5. SONUÇ	30
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SİMGELER DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supset$	Kapsar veya Eşit
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı Değildir
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Euclidean Uzay
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$L[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum
$\sup A$	A 'nın Supremumu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks Küme	4
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	5
Şekil 2.3. Konveks fonksiyon	6
Şekil 2.4. Quasi- konveks olup konveks olmayan fonksiyon	11
Şekil 2.6. Quasi-konveks fonksiyon, Wright-quasi-konveks fonksiyon ve Jensen-quasi-konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi.....	14
Şekil 2.7. Konveks fonksiyon, Wright-konveks fonksiyon ve Jensen-konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi.....	14

1. GİRİŞ

“Konvekslik” kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881’de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılmasının 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başladığı ve Jensen’in bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir.

Eşitsizlik teorisi matematiğin hemen hemen tüm branşlarında rol oynamaktadır. Onlar eşitliklerin ispatında, Optimization teoride, Yaklaşım teoride, fonksiyonlarla çalışırken en önemli araçlardır. Matematiğin bir branşı olarak gelişmesi 1934’te G.H. Hardy, J.E. Littlewood ve G. Polya tarafından “inequalities” adlı çalışmayla gerçekleşmiştir. Konveksliğin tanımı da eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak “Convex Functions: Inequalities “ başlığıyla 1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” (Mitrinovic *et al.* 1991), “Classical and New Inequalities in Analysis” (Mitrinovic *et al.* 1993), “Mathematical Inequalities “ (Pachpatte 2005) ve “Convex Functions and Their Applications” (Niculescu and Perssons 2006) literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

C.F.Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Chebyshev ile birlikte Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi gelişmeye başlamıştır. 19. ve 20. yy’da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bugün en önemli eşitsizlikler Hermite-Hadamard eşitsizliği ve Ostrowski eşitsizliği gibi eşitsizliklerdir.

Konuyla ilgili yayımlanan makalelerden “Note on a Class of Functions of Godunova and Levin.C.R.” (Mitrinović and Pečarić 1990), “A generalization of Hadamard’s inequality for isotonic linear functionals” (Pečarić and Dragomir 1991) ve “On the Godunova–Levin–Schur class of functions” (Radulescu *et al.* 2009) başlıklı çalışmalar takip eden çalışmalara katkılar sunmuştur.

Eşitsizlikler üzerine son yıllarda pek çok çalışma yapılmıştır.

“Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunun yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir (Set 2010).

“Several Inequalities of Hermite- Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s-convex, Quasi-convex and r-convex Mapping and Applications” başlıklı doktora tezinde s-konveks, quasi konveks ve r-konveks fonksiyon sınıflarını kullanılarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Alomari 2011).

“Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler ” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış, bu yeni fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli; s-konveks ve m-konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve elde edilen bazı eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Kavurmacı 2012).

"Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı doktora tezinde literatürdeki bazı konveks fonksiyon sınıflarının koordinatlarda tanımı yapılmış ve bu konveks fonksiyon sınıfları için integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Farklı türden konveks fonksiyonların çarpımlarına dair koordinatlarda elde edilen eşitsizliklere de yer verilmiştir (Akdemir 2012).

"Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları İçin İntegral Eşitsizlikler" başlıklı diğer bir doktora tezinde yeni konveks fonksiyon türü elde edilmiş ve bu fonksiyon türü için yeni eşitsizlikler yazılmıştır. φ_h -konveks fonksiyonlar için yeni sonuçlar ve bazı lemmalar kullanılarak elde edilen Hermite-Hadamard tipli, Ostrowski tipli ve Simpson tipli yeni integral eşitsizliklerine yer verilmiştir (Ardıç 2013).

Eşitsizlikler üzerinde yapılan çalışmalar yeni eşitsizlikleri keşfetmekte ve yapılmış çalışmalara yeni ufuklar açmaktadır. Eşitsizlik konuları sürekli çalışılan, hala araştırmalarda aktif rol oynayan ve oynamaya devam edecek olan bir konudur.

Çalışılan bu tezde s-Godunova-Levin Fonksiyonu ve integral eşitsizlikleri incelenmiştir. Tezin ikinci bölümünde konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım, teorem ve eşitsizliklerin yanı sıra bazı konveks fonksiyon sınıflarının hiyerarşisine yer verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde ise önemli bazı eşitsizlikler ve ispatlarından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde Godunova-Levin eşitsizlikleri ile ilgili bazı teorem ve ispatlarının yanı sıra s-Godunova-Levin fonksiyonuna yer verilmiştir.

Beşinci bölümde ise s-Godunova-Levin fonksiyonu ve integral eşitsizlikleri literatür açısından incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

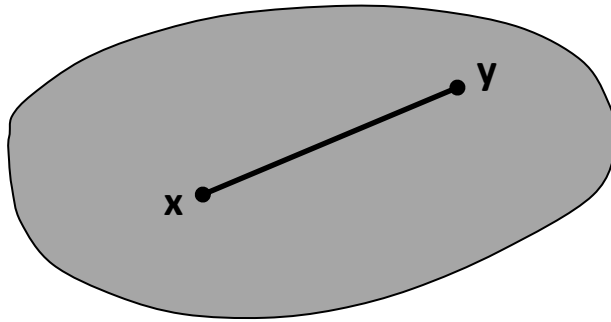
2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde tezin ana kısmında kullanılacak olan tanım, teorem ve bazı özel fonksiyonlar verilecektir.

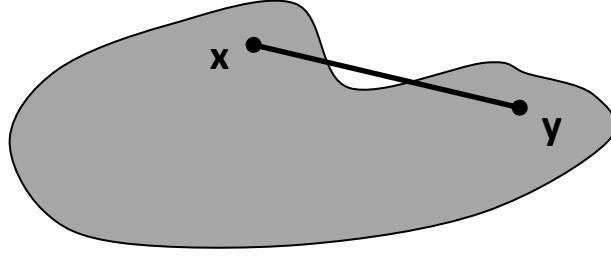
Tanım 2.1.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümeye konveks küme denir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks Küme



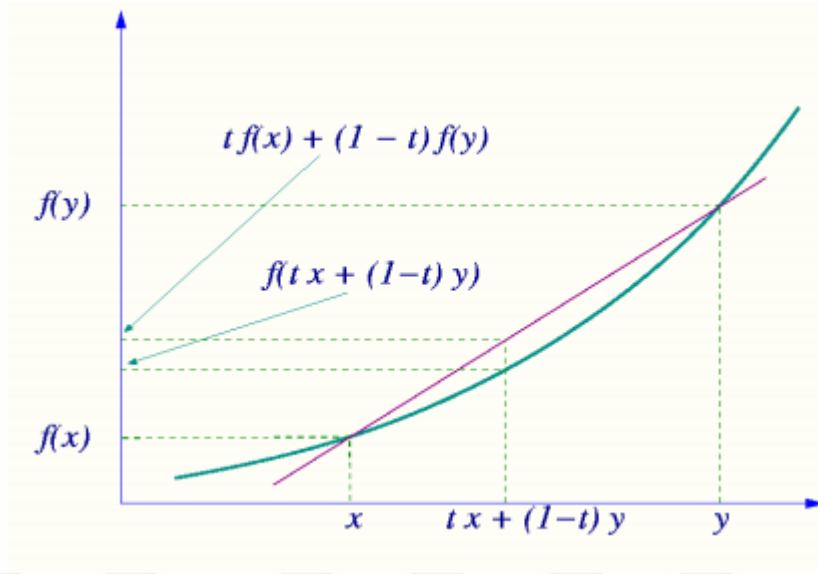
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad (2.1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $t \in (0, 1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvektir denir (Pečarić *et al.* 1992).

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x)), (y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bakınız Şekil 2.3.



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Eğer f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında tanımlı, konveks ve $x_0 \in (a, b)$ noktasında diferansiyellenebilir ise $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.2)$$

eşitsizliği yazılır. Yani (a, b) aralığında diferansiyellenebilen konveks fonksiyon (2.2) eşitsizliğini sağlar (Roberts and Varberg 1973).

Tanım 2.1.3 (Euler Gamma fonksiyonu) : $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

olarak tanımlanır. $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ dir (Gradshteyn and Ryzhik 2007).

Teorem 2.1.1: Euler Gamma fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$ ($x > 0$)
2. $\Gamma(1) = 1$
3. Γ logaritmik konvektir.

Teorem 2.1.2. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

- a) $f, (a, b)$ aralığında sürekli ve
- b) $f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.4. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_1, x_2 \in I$ olsun. Bu durumda $\forall x_1, x_2 \in I$ için

- a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
- b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.3. : J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
- b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
- c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
- d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

(Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.4. : f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f'' 'nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.5 : f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.5. (Godunova-Levin Fonksiyonu): Negatif olmayan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f ye Godunova-Levin fonksiyonu denir ve $Q(I)$ sembolü ile gösterilir.

Ayrıca; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise, bu takdirde

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - y)(z - x) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.1.6. (s-Godunova-Levin fonksiyonu): X bir lineer uzay ve C , X 'in konveks bir alt kümesi olsun. $s \in [0, \infty)$, $t \in (0, 1)$ ve $\forall x, y \in C$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \frac{1}{t^s} f(x) + \frac{1}{(1 - t)^s} f(y)$$

ise $f: C \subset X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna s-Godunova-Levin fonksiyonu denir. C üzerinde tanımlı s-Godunova-Levin fonskiyonlar sınıfı $Q_s(C)$ ile gösterilir (Özdemir 2015).

Tanım 2.1.7. (P-Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f(x) + f(y)$$

ise f fonksiyonuna P-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al.* 1995).

Tanım 2.1.8. (Birinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu): $s \in (0, 1]$ ve $t \in (0, 1)$ olmak üzere $\forall x, y \in I$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \frac{f(x)}{t^s} + \frac{f(y)}{(1 - t)^s} \quad (2.3)$$

eşitsizliğini sağlayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna birinci tür s- Godunova-Levin fonksiyonu denir. $s=1$ için bu tanım Godunova-Levin fonskiyonu tanımına indirgenir (Noor *et al.* 2014 a).

Tanım 2.1.9. (İkinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu): $s \in [0, 1]$ ve $t \in (0, 1)$ olmak üzere $\forall x, y \in I$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \frac{f(x)}{t^s} + \frac{f(y)}{(1 - t)^s} \quad (2.4)$$

eşitsizliğini sağlayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu denir (Noor *et al.* 2014 a).

Tanım 2.1.9 da $s = 0$ alınırsa tanım 2.1.7 deki tanımı ve $s = 1$ alınırsa tanım 2.1.5 deki tanımı elde edeceğimiz açıktır (Dragomir 2015).

Tanım 2.1.10. (Birinci anlamda s-Konveks Fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0, \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.1.11. (İkinci anlamda s-Konveks Fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye ikinci anlamda s- konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Tanım 2.1.12. (Quasi-konveks Fonksiyon): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks bir küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ye quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ye kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

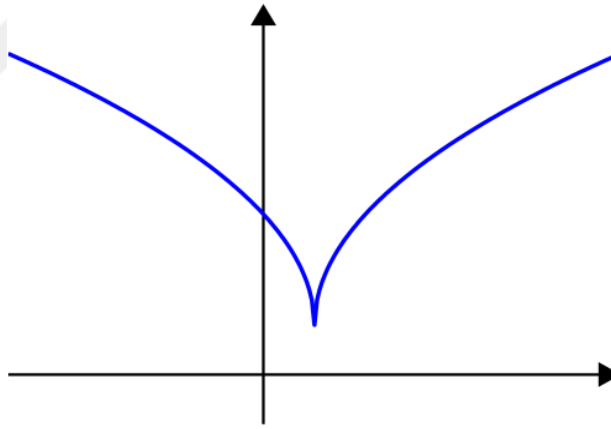
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ye quasi-konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Not: Her konveks fonksiyon aynı zamanda quasi-konvekstir. Ancak her quasi-konveks fonksiyon konveks olmayabilir.



Şekil 2.4. Quasi- konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Tanım 2.1.13. (Jensen-quasi-konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyor ise f ye Jensen-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.14. (Wright-quasi-konveks fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\frac{1}{2} [f(tx + (1 - t)y) + f((1 - t)x + ty)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyor ise veya denk olarak, $x, y + \delta \in I$, $x < y$ ve $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{2} [f(y) + f(x + \delta)] \leq \max\{f(x), f(y + \delta)\}$$

oluyorsa f ye Jensen-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

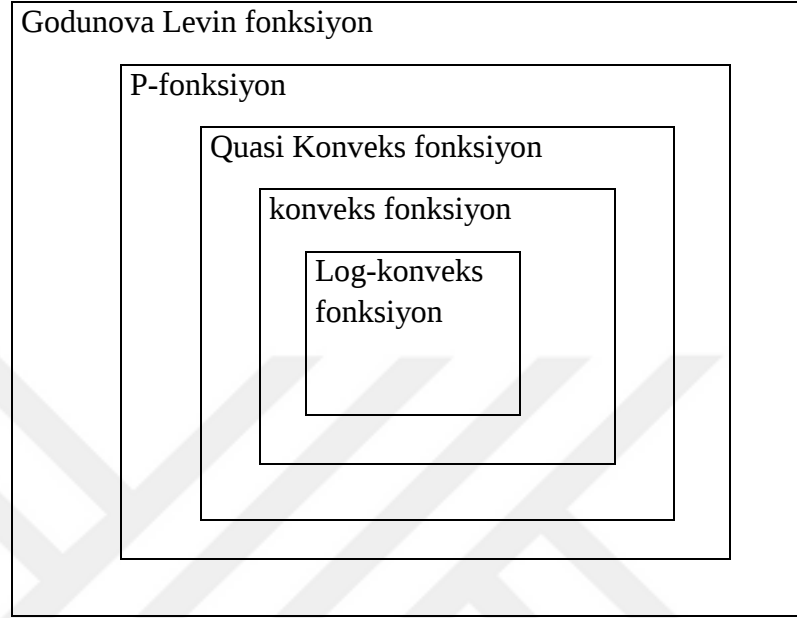
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi

Fonksiyonlar aynı anda birçok özelliği sağlamakla beraber bir fonksiyon sınıfı başka bir fonksiyon sınıfının özellikleriyle de benzerlik gösterebilmektedir. Çalışmalar sonucu farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikleri ispatlanırken, bu eşitsizliklerin belli özel durumlarda başka konvekslik sınıfları için de sağlandığı görülmüştür. Bu yüzden fonksiyonlar teorisi çalışmalarında yeni sonuçlar elde etmek ve bazı genellemelere ulaşmak için konveks fonksiyonlar arasında özellikleri açısından var olan bu hiyerarşi oldukça önem kazanmaktadır. Bazı konveks fonksiyon sınıfları arasındaki hiyerarşi, tanım ve özellikleri açısından şu şekilde ifade edilebilir:

Teorem 2.2.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Log- konveks fonksiyonlar sınıfı, Konveks fonksiyonlar sınıfı, quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, P fonksiyonlar sınıfı ve Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı, sırasıyla, $L(I), C(I), QC(I), P(I), Q(I)$ ile gösterilirse;

$$L(I) \subset C(I) \subset QC(I) \subset P(I) \subset Q(I)$$

olur (Kavurmacı 2012).

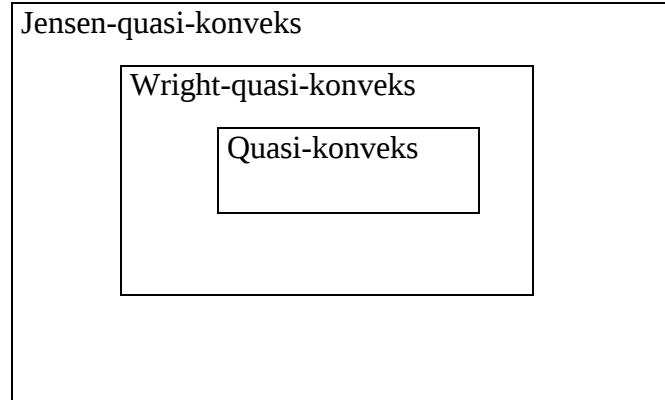


Şekil 2.5. Godunova-Levin fonksiyonu, P –fonksiyon, Quasi–konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve Log –konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

Teorem 2.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright-quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen-quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $QC(I)$, $WQC(I)$, $JQC(I)$ ile gösterilirse;

$$QC(I) \subset WQC(I) \subset JQC(I)$$

olur (Dragomir and Pearce 1998).

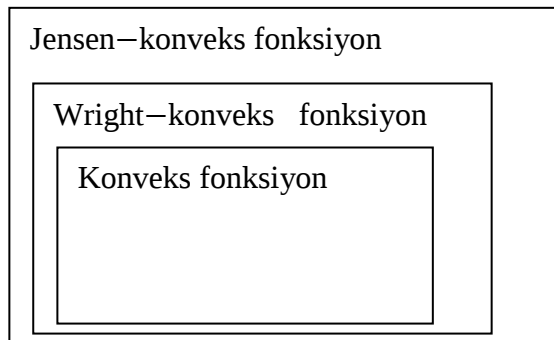


Şekil 2.6. Quasi-konveks fonksiyon, Wright-quasi-konveks fonksiyon ve Jensen-quasi-konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

Teorem 2.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright-konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen -konveks fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $C(I)$, $W(I)$, $J(I)$ ile gösterilirse;

$$C(I) \subset W(I) \subset J(I)$$

olur (Wright 1954).



Şekil 2.7. Konveks fonksiyon, Wright—konveks fonksiyon ve Jensen—konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (3.1.1)$$

dir. Bu eşitsizlik literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

İspat: Teorem 2.1.2 'de f fonksiyonu, I üzerinde konveks olduğundan (a, b) aralığında sürekli ve $[a, b]$ aralığında sınırlıdır. Dolayısıyla $f, [a, b]$ aralığında integrallenebilir. O halde $x = ta + (1 - t)b, 0 \leq t \leq 1$ için

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$$

dir.

Bu ifadenin her iki yanını $[0,1]$ üzerinden t ye göre integre edilirse,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(ta + (1 - t)b)) dt &\leq \int_0^1 (tf(a) + (1 - t)f(b)) dt \\ &= f(a) \int_0^1 t dt + f(b) \int_0^1 (1 - t) dt \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \int_0^1 (f(ta + (1-t)b) dt$$

olur ki bu (3.1.1) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Şimdi (3.1.1)'in sol tarafının ispatını verelim.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right] \quad (3.1.2)$$

biçiminde yazıp, $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi ile ilk terim

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

olur.

$x = b - t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi ile ikinci terim

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx &= -\frac{b-a}{2} \int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \end{aligned}$$

bulunur.

(3.1.2) eşitliğinde bu sonuçlar yazılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) \right] dt \\ &\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.2. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 3.1.3. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)| dx dy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ayrıca Hölder Eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak daha iyi üst sınırlar bulunmaktadır.

Teorem 3.1.4. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde iki katlı integraller için Power Mean eşitsizliği

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)| dx dy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)| dx dy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.1 (Riemann- Liouville İntegralleri): $f \in L[a, b]$ olsun. $J_{a+}^{\alpha}f$ ve $J_{b-}^{\alpha}f$

Riemann -Liouville integralleri sırasıyla, $\alpha > 0$, $a \geq 0$ olmak üzere

$$J_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\tau(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\tau(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b$$

şeklinde tanımlanır. Sırasıyla $\tau(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$, $J_{a+}^0 f(x) = J_{b-}^0 f(x) = f(x)$ dır (Dahmani *et al.* 2010).

Teorem 3.1.5 (Čebyševs Eşitsizliği): f ve g , $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Eğer f ve g aynı monotonluk değerine sahipse, bu durumda

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$$

olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde araştırma sonucu elde edilen bazı bulgulara yer verilecektir.

İlk olarak s-Godunova-Levin fonksiyonu ve integral eşitsizlikleri tanımlanmıştır. Daha sonra literatürdeki makale, tez, yayınlar vb. çalışmalarda tanımlar, teoremler, ispatlar hakkında bilgi verilmiş ve eşitsizlikler derlenmiştir.

Lemma 4.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $a, r \in I$ ve $a < r$ olmak üzere $f' \in L[a, r]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(r)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(r - a)^\alpha} [J_{r^-}^\alpha f(a) + J_{a^+}^\alpha f(r)] \\ &= \frac{r - a}{2} \int_0^1 [(1 - t)^\alpha - t^\alpha] f'(r + (a - r)t) dt \end{aligned}$$

dir (Özdemir 2015).

Teorem 4.1. $a < b$ ve $C = [a, b]$ olmak üzere $f \in L[a, b]$ ve $f \in Q_s(C)$ olsun. $s \in [0, 1]$ ise

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{2^{s+1}}{b - a} \int_a^b f(x) dx \quad (4.1)$$

$$\frac{\Gamma((1 + s)^2)}{\Gamma(2 + 2s)(b - a)} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s + 1} \quad (4.2)$$

ve

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{1-s}, s \in [0,1) \quad (4.3)$$

dir (Özdemir 2015).

Tanım 4.1. (Beta Fonksiyonu): $\beta: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x, y > 0)$$

dir.

Hermite Hadamard tipli çok sayıda eşitsizlik Beta fonksiyonu cinsinden literatürde var olan bir başka bilgidir. Öte yandan, $\frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \beta(x, y)$ olduğundan β cinsinden yazılan çok sayı da fonksiyon aynı zamanda Γ cinsinden de yazılmıştır.

Teorem 4.2. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, I üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon, $a, r \in I$ ve $a < r$ olsun. Eğer $|f'| \in Q_\alpha(I)$, $\alpha \in [0,1)$ ve $t \in (0,1)$ ise

$$\left| \frac{f(a) + f(r)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(r-a)^\alpha} [J_{r^-}^\alpha f(a) + J_{a^+}^\alpha f(r)] \right| \quad (4.5)$$

$$\leq \frac{(r-a)}{2} \left\{ \pi \alpha \operatorname{cosec}(\pi \alpha) [|f'(r) + |f'(a)|] + 2\beta_{\frac{1}{2}}(1-\alpha, 1+\alpha) \right\}$$

elde edilir. Burada $0 \leq x \leq 1$ için $\beta_x(y, z) = \int_0^x t^{y-1} (1-t)^{z-1} dt$ dir (Özdemir 2015).

Teorem 4.3. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, r \in I$ ve $a < r$ olsun. Eğer $|f'|^q \in Q_s(I)$, $\alpha \in [0, 1]$ ve $t \in (0, 1)$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{f(a) + f(r)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(r - a)^\alpha} [J_{r-}^\alpha f(a) + J_{a+}^\alpha f(r)] \right|$$

$$\leq \frac{(r - a)}{2(\alpha p + 1)^{\frac{1}{p}}(1 - s)^{\frac{1}{q}}} (|f'(a)|^q + |f'(r)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $s \in [0, 1)$, $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonudur (Özdemir 2015).

Teorem 4.4. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, I üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon, $a, r \in I$, $a < r$ ve $q \geq 1$ olsun. $|f'|^q \in Q_\alpha(I)$, $\alpha \in [0, 1)$ ve $t \in (0, 1)$ için

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(r - a)^\alpha} [J_{r-}^\alpha f(a) + J_{a+}^\alpha f(r)] \right|$$

$$\leq \frac{(r - a)}{2^{\frac{1}{q}}(\alpha + 1)^{1 - \frac{1}{q}}} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)^{1 - \frac{1}{q}} \left[2\beta_{\frac{1}{2}}(1 - \alpha, 1 + \alpha) - \pi\alpha \operatorname{cosec}(\pi\alpha)\right]^{\frac{1}{q}} (|f'(a)| + |f'(r)|)$$

eşitsizliği elde edilir (Özdemir 2015).

Lemma 4.2. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere eğer $f'' \in L[a, b]$ ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b - a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \right|$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}}{\alpha+1} |f''(ta + (1-t)b)| dt$$

dir (Wang *et al.* 2012).

Teorem 4.5. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında iki kez diferansi-yellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a, b]$ ve $|f''|$ birinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} [\mathcal{H}_1(\alpha, s)|f''(a)| + \mathcal{H}_2(\alpha, s)|f''(b)|]$$

dır. Burada

$$\mathcal{H}_1(\alpha, s) = \frac{1}{1-s} - \frac{1}{\alpha-s+2} - \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+3)}$$

$$\mathcal{H}_2(\alpha, s) = \frac{s+2}{s+1} - \frac{1}{\alpha+2} - \frac{s\Gamma(s)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+s+3)} - \frac{2(\alpha+2)+s}{(\alpha+2)(\alpha+s+2)}$$

dir (Noor *et al.* 2014 a).

Teorem 4.6. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'' \in L[a, b]$ olsun. $|f''|^q$, $q > 1$ birinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} \left(\frac{\alpha}{\alpha+2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \{ \mathcal{H}_1(\alpha, s) |f''(a)|^q + \mathcal{H}_2(\alpha, s) |f''(b)|^q \}^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada $\mathcal{H}_1(\alpha, s)$ ve $\mathcal{H}_2(\alpha, s)$ Teorem 4.6 da tanımlandığı gibidir (Noor *et al.* 2014 a).

Teorem 4.7. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $q \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için birinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu ise,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right| \\ \leq \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} \left(\frac{p(\alpha+1)-1}{p(\alpha+1)+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left(\frac{1}{1-s} |f''(a)|^q + \frac{s+2}{s+1} |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir (Noor *et al.* 2014 a).

Lemma 4.3. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a > 0$ olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $f' \in L[a, b]$ ise

$$\left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b)] \right| \\ = \left| \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)a) dt - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)b) dt \right|$$

dir (Set 2012).

Teorem 4.8. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a > 0$ olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ ikinci tür s- Godunova-Levin fonksiyonu ve $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b)] \right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{1+\alpha-s} + \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2+\alpha-s)} \right) \left(\frac{M[(x-a)^{\alpha+1} + (b-a)^{\alpha+1}]}{b-a} \right)$$

dir (Noor et al. 2014 b).

Sonuç 4.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a > 0$ olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ ikinci tür s- Godunova-Levin fonksiyonu ve $|f'(x)| \leq M$ ise o zaman

$$\left| f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq \frac{M[(x-a)^2 + (b-x)^2]}{(b-a)(1-s)} \quad (4.6)$$

dir (Noor et al. 2014 b).

Ayrıca bu eşitsizlikten aşağıdaki 3 özel durum elde edilir

1- (4.6) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq \left(\frac{M(b-a)}{2(1-s)} \right)$$

orta nokta eşitsizliği elde edilir.

2- Eşitsizlik (4.6) da $x = a$ alınırsa,

$$\left| f(a) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq M(b-a) \left(\frac{1}{1-s} \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

3- Eşitsizlik (4.6) da $x = b$ alınırsa,

$$\left| f(b) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq M(b-a) \left(\frac{1}{1-s} \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.9. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a > 0$ olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında ikinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu ve $p, q > 1, 1/p + 1/q = 1$ için $|f'(x)| \leq M$ ise o zaman

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b)] \right| \\ & \leq M \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1+p\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-a)^{\alpha+1}}{b-a} \right] \end{aligned}$$

(Noor et al. 2014 b).

Sonuç 4.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a > 0$ olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu

$[a, b]$ aralığında ikinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu ve $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \leq M \left(\frac{1}{1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{b-a} \right] \quad (4.7)$$

(Noor *et al.* 2014 b).

Ayrıca bu eşitsizlikten aşağıdaki 3 özel durum elde edilir.

1- Eşitsizlik (4.7) de $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq \left(\frac{M(b-a)}{2} \right) \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}}$$

orta nokta eşitsizliği elde edilir.

2- Eşitsizlik (4.7) de $x = a$ alınırsa,

$$\left| f(a) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq M(b-a) \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

3- Eşitsizlik (4.7) de $x = b$ alınırsa,

$$\left| f(b) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq M(b-a) \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.10. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a > 0$ olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında ikinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu, $q > 1$ ve $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b)] \right|$$

$$\leq M \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1+p\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-a)^{\alpha+1}}{b-a} \right]$$

dir (Noor et al. 2014 b).

$\alpha = 1$ için Teorem 4.10 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.3. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a > 0$ olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında ikinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu ve $q > 1$ için $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq M^q \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{b-a} \right) \quad (4.8)$$

dir (Noor et al. 2014 b).

Ayrıca bu eşitsizlikten aşağıdaki 3 özel durum elde edilir.

1. Eşitsizlik (4.8) de $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq M^q \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{2} \right)$$

orta nokta eşitsizliği elde edilir.

2. Eşitsizlik (4.8) de $x = a$ alınırsa,

$$\left| f(a) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq M^q (b-a) \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

3. Eşitsizlik (4.8) de $x = b$ alınırsa,

$$\left| f(b) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u) du \right| \leq M^q (b-a) \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1-s} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

5. SONUÇ ve TARTIŞMA

Literatür taramasında, s-Godunova-Levin fonksiyonu için yazılmış çalışmaların büyük bir bölümüne tezde yer verilmiştir. Tezdeki bilgiler tasnif ve organize edilerek aşağıdaki yorumlar yapılmıştır.

Özdemir Lemma 1 (Özdemir 2015) de $|f'| \in Q_\alpha(I)$ ve $|f'|^q \in Q_s(I)$ fonksiyon sınıfları için Hermit-Hadamard tipli integral eşitsizliklerini Riemann-Liouville ve Trigonometrik fonksiyonlar cinsinden yazmıştır. Bu sonuca bağlı olarak literatürdeki bazı sonuçları yeni üst sınırları ile elde etmiştir. Hermite-Hadamard tipinden olan Teorem 4.1 (Özdemir 2015) deki eşitsizlikleri, s-Godunova Levin fonksiyon sınıfı için ek şartlar altında, basit birkaç cebirsel eşitlik ve *Čebyšev* eşitsizliği kullanılarak ispatlanmıştır.

Teorem 4.2 (Özdemir 2015) de türevinin mutlak değeri I üzerinde tanımlı s-Godunova Levin fonksiyonu kullanılarak kesirli integrallerle ifade edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğini, $x, y > 0$ olmak üzere $\beta_x(y, z) = \int_0^x t^{x-1} (1-t)^{z-1} dt$ tam olmayan beta fonksiyonu ve trigonometrik fonksiyon cinsinden elde edilmiştir.

Teorem 4.3 (Özdemir 2015) deki eşitsizlik daha genel bir sonuç olup, türevinin mutlak değerinin q . kuvveti, I üzerinde tanımlı s-Godunova Levin fonksiyonu için Hermit-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafına ait kuvvetler cinsinden yeni bir üst sınırdır.

Teorem 4.4 (Özdemir 2015) de türevinin mutlak değerinin q . kuvveti I üzerinde tanımlı s-Godunova Levin fonksiyonu için Hermit-Hadamard tipli yeni bir eşitsizlik ifade ve ispat edilmiştir. Bu eşitsizlik $q \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(r-a)^\alpha} [J_{r-}^\alpha f(a) + J_{a+}^\alpha f(r)] \right| \\ & \leq \frac{(r-a)}{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha} \right) (|f'(a)| + |f'(r)|) \end{aligned}$$

ve $q \rightarrow 1$ için de

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(r - a)^\alpha} [J_{r^-}^\alpha f(a) + J_{a^+}^\alpha f(r)] \right|$$

$$\leq \frac{(r - a)}{2} \left[2\beta_{\frac{1}{2}}(1 - \alpha, 1 + \alpha) - \pi \alpha \operatorname{cosec}(\pi \alpha) \right] (|f'(a)| + |f'(r)|)$$

olur.

Lemma 4.2 (Wang *et al.* 2012) de diferensiyellenebilen keyfi bir f dönüşümü için Hermite-Hadamard integral eşitsizliğinin sağ tarafına ait bir eşitlik elde etmiş ve ispatı eşitliğin sağ tarafının iki kez kısmi integralini alarak yapmıştır. Bu lemma ikinci türevi her türden konveks ve diferensiyellenebilen fonksiyonlar için kullanılır.

Teorem 4.5 (Noor *et al.* 2014 a) de $f'' \in L_1[a, b]$ ve $|f''|$ birinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu ise bu takdirde Hermite-Hadamard integral eşitsizliğinin sağ tarafına ait başka bir sonuç elde edilmiş. Teorem 4.6 (Noor *et al.* 2014 a) da, $|f''|^q$, $q > 1$ birinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu ise bu takdirde Hermite-Hadamard integral eşitsizliğinin sağ tarafına ait başka bir sonucu farklı bir metodla elde etmiştir.

Teorem 4.7 (Noor *et al.* 2014 b) de Hermite-Hadamard eşitsizliği, kesirli integrallerle ifade edilmiş ve parametrelere bağlı bir üst sınır bulunmuştur.

Teorem 4.8 (Noor *et al.* 2014 b) de ikinci tür s-Godunova-Levin ve sınırlı fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafında $\alpha = 1$ alınarak s ve M parametrelerine bağlı bir başka üst sınır elde edilmiştir.

Teorem 4.9 (Noor *et al.* 2014 b) de f , (a, b) aralığında diferansiyellenebilir ve $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında ikinci tür s-Godunova-Levin fonksiyonu olmak üzere ek şartlarla birlikte Hermite-Hadamard integral eşitsizliği kesirli integrallerle ifade edilmiştir.

Teorem 4.10 (Noor *et al.* 2014 b) de fonksiyon üzerine aynı şartlar koşularak farklı bir üst sınır elde edilmiş ve buna bağlı olarak parametrelerin özel halleri için sonuçlar elde edilmiştir.

s-Godunova-Levin fonksiyonu merkezli bazı integral eşitsizlikleri üzerine yapılan bu çalışma, konu ile ilgilenen araştırmacılara kaynak niteliğindedir.



KAYNAKLAR

- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Akdemir, A.O., 2012. Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Alomari, M., 2011. Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type For s-Convex, Quasi-Convex And r-Convex Mappings And Applications. Ph.D. Thesis, Faculty Of Science And Technology, Univercity Kebangsaan, Malsysia, Bangi.
- Ardıç, A.M., 2013. Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları İçin İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.
- Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen räumen. Publ. Inst. Math. (Beograd) 23:13-20.
- Dahmani, Z., Tabharit, L., and Taf, S., 2010. New generalizations of Gruss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals. Bull. Math. Anal. Appl., 2 (3), 93-99.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. And Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow Journal of Mathematics, 21(3), 335-341.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.
- Dragomir, S. S., 2015. Inequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex Functions on linear spaces. Proyecciones Journal of Mathematics, 34(4), 323-341,
- Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkci širokogo klassa, soderžaščego vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funkci, Vyčislitel. Mat. i Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., 2007, Table of integrals, series and products, 7th ed., Academic Press, Elsevier Inc.
- Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s-convex functions. Aequationes Math., 48, 100-111.
- Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, 400, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivates. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.

- Mitrinović, D.S. and Pečarić, J.E., 1990. Note on a Class of Functions of Godunova and Levin. *C.R. Math Rep. Acad Sci. Canada* 12 (1), 33-36.
- Niculescu, C.P. and Persson, L.E., 2006. *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, 255 pp, Springer Science+Business Media, Inc.
- Noor, M.A., Noor, K.I. and Awan, M.U., 2014. Khan, S., Fractional Hermite-Hadamard Inequalities for some new classes of Godunova-Levin Functions, *Appl. Math. Inf. Sci.* 8, No. 6, 2865-2872.
- Noor, M.A., Noor, K.I. and Awan, M.U., 2014. Fractional Ostrowski Inequalities for s-Godunova-Levin Functions, *International Journal of Analysis and Applications*, ISSN 2291-8639, Volume 5, Number 2, 167-173.
- Özdemir, M. E., 2015. Some inequalities on the s-Godunova Levin type functions, *Math Sci* (2015) 9:27–32
- Pachpatte, B.G., 2005. *Mathematical Inequalities*. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*. Academic Press, Inc., 469 pp, Boston.
- Pečarić, J. and Dragomir, S.S., 1991. A generalization of Hadamard's inequality for isotonic linear functionals. *Radovi Mat. (Sarajevo)* 7, 103–107
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. *Convex Functions*. Academic Press, 300pp, New York.
- Radulescu, M., Radulescu, S. and Alexandrescu, P., 2009. On the Godunova–Levin–Schur class of functions. *Math. Inequal. Appl.* 12(4), 853–862.
- Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Set, E., 2012. New inequalities of Ostrowski type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals. *Comput. Math. Appl.*, 63(7), 1147-154.
- Wang, J., Li, X., Feckan, M. and Zhou, Y., 2012. Hermite-Hadamard-type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals via two kinds of convexity. *Applicable Analysis*, 92(11), 2241-2253.
- Wright, E.M., 1954. An inequality for convex functions. *Amer. Math. Monthly* 61, 620-622.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Erzurum’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum’da tamamladı. 2009 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2014 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2015 yılında Matematik öğretmeni olarak Erzurum’a atandı. Halen aynı bölümde yüksek lisans yapmakta ve ayrıca öğretmenlik mesleğini de icra etmektedir.