(2,0) TİPLİ YARI-TENSÖR DEMETLERDE KESİTLER

Furkan TOPRAK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Furkan YILDIRIM
2018

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(2,0) TİPLİ YARI-TENSÖR DEMETLERDE KESİTLER

Furkan TOPRAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2018

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

(2,0) TİPLİ YARI-TENSÖR DEMETLERDE KESİTLER

Yrd. Doç. Dr. FURKAN YILDIRIM'ın danışmanlığında, Furkan TOPRAK tarafından hazırlanan bu çalışma, 02/02/2018tarihinde aşağıdaki jüri tarafından GEOMETRİ Anabilim Dalı MATEMATİK Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Nejmi CENGİZ İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Furkan YILDIRIM İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Kadirhan POLAT İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 08/02/2018 tarih ve …6…/…84….. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

(2,0) TİPLİ YARI-TENSÖR DEMETLERDE KESİTLER

Furkan TOPRAK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

Bu tezde, TM tanjant demet izdüşümü yardımıyla $(2,0)$ tipli tensör demetinin pull-back demeti olan $(2,0)$ tipli yarı-tensör demeti tanımlandı. Sonra tensör alanlarının yarı-tensör demete dikey lifti ve $(2,0)$ tipli yarı-tensör demette çeşitli operatörler incelendi. Daha sonra ise yarı-tensör demette, vektör alanlarının tam ve yatay liftleri araştırıldı. Son olarak ise $(2,0)$ tipli yarı-tensör demette kesit dönüşümleri incelendi.

2018, 60 sayfa

Anahtar Kelimeler: Vektör alanı, tam lift, tensör alanı, yatay lift, pull-back demet, kesit, tanjant demet, yarı-tensör demet.

ABSTRACT

Master Thesis

ON CROSS-SECTION IN THE (2,0)-SEMITENSOR BUNDLE

Furkan TOPRAK

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Geometry

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

In this thesis; we investigate complete and horizontal lifts of vector fields on a cross-section in the semi tensor (pull-back) bundle tM of tensor bundle of type $(2,0)$ by using projection (submersion) of the tangent bundle TM. We consider some operators and vertical, complete, horizontal lifting problem of geometric objects on the tangent bundle TM to the semi-tensor bundle of type $(2,0)$ and we find some relation for them.

2018, 60 pages

Keywords: Vector field, complete lift, horizontal lift, tensor field, pull-back bundle, cross-section, tangent bundle**,** semi-tensor bundle.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Çalışmalarımda her türlü desteği sağlayan, hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Furkan YILDIRIM'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgilerini gösterip, bana yol gösteren ve bilgilerine her zaman ihtiyaç duyacağım değerli hocalarım; Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV, Sayın Prof. Dr. Kürşat AKBULUT, Sayın Prof. Dr.Necmi CENGİZ, Sayın Prof. Dr. Aydın Gezer, Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN, Sayın Prof. Dr. Ömer TARAKÇI,'ya ve çalısmalarım esnasında vermiş oldukları destek ve teşvikten dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Furkan Toprak
Ocak, 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$^{v}\,^{v}$	Dikey Lift
$^{c}\,^{c}$	Tam Lift
$^{H}\,^{H}$	Yatay Lift
p	$t^{*}(B_m)$ 'nin Temel 1-formu
∇	Burulmasız Afin Konneksiyon
ω	Dejenere Simplektik Yapı
γ	Gama Operatörü
F, φ	Afinor Alanları
g	Pseudo-Riemannian Metriği
$\overset{C}{\otimes}$	Pür Çarpım
π	Tabii İzdüşüm
T^{i}_{km}	Afin Deformasyon (Gerilme) Tensörü
S^{h}_{ij}	Burulma Tensörü
$\widetilde{X}$	İzdüşümlü Vektör Alanları
$\Gamma_{ij}^{\ \ h}$	Cristoffel Sembolü
R^{h}_{ijk}	Eğrilik Tensörü
W_n	Weyl Uzayı
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
$t^{*}(B_m)$	B_m Üzerindeki Yarı-kotanjant Demet
$T(M_n)$	M_n Üzerindeki Tanjant Demet
$T^{*}(M_n)$	M_n Üzerindeki Kotanjant Demet
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri diferensiyel ve integral hesaplama metodlarını kullanarak çeşitli geometrik problemleri çözmeyi hedef alan matematiğin alt disiplinidir. XVII. yüzyılda temelleri atılan Diferensiyel geometrinin başlıca konusu, eğri ve yüzeylerin çeşitli özelliklerinin araştırılması olmuştur.

Diferensiyel Geometri'de oldukça önemli bir yere sahip olan tensör terimi ilk kez aynı zamanda bir fizikçi olan Woldemar Voigt tarafından 1898'de kullanılmıştır. Tensörlerle çeşitli hesaplamalar 1890'da Ricci olarak bilinen Gregorio Ricci-Curbastro tarafından mutlak diferensiyel hesaplamalar konu başlığında yapıldı ve bu hesapmalar 1892 yılında yayınlandı. Daha sonra (Ricci ve Tullio Levi-Civita 1900) mutlak diferensiyel hesaplama metodları ve uygulamaları adlı çalışmalarını yapmış bulunmaktadırlar.

Tanjant demetteki geometrik çalışmalara (Dombrowski 1962) çeşitli katkılarda bulunmuş olup simetrik uzaylarda tanjant demet, (Yano ve Ledger 1965) tarafından çalışılmıştır.

Tanjant ve kotanjant demetlerdeki dikey, tam, yatay ve diagonal liftlerle ilgili (Yano ve Ishihara 1973) önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Yarı-tanjant demetin tanımı (Duc 1979) tarafından verilmiş ve yarı-tanjant demet ile ilgili çeşitli özellikler (Vishnevskii 2002) tarafından ele alınmıştır. Yarı-tanjant demette Lie ve kovaryant türevlerinin çeşitli lift problemleri ise (Salimov ve Kadıoğlu 2000) tarafından incelenmiştir.

Sunulan bu tezde ise öncelikle**,** TM tanjant demet izdüşümü yardımıyla $(2,0)$ tipli tensör demetinin pull-back demeti olan $(2,0)$ tipli yarı-tensör demetin tanımı yapılmış daha sonra ise bu yarı-tensör demete, vektör alanlarının tam ve yatay liftleri detaylı olarak incelenmiştir. Son olarak ise $(2,0)$ tipli yarı-tensör demette kesit dönüşümlerine bakılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Tanjant Demet

M_n, n- boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold ve M_n manifoldunun P noktasındaki tanjant uzayı $T_P(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P(M_n) \tag{2.1}$$

şeklinde verilen $T(M_n)$ kümesi tanjant demeti tanımlar (Yano and Ishihara 1973).

$T(M_n)$'nin keyfi bir $\widetilde{P} \in T_P(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını doğuran $\pi : T(M_n) \to M_n$, $\pi(\widetilde{P}) = P$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(P) = \widetilde{P} \in T_P(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının P noktasındaki fibresi denir.

$f : M_n \to T(M_n)$ diferensiyellenebilir dönüşümü ile verilen f kesitine bakalım: $\pi \circ f = id\big|_{M_n}$. M_n manifoldunun keyfi P noktasındaki $f(P)$ görüntüsünü, $T_P(M_n)$'nin sıfır vektörüne götüren f kesitine sıfır kesit denir. $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n baz uzayı ile aynı olup bu sebeple M_n manifoldunun kendisi $T(M_n)$'de diferensiyellenebilir imbedding olmuş (içine daldırılmış) altmanifolddur (Yano and Ishihara 1973).

(x^h), U koordinat komşuluğunda yerel koordinatlar olmak üzere M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. R^n ise, R üzerindeki n-boyutlu vektör uzayı olsun.

$\widetilde{P} \in T_P(M_n)$ $(P \in U)$ noktası (P, X) sıralı çifti ile gösterildiğinden ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_P(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}\left(\partial_h = \dfrac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre $\widetilde{P}$'nin $y^h = x^{\bar{h}}$ $\left(\bar{h} = n+1, ..., 2n\right)$ kartezyen koordinatları olduğu için $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direkt çarpımına difeomorfizm olacaktır. U komşuluğunda $P = \pi\left(\widetilde{P}\right)$'nin koordinatları x^h ($h = 1, ..., n$) ile gösterilirse ve $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right) \leftrightarrow \widetilde{P} \in \pi^{-1}(U)$ olduğu dikkate alınırsa, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ yerel koordinatlar sistemi elde edilir ve $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$'ye, $\left(x^h\right)$'dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$'daki koordinatlar denir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldunun $P = \pi\left(\widetilde{P}\right)$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\left\{U', x^{h'}\right\}$ olmak üzere, $\pi^{-1}\left(U'\right)$ koordinat komşuluğuda $\widetilde{P}$ noktasını ihtiva eder.

$\pi^{-1}\left(U'\right)$ koordinat komşuluğuna göre $\widetilde{P}$ noktasının indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, y^{h'})$ ile gösterilir. Burada dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}\left(x^h\right), \\ x^{\bar{h}'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h \end{cases} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973). Burada, $x^{h'}\left(x^h\right)$ fonksiyonları; $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin $C^\infty -$sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h$, $x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterilirse (2.2) dönüşümü

$$x^{H'} = x^{H'}\left(x^H\right),\ H = 1, ..., n, n+1, ..., 2n \tag{2.3}$$

şeklinde yazılır. (2.2) dönüşümüne ait Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H'}}{\partial x^{H}}\right)=\begin{pmatrix} A_{h}^{h'} & 0 \\ A_{h\varepsilon}^{h'}y^{\varepsilon} & A_{h}^{h'} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$A_{h}^{h'}=\frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}}\ ,\ A_{h\varepsilon}^{h'}=\frac{\partial^{2}x^{h'}}{\partial x^{h}\partial x^{\varepsilon}}$$

eşitlikleri bulunmaktadır. (2.2) dönüşümünün tersi ise

$$\begin{cases} x^{h}=x^{h}\left(x^{h'}\right), \\ x^{\bar{h}}=\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}}y^{h'} \end{cases} \tag{2.5}$$

veya

$$x^{H}=x^{H}\left(x^{H'}\right) \tag{2.6}$$

şeklinde yazılır. (2.5) dönüşümüne ait Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H}}{\partial x^{H'}}\right)=\begin{pmatrix} A_{h'}^{h} & 0 \\ A_{h'\varepsilon'}^{h}y^{\varepsilon'} & A_{h'}^{h} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

ile tanımlanır. (2.4) ve (2.7) matrislerinden $T\left(M_{n}\right)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğu görülür (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldu üzerindeki C^∞ -sınıfından (r, s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(M_n)$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(M_n) = \sum_{r,\, s=0}^{\infty} \Im_s^r(M_n)$$

ile gösterilir. Aynı şekilde $T(M_n)$ tanjant demetindeki C^∞ -sınıfından (r, s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(T(M_n))$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(T(M_n)) = \sum_{r,\, s=0}^{\infty} \Im_s^r(T(M_n))$$

ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

2.1.1. Fonksiyonun dikey lifti

f, M_n'de bir fonksiyon olsun. $T(M_n)$ tanjant demette ${}^v f$ fonksiyonuna bakalım: $f : M_n \to R$ ve $\pi : T(M_n) \to M_n$ olmak üzere ${}^v f = f \circ \pi$ olsun. ${}^v f : T(M_n) \to R$ fonksiyonuna f fonksiyonunun dikey lifti denir. Burada

$${}^v f\left(\widetilde{P}\right) = {}^v f(x, y) = f \circ \pi\left(\widetilde{P}\right) = f(P) = f(x) \quad \left(\widetilde{P} \in \pi^{-1}(U),\ \widetilde{P} = \left(x^i, y^i\right)\right)$$

olup ${}^v f\left(\widetilde{P}\right)$ değeri fibre boyunca sabittir ve $P = \pi^{-1}\left(\widetilde{P}\right) \in M_n$ noktasındaki $f(P)$ değerine eşittir (Yano and Ishihara 1973).

2.1.2. Vektör alanının dikey lifti

M_n manifoldu üzerinde keyfi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde

$$^{v}X(\iota\omega) = {}^{v}(\omega(X)) \tag{2.8}$$

ile verilen $(1,0)$ tipli ^{v}X vektör alanına X vektör alanının dikey lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

Burada ω kovektörü M_n'nin U komşuluğunda $\omega = \omega_i dx^i$ şeklindeki koordinatlara sahip olup $\iota\omega$ ise $\pi^{-1}(U)$'da $\iota\omega = \omega_i y^i$ indirgenmiş koordinatlarına sahiptir.

(2.8) eşitliğinden X vektör alanının ^{v}X dikey liftinin, $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$^{v}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

2.1.3. 1-formun dikey lifti

M_n manifoldu üzerinde $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ 1-formu verilsin. $T(M_n)$ tanjant demetinde ω'nın dikey lifti olan $^{v}\omega \in \Im_1^0(T(M_n))$ 1-formu indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{v}\omega = (\omega_h,\ 0) \tag{2.10}$$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

(2.10) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$^{v}\left(dx^{h}\right)=dx^{h} \tag{2.11}$$

şeklinde yazılır (Yano and Ishihara 1973).

2.1.4. Vektör alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $X\in\Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde X vektör alanının tam lifti olan $^{c}X\in\Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{c}X=\begin{pmatrix} X^{h} \\ y^{s}\partial_{s}X^{h} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

(2.12) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$^{c}\left(\partial_{h}\right)=\partial_{h} \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

2.1.5. Afinor alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $F \in \Im_1^1(M_n)$, $(1,1)$ tipli tensör alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde F, $(1,1)$ tipli tensör alanının tam lifti olan ${}^cF \in \Im_1^1(T(M_n))$, $(1,1)$ tipli tensör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$^cF = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ y^s \partial_s F_i^h & F_i^h \end{pmatrix}$$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

2.1.6. γ – operatörü

$\gamma : \Im_q^p(M_n) \to \Im_{q-1}^p(T(M_n))$ olmak üzere $S \in \Im_q^p(M_n)$ olsun.

$$S = S_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p} \partial_{j_1} \otimes \partial_{j_2} \otimes \ldots \partial_{j_p} \otimes dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \ldots dx^{i_q}$$

için

$$\gamma S_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p} \partial_{\bar{j}_1} \otimes \partial_{\bar{j}_2} \otimes \ldots \otimes \partial_{\bar{j}_p} \otimes dx^{i_2} \otimes \ldots \otimes dx^{i_q}$$

ile tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

F, M_n üzerinde tanımlı $(1,1)$ tipli tensör alanı olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demetinde $\gamma F \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s F_s^h \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

$T \in \Im_2^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ olmak üzere, $T\left(M_n\right)$ tanjant demetinde $\gamma T \in \Im_1^1\left(T\left(M_n\right)\right)$, $(1{,}1)$ tipli tensör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^s T_s{}^h{}_h \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

2.1.7. Yatay lift

M_n, diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. Keyfi $X \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ için

$${}^H X = {}^C X - (\nabla_\gamma X) \tag{2.16}$$

ile verilen ${}^H X \in \Im_0^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ vektör alanına, X vektör alanının yatay lifti denir ve burada

$$(\nabla_\gamma X) = \gamma(\nabla X)$$

şeklinde tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

X ’in ${}^H X$ yatay lifti, $T\left(M_n\right)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

bileşenleri ile ifade edilir. Burada

$$\Gamma_i^h = y^s \Gamma_{s\ i}^{\ h} \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlıdır.

$F \in \Im_1^1(M_n)$ ’in $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki ${}^H F$ yatay lifti

$${}^H F = {}^C F - \left(\nabla_\gamma F\right) \tag{2.19}$$

ile tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

Burada $\nabla_\gamma F$

$$\left(\nabla_\gamma F\right) = y^s \nabla_s F_i^h \partial_{\bar{i}} \otimes dx^h \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlıdır. F ’in ${}^H F$ yatay lifti, $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^H F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_s^h F_i^s + \Gamma_i^s F_s^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

2.2. Kotanjant Demet

M_n, n- boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold ve M_n manifoldunun P noktasındaki kotanjant uzayı $T_P^*(M_n)$ olmak üzere

$$T^*(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P^*(M_n) \tag{2.22}$$

şeklinde verilen $T^*(M_n)$ kümesi kotanjant demeti tanımlar (Yano and Ishihara 1973).

$T^*(M_n)$'nin keyfi bir $\widetilde{P} \in T_P^*(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T^*(M_n)$ tabii demet yapısını doğuran $\pi : T^*(M_n) \to M_n$, $\pi(\widetilde{P}) = P$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(P) = \widetilde{P} \in T_P^*(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının P noktasındaki fibresi denir (Yano and Ishihara 1973).

$f : M_n \to T^*(M_n)$ diferensiyellenebilir dönüşümü ile verilen f kesitine bakalım: $\pi \circ f = id\big|_{M_n}$. M_n manifoldunun keyfi P noktasındaki $f(P)$ görüntüsünü, $T_P^*(M_n)$'nin sıfır vektörüne götüren f kesitine sıfır kesit denir. $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n baz uzayı ile aynı olup bu sebeple M_n manifoldunun kendisi $T^*(M_n)$'de diferensiyellenebilir imbedding olmuş (içine daldırılmış) altmanifolddur (Yano and Ishihara 1973).

(x^h), U koordinat komşuluğunda yerel koordinatlar olmak üzere M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. R^n ise, R üzerindeki n-boyutlu vektör uzayı olsun. $\widetilde{P} \in T_P^*(M_n)$ $(P \in U)$ noktası (P, p) sıralı çifti ile gösterildiğinden ve $p \in R^n$ kovektörünün bileşenleri $T_P^*(M_n)$ kotanjant uzayında dx^h doğal kobazına göre $\widetilde{P}$'nin $p_i = x^{\bar{h}}$ $\left(\bar{h} = n+1, \ldots, 2n\right)$ kartezyen koordinatları olduğu için

$\pi^{-1}\left(U\right)\subset T^{*}\left(M_{n}\right)$ açık kümesi $U\times R^{n}$ direkt çarpımına difeomorfizm olacaktır (Yano and Ishihara 1973).

U komşuluğunda $P=\pi\left(\widetilde{P}\right)$'nin koordinatları x^{h} $\left(h=1,...,n\right)$ ile gösterilirse ve $\left(x^{h},p_{i}\right)\leftrightarrow\widetilde{P}\in\pi^{-1}\left(U\right)$ olduğu dikkate alınırsa, $\pi^{-1}\left(U\right)\subset T\left(M_{n}\right)$ açık kümesinde $\left(x^{h},p_{i}\right)$ yerel koordinatlar sistemi elde edilir ve $\left(x^{h},p_{i}\right)$'ye, $\left(x^{h}\right)$'dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}\left(U\right)$'daki koordinatlar denir (Yano and Ishihara 1973).

M_{n} manifoldunun $P=\pi\left(\widetilde{P}\right)$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\left\{U^{'},x^{h'}\right\}$ olmak üzere, $\pi^{-1}\left(U^{'}\right)$ koordinat komşuluğuda $\widetilde{P}$ noktasını ihtiva eder.

$\pi^{-1}\left(U^{'}\right)$ koordinat komşuluğuna göre $\widetilde{P}$ noktasının indirgenmiş koordinatları $\left(x^{h},p_{i}\right)$ ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973). Burada dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{h'}=x^{h'}\left(x\right), \\ p_{i'}=\dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}p_{i} \end{cases} \tag{2.23}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, $x^{h'}\left(x\right)$ fonksiyonları; $x^{1},x^{2},...,x^{n}$ değişkenlerinin C^{∞} -sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}}=p_{h}$, $x^{\bar{h}'}=p_{h'}$ ile gösterilirse (2.23) dönüşümü

$$x^{H'}=x^{H'}\left(x^{H}\right),\ H=1,...,n,n+1,...,2n \tag{2.24}$$

şeklinde yazılır. (2.23) dönüşümüne ait Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H'}}{\partial x^{H}}\right)=\begin{pmatrix} A_i^{h'} & 0 \\ A_i^{i'} A_{i'h'}^{h} p_h & A_{h'}^{i} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

ile tanımlıdır. Burada

$$A_i^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}},\ A_{i'h'}^{h}=\frac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{i'}\partial x^{h'}},\ A_i^{h'}=\frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{i}}$$

eşitlikleri bulunmaktadır. (2.23) dönüşümünün tersi ise

$$\begin{cases} x^{h}=x^{h}\left(x^{'}\right), \\ p_h=\dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} p_{h'} \end{cases} \tag{2.26}$$

veya

$$x^{H}=x^{H}\left(x^{H'}\right) \tag{2.27}$$

şeklinde yazılır. (2.26) dönüşümüne ait Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H}}{\partial x^{H'}}\right)=\begin{pmatrix} A_{h'}^{i} & 0 \\ A_{i'}^{i} A_{ih}^{h'} p_{h'} & A_i^{h'} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

ile tanımlıdır. (2.25) ve (2.28) matrislerinden $T^{*}\left(M_n\right)$ kotanjant demetinin daima yönlendirilebilir olduğu görülür (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldu üzerindeki C^{∞} -sınıfından $\left(r, s\right)$ tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r\left(M_n\right)$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(M_n) = \sum_{r,\, s=0}^{\infty} \Im_s^r(M_n)$$

ile gösterilir. Aynı şekilde $T^*(M_n)$ kotanjant demetindeki C^∞ -sınıfından (r, s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(T^*(M_n))$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(T^*(M_n)) = \sum_{r,\, s=0}^{\infty} \Im_s^r(T^*(M_n))$$

ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

$p = p_i dx^i$ 1-formuna, $T^*(M_n)$ kotanjant demette temel 1-form denir. $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda dp dış diferensiyeli $dp = dp_i \wedge dx^i$ şeklindeki 2-formu belirtir. Bu sebeple

$$dp = \xi = \frac{1}{2}\xi_{CB} dx^C \wedge dx^B$$

yazılırsa

$$\xi = (\xi_{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ -\delta_j^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

olarak bulunur. (2.29) matrisi regüler olduğundan $\xi^{BA}\xi_{CB} = \delta_C^A$ olacak şekilde ξ^{BA} ters matrisi vardır. ξ^{BA} matrisi

$$(\xi^{BA}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^h \\ \delta_h^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

şeklinde tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

2.2.1. Fonksiyonun dikey lifti

M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\pi : T^*(M_n) \to M_n$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere

$$^v f = f \circ \pi \tag{2.31}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun $T^*(M_n)$ kotanjant demete dikey lifti denir. $\widetilde{P} \in T_P^{\ *}(M_n)$ olmak üzere

$$^v f\left(\widetilde{P}\right) = f(P)$$

eşitliği elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

2.2.2. Kovektör alanının dikey lifti

$\omega \in \Im_1^0(M_n)$ üzerindeki $\widetilde{\omega}^A = \widetilde{\omega}_B \xi^{BA}$ yerel bileşenlerine sahip ve koordinatlarla ifadesi $\omega = \omega_i dx^i$ şeklindeki 1-form olmak üzere ω 1-formunun dikey lifti olan $^v\omega$ vektör alanı $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre

$$^v\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

bileşenleri ile tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

2.2.3. Vektör alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde X vektör alanının tam lifti olan ${}^cX \in \Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^cX = \begin{pmatrix} X^h \\ -p_i\left(\partial_h X^i\right) \end{pmatrix} \tag{2.33} $$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

2.2.4. Afinor alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $F \in \Im_1^1(M_n)$, $(1,1)$ tipli tensör alanı verilmiş olsun. $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde F, $(1,1)$ tipli tensör alanının tam lifti olan ${}^cF \in \Im_1^1(T^*(M_n))$, $(1,1)$ tipli tensör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^cF = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ p_s(\partial_i F_h^s - \partial_h F_i^s) & F_h^i \end{pmatrix} \tag{2.34} $$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

2.2.5. $\gamma -$ operatörü

$\gamma : \Im_q^1(M_n) \to \Im_{q-1}^1\left(T^*(M_n)\right)$ olmak üzere $S \in \Im_q^1(M_n)$ olsun.

$$S = S_{i_s \ldots i_2 i_1}{}^{a} dx^{i_s} \otimes \ldots \otimes dx^{i_2} \otimes dx^{i_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^a}$$

için

$$\gamma S = p_a S_{i_s \ldots i_2 i_1}{}^{a} dx^{i_s} \otimes \ldots \otimes dx^{i_2} \otimes \frac{\partial}{\partial p_{i_1}}$$

ile tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

M_n üzerinde tanımlı bir X vektör alanı için $T^*(M_n)$ kotanjant demette γX fonksiyonu

$$\gamma X = p_s X^s \tag{2.35}$$

şeklinde ifade edilir.

F, M_n üzerinde tanımlı $(1,1)$ tipli tensör alanı olmak üzere $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde $\gamma F \in \mathfrak{I}_0^1\left(T^*(M_n)\right)$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ p_s F_i^{\,s} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

$T \in \mathfrak{I}_2^1(M_n)$ olmak üzere, $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde $\gamma T \in \mathfrak{I}_1^1\left(T^*(M_n)\right)$, $(1,1)$ tipli tensör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_s T_{j\ i}^{\ s} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

2.2.6. Vektör alanının yatay lifti

M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde verilen ∇ simetrik afin konneksiyonu ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$^{H}X = {}^{C}X + \gamma(\nabla X) \tag{2.38}$$

ile verilen $^{H}X \in \Im_0^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ vektör alanına, X vektör alanının $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetine yatay lifti denir ve burada X^s ’in $\nabla_i X^s$ kovaryant türevi

$$(\nabla_i X^s) = \partial_i X^s + X^j \Gamma_{j\ i}^{\ s}$$

şeklinde tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

X ’in ^{H}X yatay lifti, $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{H}X = \begin{pmatrix} X^i \\ X^j \Gamma_{ji} \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

bileşenleri ile tanımlıdır. Burada

$$\Gamma_{ji} = p_s \Gamma_{j\ i}^{\ s} \tag{2.40}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2.7. Afinor alanının yatay lifti

$F \in \Im_1^1(M_n)$ 'in $T^*(M_n)$ kotanjant demeti üzerindeki ${}^H F$ yatay lifti

$$ {}^H F = {}^C F + \gamma[\nabla F] \tag{2.41} $$

şeklinde tanımlıdır. Keyfi $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanları için $[\nabla F]$, $(1,2)$ tipli tensör alanı

$$ [\nabla F](X,Y) = -\nabla_X (FY) + \nabla_Y (FX) \tag{2.42} $$

ile tanımlıdır. F 'in, $T^*(M_n)$ kotanjant demete ${}^H F$ yatay lifti indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^H F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_{is} F_h^s + \Gamma_{hs} F_i^s & F_h^i \end{pmatrix} \tag{2.43} $$

bileşenleri ile ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

2.3. Tensör Demet

M_n, $n-$boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold ve $T_q^p(Q)$, M_n manifoldunun Q noktasındaki (p,q) tipli tensör uzay olsun.

$$ T_q^p(M_n) = \bigcup_{Q \in M_n} T_q^p(Q) $$

şeklinde verilen $T_q^p(M_n)$ kümesi tensör demeti tanımlar.

M_n manifoldu üzerinde $\pi : T_q^p(M_n) \to M_n$ tabii izdüşümü verilsin. M_n manifoldunun bir Q noktasının U koordinat komşuluğundaki yerel koordinatları $x^j,\ j = 1,...,n$ şeklinde verilir. $Q \in M_n$ noktasına karşılık gelen $T_q^p(M_n)$ demetinin elemanı olan $\tilde{Q} \in \pi^{-1}(U)$ noktasının lokal ifadesi

$$(x^j, t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}) = (x^j, x^{\bar{j}}),\ x^{\bar{j}} = t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p},\ \bar{j} = n+1,...,n+n^{p+q}$$

biçimindedir. Burada $t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$, t tensörünün ∂_j tabii çatısına göre bileşenleridir. $T_q^p(M_n)$ nin $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda yerel koordinatlar olarak $(x^j, x^{\bar{j}})$ ifadesini alabiliriz.

M_n manifoldu üzerindeki koordinat dönüşümü $x^{j'} = x^{j'}(x^j)$ biçiminde olduğundan $T_q^p(M_n)$ demetinde karşılık gelen koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{j'} = x^{j'}(x^j), \\ x^{\bar{j}'} = t_{j'_1 \cdots j'_q}^{i'_1 \cdots i'_p} = A_{i_1}^{i'_1} ... A_{i_p}^{i'_p} A_{j'_1}^{j_1} ... A_{j'_q}^{j_q} t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = A_{(i)}^{(i')} A_{(j')}^{(j)} x^{\bar{j}}, \end{cases} \tag{2.44}$$

biçiminde olur. Burada $A_{(i)}^{(i')} A_{(j')}^{(j)} = A_{i_1}^{i'_1} ... A_{i_p}^{i'_p} A_{j'_1}^{j_1} ... A_{j'_q}^{j_q}$, $A_{i_1}^{i'_1} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $A_{j'_1}^{j_1} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$ şeklinde alınmıştır. $J = (j, \bar{j}),\ J = 1,...,n+n^{p+q},\ t_{(k)}^{(i)} = t_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p}$ olmak üzere, (2.44) denkleminin Jacobian matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{J'}}{\partial x^{J}}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}} & \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\bar{j}}}\\ \frac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^{j}} & \frac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^{\bar{j}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{j}^{j'} & 0\\ t_{(k)}^{(i)}\partial_{j}(A_{(i)}^{(i')}A_{(j')}^{(k)}) & A_{(i)}^{(i')}A_{(j')}^{(j)}\end{pmatrix} \tag{2.45}$$

şeklinde verilir.

M_n manifoldu üzerinde C^{∞} sınıfından reel değerli fonksiyonların halkası $F(M_n)$ olmak üzere, C^{∞} sınıfından (p,q) tipli tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülünü $\Im_q^p(M_n)$ ile gösterilir.

Eğer $\alpha \in \Im_p^q(M_n)$ ise kontraksiyonla $T_q^p(M_n)$ uzayında fonksiyon $\iota\alpha$ ile tanımlanır. Öyle ki, $U(x^i) \subset M_n$ koordinat komşuluğunda α nın lokal ifadesi

$$\alpha=\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\cdots j_q}\partial_{j_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{j_q}\otimes dx^{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{i_p}$$

biçiminde ise $\iota\alpha$ nın $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğundaki $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlara göre lokal ifadesi

$$\iota\alpha=\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\cdots j_q}t_{j_1\cdots j_q}^{i_1\ldots i_p}$$

olur.

2.3.1. Tensör alanların tensör demete dikey lifti ve $\gamma-$ operatörü

2.1. Yardımcı Teorem: $\tilde{X},\tilde{Y} \in T_q^p(M_n)$ olsun. Her $\alpha \in T_p^q(M_n)$ için $\tilde{X}(\iota\alpha)=\tilde{Y}(\iota\alpha)$ ise $\tilde{X}=\tilde{Y}$ olur.

İspat: Eğer $\tilde{Z}(\iota\alpha)=(\tilde{X}-\tilde{Y})(\iota\alpha)$ şeklinde yazılırsa $\tilde{Z}=0$ olduğunu göstermek yeterli olur. $\tilde{Z}$ nın $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre $\tilde{Z}^j$ bileşenleri

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(\iota\alpha) &= \tilde{Z}^j\partial_j(\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\cdots j_q} t_{j_1\cdots j_q}^{i_1\ldots i_p}) + \tilde{Z}^{\bar{j}}\partial_{\bar{j}}(\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\cdots j_q} t_{j_1\cdots j_q}^{i_1\ldots i_p}) \\ &= \tilde{Z}^j t_{j_1\cdots j_q}^{i_1\ldots i_p}\partial_j\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\cdots j_q} + \tilde{Z}^{\bar{j}}\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\cdots j_q} = 0\end{aligned}$$

denklemini sağlar. $\alpha\in\Im_p^q(M_n)$ keyfi olarak alındığından dolayı, homojen lineer denklem sisteminden

$$\tilde{Z}^j t_{j_1\cdots j_q}^{i_1\ldots i_p} = 0,\ \tilde{Z}^{\bar{j}} = 0 \tag{2.46}$$

yazılır. (2.46) nin ilk denkleminde eğer $T_q^p(M_n)$ tensör demetinin tüm noktalarında $t_{j_1\cdots j_q}^{i_1\ldots i_p}$ nin tüm bileşenleri sıfır değil ise $\tilde{Z}$ bileşenleri sürekli olmasından dolayı M_n baz manifoldu üzerinde $\tilde{Z}^j=0$ olur. Böylece $\pi^{-1}(U)$ un tüm noktalarında $\tilde{Z}^j=0$ yazılır. (2.46) denkleminin ikincisi de dikkate alındığında $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $\tilde{Z}=0$ olduğu bulunur. Böylece $T_q^p(M_n)$ tensör demetinde $\tilde{Z}=0$ yazılır.

$A\in\Im_q^p(M_n)$ olsun. $\alpha\in\Im_p^q(M_n)$ olmak üzere

$${}^V A(\iota\alpha) = \alpha(A)\circ\pi = {}^V(\alpha(A)) \tag{2.47}$$

eşitliğini sağlayan ${}^V A\in\Im_0^1(T_q^p(M_n))$ vektör alanına A vektör alanının $T_q^p(M_n)$ tensör demette dikey lifti denir (Ledger and Yano 1967). Burada ${}^V(\alpha(A))$ ifadesi $\alpha(A)\in F(M_n)$ fonksiyonunun dikey liftidir. Diğer taraftan $f\in F(M_n)$ keyfi fonksiyonun ${}^V f = f\circ\pi$ dikey lifti $\pi^{-1}(P)=T_q^p(P)$ fibresi boyunca sabittir.

${}^{V}A = {}^{V}A^{k}\partial_{k} + {}^{V}A^{\bar{k}}\partial_{\bar{k}}$ şeklinde yazılırsa, $x^{\bar{k}} = t^{l_1 \ldots l_p}_{k_1 \ldots k_q}$ olmak üzere (2.47) eşitliğinden

$${}^{V}A^{k} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \partial_{k} \alpha^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} + {}^{V}A^{\bar{k}} \alpha^{k_1 \ldots k_q}_{l_1 \ldots l_p} = \alpha^{k_1 \ldots k_q}_{l_1 \ldots l_p} A^{l_1 \ldots l_p}_{k_1 \ldots k_q}$$

sonucu elde edilir. 2.1 Yardımcı Teoremin ispatında kullanılan aynı yöntemle $T^{p}_{q}(M_n)$ nin $(x^{j}, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre ${}^{V}A$ dikey liftinin bileşenleri

$${}^{V}A = \begin{pmatrix} {}^{V}A^{j} \\ {}^{V}A^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

şeklinde elde edilir.

$\varphi \in \Im^{1}_{1}(M_n)$ tensör alanının yerel koordinatlarla ifadesi

$$\varphi = \varphi^{i}_{j} \frac{\partial}{\partial x^{i}} \otimes dx^{j}$$

şeklinde verilmiş olsun. $T^{p}_{q}(M_n)$ tensör demette $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $(x^{j}, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre $\gamma\varphi$ vektör alanı

$$\begin{cases} \gamma\varphi = \left(\sum_{\lambda=1}^{p} t^{i_1 \ldots m \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \varphi^{i_\lambda}_{m}\right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}, & (p \geq 1,\ q \geq 0) \\ \tilde{\gamma}\varphi = \left(\sum_{\mu=1}^{q} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots m \ldots j_q} \varphi^{m}_{j_\mu}\right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}, & (p \geq 0,\ q \geq 1) \end{cases} \tag{2.49}$$

şeklinde tanımlanır (Cengiz and Salimov 2002).

(2.45) den, $\gamma\varphi$, $T_q^p(M_n)$ tensör demette dikey vektör alanıdır. Biz $\gamma\varphi$ ye $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$, $(1,1)$ tipli tensör alanının $T_q^p(M_n)$ tensör demette dikey-vektör lifti şeklinde adlandıracağız. $\gamma\varphi$ dikey-vektör liftinin yerel koordinatlarla ifadesi

$$\gamma\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma}\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_\mu}^{m} \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

şeklindedir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet İzdüşümü ile Tanımlı Tensör Demetinin Pull-Back Demeti

M_n, C^∞ sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $\left(T(M_n),\pi_1,M_n\right)$ ise M_n üzerinde tanjant demet olsun. x^α lar M_n deki baz koordinatları, $x^{\bar{\alpha}} = y^\alpha$ lar ise $T(M_n)$ tanjant demetindeki fibre koordinatları olmak üzere $(x^i)=\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right)$ notasyonu kullanılmaktadır. Burada $i,j,...$ indisleri 1 den $2n$ e; $\bar{\alpha},\bar{\beta},...$ indisleri 1 den n e; $\alpha,\beta,...$ indisleri ise $n+1$ den $2n$ e kadar değer alır.

$\left(T_q^p(M_n),\tilde{\pi},M_n\right)$, M_n üzerinde bir tensör demet (Gezer and Salimov 2008; Ledger and Yano 1967; Salimov 2013) ve $T(M_n)$ ise $\pi_1:T(M_n)\to M_n$ izdüşümüyle (submersion) ile tanımlı tanjant demet olsun.

$\left(T_q^p(M_n),\tilde{\pi},M_n\right)$ tensör demetinin $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki $\left(t_q^p(M_n),\pi_2,T(M_n)\right)$ yarı-tensör demeti (induced veya pull-back):

$$t_q^p(M_n)=\left\{(\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right),x^{\bar{\bar{\alpha}}})\in T(M_n)\times\left(T_q^p\right)_x(M_n):\pi_1\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right)=\tilde{\pi}\left(x^\alpha,x^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)=\left(x^\alpha\right)\right\}$$

$$\subset T(M_n)\times\left(T_q^p\right)_x(M_n)$$

ile tanımlıdır. Burada $\pi_2(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha,x^{\bar{\bar{\alpha}}})=\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right)$ ile $\pi_2:t_q^p(M_n)\to T(M_n)$ izdüşümü tanımlı olup $\left(T_q^p\right)_x(M_n)\left(x=\pi_1\left(\tilde{x}\right),\tilde{x}=\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right)\in T(M_n)\right)$ ise M_n nin bir x

noktasındaki tensör uzayıdır. Ayrıca $x^{\overline{\overline{\alpha}}} = t_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_p}$ $\left(\overline{\overline{\alpha}}, \overline{\overline{\beta}}, \dots = 2n+1, \dots, 2n+n^{p+q}\right)$ lar $T_q^p(M_n)$ tensör demetinin fibre koordinatlarıdır (pull-back demeti bkz: (Husemoller 1994; Lawson and Michelsohn 1989; Salimov and Kadıoğlu 2000; Steenrod 1951; Yıldırım 2015; Yıldırım and Salimov 2014). Ayrıca pull-back demetlerinin genelleşmiş hali Pontryagin demetleri olarak bilinir (Pontryagin 1947).

$(x^{i'}) = (x^{\overline{\alpha}'}, x^{\alpha'}, x^{\overline{\overline{\alpha}}'})$, $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetindeki bir diğer lokal adapte olmuş koordinat sistemi olmak üzere

$$\begin{cases} x^{\overline{\alpha}'} = \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} y^{\beta}, \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^{\beta}\right), \\ x^{\overline{\overline{\alpha}}'} = t_{\alpha_1' \dots \alpha_q'}^{\beta_1' \dots \beta_p'} = A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1' \dots \beta_p'} A_{\alpha_1' \dots \alpha_q'}^{\beta_1 \dots \beta_q} t_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = A_{(\alpha)}^{(\beta')} A_{(\alpha')}^{(\beta)} x^{\overline{\overline{\beta}}}, \end{cases} \tag{3.1}$$

dönüşümü tanımlıdır.

(3.1) dönüşümünün jakobiyeni

$$\overline{A} = \left(A_J^{I'}\right) = \begin{pmatrix} A_{\beta}^{\alpha'} & A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'} y^{\varepsilon} & 0 \\ 0 & A_{\beta}^{\alpha'} & 0 \\ 0 & t_{(\sigma)}^{(\alpha)} \partial_{\beta} A_{(\alpha)}^{(\beta')} A_{(\alpha')}^{(\sigma)} & A_{(\alpha)}^{(\beta')} A_{(\alpha')}^{(\beta)} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada $I = (\overline{\alpha}, \alpha, \overline{\overline{\alpha}})$, $J = (\overline{\beta}, \beta, \overline{\overline{\beta}})$, $I, J, \dots = 1, \dots, 2n+n^{p+q}$, $t_{(\sigma)}^{(\alpha)} = t_{\sigma_1 \dots \sigma_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, $A_{\beta}^{\alpha'} = \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}$, $A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'} = \dfrac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}}$ ile tanımlıdır.

(3.2) de belirtilen matris için

$$Det(A_{\beta}^{\bar{\alpha}'}) \neq 0\,,\ Det(A_{\beta}^{\alpha'}) \neq 0\,,\ Det(A_{(\alpha)}^{(\beta')}A_{(\alpha')}^{(\beta)}) \neq 0$$

olduğundan $Det\bar{A} \neq 0$ dır. Ayrıca $\dim t_q^p(M_n) = 2n + n^{p+q}$ olmaktadır.

Yarı-tensör demetin özel bir sınıfı (Fattaev 2009) da çalışılmıştır. Bu çalışmanın amacı $T(M_n)$ tanjant demetinin izdüşümü yardımıyla $T_q^p(M_n)$ tensör demetinin yarı-tensör demetini tanımlamaktır.

$F\left(T(M_n)\right)$ ve $F\left(M_n\right)$, $T(M_n)$ ve M_n üzerindeki $C^{\infty}-$sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere, $T(M_n)$ ve M_n üzerindeki $\left(p,q\right)$ tipli tüm tensör alanlarının $F\left(T(M_n)\right)$ ve $F\left(M_n\right)$ üzerindeki modülü sırasıyla $\Im_q^p(T(M_n))$ ve $\Im_q^p(M_n)$ ile gösterilir.

3.1.1. Tensör alanlarının dikey liftleri ve $\gamma-$operatörü

$A \in \Im_q^p(T(M_n))$ olmak üzere ${}^{vv}A$ vektör alanı

$$ {}^{vv}A = \begin{pmatrix} {}^{vv}A^{\bar{\alpha}} \\ {}^{vv}A^{\alpha} \\ {}^{vv}A^{\bar{\bar{\alpha}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

bileşenlerine sahiptir. (3.2) ve (3.3) kullanılarak ${}^{vv}A' = \bar{A}\left({}^{vv}A\right)$ olduğu gösterilebilir. ${}^{vv}A \in \Im_0^1(t_q^p(M_n))$ vektör alanı $A \in \Im_q^p(T(M_n))$ nın $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetine dikey lifti olarak adlandırılır.

$\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere $\pi^{-1}(U)$ daki $\gamma\varphi$ vektör alanı $t_q^p(M_n)$ üzerindeki $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$\begin{cases} \gamma\varphi = \left(\sum\limits_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \varepsilon \dots \alpha_p} \varphi_{\varepsilon}^{\alpha_\lambda} \right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\overline{\overline{\beta}}}}, & (p \geq 1, q \geq 0) \\ \tilde{\gamma}\varphi = \left(\sum\limits_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1 \dots \varepsilon \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \varphi_{\beta_\mu}^{\varepsilon} \right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\overline{\overline{\beta}}}}, & (p \geq 0, q \geq 1) \end{cases} \tag{3.4}$$

bileşenlerine sahiptir. (3.2) den $\gamma\varphi$ ve $\tilde{\gamma}\varphi$ vektör alanlarının herbir $\pi^{-1}(U) \subset t_q^p(M_n)$ da dikey vektör alanları tanımlar. $\gamma\varphi$ (veya $\tilde{\gamma}\varphi$), $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ tensör alanının $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetine dikey-vektör lifti olarak adlandırılır.

Keyfi $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ için, (3.2) ve (3.4) kullanılarak, $(\gamma\varphi)' = \overline{A}(\gamma\varphi)$ olduğu gösterilebilir. Burada $\gamma\varphi$ vektör alanı

$$\gamma\varphi = (\gamma\varphi)^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \varepsilon \dots \alpha_p} \varphi_{\varepsilon}^{\alpha_\lambda} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

ile tanımlıdır. $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere $\tilde{\gamma}\varphi$

$$\tilde{\gamma}\varphi = (\tilde{\gamma}\varphi)^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1 \dots \varepsilon \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \varphi_{\beta_\mu}^{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

bileşenlerine sahiptir. (3.2) kullanılarak $\left(\tilde{\gamma}\varphi\right)' = \bar{A}\left(\tilde{\gamma}\varphi\right)$ olduğu gösterilebilir.

Keyfi $\varphi \in \Im_1^1(T(M_n))$ için, $\gamma\varphi$ vektör alanı $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$\gamma\varphi = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\varphi_{\varepsilon}^{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

bileşenlerine sahiptir. (3.2) kullanılarak $(\gamma\varphi)' = \bar{A}(\gamma\varphi)$ olduğu gösterilebilir.

3.1.2. Vektör alanının tam lifti

$X \in \Im_0^1(T(M_n))$, $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ olmak üzere X vektör alanının tanjant demete ${}^{c}X$ tam lifti

$${}^{c}X = X^{\alpha}\partial_{\alpha} + y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\partial_{\bar{\alpha}}$$

ile tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

Keyfi $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ için, ${}^{cc}X$ vektör alanı $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$${}^{cc}X = \begin{pmatrix} {}^{cc}X^{\bar{\beta}} \\ {}^{cc}X^{\beta} \\ {}^{cc}X^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \\ X^{\beta} \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda} - \sum_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

bileşenlerine sahiptir. (3.2) kullanılarak ${}^{cc}X' = \overline{A}({}^{cc}X)$ olduğu gösterilebilir. ${}^{cc}X$ vektör alanı ${}^{c}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının $t_q^p(M_n)$ e tam lifti olarak adlandırılır.

3.1.3. Vektör alanlarının yatay lifti

Keyfi $X \in \Im_0^1(T(M_n))$, $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ için ${}^{HH}X \in \Im_0^1(t_q^p(M_n))$ vektör alanı $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$ {}^{HH}X = \begin{pmatrix} -\Gamma_{\alpha}^{\beta} X^{\alpha} \\ X^{\beta} \\ X^{l}\left(\sum\limits_{\mu=1}^{q} \Gamma_{l\beta_{\mu}}^{\varepsilon} t_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} - \sum\limits_{\lambda=1}^{p} \Gamma_{l\varepsilon}^{\alpha_{\lambda}} t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.9} $$

bileşenlerine sahiptir. (3.2) kullanılarak ${}^{HH}X' = \overline{A}\left({}^{HH}X\right)$ olduğu gösterilebilir. ${}^{HH}X$ vektör alanı X vektör alanının $t_q^p(M_n)$ e yatay lifti olarak adlandırılır. Burada

$$ \Gamma_{\alpha}^{\beta} = y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon\ \alpha}^{\ \beta} $$

ile tanımlıdır.

Teorem 3.1.3.1: $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ olmak üzere

$$ {}^{cc}X - {}^{HH}X = \gamma(\hat{\nabla}X) - \tilde{\gamma}(\hat{\nabla}X) + \gamma(\nabla X), $$

eşitliği bulunmaktadır. Burada $\hat{\nabla}$ simetrik afin konneksiyonu $\hat{\Gamma}_{\beta\theta}^{\alpha} = \Gamma_{\theta\beta}^{\alpha}$ ile tanımlıdır.

İspat: (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9) kullanılarak

$$
{}^{cc}X - {}^{HH}X = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \\ X^{\beta} \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda} - \sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}X^{\alpha} \\ X^{\beta} \\ X^{l}\Big(\sum\limits_{\mu=1}^{q}\Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q} - \sum\limits_{\lambda=1}^{p}\Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Big) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} + y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}X^{\alpha} \\ 0 \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda} + \Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon}X^{l}) - \sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}(\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon} + \Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu}X^{l}) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda} + \Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon}X^{l}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}\left(\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon} + \Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu}X^{l}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\beta} + \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}X^{\alpha}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}(\underbrace{\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda} + \hat{\Gamma}^{\alpha_\lambda}_{\varepsilon l}X^{l}}_{\hat{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{X}^{\alpha_\lambda}}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}(\underbrace{\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon} + \hat{\Gamma}^{\varepsilon}_{\beta_\mu l}X^{l}}_{\hat{\nabla}_{\beta_\mu}\widetilde{X}^{\varepsilon}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\Big(\underbrace{\partial_{\varepsilon}X^{\beta} + \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}X^{\alpha}}_{\nabla_{\varepsilon}X^{\beta}}\Big) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\left(\hat{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{X}^{\alpha_\lambda}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}\left(\hat{\nabla}_{\beta_\mu}\widetilde{X}^{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left(\nabla_{\varepsilon}X^{\beta}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \gamma(\hat{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{X}^{\alpha_\lambda}) - \tilde{\gamma}\left(\hat{\nabla}_{\beta_\mu}\widetilde{X}^{\varepsilon}\right) + \gamma\left(\nabla_{\varepsilon}X^{\beta}\right) = \gamma(\hat{\nabla}X) - \tilde{\gamma}(\hat{\nabla}X) + \gamma(\nabla X),
$$

elde edilir.

3.2. Yarı-Tensör Demette Kesitler

$\xi \in \Im_q^p(M_n)$, M_n manifoldu üzerinde bir (p,q) tipli tensör alanı olmak üzere, $x \to \xi_x$ dönüşümü ($\xi_x; x \in T(M_n)$ noktasındaki ξ değerini belirtir) yarı-tensör demetin β_ξ kesitini tanımlar. $\sigma_\xi : M_n \to T_q^p(M_n)$ ile $\left(T_q^p(M_n), \tilde{\pi}, M_n\right)$ tensör demetinin kesiti tanımlanmak üzere $\tilde{\pi} \circ \sigma_\xi = I_{(M_n)}$ eşitliği bulunmaktadır. $\left(t_q^p(M_n), \pi_2, T(M_n)\right)$ yarı-tensör demetinin $\beta_\xi : T(M_n) \to t_q^p(M_n)$ kesiti:

$$\beta_\xi\left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha\right) = \left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, \sigma_\xi \circ \pi_1\left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha\right)\right) = \left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, \sigma_\xi\left(x^\alpha\right)\right) = \left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, \xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\left(x^\beta\right)\right)$$

ile tanımlıdır (Isham 1999; Husemoller 1994; Lawson and Michelsohn 1989; Yano and Ishihara 1973).

ξ tensör alanı $\xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\left(x^\beta\right)$ bileşenlerine sahip olmak üzere $x^B = (x^{\bar{\beta}}, x^\beta, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$ kesiti

$$\begin{cases} x^{\bar{\beta}} = y^\beta = V^\beta\left(x^\alpha\right), \\ x^\beta = x^\beta, \\ x^{\bar{\bar{\beta}}} = \xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\left(x^\alpha\right), \end{cases} \tag{3.10}$$

ile tanımlıdır. $x^{\bar{\alpha}} = y^\alpha$ lar değişkenler olarak alınırsa, $x^{\bar{\alpha}} = y^\alpha$ ların (3.10)’a göre diferensiyeli alınarak bileşenleri

$$B_{(\bar{\theta})} = \frac{\partial x^B}{\partial x^{\bar{\theta}}} = \partial_{\bar{\theta}} x^B = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{\theta}} V^{\beta} \\ \partial_{\bar{\theta}} x^{\beta} \\ \partial_{\bar{\theta}} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix},$$

şeklinde olan $B_{(\bar{\theta})}$, $(\bar{\theta} = 1, \ldots, n)$ vektör alanları elde edilir.

Buradaki $B_{(\bar{\theta})}$ vektör alanları $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesitine teğettir. $t^p_q(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $B_{(\bar{\theta})}$ nin bileşenleri,

$$B_{(\bar{\theta})} : \left(B^B_{(\bar{\theta})}\right) = \begin{pmatrix} \delta^{\beta}_{\bar{\theta}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Burada

$$\delta^{\beta}_{\bar{\theta}} = A^{\beta}_{\bar{\theta}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\bar{\theta}}}$$

eşitliği bulunmaktadır.

$X \in \Im^1_0\left(T(M_n)\right)$, $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ olmak üzere BX vektör alanının $t^p_q(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$BX : \left(B^B_{(\bar{\theta})} X^{\bar{\theta}}\right) = \begin{pmatrix} \delta^B_{\bar{\theta}} X^{\bar{\theta}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^B_{\bar{\theta}} X^{\bar{\theta}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

ile tanımlıdır.

$$\begin{cases} x^{\overline{\beta}} = y^{\beta} = sabit, \\ x^{\overline{\overline{\beta}}} = \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\left(x^{\alpha}\right) = sabit, \\ x^{\beta} = x^{\beta}, \end{cases}$$

olmak üzere; x^{θ} ları değişkenler olarak kabul edersek (3.10)'a göre x^{θ} ların diferensiyeli alınarak bileşenleri

$$C_{(\theta)} = \frac{\partial x^{B}}{\partial x^{\theta}} = \partial_{\theta} x^{B} = \begin{pmatrix} \partial_{\theta} x^{\overline{\beta}} \\ \partial_{\theta} x^{\beta} \\ \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix},$$

olan $C_{(\theta)}$, $(\theta = n+1, \ldots, 2n)$ vektör alanları elde edilir. Burada $C_{(\theta)}$ vektör alanları $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesitine teğettir. $t^p_q(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $C_{(\theta)}$ nın bileşenleri,

$$C_{(\theta)} : \left(C^{B}_{(\theta)}\right) = \begin{pmatrix} \partial_{\theta} V^{\beta} \\ \delta^{\beta}_{\theta} \\ \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Burada

$$\delta^{\beta}_{\theta} = A^{\beta}_{\theta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\theta}}$$

eşitliği geçerlidir.

$X \in \Im_0^1\left(T(M_n)\right)$, olmak üzere CX vektör alanının $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$CX:\left(C_{(\theta)}^{B}X^{\theta}\right)=\begin{pmatrix} X^{\theta}\partial_{\theta}V^{\beta} \\ X^{\beta} \\ X^{\theta}\partial_{\theta}\xi_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

ile tanımlıdır.

$$\begin{cases} x^{\overline{\beta}} = y^{\beta} = sabit, \\ x^{\beta} = x^{\beta} = sabit, \\ x^{\overline{\overline{\beta}}} = \xi_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\left(x^{\alpha}\right), \end{cases}$$

olmak üzere, $t_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ lar değişkenler olarak kabul edilip $x^{\overline{\overline{\beta}}} = t_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ e göre diferensiyeli alındığında bileşenleri

$$E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}:\left(E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}^{B}\right)=\partial_{\overline{\overline{\theta}}}x^{B}=\begin{pmatrix} \partial_{\overline{\overline{\theta}}}y^{\beta} \\ \partial_{\overline{\overline{\theta}}}x^{\beta} \\ \partial_{\overline{\overline{\theta}}}t_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{\beta_1}^{\theta_1}\ldots\delta_{\beta_q}^{\theta_q}\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1}\ldots\delta_{\gamma_p}^{\alpha_p} \end{pmatrix}$$

olan $E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}$ $(\overline{\theta} = 2n+1,\ldots,2n+n^{p+q})$ vektör alanları elde edilir. $E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}$ vektör alanları fibreye teğet olup burada δ, Kronecker sembolüdür:

$$\delta_{\beta_1}^{\theta_1}=\frac{\partial x^{\theta_1}}{\partial x^{\beta_1}}.$$

ξ, M_n üzerinde (p,q) tipli

$$\xi = \xi^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\theta_1 \ldots \theta_q} dx^{\theta_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\theta_q} \otimes \partial_{\gamma_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{\gamma_p}$$

şeklinde tanımlı bir tensör alanı olmak üzere fibreye teğet olan $E\xi$ vektör alanı

$$E\xi : \left(E^{B}_{(\overline{\overline{\theta}})} \xi^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\theta_1 \ldots \theta_q} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 3.2.1: X , $T(M_n)$ üzerinde bir vektör alanı olmak üzere, $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca

$${}^{cc}X = CX + B\left(L_V X\right) + E\left(-L_X \xi\right),$$

eşitliği tanımlıdır. Burada V e göre X nin Lie türevlemesi $L_V X$ ile, X e göre ξ nin Lie türevlemesi $L_X \xi$ gösterilmiştir.

İspat: (3.8), (3.11), (3.12) ve (3.13) kullanılarak,

$$CX + B\left(L_V X\right) + E\left(-L_X \xi\right) = \begin{pmatrix} X^\theta \partial_\theta V^\beta \\ X^\beta \\ X^\theta \partial_\theta \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^\alpha \partial_\alpha X^\beta - X^\alpha \partial_\alpha V^\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
+\begin{pmatrix}
0\\
0\\
-X^{\theta}\partial_{\theta}\xi^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}-\sum_{\mu=1}^{q}\partial_{\beta_\mu}X^{\beta}\xi^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta\ldots\beta_q}+\sum_{\lambda=1}^{p}\partial_{\beta}X^{\alpha_\lambda}\xi^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
V^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta}\\
X^{\beta}\\
-\sum_{\mu=1}^{q}\partial_{\beta_\mu}X^{\beta}\xi^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta\ldots\beta_q}+\sum_{\lambda=1}^{p}\partial_{\beta}X^{\alpha_\lambda}\xi^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}
\end{pmatrix}={}^{cc}X
$$

elde edilir.

$C_{(\overline{\overline{\beta}})}=E_{(\overline{\overline{\beta}})}$ olup $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca adapte olunmuş çatı $\left\{B_{(\overline{\beta})},C_{(\beta)},C_{(\overline{\overline{\beta}})}\right\}$ üçlüsü ile gösterilecektir. $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca adapte olunmuş $\left\{B_{(\overline{\beta})},C_{(\beta)},C_{(\overline{\overline{\beta}})}\right\}$ çatısının belirtmiş olduğu matris

$$
\widetilde{A}=\left(\widetilde{A}^{A}_{B}\right)=\begin{pmatrix}
\delta^{\alpha}_{\beta} & \partial_{\beta}V^{\alpha} & 0\\
0 & \delta^{\alpha}_{\beta} & 0\\
0 & \partial_{\beta}\xi^{\sigma_1\ldots\sigma_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_q} & \delta^{\beta_1}_{\alpha_1}\ldots\delta^{\beta_q}_{\alpha_q}\delta^{\sigma_1}_{\gamma_1}\ldots\delta^{\sigma_p}_{\gamma_p}
\end{pmatrix}
\tag{3.14}
$$

olup, burada

$$
\delta^{\alpha}_{\beta}=A^{\alpha}_{\beta}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}},
$$

eşitlikliği geçerlidir. (3.14) de yer alan $\widetilde{A}$ matrisi singüler olmadığı için tersi mevcuttur. $\left(\widetilde{A}\right)^{-1}$ ile $\widetilde{A}$ matrisinin tersi gösterilmek üzere $\left(\widetilde{A}\right)^{-1}$ matrisi

$$\left(\widetilde{A}\right)^{-1}=\left(\widetilde{A}_{C}^{B}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\delta_{\theta}^{\beta} & -\partial_{\theta}V^{\beta} & 0\\ 0 & \delta_{\theta}^{\beta} & 0\\ 0 & -\partial_{\theta}\xi_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p} & \delta_{\beta_1}^{\theta_1}\ldots\delta_{\beta_q}^{\theta_q}\delta_{\gamma_1}^{\sigma_1}\ldots\delta_{\gamma_q}^{\sigma_p}\end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

bileşenlerine sahip olup,

$$\widetilde{A}\left(\widetilde{A}\right)^{-1}=\widetilde{A}_{B}^{A}\left(\widetilde{A}_{C}^{B}\right)^{-1}=\delta_{C}^{A}=\tilde{I}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $A=\left(\overline{\alpha},\alpha,\overline{\overline{\alpha}}\right)$, $B=\left(\overline{\beta},\beta,\overline{\overline{\beta}}\right)$, $C=\left(\overline{\theta},\theta,\overline{\overline{\theta}}\right)$ şeklindedir.

İspat: (3.14) ve (3.15) kullanılarak,

$$\widetilde{A}\left(\widetilde{A}\right)^{-1}=(\widetilde{A}_{B}^{A})\left(\widetilde{A}_{C}^{B}\right)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\delta_{\beta}^{\alpha} & \partial_{\beta}V^{\alpha} & 0\\ 0 & \delta_{\beta}^{\alpha} & 0\\ 0 & \partial_{\beta}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1}\ldots\delta_{\alpha_q}^{\beta_q}\delta_{\gamma_1}^{\sigma_1}\ldots\delta_{\gamma_p}^{\sigma_p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{\theta}^{\beta} & -\partial_{\theta}V^{\beta} & 0\\ 0 & \delta_{\theta}^{\beta} & 0\\ 0 & -\partial_{\theta}\xi_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p} & \delta_{\beta_1}^{\theta_1}\ldots\delta_{\beta_q}^{\theta_q}\delta_{\gamma_1}^{\sigma_1}\ldots\delta_{\gamma_q}^{\sigma_p}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\delta_{\theta}^{\alpha} & -\partial_{\theta}V^{\alpha}+\partial_{\theta}V^{\alpha} & 0\\ 0 & \delta_{\theta}^{\alpha} & 0\\ 0 & \partial_{\theta}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p}-\partial_{\theta}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p} & \delta_{\alpha_1}^{\theta_1}\ldots\delta_{\alpha_q}^{\theta_q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_{\theta}^{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & \delta_{\theta}^{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & \delta_{\alpha}^{\theta}\end{pmatrix}=\delta_{C}^{A}=\tilde{I}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1 kullanılarak, M_n üzerinde $X\in\Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının ${}^{cc}X$ tam liftinin $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca $\left\{B_{\left(\overline{\beta}\right)},C_{(\beta)},C_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)}\right\}$ adapte olunmuş çatısına göre bileşenleri

$$ {}^{cc}X : \begin{pmatrix} L_V X \\ X \\ -L_X \xi \end{pmatrix}, $$

şeklinde tanımlıdır.

BX , CX ve $E\xi$; $T(M_n)$ deki (p,q) tipli ξ tensör alanı ile tanımlanan $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca $\left\{B_{(\overline{\beta})}, C_{(\beta)}, C_{(\overline{\overline{\beta}})}\right\}$ adapte olunmuş çatısına göre sırasıyla

$$ BX = \begin{pmatrix} X^\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; CX = \begin{pmatrix} 0 \\ X^\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \; E\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \end{pmatrix} $$

bileşenlerine sahiptir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. TM Tanjant Demet İzdüşümüyle Tanımlı (2,0) Tipli Yarı-tensör Demeti

M_n, n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold ve $\left(T(M_n),\pi_1,M_n\right)$, M_n manifoldu üzerinde tanımlı tanjant demette, $\overline{\alpha},\overline{\beta},\ldots =1,\ldots,n$; $\alpha,\beta,\ldots =n+1,\ldots,2n$; $i,j,\ldots=1,\ldots,2n$ olmak üzere, $(x^i)=\left(x^{\overline{\alpha}},x^{\alpha}\right)$ yerel koordinat sistemi incelenecek olursa, burada x^{α}'lar M_n baz manifoldunun yerel koordinatları, $x^{\overline{\alpha}}=y^{\alpha}$'lar ise $T(M_n)$ tanjant demetin fibre koordinatlarını belirtir. $(x^{\overline{\alpha}'},x^{\alpha'})$ ile, $T(M_n)$ tanjant demetindeki diğer bir yerel koordinatlar gösterilmek üzere

$$\begin{cases} x^{\overline{\alpha}'}=\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}y^{\beta}, \\ x^{\alpha'}=x^{\alpha'}\left(x^{\beta}\right), \end{cases}$$

dönüşümü bulunmaktadır. Bu dönüşüme karşılık gelen Jakobi matrisi

$$\left(A_j^{i'}\right)=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}}\right)=\begin{pmatrix} A_{\beta}^{\alpha'} & A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'}y^{\varepsilon} \\ 0 & A_{\beta}^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. Burada

$$A_{\beta}^{\alpha'}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}},\ A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'}=\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\varepsilon}}$$

eşitlikleri bulunmaktadır.

$\left(T_0^2\right)_x (M_n)\left(x=\pi_1\left(\tilde{x}\right), \tilde{x}=\left(x^{\bar{\alpha}}, x^{\alpha}\right)\in T(M_n)\right)$, x noktasındaki tensör uzayı ve $x^{\bar{\bar{\alpha}}} = t^{\beta_1\beta_2}$’ler $t\in\left(T_0^2\right)_x (M_n)$’in fibre koordinatlarını belirtmek üzere, M_n manifoldu üzerindeki yerel koordinatları

$$(x^I) = (x^{\bar{\alpha}}, x^{\alpha}, x^{\bar{\bar{\alpha}}}) \ , \ x^{\bar{\bar{\alpha}}} = t^{\beta_1\beta_2} ; \ (\bar{\bar{\alpha}}, \bar{\bar{\beta}} = 2n+1, ..., 2n+n^2 ; I, J = 1, ..., 2n+n^2)$$

şeklinde olan tanjant demet izdüşümüyle elde edilen $(2,0)$ tipli tensör demetinin, $t_0^2(M_n)$ pull-back demeti tanımlanır.

$\pi : E \to B$ fibre demeti ve $f : B' \to B$ diferensiyellenebilir dönüşüm olmak üzere indirgenmiş demet yada Whitney çarpımı olarak tanımlanan pull-back demeti

$$f^*E = \left\{(b', e) \in B' \times E \,\middle|\, f(b') = \pi(e)\right\} \subset B' \times E$$

total uzayı ile verilir (Steenrod 1951; Lawson and Michelsohn 1989; Husemoller 1994). Bu demete ait olan $\pi' : f^*E \to B'$ izdüşümü ilk değişken üzerine izdüşüm ile tanımlı olup $\pi'\left(b', e\right) = b'$ şeklindedir. Pull-back demetinin yüksek mertebeden demetlere genelleşmiş durumları ise Pontryagin demetlerini tanımlar (Pontryagin 1962). $(t_0^2(M_n), \pi_2)$ $(2,0)$ tipli yarı-tensör demetin yukarıda yer alan tanımından görülür ki $(2,0)$ tipli yarı-tensör demet, M_n üzerinde tanımlı $(2,0)$ tipli tensör demetin π_1 dönüşümü yardımıyla oluşturulan bir pull-back demetidir (Yıldırım and Salimov 2014b).

$t_0^2(M_n)$ pull-back demetinin boyutu dim $t_0^2(M_n) = 2n + n^2$ olacaktır. $t_0^2(M_n)$ pull-back demeti, M_n üzerinde doğal demet yapısına sahiptir ve bu demette

$\pi:(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha},x^{\bar{\bar{\alpha}}})\rightarrow(x^{\alpha})$ şeklinde tanımlı $\pi:t_0^2(M_n)\rightarrow M_n$ izdüşüm dönüşümü bulunmaktadır. Eğer, $\pi_2:(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha},x^{\bar{\bar{\alpha}}})\rightarrow(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha})$ ile, $\pi_2:t_0^2(M_n)\rightarrow T(M_n)$ dönüşümü ve $\pi_1:T(M_n)\rightarrow M_n$ izdüşümüyle $(2,0)$ tipli tensör demetinin pull-back demeti tanımlanırsa, $t_0^2(M_n)$; M_n üzerinde de demet yapısına sahip olacaktır (Steenrod 1951; Pontryagin 1962; Lawson and Michelsohn 1989; Salimov and Yıldırım 2015).

Buradaki izdüşüm dönüşümleri arasında $\pi=\pi_1\circ\pi_2$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $(t_0^2(M_n),\pi_1\odot\pi_2)$, kompozit demeti veya step-like demeti belirtir (Ostianu 1974; Poor 1981).

$T(M_n)$'nin yerel koordinatlarının, $t_0^2(M_n)$ yarı-tensör demeti üzerinde belirttiği koordinat dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{\bar{\alpha}'}=\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}y^{\beta}, \\ x^{\alpha'}=x^{\alpha'}\left(x^{\beta}\right), \\ x^{\bar{\bar{\alpha}}'}=t^{\beta_1'\beta_2'}=A_{\alpha_1}^{\beta_1'}A_{\alpha_2}^{\beta_2'}t^{\alpha_1\alpha_2} \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde olup (4.1) dönüşümüne karşılık gelen Jakobi matrisi

$$\bar{A}=\left(A_J^{I'}\right)=\begin{pmatrix} A_{\beta}^{\alpha'} & A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'}y^{\varepsilon} & 0 \\ 0 & A_{\beta}^{\alpha'} & 0 \\ 0 & t^{\alpha_1\alpha_2}\partial_{\beta}\left(A_{\alpha_1}^{\beta_1'}A_{\alpha_2}^{\beta_2'}\right) & A_{\alpha_1}^{\beta_1'}A_{\alpha_2}^{\beta_2'} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

bileşenlerine sahiptir. (4.2)'de belirtilen matriste

$$Det(A_{\beta}^{\alpha'})\neq 0,\ Det(A_{\beta}^{\alpha'})\neq 0,\ Det(A_{\alpha_1}^{\beta_1'}A_{\alpha_2}^{\beta_2'})\neq 0$$

eşitsizlikleri bulunup

$$Det\overline{A} \neq 0$$

olur.

Eğer,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ C & \xrightarrow[\pi]{} & D \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir diagram aşağıdaki şartları sağlıyor ise güzel kare belirtir:

i. α ve β fibre demetlerdir (vektör demetleri olması gerekmez),

ii. γ ve π vektör demetleridir,

iii. dönüşümler arasında $\pi \circ \alpha = \beta \circ \gamma$ eşitliği geçerlidir,

iv. yerel koordinatlarla ifadesi ise

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ C & \xrightarrow[\pi]{} & D \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U^n \times R^r \times G^s \times R^t & \rightarrow & U^n \times G^s \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^n \times R^r & \rightarrow & U^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (x^i, a^a, g^\lambda, b^\sigma) & \rightarrow & \left(x^i, g^\lambda\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x^i, a^a) & \rightarrow & \left(x^i\right) \end{array}$$

şeklindedir. Burada G bir manifold belirtmektedir (Etayo 1991).

Yukarıdaki tanımdan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.1: $\pi : t_0^2(M_n) \rightarrow M_n$, TM tanjant demet izdüşümüyle tanımlı $(2,0)$ tipli yarı-tensör demet ve $\pi_1 : T(M_n) \rightarrow M_n$ tanjant demet olmak üzere aşağıdaki diagram güzel kare belirtir:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
t_0^2(M_n) & \xrightarrow{\pi_2} & T(M_n) & T(M_n)\times\left(T_0^2\right)_x(M_n) & \xrightarrow{\pi_2} & T(M_n) & (x^{\bar{\alpha}}, x^{\alpha}, x^{\bar{\bar{\alpha}}}) & \xrightarrow{\pi_2} & \left(x^{\bar{\alpha}}, x^{\alpha}\right) \\
{\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\
t_0^2(M_n) & \xrightarrow[\pi]{} & M_n & T(M_n)\times\left(T_0^2\right)_x(M_n) & \xrightarrow[\pi]{} & M_n & (x^{\bar{\alpha}}, x^{\alpha}, x^{\bar{\bar{\alpha}}}) & \xrightarrow[\pi]{} & \left(x^{\alpha}\right)
\end{array}
$$

$F(M_n)$, M_n üzerindeki C^∞ sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere, M_n'deki (p,q) tipli tüm tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülü $\Im_q^p(M_n)=\sum_{p,q=0}^{\infty}\Im_q^p(M_n)$ ile gösterilir. $F(T(M_n))$, $T(M_n)$ üzerindeki C^∞ sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere $T(M_n)$'deki (p,q) tipli tüm tensör alanlarının $F(T(M_n))$ üzerindeki modülü $\Im_q^p(T(M_n))=\sum_{p,q=0}^{\infty}\Im_q^p(T(M_n))$ ile gösterilir.

4.2. Tensör Alanlarının Dikey Lifti ve γ – Operatörü

$A\in\Im_0^2(T(M_n))$ olmak üzere,

$$
{}^{vv}A=\begin{pmatrix} {}^{vv}A^{\bar{\alpha}} \\ {}^{vv}A^{\alpha} \\ {}^{vv}A^{\bar{\bar{\alpha}}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A^{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix}, \tag{4.3}
$$

ile tanımlı ${}^{vv}A\in\Im_0^1(t_0^2(M_n))$ vektör alanına $A\in\Im_0^2(T(M_n))$'nin $(2,0)$ tipli yarı tensör demete dikey lifti denir. Burada ${}^{vv}A$'nın (4.3) deki gibi bileşenlerinin olduğu (4.2) dönüşümü yardımıyla ${}^{vv}A'=\bar{A}({}^{vv}A)$ gösterilebilir.

Keyfi $\varphi\in\Im_1^1(M_n)$ için (4.2) dönüşümü yardımıyla $(\gamma\varphi)'=\bar{A}(\gamma\varphi)$ olduğu kolaylıkla ispatlanabilir. Burada $\pi^{-1}(U)$'da ki $\gamma\varphi$ vektör alanı

$$\gamma\varphi = \left(\gamma\varphi\right)^{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\varphi_{\varepsilon}^{\alpha_1} + t^{\alpha_1\varepsilon}\varphi_{\varepsilon}^{\alpha_2} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

bileşenlerine sahiptir. (4.2)'den, her bir $\pi^{-1}(U) \subset t_0^2(M_n)$ 'de tanımlı $\gamma\varphi$ vektör alanının, $t_q^p(M_n)$ üzerinde global olarak dikey vektör alanı belirttiği görülür. Keyfi $\varphi \in \Im_1^1(T(M_n))$ için (4.2) yardımıyla $(\tilde{\gamma}\varphi)' = \overline{A}(\tilde{\gamma}\varphi)$ eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Burada $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$\tilde{\gamma}\varphi = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\varphi_{\varepsilon}^{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

bileşenlerine sahiptir.

4.3. Vektör Alanlarının Tam Liftleri

$X \in \Im_0^1(T(M_n))$, $X = X^{\alpha}\partial_{\alpha}$ ile verilen vektör alanı için, X 'in tanjant demete olan ${}^{c}X$ tam lifti ${}^{c}X = X^{\alpha}\partial_{\alpha} + (y^{\beta}\partial_{\beta}X^{\alpha})\partial_{\overline{\alpha}}$ şeklinde tanımlıdır (Yano and Ishiara 1973).

${}^{c}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının $t_0^2(M_n)$ pull-back demetine ${}^{CC}X$ tam lifti indirgenmiş koordinatlarla

$${}^{cc}X = \begin{pmatrix} {}^{cc}X^{\overline{\beta}} \\ {}^{cc}X^{\beta} \\ {}^{cc}X^{\overline{\overline{\beta}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \\ X^{\beta} \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_1} + t^{\alpha_1\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_2} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

ile tanımlı olup (4.2) dönüşümü kullanılarak ${}^{cc}X' = \overline{A}({}^{cc}X)$ eşitliği ispatlanabilir.

İspat: Keyfi $X \in \Im_0^1(M_n)$ için $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t_0^2(M_n)$ yarı tensör demeti üzerinde tanımlı $({}^{CC}X)^J$ 'nin bileşenleri

$$ {}^{cc}X = \begin{pmatrix} {}^{cc}X^{\overline{\beta}} \\ {}^{cc}X^{\beta} \\ {}^{cc}X^{\overline{\overline{\beta}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \\ X^{\beta} \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_1} + t^{\alpha_1\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_2} \end{pmatrix}, $$

olmak üzere (4.2)'den $\left({}^{cc}X\right)^J = A_I^J ({}^{cc}X)^I$ eşitliği kullanılarak

$$ \left({}^{cc}X\right)^J = A_{\overline{\alpha}}^J ({}^{cc}X)^{\overline{\alpha}} + A_{\alpha}^J ({}^{cc}X)^{\alpha} + A_{\overline{\overline{\alpha}}}^J ({}^{cc}X)^{\overline{\overline{\alpha}}} $$

yazılır. Burada (4.2) kullanılarak $J = \overline{\beta}$ için,

$$ \begin{aligned} \left({}^{cc}X\right)^{\overline{\beta}} &= A_{\overline{\alpha}}^{\overline{\beta}} ({}^{cc}X)^{\overline{\alpha}} + A_{\alpha}^{\overline{\beta}} ({}^{cc}X)^{\alpha} + A_{\overline{\overline{\alpha}}}^{\overline{\beta}} ({}^{cc}X)^{\overline{\overline{\alpha}}} \\ &= A_{\alpha}^{\beta}\left(y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right) + \left(A_{\beta\varepsilon}^{\alpha} y^{\varepsilon}\right) X^{\alpha} \\ &= y^{\varepsilon} A_{\alpha}^{\beta}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right) + y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}A_{\alpha}^{\beta}\right) X^{\alpha} \\ &= y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\left(A_{\alpha}^{\beta}X^{\alpha}\right) \\ &= y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \end{aligned} $$

bulunur. $J = \beta$ için,

$$ \left({}^{cc}X\right)^{\beta} = A_{\overline{\alpha}}^{\beta} ({}^{cc}X)^{\overline{\alpha}} + A_{\alpha}^{\beta} ({}^{cc}X)^{\alpha} + A_{\overline{\overline{\alpha}}}^{\beta} ({}^{cc}X)^{\overline{\overline{\alpha}}} $$

$$= A_{\alpha}^{\beta} X^{\alpha} = X^{\beta}$$

bulunur. $J = \overline{\overline{\beta}}$ için,

$$\left({}^{cc}X \right)^{\overline{\overline{\beta}}} = t^{\varepsilon\alpha_2} \left(\partial_{\varepsilon} X^{\alpha_1} \right) A_{\alpha_1}^{\beta_1} + t^{\varepsilon\alpha_2} \left(\partial_{\varepsilon} A_{\alpha_1}^{\beta_1} \right) X^{\alpha_1} + t^{\alpha_1\varepsilon} \left(\partial_{\varepsilon} X^{\alpha_2} \right) A_{\alpha_2}^{\beta_2} + t^{\alpha_1\varepsilon} \left(\partial_{\varepsilon} A_{\alpha_2}^{\beta_2} \right) X^{\alpha_2}$$

$$= \sum_{p=1}^{4} a_p \,,$$

olur. Burada

$$a_1 = t^{\varepsilon\alpha_2} \left(\partial_{\varepsilon} X^{\alpha_1} \right) A_{\alpha_1}^{\beta_1} ,$$

$$a_2 = t^{\varepsilon\alpha_2} \left(\partial_{\varepsilon} A_{\alpha_1}^{\beta_1} \right) X^{\alpha_1} ,$$

$$a_3 = t^{\alpha_1\varepsilon} \left(\partial_{\varepsilon} X^{\alpha_2} \right) A_{\alpha_2}^{\beta_2} ,$$

$$a_4 = t^{\alpha_1\varepsilon} \left(\partial_{\varepsilon} A_{\alpha_2}^{\beta_2} \right) X^{\alpha_2}$$

ile tanımlıdır. Ayrıca

$$A_I^{\overline{\overline{\beta}}} \left({}^{cc}X \right)^I = A_{\overline{\alpha}}^{\overline{\overline{\beta}}} \left({}^{cc}X \right)^{\overline{\alpha}} + A_{\alpha}^{\overline{\overline{\beta}}} \left({}^{cc}X \right)^{\alpha} + A_{\overline{\overline{\alpha}}}^{\overline{\overline{\beta}}} \left({}^{cc}X \right)^{\overline{\overline{\alpha}}}$$

$$= X^{\alpha} t^{\alpha_1\alpha_2} \left(\partial_{\alpha} A_{\alpha_1}^{\beta_1} \right) A_{\alpha_2}^{\beta_2} + X^{\alpha} t^{\alpha_1\alpha_2} A_{\alpha_1}^{\beta_1} \partial_{\alpha} A_{\alpha_2}^{\beta_2}$$

$$+ A_{\alpha_1}^{\beta_1} A_{\alpha_2}^{\beta_2} t^{\varepsilon\alpha_2} \partial_{\varepsilon} X^{\alpha_1} + A_{\alpha_1}^{\beta_1} A_{\alpha_2}^{\beta_2} t^{\alpha_1\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\alpha_2}$$

$$= \sum_{q=1}^{4} b_q \,,$$

olup burada,

$$b_1 = X^{\alpha} t^{\alpha_1 \alpha_2} \left(\partial_{\alpha} A^{\beta_1}_{\alpha_1} \right) A^{\beta_2}_{\alpha_2} \,,$$

$$b_2 = X^{\alpha} t^{\alpha_1 \alpha_2} A^{\beta_1}_{\alpha_1} \partial_{\alpha} A^{\beta_2}_{\alpha_2} \,,$$

$$b_3 = A^{\beta_1}_{\alpha_1} A^{\beta_2}_{\alpha_2} t^{\varepsilon \alpha_2} \partial_{\varepsilon} X^{\alpha_1} \,,$$

$$b_4 = A^{\beta_1}_{\alpha_1} A^{\beta_2}_{\alpha_2} t^{\alpha_1 \varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\alpha_2}$$

ile tanımlıdır. Tüm tanımlı eşitliklerden

$$a_1 = b_3 \,,\; a_2 = b_1 \,,\; a_3 = b_2 \,,\; a_4 = b_4$$

elde edilir.

4.4. Vektör Alanlarının Yatay Lifti

$X \in \Im^1_0(T(M_n))$, $X = X^{\alpha} \partial_{\alpha}$ ile verilen vektör alanı için, X 'in $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ indirgenmiş koordinatlara göre $t^2_0(M_n)$ yarı tensör demetine olan yatay lifti

$$^{HH}X = \begin{pmatrix} -\Gamma^{\beta}_{\alpha} X^{\alpha} \\ X^{\beta} \\ -\Gamma^{\alpha_1}_{\sigma\varepsilon} t^{\varepsilon \alpha_2} X^{\sigma} - \Gamma^{\alpha_2}_{\sigma\varepsilon} t^{\alpha_1 \varepsilon} X^{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

şeklindeki bileşenlere sahip olup (4.2) dönüşümü yardımıyla $^{HH}X' = \bar{A}\left(^{HH}X \right)$ olduğu kolaylıkla ispatlanabilir. ^{HH}X vektör alanına X vektör alanının $t^2_0(M_n)$ yarı-tensör demetine olan yatay lifti denir. Burada

$$\Gamma_{\alpha}^{\beta} = y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \alpha}^{\ \beta}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 4.4.1: $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ için,

$${}^{cc}X - {}^{HH}X = \gamma(\hat{\nabla}X) + \gamma(\nabla X)$$

olur. Burada $\hat{\nabla}$, $\hat{\Gamma}_{\beta\theta}^{\alpha} = \Gamma_{\theta\beta}^{\alpha}$ eşitliği ile verilen simetrik afin konneksiyondur.

İspat: (4.4), (4.5), (4.6) ve (4.7) kullanılarak,

$${}^{cc}X - {}^{HH}X = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \\ X^{\beta} \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_1} + t^{\alpha_1\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\Gamma_{\alpha}^{\beta}X^{\alpha} \\ X^{\beta} \\ -\Gamma_{\sigma\varepsilon}^{\alpha_1}t^{\varepsilon\alpha_2}X^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\varepsilon}^{\alpha_2}t^{\alpha_1\varepsilon}X^{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} + y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \alpha}^{\ \beta}X^{\alpha} \\ 0 \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_1} + t^{\alpha_1\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_2} + \Gamma_{\sigma\varepsilon}^{\alpha_1}t^{\varepsilon\alpha_2}X^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\varepsilon}^{\alpha_2}t^{\alpha_1\varepsilon}X^{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_1} + \Gamma_{\sigma\varepsilon}^{\alpha_1}t^{\varepsilon\alpha_2}X^{\sigma} + t^{\alpha_1\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_2} + \Gamma_{\sigma\varepsilon}^{\alpha_2}t^{\alpha_1\varepsilon}X^{\sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\beta} + \Gamma_{\varepsilon\ \alpha}^{\ \beta}X^{\alpha}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_1} + \Gamma_{\sigma\varepsilon}^{\alpha_1}X^{\sigma}\right) + t^{\alpha_1\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_2} + \Gamma_{\sigma\varepsilon}^{\alpha_2}X^{\sigma}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\beta} + \Gamma_{\varepsilon\ \alpha}^{\ \beta}X^{\alpha}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_1} + \Gamma_{\varepsilon\sigma}^{\alpha_1}X^{\sigma}\right) + t^{\alpha_1\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_2} + \Gamma_{\varepsilon\sigma}^{\alpha_2}X^{\sigma}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left(\nabla_{\varepsilon}X^{\beta}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\left(\hat{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{X}^{\alpha_1}\right) + t^{\alpha_1\varepsilon}\left(\hat{\nabla}_{\varepsilon}\widetilde{X}^{\alpha_2}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left(\nabla_{\varepsilon}X^{\beta}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(\hat{\nabla}X) + \gamma(\nabla X)$$

eşitliği elde edilir.

4.5. (2,0) Tipli Yarı Tensör Demetlerde Kesitler

$\xi \in \Im_0^2(M_n)$, M_n üzerinde $(2,0)$ tipli bir tensör alanı olmak üzere $x \to \xi_x$ eşliği, $t_0^2(M_n)$ yarı-tensör demetinin β_ξ kesit dönüşümünü belirtir. Burada ξ_x, $x \in T(M_n)$ 'deki ξ'nin değeridir.

$\sigma_\xi : M_n \to T_0^2(M_n)$, $\widetilde{\pi} \circ \sigma_\xi = I_{(M_n)}$, olmak üzere $\left(T_0^2(M_n), \widetilde{\pi}, M_n\right)$, tensör demetinin kesit dönüşümünü belirtsin. $\left(t_0^2(M_n), \pi_2, T(M_n)\right)$ yarı-tensör demetinin $\beta_\xi : T(M_n) \to t_0^2(M_n)$ birleşik kesit dönüşümü

$$\beta_\xi\left(x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}\right) = \left(x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}, \sigma_\xi \circ \pi_1\left(x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}\right)\right) = \left(x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}, \sigma_\xi\left(x^{\alpha}\right)\right) = \left(x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}, \xi^{\alpha_1\alpha_2}\left(x^{\beta}\right)\right)$$

şeklinde tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973; Lawson and Michelsohn 1989; Husemoller 1994; Isham 1999).

$\xi^{\alpha_1\alpha_2}\left(x^{\alpha}\right)$ yerel bileşenlerine sahip olan $(2,0)$ tipli ξ tensör alanı için $t_0^2(M_n)$ yarı-tensör demetinin $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$ kesitine ait $x^B = (x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{\overline{\beta}} = y^{\beta} = V^{\beta}\left(x^{\alpha}\right), \\ x^{\beta} = x^{\beta}, \\ x^{\overline{\overline{\beta}}} = \xi^{\alpha_1\alpha_2}\left(x^{\alpha}\right), \end{cases} \tag{4.8}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır.

$x^{\overline{\alpha}} = y^{\alpha}$’lar parametreler seçilmek üzere, (4.8) dönüşümünün $x^{\overline{\alpha}} = y^{\alpha}$’lara göre diferensiyeli alınırsa bileşenleri

$$B_{(\overline{\theta})} = \frac{\partial x^{B}}{\partial x^{\overline{\theta}}} = \partial_{\overline{\theta}} x^{B} = \begin{pmatrix} \partial_{\overline{\theta}} V^{\beta} \\ \partial_{\overline{\theta}} x^{\beta} \\ \partial_{\overline{\theta}} \xi^{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix},$$

ile tanımlı olan $B_{(\overline{\theta})}$ $(\overline{\theta} = 1,...,n)$ vektör alanları elde edilmiş olur. $B_{(\overline{\theta})}$ vektör alanları $\beta_{\theta}\left(T(M_n)\right)$ kesitine teğet olup burada $B_{(\overline{\theta})}$ vektör alanları $t_0^2(M_n)$’de $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$B_{(\overline{\theta})} : \left(B_{(\overline{\theta})}^{B}\right) = \begin{pmatrix} \delta_{\overline{\theta}}^{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bileşenlerine sahip olur. Burada

$$\delta_{\overline{\theta}}^{\beta} = A_{\overline{\theta}}^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\overline{\theta}}}$$

eşitliği ile tanımlıdır. $X \in \Im_0^1\left(T(M_n)\right)$, $X = X^{\alpha}\partial_{\alpha}$ ile tanımlı bir vektör alanı belirtmek üzere $t_0^2(M_n)$’de $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre BX vektör alanı

$$BX : \left(B^B_{(\overline{\theta})} X^{\overline{\theta}} \right) = \begin{pmatrix} \delta^B_{\overline{\theta}} X^{\overline{\theta}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^B_{\overline{\theta}} X^{\overline{\theta}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

yerel bileşenleriyle ifade edilmektedir. BX , $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca global olarak tanımlı olup (4.8) dönüşümünün x^{θ}'lara göre diferensiyeli alınırsa bileşenleri

$$C_{(\theta)} = \frac{\partial x^B}{\partial x^{\theta}} = \partial_{\theta} x^B = \begin{pmatrix} \partial_{\theta} x^{\overline{\beta}} \\ \partial_{\theta} x^{\beta} \\ \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \alpha_2} \end{pmatrix},$$

ile verilen $C_{(\theta)}$ $(\theta = n+1,...,2n)$ vektör alanları bulunmuş olur. Burada $C_{(\theta)}$ vektör alanları $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesitine teğet olmaktadır.

Aynı zamanda $C_{(\theta)}$ vektör alanları $t^2_0(M_n)$'de $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$C_{(\theta)} : \left(C^B_{(\theta)} \right) = \begin{pmatrix} \partial_{\theta} V^{\beta} \\ \delta^{\beta}_{\theta} \\ \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \alpha_2} \end{pmatrix},$$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$\delta^{\beta}_{\theta} = A^{\beta}_{\theta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\theta}}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

$X \in \Im_0^1(T(M_n))$, $X = X^{\alpha}\partial_{\alpha}$ ile tanımlı bir vektör alanı belirtmek üzere $t_0^2(M_n)$'de $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre CX vektör alanı

$$CX : \left(C_{(\theta)}^{B} X^{\theta}\right) = \begin{pmatrix} X^{\theta}\partial_{\theta}V^{\beta} \\ X^{\beta} \\ X^{\theta}\partial_{\theta}\xi^{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

şeklindeki yerel bileşenlere sahiptir. CX , $\beta_{\xi}(T(M_n))$ kesiti boyunca global olarak tanımlıdır. (4.8) dönüşümünde $t^{\alpha_1\alpha_2}$ 'ler

$$\begin{cases} x^{\overline{\beta}} = y^{\beta} = sbt., \\ x^{\beta} = sbt., \\ x^{\overline{\overline{\beta}}} = t^{\alpha_1\alpha_2} = t^{\alpha_1\alpha_2}, \end{cases}$$

parametreler olarak seçilmek üzere $t^{\alpha_1\alpha_2}$ 'lere göre (4.8) dönüşümünün diferensiyeli alınırsa bileşenleri,

$$E_{(\overline{\overline{\theta}})} : \left(E_{(\overline{\overline{\theta}})}^{B}\right) = \partial_{\overline{\overline{\theta}}} x^{B} = \begin{pmatrix} \partial_{\overline{\overline{\theta}}} y^{\beta} \\ \partial_{\overline{\overline{\theta}}} x^{\beta} \\ \partial_{\overline{\overline{\theta}}} t^{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1}\delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

şeklinde olan, $E_{(\overline{\overline{\theta}})}$ $(\overline{\theta} = 2n+1,...,2n+n^2)$ vektör alanları bulunmuş olur. Burada δ, kronecker deltasını belirtmektedir. Ayrıca $E_{(\overline{\overline{\theta}})}$ vektör alanları $T_0^2(M_n)$ tensör demetinin fibresine teğettir. M_n üzerinde $(2,0)$ tipli ξ tensör alanları

$$\xi = \xi^{\gamma_1\gamma_2}\partial_{\gamma_1} \otimes \partial_{\gamma_2}$$

yerel koordinat bileşenlerine sahip olmak üzere, $E\xi$ vektör alanları

$$E\xi : \left(E^{B}_{(\bar{\theta})} \xi^{\gamma_1\gamma_2} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlıdır. $E\xi$ vektör alanları $T_0^2(M_n)$ tensör demetinin fibresine teğettir.

Teorem 4.5.1: X , $T(M_n)$ üzerindeki bir vektör alanı olmak üzere, ${}^{CC}X$ tam lifti $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca

$${}^{cc}X = CX + B\left(L_V X\right) + E\left(-L_X \xi\right),$$

eşitliği ile tanımlıdır.

İspat: (4.6), (4.9), (4.10) ve (4.11) kullanılarak

$$CX + B\left(L_V X\right) + E\left(-L_X \xi\right) = \begin{pmatrix} X^\theta \partial_\theta V^\beta \\ X^\beta \\ X^\theta \partial_\theta \xi^{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^\alpha \partial_\alpha X^\beta - X^\alpha \partial_\alpha V^\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -X^\theta \partial_\theta \xi^{\alpha_1\alpha_2} + \xi^{\varepsilon\alpha_2} \partial_\varepsilon X^{\alpha_1} + \xi^{\alpha_1\varepsilon} \partial_\varepsilon X^{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V^\alpha \partial_\alpha X^\beta \\ X^\beta \\ \xi^{\varepsilon\alpha_2} \partial_\varepsilon X^{\alpha_1} + \xi^{\alpha_1\varepsilon} \partial_\varepsilon X^{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

$$= {}^{cc}X$$

eşitliği elde edilir.

$C_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)} = E_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)}$ eşitliği kullanılarak, $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$'nin adapte olmuş çatısı $\left\{B_{\left(\overline{\beta}\right)}, C_{(\beta)}, C_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)}\right\}$ şeklinde yazılabilir. $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$'nin $\left\{B_{\left(\overline{\beta}\right)}, C_{(\beta)}, C_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)}\right\}$ adapte olmuş çatısı matris dilinde

$$\widetilde{A} = \left(\widetilde{A}_B^A\right) = \begin{pmatrix} \delta_\beta^\alpha & \partial_\beta V^\alpha & 0 \\ 0 & \delta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & \partial_\beta \xi_{\alpha_1\alpha_2}^{\sigma_1\sigma_2} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1}\delta_{\alpha_2}^{\beta_2} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

ile ifade edilmektedir. (4.12)'deki matris tersinir (regüler) olup $\widetilde{A}$ matrisinin tersi olan $\left(\widetilde{A}\right)^{-1}$ matrisi

$$\left(\widetilde{A}\right)^{-1} = \left(\widetilde{A}_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_\theta^\beta & -\partial_\theta V^\beta & 0 \\ 0 & \delta_\theta^\beta & 0 \\ 0 & -\partial_\theta \xi_{\beta_1\beta_2}^{\sigma_1\sigma_2} & \delta_{\beta_1}^{\theta_1}\delta_{\beta_2}^{\theta_2} \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

şeklindeki bileşenlerine sahiptir. Burada $\widetilde{A}\left(\widetilde{A}\right)^{-1} = (\widetilde{A}_B^A)\left(\widetilde{A}_C^B\right)^{-1} = \delta_C^A = \widetilde{I}$ olup; $A = \left(\overline{\alpha}, \alpha, \overline{\overline{\alpha}}\right)$, $B = \left(\overline{\beta}, \beta, \overline{\overline{\beta}}\right)$, $C = \left(\overline{\theta}, \theta, \overline{\overline{\theta}}\right)$ indisleri ile tanımlıdır.

İspat: (4.12) ve (4.13) kullanılarak

$$\widetilde{A}\left(\widetilde{A}\right)^{-1} = (\widetilde{A}_B^A)\left(\widetilde{A}_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_\beta^\alpha & \partial_\beta V^\alpha & 0 \\ 0 & \delta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & \partial_\beta \xi_{\alpha_1\alpha_2}^{\sigma_1\sigma_2} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1}\delta_{\alpha_2}^{\beta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\theta^\beta & -\partial_\theta V^\beta & 0 \\ 0 & \delta_\theta^\beta & 0 \\ 0 & -\partial_\theta \xi_{\beta_1\beta_2}^{\sigma_1\sigma_2} & \delta_{\beta_1}^{\theta_1}\delta_{\beta_2}^{\theta_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_\theta^\alpha & -\partial_\theta V^\alpha + \partial_\theta V^\alpha & 0 \\ 0 & \delta_\theta^\alpha & 0 \\ 0 & \partial_\theta \xi_{\alpha_1\alpha_2}^{\sigma_1\sigma_2} - \partial_\theta \xi_{\alpha_1\alpha_2}^{\sigma_1\sigma_2} & \delta_{\alpha_1}^{\theta_1}\delta_{\alpha_2}^{\theta_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_\theta^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\theta^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\alpha^\theta \end{pmatrix} = \delta_C^A = \tilde{I}$$

eşitliği elde edilir. Teorem 4.5.1 kullanılarak, $\left\{ B_{(\overline{\beta})}, C_{(\beta)}, C_{(\overline{\overline{\beta}})} \right\}$ adapte olmuş çatısına göre $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca ${}^{cc}X$ tam lifti

$${}^{cc}X : \begin{pmatrix} L_V X \\ X \\ -L_X \xi \end{pmatrix},$$

şeklindeki bileşenlere sahip olacaktır.

$A \in \Im_0^2(T(M_n))$ için, $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$'nin $\left\{ B_{(\overline{\beta})}, C_{(\beta)}, C_{(\overline{\overline{\beta}})} \right\}$ adapte olmuş çatısına göre ${}^{vv}A \in \Im_0^1(t_0^2(M_n))$ vektör alanı

$${}^{vv}A = \begin{pmatrix} {}^{vv}A^{\overline{\alpha}} \\ {}^{vv}A^{\alpha} \\ {}^{vv}A^{\overline{\overline{\alpha}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A^{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix}$$

bileşenleriyle tanımlı olup ${}^{vv}A' = \widetilde{A}\left({}^{vv}A\right)$ eşitliği (4.3) ve (4.12) kullanılarak kolaylıkla ispatlanabilir.

$\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere, $\left\{B_{(\overline{\beta})}, C_{(\beta)}, C_{(\overline{\overline{\beta}})}\right\}$ adapte olmuş çatısına göre $\gamma\varphi$ vektör alanının koordinatları ise

$$\gamma\varphi = (\gamma\varphi)^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{\varepsilon\alpha_2}\varphi_\varepsilon^{\alpha_1} + t^{\alpha_1\varepsilon}\varphi_\varepsilon^{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

şeklindeki bileşenler ile ifade edilir. (4.4) ve (4.12) kullanılarak $(\gamma\varphi)' = \widetilde{A}(\gamma\varphi)$ olduğu kolaylıkla ispatlanabilir.

BX, CX ve $E\xi$ vektör alanları, $T(M_n)$ tanjant demetindeki $(2,0)$ tipli ξ tensör alanları ile tanımlı $\beta_\xi(T(M_n))$ kesitinin $\left\{B_{(\overline{\beta})}, C_{(\beta)}, C_{(\overline{\overline{\beta}})}\right\}$ adapte olmuş çatısına göre sırasıyla

$$BX = \begin{pmatrix} X^\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; CX = \begin{pmatrix} 0 \\ X^\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \; E\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahip olmaktadır.

5. SONUÇ

(1) Sunulan bu tezde ilk olarak TM tanjant demet izdüşümü yardımıyla $(2,0)$ tipli tensör demetinin pull-back demeti olan $(2,0)$ tipli yarı-tensör demetin tanımı yapıldı.

(2) $(2,0)$ tipli yarı-tensör demete, vektör alanlarının tam ve yatay liftleri tanımlanarak, bunların geometrik problemleri incelendi.

(3) $(2,0)$ tipli yarı-tensör demette kesit dönüşümleri incelendi.

KAYNAKLAR

Cengiz, N and Salimov A., 2002. Complete lifts of derivations to tensor bundles. Bol. Soc. Mat. Mexicana, 8, No. 3, 75-82.

Dombrowski, P., 1962. On the Geometry of the Tangent Bundle. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 210: 73-88.

Duc, T.V., 1979. Structure presque-transverse. J. Diff . Geom., 14, No:2, 215-219.

Etayo, F., 1991. The geometry of good squares of vector bundles, Riv. Mat. Univ. Parma 17, 131–147.

Fattaev H., 2009. The Lifts of Vector Fields to the Semitensor Bundle of the Type (2, 0), Journal of Qafqaz University, 25, no. 1, 136-140.

Gezer A. and Salimov A.A., 2008. Almost complex structures on the tensor bundles, Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci. 33, no. 2, 283–296.

Husemoller, D. 1994., Fibre Bundles. Springer, New York.

Isham, C.J.,1999. Modern differential geometry for physicist. World Scientific.

Lawson, H.B. and Michelsohn, M.L., 1989. Spin Geometry. Princeton University Press., Princeton.

Ledger A.J. and Yano, K. 1967. Almost complex structure on tensor bundles, J. Dif. Geom. 1, 355-368.

Ledger, A.J. and Yano, K., 1965. The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space. Jour. London Math. Soc., 40, 487-492.

Ostianu, N.M., 1974. Step-fibred spaces. Tr. Geom. Sem., 5, VINITI, 259–309, Moscow.

Pontryagin, L.S. 1947., Characteristic cycles on differentiable manifolds. Rec. Math. Mat. Sbornik., 2, 233-284.

Pontryagin, L.S., 1962. Characteristic classes of differentiable manifolds. Transl. Amer. Math. Soc., 7, 279-331.

Poor, W.A., 1981. Differential Geometric Structures. McGraw-Hill, New York.

Ricci, G. and Levi-Civita, T., 1900. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Mathematische Annalen. 54 (1–2): 125–201.

Salimov, A.A., 2013. Tensor Operators and their Applications. Nova Science Publ. New York.

Salimov, A.A. and Kadıoğlu E., 2000. Lifts of Derivations to the Semitangent Bundle. Turk J. Math, 24, 259-266. Ata Uni.

Steenrod, N., 1951. The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press. Princeton.

Vishnevskii, V.V., 2002. Integrable affinor structures and their plural interpretations. Geometry, 7.J. Math. Sci., 108, no. 2, 151-187, New York.

Voigt, W., 1898. The fundamental physical properties of crystals in an elementary presentation, p. 20, Leipzig, Germany.

Yano, K. and Ishihara, S. 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker, Inc. New York.

Yano, K. and Ledger, A.J., 1965. The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space. J. London Math. Soc, 40: 487-492.

Yıldırım, F. 2015. On a special class of semi-cotangent bundle. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. no. 1, 25-38.

Yıldırım, F. and Salimov, A., 2014. Horizontal lift problems in a special class of semi-cotangent bundle. IECMSA-2014 Vienna, Austria.

Yıldırım, F. and Salimov, A., 2014. Semi-cotangent bundle and problems of lifts. Turk J. Math, 38, 325-339.

Yıldırım, F. and Salimov, A., 2017. A pull-Back bundle of tensor bundles defined by projection of the tangent bundle, Ordu University Journal of Science and Technology, 7 (2), 353-366.

ÖZGEÇMİŞ

Furkan TOPRAK 1992 yılında Erzurum'da dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Lise öğreniminide Erzurum Hacı Sami Boydak Lisesi'nde tamamladı. 2010 yılında girdiği Uudağ Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2014 yılında mezun oldu. 2015 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı.