

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANA BİLİM DALI

144662
Mehmet Suphi ÖZÇOMAK

144662

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL PROSES KONTROL
METOTLARI (HOTELLING T^2 , MCUSUM, MEWMA)
-DÖKÜM SANAYİNDE BİR UYGULAMA-

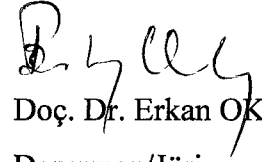
DOKTORA TEZİ

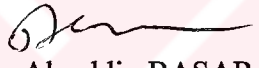
TEZ YÖNETİCİSİ
Doç. Dr. Erkan OKTAY

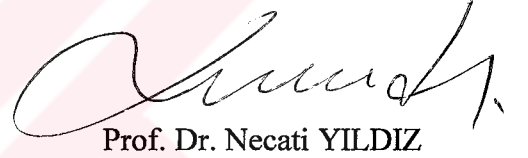
ERZURUM – 2004

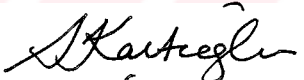
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Bu çalışma, İşletme Anabilim Dalının Sayısal Yöntemler Bilim Dalında jürimiz tarafından Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.


Doç. Dr. Erkan OKTAY
Danışman/Jüri


Prof. Dr. Alaaddin BAŞAR
Jüri


Prof. Dr. Necati YILDIZ
Jüri


Prof. Dr. Sıbkat KAÇTIOĞLU
Jüri


Prof. Dr. Mansur ATALAY
Jüri

Yukarıdaki imzalar adı geçen öğretim üyelerine aittir. 05 / 03 / 2004


Prof. Dr. Vahdettin BAŞÇI
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

SAYFA NO

ÖZET	V
ABSTRACT.....	VI
TEŞEKKÜR	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ	VIII
TABLolar LİSTESİ	XII
GİRİŞ.....	1

BİRİNCİ BÖLÜM

KALİTE KONTROLÜ VE İSTATİSTİKSEL PROSES KONTROLÜ

1.1. Kalite Kontrolü.....	6
1.1.1. Kalite Kontrolünün Amaç Ve Faydaları	8
1.1.2. Kalite Kontrolünün İstatistik Bilimi İle İlgisi	10
1.2. İstatistiksel Proses Kontrolü (İPK).....	12
1.2.1. İstatistiksel Proses Kontrol Metotları.....	14
1.2.2. Çok Değişkenli İstatistiksel Proses Kontrol Metotları.....	16
1.2.2.1. Çok Değişkenli İstatistiksel Proses Kontrol Metotlarının Özellikleri	18

İKİNCİ BÖLÜM

HOTELLİNG T² KONTROL GRAFİKLERİ

2.1. Shewhart Kontrol Grafikleri.....	20
2.1.1. Shewhart Kontrol Grafiklerinin Düzenlenmesi	21
2.1.2. Ortalama ($\bar{X}$) Ve Değişim Aralığı (R) Kontrol Grafikleri.....	22
2.1.3. Bireysel Gözlem Değerleri Ve Hareketli Değişim Aralığı Kontrol Grafikleri.....	30
2.2. Hotelling T ² Kontrol Grafikleri	35
2.2.1. Hotelling T ² Testi.....	36
2.2.2. T ² İstatistiğinin Dağılım Özellikleri	39
2.2.3. Hotelling T ² Kontrol Grafiğinin Düzenlenmesi.....	43
2.2.4. Anakütle Parametrelerinin Bilinmemesi Durumunda T ² Kontrol Grafiği	48
2.2.5. Anakütle Parametrelerinin Bilinmesi Durumunda T ² Kontrol Grafiği.....	52
2.2.6. Bireysel Gözlemler İçin Düzenlenen T ² Kontrol Grafiği	54

2.2.7. Alt Grup Verileri İçin Düzenlenen T^2 Kontrol Grafiği.....	60
2.2.8. Hotelling T^2 Kontrol Grafiğinde Ortalama İşletim Uzunluğu (ARL).....	68
2.2.9. Hotelling T^2 Kontrol Grafiğinde Kontrol Dışı Sinyalinin Tespiti Ve Yorumlanması.....	73
2.2.9.1. Mason-Young-Tracy'nin T^2 İstatistiğini Ayırıştırma Metodu.....	74
2.2.9.1.1. Ayırıştırma Metodundaki T^2 Teriminin Hesaplanması	76
2.2.9.2. Kontrol Dışı Sinyalinin Yorumlanması	79

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ÇOK DEĞİŞKENLİ KÜMÜLATİF TOPLAM (MCUSUM) KONTROL METOTLARI

3.1. Tek Değişkenli Kümülatif Toplam (CUSUM) Kontrol Grafikleri	83
3.1.1. Tek Değişkenli CUSUM Kontrol Grafiklerinin Kullanımı	84
3.1.2. Tek Değişkenli CUSUM Kontrol Grafiğinin Düzenlenmesi	85
3.1.3. Tek Yönlü CUSUM Kontrol Grafikleri	87
3.1.4. İki Yönlü CUSUM Kontrol Grafikleri.....	89
3.1.5. V Maskesi Prosedürü	92
3.2. Çok Değişkenli Kümülatif Toplam (MCUSUM) Kontrol Metotları	99
3.2.1. Woodall ve Ncube 'nin Çok Değişkenli CUSUM metodu (Tek Değişkenli CUSUM Kontrol Grafiklerinin Eş-Zamanlı Kullanımı	99
3.2.2. Ardışık Olasılık Oran Testine Dayalı Çok Değişkenli CUSUM Metotları .	101
3.2.2.1. Alwan'ın Ardışık Olasılık Oran Testine Dayalı Çok Değişkenli CUSUM Metodu.....	104
3.2.2.2. Ardışık Olasılık Oran Testine Dayalı Çok Değişkenli CUSUM Metodunun Çok Değişkenli Normal Dağılıma Sahip Bir Prosese Uygulanması	108
3.2.2.3. Ardışık Olasılık Oran Testine Dayalı Çok Değişkenli CUSUM Metodunun Çok Değişkenli Normal Dağılımlı Kovaryans Matrisine Sahip Bir Prosese Uygulanması.....	112
3.2.3. Croiser'in Çok Değişkenli CUSUM Metodu.....	113
3.2.4. T İstatistiğinin Kümülatif Toplamlarına Dayalı Çok Değişkenli CUSUM Metodu (COT Metodu)	115

3.2.5. Pignatiello Ve Runger'in Çok Değişkenli CUSUM Metotları	118
3.2.5.1. Pignatiello Ve Runger'in MC1 Metodu	118
3.2.5.2. Pignatiello Ve Runger'in MC2 Metodu	119
3.2.6. Regresyona Uyarlanmış Değişkenlere Dayalı Çok Değişkenli CUSUM Metodu	120
3.3. Hotelling T^2 Kontrol Grafiği ile Çok Değişkenli Kümülatif Toplam (MCUSUM) Kontrol Metotlarının ARL Bakımından Karşılaştırılması.....	127

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

ÇOK DEĞİŞKENLİ ÜSTEL AĞIRLIKLİ HAREKETLİ ORTALAMA (MEWMA) KONTROL GRAFİĞİ

4.1. Tek Değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama (EWMA) Kontrol Grafiği..	131
4.1.1. Proses Ortalamasının Gözlenmesi Amacıyla Tek Değişkenli EWMA Kontrol Grafiğinin Düzenlenmesi	132
4.2. Çok Değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama (MEWMA) Kontrol Grafiği	138
4.2.1. MEWMA Kontrol Grafiğinin Düzenlenmesi	143
4.2.2. U Transformasyonu Geçirmiş Verilere Uygulanan MEWMA Kontrol Grafiği	146
4.2.3. MEWMA Kontrol Grafiği İçin Ortalama İşletim Uzunluğunun Belirlenmesi	150
4.2.3.1. Simülasyon Yaklaşımı	151
4.2.3.2. Markov Zinciri Yaklaşımı	152
4.2.4. MEWMA Kontrol Grafiğinde Kontrol Dışı Sinyalinin Yorumlanması	156
4.3. Çok Değişkenli İstatistiksel Proses Kontrol Metotlarının (Hotelling T^2 , MCUSUM, MEWMA) ARL Bakımından Karşılaştırılması.....	157

BEŞİNCİ BÖLÜM

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL PROSES KONTROL METOTLARI İLE DÖKÜM SANAYİNDE İCRA EDİLEN BİR İSTATİSTİKSEL PROSES KONTROL (İPK) UYGULAMASI

5.1. İşletmede Yürütülen İPK Uygulamaları	162
---	-----

5.2. Hotelling T^2 Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması.....	165
5.2.1. Shewhart Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması	165
5.2.2. Hotelling T^2 Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması.....	171
5.2.2.1. İki Değişken İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafikleri	171
5.2.2.2. Üç Değişken İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafikleri	176
5.2.2.3. Dört Değişken İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	180
5.2.3. Hotelling T^2 Kontrol Grafikleri İle Elde Edilen Sonuçlar	181
5.3. Çok Değişkenli Kümülatif Toplam (MCUSUM) Kontrol Metotları İle İPK Uygulaması.....	182
5.3.1. Tek Değişkenli CUSUM Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması.....	182
5.3.2. MCUSUM Kontrol Metotları İle İPK Uygulaması.....	186
5.3.2.1. İki Değişken İçin Düzenlenen MCUSUM Kontrol Grafikleri	186
5.3.2.2. Üç Değişken İçin Düzenlenen MCUSUM Kontrol Grafikleri	192
5.3.2.3. Dört Değişken İçin Düzenlenen MCUSUM Kontrol Grafiği.....	195
5.3.3. MCUSUM Kontrol Metotları İle Elde Edilen Sonuçlar	196
5.4. Çok Değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama (MEWMA) Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması	197
5.4.1. Tek Değişkenli EWMA Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması	197
5.4.2. MEWMA Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması	201
5.4.2.1. İki Değişken İçin Düzenlenen MEWMA Kontrol Grafikleri	201
5.4.2.2. Üç Değişken İçin Düzenlenen MEWMA Kontrol Grafikleri.....	206
5.4.2.3. Dört Değişken İçin Düzenlenen MEWMA Kontrol Grafiği	209
5.4.3. MEWMA Kontrol Grafikleri İle Elde Edilen Sonuçlar	210
5.5. Hotelling T^2 – MCUSUM – MEWMA Kontrol Grafikleri İle Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması	210
SONUÇ VE ÖNERİLER	213
KAYNAKLAR.....	218
EKLER	227
ÖZGEÇMİŞ	284

ÖZET
DOKTORA TEZİ
ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL PROSES KONTROL METOTLARI
(HOTELLING T^2 , MCUSUM, MEWMA)
-DÖKÜM SANAYİNDE BİR UYGULAMA-

Mehmet Suphi ÖZÇOMAK

2004 Sayfa:284

Jüri: Danışman: Doç Dr. Erkan OKTAY

Prof. Dr. Alaaddin BAŞAR

Prof. Dr. Necati YILDIZ

Prof. Dr. Sibkat KAÇTIOĞLU

Prof. Dr. Mansur ATALAY

Son yıllarda yabancı literatürde oldukça yaygın bir biçimde kullanılan çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları yerli literatürde yeterince uygulanmamıştır. Bu çalışmanın amacı yerli literatürdeki bu boşluğun doldurulmasına bir katkı sağlamaktır. Bu amaca ulaşmak için çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarından Hotelling T^2 kontrol grafiği, çok değişkenli kümülatif toplam (MCUSUM) metodu ve çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafiği incelenmiş ve söz konusu metotlar kullanılarak otomotiv sanayi için döküm parçaları üreten bir işletmede istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması yapılmıştır.

Çalışma ilk dört bölüm teori ve son bölüm uygulama olmak üzere başlıca beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde kalite kontrolü ve istatistiksel proses kontrolünün tanımları yapılarak bu konularla ilgili bilgiler verilmiştir. Sonraki üç bölümde ise sırasıyla Hotelling T^2 kontrol grafiği, çok değişkenli kümülatif toplam (MCUSUM) metodu ve çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafiği ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

Tezin son bölümü olan uygulama bölümünde ise otomotiv sanayi için döküm parçaları üreten Döktaş Dökümcülük Tic. ve San. A.Ş.'de tek ve çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları kullanılarak bir İPK uygulaması yapılmıştır. Uygulamada söz konusu işletmede üretimi yapılan otomatik transmasyonlarda kullanılan kavrama silindiri döküm parçasına ait 150 birimden oluşan veri seti kullanılmıştır. Bu bölümde proses tek değişkenli kalite kontrol grafikleri ile incelendikten sonra değişkenler gruplandırılarak çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları ile proses gözlenmiştir.

Çalışmanın sonucunda birden fazla kalite değişkenine sahip proseslerde, değişkenler arasında bir ilişki olduğunda, prosesin incelenmesinde tek değişkenli metotlara kıyasla çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının daha sağlıklı sonuçlar verdiği tespit edilmiştir.

ABSTRACT
Ph.D. THESIS
MULTIVARIATE STATISTICAL PROCESS CONTROL METHODS
(HOTELLING T^2 , MCUSUM, MEWMA)
-AN APPLICATION ON CAST INDUSTRY-

Mehmet Suphi ÖZÇOMAK

2004 Page:284

Jury:Supervisor: Associate Prof. Dr. Erkan OKTAY

Prof. Dr. Alaaddin BAŞAR

Prof. Dr. Necati YILDIZ

Prof. Dr. Sibkat KAÇTIOĞLU

Prof. Dr. Mansur ATALAY

Usage of multivariate statistical process control methods is not widespread in Turkish applications in spite of their common use in foreign literature. The main objective of this study is to make a contribution to fill up this gap in the local literature. To achieve this, the three of the multivariate process control methods, namely, Hotelling T^2 control chart, multivariate cumulative sum (MCUSUM) methods and multivariate exponentially weighted moving average (MEWMA) control chart are examined and applied to a firm which produces cast pieces for automobile industry.

The study consists mainly of five chapters. The first four chapters form the theoretical framework while the last one is the application chapter. Some definitions and theoretical information of quality control and statistical process control are presented in the first chapter. Hotelling T^2 control chart, multivariate cumulative sum (MCUSUM) methods and multivariate exponentially weighted moving average (MEWMA) control chart are respectively examined in detail in the following three chapters.

The last chapter of the study consists of an application of multivariate statistical process control methods to the Döktaş Casting Corporation, a firm producing cast pieces for the automobile industry, using a data set covering 150 observations related to clutch cylinder cast pieces in automatic transmissions. After having been examined by bivariate quality control charts, the process was examined by multivariate statistical process control methods.

As a result of the study, it is determined that the process is examined by multivariate statistical process control methods rather than bivariate methods when there is a relationship among variables in the processes covering more than one quality variable.

TEŞEKKÜR

Çalışmanın tüm aşamalarında bana bilgi ve deneyimlerinden faydalanma imkanı veren, yardım ve katkılarını esirgemeyen tez danışman hocam Doç. Dr. Erkan OKTAY'a ve değerli hocalarım Prof. Dr. Alaaddin BAŞAR, Prof. Dr. Sibkat KAÇTIOĞLU ve Prof. Dr. Necati YILDIZ'a teşekkür ederim.

Tezin hazırlanması sırasında değişik yardımlarını gördüğüm Dr. Bener GÜNGÖR'e, Arş Gör. M. Sinan BAŞAR'a ve Ensar AKPINAR'a ayrıca tezin uygulama bölümündeki verilerin temin edilmesinde çok büyük yardımlarını gördüğüm Kalite Müdürü Seyfi DEĞİRMENCİ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

ERZURUM – 2004

Mehmet Suphi ÖZÇOMAK



ŞEKİLLER LİSTESİ

	SAYFA NO
Şekil 2-1: Örnek bir $\bar{X}$ Kontrol Grafiği	25
Şekil 2-2: Örnek Bir R Kontrol Grafiği	26
Şekil 2-3: Tablo 2-2'deki Verilere Uygulanan R Kontrol Grafiği	28
Şekil 2-4: Tablo 2-2'deki Verilere Uygulanan $\bar{X}$ Kontrol Grafiği	29
Şekil 2-5: Viskozite Değerlerine Ait MR Kontrol Grafiği.....	33
Şekil 2-6: Viskozite Değerlerine Ait Bireysel Gözlem Değerleri Kontrol Grafiği.....	34
Şekil 2-7: Ki-kare Dağılımı.....	40
Şekil 2-8: F Dağılımı.....	41
Şekil 2-9: Beta Dağılımı.....	42
Şekil 2-10: Bağımsız İki Değişken İçin Kontrol Elipsi.....	44
Şekil 2-11: Bağımlı İki Değişken İçin Kontrol Elipsi.....	45
Şekil 2-12: Örnek Bir Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	47
Şekil 2-13: Tablo 2-5'teki Veriler İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	52
Şekil 2-14: Tablo 2-6'daki Veriler İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	54
Şekil 2-15: T_1^2 Değerleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği	59
Şekil 2-16: T_2^2 Değerleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği	60
Şekil 2-17: Tablo 2-10'daki Veriler İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	67
Şekil 2-18: Tek Değişkenli Proseste Ortalamadan Kayma	68
Şekil 2-19: Çok Değişkenli Proseste Ortalamadan Kayma.....	69
Şekil 2-20: Kontrol Bölgesi Ve Ki-kare Dağılımı	70
Şekil 2-21: Ki-kare Dağılımından Kayma	72
Şekil 3-1: Örnek Bir CUSUM Kontrol Grafiği	86
Şekil 3-2: $(\bar{X} - k)$ Kümülatif Toplamlarına Ait CUSUM Kontrol Grafiği	88
Şekil 3-3: İki Yönlü CUSUM Kontrol Grafiğine Uygulanan V Maskesi	90
Şekil 3-4: V Maskesinin Proses Ortalamasındaki Değişmeyi Tespitte Kullanılması	91
Şekil 3-5: CUSUM Karar Sınırları İçin V Maskesinin Düzenlenişi	93
Şekil 3-6: d ve θ 'ya Göre V Maskesinin Düzenlenmesi	96
Şekil 3-7: Tablo 3-1'deki Veriler İçin Düzenlenen CUSUM Kontrol Grafiği	98
Şekil 3-8: Ardışık Olasılık Oran Testi İçin Kontrol Sınırları.....	104

Şekil 3-9: Çok Değişkenli CUSUM Kontrol Grafiği	108
Şekil 4-1: Örnek Bir EWMA Kontrol Grafiği	133
Şekil 4-2: Tablo 4-1'deki Veriler İçin Düzenlenen EWMA Kontrol Grafiği	137
Şekil 4-3: Formül 4-20'den Elde Edilen Kovaryans Matrisi Kullanılarak Hesaplanan T_2^2 Değerlerinin Kullanılması İle Düzenlenen MEWMA Grafiği	142
Şekil 5-1: Çap1 Değerlerine Ait Bireysel Gözlem Değerleri Kontrol Grafiği.....	165
Şekil 5-2: Çap1 Değişkenine Ait MR Kontrol Grafiği	166
Şekil 5-3: Çap2 Değerlerine Ait Bireysel Gözlem Değerleri Kontrol Grafiği.....	167
Şekil 5-4: Çap2 Değişkenine Ait MR Kontrol Grafiği	167
Şekil 5-5: Yükseklik Değerlerine Ait Bireysel Gözlem Değerleri Kontrol Grafiği.....	168
Şekil 5-6: Yükseklik Değişkenine Ait MR Kontrol Grafiği	168
Şekil 5-7: Kaçıklık Değerlerine Ait Bireysel Gözlem Değerleri Kontrol Grafiği	169
Şekil 5-8: Kaçıklık Değişkenine Ait MR Kontrol Grafiği	169
Şekil 5-9: Çap1 - Çap2 Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği .	171
Şekil 5-10: Çap1 - Yükseklik Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	173
Şekil 5-11: Çap1 - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	173
Şekil 5-12: Çap2 - Yükseklik Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	174
Şekil 5-13: Çap2 - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	175
Şekil 5-14: Yükseklik - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği	176
Şekil 5-15: Çap1 - Çap2 - Yükseklik Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği	177
Şekil 5-16: Çap1 - Çap2 - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği	178
Şekil 5-17: Çap1 – Yükseklik - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği	179
Şekil 5-18: Çap2 – Yükseklik - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği	180

Şekil 5-19: Dört Değişken İçin Düzenlenen Hotelling T^2 Kontrol Grafiği.....	181
Şekil 5-20: Çap1 Değerlerine Ait V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği.....	182
Şekil 5-21: Çap2 Değerlerine Ait V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği.....	183
Şekil 5-22: Yükseklik Değerlerine Ait V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği.....	184
Şekil 5-23: Kaçıklık Değerlerine Ait V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	185
Şekil 5-24: Çap1 - Çap2 Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	187
Şekil 5-25: Çap1 - Yükseklik Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	188
Şekil 5-26: Çap1 - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	189
Şekil 5-27: Çap2 - Yükseklik Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	189
Şekil 5-28: Çap2 - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	190
Şekil 5-29: Yükseklik - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	191
Şekil 5-30: Çap1 - Çap2 - Yükseklik Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	192
Şekil 5-31: Çap1 - Çap2 - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	193
Şekil 5-32: Çap1 – Yükseklik – Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	194
Şekil 5-33: Çap2 – Yükseklik – Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	194
Şekil 5-34: Dört Değişken İçin Düzenlenen V Maskeli CUSUM Kontrol Grafiği	195
Şekil 5-35: Çap1 Değerlerine Ait EWMA Kontrol Grafiği.....	197
Şekil 5-36: Çap2 Değerlerine Ait EWMA Kontrol Grafiği	198
Şekil 5-37: Yükseklik Değerlerine Ait EWMA Kontrol Grafiği	199
Şekil 5-38: Kaçıklık Değerlerine Ait EWMA Kontrol Grafiği.....	200
Şekil 5-39: Çap1 - Çap2 Değerlerine Ait MEWMA Kontrol Grafiği.....	201
Şekil 5-40: Çap1 - Yükseklik Değerlerine Ait MEWMA Kontrol Grafiği.....	202

Şekil 5-41: Çap1 - Kaçıklık Değerlerine Ait MEWMA Kontrol Grafiği	203
Şekil 5-42: Çap2 - Yükseklik Değerlerine Ait MEWMA Kontrol Grafiği	204
Şekil 5-43: Çap2 - Kaçıklık Değerlerine Ait MEWMA Kontrol Grafiği	204
Şekil 5-44: Yükseklik - Kaçıklık Değerlerine Ait MEWMA Kontrol Grafiği	205
Şekil 5-45: Çap1 - Çap2 - Yükseklik Değişkenleri İçin Düzenlenen MEWMA Kontrol Grafiği	206
Şekil 5-46: Çap1 - Çap2 - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen MEWMA Kontrol Grafiği	207
Şekil 5-47: Çap1 – Yükseklik - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen MEWMA Kontrol Grafiği	208
Şekil 5-48: Çap2 - Yükseklik - Kaçıklık Değişkenleri İçin Düzenlenen MEWMA Kontrol Grafiği	208
Şekil 5-49: Dört Değişken İçin Düzenlenen MEWMA Kontrol Grafiği	209



TABLÖLAR LİSTESİ

SAYFA NO

Tablo 2-1: Kontrol Grafiklerinin Düzenlenmesinde Kullanılan Faktörler	24
Tablo 2-2: Silindir Parçasına Ait Ölçüm Değerleri	27
Tablo 2-3: Viskozite (X) Ve Hareketli Değişim Aralığı (MR) Değerleri	32
Tablo 2-4: Buhar Türbin Sisteminden Elde Edilen Altı Değişkene Ait Veriler	50
Tablo 2-5: Buhar Türbin Sisteminden Elde Edilen Altı Değişkene Ait Yeni Veriler	51
Tablo 2-6: Bir Endüstri Prosesinden Alınan İki Değişkene Ait Veriler	53
Tablo 2-7: $\alpha = 0.01$ ve $p=2, 5, 10$ İçin Çok Değişkenli Kalite Kontrol Grafiğinin Üst Kontrol Sınırları.....	56
Tablo 2-8: Üretilen Taşlara Ait Büyüklük Yüzdeleri	58
Tablo 2-9: $p=2$ Kalite Değişkenine Ait Alt Grup Verileri.....	65
Tablo 2-10: Tablo 2-9'daki Veriler İçin Ortalama, Varyans, Kovaryans Ve T^2 Değerleri	66
Tablo 2-11: Petrokimya Endüstrisine İlişkin Veriler Ve T^2 Değerleri	81
Tablo 3-1: Alt Grup Verilerinin Ortalamaları Ve Bu Ortalamaların CUSUM Değerleri	97
Tablo 3-2: İki Kalite Değişkenine Ait Veriler	117
Tablo 3-3: Beş değişken İçin Hesaplanan Çok Değişkenli Özet İstatistikler	125
Tablo 3-4: $p=2$ Değişken İçin ARL Karşılaştırması	127
Tablo 3-5: $p=3$ Değişken İçin ARL Karşılaştırması	128
Tablo 3-6: $p=10$ Değişken İçin ARL Karşılaştırması	129
Tablo 4-1: Otuz Gözlem Değeri Ve Bu Değerlerin z_i Değerleri	136
Tablo 4-2: İki Kalite Değişkenine Ait Örnek Değerleri, MEWMA Vektörü Ve İstatistiği	141
Tablo 4-3: MEWMA Kontrol Grafiğinin Düzenlenmesinde Kullanılan Optimal Değerler (ARL=200 ve $p=2, 3, 4$)	143
Tablo 4-4: MEWMA Kontrol Grafiğinin Düzenlenmesinde Kullanılan Optimal Değerler ($p=4, 10, 20$)	144
Tablo 4-5: U Transformasyonu Geçirmiş Verilerin Ortalamasında Ortaya Çıkabilecek Bir Kaymayı Tespit Etmek İçin ARL Değerleri.....	149

Tablo 4-6: MEWMA Kontrol Grafiği İçin ARL Değerleri	151
Tablo 4-7: MEWMA Kontrol Grafiği İçin ARL Değerleri (Sıfır durumu).....	153
Tablo 4-8: MEWMA Kontrol Grafiği İçin ARL Değerleri (Sabit durum).....	154
Tablo 4-9: MEWMA Kontrol Grafiği İçin ARL Değerleri (Kontrol dışı durumu).....	155
Tablo 4-10: $p=2, 3, 4, 5, 10$ ve 20 Kalite Değişkenleri İçin ARL Karşılaştırmaları ...	159
Tablo 5-1: Sayılabilen taneli Malzemeler İçin Örnekleme Planı	163



GİRİŞ

I. Çalışmanın Konusu ve Önemi

Kalite kavramının üretim faaliyeti kadar uzun bir geçmişi olduğu söylenebilir. Ancak üretici ile tüketicinin doğrudan temas kurabildiği küçük atölyelerden günümüzün dev üretim sistemlerine gelinceye kadar kalite konusunda önemli gelişmeler olmuştur. Kalite kavramının uzun bir geçmişi olmasına rağmen, kalite kontrolü alanındaki gelişme ve yeniliklerin özellikle yirminci yüzyılın ilk çeyreğinden sonra hız kazandığı göze görülmektedir.

Yirminci yüzyılın ikinci yarısında sanayi ve ticarete yeni bir döneme girilmiştir. Bu dönemde göze çarpan en önemli iki özelliğin “globalleşme” ve “rekabet” olduğu söylenebilir. Bu dönemde, korumacılığın önemli ölçüde kaldırılması, gümrük oranlarının azaltılması yabancı sermayeye geniş imkanların tanınması ve diğer birçok önemli gelişme; güçlü ve dinamik işletmelerin ulusal sınırların dışına çok daha kolayca erişmesine imkan vermiştir. Bu yönü ile bakıldığında, işletmeler açısından globalleşmeyi geniş bir ekonomik yayılma olarak tanımlanmak mümkündür.

Globalleşmenin ülkemizdeki firmalar açısından en önemli etkisi, dış ülkelerdeki firmalarla rekabet etme zorunluluğunun ortaya çıkmasıdır. Ülkeler arasındaki ekonomik sınırların ortadan kalkması ile birçok firma öteden beri sahip oldukları pazarlarda güçlü rakipleri karşılarında bulmuşlardır. Böylece firmalar arasında büyük bir rekabet başlamıştır. Bu rekabet esnasında hakim oldukları pazarlarda pay kaybeden şirketlerin bir kısmı küçülüp yok olurken; diğerleri, rakiplerinin pazarlarında pay alma gayreti içerisine girmiştir. Böylece ulusal pazarlarda aratan rekabete ek olarak uluslararası pazarlarda da rekabet yoğunlaşmıştır.

Günümüzde uluslararası pazarlar, yüksek kalitede üretim yapan, bunları zamanında piyasaya sevk eden ve aynı zamanda verimliliğini artıran firmalar tarafından ele geçirilmektedir. Günümüz rekabet koşullarında ayrıca ürünün fiyatının yanında, kalitesinin de tüketicilerin satın alma kararını önemli ölçüde etkilediği görülmektedir. Dolayısıyla firmaların pazar içerisindeki diğer firmalarla rekabet edebilmesi için ürettiği hizmet veya ürünün kalitesine büyük önem vermesi gerekmektedir.

Uluslararası pazarlarda rekabet edecek firmaların üretimlerindeki başlıca amacı; satılabilir, iş görebilir ürün veya hizmet üretmek olmalıdır. Bu durumda tüketiciye daha kaliteli ve güvenilir olan ekonomik ürünler sunmak için kalite sağlama ve kontrol

konusunda da sürekli bir arayış, geliştirme ve uygulama içerisinde olmanın gereği kaçınılmaz olur. Buna göre firmaların kaliteye verdiği öneme paralel olarak rekabet gücünün artacağı aşikardır.

Yukarıda ifade edilen rekabet ortamı içerisinde kendilerini yarınlar taşımak isteyen firmaların, bir yandan değişen tüketici gereksinimlerini karşılayabilmek için gelişen teknolojiyi takip etmek, diğer yandan da kaliteye olan bakış açılarını değiştirmek zorunda kaldıkları görülmektedir. Firmalardaki kaliteye ilişkin sorunların çözümü, geçmişte kalan rasgele girişimler yerine günümüzde yerini giderek ekonomik yaklaşımlı daha iyi kalite için sistemli yöntemlere bırakmaktadır. Sistemli yaklaşım kaliteyi etkileyebilecek tüm olumsuz koşulların ortadan kaldırılması ile başlar. Geçmişte yalnızca muayene olarak anlaşılan kalite kontrolü kavramı, kaliteyi etkileyen etmenlerin sistemli olarak araştırılması ile çok geniş kapsamlı olan çağdaş anlayışa erişmiştir.

Yapılan araştırmalar 1990'lı yıllarda uluslararası pazarlarda her on müşteriden sekizinin herhangi bir mal yada hizmeti satın alma kararını verirken fiyattan ziyade kaliteye daha çok önem verdiğini ortaya koymuştur. Durum böyle iken bundan yaklaşık 10-15 yıl önce her on müşteriden ancak üçü satın alma kararını verirken kaliteye önem vermekteydi. Kalitenin geçtiğimiz yıllara oranla büyük önem kazanması, firmaları da kaliteye ve kalite kontrolüne önem vermeye zorlamıştır.

Bu gelişmeler ışığında, dünyanın neresinde olursa olsun tüm firmalar ürünlerinin uluslararası düzeyde rekabet edecek şekilde tasarım, üretim ve satış yapabilme yeteneğini geliştirmek zorundadır. Bu zorunluluk firma yönetimlerini gelecekte rekabetçi özelliklerini güçlendirecek şekilde, temelinde kalite ve kalite kontrolünün olduğu bir işletme kültürü ve stratejisi oluşturmaya yöneltmektedir.

Juran, kalite kontrolünü "kullanıma uygunluk (fitness for use) için yapılan (yani şirketin kalite fonksiyonunun başarabildiği) faaliyetlerin tümü" olarak tanımlamaktadır.* Bu faaliyetler içerisinde istatistiksel proses kontrolü (İPK) önemli bir aşamadır. Çalışmamızın temel konusu olan istatistiksel proses kontrolü, bir ürünün en ekonomik ve yararlı bir şekilde üretilmesini sağlamak amacıyla istatistik prensip ve tekniklerinin üretimin tüm aşamalarında kullanılması* şeklinde tanımlanabilir. Tanımdan anlaşılacağı üzere istatistik bilimi, üretimde ve üretimdeki kalite kontrol faaliyetinde vazgeçilmez bir araçtır. Bu nedenle firmaların istatistiksel proses kontrol metodlarına çok önem

* J. M. Juran – F. M. Gryna; Quality Planning and Analysis, McGraw-Hill Inc., New York, 1970, s.5.

* Besim Akın; İşletmelerde İstatistik Proses Kontrol (İPK) Teknikleri, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul, 1996, s.2.

vermeleri gerekir. Bu çerçevede biz üniversite elemanlarına da önemli görev düşer. Söz konusu metotların teorisi üniversitelerde geliştirilip, uygulaması da sanayi kollarında icra edilebildiği takdirde ülke ekonomisine önemli katkılar sağlanacağı açıktır.

Globalleşme ve rekabet kavramlarının yanı sıra tüketicilerin bilinçlenmesi, firmaların ürettikleri ürünlerin birden fazla özelliğinin kalite standartlarına uygun olmasını gerekli kılmıştır. Birçok sanayi dalında ürünlerin kalitesini ölçmek için ürünün birden fazla kalite değişkeninin ele alınması zorunlu hale gelmiştir. Bu nedenlerden dolayı son yıllarda bu konu ile ilgili metotların geliştirilmesi konusunda arayışlar içerisine girilmiştir. Birden fazla kalite değişkenine sahip ürünlerin üretildiği proseslerin kontrolü iki şekilde yapılabilir.

Bunların ilki, her bir kalite değişkeni için tek değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarını kullanmaktır. Kalite değişkenleri birbirinden bağımsız olduğunda bu şekilde prosesi kontrol etmek uygun bir yol gibi görünebilir. Ancak kalite değişkenleri arasında bir bağımlılık olması durumunda bu yola başvurmak yanlış sonuçların elde edilmesine neden olabilir. Ayrıca her bir kalite değişkeni için tek değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarını düzenlemek, söz konusu değişkenlerin eşanlı kontrolü ile aynı sonucu vermeyecektir.

İkinci durum ise kalite değişkenleri arasındaki bağımlılığı dikkate alan çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarını kullanmaktır. Çok değişkenli istatistiksel proses kontrolü, prosesin kontrol altında olup olmadığını en az iki kalite değişkenini eşanlı inceleyerek proses hakkında daha doğru sonuca varılmasını sağlayan bir araçtır.* Bu tanımdan yola çıkarak bir üretim prosesinde üretilen bir ürün birden fazla değişkene sahip ve özellikle değişkenler arasında bir ilişki var ise bu ürünün kontrolünün çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları ile yapılması daha sağlıklı sonuçlar verir.

II. Çalışmanın Amacı, Kapsamı ve Planı

Son yıllarda yabancı literatürde oldukça yaygın bir biçimde kullanılan çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları yerli literatürde yeterince uygulanmamıştır. Bu çalışmanın temel amacı yerli literatürdeki bu boşluğu

* Füsun Z. Özkan; Kalite Kontrolünde Kullanılabilen Çok Değişkenli İstatistik Yöntemlerin Normallikten Sapmadan Etkilenme Bakımından Karşılaştırılmaları, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayınlanmamış Doktora Tezi, 1994, s.3.

doldurulmasına bir katkı sağlamaktır.

Bu temel amacın dışında, bir başka amacımız üniversite – sanayi işbirliğini geliştirmektir. İstatistiksel proses kontrol metotlarının teori kısmı üniversitelerde geliştirilip, uygulama kısmı da sanayi kollarında icra edilebildiği takdirde ülke ekonomisine ufakta olsa bir katkının sağlanacağı düşünülmektedir.

Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları ile ilgili yerli literatürdeki boşluğun doldurulmasına katkı sağlamak amacıyla hazırlanan bu çalışmada, çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarına ilişkin yerli ve yabancı, kuramsal ve araştırmaya dayalı akademik ve popüler yayınlar üzerinde geniş çaplı bir literatür çalışması ile teorik çerçeve oluşturulmuştur. Daha sonra ise otomobil sanayine döküm parçaları üreten bir firmada söz konusu metotlar kullanılarak bir istatistiksel proses kontrol uygulaması yapılmıştır. Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarından; Hotelling T^2 kontrol grafiği, çok değişkenli kümülatif toplam (MCUSUM) kontrol metotları ve çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafiği ile ilgili teorik ve uygulamalı bilgilerin ayrıntılı olarak verildiği bu çalışmanın, konuyla ilgilenen tüm araştırmacılar için kaynak oluşturması ve ışık tutması dileğimizdir.

Çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. İlk dört bölüm tezin teorik kısmını oluştururken son bölüm ise uygulama bölümünü oluşturmaktadır. Çalışmanın birinci bölümünde kalite kontrolü ve istatistiksel proses kontrolü konuları anlatılmıştır. Kalite kontrolü ve istatistiksel proses kontrolünün tanımı yapılarak bu konularla ilgili bilgiler verildikten sonra çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının özelliklerinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarından Hotelling T^2 kontrol grafiği anlatılmıştır. Hotelling T^2 kontrol grafikleri izah edilmeden önce tek değişkenli Shewhart kontrol grafikleri kısaca incelenmiştir. Bu bölümde Shewhart kontrol grafiklerinden, Ortalama ($\bar{X}$) ve değişim aralığı (R) kontrol grafikleri ile bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri incelenmiştir. Bu bölümde daha sonra Hotelling T^2 kontrol grafikleri kapsamlı bir şekilde incelenerek bu kontrol grafikleri ile ilgili örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde çok değişkenli kümülatif toplam (MCUSUM) kontrol metotları incelenmiştir. Bu bölümde söz konusu metodun daha iyi anlaşılması amacıyla ilk önce

tek değişkenli CUSUM kontrol grafiği anlatılmıştır. Daha sonra araştırmacılar tarafından geliştirilmiş olan çok değişkenli kümülatif toplam kontrol metotları geniş bir şekilde incelenmiştir.

Teorik çerçevenin son bölümü olan dördüncü bölümünde ise çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafiğinden bahsedilmiştir. MEWMA kontrol grafiğini incelemeden önce konunun daha iyi anlaşılması amacıyla, tek değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (EWMA) kontrol grafiği kısaca izah edilmiştir. Bu bölümde çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama kontrol grafiği, elde edilen literatür kullanılarak kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Tezin son bölümü olan uygulama bölümünde otomotiv sanayi için döküm parçaları üreten Döktaş Dökümcülük Tic. ve San. A.ř'de çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları ile bir İPK uygulaması icra edilmiştir. Bu amaçla işletmede üretilen otomatik transmisyonlarda kullanılan kavrama silindiri döküm parçası ele alınarak bu döküm parçasına ait dört değişken incelenmiştir. Kavrama silindiri döküm parçasının ap1, ap2, yükseklik ve kaçıklık değişkenlerine ait 150 örnek büyüklüğündeki veri seti kullanılarak İPK uygulaması yapılmış ve elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. KALİTE KONTROLÜ VE İSTATİSTİKSEL PROSES KONTROLÜ

Bu bölümde ilk olarak kalite kontrolü ve istatistiksel proses kontrolünün tanımları yapılarak bu konularla ilgili bilgiler verildikten sonra çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metodlarının özelliklerinden kısaca bahsedilecektir.

1.1. Kalite Kontrolü

Kalite kontrolünün tanımı yapılmadan önce kontrol kavramının izah edilmesi yerinde olacaktır. Kontrol, herhangi bir faaliyetin önceden saptanan kurallar çerçevesi içinde belirli amaçları gerçekleştirecek biçimde yürütülmesini sağlama fonksiyonu olarak tanımlanabilir.¹ Genel anlamda kontrol ise belli bir hedefe ulaşmak için yapılacak faaliyetlerin planlanması ve bu faaliyetlerin denetiminin yapılmasıdır.² İşletme yönetiminin; üretim, pazarlama, satış, dağıtım, tedarik, stok, finans ve maliyet gibi bütün fonksiyonlarında olduğu gibi kalite yönetimi fonksiyonunda da kontrolün önemli bir yeri vardır. Günümüzde kontrol kavramı iki farklı şekilde kullanılmaktadır. Birincisi muayene ve denetleme anlamında mamullerin değerlendirilmesi; ikincisi ise yapılan faaliyetlerin önceden belirlenmiş veya yeni tespit edilmiş standartlara uygun olup olmadığının kontrol edilmesidir.³ Kontrol kavramı izah edildikten sonra kalite kontrolün tanımı yapılabilir. Kalite kontrolü ile ilgili pek çok tanım yapılmıştır. Bu bölümde bu tanımlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Kalite kontrol, kalitenin kontrol edilmesi ve kontrol altında tutulması demektir. Kalite kontrol faaliyeti ile kalitedeki değişikliklerin, belirlenen standart veya toleranslar içinde olup olmadığı kontrol edilir.⁴ Milletlerarası Standartlar Teşkilatı (ISO) kalite kontrolünü “Kaliteyi korumak, geliştirmek ve üretimi alıcının tatmin olacağı en ekonomik seviyede sürdürmek için uygulanan işlemler dizisi” şeklinde tanımlamıştır.⁵

Juran kalite kontrolü için aşağıdaki tanımları yapmıştır:⁶

* Kullanıma uygunluk (fitness for use) için yapılabilen (yani şirketin kalite fonksiyonunun başarabildiği) faaliyetlerin tümü,

¹ Bülent Kobu; Endüstriyel Kalite Kontrolü, İkinci Baskı, İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1987, s.14.

² Faruk Fevzi; Kalite Yönetimi, TSE Kalite Seminer Notları, Ankara, 1998, s.1.

³ Dale H. Besterfield; Quality Control, Third Edition, Prentice-Hall Inc., 1990. s.5.

⁴ Demir Arslan; İstatistik Kalite Kontrolü, A.Ü. Yayınları, Yayın No:388, Sevinç Matbaası, Ankara, 1974, s.2.

⁵ İ. Taner Berkün; Standartlaştırma ve Türkiye’deki Uygulamaları, Ankara, 1975, s.5.

⁶ J. M. Juran – F. M. Gryna; Quality Planning and Analysis, McGraw-Hill Inc., New York, 1970, s.5.

* Asıl amacını kalite fonksiyonuna ayıran işletme departmanının belirlediği bir takım kalite faaliyetlerinin toplamı,

* Kalite faaliyetlerinin yerine getirilmesi için kullanılan araç, alet veya beceri,

* Tüm zamanını kalite fonksiyonuna tahsis eden işletme departmanı.

Kalite kontrolü, geniş anlamda bir malın üretim ve satış planlamasından, müşterinin memnuniyet derecesini tespit etmeye kadar birçok çalışmayı içine alır.⁷

İmalatta kalite kontrol kavramının yanlış veya eksik anlaşılması ve uygulanması sık rastlanan bir olaydır. Örneğin gelen malzemeye uygulanan örnekleme, laboratuvar testi, kusurlu-kusursuz ayıklaması, montaj bandı sonunda yapılan hata tespiti vb. faaliyetler genellikle kalite kontrolü olarak nitelendirilir.

Daha sık rastlanan bir yanlış da muayene işleminin kalite kontrolü sanılmasıdır. Muayene kalite kontrol fonksiyonunun çok önemli bir faaliyeti olmakla beraber sadece bir kısmını oluşturur.⁸

Belirli özelliklerin tatmin edici düzeyde olması, bazı standartlara uygunluğu gerektirdiğinden kalitenin sağlanması kontrol sorununu da beraberinde getirir. Dolayısıyla kaliteyi istenilen düzeyde tutabilmek için işletmeler kalite kontrol kavramından faydalanırlar. Kalite kontrol sadece üretim ve değişim sürecinde değil, aynı zamanda üretim öncesi tasarım aşamasında da gerçekleştirilir. Yönetimin en önemli görevlerinden birisi kaliteli mal ya da hizmeti doğru yere, doğru zamanda ve uygun fiyatla teslim etmektir. Üretici, tüketicinin istekleri doğrultusunda belirlenen standartlara ve özelliklere uygun kalite ve kalite kontrol kavramını sağlamaya çalışır.⁹

Kalite kontrol, genel müdürden tezgah operatörüne kadar tüm personelin derece derece sorumluluk taşıdığı üretimin her aşamasında yer alan bir faaliyetler topluluğudur. Toplam kalite kontrolü ise işletmenin çeşitli kademelerindeki yöneticilere yol gösteren, daha doğru ve etkin karar vermelerine yardımcı olan bir araç olarak tanımlanır.¹⁰

Toplam kalite kontrolünün bir faaliyetler topluluğu olma özelliğini vurgulamak amacıyla toplam kalite kontrolü kavramını ortaya atan Feigenbaum'un verdiği tanım şöyledir: Tüketici isteklerini en ekonomik düzeyde karşılamak için işletme

⁷ Alaaddin Başar; Uygulamalı İstatistik (Kalite Kontrolü), Atatürk Üniversitesi İ.İ.B.F. Araştırma Merkezi Ders Notları, No:119, Erzurum, 1985, s.1.

⁸ Kobu; Age., 1987, s.14-15.

⁹ Şevkinaz Güntüoğlu; İstatistiksel Kalite Kontrolü, Beta Yayınevi, İstanbul, 1995, s.2.

¹⁰ Kobu; Age., 1987, s.15.

organizasyonu içindeki çeşitli ünitelerin; kalitenin sağlanması, yaşatılması ve geliştirilmesi yolundaki çabalarını birleştirip koordine eden etkili sistem toplam kalite kontrol olarak tanımlanır.¹¹ Toplam kalite kontrol, klasik anlayıştaki kalite kontrol ile karıştırılmamalıdır. Klasik anlamda kalite kontrol genel olarak, önceden saptanmış bir takım standartlara ulaşmak için üretim sürecine girilmesi, süreç sonunda mamulün teknik özelliklerine uymayan parçalarının muayene yoluyla araştırılması için yapılan çalışmadır.¹²

Günümüzde kalite kontrolü, tüketici ve pazar araştırmasından mamul dizaynına, imalat yönteminden sevkıyata kadar tüm işletme faaliyetlerinde yer alan geniş kapsamlı bir sistem olarak düşünülmelidir. Ancak, kalite kontrolünün sadece birkaç faaliyet veya departmanı ilgilendirdiği düşünüldüğünde ulaşılmak istenen amaçlardan bir hayli uzak kalınır.¹³

1.1.1. Kalite kontrolünün amaç ve faydaları

Kalite kontrolünün temel amacı; tüketici isteklerini mümkün olan en ekonomik düzeyde karşılayan mamulün üretilmesidir. Bu amaç ancak kalite kontrol departmanının yanı sıra işletmenin bütün departmanlarının değişen derecelerde sorumluluk yüklenmesi ile gerçekleşebilir. Bununla beraber temel amacın gerçekleştirilmesi yolunda harcanan çabaların koordinasyonu ve etkinliğinin artırılması sorumluluğu kalite kontrol departmanına ait olmalıdır.¹⁴ İşletmeler, tüketicilerin isteyeceği, beğeneceği, kullanırken şikayetçi olmayacağı mal ve hizmetleri üretmelidir. Tüketici isteklerini tatmin eden yüksek kalite seviyesine en ekonomik şekilde ulaşmak kalite kontrolünden beklenen ikinci ana amaçtır.¹⁵

Kalite kontrolünün amacına ulaşmasında yardımcı olacak alt amaçların belirlenmesi, temel amacın gerçekleştirilmesine yardımcı olacaktır. Söz konusu alt amaçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- * Mamulün kalite seviyesinin yükseltilmesi,
- * Mamulün dizaynının geliştirilmesi,

¹¹ A.V. Feingenbaum; Total Quality Control, Third Edition, McGraw-Hill Inc., 1991, s.14.

¹² Yasuhiro Monden; "Tam Zamanında Üretim Ortamında Kalite Kontrol", Çev: Nesime Acar, MPM Verimlilik Dergisi, 1993, s.99.

¹³ Bülent Kobu; Üretim Yönetimi, 8. Baskı, İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1994, s.457.

¹⁴ Kobu; Age., 1987, s.24.

¹⁵ İbrahim Kavrakoglu; "Kalite ve Verimlilik", MPM Verimlilik Dergisi, Özel Sayı, 1990, s.117.

- * İşletme maliyetlerinin azaltılması,
- * Iskarta, işçilik ve malzeme kayıplarının azaltılması,
- * Üretim hattındaki dar boğazların giderilmesi,
- * Personelin moralinin yükseltilmesi,
- * Tüketicinin, parasının karşılığını aldığını görerek memnun olması,
- * Ülke ekonomisine olumlu katkı sağlanması,
- * İşletme prestijinin arttırılması,
- * İşçi-işveren ilişkilerin düzeltilmesi,
- * Ucuz, ancak kalite standartlarına uygun, kolay işlenebilir materyal ve yarı işlenmiş mamullerin araştırılması,
- * Müşteri isteklerinin dikkate alınması ve siparişlerin zamanında ulaştırılması,
- * Rakip firmaların mamul kalitelerinin gözlenmesi.¹⁶

Burada ifade edilen anlayışa uygun bir kalite kontrol sisteminin ilk kez kurulmaya başlandığı bir işletmede, yukarıdaki amaçlardan bazılarına öncelik verilmesi gerekir. Kuruluş ve adapte olma güçlükleri göz önüne alındığında başlangıçta sadece birkaç amacın gerçekleşmesine ağırlık vermek yerinde bir karar olacaktır. İlk yıllarda olumlu gelişmeler kaydedildiği takdirde amaçların kapsamı kolaylıkla genişletilebilir. Amaçlar arasında bağımlılık olduğundan dolayı birinde sağlanacak başarının diğerini de olumlu yönde etkilemesi doğaldır.¹⁷

Kalite kontrolünün birinci ve en önemli faydası; mamul ve hizmetlerin kalitesinde düzelmenin meydana gelmesidir. İkinci olarak, kalite kontrol sistemi, tüketicinin değişen isteklerini karşılamak için prosesi arasına değerlendirir ve değiştirir. Üçüncü olarak, kalite kontrol sistemi, işletmelerin amaçlarından biri olan verimliliği artırır. Uzun dönemde maliyetleri azaltmak, kalite kontrol sisteminin sağladığı dördüncü faydadır. Verimliliği arttırmakla üretimin zamanında yapılması kalite kontrol sisteminin sağladığı beşinci faydadır.¹⁸

Sonuç olarak kalite kontrolünün faydaları iki ana başlık altında toplanabilir:

*Hurda, fire ve atık oranının azalması ile mamuller üzerinde yeniden düzeltme

¹⁶ M. Hulusi Demir – Şevkinaz Gümüsoğlu; Üretim/İşlemler Yönetimi, 4. Baskı, Beta Yayınevi, İstanbul, 1994, s.678.

¹⁷ Kobu; Age., 1994, s.469.

¹⁸ Amitava Mitra; Fundamentals of Quality Control and Improvement, MacMillan Publishing, 1993, s.12-13.

işlemleri yapılmaması, üretimde daha az duraklama olması, daha yüksek bir üretim hızına erişilmesi, işçilerin işlerini daha çok benimsemeleri sayesinde üretim giderlerinin azalması.

*Müşteri isteklerinin tam olarak karşılanması buna paralel olarak iadelerin azalması, alıcı sayısının ve satışların artmasından kaynaklanan dolaylı ve dolaysız kazançlar.

Kalite kontrolünün en tatmin edici yönü; üretimde, hurda, fire ve atık oranının azalması ve bu sayede daha az sayıda kusurlu parça üretilmesine sebep olması, buna paralel olarak daha ekonomik mamullerin üretilmesini sağlamasıdır. Kalite kontrolü, sadece üretimle sınırlı değildir. Kaliteli bir mamul dizaynı, üretim giderlerini ve bozuk mamul oranını da azaltır.¹⁹

1.1.2. Kalite kontrolünün istatistik bilimi ile ilgisi

Kalite kontrolünün oldukça eski bir tarihi olmasına rağmen, istatistiksel proses kontrolünün sanayi kollarında uygulanması son zamanlara dayanır. İstatistik bilimi kalite kontrolünde ilk olarak 1920'li yıllarda etkili bir biçimde uygulanmaya başlanmıştır. İstatistiksel yöntemlerin kalite kontrolüne uygulanması ilk olarak 1924 yılında Bell telefon şirketinde çalışan Shewart tarafından gerçekleştirilmiştir. Bununla beraber istatistiksel proses kontrolü (İPK)'nün sanayide geniş uygulama alanı bulması II. Dünya Savaşı'nda gerçekleşmiştir. II. Dünya Savaşı sırasında şartların, minimum malzeme ve işçilikle yüksek kalite düzeyinde ve büyük miktarlarda üretimi zorunlu kılması istatistiksel yöntemlerin kalite kontrolünde kullanılmasını gerekli kılmıştır.

Kalite kontrolünün kontrol fonksiyonunu sağlayabilmesi günümüzde istatistiksel yöntemler sayesinde mümkün olur. Böylece kalite kontrolünde istatistik biliminin kullanılmasının birkaç nedeni vardır: İstatistik esas itibarıyla, kontrol edilecek anakütleden alınan bir örneğe bağlı olarak anakütle hakkında bilgi edinilmesini sağlayan bir bilim dalıdır. Halbuki bazı nedenlerden dolayı tam örnekleme yapmak çoğu zaman mümkün veya ekonomik olamayacağından, mamulün kalitesini örnek alarak incelemeye başladığımız zaman istatistik biliminden gerçek anlamda faydalanıyoruz demektir. Bu durumda örnekleme yapmak suretiyle anakütle hakkında fikir edinmek en uygun yoldur. Bu da istatistiğin mükemmel bir uygulaması olarak karşımıza çıkar. Kalite kontrolünde

¹⁹ S. Tan – N. Pişircioğlu; Kalitesizliğin Maliyeti, MPM Yayınları, No:316, Ankara, 1991, s.12-13.

istatistik biliminin kullanılmasının diğerk bir nedeni ise, cinsi ne olursa olsun mamul karakteristiklerinin daima bazı sınırlar arasında kalmak şartıyla tesadüfi bir yapı göstermesidir. Örneğin parçaların tezgah ve tertibat yardımıyla işlenmesi sırasında, ayarlarına hiç dokunulmamasına rağmen bunların parçalara aktardığı ölçüler tesadüfi bir dağılım gösterir. Bilindiğı üzere istatistik, tesadüfi olayların kanunlarını inceleyen bir bilim dalıdır.²⁰

İstatistik yöntemlerin kalite kontrol dahil herhangi bir araştırma faaliyetinde kullanılmasıyla sağlanan faydalar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- * Tesadüfi örnek seçmenin anlamı, önemi ve sapmalardan kaçınma çarelerini öğretir.
- * Şartların aynı kalmasının sağlanması için gerekli kontrol araçlarını belirler.
- * Açık ve geniş kapsamlı tanımların önemini belirtir.
- * Yapılan ölçümlerin gerçeğe uygunluğunun sağlanması ve aynı şartlar altında tekrar edilebilmesi için gerekli kontrol metotlarını temin eder.
- * Sonuçların belirli bir güvenilirlik derecesi ile değerlendirilebilmesi için kaç ölçüm yapılması gerektiğini belirler.
- * Belirli sayıdaki ölçümlerin en verimli şekilde değerlendirilebilmesi için deneylerin uygun biçimde hazırlanmasında yardımcı olur,
- * Bilgilerin dikkatli, duyarlı ve düzenli olarak kaydedilmesini teşvik eder.
- * Bilgilerin toplandığı andaki duruma ait bütün şartların göz önüne alınarak tespit edilmesinin önemini ortaya koyar.

Bu durumda bir işletmede kalite kontrol ve imalat faaliyetlerinde görevli her elemanın temel istatistiksel kavramlar konusunda yeterli düzeyde bir eğitim görmesi büyük önem arz eder. Bu amaçla bir elemanın bilmesi gereken en önemli konular: Permutasyon, kombinasyon, frekans dağılımı ve grafikleri, ortalama, standart sapma, olasılık dağılımları şeklinde belirlenebilir.²¹

Kalite kontrolü esas olarak ikiye ayrılır. Birincisi ürünün imalatı esnasında, yani üretim devam ederken yapılan kontroldür. Bu kontrole “Üretimde Kalite Kontrolü” veya “İstatistiksel Proses Kontrolü (İPK)” denilmektedir. İkincisi ise üretim

²⁰ Faruk Akün; İstatistik ve Kalite Kontrolü, İTÜ Yayınları, No:923, İstanbul, 1973, s.1-2.

²¹ Kobu; Age., 1994, s.489.

tamamlandıktan sonra, ürünün kabulünde yapılan kontroldür. Buna da “Kabulde Kalite Kontrolü” denilmektedir.²² Bu bölümde istatistiksel proses kontrolü (İPK) izah edilecektir.

1.2. İstatistiksel Proses Kontrolü (İPK)

İstatistiksel proses kontrolü (İPK)’nü meydana getiren üç kelime onun anlamı hakkında bize gerekli bilgiyi verir. İlk kelime olan istatistik, sayısal bilgilerin toplanması, düzenlenmesi ve analiz edilmesine işaret eder. İkinci kelime olan proses, bir grup girdileri çıktılar haline dönüştürmek amacıyla bir araya gelen insan, makine ve/veya ekipman, materyal, metot ve çevre gibi faktörlerin kombinasyonunu ifade eder. Son kelime olan kontrol ise proseste üretilen mamulde meydana gelebilecek değişimleri belirlemeyi ve bu değişimlere göre prosesin girdilerini değiştirmeyi ifade eder. Kısaca istatistiksel proses kontrolünün amacı çoğu proseste ortaya çıkabilecek belirlenebilir değişkenliği azaltmaktır.²³

İstatistiksel proses kontrolü (İPK) ile ilgili yapılan tanımlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

* İstatistik kuram ve tekniklerin, tasarım, üretim ve hizmetlerin her kademesinde uygulanmasıdır.²⁴

* Bir ürünün örneklenmesinde ve kaliteyi etkileyen değişkenlerin kontrol altında tutulmasında kullanılan istatistiksel yöntemlerdir.²⁵

* Bir ürünün en ekonomik ve yararlı bir şekilde üretilmesini sağlamak amacıyla istatistik prensip ve tekniklerinin üretimin tüm aşamalarında kullanılmasıdır.²⁶

* İstatistiksel proses kontrolü, prosesin kontrol altında tutulması, prosesin gözlenmesi ve belirlenebilir değişkenliğinin elimine edilmesidir.²⁷

* İstatistiksel proses kontrolü, değişkenliği azaltma esnasında prosesin koruma ve düzeltme yeteneğine sahip olan etkili problem çözme araçlarının toplamıdır.²⁸

İPK’da üretim sürecinin önceden belirlenmiş spesifikasyon ve standartlara

²² Mahmut Kartal; İstatistiksel Kalite Kontrolü, Şafak Yayınevi, Erzurum, 1999, s.4.

²³ Barrie Dale – John Oakland; Quality Improvement Through Standards, Stanley Thornes Inc., 1991, s.190.

²⁴ A. N. Uğur – H. Çaltuğ; İstatistik Kalite Kontrol, KOSGEB Yay., Ankara, 1994, s.1.

²⁵ Kalite Sistemine Hazırlık (Seminer Notları); KOSEM Yay., Ankara, s.20.

²⁶ Besim Akın; İşletmelerde İstatistik Proses Kontrol (İPK) Teknikleri, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul, 1996, s.2.

²⁷ J. T. McClave – P. G. Benson; Statistics for Business and Economics, 6th Edition, MacMillan Publishing, New York, 1994, s.717.

²⁸ Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, Second Edition, John Wiley Inc., 1991, s.101.

uygun bir şekilde cereyan edip etmediği araştırılır. Ancak aynı üretim metodu ve aynı makine kullanıldığı halde üretilen mamuller hiçbir zaman birbirlerinin aynı olmayabilir. Hatta üzerinde durulan özelliklerde bile bir kısım farklılıklar ortaya çıkabilir.²⁹ İnsanoğlu, eliyle veya otomatik makinelerle üretim yapsa dahi, bazı nedenlerle üretimde bir takım dalgalanmalar olacaktır. Buna istatistik dilinde değişkenlik adı verilir.³⁰ Üretilen her mamulde yada o mamulü oluşturan parçaların ölçü ile ifade edilebilen kalite karakteristiklerinde her zaman belli bir değişkenliğin gözlenmesi normaldir. Bu değişkenliğin ortadan kaldırılması ya da çok yüksek maliyetlidir.³¹

Yukarıda ifade edildiği gibi bütün üretim sistemlerinde mutlaka bir miktar değişkenlik gözlemlenir. Bu değişkenliğin iki kaynağı vardır. Bu kaynakların ilki şans faktörlerinden kaynaklanan değişkenlik, ikincisi ise belirlenebilir özel sebeplerden kaynaklanan değişkenliktir. Bütün üretim proseslerinde teorik olarak azaltılması veya ortadan kaldırılması mümkün olan; ancak, uygulamada önüne geçilemeyen ve tesadüfi sebeplerden kaynaklanan birinci tür değişkenlik genellikle önlenemez. Bununla birlikte bu tür değişkenlik genelde proses performansını aşırı derecede etkilemeyecek kadar küçük olup kabul edilebilir bir seviyededir.

Bütün proseslerde görülebilecek ikinci değişkenlik türü, belirlenebilir özel sebeplerden oluşur. Bu özel sebepler makine, operatör, malzeme ve hammadde gibi spesifik nedenlere bağlı olarak oluştukları için şans faktörlerinden kaynaklanmaz. Bu sebeplere göre daha önemlidir. Bu tür değişkenliğe yol açan sebepler mutlaka bulunup giderilmelidir.

İstatistiksel proses kontrolünün temel amacı kalitedeki değişimleri ve bu değişimlerin nedenlerini bulup ortaya çıkarmaktır.³² İstatistiksel proses kontrolü, hammadde veya parçaların üretim sistemine girmesinden mal ve hizmet olarak çıkmasına kadar çeşitli aşamalarda uygulanır. Yapılan denetimlerle kalite spesifikasyonları ile muayene sonuçları arasındaki farklar belirlenir. Şayet farklar istenilen sınırların dışında ise sapma nedenleri belirlenip düzeltici kararların zamanında alınması gerekir. Üretimin ara aşamalarında yapılan proses kontrolüyle üretime devam edilip edilmeyeceğine veya hangi noktalarda düzeltme yapılması gerektiğine dair

²⁹ Ömer Yağız; Kalite Planlaması ve Kontrolü (Seminer Notları), SEGEM Yay., Ankara, 1981, s.5.

³⁰ Kalite Sistemine Hazırlık; Age., s.22.

³¹ Yağız; Age., s.5.

³² Montgomery; Age., 1991, s.103.

kararlar verilir. İstatistiksel proses kontrolü, üretim sırasında, belirlenebilir özel nedenlerin yol açtığı kalite problemlerinin erken teşhis edilmesini sağlar. Böylece üretimde meydana gelebilecek fire ve kayıplara önceden engel olunabilir. Fire, kayıp ve kusurların azaltılması beraberinde verim artışını getirir. Müşteriye ulaşacak mal ve hizmetlerin kaliteli oluşu müşteri memnuniyetini artırarak işletme prestijini yükseltir.³³

İstatistiksel proses kontrolü son yıllarda önemli bir bilim dalı haline gelmiştir. İPK dünya çapında birçok firma tarafından vazgeçilemeyen bir araç olmuştur. İPK'nın uygulandığı firmalarda bu metotların çalışanlar üzerindeki etkisini de gözardı etmemek gerekir. İPK'nın uygulanması; şahıslara, istatistiksel metotların kullanımını anlatmada büyük ölçüde yardımcı olur ve onları ileri düzeyde istatistiksel metotları kullanmaya teşvik eder.³⁴

İPK'nın faydaları aşağıdaki gibi sıralanabilir.³⁵

- *Yüksek düzeyde kalite,
- *Tamir ve ıskartalardaki azalmalar nedeniyle kayıpların azalması,
- *Daha iyi planlama ve denetim nedeniyle daha etkili muayene,
- *İşçi ve makine açısından artan üretim hızı,
- *Tasarım toleranslarında iyileşme,
- *Birim maliyetin düşmesi,
- *Kontrol faaliyetlerinin azalması,
- *Kalite maliyetlerinin düşmesi,
- *Makine ve proses yeterliliğinin izlenmesi,
- *Düzeltilici ve önleyici faaliyetlerin belirlenmesi.

1.2.1. İstatistiksel proses kontrol metotları

Bir ürünün tüketiciler tarafından uygunluk kriterinin sağlanabilmesi için ürün durağan bir proses ile üretilmelidir. Bu tür proseslerde kalite karakteristikleri; ürünün hedeflenen veya nominal boyutları etrafında çok az bir değişkenlikle üretilebilmeye imkan verecek şekilde olmalıdır. İPK, değişkenliği azaltarak prosesi kontrol altında

³³ Yağız; Age., s.20.

³⁴ Dale – Oakland; Age., s.190-191.

³⁵ Sıtkı Gözlü; Endüstriyel Kalite Kontrolü, İTÜ Yay., İstanbul, 1990, s.75.

tutan ve düzeltebilen etkili problem çözüm aracıdır.³⁶ İPK herhangi bir prosese uygulanabilir metotlar dizisidir. İPK'nın yedi temel metodu aşağıdaki gibi sıralanabilir:³⁷

- *Histogram,
- *Kontrol tablosu,
- *Pareto diyagramı,
- *Sebep-sonuç diyagramı,
- *Gruplandırma şeması,
- *Serpilme diyagramı,
- *Kontrol grafikleri.

Kalite kontrol literatüründe “muhteşem yedili” olarak adlandırılan bu metotlar İPK'nın teknik yönünü ihtiva eder. Kalite kontrol organizasyonu, İPK metotlarını kullanarak kalite ve üretimde sürekli düzelme yapmayı arzu eder.³⁸

Temel kabul edilen bu metotlar kalite kontrolünde sık kullanılan ve öğrenilmesi kolay olan metotlardır. Bunlar, işletmenin tüm kademelerinde bulunan herkesin kullanması gereken metotlardır. Bu metotlar sadece üretimde değil; planlama, tasarım, pazarlama, satın alma ve teknoloji geliştirme gibi departmanlarda da kullanılabilir.³⁹ Yukarıda sıraladığımız yedi metottan başka orta ve ileri derecede istatistiksel proses kontrol metotları da mevcuttur.

Orta derecede istatistiksel proses kontrol metotları: Bu metotlar, örnekleme teorisi, istatistiksel örnekleme muayenesi, istatistiksel tahmin ve testler, duyarlılık testleri ve deneme metotlarıdır. Bu metotlar genel olarak mühendisler ve kalite kontrol geliştirme bölümü görevlilerince uygulanmaktadır. Bunların içinde en çok kullanılan metot ise örnekleme ile ilgili olan metotlardır.

İleri derecede istatistiksel proses kontrol metotları: Bu metotlar ise çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları, ileri düzeyde deneme metotları, ve çeşitli yöneylem araştırması yöntemleridir. İleri derecede istatistiksel proses kontrol metotlarının düzenlenmesi için bilgisayar paket programları geliştirilmiştir. Bu paket

³⁶ Montgomery; Age., 1991, s.101.

³⁷ John S. Oakland – Roy F. Followell; Statistical Process Control: A Practical Guide, Second Edition, Heinemann Pub., 1990, s.33.

³⁸ Montgomery; Age., 1991, s.102.

³⁹ Akın; Age., s.32.

programlar yardımıyla İPK uygulaması yapılabilir. Bu metotlar mühendis ve teknisyenler tarafından karmaşık proses ve kalite analizlerinde kullanılır.⁴⁰

Endüstriyel iş kollarında, istatistiksel teknikler çoğunlukla analiz aracı olarak kullanılmaktadır. İPK analizlerinin %95'i temel istatistiksel teknikler yardımıyla gerçekleştirilebilmektedir. Çelik ve cam prosesleri gibi karmaşık proseslerde orta ve ileri istatistiksel proses kontrol metotları gerekli olabilmektedir.⁴¹

1.2.2. Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları

Proses performansının, birbirleriyle ilişkili değişkenlerin değişimine bağlı çok sayıda endüstriyel prosesler bulunmaktadır. Bu tür prosesler ham madde olan girdiyi çeşitli ürünler elde edilecek şekilde çıktıya dönüştürmek için dizayn edilir. Örneğin doğal gaz, buhar veya elektrik şeklinde enerjiye dönüştürülmek istenebilir. Bu tür üretimler ile ilgili örnekler çoğaltılabilir. Burada asıl üzerinde durulan konu, bu proseslerin değişkenlerinde meydana gelebilecek değişimleri tespit edecek kontrol metodunu geliştirmektir. Bir diğer konu ise bu tür prosesleri kontrol etmek için tek değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının kullanılıp kullanılamayacağıdır. Bu amaçla öncelikli olarak tek değişkenli istatistiksel proses kontrol (İPK) metotları ile çok değişkenli metotlar arasındaki farklılıkları izah etmek yararlı olacaktır. Metotlar arasındaki en önemli fark değişken sayısı olmasına rağmen çok daha önemli farklılıklar vardır. Bu farklılıklardan biri, çok değişkenli proseslerden elde edilen değişkenlerin çoğu zaman birbirleriyle ilişkili olmasıdır. Bu tür değişkenler birbirleriyle bağımlı olduğundan bu değişkenler kontrol edilmek istenildiğinde ayrı ayrı değil birlikte incelenmelidir.⁴²

Birden fazla değişkenin ele alındığı proseslerin kontrolü iki şekilde yapılabilir. Bunların ilki, her bir değişken için ayrı ayrı tek değişkenli kontrol grafiği düzenlemektir. Kalite değişkenleri birbirinden bağımsız olduğunda bu şekilde prosesin kontrol etmek uygun bir yol gibi görünebilir. Ancak değişkenler arasında bağımlılık olduğunda bu yola başvurmak yanlış sonuçların elde edilmesine neden olabilir.⁴³ Şöyle ki birbirinden bağımsız iki kalite değişkeni için tek değişkenli kontrol grafiği

⁴⁰ Kaoru Ishikawa; Toplam Kalite Kontrol, Çev: KalDer, KalDer Yay., No:7, İstanbul, 1995, s.197.

⁴¹ Akın; Age., s.32-33.

⁴² Robert L. Mason – John C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.5.

⁴³ Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, 4th Edition, John Wiley Inc., 2001, s.509.

düzenlendiğinde söz konusu değişkenlerinin 3 sigma kontrol sınırlarını aşma olasılığı 0.0027 olmaktadır. Oysa proses kontrol altında iken bu değişkenlerin eşanlı olarak kontrol sınırlarını aşması olasılığı $(0.0027) \times (0.0027) = 0.00000729$ olacaktır, ki bu değer 0.0027 değerinden oldukça küçük bir değerdir. Dahası proses kontrol altında iken her iki değişkenin eşanlı olarak kontrol sınırlarının içerisine düşme olasılığı ise $(0.9973) \times (0.9973) = 0.99460729$ olmaktadır.⁴⁴ Dolayısıyla her bir kalite değişkeni için ayrı ayrı tek değişkenli kontrol grafiği düzenlemek söz konusu değişkenlerin eşanlı kontrolü ile aynı sonucu vermemektedir. İkinci durum ise kalite değişkenleri arasındaki bağımlılığı dikkate alan çok değişkenli kalite kontrol metotlarını kullanmaktır.⁴⁵

Çok değişkenli istatistiksel proses kontrolü tek değişkenli istatistiksel proses kontrolünün çok değişken için genelleştirilmiş halidir.⁴⁶ Çok değişkenli kalite kontrolü, sürecin kontrol altında olup olmadığını en az iki kalite değişkenini eşanlı inceleyerek proses hakkında daha doğru sonuca varılmasını sağlayan bir araç olarak tanımlanabilir.⁴⁷ Bir başka tanımda çok değişkenli istatistiksel proses kontrolü, çok değişkenli prosesleri gözlemek için kullanılan kontrol grafiklerine dayalı bir yöntem bilimi olarak tanımlanmıştır.⁴⁸ En yaygın olarak kullanılan çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları aşağıdaki gibi sıralanabilir;

* Hotelling T^2 kontrol grafiği,

* MCUSUM [Çok değişkenli kümülatif toplam (CUSUM)] metodu,

* MEWMA (Çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama kontrol grafiği).

Bu metotların dışında temel bileşenler analizi, Andrew çizim tekniği, çok değişkenli profil grafiği, starplots, polyplot, çok değişkenli boxplot ve PLS gibi çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları bulunmaktadır.⁴⁹

Tek değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının dezavantajlarından biri, proseste birden fazla değişken olduğu halde bu değişkenler dikkate alınmadan sadece bir değişkenin kontrol edilmesidir. Bu durum prosesin kontrolünde bilgi kaybına neden

⁴⁴ F. Aparisi; "Hotelling's T^2 Control Chart with Adaptive Sample Sizes", International Journal of Production Research, Vol:34, No:10, 1996, s.2853.

⁴⁵ Montgomery; Age., 2001, s.509.

⁴⁶ E. B. Martin-A. J. Morris-C. Kiparissides; "Manufacturing Performance Enhancement Through Multivariate Statistical Process Control", Annual Reviews in Control, Vol:23, 1999, S.36.

⁴⁷ Fusun Z. Özkan; Kalite Kontrolünde Kullanılabilen Çok Değişkenli İstatistik Yöntemlerin Normallikten Sapmadan Etkilenme Bakımından Karşılaştırılmaları, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayınlanmamış Doktora Tezi, 1994, s.3.

⁴⁸ Mason – Young; Age., s.6.

⁴⁹ S. Ümit Oktay Fırat – Çiğdem Arıcıgil Cilan; Multivariate Statistical Process Control Methods and New Approaches, The 6th TQM World Congress, Saint Petersburg, 2001.

olur. Oysa çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları, proseste iki veya daha çok sayıda değişkenin eşanlı kontrolünü sağlayarak bu dezavantajı ortadan kaldırır. Böylece çok değişkenli metotlar kullanılarak karmaşık prosesler incelenip prosesin kontrol altında olup olmadığı gözlemlenebilir.

Çok değişkenli istatistiksel proses kontrolü, tek değişkenli İPK'ya nazaran pek çok avantaj sağlayan bir ortamda üretimin kontrol edilmesini sağlar. Esas olarak çok değişkenli proses kontrolü tek değişkenli İPK'dan daha karmaşık olsa da çok değişkenli metotlar kontrolü yapılan verinin gerçeğe daha uygun bir görüntüsünü verir. Çünkü pratikte prosesler çoğu zaman birbirleriyle ilişkili birden fazla değişkene sahip olur.⁵⁰

Ham maddenin kimyasal olarak işlendiği kimya endüstrileri gibi bir çok endüstri için çok değişkenli prosesler temel teşkil etmektedir. Kimyasal proseslere en güzel örnek klor gazı ve kostik soda üretimidir. Bu tür proseslerde incelenen değişkenlerin çoğu arasında yüksek bir korelasyon mevcuttur. Çok değişkenli proseslerin değişkenleri arasındaki korelasyon ya bu değişkenler arasındaki ilişkiden yada değişkenler arasındaki sebep sonuç ilişkisinden kaynaklanabilir.⁵¹

1.2.2.1. Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının özellikleri

Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarında aşağıda belirtilen beş özelliğin bulunması gerekir. Bunlar;

- * Prosesi incelemede kullanılacak metot, grafikleştirilebilmeli ve prosesin değişimini kolaylıkla tespit edebilmelidir.

- * Proseste bir kontrol dışı sinyali meydana geldiğinde bu kontrol dışı sinyale neden olan değişken veya değişkenlerin katkısı kolay bir şekilde belirlenebilmelidir.

- * Prosesi incelemede kullanılacak metot farklı uygulamalar için esnek olmalıdır.

- * Metot, proseste ortaya çıkabilecek küçük fakat aynı zamanda sürekli değişimlere karşı duyarlı olmalıdır.

- * Metot, hem proses kontrol altında iken hem de proseste bir kontrol dışı durumu olduğunda prosesi inceleme yeteneğine sahip olmalıdır.

İyi bir grafiksel kontrol metodu, proseste meydana gelebilecek bir kontrol dışı

⁵⁰ Multivariate Statistical Process Control; <http://www.sys.virginia.edu/mqc/index2.html>, s.1-3.

⁵¹ Mason – Young, Age., s.5-6.

sinyalinin hızlı bir şekilde tespit edilmesini mümkün kılacağı gibi; prosesin değişiminin belirlenmesinde de yardımcı olur. Grafik üzerinde işaretlenen değerler incelenerek prosesin durumu gözlemlenir ve proses kontrol dışına çıkmadan önce bu kontrol dışı duruma neden olabilecek şartlar ortadan kaldırılır.

Kontrol metodunun iyi anlaşılması için incelenecek proseste belirli değişkenler göz ardı edilmeksizin kontrol edilecek parçaya ait bütün değişkenler hesaba katılmalıdır. Aynı şartlar, proseste ortaya çıkabilecek kontrol dışı veya karmaşık durumları önceden gösteren değişken durumlarının tespit edilmesi için de geçerlidir. Bu özelliğe sahip bir kontrol metodu prosesin kontrol edilmesi için değerli bir araçtır.

Bir kontrol metodu, hem zamandan bağımsız hem de zamana bağımlı proses gözlem değerlerine uygulanabildiği gibi; aynı zamanda sürekli proseslere de uygulanabilir olmalıdır. Örnek ortalaması veya bireysel gözlem değerleri gibi değişik şekillerdeki kontrol istatistiklerine uygulanmasında esnek olmalıdır.

Çoğu endüstri kolunda üretim miktar ile ilişkilidir. Bu nedenle bu tür endüstrilerde yapılan hızlı ve verimli üretim sırasında meydana gelebilecek küçük değişimler kâr veya zararın oluşumunda etkili olur. Kontrol edilen proseste ortaya çıkabilecek küçük değişimlere duyarlılık, herhangi bir çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metodu için gerekli bir unsurdur.⁵²

Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları matematiksel işlem ağırlıklıdır. Bu durum endüstriyel proseslerin bilgisayar yardımıyla kontrol edilmesi zorunluluğunu ortaya çıkarmıştır.⁵³ Endüstriyel proses kontrol metotlarındaki ilerlemeler mevcut verilerin miktar ve kalitesini oldukça arttırmıştır. Elektronik veri tabanlarının kullanımı, üretimin her aşamasından elde edilen çok fazla sayıda değişkenlere ait verilerin toplanmasını kolaylaştırmıştır. Birçok durumda çok fazla sayıda değişken ve bu değişkenlere ait binlerce gözlem değeri ile çalışılabilir. Bunlar, çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metodunda kullanılacak veri setleridir.⁵⁴

⁵² Mason – Young, Age., s.9.

⁵³ R. L. Mason-C. W. Champ-N. L. Tracy-S. J. Wierda-J. C. Young; "Assessment of Multivariate Process Control Techniques", Journal of Quality Technology, Vol:29, No:2, 1997, s.141.

⁵⁴ Mason – Young, Age., s.9.

İKİNCİ BÖLÜM

2. HOTELLING T^2 KONTROL GRAFİKLERİ

Hotelling T^2 kontrol grafikleri izah edilmeden önce konunun daha iyi anlaşılması amacıyla bu bölümde tek değişkenli Shewhart kontrol grafikleri izah edilecektir. Daha sonra çok değişkenli Hotelling T^2 kontrol grafikleri anlatılacaktır.

2.1. Shewhart Kontrol Grafikleri

Söz konusu kontrol grafikleri, ilk olarak Dr. Walter A. Shewhart tarafından ortaya konulduğundan dolayı “Shewhart kontrol grafikleri” olarak adlandırılır.¹ Günümüzde yaygın olarak kullanılan Shewhart kontrol grafikleri küçük örneklem hacimlerinde bile anakütle parametreleri hakkında tutarlı tahminler yapmaktadır. Söz konusu kontrol grafikleri prosesten alınan örneklerin kalite özelliklerinin grafik üzerinde çizilmiş olan kontrol sınırları ile karşılaştırmasını gösteren bir araçtır.²

Shewhart kontrol grafikleri temel olarak nicel ve nitel kontrol grafikleri olmak üzere iki ana başlık altında aşağıdaki gibi sınıflandırılır:³

Nicel kontrol grafikleri:

- * Ortalama ($\bar{X}$) ve değişim aralığı (R) kontrol grafikleri,
- * Ortalama ($\bar{X}$) ve standart sapma (S) kontrol grafikleri,
- * Medyan ve değişim aralığı (R) kontrol grafikleri,
- * Bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri.

Nitel kontrol grafikleri:

- * Kusurlu oranı (p) kontrol grafiği,
- * Kusurlu sayısı (np) kontrol grafiği,
- * Örnek başına kusur sayısı (c) kontrol grafiği,
- * Birim başına kusur sayısı (u) kontrol grafiği.

¹ D. M. Hawkins – D. H. Olwell; Statistics for Engineering and Physical Science: Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement, Springer – Verlag Inc., New York, 1998, s.6.

² C. A. Bicking – F. Jr. M. Gryna; Process Control by Statistical Methods, Quality Control Handbook, Third Edition, McGraw – Hill Inc., New York, 1974, s.23.

³ G. Smith; Statistical Process Control and Quality Improvement, MacMillan Publishing, 1993, s.53-55.

Tezin uygulama bölümünde sadece nicel değişkenler üzerinde durulacağından dolayı bu bölümde sadece nicel değişkenler için düzenlenen Shewhart kontrol grafikleri üzerinde durulacaktır. Bu kontrol grafiklerinde de ortalama ($\bar{X}$) ve değişim aralığı (R) kontrol grafikleri ile bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri anlatılacaktır.

2.1.1. Shewhart kontrol grafiklerinin düzenlenmesi

Ortalaması μ ve standart sapması σ olan bir anakütleden n birimlik örnekler çekildiğinde; bu örneklerin dağılımı, $\mu_{\bar{x}}$ ve $\sigma_{\bar{x}}$ ile normal dağılıma uygunluk gösterir. Bu örneğin ortalaması,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (2.1)$$

şeklinde hesaplanır. Şayet μ ve σ değerleri biliniyorsa, bu anakütleden alınan herhangi bir örneğe ait ortalamanın $(1 - \alpha)$ güven sınırları,

$$\mu - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} = \mu + Z_{\alpha/2} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.2)$$

$$\mu + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} = \mu - Z_{\alpha/2} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.3)$$

eşitlikleri ile hesaplanır.⁴ Burada μ ve σ bilindiğinde Formül 2-2 ve Formül 2-3 kullanılarak örnek ortalamaları için kontrol grafiğine ait alt ve üst kontrol sınırları hesaplanabilir. Bu eşitliklerdeki $Z_{\alpha/2}$ ifadesi, 3-sigma sınırlarını kapsayacak şekilde 3 olarak alınır.⁵ Örnek ortalama değerlerinden herhangi biri bu kontrol sınırlarının dışına düştüğünde proses ortalamasının μ değerine eşit olmadığı kabul edilir.

Pratikte μ ve σ değerleri genellikle bilinmez. Bu yüzden, proses kontrol altında iken alınan örneklerden, bu iki değer tahmin edilmelidir. Tahmin yapılırken en az 20 ile 25 örnek üzerinden tahmin yapılmalıdır. Tahmin yapmada, genellikle 4, 5 veya 6 gibi örnek hacimleri kullanılır. Bu gibi küçük örneklem hacimleri, rasyonel alt grupların oluşturulması, örnekleme ve muayene maliyetlerinin nispeten yüksek olması durumlarında tercih edilir. $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ 'in örneklere ait ortalamaları göstermek

⁴ Jerry Banks; Principles of Quality Control, John Wiley and Sons. Inc., 1989, s.185.

⁵ Barrie Dale – John Oakland; Quality Improvement Through Standards, Stanley Thornes Ltd., 1991, s. 199.

üzere proses ortalaması,

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} \quad (2.4)$$

eşitliği ile hesaplanır. Formüldeki $\bar{\bar{X}}$ değeri ortalama kontrol grafiğinde orta çizgi olarak kullanılır. $\bar{X}$ grafiğindeki kontrol sınırlarını tayin etmede standart sapmanın (σ) tahminine ihtiyaç duyulur. σ 'yı tahmin etmede, m adet örneğe ait standart sapma veya değişim aralığı değerlerinden yararlanılabilir.⁶

$\bar{X}$ kontrol grafiği S veya R kontrol grafiği ile birlikte kullanılır. Bunun nedeni, ortalamalar aynı olmakla beraber standart sapmalar veya değişim aralıkları büyük olup proses kontrol dışı olabilir. Herhangi bir prosesten sırasıyla iki örnek alındığında iki örneğin ortalaması aynı olmakla beraber dağılımları farklı olabilir. Yani sonradan alınan örneğin standart sapması veya değişim aralığı önceki örneğinkinden büyük olabilir. Bu durumda proses sadece $\bar{X}$ kontrol grafiği ile kontrol edildiğinde ürünlerin bir kısmı kontrol dışına çıktığı halde bu durum fark edilemeyebilir. Benzer şekilde standart sapmaları veya değişim aralıkları aynı olan iki örneğin ortalamaları farklı olabilir. Böylece sadece S veya R kontrol grafikleri ile proses kontrol etmek yanlış sonuçların elde edilmesine neden olabilir.⁷

2.1.2. Ortalama ($\bar{X}$) ve değişim aralığı (R) kontrol grafikleri

Eğer n hacimli bir örneğin değerleri, $X_1, X_2, \dots, X_n$ şeklinde gösterildiğinde en küçük ile en büyük örnek değerleri arasındaki farka örnek değişim aralığı denir. Söz konusu değişim aralığı,

$$R = X_{\max} - X_{\min} \quad (2.5)$$

formülü ile hesaplanır. m adet örnek üzerinden hesaplanan değişim aralığı değerleri, $R_1, R_2, \dots, R_m$ ile gösterildiğinde, ortalama değişim aralığı,

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (2.6)$$

formülü ile hesaplanır.⁸ Normal dağılım gösteren bir anakütleden alınan bir örneğe ait

⁶ Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, 4th Edition, John Wiley Inc., 2001, s.208-209.

⁷ Mahmut Kartal; İstatistiksel Kalite Kontrolü Şafak Yayınevi, Erzurum, 1999, s.59-60.

⁸ Montgomery; Age., s.209.

değişim aralığı ile dağılımın standart sapması arasında, $W=R/\sigma$ şeklinde bir ilişki vardır. Burada W tesadüfi değişkeni, nispi değişim aralığını ifade etmektedir. W dağılımının parametreleri, örnek hacmi n 'in bir fonksiyonu olup W 'nin ortalaması d_2 'dir. Böylece σ 'nın tahmini değeri,

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilebilir.⁹ S^2 'nin tahmin edilmesinde $n > 10$ gibi büyük örnek hacimlerinin kullanılması halinde değişim aralığı metodu etkinliğini kaybeder. Çünkü, değişim aralığı metodunda X_{max} ve X_{min} arasındaki değerlerin büyüklüğü dikkate alınmaz. Bununla beraber R kontrol grafiği düzenlendiğinde n örnek hacmi, $4 \leq n \leq 8$ aralığında olduğu zaman değişim aralığı metodu iyi sonuçlar verir.¹⁰

Böylece μ 'nün tahmini olarak $\bar{\bar{X}}$ ve σ 'nın tahmini olarak $\bar{R}/d_2$ değeri kullanıldığında, $\bar{X}$ kontrol grafiği için kontrol sınırları,

$$\begin{aligned} \text{ÜKS} &= \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} \\ \text{OÇ} &= \bar{\bar{X}} \\ \text{AKS} &= \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde hesaplanır. Formüllerde ÜKS, üst kontrol sınırını gösterirken, AKS alt kontrol sınırını ve OÇ ise orta çizgiyi ifade etmektedir.¹¹ Bu formüllerde,

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \quad (2.9)$$

yerine yazıldığında söz konusu formüller,

$$\begin{aligned} \text{ÜKS} &= \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} \\ \text{OÇ} &= \bar{\bar{X}} \\ \text{AKS} &= \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} \end{aligned} \quad (2.10)$$

şeklini alır.¹² Formüllerde yer alan A_2 değeri sadece örnek hacmine bağlı bir sabittir.

⁹ Acheson J. Duncan; Quality Control and Industrial Statistics, 5th Edition, Richard D. Irwin Inc., 1986, s.437.

¹⁰ Banks; Age., s.186.

¹¹ Mark L. Berenson – David M. Levine; Basic Business Statistics: Concepts and Applications, 5th Edition, Prentice Hall Inc., 1992, s. 841.

¹² Duncan; Age., s.437.

Söz konusu değer hazırlanmış olan tablodan tespit edilir. Değişik örnek hacimlerine karşılık A_2 sabitinin aldığı değerler ve nicel kontrol grafiklerinin düzenlenmesinde kullanılan faktör değerleri Tablo 2-1’de verilmiştir. Kontrol sınırları tespit edildikten sonra yatay eksenle örnek numaraları ve dikey eksenle bu numaralara karşılık gelen ortalama değerleri işaretlenerek $\bar{X}$ kontrol grafiği düzenlenir. Örnek bir $\bar{X}$ kontrol grafiği Şekil 2-1’de verilmiştir.¹³

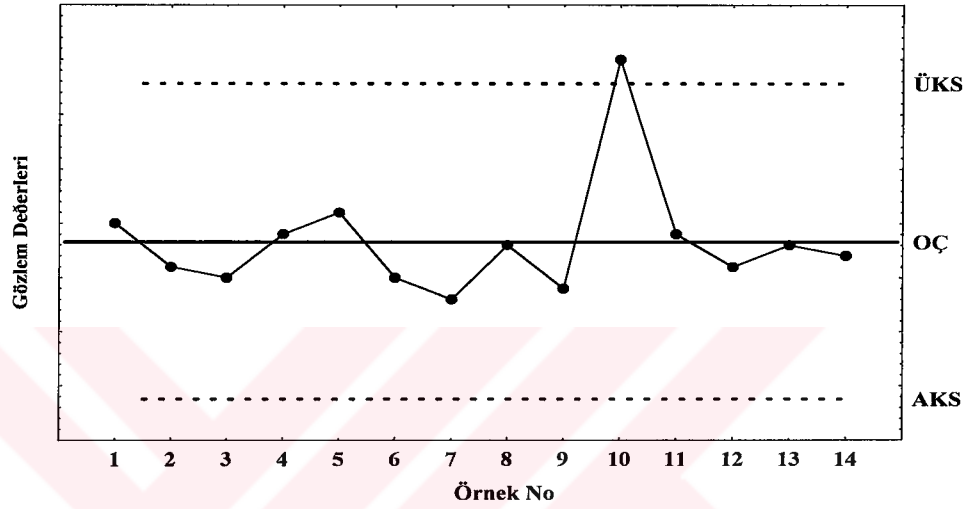
Tablo 2-1: Kontrol grafiklerinin düzenlenmesinde kullanılan faktörler

n	$\bar{X}$ Kontrol		R Kontrol Grafiği			S Kontrol Grafiği			σ Kontrol Grafiği		
	A	A_2	d_2	D_3	D_4	c'_2	B'_2	B'_4	c	B_2	B_4
2	2.121	1.880	1.128	0.000	3.267	0.798	0.000	2.298	0.5642	0.000	3.267
3	1.732	1.023	1.693	0.000	2.575	0.886	0.000	2.111	0.7236	0.000	2.568
4	1.500	0.729	2.059	0.000	2.282	0.921	0.000	1.982	0.7979	0.000	2.266
5	1.342	0.577	2.326	0.000	2.115	0.940	0.000	1.889	0.8407	0.000	2.089
6	1.225	0.483	2.534	0.000	2.004	0.951	0.085	1.817	0.8686	0.030	1.970
7	1.134	0.419	2.704	0.076	1.924	0.960	0.158	1.762	0.8882	0.118	1.882
8	1.061	0.373	2.847	0.136	1.864	0.965	0.215	1.715	0.9027	0.185	1.815
9	1.000	0.337	2.970	0.184	1.816	0.969	0.262	1.676	0.9139	0.239	1.761
10	0.949	0.308	3.078	0.223	1.777	0.973	0.302	1.644	0.9227	0.284	1.716
11	0.905	0.285	3.173	0.256	1.744	0.976	0.336	1.616	0.9300	0.321	1.679
12	0.866	0.266	3.258	0.283	1.717	0.977	0.365	1.589	0.9359	0.354	1.646
13	0.832	0.249	3.336	0.307	1.693	0.980	0.392	1.568	0.9410	0.382	1.618
14	0.802	0.235	3.407	0.328	1.672	0.981	0.414	1.548	0.9453	0.406	1.594
15	0.775	0.223	3.472	0.347	1.653	0.982	0.434	1.530	0.9490	0.428	1.572
16	0.750	0.212	3.532	0.363	1.637	0.984	0.454	1.514	0.9523	0.448	1.552
17	0.728	0.203	3.588	0.378	1.622	0.984	0.469	1.499	0.9551	0.466	1.534
18	0.707	0.194	3.640	0.391	1.608	0.986	0.486	1.486	0.9576	0.482	1.518
19	0.688	0.187	3.689	0.403	1.597	0.986	0.500	1.472	0.9599	0.497	1.503
20	0.671	0.180	3.735	0.415	1.585	0.987	0.513	1.461	0.9619	0.510	1.490
21	0.655	0.173	3.778	0.425	1.575	0.988	0.525	1.451	0.9638	0.523	1.477
22	0.640	0.167	3.819	0.434	1.566	0.988	0.536	1.440	0.9655	0.534	1.466
23	0.626	0.162	3.858	0.443	1.557	0.989	0.546	1.432	0.9670	0.545	1.455
24	0.612	0.157	3.895	0.451	1.548	0.989	0.556	1.422	0.9684	0.555	1.445
25	0.600	0.153	3.931	0.459	1.541	0.990	0.566	1.414	0.9696	0.565	1.435

Kaynak: William H. Beyer; CRC Standart Probability and Statistics Tables and Formulae, CRC Press Inc., 1991, s.349.

¹³ Banks; Age., s.187.

$\bar{X}$ kontrol grafiği düzenlendikten sonra değişim aralığı (R) kontrol grafiği düzenlenir. Yukarıda değişim aralığı değeri ile proses standart sapması arasındaki ilişki verilmişti. Bu durumda kontrol grafiği üzerinde işaretlenen örnek değişim aralıklarıyla proses değişkenliğini izleme ve kontrol etmenin mümkün olduğu söylenebilir. Bu grafik, değişim aralığı (R) kontrol grafiği olarak adlandırılır.



Şekil 2-1: Örnek bir $\bar{X}$ kontrol grafiği

Kaynak: Dale H. Besterfield; Quality Control, Third Edition, Prentice Hall Inc., 1990. s.67.

R kontrol grafiğinin kontrol sınırları kolayca tespit edilebilir. Kontrol grafiğinde orta çizgi, değişim aralıklarının ortalaması ($\bar{R}$) olacaktır. Kontrol sınırlarını tespit etmek için bir σ_R tahminine ihtiyaç duyulur. Üzerinde durulan kalite karakteristiğinin normal dağıldığı farz edildiğinde; $\hat{\sigma}_R$ değeri, nispi değişim aralığını ifade eden $W=R/\sigma$ değerinden bulunabilir. W 'nin standart sapması d_3 , n 'in bilinen bir fonksiyonudur. $W=R/\sigma$ ifadesinden hareketle,

$$R=W\sigma \quad (2.11)$$

eşitliği yazılabilir. R 'nin standart sapması ise

$$\sigma_R=d_3\sigma \quad (2.12)$$

olarak elde edilir. σ bilinmediğinden dolayı σ_R değeri,

$$\hat{\sigma}_R = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (2.13)$$

eşitliğinden elde edilebilir. Böylece 3-sigma sınırlarıyla ifade edilen bir R kontrol grafiğinin kontrol sınırları,

$$\begin{aligned}\bar{ÜKS} &= \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \\ OÇ &= \bar{R} \\ \bar{AKS} &= \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}\end{aligned}\quad (2.14)$$

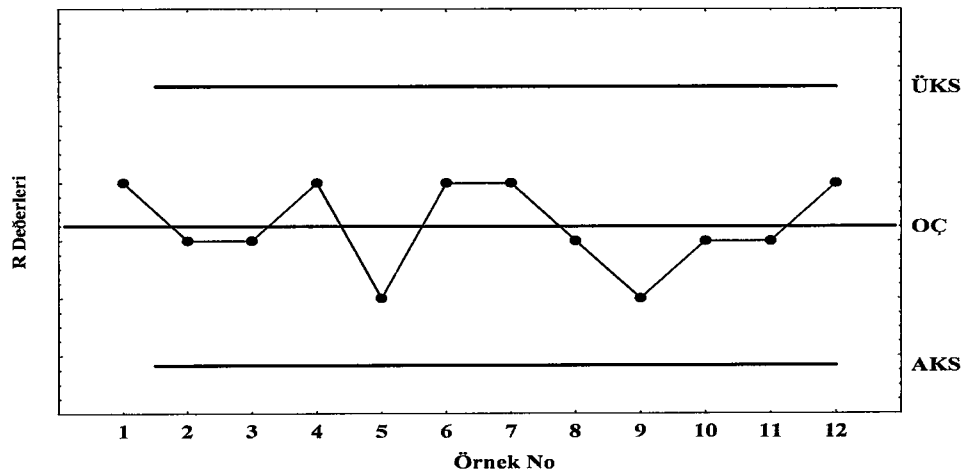
formülleriyle elde edilir. D_3 ve D_4 değerleri,

$$\begin{aligned}D_3 &= 1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \\ D_4 &= 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}\end{aligned}\quad (2.15)$$

eşitlikleri yerine yazıldığında, R kontrol grafiğinin kontrol sınırları,

$$\begin{aligned}\bar{ÜKS} &= D_4 \bar{R} \\ OÇ &= \bar{R} \\ \bar{AKS} &= D_3 \bar{R}\end{aligned}\quad (2.16)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.¹⁴ Kontrol sınırları tespit edildiğine göre R kontrol grafiği düzenlenebilir. Bu amaçla yatay eksenle örnek numaraları ve dikey eksenle değişim aralığı değerleri işaretlenerek R kontrol grafiği düzenlenir. Böyle örnek bir R kontrol grafiği Şekil 2-2'de görülmektedir.



Şekil 2-2: Örnek bir R kontrol grafiği

Kaynak: Keki R. Bhote; World Class Quality, AMA Membership Publications, 1988. s.33.

¹⁴ Montgomery; Age., s.210-211.

$\bar{X}$ ve R kontrol grafikleri anlatıldıktan sonra bu bölümde $\bar{X}$ ve R kontrol grafiklerinin nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 2-1) Bir üretim prosesinde üretilen silindir parçasından elde edilen değerler kullanılarak $\bar{X}$ ve R kontrol grafikleri düzenlenecektir. Prosesin kontrol altında olduğu varsayılarak her biri 5 birimden oluşan 30 örnek alınmış ve bu değerler Tablo 2-2’de verilmiştir.

Tablo 2-2: Silindir parçasına ait ölçüm değerleri

Örnek No	Ölçüm değerleri					$\bar{X}$	R
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
1	27	24	28	27	26	26.4	4
2	25	26	29	28	23	26.2	6
3	23	27	25	24	27	25.2	4
4	26	25	28	25	27	26.2	3
5	25	29	25	26	24	25.8	5
6	22	23	29	24	23	24.2	7
7	28	27	25	26	26	26.4	3
8	24	27	27	26	24	25.6	3
9	24	27	26	24	23	24.8	4
10	26	26	25	27	25	25.8	2
11	25	30	23	28	27	26.6	7
12	23	28	25	24	22	24.4	6
13	25	26	23	26	24	24.8	3
14	25	27	23	26	27	25.6	4
15	24	24	25	25	23	24.2	2
16	24	27	23	28	27	25.8	5
17	28	29	25	26	24	26.4	5
18	26	28	27	25	28	26.8	3
19	30	26	30	28	32	39.2	6
20	26	29	27	27	28	27.4	3
21	28	26	24	25	25	25.6	4
22	25	27	24	26	27	25.8	3
23	27	29	26	25	23	26.0	6
24	25	24	28	26	21	24.8	7
25	26	25	26	27	25	25.8	2
26	23	24	27	24	28	25.2	5
27	25	26	30	20	27	25.6	10
28	23	27	24	28	22	24.8	6
29	27	23	24	25	24	24.6	4
30	25	25	26	24	28	25.6	4
Toplam						771.6	136

Kaynak: Kazuo Ozeki – Tetsuichi Asaka; Handbook of Quality Tools:

The Japanese Approach, Productivity Press Inc., Cambridge, 1990, s.207.

Tablo 2-2'deki $\bar{X}$ ve R değerlerinin nasıl hesaplandığını göstermek amacıyla ilk grubun değerleri kullanılarak,

$$\bar{X} = \frac{27 + 24 + 28 + 27 + 26}{5} = 26.4$$

$$R = 28 - 24 = 4$$

şeklinde hesaplanır. $\bar{X}$ ve R kontrol grafiklerinden ilk olarak R kontrol grafiği düzenlenir. Tablo 2-1'deki veriler kullanılarak R kontrol grafiğinin orta çizgisi,

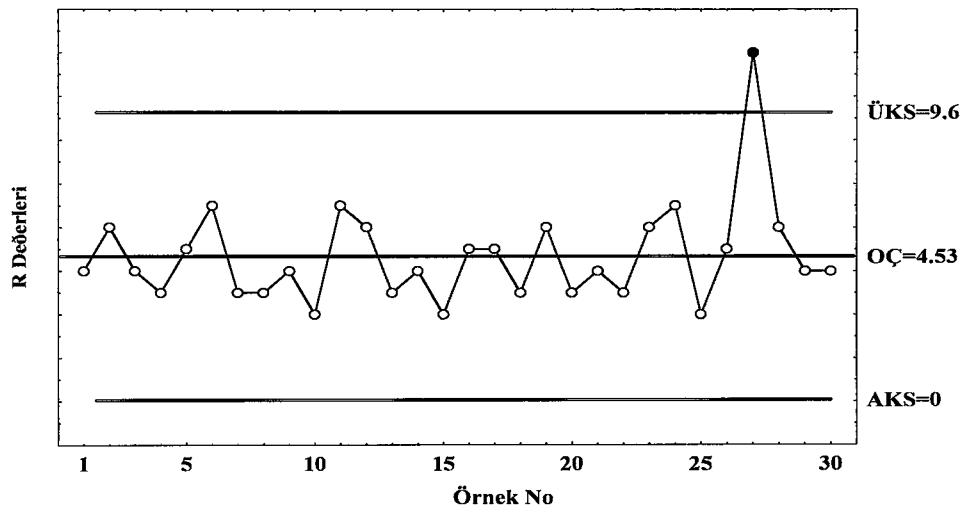
$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} = \frac{136}{30} = 4.53$$

olarak bulunur. R kontrol grafiğinin orta çizgisi bulunduktan sonra alt ve üst kontrol sınırlarını hesaplamak için $n=5$ birimlik örnekler için Tablo 2-1'den $D_3=0$ ve $D_4=2.115$ faktörleri bulunur. Böylece Formül 2-16 kullanılarak R kontrol grafiğinin alt ve üst kontrol sınırları,

$$AKS = D_3 \bar{R} = (0)4.53 = 0$$

$$\bar{ÜKS} = D_4 \bar{R} = (2.115)4.53 = 9.6$$

şeklinde hesaplanır. Kontrol sınırları hesaplandıktan sonra R kontrol grafiği düzenlenebilir. R değerleri dikey eksen ve örnek numaraları yatay eksen üzerinde gösterilerek Şekil 2-3'te verilen R kontrol grafiği elde edilir.



Şekil 2-3: Tablo 2-2'deki verilere uygulanan R kontrol grafiği

Kaynak: Kazuo Ozeki – Tetsuichi Asaka; Handbook of Quality Tools: The Japanese Approach, Productivity Press Inc., Cambridge, 1990, s.210.

R kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 27 numaralı örnekte kontrol dışına çıkmış olduğu tespit edilir. R kontrol grafiği ile proses gözlemlendikten sonra $\bar{X}$ kontrol grafiği düzenlenebilir. $\bar{X}$ kontrol grafiğine ait orta çizgi,

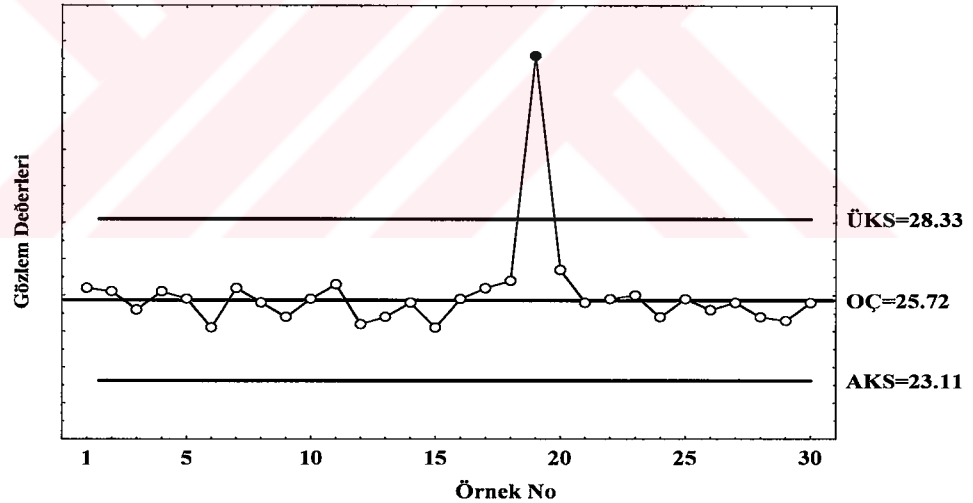
$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{771.6}{30} = 25.72$$

olarak elde edilir. Kontrol sınırlarını hesaplamak için $n=5$ birimlik örnek hacmi için A_2 değeri Tablo 2-1'den 0.577 olarak tespit edilir. Formül 2-10 kullanıldığında $\bar{X}$ kontrol grafiğine ait alt ve st kontrol sınırları,

$$AKS = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} = 25.72 - 0.577(4.53) = 23.11$$

$$\bar{U}KS = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} = 25.72 + 0.577(4.53) = 28.33$$

olarak hesaplanır. Bu değerler grafik üzerinde işaretlendiğinde $\bar{X}$ kontrol grafiği elde edilir. Söz konusu kontrol grafiği şekil 2-4'te görülmektedir.



şekil 2-4: Tablo 2-2'deki verilere uygulanan $\bar{X}$ kontrol grafiği

Kaynak: Kazuo Ozeki – Tetsuichi Asaka; Handbook of Quality Tools: The Japanese Approach, Productivity Press Inc., Cambridge, 1990, s.210.

$\bar{X}$ kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 19 numaralı örneğin alınması zamanında kontrol dışına çıkmış olduğu görülür. Böylece hem R hem de $\bar{X}$ kontrol grafiklerine göre proses kontrol dışına çıkmıştır.¹⁵

¹⁵ Kazuo Ozeki – Tetsuichi Asaka; Handbook of Quality Tools: The Japanese Approach, Productivity Press Inc., Cambridge, 1990, s.207-210.

2.1.3. Bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı kontrol grafikleri

Bazı durumlarda bir birimden fazla örnek değerleri veya rasyonel alt grupların olduğu veri setinin elde edilmesi mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda yani $n=1$ birimlik bireysel gözlem değerlerinin alındığı proseslerde bireysel gözlem değerleri için düzenlenen Shewhart kontrol grafikleri kullanılır.¹⁶ Bireysel gözlem değerlerinin alınıp incelendiği proseslerin bazıları aşağıdaki sıralanabilir:

- * Ölçüm ve kontrol işlemlerinin otomatik yapıldığı üretim teknolojisinin kullanıldığı proseslerde. Bu tür proseslerde her birim tek tek ölçülüp kontrol edilmektedir. Dolayısıyla rasyonel alt grupların alınmasına ihtiyaç duyulmaz.

- * Üretim hızının oldukça yavaş olduğu proseslerde. Bu tür proseslerde $n>1$ hacminde örneklerin toplanması oldukça zahmetli olmaktadır.

- * Birçok kimyasal proseslerde olduğu gibi, laboratuvar veya analiz hatasından dolayı farklı sonuçlar elde edileceğinden bu tür proseslerde ölçümlerin tekrarlanması güçtür. Bu nedenle bu tür proseslerde $n=1$ hacminde bireysel gözlem değerleri alınır.

- * Üretilen bir ürünün aynı parçasından çok sayıda ölçümlerin alındığı proseslerde.

- * Proses endüstrilerinde bireysel gözlem değerleri alınıp proses kontrol edilmektedir. Bu tür proses endüstrilerine kağıt üretimi örnek olarak verilebilir.¹⁷

Bireysel gözlem değerlerinin alındığı proseslerde her bir birim onun alt grubu olarak düşünülebilir. Bununla beraber, $\bar{X}$ kontrol grafiğinin durumundan farklı olarak, her bir alt grup $n=1$ hacminde olduğundan dolayı alt grup içindeki değişimin tahmini yapılamaz. Bu durumda hareketli değişim aralığı kullanılarak standart sapma tahmin edilebilir. Hareketli değişim aralığı (MR), n gözlem değerinden oluşan veri setinde, en büyük ve en küçük gözlem değerleri arasındaki fark olarak tanımlanır. Genelde iki gözlem değerinin olduğu veri setinde i 'inci hareketli değişim aralığı değeri,

$$MR_i = |X_{i-1} - X_i| \quad (2.17)$$

şeklinde hesaplanır.

Bütün gözlem değerleri için MR_i değerleri elde edildikten sonra ortalama

¹⁶ Mark L. Berenson – David M. Levine; Basic Business Statistics: Concepts and Applications, 6th Edition, Prentice Hall Inc., 1996, s. 701.

¹⁷ Montgomery; Age., s.249.

değişim aralığı ($\overline{MR}$),

$$\overline{MR} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} MR_i}{k-1} \quad (2.18)$$

şeklinde hesaplanır. Formülde k , gözlem değerlerinin sayısını göstermektedir.

Bireysel gözlem değerleri için düzenlenecek kontrol grafiğindeki kontrol sınırlarının tespit edilmesi için ortalama ve standart sapma değerlerinin tahmin edilmesi gerekir. Yukarıda değişim aralığı değeri ile proses standart sapması arasındaki ilişki verilmişti bu ilişkiden yararlanarak proses standart sapmasının tahmininde hareketli değişim aralığı kullanılabilir. Burada kontrol sınırlarının tespit edilmesinde kullanılan d_2 sabitinden yararlanılır. Çeşitli örnek büyüklükleri için hesaplanan d_2 sabiti Tablo 2-1’de verilmiştir.¹⁸ Hareketli değişim aralığı değerine dayalı olan $\sigma = \overline{MR}/d_2$ eşitliği kullanılarak proses standart sapması tahmin edilir.¹⁹ Böylece bireysel gözlem değerleri için düzenlenecek kontrol grafiğinin kontrol sınırları,

$$\begin{aligned} \text{AKS} &= \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \\ \text{OÇ} &= \bar{X} \\ \text{ÜKS} &= \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde elde edilir. Formülde $3/d_2$ yerine E_2 sabiti yazıldığında kontrol sınırları,

$$\begin{aligned} \text{AKS} &= \bar{X} - E_2 \overline{MR} \\ \text{OÇ} &= \bar{X} \\ \text{ÜKS} &= \bar{X} + E_2 \overline{MR} \end{aligned} \quad (2.20)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Çeşitli örnek büyüklükleri için hesaplanan E_2 sabiti Tablo 2-1’den elde edilir.

Bireysel gözlem değerleri için düzenlenecek kontrol grafiğinin kontrol sınırları belirlendikten sonra hareketli değişim aralığı kontrol grafiğinin kontrol sınırları tespit edilir. Hareketli değişim aralığı kontrol grafiğinin kontrol sınırları, değişim aralığı kontrol grafiğinde olduğu gibi elde edilir. Dolayısıyla hareketli değişim aralığı (MR)

¹⁸ Berenson – Levine; Age., 1996, s.701-702.

¹⁹ Banks; Age., s.208.

kontrol grafiğinin grafiğın kontrol sınırları,

$$\begin{aligned}\bar{ÜKS} &= D_4 \bar{MR} \\ OÇ &= \bar{MR} \\ AKS &= D_3 \bar{MR}\end{aligned}\tag{2.21}$$

şeklinde hesaplanır. Burada $n=2$ ve bu değer için D_3 değeri de sıfır olacağından dolayı alt kontrol sınırı sıfır olarak alınır.²⁰

Bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri anlatıldıktan sonra bu bölümde söz konusu grafiklerin nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 2-2) Uçakların boyanmasında kullanılan astar boyanın viskozitesi önemli bir kalite karakteristiğidir. Bu ürünün üretimi partiler halinde yapılmakta ve her bir partinin üretimi saatler aldığından dolayı üretim hızı oldukça yavaştır. Dolayısıyla üretim birden fazla örnek almaya uygun değildir. Bir boya fabrikasından üretilen boyanın viskozite değerleri ölçülmüş ve bu ölçümlerden rasgele $n=1$ birimlik 15 örnek alınarak Tablo 2-3'te verilmiştir. Bu değerler kullanılarak bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri düzenlenecektir.

Tablo 2-3:Viskozite (X) ve hareketli değişim aralığı (MR) değerleri

No	Viskozite(X)	MR	No	Viskozite(X)	MR
1	33.75	---	9	33.49	0.22
2	33.05	0.70	10	33.20	0.29
3	34.00	0.95	11	33.62	0.42
4	33.81	0.19	12	33.00	0.62
5	33.46	0.35	13	33.54	0.54
6	34.02	0.56	14	33.12	0.42
7	33.68	0.34	15	33.84	0.72
8	33.27	0.41	$\bar{X} = 33.52$		$\bar{MR} = 0.48$

Kaynak: Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical QualityControl, 4th Edition, John Wiley and Sons. Inc., 2001, s.250.

Tablo 2-3'teki değerler kullanılarak ortalama ve hareketli değişim aralığı

²⁰ Kaoru Ishikawa; Introduction to Quality Control, Chapman and Hall Inc., 1989, s.184-185.

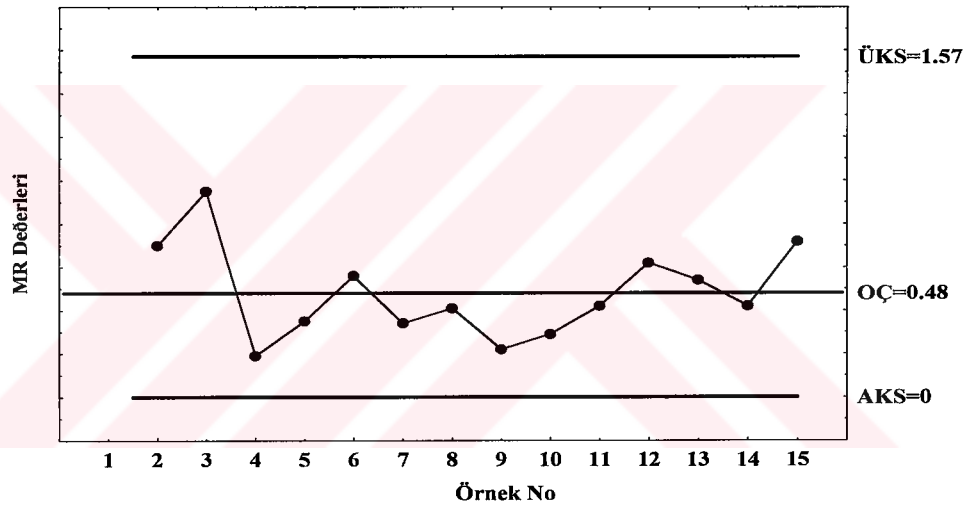
değerlerinin ortalaması hesaplanıp aynı tabloda verilmiştir. Tablo 2-1'den $n=2$ için $D_3=0$ ve $D_4=3.267$ olarak tespit edildikten sonra hareketli değişim aralığı kontrol grafiğinin kontrol sınırları Formül 2-21 kullanılarak,

$$\bar{ÜKS} = D_4 \bar{MR} = (3.267)0.48 = 1.57$$

$$OÇ = \bar{MR} = 0.48$$

$$AKS = D_3 \bar{MR} = (0)0.48 = 0$$

şeklinde hesaplanır. Bu değerler kullanılarak düzenlenen MR kontrol grafiği Şekil 2-5'te görülmektedir. Grafik incelendiğinde bütün noktaların kontrol sınırlarının arasında kaldığı görülür. Dolayısıyla prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.



Şekil 2-5: Viskozite değerlerine ait MR kontrol grafiği

Kaynak: Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, 4th Edition, John Wiley and Sons. Inc., 2001. s.251.

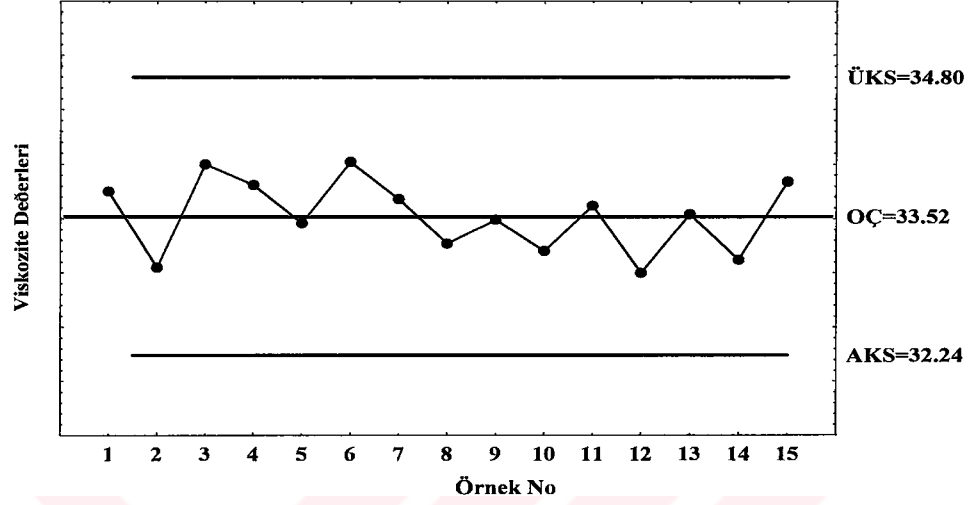
Hareketli değişim aralığı kontrol grafiği düzenlendikten sonra bireysel viskozite değerleri için kontrol grafiği düzenlenir. Bunun için ilk olarak kontrol sınırları Formül 2-19 kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır. Burada $n=2$ için Tablo 2-1'den $d_2=1.128$ olarak belirlendikten sonra kontrol sınırları,

$$AKS = \bar{X} - 3 \frac{\bar{MR}}{d_2} = 33.52 - 3 \frac{0.48}{1.128} = 32.24$$

$$OÇ = \bar{X} = 33.52$$

$$\bar{ÜKS} = \bar{X} + 3 \frac{\bar{MR}}{d_2} = 33.52 + 3 \frac{0.48}{1.128} = 34.80$$

şeklinde hesaplanır. Elde edilen kontrol sınırları ve viskozite değerleri kullanılarak kontrol grafiği Şekil 2-6'daki gibi düzenlenir.



Şekil 2-6: Viskozite değerlerine ait bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği

Kaynak: Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, 4th Edition, John Wiley and Sons. Inc., 2001. s.251.

Kontrol grafiği incelendiğinde tüm noktaların kontrol sınırlarının arasında kaldığı görülür. Bu durumda prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.²¹

²¹ Montgomery; Age., s.250-252.

2.2. Hotelling T^2 Kontrol Grafikleri

Harold Hotelling (1931), birbirleriyle ilişkili verilerin incelendiği proseslerin kontrol edilme problemini ilk olarak “Çok Değişkenli Kalite Kontrol” adlı çalışmasında ortaya koymuştur. Bu amaçla Hotelling, “istatistiksel uzaklık” olarak adlandırılan bir kavrama dayalı ve t testinin çok değişkenli genellemesi olan bir kontrol prosedürü geliştirmiştir. Söz konusu istatistik daha sonraları Hotelling T^2 istatistiği olarak adlandırılmıştır.²² Hotelling T^2 , istatistiği istatistiksel uzaklığın bir ölçüsüdür. Söz konusu istatistik, diğer uzaklık ölçüleri gibi tek boyutlu bir değer olmasına rağmen çok değişkenli istatistik olarak kullanılır.²³

Harold Hotelling (1947) tarafından geliştirilen Hotelling T^2 kontrol grafiği, çok değişkenli proseslerin gözlenmesi amacıyla yaygın olarak kullanılan çok değişkenli bir proses kontrol metodudur. T^2 Kontrol grafiği, örnek değerlerine karşılık iki veya daha fazla kalite değişkeninden hesaplanan T^2 değerlerinin grafik üzerinde işaretlenmesi ile elde edilir. Bu kontrol grafiğinin en önemli özelliği, prosesteki değişkenler arasındaki korelasyonlara bağımlı olmasıdır. Prosesteki değişkenler arasında korelasyonun olup olmadığı, daha önce toplanan veri seti analiz edilerek belirlenebilir. Değişkenler arasında korelasyon olmadığında, T^2 kontrol grafiği yerine her bir değişken için Shewhart kontrol grafiği düzenlenebilir.²⁴ T^2 kontrol grafiği, prosesle ilgili değişkenlerden elde edilen bilgiyi birleştirerek prosesteki değişiminin kapsamlı bir resmini verir.²⁵

Çok değişkenli kalite kontrol metotları üç önemli özelliğe sahip olmalıdır.²⁶

- * Prosesin kontrol altında olup olmadığı sorusu tek bir cevaba indirgenmelidir,
- * Belirtilen birinci tip hata olasılığı değişiklik arz etmemelidir,
- * Değişkenler arasındaki korelasyon hesaba katılmalıdır.

Hotelling T^2 kontrol grafiği yukarıda sayılan üç özelliği bünyesinde bulundurur. Grafiğin temel avantajı, hesaplamaları tek bir değere (T^2 değeri) düşürerek kolaylaştırmasıdır. Ayrıca grafik arzu edilen birinci tip hata veya prosesin kontrol

²² <http://www.incontroltech.com/mvspc/hotelling/hotelling.html>, s.1.

²³ Robert L. Mason – John C. Young; “Interpretive Features of a T^2 Chart in Multivariate SPC”, Quality Progress, Vol:33, No:4, 2000, s.1.

²⁴ Robert L. Mason – John C. Young; “Improving the Sensitivity of the T^2 Statistic in Multivariate Process Control”, Journal of Quality Technology, Vol:31, No:2, 1999, s.155.

²⁵ Nong Ye – Qiang Chen – Syed M. Erman – Sean Vilbert; Hotelling’s T^2 Multivariate Profiling for Anomaly Detection, Workshop on Information Assurance and Security, United States Military Academy, West Point, NY, 6-7 June, 2000, s.180.

²⁶ J. Edward Jackson; “Multivariate Quality Control”, Communications in Statistics: Theory and Methods, Vol:14, No:11, 1985, s.2660.

durumundaki ortalama işletim uzunluğu (ARL) değerini üretip, orijinal verinin ortalamasını, varyansını ve korelasyon değerlerini korur.²⁷ Bu avantajına rağmen T^2 kontrol grafiğinin en önemli eksikliği, proseste meydana gelebilecek bir kontrol dışı sinyalinin pratik olarak yorumlanamamasıdır. Bu eksiklik, kontrol grafiğinin proseste ortaya çıkan kontrol dışı sinyalinin hangi değişken yada değişkenlerden kaynakladığını direkt olarak belirtmemesinden kaynaklanır.²⁸

2.2.1. Hotelling T^2 testi

Harold Hotelling (1931), T^2 istatistiğinin önemliliğini değerlendirmek için ortaya koyduğu dağılım sayesinde çok değişkenli hipotezlerin test edilmesini sağlamıştır. Hotelling T^2 testi çok değişkenli normal dağılım varsayımına göre kurulan hipotezlerin test edilmesini sağlayan bir yöntemdir.

T^2 testi, $N_p(\mu, \Sigma)$ parametrelili normal dağılımdan rasgele çekilen örnek veriler aracılığı ile aşağıda verilen hipotezleri test etmek için yararlanılan çok değişkenli istatistiksel yöntemdir.

T^2 testi ile test edilebilen hipotezler aşağıdaki gibi belirtilebilir.

*** Parametreleri bilinen bir anakütleye ilişkin çok değişkenli hipotezler (Anakütle ortalama vektörüne dayalı hipotezler):** T^2 testi ile çok değişkenli anakütle ortalama vektörüne dayalı hipotezler test edilir (Tek örnek t testinin çok değişkenli genellemesi).

*** Parametreleri bilinen bağımsız iki anakütleye ilişkin çok değişkenli hipotezler (Anakütle ortalama vektörlerine dayalı hipotezler):** p değişkenli bağımsız iki anakütle ($k=2$) ortalama vektörlerine dayalı hipotezler T^2 testi ile test edilir (Bağımsız iki örnek t testinin çok değişkenli genellemesi).

*** Parametreleri bilinen bağımlı iki ana anakütleye ilişkin çok değişkenli hipotezler (Bağımlı iki anakütle ortalamalarına ait fark vektörlerine dayalı hipotezler):** p değişkenli bağımlı iki anakütle ortalamalarına ait fark vektörüne dayalı hipotezler T^2 testi ile test edilir (Bağımlı iki örnek t testinin çok değişkenli genellemesi).

T^2 testi, bağımlı ve bağımsız iki örneklem durumunda değişken sayısı iki ve daha fazla olduğunda örnek ortalama vektörlerinin farksız olduğunu yada ortalamalar

²⁷ <http://www.sys.virginia.edu/mqc/index2a.html>, s.e.t., s.1.

²⁸ Ali A. Houshmand – Saeed Golnabi; Multivariate Shewhart $\bar{X}$ Chart, <http://interstat.stat.vt.edu/interstat/index/Sep99.html>, s.2.

fark vektörünün sıfır olduğuna ilişkin hipotezlerin önemliliğini test etmekte yaygın olarak kullanılan bir testtir.

T^2 testi tek değişkenli hipotezlerin test edilmesinde yararlanılan t testinin çok değişkenli hipotezler için genelleştirilmiş bir biçimidir.²⁹ Student t testi, veri analizleri için çok bilinen ve kullanılan bir testtir.³⁰

Hipotez testlerinde, μ_0 gibi spesifik bir değer, anakütle ortalaması μ ile karşılaştırılmak istenildiğinde söz konusu hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir;

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{ve} \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

Burada H_0 , sıfır hipotezini ve H_1 ise alternatif hipotezi (iki yönlü test için) gösterir. $x_1, x_2, \dots, x_n$ normal dağılıma uygun bir anakütleden rasgele seçilmiş değerleri göstermek üzere test istatistiği,

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{s/\sqrt{n}} \quad (2.22)$$

şeklinde yazılır. Formül 2-22'de verilen t test istatistiği, $n-1$ serbestlik dereceli student t dağılımı gösterir. Şayet hesaplanan t test istatistiği, $n-1$ serbestlik derecesi ve α önem seviyesine göre t tablosundan bulunacak kritik değerden daha büyük çıkarsa μ_0 'ın anakütle ortalaması μ 'ye eşit olduğunu ifade eden H_0 hipotezi reddedilir.

Formül 2-22'deki eşitlikte her iki tarafın karesi alındığında,

$$t^2 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{s^2/n} = n(\bar{x} - \mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{x} - \mu_0) \quad (2.23)$$

formülü elde edilir. Formül 2-23'teki t^2 değeri $\bar{x}$ örnek ortalamasının μ_0 test değerine kareli öklit uzaklığını gösterir.³¹ Bu formül, örnek ortalamasının anakütle ortalamasına yakınlığının bir ölçüsünü ifade eder. Örnek ortalaması anakütle ortalamasına yaklaştıkça t^2 değeri sıfıra yaklaşır.³² Kareli öklit uzaklığı, standart hatanın yani $S/\sqrt{n}$ değerinin tahmin edilmesi ile açıklanır. $\bar{x}$ ve s^2 değerleri bilindiği zaman, $n(\bar{x} - \mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{x} - \mu_0) > t_{n-1}^2(\alpha/2)$ olduğunda α önem seviyesinde H_1 hipotezine karşılık H_0 hipotezi reddedilir. Burada $t_{n-1}(\alpha/2)$ değeri, $n-1$ serbestlik dereceli t dağılımının

²⁹ Kazım Özdamar; Paket Programlar İle İstatistiksel Veri Analizi (Çok Değişkenli Analizler), İkinci Baskı, Kaan Kitabevi, 1999, s.97-98.

³⁰ Robert L. Mason – John C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Probability, 2002, s.20.

³¹ Richard A. Johnson – Dean W. Wichern; Applied Multivariate Statistical Analysis, 4th Edition, Prentice Hall Inc., 1998, s.224-225.

³² Mason – Young; Age., s.21.

$100(\alpha / 2)$ 'inci pörsentilini ifade eder.

H_0 hipotezi reddedilemediği taktirde, μ_0 değeri normal anakütle ortalaması için mantıklı bir değer olarak kabul edilir. Gerçekte normal anakütle ortalaması için mantıklı değerler seti her zaman mevcuttur.³³

Yukarıda, kovaryans matrisinin örnek tahminlerine dayalı olan Hotelling T^2 testinin tek değişkenli t testinin çok değişkenli genellemesi olduğu ifade edilmişti. Burada bu testin elde edilişi izah edilecektir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ gibi n adet gözleme sahip bir örneğin, p değişkenli normal dağılım gösteren μ' ortalama vektörü ve Σ kovaryans matrisinden alındığı farz edilirse t^2 istatistiğinin çok değişkenli bir genellemesi,

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu)' S^{-1} (\bar{X} - \mu) \quad (2.24)$$

şeklinde yazılabilir. Formüldeki $\bar{X}$ ve S değerleri sırasıyla μ' ortalama vektörü ve Σ kovaryans matrisinin tahmincileridir. Bu değerlerle örnek kovaryans matrisi S ,

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada s_{ii} , i 'inci değişkenin örnek varyansını, s_{ij} ise i 'inci ve j 'inci değişkenleri arasındaki örnek kovaryansını ifade eder. S matrisi birçok açıdan özel bir matristir. S matrisinin özellikleri çok değişkenli proses kontrolünde kullanılan T^2 'nin kullanımı ile ilgilidir.

Olasılık dağılımlarına dayanarak, t^2 istatistiği için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$t^2 = (\text{tesadüfi normal değişken}) * (\text{tesadüfi ki-kare değişkeni} / sd)^{-1} * (\text{tesadüfi normal değişken})$$

Eşitlikteki sd , ki-kare değişkeninin $n-1$ serbestlik derecesini $[(n-1)s^2/\sigma^2]$ ifade ederken, tesadüfi normal değişken ise $\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)/\sigma$ formülü ile gösterilir. Bu gösterim şeklinde x ve s^2 tesadüfi değişkenleri bağımsız değişkenlerdir. Benzer şekilde T^2 istatistiği için de aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$T^2 = (\text{çok değişkenli normal vektör})' * (\text{Wishart matris}/sd)^{-1} * (\text{çok değişkenli normal vektör})$$

³³ Johnson – Wichern; Age., s.225.

Eşitlikteki sd , Wishart değişkeninin $n-1$ serbestlik derecesini $[(n-1)S]$ ifade ederken, çok değişkenli normal vektör ise $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$ formülü ile gösterilir. Burada $\bar{X}$ tesadüfi vektörü ve S tesadüfi matrisi istatistiksel olarak bağımsızdır.

Yukarıda verilen iki eşitlik kullanılarak, p boyutlu noktaların birçok farklı kombinasyonları arasındaki kareli istatistiksel uzaklıkları açıklamak için Hotelling T^2 istatistiğini genelleştirmek mümkündür. Örneğin T^2 istatistiği, bireysel gözlem vektörü X ile bilinen bir anakütle ortalaması μ yada bu anakütlenin ortalamasının tahmin değeri $\bar{X}$ arasındaki istatistiksel uzaklığı bulmada kullanılabilir.³⁴

2.2.2. T^2 istatistiğinin dağılım özellikleri

Hotelling T^2 istatistiğinin dağılım özellikleri ile ilgili temel varsayım; çok değişkenli gözlemlerin, μ ortalama vektörü ve Σ kovaryans matrisine sahip normal dağılım gösteren p değişkenli bir anakütleden rasgele seçildiğinin kabul edilmesidir. Böylelikle bağımsız gözlemlerin durumu anakütle parametrelerinin bilinip bilinmemesi durumuna göre bir olasılık fonksiyonu ile tanımlanabilir. Eğer anakütle parametreleri bilinmiyorsa, veri setinin proses kontrol altında iken toplandığı varsayılır. Bu veri seti, bilinmeyen anakütle parametrelerinin tahmin edilmesinde kullanılmaktadır.

Yapılması gereken ilk iş, p değişkenli örnek gözlemlerinin T^2 istatistiğine dönüştürülmesidir. Orijinal gözlemler rasgele değişkenler olduğundan, elde edilecek T^2 değerleri de rasgele değişkenler olacak ve uygun bir olasılık fonksiyonu ile tanımlanabilecektir. Örneğin, çok değişkenli normal dağılımın parametreleri bilinmediği ve tahmin edilebilir olduğunda T^2 istatistiğinin rasgele değişiminin tanımlanmasında tek değişkenli F dağılımı kullanılır. Bu durum tek değişkenli verilerde de uygulanabilir. Şayet t istatistiği $(n-1)$ serbestlik dereceli t dağılımı ile tanımlanabilirse, t istatistiğinin karesi t^2 , 1 ve $(n-1)$ serbestlik dereceli F dağılımı ile tanımlanabilir.

T^2 istatistiği, sabit bir örnekleme noktasında p adet gözlemden elde edilen tek bir gözlem değeri yardımıyla yada sabit bir zaman periyodu boyunca alınan m adet örneğin ortalaması kullanılarak hesaplanabilir.

Belirli varsayımlar altında T^2 istatistiğinin dağılımı iki şekilde açıklanır. Birinci durum, μ ve Σ parametrelerinin bilinip bilinmemesi durumu, ikincisi ise parametrelerin tahmin edilebilir olduğu durumdur. Bu durumda ikiye ayrılır. İlk durum X gözlem

³⁴ Mason – Young; Age., s.21-22.

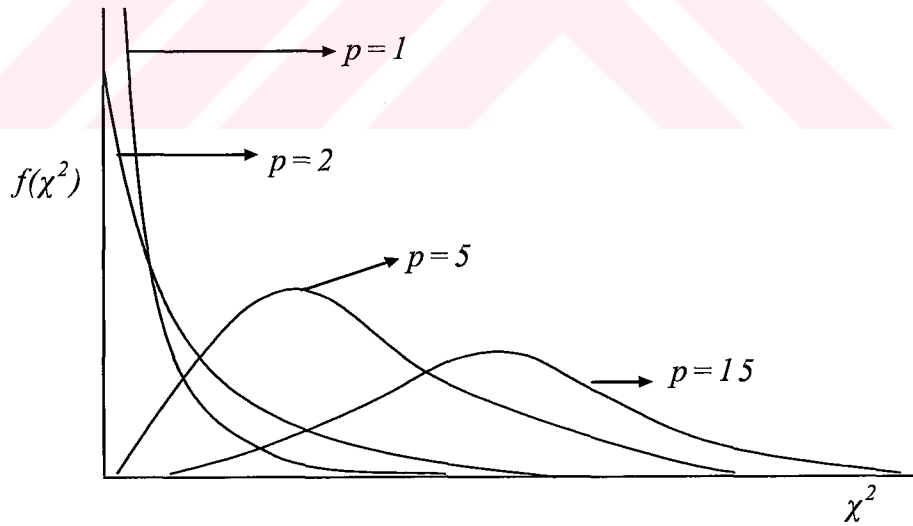
vektörünün, anakütle parametrelerinin tahmininden bağımsız oluşudur. Bağımsızlık, μ ve Σ parametrelerinin tahmincileri olan $\bar{X}$ ve S 'nin hesaplanmasında X gözlem vektörü dahil edilmediğinde ortaya çıkar. İkinci durumda ise $\bar{X}$ ve S 'nin hesaplanmasında X gözlem vektörü dikkate alınır.

T^2 istatistiğinin tanımlanmasında birkaç farklı olasılık fonksiyonu kullanılabilir. Burada bunlardan sadece üç tanesi tanıtılacaktır.

1-Çok değişkenli normal dağılımının parametreleri μ ve Σ 'nin bilindiği farz edildiğinde, X gözlem vektörü için T^2 istatistiğinin dağılımı aşağıdaki gibidir.

$$T^2 = (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi^2_{(p)} \quad (2.25)$$

Burada $\chi^2_{(p)}$, p serbestlik dereceli ki-kare dağılımı göstermektedir. T^2 dağılımı sadece X gözlem vektöründeki değişken sayısına (p) bağlıdır. Çeşitli p değerleri için $f(\chi^2)$ ki-kare dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 2-7'de görülmektedir. Şekilde görüldüğü gibi, p değerleri küçüldükçe dağılım sağa çarpık olurken, p değerleri büyüdükçe dağılım simetri kazanarak normale yaklaşır. Ki-kare olasılık fonksiyonu eksen boyunca T^2 olasılık dağılımını sağlamaktadır.



Şekil 2-7: Ki-kare dağılımı

Kaynak: R. L. Mason - J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.23.

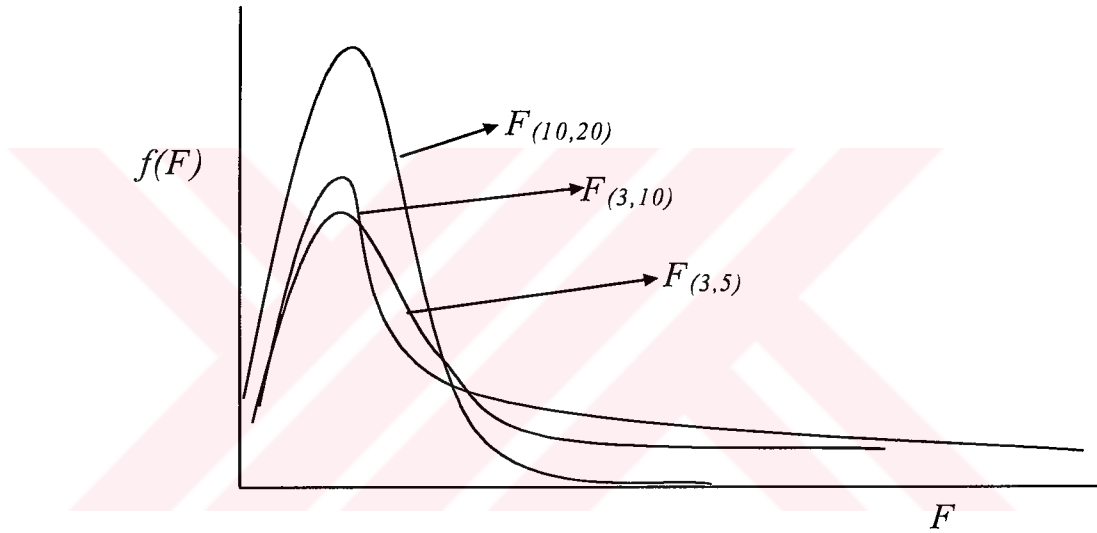
2- Çok değişkenli normal dağılımının parametreleri μ ve Σ 'nin bilinmediği ve bu parametreler yerine $\bar{X}$ ve S 'nin tahmin edildiği farz edilirse; $\bar{X}$ ve S değerleri n adet gözlem değerlerinden oluşan veri seti kullanılarak elde edilir. X gözlem vektörü için T^2

istatistiğinin dağılımı aşağıda verilmiştir.

$$T^2 = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})' S^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \sim \left[\frac{p(n+1)(n-1)}{n(n-p)} \right] F_{(p, n-p)} \quad (2.26)$$

Dağılım formülündeki $F_{(p, n-p)}$, p ve $(n-p)$ serbestlik dereceli F dağılımını ifade etmektedir. Söz konusu dağılım, incelenen değişken sayısına olduğu kadar veri setinin büyüklüğüne de bağlıdır.

Çeşitli serbestlik derecelerine göre düzenlenmiş olan F dağılımının grafiği Şekil 2-8'de verilmiştir. Şekil incelendiğinde dağılımın sağa çarpık olduğu görülmekte ve serbestlik derecesi büyüdükçe dağılımın dikliği artmaktadır.



Şekil 2-8: F dağılımı

Kaynak: R. L. Mason - J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.24.

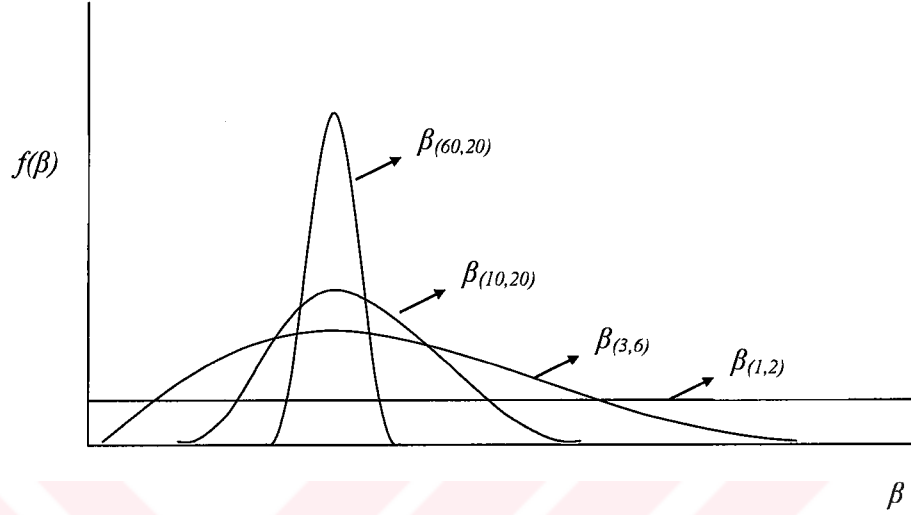
3- X gözlem vektörünün $\bar{\mathbf{X}}$ ve S değerlerinden bağımsız olmadığı farz edilirse; bu durumda T^2 istatistiğinin dağılımı aşağıdaki gibi olur.

$$T^2 = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})' S^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \sim \left[\frac{(n-1)^2}{n} \right] B_{(p/2, (n-p-1)/2)} \quad (2.27)$$

Burada $B_{(p/2, (n-p-1)/2)}$, $p/2$ ve $(n-p-1)/2$ parametreleri ile Beta dağılımını ifade etmektedir. Dağılım, değişken sayısı (p) ve örnek büyüklüğü n 'e bağlıdır.

T^2 istatistiğinin değişimini tanımlamada kullanılan üç dağılımdan sadece Beta dağılımı fazla bilinmeyen bir dağılımdır. Diğer iki dağılım ise çok kullanılan dağılımlardır. Ki-kare ve F dağılımları sıfırdan büyük herhangi bir değer alabilirken,

$f(B)$ Beta dağılımı ise sadece $(0-1)$ aralığındaki değerleri alabilmektedir. Bununla beraber dağılım, $(0-1)$ aralığında normal, ki-kare ve F dağılımına benzeyen birçok şekil alabilir. Çeşitli parametre değerleri için Beta dağılımları Şekil 2-9'da görülmektedir.



Şekil 2-9: Beta dağılımı

Kaynak: R. L. Mason - J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.25.

Yukarıda, çok değişkenli normal dağılımın parametreleri bilinmediğinde, T^2 istatistiğinin tanımlanmasında kullanılan dağılımın F dağılımı olduğu ifade edilmişti. Bununla birlikte T^2 istatistiğini tanımlanmak için Beta dağılımı da kullanılabilir. Bu durumda F ve Beta olasılık fonksiyonları arasındaki ilişki yardımıyla T^2 istatistiği, F istatistiği gibi ifade edilebilir. Böylece aşağıdaki dağılım yazılabilir.

$$B_{(p/2, (n-p-1)/2)} = \frac{pF}{(n-p-1)pF} \quad (2.28)$$

Burada $F \sim F_{\{p, (n-p-1)\}}$ olarak ifade edilir. Pratikte genellikle Formül 2-28'de F dağılımından ziyade Beta dağılımı kullanılır. Yukarıda X gözlem vektörünün, veri setinden elde edilen $\bar{X}$ ve S değerlerinden bağımsız olmadığı ifade edilmesine rağmen her iki dağılım da kabul edilebilir.

Her bir T^2 değeri, aynı $\bar{X}$ ve S değerlerine bağlı olan veri setinden elde edildiği için T^2 değerleri arasında zayıfta olsa bir etkileşim ortaya çıkar. Veri setinden hesaplanan herhangi iki T^2 değeri arasındaki korelasyon $-1/(n-1)$ şeklinde gösterilir. Bu durum, n 'in çok küçük değerleri için bile kolaylıkla görülebilir ve iki T^2 değeri arasındaki korelasyon değeri giderek sıfıra yaklaşır. Söz konusu durum bağımsızlık

varsayımı açısından gerekçe olmamasına rağmen, n değeri büyüdükçe T^2 değerleri bağımsız gözlemler gibi değişim gösterir. Bu durum gerçek veri setinden elde edilen T^2 değerlerinin diğer istatistik prosedürlerine bağlı olması durumunda daha da önem kazanır.

Bazı durumlarda proses kontrolü her bir k örnekleme aralığında seçilen m adet örneğin ortalamasına bağlıdır. i 'inci gözlem vektörünün örnek ortalaması $\bar{X}_i$ ile veri setinin ortalaması $\bar{X}$ arasındaki istatistiksel aralığı tanımlayan dağılım aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T^2 = (\bar{X}_i - \bar{X})' S^{-1} (\bar{X}_i - \bar{X}) \sim \frac{(m+n)(n-1)p}{mn(n-p)} F_{(p, n-p)} \quad (2.29)$$

Formüldeki $F_{(p, n-p)}$ ifadesi p ve $(n-p)$ serbestlik dereceli F dağılımını gösterir. i 'inci gözlem vektörünün örnek ortalaması $\bar{X}_i$ ile tahmin edilen parametreler arasında bağımsızlık olduğu varsayılan dağılım m örnek büyüklüğü, veri setinin hacmi ve $\bar{X}_i$ i 'inci gözlem vektöründeki değişkenlerin sayısına bağlıdır. S değeri Formül 2-29'daki gibi kullanılsa da daha yaygın bir kullanım, formüle S değerinin tahmin değerinin eklenmesidir. Tahmini S değeri ise

$$S_w = \frac{\sum_{i=1}^k S_i}{k} \quad (2.30)$$

şeklinde hesaplanır. S_i değeri i 'inci ($i=1, 2, \dots, k$) örnekleme periyodu boyunca alınan veri için örnek kovaryans tahminini göstermektedir. Bu tahmin değeri Formül 2-29'a yerleştirildiğinde T^2 istatistiği,

$$T^2 = (\bar{X}_i - \bar{X})' S_w^{-1} (\bar{X}_i - \bar{X}) \sim \frac{(k+1)(m-1)p}{m(mk-k-p+1)} F_{(p, mk-k-p+1)} \quad (2.31)$$

şeklinde elde edilir.³⁵

2.2.3. Hotelling T^2 kontrol grafiğinin düzenlenmesi

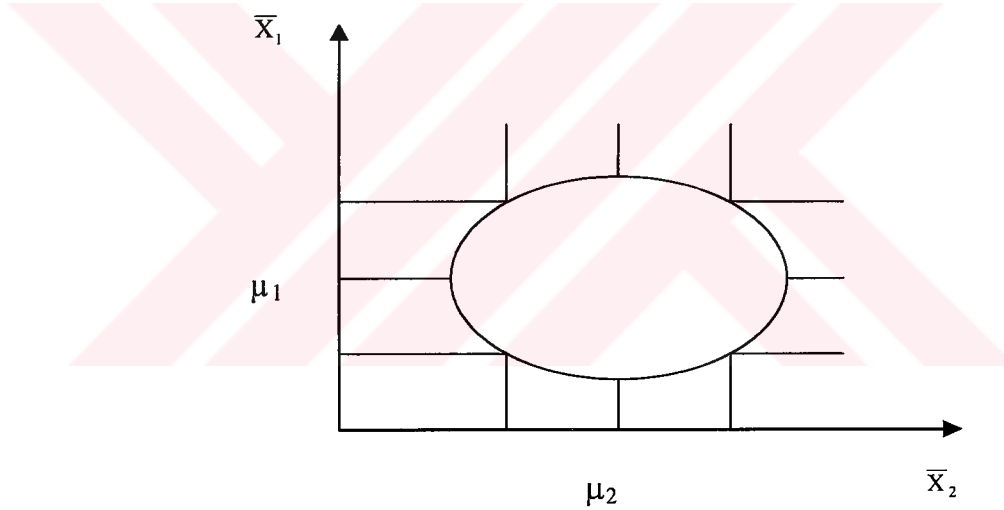
Dağılımları çok değişkenli normal dağılıma uygun olan X_1 ve X_2 şeklinde iki kalite değişkeni düşünüldüğünde; bu kalite değişkenlerinin ortalamalarının μ_1 ve μ_2 , standart sapmalarının ise sırasıyla σ_1 ve σ_2 olduğu farz edilsin; bu durumda, X_1 ve X_2 değişkenleri arasındaki kovaryans σ_{12} şeklinde gösterilir. Burada standart sapmaların ve

³⁵ Mason – Young; Age., s.22-26.

kovaryansın bilindiği varsayılmaktadır. $\bar{X}_1$ ve $\bar{X}_2$, n adet örnekten hesaplanan söz konusu kalite değişkenlerinin ortalamaları olmak üzere aşağıdaki formül yazılabilir.

$$\chi_0^2 = \frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \left[\sigma_2^2 (\bar{X}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{X}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12} (\bar{X}_1 - \mu_1)(\bar{X}_2 - \mu_2) \right] \quad (2.32)$$

Formüldeki ifade iki serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uygunluk göstermektedir. Söz konusu eşitlik, μ_1 ve μ_2 gibi iki proses ortalaması için düzenlenecek kontrol grafiğinin temeli olarak kullanılabilir. Eğer üzerinde çalışılan prosesin ortalamaları, yukarıda belirtilen μ_1 ve μ_2 değerlerine yakın değerler alıyorsa, χ_0^2 değerleri de üst kontrol sınırından ($\bar{\chi}_{\alpha,2}^2$) daha düşük değerlere sahip olacaktır. En azından bir ortalama değeri, yeni bir değere (kontrol dışına) kayarsa, χ_0^2 değerinin üst kontrol sınırını aşma ihtimali artacaktır.

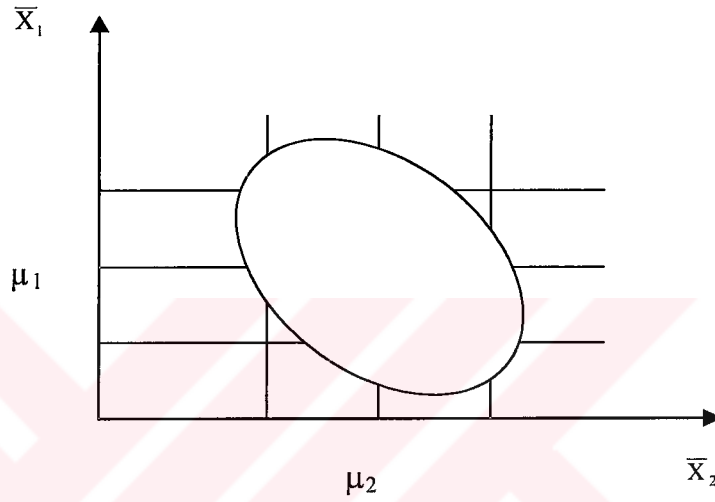


Şekil 2-10: Bağımsız iki değişken için kontrol elipsi
Kaynak: D. C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, Second Edition, John Wiley and Sons. Inc., 1991, s.325.

Burada proses ortalamasının değişimi grafiksel olarak gösterilebilir. Bunun için birbirinden bağımsız (yani; $\sigma_{12}=0$) $\bar{X}_1$ ve $\bar{X}_2$ şeklinde rasgele iki kalite değişkenli bir proses göz önünde bulundurulacaktır. Şayet $\sigma_{12}=0$ ise, Formül 2-32'deki eşitlik, Şekil 2-10'da görüldüğü gibi $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ eksenlerine paralel olacak şekilde merkezi μ_1 ve μ_2 temel eksenlerinde olan bir elipsi tanımlar. $\bar{X}_1$ ve $\bar{X}_2$ ortalama değerleri kullanılarak elde edilen χ_0^2 değerleri çizilen elipsin içerisinde kalıyorsa prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir. Aksi takdirde proses kontrol dışına çıkmış demektir. Şekil 2-10'da görülen

elips “kontrol elipsi” olarak adlandırılır.

Ele alınan iki kalite değişkeni bağımlı olduğunda (yani $\sigma_{12} \neq 0$) ise kontrol elipsi Şekil 2-11’deki gibi düzenlenir. İki değişken bağımlı olduğunda temel eksenler $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ eksenlerine paralel olmaz. Böylece iki kalite değişkeninin bağımlı olduğu durumlarda tek değişkenli kontrol grafikleri düzenleyerek proseste belirlenebilir değişkenliği tespit etmek hemen hemen imkansızdır.³⁶



Şekil 2-11: Bağımlı iki değişken için kontrol elipsi

Kaynak: D. C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, Second Edition, John Wiley and Sons. Inc., 1991, s.325.

Kontrol elipsi düzenleyerek prosesi kontrol etmenin iki dezavantajı vardır. İlk dezavantaj, işaretlenen noktaların sırasının kaybolmasıdır. Bunun sonucu olarak gerekli işlemler kolaylıkla uygulanamaz. Bu durumun üstesinden gelmek amacıyla her bir gözlem değeri özel sembollerle gösterilebilir. Böylece her bir gözlemin farklı bir sembolü olacağından gözlemleri birbirinden ayırt etmek kolaylaşır. İkinci ve en ciddi dezavantaj ise, ikiden fazla kalite değişkeni için kontrol elipsi düzenlemenin zorluğudur. Bu zorlukları gidermek amacıyla her bir örnek için Formül 2-32’den hesaplanan χ_0^2 değerleri kontrol grafiği üzerinde işaretlenir.³⁷

Yukarıda izah edilen kontrol grafiği genellikle “Ki-kare kontrol grafiği” olarak adlandırılır. Ki-kare kontrol grafiğinin kullanılmasıyla yukarıda bahsedilen dezavantajlar ortadan kaldırılmış olunur. Ayrıca kontrol grafiğinin, sürecin durumunu

³⁶ Montgomery; Age., s.512-514.

³⁷ Amitava Mitra; Fundamentals of Quality Control and Improvement, MacMillan Pub., 1993, s.231.

tek bir değer ile (χ_0^2 değeri ile) tanımlamak gibi bir avantajı da mevcuttur. Kontrol grafiğinin bu avantajı, iki yada daha fazla kalite değişkeni ile ilgilenildiği durumlarda faydalı olmaktadır.

Yukarıda izah edilen sonuçlar, p adet kalite değişkeninin birlikte ele alınıp kontrol edildiği prosesler için genişletilebilir. Her bir örnek için Ki-kare kontrol grafiğinde işaretlenecek değerleri bulmak amacıyla aşağıdaki test istatistiği kullanılır.

$$\chi_0^2 = n(\bar{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu) \quad (2.33)$$

Formülde μ , her bir kalite değişkeni yönünden prosesin kontrol altında olması durumundaki ortalamalar vektörünü, Σ ise kovaryans matrisini ifade etmektedir.

Kontrol grafiğinde ortaya çıkabilecek bir kontrol dışı sinyalinin tespit edilmesi için gerekli olan üst kontrol sınırı ise aşağıdaki formül yardımıyla hesaplanabilir.

$$\bar{U}KS = \chi_{\alpha,p}^2 \quad (2.34)$$

Pratikte, μ ortalama vektörü ve Σ kovaryans matrisi, genellikle proses kontrol altında olduğunda prostesten ilk elde edilen örnek büyüklüğü kullanılarak tahmin edilir. μ ortalama vektörü ve Σ kovaryans matrisinin örnek tahminleri sırasıyla $\bar{X}$ ve S olup bu tahmin değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.35)$$

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \quad (2.36)$$

Böylece ortalama vektörü ve kovaryans matrisinin yerine, onların örnek tahminleri olan $\bar{X}$ ve S değerleri kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

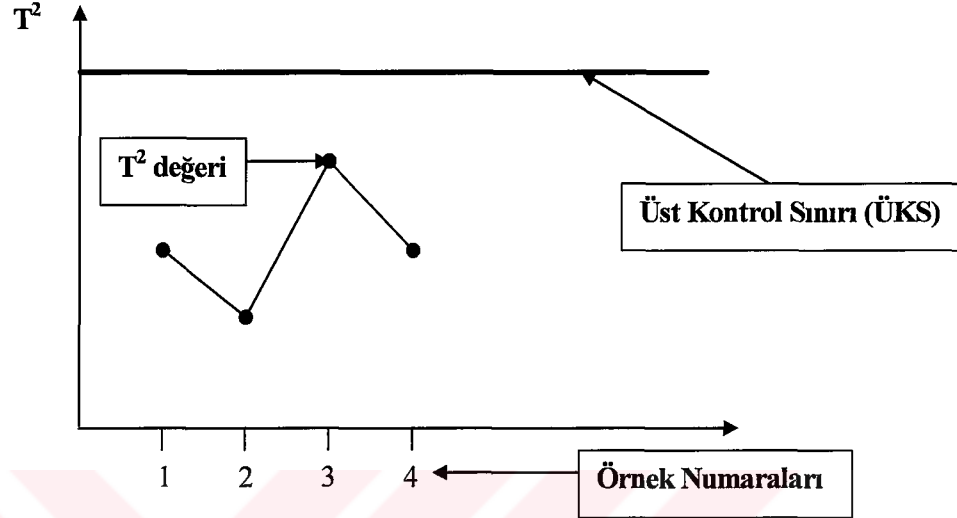
$$T^2 = n(\bar{X} - \mu)' S^{-1} (\bar{X} - \mu) \quad (2.37)$$

Bu şekildeki prosedür genellikle “Hotelling T^2 kontrol grafiği” olarak adlandırılır.³⁸ Aynı prosedür standartlaştırılmış tek değişkenli Shewhart kontrol grafiğine benzerliği nedeniyle çoğu zaman “çok değişkenli Shewhart kontrol grafiği” olarak adlandırılır.³⁹ Bu benzerlik, Hotelling T^2 kontrol grafiğinin tek değişkenli Shewhart kontrol grafiği gibi ortalamada meydana gelebilecek küçük kaymalara karşı duyarsız olmasından kaynaklanır. Söz konusu grafik 1.5σ ’dan daha büyük kaymaların

³⁸ Montgomery; Age., s.514-516.

³⁹ Robert. L. Mason – Nola D. Tracy – John C. Young; “Decomposition of T^2 for Multivariate Control Chart Interpretation”, Journal of Quality Technology, Vol:27, No:2, 1995, s.99.

araştırılmasında etkindir. Formül 2-37 kullanılarak elde edilen T^2 değeri ardışık olarak bir kontrol grafiği üzerinde gösterilebilir. Örnek bir T^2 kontrol grafiği Şekil 2-12’de görülmektedir.



Şekil 2-12: Örnek bir Hotelling T^2 kontrol grafiği

Kaynak: R. L. Mason - J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.101.

Şekil 2-12’de görüldüğü üzere grafikte kontrol sınırlarından sadece üst kontrol sınırı çizilir. Alt kontrol sınırı ise sıfır noktasına yerleştirilir. Bunun nedeni proses ortalamasındaki herhangi bir kaymanın, T^2 değerinde bir artışa sebep olması ve bunun da alt kontrol sınırının önemini yitirmesine sebep olmasıdır. Bununla birlikte T^2 değeri, sadece ortalama vektöründeki kaymalara değil aynı zamanda üzerinde durulan verinin kovaryans matrisindeki değişimlere karşı da duyarlıdır. Şayet kovaryans matrisi değişirse, anormal derecede küçük T^2 değerleri ile karşılaşılabilir. Bu durumda böyle küçük değişimleri tespit etmek amacıyla alt kontrol sınırı sıfır noktasına yerleştirilir. Büyük T^2 değerleri, sadece ortalama vektöründeki değişimlerden kaynaklanmaz; aynı zamanda kovaryans matrisindeki değişimlerden de kaynaklanabilir.⁴⁰

T^2 kontrol grafiği üzerinde işaretlenen T^2 değerleri üst kontrol sınırının altında kaldığı sürece prosesin kontrol altında olduğu kabul edilir. Bir veya daha fazla T^2 değeri üst kontrol sınırını aştığında bir veya daha fazla özel sebep nedeniyle prosesin kontrol dışına çıkmış olduğuna karar verilir. Bu durumda söz konusu özel sebeplerin tespit

⁴⁰ Nola D. Tracy – John C. Young – Robert L. Mason; “Multivariate Control Charts for Individual Observations”, Journal of Quality Technology, Vol:24, No:2, 1992, s.88-95.

edilmesi amacıyla bir inceleme yapılır.⁴¹

Çok değişkenli kalite kontrol uygulamalarında Hotelling T^2 kontrol grafiğindeki kontrol sınırları tespit edilirken dikkatli olunmalıdır. Genelde kontrol grafikleri iki aşamalı olarak kullanılır. Birinci aşamada; prosese ait ilk veriler elde edilerek prosesin kontrol altında olup olmadığı ve gelecekte yeni veriler elde edildiğinde prosesin kontrol altında kalıp kalmayacağını tespit etmek amacıyla kontrol grafikleri düzenlenir. Bu aşamada örnek tahminleri olan $\bar{X}$ ve S değerleri elde edilir. Birinci aşama bazen “Geriye dönük analiz” olarak adlandırılır.⁴² İkinci aşamada ise birinci aşamada toplanan verilerden hesaplanan kontrol sınırları yardımıyla proses parametrelerindeki değişkenliğin kontrolü amaçlanır.⁴³

T^2 kontrol grafiğinin düzenlenmesinde T^2 istatistiği yukarıda izah edilen her iki aşamada kullanılmaktadır. Birinci aşamada alt grup verileri ele alındığında prosesin kontrol altında olup olmadığının araştırıldığı ikinci aşamada kontrol sınırları, F dağılımına sahip T^2 istatistiği kullanılarak belirlenir. Bununla birlikte birinci aşamada bireysel gözlem değerleri ele alındığında kontrol limitleri, F veya Ki-kare dağılımlarına dayalı bir yaklaşım kullanılarak hesaplanır.⁴⁴

2.2.4. Anakütle parametrelerinin bilinmemesi durumunda T^2 kontrol grafiği

Gözlem vektörlerinin bağımsız ve parametrelerin bilinmediği ve söz konusu parametrelerin tahmin edilebildiği bir proses göz önünde bulundursun. Söz konusu prosesin, her bir aşamada p değişkenli $X'=(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tek bir gözlem vektörü elde edilerek incelendiği farz edilmektedir. Bu durumda X gözlem vektörü kullanılarak T^2 değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$T^2 = (X - \bar{X})' S^{-1} (X - \bar{X}) \quad (2.38)$$

Burada tahmin değerleri olan $\bar{X}$ ortalama vektörü ve S kovaryans matrisi daha önce toplanan verilerden hesaplanır.

Daha önceki bölümlerde T^2 istatistiğinin F dağılımı gösterdiği belirtilmişti. Bu dağılımdan faydalanarak verilen bir α önem seviyesi için T^2 kontrol grafiğinin üst

⁴¹ Gunabushanam Nedumaran – Joseph J. Pignatiello; “On Constructing T^2 Control Charts for On-Line Process Monitoring”, Institute of Industrial Engineers Transactions: Quality and Reliability Engineering, Vol:31, 1999, s.529.

⁴² Montgomery; Age., s.517.

⁴³ Frank B. Alt; Multivariate Quality Control: Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol:6, Editor: N. L. Johnson - S. Kotz, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1985, s.111.

⁴⁴ Tracy – Young – Mason; Agm., 1992, s.89.

kontrol sınırı (ÜKS) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\bar{ÜKS} = \left(\frac{p(n+1)(n-1)}{n(n-p)} \right) F_{(\alpha; p, n-p)} \quad (2.39)$$

Formülde; p değişken sayısını, n örnek büyüklüğünü ve $F_{(\alpha; p, n-p)}$ ise α önem seviyesinde F tablosundan elde edilecek kritik değeri ifade etmektedir. Bu sonuçları kullanmak suretiyle gözlem değerlerine ait T^2 değerleri ardışık olarak bir kontrol grafiği üzerinde gösterilir. Kontrol grafiğinde, gözlem değerlerine ait herhangi bir T^2 değeri üst kontrol sınırını aşarsa prosesin kontrol dışına çıktığı söylenir.⁴⁵ Bu bölümde anakütle parametrelerinin bilinmemesi durumu için T^2 kontrol grafiğinin nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 2-3) Bir buhar türbin sisteminden elde edilen altı değişkene ait veriler Tablo 2-4'te verilmiştir. Söz konusu değişkenler; kullanılan yakıt miktarı (Yakıt), üretilen buhar miktarı (Buhar), buhar ısısı (Isı), türbinin saatteki megawatt üretimi (MW), soğutucu ısısı (Soğutucu) ve mutlak basınç miktarı (Basınç)'dır.

Öncelikle Tablo 2-4'teki veriler kullanılarak $\bar{X}$ ortalama vektörü ve S kovaryans matrisi tahmin edilir;

$$\bar{X} = [237596 \quad 179016 \quad 846.393 \quad 20.647 \quad 53.871 \quad 29.139]$$

$$S = \begin{bmatrix} 5.25 \times 10^7 & 2.76 \times 10^7 & -11749.5 & 3313.42 & -408.673 & -169.391 \\ 2.76 \times 10^7 & 1.91 \times 10^7 & -8112.06 & 2302.14 & -203.795 & -115.969 \\ -11749.5 & -8112.06 & 8.6918 & -0.93735 & 0.152381 & 0.032143 \\ 3313.42 & 2302.14 & -0.93735 & 0.285332 & -0.02312 & -0.0134 \\ -408.673 & -203.795 & 0.152381 & -0.02312 & 0.043598 & 0.003757 \\ -169.391 & -115.969 & 0.032143 & -0.0134 & 0.003757 & 0.002474 \end{bmatrix}$$

Ortalama vektörü ve kovaryans matrisi tahmin edildikten sonra incelen altı değişkene ait yeni veriler toplanarak bu verilerin T^2 kontrol grafiği yardımıyla kontrolü yapılabilir. Formül 2-39 kullanılarak T^2 kontrol grafiğinin üst kontrol sınırı (ÜKS) hesaplanır. ÜKS hesaplanırken $\alpha=0.001$ olarak alınmıştır. Bu durumda ÜKS,

$$\bar{ÜKS} = \left(\frac{p(n+1)(n-1)}{n(n-p)} \right) F_{(\alpha; p, n-p)} = \left(\frac{6(28+1)(28-1)}{28(28-6)} \right) F_{0.001, 6, 28-6} = 43.91$$

⁴⁵ Mason – Young; Age., s.100-101.

olarak elde edilir.

Tablo 2-4: Buhar türbin sisteminden elde edilen altı değişkene ait veriler

No	Yakıt	Buhar	Isı	MW	Soğ.	Basınç
1	232666	178753	850	20.53	54.1	29.2
2	237813	177645	847	20.55	54.2	29.2
3	240825	177817	848	20.55	54.0	29.2
4	240244	178839	850	20.57	53.9	29.1
5	239042	177817	849	20.57	53.9	29.2
6	239436	177903	850	20.59	54.0	29.1
7	234428	177903	848	20.57	53.9	29.2
8	232319	177990	848	20.55	53.7	29.1
9	233370	177903	848	20.48	53.6	29.1
10	237221	178076	850	20.49	53.9	29.1
11	238416	177817	848	20.55	53.9	29.1
12	235607	177817	848	20.55	53.8	29.1
13	241423	177903	847	20.55	53.7	29.1
14	233353	177731	849	20.53	53.6	29.1
15	231324	178753	846	20.64	53.9	29.1
16	243930	187378	844	21.67	53.9	29.1
17	252550	187287	843	21.65	54.2	29.1
18	251166	187745	842	21.67	53.7	29.1
19	252597	188770	841	21.78	53.4	29.1
20	243360	179868	842	20.66	53.7	29.1
21	238771	181389	843	20.81	53.9	29.1
22	239777	181411	841	20.88	54.0	29.1
23	219664	167330	850	19.08	54.1	29.2
24	228634	176137	846	20.64	54.0	29.2
25	231514	176029	843	20.24	53.8	29.2
26	235024	176115	846	20.22	53.6	29.2
27	239413	176115	845	20.31	53.7	29.2
28	228795	176201	847	20.24	54.3	29.2

Kaynak: R. L. Mason and J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.102.

ÜKS hesaplandıktan sonra söz konusu altı değişkene ait yeni veriler elde edilerek prosesin kontrol altında olup olmadığı araştırılabilir. Bu amaçla buhar türbin sisteminin altı değişkenine ait yeni veriler elde edilmiş ve Tablo 2-5'te verilmiştir.

Tablo 2-5: Buhar türbin sisteminden elde edilen altı değişkene ait yeni veriler

No	Yakıt	Buhar	Isı	MW	Soğ.	Basınç	T ²
1	23495	18167	843	20.84	54.5	29.0	35.00
2	24708	18935	844	20.86	54.4	28.9	167.98*
3	23832	18441	845	21.10	54.5	28.9	56.82*
4	28480	18916	843	22.18	54.5	28.9	69.48*
5	24652	18551	842	21.21	54.6	28.9	65.91*
6	23321	18040	845	20.75	54.5	29.0	32.56
7	23395	18132	842	20.82	54.6	29.0	43.91
8	23869	18134	844	20.92	54.8	29.0	49.33*
9	24804	18530	844	21.15	54.6	29.0	39.96
10	23307	18141	844	20.93	54.5	29.0	34.46
11	24283	18621	844	21.59	54.4	29.0	25.51
12	24395	18214	844	21.37	54.2	29.0	41.03
13	23873	18334	844	21.01	54.3	29.0	23.28
14	25196	18801	850	21.68	54.4	29.0	29.33
15	24005	18337	846	21.15	54.2	29.0	16.40
16	23537	18243	844	20.99	54.3	29.0	24.10

Kaynak: R. L. Mason and J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.103.

Tablo 2-5'teki veriler kullanılarak T^2 değerleri hesaplanıp aynı tabloda verilmiştir. Söz konusu T^2 değerleri, Tablo 2-5'teki yeni gözlem değerleri ve Tablo 2-4'ten hesaplanan $\bar{X}$ ortalama vektörü ve S kovaryans matrisi kullanılarak hesaplanmıştır. Örnek olması açısından Formül 2-38 kullanılarak bir numaralı gözlem değeri için T^2 değeri aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$T^2 = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) = 35.00$$

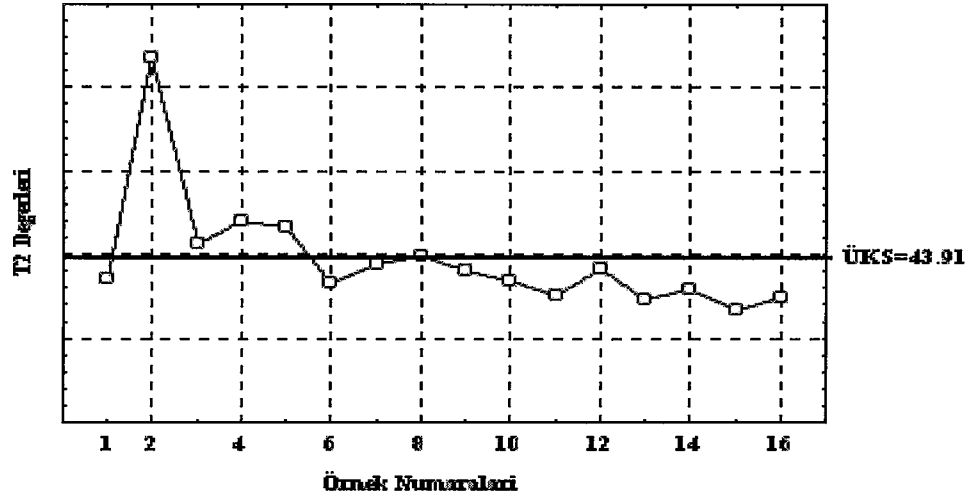
Formülde,

$$(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})' = (-2643 \quad 2662 \quad -3.393 \quad 0.193 \quad 0.629 \quad -0.139)'$$

şeklinde hesaplanırken, $\mathbf{S}^{-1}$ ters matrisi ise S kovaryans matrisinden elde edilmiştir.

Tablo 2-5'teki veriler için düzenlenen T^2 kontrol grafiği ise Şekil 2-13'te verilmiştir. Şekil 2-13 incelendiğinde 2, 3, 4, 5 ve 8 nolu gözlem değerlerinin üst kontrol sınırını aştığı görülmektedir. Bu durumda proses kontrol dışına çıkmış demektir.⁴⁶

⁴⁶ Mason – Young; Age., s.101-103.



Şekil 2-13: Tablo 2-5'teki veriler için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği
Kaynak: R. L. Mason and J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.104.

2.2.5. Anakütle parametrelerinin bilinmesi durumunda T^2 kontrol grafiği

Bazı durumlarda çok değişkenli normal dağılım altında üretim yapan proseslerde anakütle parametreleri bilinir. Söz konusu anakütle parametreleri daha önceden toplanan veriler kullanılarak belirlenmiş olabilir. Fakat anakütle parametrelerinin bilinmesi durumu pratikte çok az rastlanan bir durumdur. Şayet çok değişkenli normal dağılım gösteren anakütle parametreleri biliniyorsa, tek bir gözlem vektörü için T^2 değeri,

$$T^2 = (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \quad (2.40)$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. T^2 istatistiğini tanımlamak amacıyla kullanılan olasılık fonksiyonu, p serbestlik dereceli ki-kare dağılımıdır. Verilen bir α önem seviyesi için T^2 kontrol grafiğinin üst kontrol sınırı,

$$\text{ÜKS} = \chi^2_{(\alpha, p)} \quad (2.41)$$

şeklinde gibi elde edilir. Burada $\chi^2_{(\alpha, p)}$ değeri $\chi^2_{(\alpha)}$ 'nin en yüksek α 'inci kantilidir. Bu nedenle kontrol sınırı, daha önceden toplanmış veri setinin büyüklüğünden bağımsızdır. Endüstride anakütle parametrelerinin bilindiği dağılımlara nadiren rastlanılmaktadır.⁴⁷

Bu bölümde anakütle parametrelerinin bilinmesi durumu için T^2 kontrol grafiğinin nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

⁴⁷ Mason – Young; Age., s.105.

Örnek 2-4) Bir üretim prosesinden alınan iki değişkene ait veriler Tablo 2-6'da verilmiştir. Tabloda iki değişkene ait onbir gözlem değeri ve bunların düzeltilmiş ortalama değerleri verilmiştir.

Tablo 2-6: Bir endüstri prosesinden alınan iki değişkene ait veriler

No	X_1	X_2	$X_1 - \mu_1^*$	$X_2 - \mu_2^*$
1	150.5	204.0	4.64	4.96
2	147.6	201.3	1.74	2.26
3	143.9	199.3	-1.97	0.26
4	147.9	198.3	2.03	-0.74
5	144.3	198.5	-1.56	-0.54
6	147.6	196.3	1.74	-2.74
7	149.7	197.3	3.83	-1.74
8	148.2	195.8	2.33	-3.24
9	140.5	202.1	-5.47	3.06
10	137.3	202.5	-8.56	3.46
11	147.1	194.0	1.24	-5.04

*** $\mu_1=145.86$; $\mu_2=199.04$**

Kaynak: R. L. Mason and J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.106.

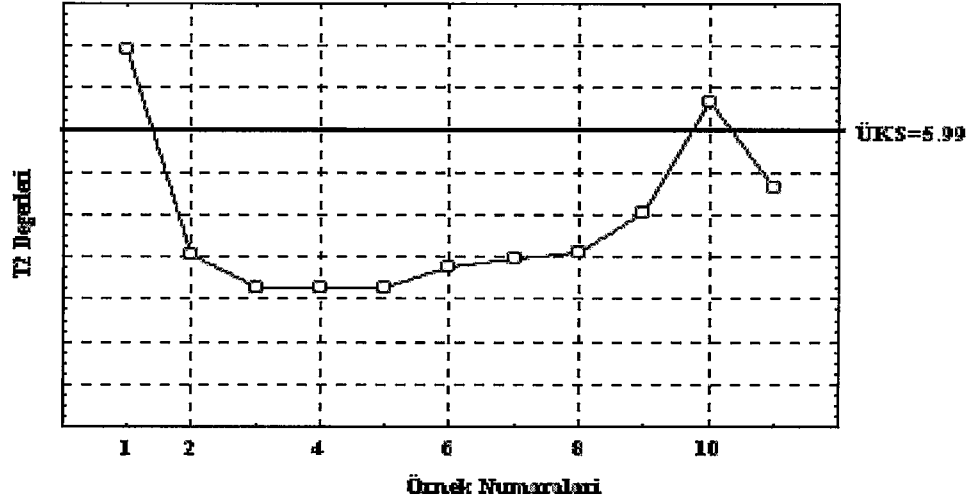
Kontrol prosedürünün amacı; iki değişken (X_1, X_2) arasındaki ilişkiyi göstermek ve bu değişkenlerin belirlenen sınırlar arasında kaldığını göstermektir. Daha önce hesaplanan anakütle parametreleri olan ortalama vektörü ve kovaryans matrisi aşağıda verilmiştir.

$$\mu'=(145.86, 199.04) \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 12.703 & -12.018 \\ -12.018 & 26.825 \end{bmatrix}$$

Tablo 2-6'daki verileri kullanmak suretiyle düzenlenen T^2 kontrol grafiği Şekil 2-14'de görülmektedir. Kontrol grafiğinde üst kontrol sınırı hesaplanırken önem seviyesi $\alpha=0.05$ olarak alınmış ve $\dot{ÜKS} = \chi^2_{(0.05,2)} = 5.99$ olarak hesaplanmıştır.

Kontrol grafiği incelendiğinde 1 ve 10 numaralı gözlem değerlerinin üst kontrol sınırını aştığı yani prosesin kontrol dışına çıktığı gözlemlenir.⁴⁸

⁴⁸ Mason – Young; Age., s.105-106.



Şekil 2-14: Tablo 2-6'daki veriler için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği
Kaynak: R. L. Mason and J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.106.

2.2.6. Bireysel gözlemler için düzenlenen T^2 kontrol grafiği

Bazı sanayi kollarında sürecin analizi için toplanan veri seti genellikle $n=1$ büyüklüğünde olmaktadır. Bu tür durumlara genelde kimya ve proses endüstrilerinde karşılaşılr. Söz konusu endüstriler çoğu zaman birden fazla kalite değişkenini incelediklerinden bireysel gözlem değerleri için düzenlenen çok değişkenli kalite kontrol grafikleri ile ilgilenirler.

Her örnekte $n=1$ gözlem değerinin olduğu m adet örneğin alındığı ve bu örneklerin her birinde de p adet kalite değişkeninin incelendiği bir proses göz önünde bulundurulsun. Burada $\bar{X}$ ve S değerleri sırasıyla bu gözlem değerlerine ait örnek ortalama vektörü ve kovaryans matrisini göstermek üzere Hotelling T^2 değeri,

$$T^2 = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \quad (2.42)$$

formülü yardımıyla hesaplanır. T^2 kontrol grafiğindeki kontrol sınırları ise

$$\text{ÜKS} = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2 - mp} F_{\alpha, p, m-p} \quad \text{ve} \quad \text{AKS} = 0 \quad (2.43)$$

formülü ile hesaplanır. Formülde p , kalite değişkenlerinin sayısını ifade etmektedir.⁴⁹ Yukarıda yazılan üst kontrol sınırı (ÜKS) sadece ileride toplanacak çok değişkenli bireysel gözlem değerlerinin kontrol edilmesi için kullanılabilir.

m örnek değerinin büyük olması durumunda iki yaklaşım yardımıyla üst kontrol

⁴⁹ Montgomery; Age., s.522.

sınırı hesaplanır. Örneğin $m=75$ olduğunda, $\bar{X}_{75}$ değeri, μ anakütle ortalama vektörünün uygun bir tahminini verir. Bu durum için Jackson'ın önerdiği T^2 istatistiği,

$$T^2 = (\mathbf{X}^j - \bar{\mathbf{X}}_{75})' \mathbf{S}_{75}^{-1} (\mathbf{X}^j - \bar{\mathbf{X}}_{75}) \quad (2.44)$$

formülü ile hesaplanır. Eşitlikte $j=1, 2, \dots, 75$ 'tir. üst kontrol sınırı ise

$$\text{ÜKS} = \frac{p(m-1)}{m-p} F_{\alpha, p, m-p} \quad (2.45)$$

formülü yardımıyla hesaplanır. Formül 2-44'teki T^2 değeri aşağıdaki eşitliğin bir yaklaşımı olarak düşünülebilir.

$$T^2 = (\mathbf{X}^j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X}^j - \mu) \quad (2.46)$$

Söz konusu eşitlik p serbestlik dereceli ki-kare dağılımı göstermektedir. Böylece ÜKS'nin hesaplanmasında ikinci yaklaşım ise

$$\text{ÜKS} = \chi_{\alpha, p}^2 \quad (2.47)$$

şeklinde yazılabilir.⁵⁰

Yukarıda m örnek büyüklüğünün büyük olduğu durumlarda üst kontrol sınırının tespiti için iki yaklaşımın kullanılabileceği ifade edilmişti. Bu noktada hangi yaklaşımın kullanılacağı sorunuyla karşılaşılır. $m > 100$ olduğu durumlarda Formül 2-45'teki birinci yaklaşım uygun bir yaklaşım olarak görülmektedir. Formül 2.47'deki ÜKS ise sadece kovaryans matrisi bilindiğinde kullanılan bir yaklaşım olmakla beraber geniş kullanım alanına sahip bir yaklaşımdır. p kalite değişkeni büyük olduğunda ($p \geq 10$ gibi), ki-kare üst kontrol sınırının uygun bir yaklaşım olması için en azından 250 örnek ($m \geq 250$) alınmalıdır.⁵¹

p kalite değişkeni küçük olduğu durumlarda ise ki-kare dağılımına uyumda bazı problemler yaşanabilir. Ancak T^2 'nin gerçek dağılımının elde edilmesi ile bu tür problemlerden kaçınılabilir. Gnanadesikan ve Kettenring (1972) T^2 'nin Beta dağılımına sahip olduğunu göstermişlerdir. Beta dağılımı kullanılarak üst kontrol sınırı,

$$\text{ÜKS} = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad (2.48)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Bu dağılım ancak kontrol grafiklerinin birinci aşaması için doğru bir dağılımdır.

⁵⁰ Thomas P. Ryan; Statistical Methods for Quality Improvement, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1989, s.225.

⁵¹ Montgomery; Age., s.523.

Bu aşamada, toplanan bireysel X_i gözlem değerlerinin kontrol sınırları arasında olup olmadığını kontrol etmek amacıyla kontrol sınırları hesaplanır. Ancak ileride yeni gözlem değerleri alınıp prosesin kontrol altında olup olmadığı kontrol edilmek istendiği ikinci aşamada bağımsız $\bar{X}$ ve S değerlerinden hesaplanan T^2 istatistiği F dağılımı gösterir.⁵²

Tracy ve arkadaşları (1992), yaklaşım dağılımları olan Ki-kare, F ve Beta dağılımları ile gerçek dağılım arasında, üst kontrol sınırlarını kullanarak bir karşılaştırma yapmışlardır. Bu karşılaştırmada $p=2, 5$ ve 10 kalite değişkenleri ve $\alpha=0.01$ önem seviyesi için söz konusu dağılımlar kullanılmak suretiyle çok değişkenli kalite kontrol grafiği için üst kontrol sınırları hesaplanmış ve Tablo 2-7’de verilmiştir.

Tablo 2-7: $\alpha = 0.01$ ve $p=2, 5, 10$ için çok değişkenli kalite kontrol grafiğinin üst kontrol sınırları

m	p=2			p=5			p=10		
	Beta	F	χ^2	Beta	F	χ^2	Beta	F	χ^2
1	---	---	10.6	---	---	16.75	---	---	25.19
2	---	---	10.6	---	---	16.75	---	---	25.19
3	---	79998	10.6	---	---	16.75	---	---	25.19
4	2.25	597	10.6	---	---	16.75	---	---	25.19
5	3.18	132.80	10.6	---	---	16.75	---	---	25.19
6	4.04	65.71	10.6	---	576394	16.75	---	---	25.19
7	4.78	43.95	10.6	5.14	2989.5	16.75	---	---	25.19
8	5.39	33.94	10.6	6.11	529.60	16.75	---	---	25.19
9	5.90	28.35	10.6	7.02	224.60	16.75	---	---	25.19
10	6.32	24.85	10.6	7.82	134.50	16.75	---	---	25.19
11	6.67	22.46	10.6	8.52	95.53	16.75	---	2422448.7	25.19
12	6.98	20.74	10.6	9.13	74.82	16.75	10.08	10966.9	25.19
13	7.24	19.44	10.6	9.66	62.26	16.75	11.07	1747.43	25.19
14	7.46	18.44	10.6	10.12	53.96	16.75	11.99	681.40	25.19
15	7.66	17.63	10.6	10.53	48.12	16.75	12.82	381.30	25.19
20	8.37	15.23	10.6	12.01	34.02	16.75	15.83	111.09	25.19
25	8.81	14.05	10.6	12.92	28.57	16.75	17.67	70.78	25.19
30	9.10	13.34	10.6	13.54	25.71	16.75	18.90	55.78	25.19
50	9.69	12.10	10.6	14.81	21.28	16.75	21.39	38.18	25.19
70	9.95	11.64	10.6	15.36	19.78	16.75	22.47	33.40	25.19
100	10.14	11.30	10.6	15.77	18.77	16.75	23.28	30.47	25.19

Kaynak: N. D. Tracy – J. C. Young – R. L. Mason; “Multivariate Control Charts for Individual Observations”, Journal of Quality Technology, Vol:24, No:2, 1992, s.94.

Tablo 2-7 incelendiğinde her üç dağılım için üst kontrol sınırları arasında farklılıklar olduğu ve p değeri büyüdükçe bu farklılıkların arttığı görülmektedir.

⁵² Tracy – Young – Mason; Agm., 1992, s.90.

Örneğin $m=20$ örnek ve $p=5$ kalite değişkeni için F dağılımında ÜKS=34.02, ki-kare dağılımı için ÜKS=16.75 ve Beta dağılımı için bu değer ÜKS=12.01 iken; p değeri 10 olduğunda, F dağılımında ÜKS=111.09, Ki-kare dağılımında ÜKS=25.19 ve Beta dağılımında ise ÜKS=15.83 olmaktadır.

Bu karşılaştırmada elde edilen değerler; prosesin ilk aşamasındaki ÜKS'nin hesaplanmasında T^2 istatistiğinin gerçek dağılımı olan Beta dağılımı yerine, tahmini dağılımlar olan ki-kare ve F dağılımlarının kullanılması durumunda üst kontrol sınırının yükseldiğini ve dolayısıyla prosesin kontrol altında olduğuna dair hipotezin doğrulanmasında ikinci tip hatanın arttığı gözlenmiştir.

Ayrıca m örnek sayısı arttıkça söz konusu üç dağılıma ait üst kontrol sınırları birbirine yaklaşmaktadır. Sonuç olarak, prosesin ilk aşaması yani kontrol sınırlarının tespit edildiği aşamada m örnek sayısı küçük olduğunda ki-kare ve F dağılımlarından ziyade Beta dağılımının kullanılması daha uygun görülmektedir.⁵³

Bireysel gözlemlerin alınıp incelendiği proseslerde önemli bir sorun da Σ kovaryans matrisinin tahmin edilmesidir. Kovaryans matrisinin tahmin edilmesinde birkaç alternatif metot vardır. Burada bu metotlardan sadece ikisi izah edilecektir. İlk tahmin metodu gözlem değerlerinden hesaplanan örnek kovaryans matrisine benzemektedir. Söz konusu kovaryans matrisinin tahmin değeri,

$$S_1 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \quad (2.49)$$

şeklinde hesaplanır. İkinci tahmin metodu ise birbirini izleyen gözlem çiftleri arasındaki farklılığı kullanmaktadır. Birbirini izleyen gözlem değerleri arasındaki farklılık,

$$V_i = X_{i+1} - X_i, \quad i=1, \dots, m-1 \quad (2.50)$$

şeklinde elde edilir. Söz konusu V_i vektörleri V matrisi içerisinde, $V=[V_1 \ V_2 \ \dots \ V_{m-1}]$ şeklinde düzenlenir. Σ kovaryans matrisinin tahmin değeri, farklılıkların örnek kovaryans matrisinin yarısı olup,

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{V'V}{(m-1)} \quad (2.51)$$

şeklinde hesaplanır.⁵⁴

Aşağıda bireysel gözlemlerin incelendiği proseslerde Σ kovaryans matrisinin

⁵³ Tracy – Young – Mason; Agm., 1992, s.93-94.

⁵⁴ Joe H. Sullivan – William H. Woodall; “A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations”, Journal of Quality Technology, Vol:28, No:4, 1996, s.400.

tahmin edilmesi ile ilgili yukarıda izah edilen iki metot ele alınarak T^2 kontrol grafiğinin nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 2-5) Avrupa’da bulunan bir fabrikada üretilen taşların büyüklükleri yüzde olarak tespit edilmiş ve Tablo 2-8’de verilmiştir. Elli altı gözlemden oluşan taşların yüzdesel büyüklükleri; büyük(B), orta(O) ve küçük(K) olarak sınıflandırılıp tabloda verilmiştir.

Tablo 2-8: Üretilen taşlara ait büyüklük yüzdeleri

i	L= $X_{i,1}$	M= $X_{i,2}$	S= $X_{i,3}$	$T^2_{1,i}$	$T^2_{2,i}$	i	L= $X_{i,1}$	M= $X_{i,2}$	S= $X_{i,3}$	$T^2_{1,i}$	$T^2_{2,i}$
1	5.4	93.6	1.0	4.496	6.439	29	7.4	83.6	9.0	1.594	3.261
2	3.2	92.6	4.2	1.739	4.227	30	6.8	84.8	8.4	0.912	1.743
3	5.2	91.7	3.1	1.460	2.200	31	6.3	87.1	6.6	0.110	0.266
4	3.5	86.9	9.6	4.933	7.643	32	6.1	87.2	6.7	0.077	0.166
5	2.9	90.4	6.7	2.690	5.565	33	6.6	87.3	6.1	0.255	0.564
6	4.6	92.1	3.3	1.272	2.258	34	6.2	84.8	9.0	1.358	2.069
7	4.4	91.5	4.1	0.797	1.676	35	6.5	87.4	6.1	0.203	0.448
8	5.0	90.3	4.7	0.337	0.645	36	6.0	86.8	7.2	0.193	0.317
9	8.4	85.1	6.5	2.088	4.797	37	4.8	88.8	6.4	0.297	0.590
10	4.2	89.7	6.1	0.666	1.471	38	4.9	89.8	5.3	0.197	0.464
11	3.8	92.5	3.7	1.368	3.057	39	5.8	86.9	7.3	0.242	0.353
12	4.3	91.8	3.9	0.951	1.986	40	7.2	83.8	9.0	1.494	2.928
13	3.7	91.7	4.6	1.105	2.688	41	5.6	89.2	5.2	0.136	0.198
14	3.8	90.3	5.9	1.019	2.317	42	6.9	84.5	8.6	1.079	2.062
15	2.6	94.5	2.9	3.099	7.262	43	7.4	84.4	8.2	1.096	2.477
16	2.7	94.5	2.8	3.036	7.025	44	8.9	84.3	6.8	2.854	6.666
17	7.9	88.7	3.4	3.803	6.189	45	10.9	82.2	6.9	7.677	17.666
18	6.6	84.6	8.8	1.167	1.997	46	8.2	89.8	2.0	6.677	10.321
19	4.0	90.7	5.3	0.751	1.824	47	6.7	90.4	2.9	2.708	3.869
20	2.5	90.2	7.3	3.966	7.811	48	5.9	80.1	4.0	0.888	1.235
21	3.8	92.7	3.5	1.486	3.247	49	8.7	83.6	7.7	2.424	5.914
22	2.8	91.5	5.7	2.357	5.403	50	6.4	88.0	5.6	0.261	0.470
23	2.9	91.8	5.3	2.094	4.959	51	8.4	84.7	6.9	1.995	4.731
24	3.3	90.6	6.1	1.721	3.800	52	9.6	80.6	9.8	4.732	11.259
25	7.2	87.3	5.5	0.914	1.791	53	5.1	93.0	1.9	2.891	4.303
26	7.3	79.0	13.7	9.226	14.372	54	5.0	91.4	3.6	0.989	1.609
27	7.0	82.6	10.4	2.940	4.904	55	5.0	86.2	8.8	1.770	2.495
28	6.0	83.5	10.5	3.310	4.771	56	5.9	87.2	6.9	0.102	0.166

Kaynak: J. H. Sullivan – W. H. Woodall; “A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations”, Journal of Quality Technology, Vol:28, No:4, 1996, s.405.

Söz konusu verilerin ortalama vektörü,

$$\bar{X}' = [5.682, 88.22]'$$

olup ilk tahmin metodu kullanılarak hesaplanan örnek kovaryans matrisi S_1 ,

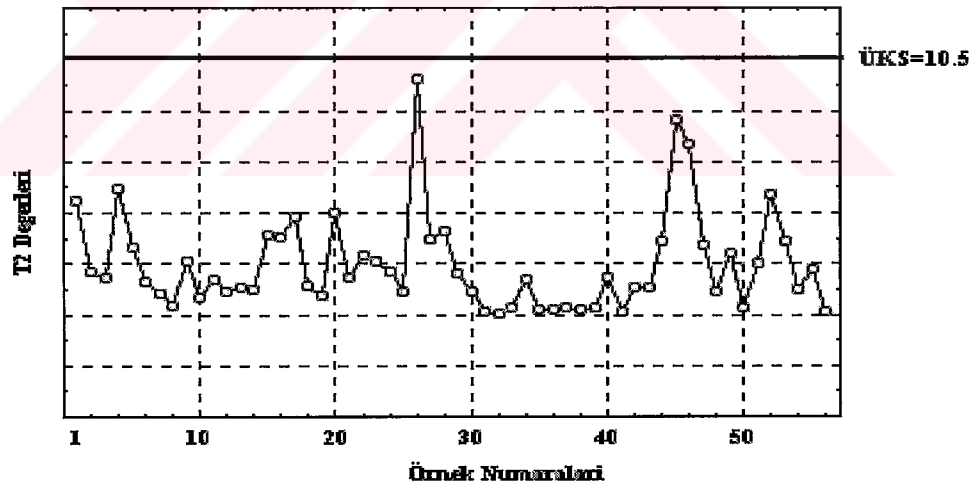
$$S_1 = \begin{bmatrix} 3.770 & -5.495 \\ -5.495 & 13.53 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilirken, ikinci tahmin metodu kullanılarak hesaplanan örnek kovaryans matrisi S_2 ise

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1.562 & -2.093 \\ -2.093 & 6.721 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca tahmini örnek kovaryans matrisleri S_1 ve S_2 kullanılarak T^2 değerleri de hesaplanmış ve Tablo 2-8'de verilmiştir. Öncelikli olarak S_1 örnek kovaryans değerleri kullanılarak hesaplanan T_1^2 değerleri için kontrol grafiği düzenlenmiştir. T_1^2 kontrol grafiği Şekil 2-15'te görülmektedir.

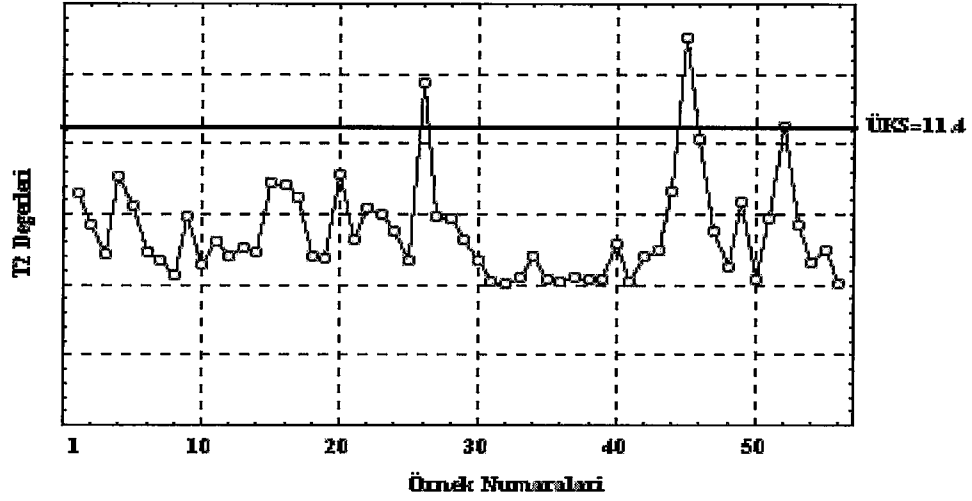


Şekil 2-15: T_1^2 değerleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Kaynak: J. H. Sullivan – W. H. Woodall; “A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations”, Journal of Quality Technology, Vol:28, No:4, 1996, s.406.

Grafik incelendiğinde bütün gözlem değerlerinin üst kontrol sınırının altında olduğu yani, prosesin kontrol altında olduğu görülür. Diğer taraftan S_2 değerleri kullanılarak hesaplanan T_2^2 değerleri için düzenlenen kontrol grafiği Şekil 2-16'da verilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde ise bazı gözlem değerlerinin üst kontrol

sınırının üzerinde olduğu görülür. Aynı zamanda proses ortalamasının 24 numaralı gözlem değerinden itibaren değiştiği de söylenebilir.



Şekil 2-16: T_2^2 değerleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Kaynak: J. H. Sullivan – W. H. Woodall; “A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations”, Journal of Quality Technology, Vol:28, No:4, 1996, s.406.

Prosesin ilk 24 gözlem değerlerine ait örnek ortalama vektörü $\bar{X}'_{1-24} = [4.23, 90.8]$ iken son 32 gözleme ait örnek ortalama vektörü ise $\bar{X}'_{25-56} = [6.77, 86.3]$ 'dir. Bu örnek ortalama vektörleri istatistiksel olarak birbirinden farklı olduğu halde kovaryans matrisleri istatistiksel olarak birbirinden farklı değildir. Bu durum, 24 numaralı gözlemden itibaren prosesin ortalama vektöründe bir kaymanın olduğunu göstermektedir. Şekil 2-16'daki T_2^2 kontrol grafiği incelendiğinde bu durum daha net olarak görülmektedir.⁵⁵

2.2.7. Alt grup verileri için düzenlenen T^2 kontrol grafiği

İncelenen bir proseste gözlem değerleri, tek bir gözlem vektörü yerine n adet gözlem vektörü içeren alt grup verilerinden oluştuğunda alt grup verilerinin ortalaması kullanılarak kontrol grafiği düzenlenir. Bireysel gözlem vektörleri p değişkenli normal dağılım $N_p(\mu, \Sigma)$ gösterdiğinde, n adet gözlem değerinin örnek ortalama vektörü $\bar{X}$, bireysel gözlem değerlerinde olduğu gibi p değişkenli normal dağılım $N_p(\mu, \Sigma/n)$ gösterecektir. Fakat alt grup verilerinde kovaryans matrisi Σ/n ile gösterilir. Bireysel

⁵⁵ Sullivan – Woodall; Agm., s.405-406.

gözlem vektörleri çok değişkenli normal dağılım göstermediğinde, merkezi limit teoreminden dolayı n değeri büyük iken $\bar{X}$ örnek ortalama vektörü, $N_p(\mu, \Sigma/n)$ dağılımına oldukça yaklaşıacaktır.⁵⁶

p adet kalite değişkeninin birlikte kontrol edildiği durumlarda söz konusu değişkenlerin ortak olasılık dağılımının p değişkenli normal dağılım olduğu farz edilsin. Bu durumda m büyüklüğünde bir örnekten seçilen p adet kalite değişkeninin her biri için örnek ortalamaları hesaplanarak alt grup verileri için Hotelling T^2 kontrol grafiği düzenlenir. Söz konusu değişkenlerin ortalamaları $(p \times 1)$ vektöründe,

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Anakütle parametreleri bilindiği durumlarda, alt grup verileri için düzenlenecek ki-kare kontrol grafiğinde her bir örnek için işaretlenecek değerleri bulmak amacıyla,

$$\chi^2 = n(\bar{X} - \mu)' \Sigma^{-1}(\bar{X} - \mu) \quad (2.52)$$

test istatistiği kullanılır. Formüldeki $\mu' = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p]$ değerleri her bir kalite değişkeninin prosesin kontrol durumundaki ortalamalar vektörünü, Σ ise kovaryans matrisini ifade etmektedir. Kontrol grafiğinin üst kontrol sınırı,

$$\dot{U}KS = \chi_{\alpha, p}^2 \quad (2.53)$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. Proseslerde μ ortalama vektörü ve Σ kovaryans matrisi bilinmediği durumlarda söz konusu parametrelerin tahmincilerinin kullanıldığı daha önce ifade edilmişti. Bu durumda alt grup verileri için μ ortalama vektörü ve Σ kovaryans matrisinin tahmincileri aşağıdaki formüller yardımıyla elde edilir. Öncelikli olarak her alt grubun örnek ortalamaları ve varyansları hesaplandıktan sonra elde edilen bu ortalama ve varyanslar kullanılarak ortalama vektörü ve kovaryans matrisi elde edilir. Böylece tahminciler elde edilir.

$$\bar{X}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ijk} \quad (2.54)$$

⁵⁶ Mason – Young; Age., s.106-107.

$$S_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{jk})^2 \quad (2.55)$$

Formüllerde $j=1, 2, \dots, p$ ve $k=1, 2, \dots, m$ 'dir. Burada m örnek sayısını, p değeri de değişken sayısını ifade etmektedir. Formül 2-54'teki eşitlikte X_{ijk} k 'nci örnekteki j 'inci kalite değişkeni için i 'inci gözlem değerini ifade etmektedir. k 'nci örnek için j ve h kalite değişkenleri arasındaki kovaryans değeri ise

$$S_{jkh} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{jk})(X_{ihk} - \bar{X}_{hk}) \quad (2.56)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $k=1, 2, \dots, m$ ve $j \neq h$ 'tır. Yukarıdaki değerler elde edildikten sonra m örnek üzerinden $\bar{X}_{jk}$, S_{jk}^2 ve S_{jkh} istatistiklerinin ortalamaları,

$$\bar{\bar{X}}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{X}_{jk} \quad (2.57)$$

$$\bar{S}_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jk}^2 \quad (2.58)$$

$$\bar{S}_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jkh} \quad (2.59)$$

formülleriyle hesaplanır. $\bar{\bar{X}}$ ortalama vektörü, $\bar{\bar{X}}_j$ değerleri kullanılarak elde edilirken, $(p \times p)$ örnek kovaryans matrisi ise $\bar{S}_{jh}$ değerleri kullanılarak,

$$S = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \cdots & \bar{S}_{1p} \\ & \bar{S}_2^2 & \bar{S}_{23} & \cdots & \bar{S}_{2p} \\ & & \bar{S}_3^2 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & \bar{S}_p^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşturulur. Ortalama vektörü ve kovaryans matrisinin yerine onların örnek tahminleri olan $\bar{\bar{X}}$ ve S değerleri kullanılarak,

$$T^2 = n(\bar{X} - \bar{\bar{X}})' S^{-1} (\bar{X} - \bar{\bar{X}}) \quad (2.60)$$

eşitliği yazılır. Böylece Formül 2-60'taki eşitlik kullanılarak alt grup verileri için Hotelling T^2 kontrol grafiği düzenlenir.⁵⁷

Kontrol grafiklerinin kullanımında iki aşamanın olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla alt grup verileri için düzenlenecek Hotelling T^2 kontrol grafiğinde de

⁵⁷ Montgomery; Age., s.514-516.

kontrol sınırları iki aşamada elde edilir. Bunun için öncelikli olarak procesten elde edilen ilk alt grup verileri kullanılarak sınırlar tespit edilmeye çalışılır. Daha sonra bu sınırlar kullanılarak prosesin kontrol altında olup olmadığı tespit edilir. Bu aşama için kontrol sınırları aşağıdaki gibi elde edilir.

$i=1, 2, \dots, m$ olmak üzere i alt grubu için $(p \times n)$ boyutunda bir veri matrisi düşünölsün. Bu veriler kullanılarak her bir veri matrisi için, $(p \times 1)$ örnek ortalamaları vektörü $(\bar{X}_i)$ ve $(p \times p)$ örnek-kovaryans matrisi (S) hesaplanabilir. Bu değerklerin nasıl hesaplandığı yukarıda izah edilmişti. Bu değerklerin kullanılmasıyla her bir alt grup için T^2 değeri,

$$T^2 = n(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})' S^{-1} (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}) \quad (2.61)$$

formölü yardımıyla hesaplanır. T^2 kontrol grafiğı için kontrol sınırları ise

$$\dot{ÜKS} = \frac{p(m-1)(n-1)}{n(mn-m-p+1)} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \text{ ve } AKS=0 \quad (2.62)$$

formölü ile hesaplanır. Burada $F_{\alpha, p, mn-m-p+1}$, v_1 ve v_2 serbestlik dereceli F tablo değerkini göstermektedir.⁵⁸

Ryan (1989) alt grup verilerine uygulanan T^2 kontrol grafiğı için kontrol sınırlarını,

$$\dot{ÜKS} = \left(\frac{mnp - mp - np + p}{mn - m - p + 1} \right) F_{\alpha(p, mn-m-p+1)} \text{ ve } AKS=0 \quad (2.63)$$

şeklinde vermiştir.⁵⁹ Kontrol sınırları belirlendikten sonra proceste ilk elde edilen verilerden hesaplanan T^2 değerkleri kontrol grafiğı üzerinde gösterilir. Şayet bir veya daha fazla alt gruba ait T^2 değeri üst kontrol sınırını ($\dot{ÜKS}$) aşarsa-yani proses kontrol dışına çıkarsa- kontrol dışına çıkan T^2 değerkinin olduğı alt grup çıkarılarak geri kalan alt gruplarla kontrol sınırları yeniden hesaplanır. Bu işlem proses kontrol altında oluncaya kadar tekrar edilir. Böylece elde edilecek kontrol sınırları daha sonra yapılacak kalite kontrol çalışmalarında kullanılır. Bu durumda ilerde prosesin kontrol edilmesi aşamasında kullanılacak formöller ise aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

Bu amaçla $\bar{X}_g$ değeri gelecekte kontrol edilecek alt grup için $(p \times 1)$ örnek

⁵⁸ Alt; Age., s.117-119.

⁵⁹ Ryan; Age., s.218.

ortalama vektörünü göstermek üzere T^2 değeri,

$$T^2 = n(\bar{X}_g - \bar{X})' S^{-1} (\bar{X}_g - \bar{X}) \quad (2.64)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu aşama için kontrol sınırları ise

$$\text{ÜKS} = \frac{p(m+1)(n-1)}{n(mn-m-p+1)} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \text{ ve AKS}=0 \quad (2.65)$$

şeklinde olur.⁶⁰ Ryan (1989) ise bu durum için T^2 kontrol grafiğindeki kontrol sınırlarını

$$\text{ÜKS} = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \text{ ve AKS}=0 \quad (2.66)$$

formülüyle belirlemiştir. μ ortalama vektörü ve Σ kovaryans matrisi çok fazla sayıda örnekten tahmin edildiği zaman, yukarıda izah edilen her iki aşamada da genellikle üst kontrol sınırı olarak, $\text{ÜKS} = \chi^2_{\alpha,p}$ kullanılır.⁶¹ Lowry ve Montgomery (1995) her iki aşamada üst kontrol sınırı için ki-kare yaklaşımının, ilk elde edilen alt grup sayısının 25'ten büyük olması durumunda kullanılması gerektiğini belirtmişlerdir.⁶² Prosesin kontrolü ve kontrol sınırlarının tespit edilmesi amacıyla ilk örnek değerleri kullanılarak uygulanan geriye dönük analiz tek değişkenli kontrol grafiklerinde de kullanılmaktadır. Bu analiz yapılırken seçilecek ilk örnek büyüklüğü önemlidir. Örneğin $\bar{X}$ kontrol grafiği için ilk seçilecek örnek büyüklüğünün $m \geq 20$ veya 25 olduğu bilinmektedir. İlk örnek büyüklüğü bu aralıkta seçilirse birinci ve ikinci aşamada belirlenen kontrol sınırları arasındaki fark genellikle önemli değildir. Çünkü birinci ve ikinci aşamanın kontrol sınırları hemen hemen birbirinin aynı olacaktır. Bununla beraber çok değişkenli kalite kontrol grafikleri kullanılırken prosesin kontrolü ve kontrol sınırlarının tespit edilmesi hususunda dikkatli olunmalıdır.⁶³

Grant (1980), alt grup verilerinin incelendiği proseslerde kontrol sınırlarının tespit edilmesi aşamasında ilk seçilecek örnek büyüklüğünün 20 veya 25 olmasını önermektedir. Ancak Besterfield (1981), örnek büyüklüğü için üst sınırı 12 olarak vermektedir. Ayrıca her bir örnek büyüklüğünün 4'ten az 50'den fazla olmaması da tavsiye edilmektedir. Lowry ve Montgomery (1995), birçok durumda ki-kare yaklaşımıyla ikinci aşamada kontrol sınırları elde edilmeden önce çok fazla miktarda ilk

⁶⁰ Alt; Age., s.119.

⁶¹ Montgomery; Age., s.517.

⁶² C. A. Lowry – D. C. Montgomery; "A Review of Multivariate Control Charts"; Institute of Industrial Engineers Transactions, Vol:27, No:6, 1995, s.801.

⁶³ Montgomery; Age., s.517.

örneklerin alınmasının gerektiğini belirtmişlerdir. Söz konusu araştırmacılar, $p=2, 3, 4, 5, 10$, ve 20 kalite değişkenli ve $n= 3, 5$, ve 10 örnek büyüklükleri için tavsiye edilen minimum m alt grup değerini gösteren tablolar vermişlerdir. Tavsiye edilen m alt grup değeri daima 20 örnekten büyük ve çoğu zaman 50 örnekten fazladır.⁶⁴

Bu bölümde alt grup verileri için T^2 kontrol grafiğinin nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 2-6) $p=2$ kalite değişkenine ait Tablo 2-9’da verilen alt grup verileri için T^2 kontrol grafiği düzenlenerek prosesin kontrol altında olup olmadığı tespit edilecektir. Burada yirmi alt grup ve her alt grupta da $n=4$ adet gözlem değeri bulunmaktadır.

Tablo 2-9: $p=2$ kalite değişkenine ait alt grup verileri

No	A(Birinci kalite değişkeni)				B(İkinci kalite değişkeni)			
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	X_2	X_3	X_4
1	72	84	79	49	23	30	28	10
2	56	87	33	42	14	31	8	9
3	55	73	22	60	13	22	6	16
4	44	80	54	74	9	28	15	25
5	97	26	48	58	36	10	14	15
6	83	89	91	62	30	35	36	18
7	47	66	53	58	12	18	14	16
8	88	50	84	69	31	11	30	19
9	57	47	41	46	14	10	8	10
10	26	39	52	48	7	11	35	30
11	46	27	63	34	10	8	19	9
12	49	62	78	87	11	20	27	31
13	71	63	82	55	22	16	31	15
14	71	58	69	70	21	19	17	20
15	67	69	70	94	18	19	18	35
16	55	63	72	49	15	16	20	12
17	49	51	55	76	13	14	16	26
18	72	80	61	59	22	28	18	17
19	61	74	62	57	19	20	16	14
20	35	38	41	46	10	11	13	16

Kaynak: T. P. Ryan; Statistical Methods for Quality Improvement, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1989, s.220.

⁶⁴ Lowry – Montgomery; Agm., s.803.

Tablo 2-9'daki veriler kullanılarak her bir alt grup için ortalama, varyans, kovaryans ve T^2 değerleri hesaplanarak Tablo 2-10'da verilmiştir. Formül 2-64 kullanılarak ilk alt gruba ait T^2 değeri,

$$T^2 = n(\bar{X}_g - \bar{\bar{X}})' S^{-1} (\bar{X}_g - \bar{\bar{X}})$$

$$T^2 = \frac{4}{(222.03)(103.12) - (56.58)^2} [103.12(71 - 60.38)^2 + 222.03(22.75 - 18.49)^2 - 2(56.58)(71 - 60.38)(22.75 - 18.49)]$$

$$T^2 = 2.24$$

şeklinde belirlenmiştir. Diğer alt gruplara ait T^2 değerleri ise Tablo 2-10'da verilmiştir.

Tablo 2-10: Tablo 2-9'daki veriler için ortalama, varyans, kovaryans ve T^2 değerleri

No	Ortalamalar		Varyans ve Kovaryans Değerleri			T^2
	A ($\bar{X}_1$)	B ($\bar{X}_2$)	S_1^2	S_2^2	S_{12}	
1	71.00	22.75	239.33	139.00	80.92	2.24
2	54.50	15.50	559.00	248.00	113.67	0.65
3	52.50	14.25	471.00	140.17	44.25	1.27
4	63.00	19.25	284.00	148.33	77.58	0.22
5	57.25	18.75	880.92	333.42	136.92	1.53
6	81.25	29.75	176.25	109.42	68.25	8.98
7	56.00	15.00	64.67	20.67	6.67	1.32
8	72.75	22.75	296.92	162.92	90.92	3.77
9	47.75	10.50	44.92	16.83	6.33	4.95
10	41.25	20.75	132.92	149.08	190.92	63.76
11	42.50	11.50	248.33	74.67	25.67	6.55
12	69.00	22.25	284.67	147.00	76.92	1.37
13	67.75	21.00	132.92	82.00	54.00	1.36
14	67.00	19.25	36.67	2.33	2.92	3.26
15	75.00	22.50	162.00	105.67	69.67	7.41
16	59.75	15.75	99.58	32.25	10.92	2.76
17	57.75	17.25	154.25	70.08	35.58	0.12
18	68.00	21.25	96.67	48.33	24.92	1.33
19	63.50	17.25	53.67	15.83	7.58	3.50
20	40.00	12.50	22.00	12.33	7.00	13.04
Ort.	$\bar{\bar{X}}_1 = 60.38$	$\bar{\bar{X}}_2 = 18.49$	$\bar{\bar{S}}_1^2 = 222.03$	$\bar{\bar{S}}_2^2 = 103.12$	$\bar{\bar{S}}_{12} = 56.58$	

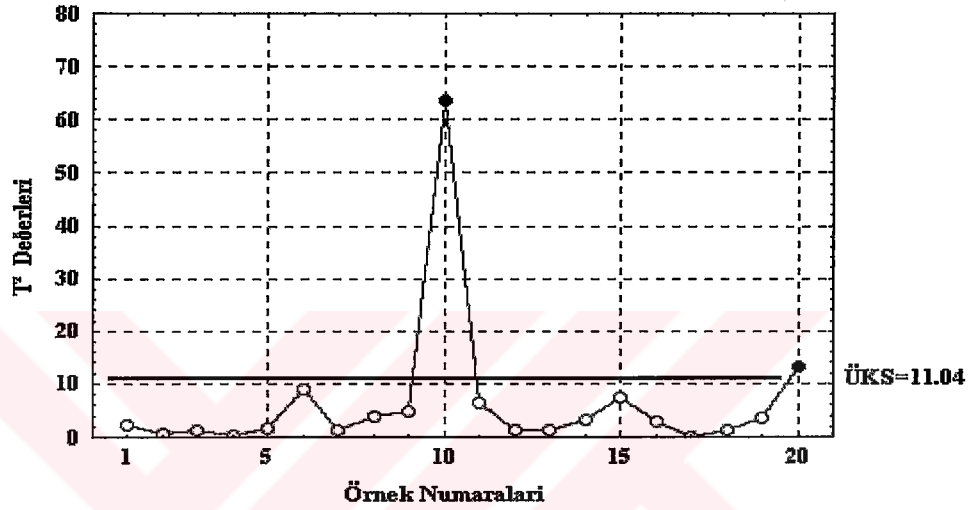
Kaynak: T. P. Ryan; Statistical Methods for Quality Improvement, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1989, s.221.

Kontrol grafiğinin üst kontrol sınırı ise Formül 2-66 kullanılarak,

$$\bar{U}KS = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{\alpha, p, mn - m - p + 1} = \frac{2(20-1)(4-1)}{20 * 4 - 20 - 2 + 1} F_{0.0054, 2, 20 * 10 - 20 - 2 + 1}$$

$$= \frac{114}{59} F_{0.0054, 2, 59} = 19.322 * 5.7119 \text{ ÜKS} = 11.04$$

şeklinde elde edilir. Örneğimizde önem seviyesi $\alpha=0.0054$ olarak alınmıştır. Üst kontrol sınırı hesaplandıktan sonra Tablo 2-10'daki veriler kullanılarak T^2 kontrol grafiği Şekil 2-17'deki gibi düzenlenir. Kontrol grafiğinde alt kontrol sınırı daha önce belirtildiği gibi sıfır olarak alınır.



Şekil 2-17: Tablo 2-10'daki veriler için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği
Kaynak: T. P. Ryan; Statistical Methods for Quality Improvement, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1989, s.221.

Şekil 2-17'deki T^2 kontrol grafiği incelendiğinde 10 ve 20 numaralı alt grup değerlerine ait T^2 değerlerinin üst kontrol sınırının üzerinde olduğu görülmektedir. Bu durumda prosesin kontrol dışına çıktığı anlaşılar. Burada amaç proses standartlarının tespit edilmesi ise, kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyali veren 10 ve 20 numaralı alt gruplar analizden çıkarılarak işlemler tekrarlanır. Bir sonraki aşamada 10 ve 20 numaralı alt gruplar analizden çıkarıldığında bu kez 6 numaralı alt grup kontrol dışına çıkmaktadır. Altı numaralı alt grup ta analizden çıkarıldığında prosesin kontrol altında olduğu gözlenir. Analizden 6, 10 ve 20 numaralı alt gruplar çıkarılıp geri kalan alt gruplar kullanılmak suretiyle $\alpha=0.0054$ için $\text{ÜKS}=11.1487$ olarak elde edilir. Böylece ileride yapılabilecek bir kalite kontrol çalışmasında düzenlenecek kalite kontrol grafiğine ait üst kontrol sınırı 11.1487 olarak bulunur.⁶⁵

⁶⁵ Ryan; Age., s.220-222.

2.2.8. Hotelling T^2 kontrol grafiğinde ortalama işletim uzunluğu (ARL)

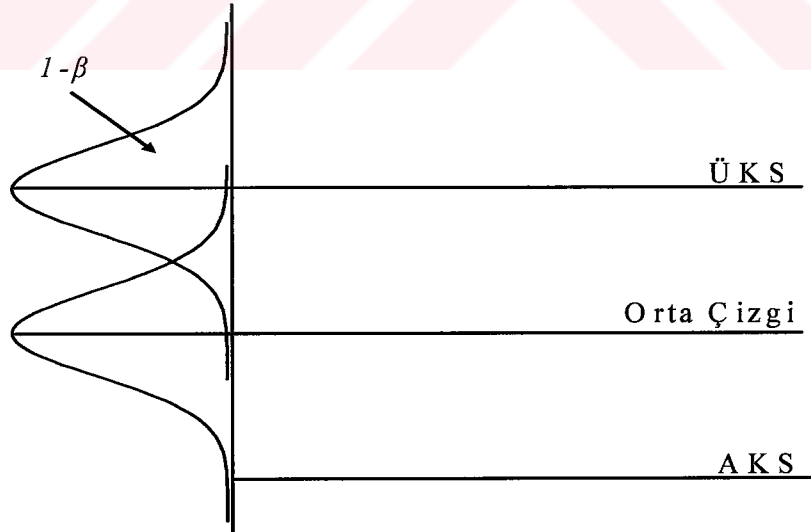
Ortalama işletim uzunluğu (ARL), herhangi bir örnek noktası kontrol dışı durumu göstermeden önce alınması gereken ortalama örnek sayısını ifade eder. Proses kontrol altında iken ARL'nin büyük olması arzu edilirken proses kontrol dışında iken kaymayı çabuk tespit etmek amacıyla ARL'nin küçük olması istenir.⁶⁶ Bir kontrol metodu için ortalama işletim uzunluğu (ARL) aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$ARL=1/p \quad (2.67)$$

Eşitlikte p değeri, kontrol bölgesinin dışında olma olasılığını göstermektedir. Kontrol altında olan bir proses için bu olasılık, birinci tip hatayı ifade eden α 'ya eşittir. ARL'nin hem tek hem de çok değişkenli kalite kontrol prosedürlerinde bir çok kullanımı mevcuttur. Örneğin ARL, proseste bir kontrol dışı sinyali olmadan önce, ortalama olarak gözlenmesi beklenen gözlem sayısını hesaplamak için kullanılabilir. Bu durumda ARL değeri,

$$ARL=1/\alpha \quad (2.68)$$

şeklinde elde edilir. ARL'nin diğer bir kullanımı, proseste bir kayma ortaya çıktığında söz konusu kaymayı tespit etmeden önce gözlenmesi beklenen gözlem sayısının hesaplanmasıdır.



Şekil 2-18: Tek değişkenli proseste ortalamadan kayma

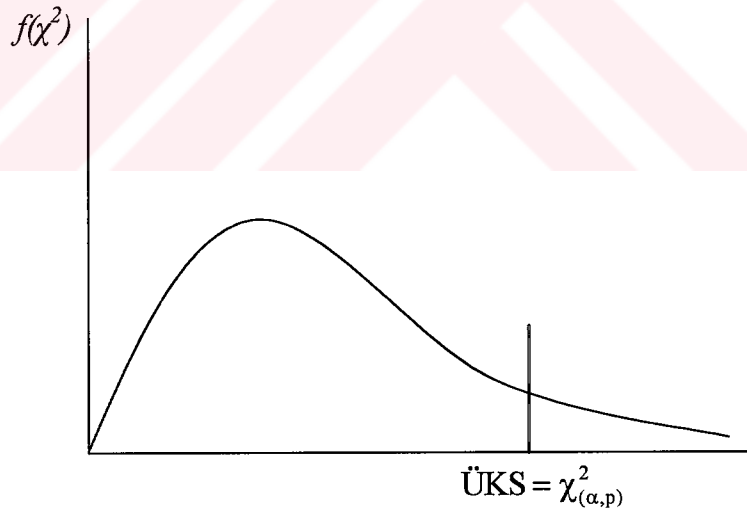
Kaynak: R. L. Mason - J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.112.

⁶⁶ F. Aparisi; "Hotelling's T^2 Control Chart with Adaptive Sample Sizes", International Journal of Production Research, Vol:34, No:10, 1996, s.2856.

Şekil 2-18'deki gibi normal dağılıma sahip tek değişkenli iki dağılım düşünölsün. Şekilde göröldüğü üzere dağılımın biri orta çizgide, diğeri ise sağa kaymış olarak üst kontrol sınırı üzerinde yer almaktadır. Burada herhangi bir kaymanın tespit edilme olasılığı, $(1-\beta)$ 'ya eşittir. β değeri, ikinci tip hata olasılığını ifade etmektedir. Ortaya çıkabilecek bir kayma durumunda bu olasılık standart istatistik formülleri kullanılarak belirlenebilir. Ortaya çıkabilecek bir kaymayı tespit etmek amacıyla ARL değeri,

$$ARL=1/(1-\beta) \quad (2.69)$$

şeklinde tarif edilir. Bilindiğı üzere $(1-\beta)$ olasılığı, proses ortalamasının değıştiğini ifade eden hipotezi test etmenin gücünü ifade eder. Bu sonuç ARL'nin diğör önemli bir kullanımını gösterir ki bu da kontrol prosedürlerinin birbirleriyle karşılaştırılmasıdır.⁶⁷ ARL, etkinliğin bir ölçüsü olarak birbirinden farklı kalite kontrol metotlarının karşılaştırılması amacıyla çok yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.⁶⁸ Bu işlem, proseste ortaya çıkabilecek bir kayma durumunda iki prosedürden elde edilen ARL değerlerinin karşılaştırılmasıyla yapılır.



Şekil 2-19: Çok değişkenli proseste ortalamadan kayma

Kaynak: R. L. Mason - J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.112.

Tek değişkenli gözlemlerin ele alınıp incelendiğı proseslerde ortaya çıkabilecek bir kaymanın tespiti ve bu kaymanın tespit edilme olasılığının $(1-\beta)$ hesaplanması

⁶⁷ Mason – Young; Age., s.111.

⁶⁸ Aparisi; Agm., s.2856.

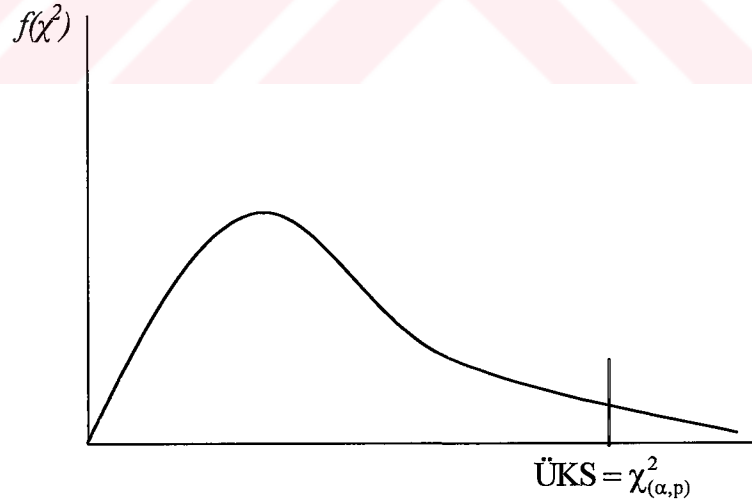
kolaydır. Bununla beraber söz konusu hesaplamaların çok değişkenli durumlarda yapılması oldukça zordur. Şekil 2-19’da olduğu gibi iki değişkenli bir kontrol bölgesi ve proses ortalamasında bir kayma göz önünde bulundurulsun.

Burada kovaryans matrisinin değişmediği ve çok değişkenli dağılımlar için sabit kaldığı varsayılmaktadır. Bu nedenle dağılımda meydana gelen kayma için kontrol bölgesinin eğilimi, proses kontrol altında olduğu durumdaki kontrol bölgesi ile aynı olacaktır. Dağılımda meydana gelen kaymanın alanı kaymanın tespit edilme olasılığına $(1-\beta)$ eşittir. Bu olasılık $p=2$ değişken için analitik olarak hesaplanabilir. Fakat bu hesaplama daha fazla değişkenin olması durumunda oldukça zordur.

Çok değişkenli normal dağılımın μ_x ve Σ parametrelerinin bilindiği farz edilsin. Kontrol altındaki bir X gözlem vektörü için T^2 kontrol bölgesi ki-kare dağılımı ile tanımlanır ve bu kontrol bölgesi söz konusu dağılıma dayalı olarak üst kontrol sınırı ile karşılaştırılabilir. Bu durum,

$$T_x^2 = (X - \mu_x)' \Sigma^{-1} (X - \mu_x) < \text{ÜKS} = \chi_{(\alpha,p)}^2 \quad (2.70)$$

şeklinde yazılabilir. Ki-kare dağılımına göre kontrol bölgesi Şekil 2-20’de gösterilmiştir.



Şekil 2-20: Kontrol bölgesi ve ki-kare dağılımı

Kaynak: R. L. Mason - J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.113.

Bu dağılım merkezi ki-kare dağılımı olarak bilinir. Bu durum $(X-\mu_x)$ vektörünün, ortalama vektörü sıfır olan çok değişkenli normal dağılım ile tanımlanmasından

kaynaklanır.

Kovaryans matrisi aynı fakat μ_x ortalama vektörü farklı olan çok değişkenli normal dağılıma sahip bir dağılımdan alınan bir Y gözlem vektörü düşünölsün. Bu gözlem vektörü için T^2 değeri,

$$T_y^2 = (Y - \mu_x)' \Sigma^{-1} (Y - \mu_x) \quad (2.71)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki istatistik, merkezi ki-kare dağılımı ile tanımlanamaz. Bu sebeptendir ki $(Y - \mu_x)$ vektörüyle tanımlanan çok değişkenli normal dağılım, sıfırdan farklı bir ortalamaaya sahiptir. Bununla beraber $(Y - \mu_x)$ normal vektörünün ortalaması μ_x ve μ_y ortalama vektörlerine göre belirlenebilir.

$$(Y - \mu_x) = (Y - \mu_x + \mu_y - \mu_y) = [(Y - \mu_y) + \delta] \quad (2.72)$$

olduğu farz edildiğinde $\delta = (\mu_y - \mu_x)$ ortalama kaymayı gösterir. Bu sonuçla T_y^2 'nin dağılımı,

$$T_y^2 = [(Y - \mu_y) + \delta]' \Sigma^{-1} [(Y - \mu_y) + \delta] \sim \chi_{(p,\lambda)}'^2 \quad (2.73)$$

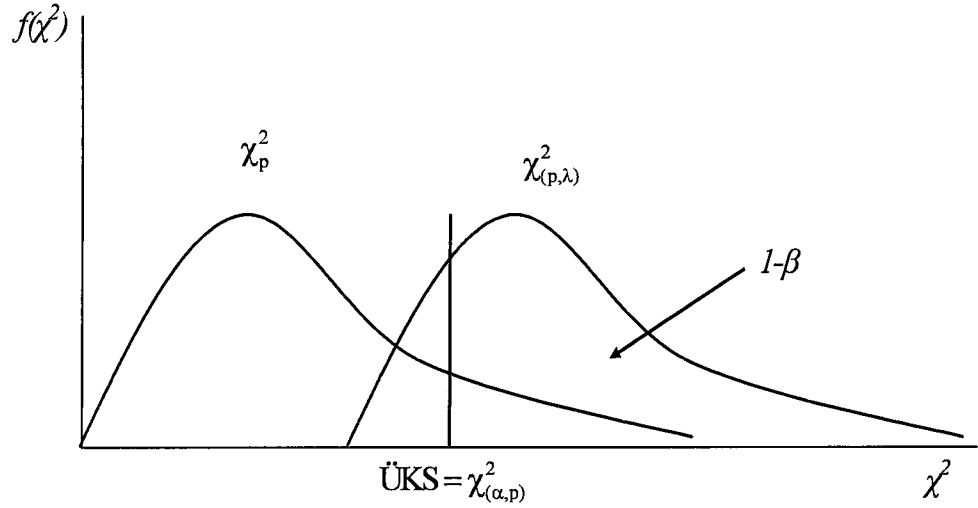
olarak yazılır. Formölde $\chi_{(p,\lambda)}'^2$ değeri p serbestlik dereceli merkezi olmayan ki-kare dağılımını ifade eder. Bu dağılım ile merkezi ki-kare dağılımı arasındaki en önemli fark, merkezi olmayan parametre λ 'dir. Söz konusu parametre,

$$\lambda = \delta' \Sigma^{-1} \delta \quad (2.74)$$

şeklinde ifade edilir. Merkezi olmayan parametre değıştiğinde dağılımda da değışme olur. Örneğın merkezi ki-kare dağılımının ortalaması p serbestlik derecesiyle verilirken merkezi olmayan dağılım için $(p+\lambda)$ serbestlik derecesiyle verilir. Benzer şekilde varyans, merkezi ki-kare dağılımında $2p$ iken, merkezi olmayan dağılımda $(2p+4\lambda)$ 'dir. λ arttığında dağılımlar arasındaki farklar önemli iken, λ sıfıra yaklaştığında merkezi olmayan dağılım merkezi ki-kare dağılımına yaklaşır.

Proses ortalamasında ortaya çıkabilecek bir kaymanın tespit edilme olasılığı, merkezi olmayan ki-kare dağılımından elde edilen olasılıklarla hesaplanabilir. Şekil 2-18'de gösterilen kaymanın farklı bir gösterim şekli, normal dağılıma dayalı olmasından ziyade merkezi ve merkezi olmayan ki-kare dağılımlarına dayalı olarak Şekil 2-21'deki gibi verilebilir. Merkezi ki-kare dağılımı prosesin kontrol altında olduğu durumu gösterirken, merkezi olmayan ki-kare dağılımı ise dağılımın sağa doğru kaydığını yani kontrol dışına çıktığını göstermektedir. Şekil 2-21'deki merkezi olmayan ki-kare

dağılımının altındaki ve $(1-\beta)$ ile gösterilen alan Şekil 2-18'deki alan ile aynıdır.



Şekil 2-21: Ki-kare dağılımından kayma

Kaynak: R. L. Mason - J. C. Young; Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM Series, 2002, s.114.

Tek değişkenli kontrol metotları için proses ortalamasındaki kayma genelde standart sapma ile ifade edilir. Birden fazla değişken içermesi nedeniyle çok değişkenli proseslerde proses ortalamasında meydana gelebilecek bir kaymanın standart sapma ile ifade edilmesi mümkün değildir. Çok değişkenli proseslerde ortaya çıkabilecek kaymalar merkezi olmayan parametre değerleriyle ifade edilir. Merkezi olmayan parametre ise hem iki dağılım arasındaki ortalama uzaklık hem de Σ kovaryans matrisinin bir fonksiyonudur.⁶⁹

Kalite kontrol grafikleri için ortalama işletim uzunluğunun (ARL) belirlenmesinde üç farklı yaklaşım bulunmaktadır. Bu yaklaşımlar;

- * Simülasyon yaklaşımı,
- * İntegral denklemi yaklaşımı,
- * Markov Zinciri yaklaşımı.

Söz konusu yaklaşımlar kalite kontrolünde yaygın olarak kullanılmaktadır.⁷⁰ Bu bölümde bu yaklaşımlar izah edilmeyecek fakat tezin ileriki bölümlerinde bu yaklaşımlar yardımıyla yapılan çalışmalardan bahsedilecektir.

⁶⁹ Mason – Young; Age., s.111-114.

⁷⁰ W. E. Molnau - G. C. Runger - D. C. Montgomery - K. R. Skinner - E. N. Lored - S. S. Prabhu; "A Program for ARL Calculation for Multivariate EWMA Charts", Journal of Quality Technology, Vol:33, No:4, 2001.

2.2.9. Hotelling T^2 kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyalinin tespiti ve yorumlanması

Çok değişkenli kalite kontrol grafiklerinin kullanımında karşılaşılan önemli bir problem proseste meydana gelebilecek kontrol dışı sinyalinin pratik olarak yorumlanamamasıdır. Bu durum ile özellikle tek değişkenden ziyade p adet kalite değişkeninin incelendiği çok değişkenli proseslerde karşılaşılr. Böyle çok değişkenli proseslerde Özellikle p adet kalite değişkeninden hangi değişken yada değişkenlerin kontrol dışı sinyali verdiğini tespit etmek oldukça güçtür.

Tek değişkenli istatistiksel proses kontrolünde kontrol grafikleri kullanılarak proseste meydana gelebilecek bir kontrol dışı sinyali kolaylıkla bulunabilir. Bu tür proseslerde tek değişken incelendiğinden söz konusu değişken ile diğer değişkenler arasındaki ilişki göz ardı edilir ve bu durumda kontrol dışı sinyalinin yorumu kolaylıkla yapılır. Oysa çok değişkenli istatistiksel proses kontrolünde kontrol dışı sinyali çeşitli nedenlerden kaynaklanabilir. Örneğin p kalite değişkeninden bir değişkene ait bir gözlem değeri kontrol dışına çıkabilir. Benzer şekilde böyle bir kontrol dışı sinyali, iki veya daha fazla kalite değişkeni arasındaki ilişki nedeniyle ortaya çıkabilir. Daha da kötüsü her iki durumun birlikte meydana gelmesi ile bir kontrol dışı sinyalinin ortaya çıkmasıdır.⁷¹

Çok değişkenli proseslerde, kontrol dışı sinyali veren değişkeni tespit etmek için seçilen pratik bir yol, her bir değişken için tek değişkenli kontrol grafiği düzenlemektir. Tek değişkenli kontrol grafiği düzenlemek pratik bir yol gibi görünse de başarılı sonuçlar vermeyebilir. Çok değişkenli kalite kontrol grafiği düzenlemek yerine her bir değişken için ayrı ayrı tek değişkenli kontrol grafiği düzenlemek proseste bilgi kaybına neden olur. Tek değişkenli kontrol grafiği ile prosesi gözlemlediğimizde proses kontrol dışı olduğu halde söz konusu proses kontrol altındaymış gibi görünebilir.⁷²

Çok değişkenli proseslerde kontrol dışı sinyali yorumlanmasında karşılaşılan problemin iyi bir çözüm yolu aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır;⁷³

* Proses kontrol altında olduğunda α olasılığı ile prosesin kontrol dışı sinyali vermesi durumunda belirlenen α olasılığındaki tüm hata oranlarını kontrol etmelidir.

⁷¹ Robert L. Mason – Nola D. Tracy – John C. Young; “A Practical Approach for Interpreting Multivariate T^2 Control Chart Signals”, Journal of Quality Technology, Vol:29, No:4, 1997, s.396.

⁷² Montgomery; Age., s.520.

⁷³ Anthony J. Hayter – Kwok L. Tsui; “Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems”, Journal of Quality Technology, Vol:26, No:3, 1994, s.198.

* Prosesin kontrol dışında olduğu tespit edildiğinde hangi kalite değişken yada değişkenlerinin bu kontrol dışı duruma neden olduğunu belirlemek için basit ve kolay uygulanabilir bir mekanizma sağlamalıdır.

* Prosesin kontrol dışına çıkmasına neden olan değişkenlerin proses ortalamasını ne kadar değiştirdiğini ölçüyor olması arzu edilir.

Çok değişkenli proseslerde, kontrol dışı sinyalinin yorumlanması ile ilgili problemi çözmek amacıyla bazı çalışmalar yapılmış ve bununla ilgili çeşitli metotlar ileri sürülmüştür. Bu bölümde bu metotlardan sadece Mason ve arkadaşlarının geliştirmiş oldukları T^2 istatistiğini ayrıştırma metodu anlatılacaktır.

Çok değişkenli kalite kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyalinin yorumlamanın zorluğu Alt (1984), Blazek ve ark. (1987), Chua ve Montgomery (1992), Doğanaksoy ve ark. (1991), Jackson (1985), Murphy (1987), Pignatiello ve Runger (1990), Lowry ve ark. (1992) tarafından geniş bir şekilde tartışılmıştır. Mason ve ark. (1994) T^2 istatistiğini bağımsız parçalara ayrıştırmak suretiyle proseste ortaya çıkabilecek bir kontrol dışı sinyalinin kolaylıkla yorumlanabileceğini göstermişlerdir. Söz konusu parçalar, her bir bireysel değişkenin T^2 istatistiğine olan katkısını göstermektedir.⁷⁴

2.2.9.1. Mason-Young-Tracy'nin T^2 istatistiğini ayrıştırma metodu

Yukarıda Mason, Young ve Tracy (MYT)'nin proseste ortaya çıkabilecek bir kontrol dışı sinyalinin yorumlanması amacıyla bir metot geliştirdikleri ifade edilmişti. Bu bölümde bu araştırmacıların kontrol dışı sinyale hangi değişkenin neden olduğunu ortaya koymak amacıyla geliştirdikleri T^2 istatistiğini bağımsız parçalara ayrıştırma metodu izah edilecektir.

Kontrol dışı sinyalinin yorumlanması için önerilen bu yaklaşımda, T^2 istatistiği bağımsız bileşenlere ayrıştırılmaktadır. Söz konusu bileşenlerin her biri bireysel değişkenin T^2 istatistiğine olan katkısını göstermektedir. p boyutlu $X'=(X_1, X_2, \dots, X_p)$ gözlem vektörü için T^2 istatistiği,

$$T^2 = (X_i - \bar{X})' S^{-1} (X_i - \bar{X}) \quad (2.75)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ilk $(p-1)$ değişkenler birlikte gruplanıp p 'inci değişken ayrı tutularak, $X_i = (X_i^{(p-1)'}, X_{ip})'$ yazılabilir. Formülde $X_i^{(p-1)'}$, p 'inci değişken hariç $(p-1)$

⁷⁴ Lowry – Montgomery; Agm., s.806-807.

boyutlu veri vektörünü ifade etmektedir. Böylece T^2 istatistiği,

$$T^2 = T_{p-1}^2 + T_{p,1,2,\dots,p-1}^2 \quad (2.76)$$

şeklinde iki bağımsız parçaya ayrılabilir. Formülde T_{p-1}^2 terimi, ilk $(p-1)$ değişken kullanılarak elde edilen T^2 istatistiklerini ifade etmektedir. T_{p-1}^2 teriminin açık formülü,

$$T_{p-1}^2 = \left(X_i^{(p-1)} - \bar{X}^{(p-1)} \right)' S_{xx}^{-1} \left(X_i^{(p-1)} - \bar{X}^{(p-1)} \right) \quad (2.77)$$

şeklinde. Formülde $\bar{X}^{(p-1)}$, ilk $(p-1)$ değişkene ait n adet çok değişkenli gözlem değerlerine ait örnek ortalama vektörünü ve S_{xx} ise S örnek-kovaryans matrisinin $(p-1) \times (p-1)$ temel alt matrisini ifade etmektedir.

Formül 2-76'daki $T_{p,1,2,\dots,p-1}$ istatistiği ise $X_1, X_2, \dots, X_{p-1}$ olmak üzere X_p 'nin koşullu dağılımın ortalama ve standart sapmasının tahmin değerleriyle düzeltilmiş olan X_i vektörünün p 'inci bileşenidir. Bu istatistiğin formülü ise

$$T_{p,1,2,\dots,p-1} = \frac{X_{ip} - \bar{X}_{p,1,2,\dots,p-1}}{S_{p,1,2,\dots,p-1}} \quad (2.78)$$

şeklinde yazılabilir. Formülde bulunan $\bar{X}_{p,1,2,\dots,p-1}$ değeri ise

$$\bar{X}_{p,1,2,\dots,p-1} = \bar{X}_p + b_p' \left(X_i^{(p-1)} - \bar{X}^{(p-1)} \right) \quad (2.79)$$

formülü ile hesaplanır Burada $\bar{X}_p$, p 'inci değişkendeki n gözlem değerinden hesaplanan örnek ortalamasını, b_p ise ilk $(p-1)$ değişkenden geriye doğru gidildiğinde p 'inci değişkenin regresyon katsayılarının $(p-1)$ boyutlu tahmin vektörünü gösterir. Ayrıca b_p ,

$$b_p = S_{xx}^{-1} s_{xp} \quad (2.80)$$

formül yardımıyla hesaplanabilir. Formül 2-78'deki $s_{p,1,2,\dots,p-1}$ ise

$$s_{p,1,2,\dots,p-1}^2 = s_x^2 - s_{xx}' S_{xx}^{-1} s_{xx} \quad (2.81)$$

hesaplanabilir. Formülde yer alan S örnek-kovaryans matrisi ise

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & s_{xp} \\ s_{xp}' & s_x^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde. Formül 2-76'daki ilk terim olan ve $(p-1)$ değişken üzerinden hesaplanan T^2 istatistiği de,

$$T_{p-1}^2 = T_{p-2}^2 + T_{p-1,1,2,\dots,p-2}^2 \quad (2.82)$$

şeklinde iki ayrı parçaya ayrılabilir. Formülde ilk terim olan T_{p-2}^2 ifadesi, ilk $(p-2)$

değişken üzerinden hesaplanan T^2 istatistiğini ve ikinci terim olan $T_{p-1,1,2,\dots,p-2}^2$ ise $X_1, X_2, \dots, X_{p-2}$ olmak üzere X_{p-1} 'nin koşullu dağılımının ortalama ve standart sapmasının tahmin değerleriyle düzeltilmiş olan $(p-1)$ 'inci değişkenin karesini göstermektedir. Yukarıda izah edilen ayrıştırma işlemine devam edildiğinde p değişken için T^2 istatistiği,

$$T^2 = T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2 + T_{4,1,2,3}^2 + \dots + T_{p,1,\dots,p-1}^2 \text{ veya } T^2 = T_1^2 + \sum_{j=1}^{p-1} T_{j+1,1,2,\dots,j}^2 \quad (2.83)$$

olarak yazılabilir. Formülde T_1^2 , ilk değişkene ait T^2 istatistiğini ifade etmektedir. Söz konusu değer başlangıç değişkeni için tek değişkenli t istatistiğinin karesi olup,

$$T_1^2 = \frac{(X_{i1} - \bar{X}_1)^2}{s_1^2} \quad (2.84)$$

şeklinde hesaplanır.⁷⁵

2.2.9.1.1. Ayrıştırma metodundaki T^2 teriminin hesaplanması

Bir önceki konuda izah edilen ayrıştırma metodundaki T^2 terimini hesaplamanın birkaç farklı yolu vardır. Burada bu hesaplama metotlarından en kısa olanı izah edilecektir. Formül 2-76 göz önünde bulundurulduğunda, Formül 2-83'deki ilk $(p-1)$ terimin $X'_{(p-1)} = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ alt vektörünün T^2 değerine karşılık geldiği bilinmektedir. Bu durum,

$$T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})}^2 = T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2 + \dots + T_{p-1,1,2,\dots,p-2}^2 \quad (2.85)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde ilk $(p-2)$ terim ise $X'_{(p-2)} = (x_1, x_2, \dots, x_{p-2})$ alt vektörüne karşılık gelmektedir ve

$$T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-2})}^2 = T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2 + \dots + T_{p-2,1,2,\dots,p-3}^2 \quad (2.86)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu şekilde hesaplamalar devam ettirildiğinde, X orijinal vektörünün tüm alt vektörleri için T^2 değerleri hesaplanabilir. $X_{(1)} = (x_1)$ ilk bileşeninden meydana gelen en son alt vektör, Formül 2-84'te verilen T^2 teriminin hesaplanmasında kullanılır. Yani $T_{(x_1)}^2 = T_1^2$ yazılabilir.

Sırasıyla $T_{(x_1, x_2, \dots, x_p)}^2, T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})}^2, \dots, T_{(x_1)}^2$ olan tüm T^2 değerleri,

$$T_{(x_1, x_2, \dots, x_j)}^2 = (X^{(j)} - \bar{X}^{(j)})' S_{jj}^{-1} (X^{(j)} - \bar{X}^{(j)}) \quad (2.87)$$

⁷⁵ Mason – Tracy – Young; Agm., 1995, s.100-101.

genel formülü kullanılarak hesaplanır. Formülde, $X^{(j)}$ uygun alt vektörü; $\bar{X}^{(j)}$ $X^{(j)}$ değerine karşılık gelen alt vektör ortalamasını ve S_{jj} ise genel S örnek-kovaryans matrisinden elde edilen kovaryans alt matrisini göstermektedir. Böylece söz konusu ayrıştırma metodunun tüm terimleri;

$$\begin{aligned} T_{p-1,2,\dots,p-1}^2 &= T_{(x_1,x_2,\dots,x_p)}^2 - T_{(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})}^2, \\ T_{p-1,1,2,\dots,p-2}^2 &= T_{(x_1,x_2,\dots,x_{p-1})}^2 - T_{(x_1,x_2,\dots,x_{p-2})}^2, \\ &\dots \dots \\ T_{2,1}^2 &= T_{(x_1,x_2)}^2 - T_1^2, \\ T_1^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{s_1^2} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir.⁷⁶

İzah edilen ayrıştırma metodundaki T^2 teriminin bazı özellikleri vardır. T^2 teriminin tek bir ayrıştırma sıralaması yoktur. T^2 teriminin $p!$ kadar farklı ayrıştırma sıralaması vardır. Fakat elde edilen bu $p!$ kadar farklı ayrıştırma sıralamalarının tamamı aynı T^2 değerini vermektedir. Örneğin p değişkenden herhangi biri seçilerek ayrıştırma işlemine başlanabilir. Daha sonra ilk seçilen kalite değişkeni dışında geriye kalan $p-1$ değişkenden herhangi biri seçilebilir. Bir sonraki aşamada ise ilk seçilen iki kalite değişkeni dışında kalan $p-2$ değişkenden herhangi biri seçilir. Bu işlem devam ettirilerek, genel T^2 istatistiğini parçalara ayıran terimlerin farklı sıralamaları elde edilir. Bu duruma örnek olması açısından $p=3$ değişken için söz konusu işlemler yapılacaktır. Üç değişken seçildiğinden $3!=6$ olduğundan, bireysel gözlemler için T^2 istatistiğinin altı farklı ayrıştırma şekli olacaktır. Bunlar

$$\begin{aligned} T^2 &= T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2 \\ T^2 &= T_1^2 + T_{3,1}^2 + T_{2,1,3}^2 \\ T^2 &= T_2^2 + T_{3,2}^2 + T_{1,2,3}^2 \\ T^2 &= T_2^2 + T_{1,2}^2 + T_{3,1,2}^2 \\ T^2 &= T_3^2 + T_{1,3}^2 + T_{2,1,3}^2 \\ T^2 &= T_3^2 + T_{2,3}^2 + T_{1,2,3}^2 \end{aligned}$$

⁷⁶ Mason – Young; Age., s.149-150.

şeklinde yazılabilir.⁷⁷

Bu bölümde T^2 istatistiğinin nasıl ayrıştırılacağı bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 2-7) Bir kimya endüstrisinde $n=16$ örnekten elde edilen üç değişkene ait örnek ortalama vektörü ve kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 5.700 \\ 17.889 \\ 16.660 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0.070 & -0.086 & 0.352 \\ -0.086 & 1.108 & -2.600 \\ 0.352 & -2.600 & 10.115 \end{bmatrix}$$

Bu prosesteki üç değişkene ait yeni gözlem değerleri,

$$X = (5.687, 18.508, 17.410)'$$

şeklinde elde edilmiş olsun T^2 formülü kullanıldığında bu yeni gözlemlere ait T^2 değeri 1.595 olarak elde edilir. Formül 2-83 uygulanarak bu T^2 istatistiği,

$$T^2 = T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2$$

şeklinde üç parçaya ayrıştırmak mümkündür. Formül 2-84'te verilen eşitlik kullanıldığında T_1^2 ,

$$T_1^2 = \frac{(X_{i1} - \bar{X}_1)^2}{s_1^2} = \frac{(5.687 - 5.700)^2}{0.070} = 0.002$$

gibi elde edilir. Benzer şekilde Formül 2-78 kullanılarak $T_{2,1}^2$ ve $T_{3,1,2}^2$ elde edilebilir.

$T_{2,1}^2$ değerini hesaplamak için $\bar{X}_{2,1}^{(p-1)}$ ve $s_{2,1}^2$ değerlerine ihtiyaç duyulur. Bu değerler,

$$\bar{X}_{2,1}^{(p-1)} = 17.889 - 1.224(5.687 - 5.700) = 17.905$$

$$s_{2,1}^2 = 1.108 - (-0.086)(0.070)^{-1}(-0.086) = 1.002$$

olarak hesaplanır. Böylece $T_{2,1}^2$ değeri,

$$T_{2,1}^2 = \frac{(18.508 - 17.905)^2}{1.002} = 0.363$$

olarak bulunur. Aynı biçimde $\bar{X}_{3,1,2}$ ve $s_{3,1,2}^2$ değerleri de,

$$\bar{X}_{3,1,2} = 16.66 + \begin{bmatrix} 2.369 \\ -2.163 \end{bmatrix}' \left(\begin{bmatrix} 5.687 \\ 18.508 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.700 \\ 17.889 \end{bmatrix} \right) = 15.290$$

$$s_{3,1,2}^2 = 10.115 - \begin{bmatrix} 0.352 \\ -2.600 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0.070 & -0.086 \\ -0.086 & 1.108 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.352 \\ -2.600 \end{bmatrix} = 3.658$$

⁷⁷ Mason – Tracy – Young; Agm., 1995, s.101-102.

olarak hesaplanır. Son olarak $T_{3,1,2}^2$ değeri,

$$T_{3,1,2}^2 = \frac{(17.410 - 15.290)^2}{3.658} = 1.230$$

olarak bulunur. Hesaplanan T^2 değerlerinin doğruluğunu teyit etmek için

$$T^2 = T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2$$

$$T^2 = 1.595 = 0.002 + 0.363 + 1.230$$

eşitliği yazılır. Böylece T^2 istatistiği üç parçaya ayrıştırılmış olunur.⁷⁸

2.2.9.2. Kontrol dışı sinyalinin yorumlanması

T^2 istatistiği ayrıştırma metodu ile ayrıştırıldıktan sonra, hangi değişken yada değişkenlerin kontrol dışı sinyaline neden olduğu tespit edilmeye çalışılır. Bu bölümde proseste tespit edilen bir kontrol dışı sinyalinin nasıl yorumlanacağı izah edilecektir. Formül 2-83'teki T^2 formülünde p adet terimin her birinin karesi alındığında bu terimlerin tamamı pozitif olacaktır. Böylece terimlerin her biri genel T^2 değerini arttıracaktır. Dolayısıyla genel T^2 değeri çok değişkenli kalite kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyali verdiğinde, T^2 değerindeki en büyük artışın hangi terim yada terimlerden kaynaklandığını belirlemek mümkün olacaktır. T^2 değerindeki en büyük artışa sebep olan terim yada terimler tespit edildikten sonra kontrol dışı duruma neden olan değişken yada değişkenler belirlenebilecektir.

Formül 2-83'te verilen T^2 istatistiğini ayrıştırmanın temel nedeni kontrol dışı sinyaline hangi değişken veya değişkenlerin sebep olduğu hakkında bilgi edinmektir. Ayrıştırma yaparken çeşitli terimlerinden elde edilen bilginin nasıl kullanılacağı problemi ortaya çıkar. $p!$ kadar farklı ayrıştırma sıralamasındaki terimlerin tamamı birbirlerinden bağımsız olmaz. Ancak belirli bir ayrıştırma sıralamasındaki p adet terimin birbirinden bağımsız olduğunu bilmek faydalı olacaktır. Ayrıca sabit bir değerle çarpıldığında terimlerin her biri 1 ve $n-1$ serbestlik dereceli F dağılımı gösterir. Bu sabit değer $[(n+1)/n]^{1/2}$ dir. Bu durumda dağılım,

$$T_{j+1,1,\dots,j}^2 \sim \frac{n+1}{n} F_{(1,n-1)} \quad (2.88)$$

şeklinde yazılabilir.

⁷⁸ Mason – Tracy – Young; Agm., 1995, s.101.

Böylece Formül 2-83'teki her bir terimin anlamlı olup olmadığını belirlemek için F tablo değerinin söz konusu sabitle çarpımıyla elde edilen değer ile karşılaştırılabilir. Bu metot, hangi terimin kontrol dışı sinyaline sebep olduğuna karar vermek için bir mekanizma sağlar.

Verilen bir gözlem değeri için Formül 2-75'te verilen genel T^2 istatistiğinin anlamlı olup olmadığını tespit etmek istediğimizi farz edelim. Yukarıda izah edilen mekanizma proste bir problemin olup olmadığını gösterirken, bu kontrol dışı olma probleminin neden olan değişkenler hakkında bilgi vermez. Bu durumda Formül 2-83'te verilen ayrıştırma yaklaşımından faydalanılır. Şayet p şartına bağlı olarak T^2 terimleri hesaplanırsa,

$$T_{1,2,\dots,p}^2, T_{2,1,3,\dots,p}^2, T_{p,1,\dots,p-1}^2$$

terim seti elde edilir. Bu terimlerin her birinin anlamlı olup olmadığını tespit etmek amacıyla terimler Formül 2-88'de verilen F dağılımı ile karşılaştırılır. Benzer şekilde tek değişkenli t testinin karesi alınmış haline dayalı T^2 terimleri hesaplanabilir. Bu terimler,

$$T_1^2, T_1^2, \dots, T_p^2$$

şeklindedir. Bu terimlerin her birinin anlamlı olup olmadığını tespit etmek için de Formül 2-88'de verilen F dağılımı kullanılır.⁷⁹

Bu bölümde kontrol dışı sinyalinin yorumlanması ile ilgili bir örnek verilecektir.

Örnek 2-8) Mason, Young ve Tracy (MYT)'nin proste ortaya çıkabilecek bir kontrol dışı sinyalinin yorumlanması amacıyla geliştirmiş oldukları metodun izah edilmesi amacıyla petrokimya endüstrisinden elde edilen veriler kullanılacaktır. Söz konusu veriler Tablo 2-11'de verilmiştir.

Bu verilere ait korelasyon matrisi, varyans-kovaryans matrisi ve ortalamalar vektörü sırasıyla,

$$r = \begin{bmatrix} 0.579 & 1 \\ 1 & 0.579 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.316 & 0.101 \\ 0.101 & 0.0966 \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 7.1684 \\ 7.0858 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

⁷⁹ Mason – Tracy – Young; Agm., 1995, s.102.

Tablo 2-11:Petrokimya endüstrisine ilişkin veriler ve T^2 değerleri

No	X_1	X_2	T^2	No	X_1	X_2	T^2
1	7.15	7.10	0.007	11	7.25	7.30	0.571
2	6.35	7.00	2.599	12	7.60	7.30	0.679
3	6.30	6.95	2.698	13	7.65	7.10	1.037
4	7.00	7.35	1.662	14	7.40	7.10	0.225
5	7.00	6.90	0.360	15	7.50	7.40	1.022
6	6.95	7.05	0.168	16	7.60	6.70	4.854
7	7.05	7.15	0.206	17	8.20	7.00	6.052
8	6.95	7.00	0.154	18	8.10	7.90	6.893
9	7.05	7.00	0.080	19	6.00	6.33	6.593
10	7.10	7.00	0.078				

Kaynak: M. Akif Bakır – Sezer Karaca; “Çok Değişkenli Kalite Kontrol Yaklaşımlarının Bir Değerlendirmesi”, İstatistik Araştırma Dergisi, Cilt:1, No:1, 2002, s.80-81.

Tablodaki veriler kullanılarak hesaplanan T^2 değerleri de Tablo 2-11’de gösterilmiştir. T^2 istatistiği,

$$\frac{p(n+1)(n-1)}{n(n-p)} \times F_{p,n-p,\alpha}$$

dağılımına sahip olduğundan üst kontrol sınırı $\alpha=0.10$ için,

$$\bar{ÜKS} = \frac{2(19+1)(19-1)}{19(19-2)} \times 2.64 = 5.88$$

olur. Bu durumda 17, 18 ve 19 numaralı gözlemlere karşılık gelen T^2 değerleri $\bar{ÜKS}=5.88$ ’den büyük olduğundan proses bu noktalarda kontrol dışına çıkmıştır. Burada asıl sorun bu kontrol dışı duruma hangi değişkenin sebep olduğudur. Mason, Young ve Tracy (MYT)’nin T^2 istatistiği ayrıştırma metodu kullanılarak kontrol dışı sinyalinin nedeni tespit edilebilir. Burada ayrıştırma işlemi sadece 17 numaralı gözlem için yapılacaktır.

17’inci gözlem seti $X=(8.20, 7.00)$ ve $T^2=6.052$ değerine sahiptir. $p=2$ olduğundan T^2 istatistiğinin $2!=4$ mümkün farklı ayrıştırma şekli olacaktır. Bunlardan biri,

$$T_{(x_1, x_2)}^2 = T_1^2 + T_{2.1}^2$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada birinci bileşen,

$$T_1^2 = \frac{(X_1 - \bar{X}_1)^2}{s_1^2} = \frac{(8.2 - 7.1684)^2}{0.316} = 3.367$$

olarak hesaplanır. $T_{2,1}^2$ 'nin hesaplanabilmesi için öncelikle $\bar{X}_{2,1}^{(p-1)}$ ve $s_{2,1}^2$ değerleri hesaplanmalıdır.

$$\bar{X}_{2,1}^{(p-1)} = \bar{X}_2 + b'_2(X_i^{(p-1)} - \bar{X}^{(p-1)}), \quad b_2 = S_{XX}^{-1}S_{XX}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{XX} & s_{XX} \\ s'_{XX} & s_x^2 \end{bmatrix}$$

Buradan,

$$b'_2 = (0.316)^{-1}(0.101) = 0.319 \text{ ve}$$

$$\bar{X}_{2,1}^1 = 7.0858 + 0.319(8.20 - 7.1684) = 7.414$$

olarak bulunur. Aşağıdaki formül yardımıyla $s_{2,1}^2$ değeri,

$$s_{p,1,2,\dots,p-1}^2 = s_x^2 - s'_{XX}S_{XX}^{-1}S_{XX}$$

$$s_{2,1}^2 = 0.0966 - [(0.101) \times (0.316)^{-1}(0.101)] = 0.0643$$

olarak hesaplanır. Böylece $T_{2,1}^2$ değeri,

$$T_{2,1}^2 = \frac{(X_{i2} - \bar{X}_{2,1})^2}{s_{2,1}^2} = \frac{(7 - 7.414)^2}{0.0643} = 2.666$$

olarak hesaplanır. İki değişkene ait T^2 değerleri hesaplandıktan sonra $T_{(x_1, x_2)}^2$ değeri daha önce 6.033 olarak hesaplanmıştı. Söz konusu değer, ayrıştırma ile hesaplanan terimlerin değerlerinin toplamına eşit olduğu,

$$T_{(x_1, x_2)}^2 = T_1^2 + T_{2,1}^2 = 3.367 + 2.666 = 6.033$$

eşitliğinde açıkça görülmektedir. Ayrıştırma işlemi sonucunda $T_{(x_1, x_2)}^2$ değerine en fazla katkıyı T_1^2 teriminin yaptığı anlaşılır. Bütün terimlerin katkılarının istatistiki bakımdan anlamlı olup olmadığını belirlemek amacıyla Formül 2-88'deki eşitlik kullanılarak,

$$\frac{n+1}{n} [F_{(\alpha, 1, n-1)}] = \frac{19+1}{19} [F_{0.05, 1, 18}] = 3.166$$

değeri bulunur. Ayrıştırma sonucunda elde edilen terimler hesaplanan bu değer ile karşılaştırılır. $T_1^2 = 3.367 > 3.166$ olduğundan söz konusu terim genel $T_{(x_1, x_2)}^2$ değerine anlamlı katkıda bulunmaktadır. Dolayısıyla $T_{(x_1, x_2)}^2$ değerinin oluşmasında en büyük katkı, X_1 kalite değişkeninden ileri gelmektedir. Sonuç olarak 17 numaralı gözlemden elde edilen kontrol dışı sinyali X_1 kalite değişkeninden kaynaklanmaktadır.⁸⁰

⁸⁰ M. Akif Bakır – Sezer Karaca; “Çok Değişkenli Kalite Kontrol Yaklaşımlarının Bir Değerlendirmesi”, İstatistik Araştırma Dergisi, Cilt:1, No:1, 2002, s.80-82.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3.ÇOK DEĞİŞKENLİ KÜMÜLATİF TOPLAM (MCUSUM) KONTROL METOTLARI

Çok değişkenli kümülatif toplam kontrol metotları izah edilmeden önce konunun daha iyi anlaşılması amacıyla, tek değişkenli kümülatif toplam kontrol grafikleri izah edilecektir. Daha sonra çok değişkenli kümülatif toplam kontrol metotları anlatılacaktır.

3.1. Tek Değişkenli Kümülatif Toplam (CUSUM) Kontrol Grafikleri

Kümülatif toplam [CUmulative SUM(CUSUM)] kontrol grafikleri ilk olarak 1954 yılında İngiliz istatistikçi E. S. Page (1954) tarafından ortaya konulmuştur. Page, bir üretimdeki kusurlu ve kusursuz ürünleri belirleyerek kusurlu ürünleri kontrol etmek amacıyla kümülatif toplamları kullanmıştır. G. A. Barnard (1959) bu konuda bir çok yeniliğin öncüsü olmuş ve CUSUM kontrol grafiklerindeki V maskesi prosedürü ile nicel değişkenlerin kontrol edilmesi fikrini ortaya atmıştır. W. D. Ewan ve K. W. Kemp (1960), Barnard ile aynı dönemde Page'nin metodunu geliştirme yolunda önemli çalışmalarda bulunmuşlardır. Bu iki bilim adamı kümülatif toplam tekniklerini grafiklerden ziyade sayısal temellere dayandırmışlardır. Daha sonraları yapılan çalışmalarda CUSUM tekniklerine dayalı kalite kontrol grafiklerinin karakteristikleri incelenmiştir.¹

Hedef değerden sapmaların mümkün olduğu kadar çabuk tespit edilmesi ve gerekli düzeltmelerin yapılması önemli olduğunda CUSUM prosedürleri proses ortalamasındaki küçük değişimleri hızlı bir şekilde tespit etmeye imkan verir.² Bunun yanı sıra CUSUM kontrol grafikleri, gözlemleri direkt olarak gösteren grafiklere alternatif olarak da düzenlenebilir.³

CUSUM kontrol grafiğinin birçok durumda kontrol için bir fikir verebilmesi bu grafiğin proses kontrolü için ideal bir araç olmasına neden olmuştur. CUSUM kontrol grafiğinin bu fonksiyonu, üretim oranının nispeten küçük veya muayene maliyetinin yüksek olduğu durumlarda gerçekleşir. Bu nedenle proses ortalamasındaki küçük

¹ R. H. Woodward – P. L. Goldsmith; Cumulative Sum Techniques: Monograf No:3, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, 1964, s.2.

² James M. Lucas; "Cumulative Sum (CUSUM) Control Schemes", Communications in Statistics: Theory and Method, Vol:14, No:11, 1985, s.2690.

³ Woodward – Goldsmith; Age., s.1.

değişmeleri tespit etmede CUSUM kontrol grafikleri, Shewhart kontrol grafiklerinden daha etkilidir.⁴

$n=1$ hacimli bireysel gözlemlerin alındığı ve her parçanın otomatik olarak ölçülüp bilgisayar yardımıyla değerlendirildiği kimya ve diğer proses endüstrilerinde CUSUM kontrol grafikleri daha tutarlı sonuçlar sağlamaktadır.⁵

3.1.1. Tek değişkenli CUSUM kontrol grafiklerinin kullanımı

Kümülatif toplam (CUSUM) teknikleri, 1954 yılından bu yana çeşitli araştırmalarda kullanılmıştır. Bu teknikler endüstriyel kalite kontrolünün ihtiyaçlarına bağlı olarak zaman içerisinde gelişmiştir. Düzenli aralıklarla ölçümlerin yapıldığı ve bu ölçümlerin önceden belirlenen değerlerle karşılaştırıldığı proseslerde bu metotlar kullanılabilir.⁶

CUSUM kontrol grafikleri, incelenen bir değişkenin ortalamasında ortaya çıkabilecek değişimleri kontrol etmek amacıyla kullanılmaktadır.⁷ Söz konusu grafikler normal dağılıma sahip bir değişkenin ortalamasında meydana gelebilecek kaymaları tespit etmede yaygın olarak kullanılır.⁸

Bu kontrol grafikleri, son yıllarda Shewhart kontrol grafikleri kadar yaygın bir kullanım alanı bulmuştur. CUSUM grafiklerinin kullanım amacı, bir prosesin kesintisiz kontrol edilmesiyle kontrol sınırlarında meydana gelebilecek kaymaları tespit etmekten çok, prosesin kontrol altında tutulmasını sağlamaktır.⁹

Kümülatif toplam tekniklerinin kullanılış amaçları şu şekilde sıralanabilir:¹⁰

- * Proses ortalamasında meydana gelen küçük kaymaları tespit ederek, prosesin düzeltilmesi konusunda bilgi sağlamak,
- * Proses ortalamasındaki kaymanın hangi örnekten itibaren başladığını tespit etmek,
- * Geçerli proses ortalamasını güvenilir bir şekilde tahmin etmek,

⁴ J. Murdoch; Control Charts, Macmillan Press Inc., 1979, s.5.

⁵ Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, Second Edition, John Wiley and Sons. Inc., 1991, s.280.

⁶ Woodward – Goldsmith; Age., s.1.

⁷ Ronald B. Croiser; “A New Two – Sided Cumulative Sum Quality Control Scheme”, Technometrics Vol:28, No:3, 1986, s.187.

⁸ Ronald B. Croiser; “Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality Control Schemes”, Technometrics Vol:30, No:3, 1988, s.291.

⁹ Woodward – Goldsmith; Age., s.1-2.

¹⁰ Woodward – Goldsmith; Age., s.2.

* Gelecekteki proses ortalaması hakkında kısa dönem için tahminler yapmak.

CUSUM kontrol grafiği, proses ortalamasındaki küçük değişiklikleri tespit etmek ve sapma zamanlarını diğer kontrol grafiklerinden daha büyük bir hassasiyetle belirlemek için kullanılmaktadır. Bu durum söz konusu grafiği proses kontrolü için son derece kullanışlı kılmaktadır.¹¹ Proseste büyük değişmelerin olduğu durumlarda ise CUSUM kontrol grafiklerinden ziyade standart kalite kontrol grafiklerinin kullanılması daha uygundur. Bu avantajlarına karşılık CUSUM kontrol grafiklerinin önemli bir eksigi; proses çıktı değerlerinin periyodik dalgalanmalar göstermesi durumunda proses hakkında isabetli karar vermede yetersiz kalmasıdır.¹²

3.1.2. Tek değişkenli CUSUM kontrol grafiğinin düzenlenmesi

Tek değişkenli CUSUM kontrol grafiğinin düzenlenebilmesi için öncelikle, prosesten elde edilen örnekler için ortalamaların hedef değerden sapmalarının kümülatif toplamaları bulunur. Örneğin üretim hattından $n \geq 1$ hacminde rasyonel alt grupların seçildiği farz edilsin. Burada $\bar{X}_i$, i 'inci gözlemin ortalamasını, μ_0 , hedef veya proses ortalamasını (kabul edilebilir kalite seviyesini) ifade etmek üzere, kümülatif toplam değeri,

$$S_m = \sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \mu_0) \quad (3.1)$$

şeklinde hesaplanır. Söz konusu kümülatif toplam değerleri açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$S_1 = (\bar{X}_1 - \mu_0)$$

$$S_2 = (\bar{X}_1 - \mu_0) + (\bar{X}_2 - \mu_0) = S_1 + (\bar{X}_2 - \mu_0)$$

... ..

... ..

... ..

$$S_m = S_{m-1} + (\bar{X}_m - \mu_0)$$

Burada S_m , m 'inci örnek numarasına karşılık gelen ve bu değeri de içine alan

¹¹ R. H. Lester – N. L. Enrick, Quality Control for Profit, Third Edition, Marcel Dekker Inc., New York, 1992, s.402.

¹² Mahmut Kartal; İstatistiksel Kalite Kontrolü, Şafak Yayınevi, 1999, s.95.

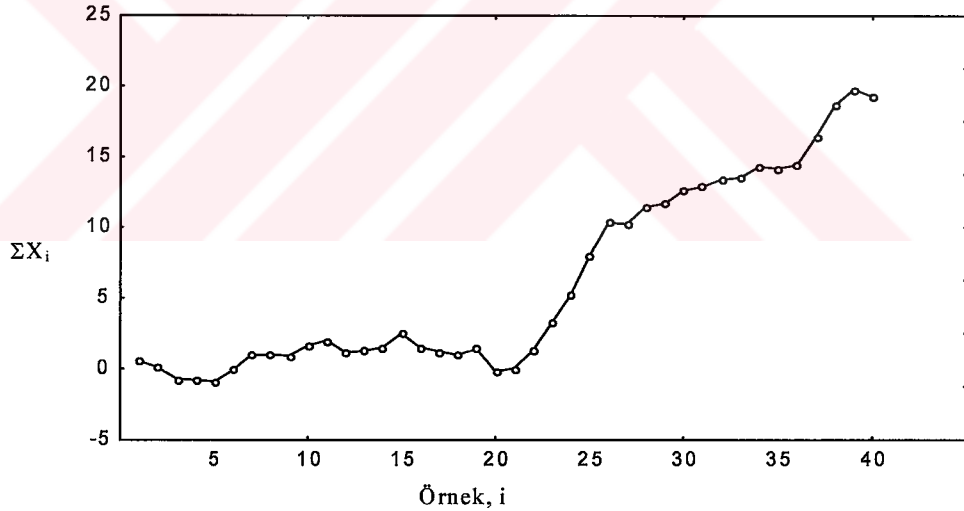
kümülatif toplam değerini ifade eder.¹³

Üretim hattından seçilen gözlem değerleri, rasyonel alt gruplar yerine $n=1$ şeklindeki bireysel gözlemler olduğunda; $\bar{X}_i$ alt grup ortalamaları yerine, X_i bireysel gözlem değerleri kullanılır. Bu durumda kümülatif toplam değeri,

$$S_m = \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_0) \quad (3.2)$$

şeklinde hesaplanır.¹⁴

Görüldüğü üzere CUSUM kontrol grafiği, sabit bir değerden serideki her bir değer çıkarılması ve elde edilen ilk farktan başlanarak daha sonraki farkların birbirlerine eklenmesiyle elde edilir. Birbirini izleyen farkların toplanması ile kümülatif toplam değerleri belirlenip, X-Y koordinat sisteminin yatay ekseninde örnek numaraları ve dikey ekseninde kümülatif toplam değerleri (S_m) gösterilerek CUSUM kontrol grafiği düzenlenir. Böyle bir CUSUM kontrol grafiği Şekil 3-1’de görülmektedir.¹⁵



Şekil 3-1: Örnek bir CUSUM kontrol grafiği

Kaynak: D. C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control 4th Edition, John Wiley and Sons. Inc., 2001, s.409.

Bir prosesten elde edilen $\bar{X}_i$ ortalama değerleri, μ_0 hedef değeri etrafında tesadüfî dağıldığında μ 'den büyük örnek değerlerinin sayısı μ 'den küçük örnek

¹³ William. S. Messina; Statistical Quality Control for Manufacturing Managers, John Wiley and Sons. Inc., 1987 s.162.

¹⁴ Woodward – Goldsmith; Age., s.11.

¹⁵ Woodward – Goldsmith; Age., s.4.

değerlerinin sayısına eşit olur ve CUSUM değerleri X eksenine yatay bir eğilim gösterir. Bu durum prosesin istatistiksel olarak kontrol altında olduğunu gösterir.¹⁶

Proses ortalaması giderek artıyorsa, $(\bar{X}_i - \mu_0)$ farkları pozitif olarak artacağından CUSUM değerleri pozitif eğilim gösterir. Aynı şekilde proses ortalaması azaldığında CUSUM değerleri negatif eğilim gösterir. CUSUM kontrol grafiğinde eğimin değişmesi orijinal verilerdeki değişimden kaynaklanmaktadır.¹⁷ Söz konusu grafikte, pozitif veya negatif eğimin ortaya çıkması, prosesin kontrolden çıkma eğilimi gösterdiğini veya proses ortalamasının değiştiğini gösterir.¹⁸

3.1.3. Tek yönlü CUSUM kontrol grafikleri

Şu ana kadar izah edilen CUSUM kontrol grafiğinde, belirlenen hedef değerden bir sapma olup olmadığına bakılarak proses ortalamasındaki kayma tespit edilmeye çalışılıyordu. Söz konusu metotta noktaların trend şeklinde seyir takip etmesi durumunda prosesin kontrol altında olmadığına karar veriliyordu. Bu tip analitik olmayan metotlar hatalı karar vermeye neden olabilir. Genel olarak CUSUM kontrol grafiğinde, μ_0 hedef değerden her iki yönde kayma olabilir. Ortalamadan her iki yöndeki kaymaların tespit edilmesini sağlayan grafik “iki yönlü CUSUM kontrol grafiği” olarak adlandırılır.¹⁹ CUSUM kontrol grafiği, iki yönlü durumlar için düzenlenmekle beraber, genellikle proses ortalamasında bir yönde ortaya çıkan kaymayı tespit etmek amacıyla tasarlanmaktadır. Proses ortalamasında bir yönde ortaya çıkan kaymayı tespit etmek amacıyla düzenlenen grafik ise “tek yönlü CUSUM kontrol grafiği” olarak adlandırılır.²⁰

Tek yönlü CUSUM kontrol grafiği,

$$S_i = \sum_{j=1}^i [\bar{X}_j - (\mu_0 + k)] \quad (3.3)$$

değerleri elde edilerek düzenlenir. Formülde k , referans değerini ifade etmektedir. Burada kabul edilebilir kalite seviyesi veya hedef değer μ_0 ve kabul edilemeyecek kalite seviyesi de μ_1 ile ifade edilirse; k referans değeri, μ_0 ile μ_1 arasında bir değer olarak

¹⁶ Jerry Banks; Principles of Quality Control, John Wiley and Sons. Inc., Canada, 1989, s.226.

¹⁷ Murdoch; Age., s.56.

¹⁸ Kartal; Age., s.96.

¹⁹ Montgomery; Age., 1991, s.290.

²⁰ Banks; Age., s.229.

alınır ya da,

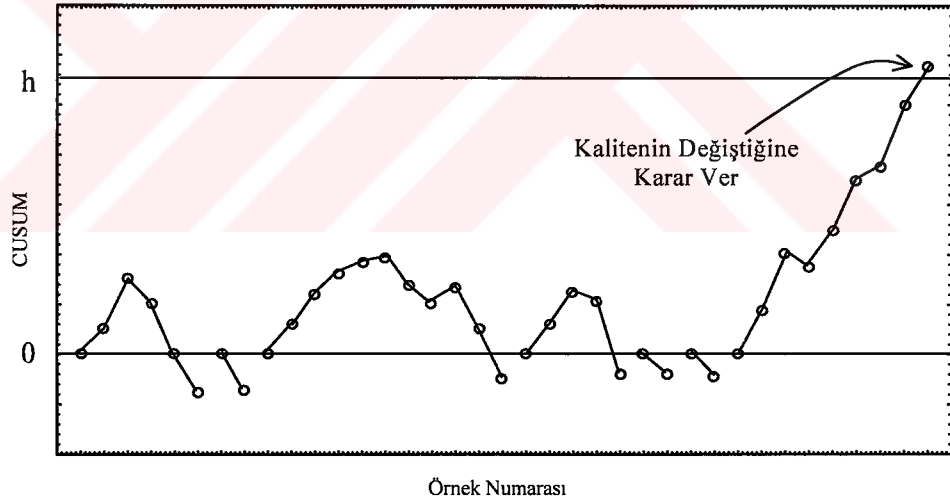
$$k = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} \quad (3.4)$$

formülü kullanılarak hesaplanır. Şayet S_i değeri sıfırın altına düşerse, bu değer otomatik olarak sıfırdan başlatılır. S_i değeri, H karar aralığını aştığında proses ortalamasının $\mu_1 > \mu_0$ olan bir değere doğru kaydığı kabul edilir. H karar aralığı ise

$$H = 2d\sigma_{\bar{x}} \tan \theta \quad (3.5)$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. Formülde d , tedarik uzunluğunu, θ ise V maskesinin yarı açısını göstermektedir.²¹

S_i değeri, H karar aralığını aştığında proses ortalamasının k referans değerinden yukarı doğru bir kayma eğiliminde olduğu anlaşılır. Şekil 3-2’de bu durum görülmektedir. Grafik incelendiğinde, proses ortalamasında yukarı yönde bir kaymanın olduğu görülür.



Şekil 3-2: $(\bar{X} - k)$ kümülatif toplamlarına ait CUSUM kontrol grafiği

Kaynak: Acheson J. Duncan; Quality Control and Industrial Statistics, Third Edition, Richard D. Irwin Inc., 1965, s.415.

Proses ortalamasındaki kayma pozitif yerine negatif yönde yani aşağıya doğru olduğunda tek yönlü CUSUM kontrol grafiği proses ortalamasındaki kaymayı tespit etmede kullanılabilir. Bu durumda k referans değeri, hedef değerden daha küçük

²¹ Montgomery; Age., 1991, s.291.

alınır ve test, S_i değerlerinin H değerinden daha küçük ve negatif bir değer alıp almadığına bakılarak uygulanır.²²

CUSUM kontrol grafiği, proses ortalamasında yukarı doğru olan kaymayı tespit etmek için kullanıldığında (proseste böyle bir değişme olduğu zaman), önceden işaretlenen en düşük seviyedeki nokta ile en son işaretlenen nokta karşılaştırılır. Eğer en son nokta ile ilk nokta arasındaki fark, belirlenmiş olan H karar aralığından büyük çıkarsa, proseste bir değişme olduğuna karar verilir. Tek yönlü CUSUM kontrol grafiğinde; kalite düzeyi yeterli olduğu zaman aşağıya doğru, kalite düzeyi yetersiz olduğunda ise yukarıya doğru bir yapı oluşur.

Bununla beraber CUSUM kontrol grafiğinin temel amacı proses ortalamasında yukarı doğru olan kaymayı tespit etmek ise, prosesten elde edilecek kayıtların saklanması gerekmez. Kalite düzeyi istenilen seviyede ise CUSUM grafiğinin trendi negatif yani aşağıya doğru olur. Bu durumda grafik üzerinde bir takım düzenlemelerin yapılması gereklidir. Tek yönlü CUSUM kontrol grafiğinin bir zorluğu proses ortalamasında ortaya çıkacak fazlaca önemli olmayan küçük kaymaları da tespit etmesidir.²³

3.1.4. İki yönlü CUSUM kontrol grafikleri

Daha önce ifade edildiği gibi, CUSUM kontrol grafiğinin trendindeki değişme, proses ortalamasında meydana gelen değişmeyi ifade eder. Oysa ki proseste bir değişme olduğunda ve düzenleme yapılması gerektiğinde değişimleri hızlı bir şekilde tespit etmek için analitik bir prosedürün kullanılması gerekir. İki yönlü CUSUM kontrol grafikleri, prosesin kontrol altında olup olmadığını görsel olarak tespit etmede kullanılan bir metottur.²⁴ Bu grafikler, CUSUM değerlerine V maskesi uygulanarak elde edilir. Bu prosedüre V maskesi prosedürü de denir.²⁵

Bir prosesten periyodik olarak n adet örneğin alındığı ve $\bar{X}$ proses ortalamasının hesaplandığı farz edilsin. Bu proses için hedef değer $\bar{X}''$ ile ifade edilip, $\Sigma(\bar{X} - \bar{X}'')$ kümülatif toplamlar grafik üzerinde işaretlendiğinde Şekil 3-3'tekine benzer bir V maskeli CUSUM kontrol grafiği elde edilebilir.

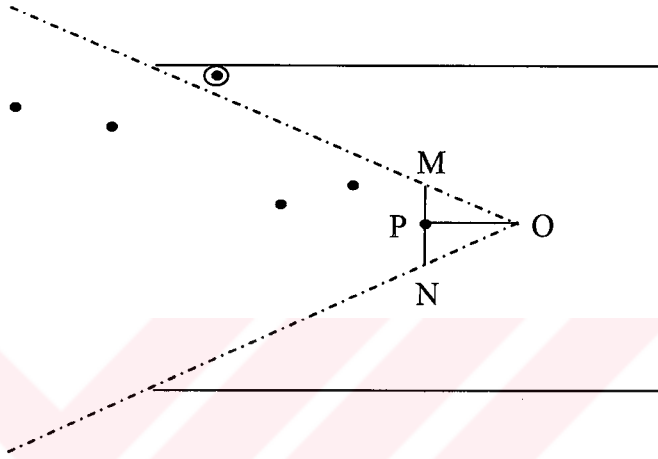
²² Acheson. J. Duncan; Quality Control and Industrial Statistics, Third Edition, Richard D. Irwin Inc., 1965, s.415.

²³ Duncan; Age., s.415.

²⁴ Duncan; Age., s.413.

²⁵ Crosier; Agm., 1986, s.187.

Proses ortalamasının, $\bar{X}$ hedef değerinden kayıp kaymadığını veya farklı olup olmadığını belirlemek için, CUSUM kontrol grafiği üzerinde işaretlenen her bir nokta test edilir. Grafik üzerinde en son işaretlenen CUSUM değeri P noktası olarak seçilir. Daha sonra maske üzerinde P ile O noktaları arasında PO yatay doğrusu çizilir. Yatay doğrunun O noktasına θ açısıyla değen iki doğru çizildiğinde bu doğrular sola devrilmiş V harfine benzer bir şekil oluşturur.



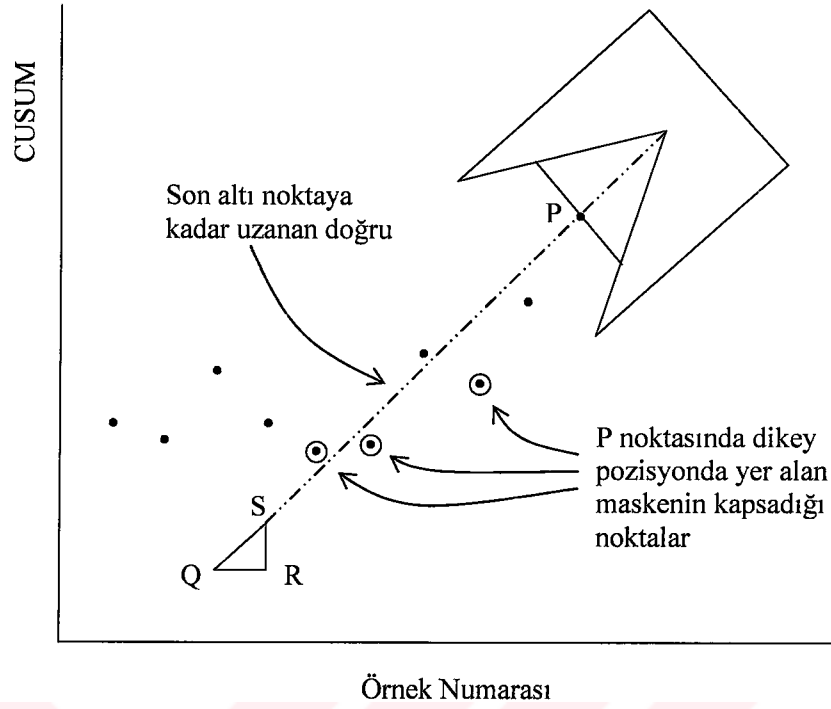
Şekil 3-3: İki yönlü CUSUM kontrol grafiğine uygulanan V maskesi

Kaynak: Acheson J. Duncan; Quality Control and Industrial Statistics, Third Edition, Richard D. Irwin Inc., 1965, s.413.

İşaretlenen kümülatif toplam değerlerinden herhangi biri maskenin kollarının ötesine düşerse prosesin kontrol dışına çıktığı anlaşılır. Bununla birlikte, kümülatif toplam değerleri maskenin kolları arasına düşüyorsa prosesin kontrol altında olduğu söylenebilir.

V maskesi proses ortalamasındaki değişimin miktarını tespit etmede de kullanılabilir. Bu prosedür grafikte işaretlenen son kümülatif toplam değerine yani P noktasına yerleştirilen maskenin P noktası etrafında döndürülmesiyle uygulanabilir. Maske dikey durumda iken, son işaretlenen t adet kümülatif toplam değeri V maskesinin kolları arasına düşüyorsa, yeni pozisyonadaki OP çizgisinin doğrultusu proses ortalamasındaki artışı ölçmede kullanılabilir. Bu durum Şekil 3-4'te görülmektedir. Şekilde QR uzunluğu 1 birim olduğunda, RS uzunluğu proses ortalamasındaki değişmeyi gösterir. Bu tahmin yapılırken yeni pozisyonadaki V maskesinin kolları arasında mümkün olduğu kadar çok sayıda nokta olmalıdır.²⁶

²⁶ Duncan; Age., s.413-414.



Şekil 3-4: V maskesinin proses ortalamasındaki değişmeyi tespit için kullanılması

Kaynak: Acheson J. Duncan; Quality Control and Industrial Statistics, Third Edition, Richard D. Irwin Inc., 1965, s.414.

Proses ortalamasında görülebilecek yukarı yada aşağı yöndeki kaymaları tespit etmek için CUSUM kontrol grafiklerine iki yön birden kazandırmak mümkündür.²⁷

Bir proste incelenen gözlemlerin, $f(X; \theta_i)$ ($i=1, 2, \dots$) olasılık yoğunluk fonksiyonu ile $X_1, X_2, \dots$ şeklinde rasgele bağımsız değişkenlerden oluştuğu farz edilsin. CUSUM prosedüründe θ_i parametreleri konum parametreleridir. Uygulamada aynı zamanda $\theta_i = \theta_0$ şartı da gözlemlenir. Bu durumda genelleştirmeye gitmeden $\theta_0 = 0$ olduğu farz edilir. Söz konusu parametrelerde herhangi bir yönde ortaya çıkabilecek kaymayı tespit etmek amacıyla Ewan ve Kemp (1960), kümülatif toplamlara dayalı “iki yönlü CUSUM kontrol grafiğini” önermişlerdir. İki yönlü CUSUM kontrol grafiği,

$$S_H(k_1, n) = \max [0, X_i - k_1 + S_H(k_1, n-1)] \quad (3.6)$$

$$S_L(k_2, n) = \min [0, X_i + k_2 + S_L(k_2, n-1)] \quad (3.7)$$

formülleri yardımıyla düzenlenebilir. Burada $n=1, 2, \dots$ şeklinde olup, S_H ile üst kolun, S_L ile alt kolun değerleri hesaplanır. $k_1 \geq 0$ ve $k_2 \geq 0$ olduğunda genellikle,

$$S_H(k_1, 0) = -S_L(k_2, 0) = S_0 = 0$$

²⁷Croiser; Agm., 1986, s.187.

sonucu bulunur. k_1 ve k_2 referans değerleri genelde konum parametresindeki artış ve azalışın yarısı olacak şekilde seçilir.²⁸ Page (1954), iki yönlü CUSUM kontrol grafiği için $k_1=k_2=0$ durumunu önermiştir. Formül 3-6 proses ortalamasındaki yukarı doğru kaymayı tespit etmede kullanılırken; Formül 3-7 ise aşağı doğru kaymayı tespit etmede kullanılır.²⁹

İki yönlü CUSUM kontrol grafiği aşağıda verilen N 'inci gözlem değerinde, sonra bir kontrol dışı sinyali verir. Söz konusu N değeri,

$$N = \min\{n : S_H(k_1, n) \geq h_1 \text{ veya } S_L(k_2, n) \leq -h_2\} \quad (3.8)$$

formülü yardımıyla hesaplanır. Formülde h parametresi karar aralığını ve k parametresi ise referans değerini ifade eder. Formülde yer alan h_1 ve h_2 karar aralıklarının her ikisi sıfırdan büyük değerler ($h_1 > 0$ ve $h_2 > 0$) alır.³⁰ Kümülatif toplam değeri, h_1 değerinden büyük olduğunda ($S_H > h_1$) proses ortalamasının yukarıya doğru kaydığı, kümülatif toplam değeri $-h_2$ değerinden küçük olduğunda ($S_L < -h_2$) ise proses ortalamasının aşağıya doğru kaydığı anlaşılır. Her iki durumda da iki yönlü CUSUM kontrol grafiği kontrol dışı sinyali verir.³¹

3.1.5. V maskesi prosedürü

Prosesin kontrol altında olup olmadığını tespit etmenin bir diğer yolu da V maskesi prosedürüdür. V maskesi prosedürü ilk kez G. A. Barnard (1959) tarafından ortaya konulmuştur.³²

Günümüzde V maskesi prosedürü, endüstriyel proses kontrolünde yaygın bir kullanım alanı bulmuştur. Bu prosedür proses ortalamasının hedef değerden sapıp saptığını tespit etmede de kullanılır. Şekil 3-5'te standart bir V maskesi görülmektedir.

Şekil 3-5'te kümülatif toplam değerleri dikey ekseninde gösterilirken, örnek numaraları yatay ekseninde gösterilmiştir. Proses, hedeflenen standartlara uygun ürün ürettiğinde kümülatif toplamlardan elde edilen pozitif sapmaların toplamı negatif sapmaların toplamına eşit olur ve grafik yatay bir trend oluşturur. CUSUM kontrol

²⁸William H. Woodall; "On the Markov Chain Approach to The Two-Sided CUSUM Procedure", Technometrics, Vol:26, No:1, 1984, s.41.

²⁹ Lucas; Agm., 1985, s.2692.

³⁰ Woodall; Agm., s.42.

³¹ Croiser; Agm., 1986, s.187.

³² Montgomery; Age., 1991, s.283.

grafikinde yukarı yönde bir trend ortaya çıkarsa, bu durum pozitif yönde bir kaymanın olduğunu gösterir. Benzer şekilde negatif yönde bir kayma olduğunda ise aşağı doğru bir trend ortaya çıkar.³³

Kümülatif toplam değerlerinden herhangi biri V maskesinin kollarının dışına düştüğünde prosesin kontrol dışına çıktığına karar verilir.³⁶

V maskesini düzenlemenin bir kaç farklı yolu olup bu bölümde bu metotlardan sadece biri izah edilecektir. Söz konusu metot anlatılmadan önce standart V maskesinde bulunabilecek karakteristik değerlerin izah edilmesi yerinde olacaktır. Şekil 3-3'te verilen standart V maskesinin düzenlenmesinde gerekli olabilecek ifade ve semboller aşağıdaki gibidir:

t: Örnek alma zamanını gösterir.

P: V maskesinin yerleştirileceği noktadır. Bu nokta, en son kümülatif toplam değerinin işaretlendiği noktadır.

d: Tedarik uzunluğunu gösterir. Şekil 3-5'te P noktası ile V maskesinin köşe noktası olan V noktası arasındaki mesafeyi ifade etmektedir.

V: V maskesinin köşe noktasıdır.

H: Karar aralığını gösterir. H değeri, Şekil 3-5'teki P noktasında V maskesinin yarı yüksekliğidir. H değeri, Şekil 3-5'teki UP veya PL ile gösterilen uzunluktur. Bu değer, kümülatif toplam değerlerine bağlı olan referans değerinden kümülatif sapmaları da ifade eder.

h: Standart hata ile çarpıldığında karar aralığını verir. $H = h\sigma_{\bar{x}}$

F: Her bir örnek aralığının oluşturduğu hattın eğimidir. Aynı zamanda bu değer, kümülatif toplamlar için hedef ve referans değerleri arasındaki farktır.

f: Standart hata ile çarpıldığında F değerini verir. $F = f\sigma_{\bar{x}}$

θ : V maskesinin açısının yarısını ifade eder.

U'U: Proses ortalamasındaki artışı tespit etmede kullanılan üst karar hattıdır.

L'L: $U'U$ karar hattındaki gibi, proses ortalamasındaki düşüşü tespit etmek için kullanılan alt karar hattıdır.

A: Dik eksenin yatay eksene oranını gösteren bir ölçek faktörüdür. Yatay eksen üzerindeki 1 birimlik uzunluğa karşı gelen dikey eksen üzerindeki birimlerin uzunluğudur. A değeri $\sigma_{\bar{x}}$ ve $2\sigma_{\bar{x}}$ arasında değişir. Yaklaşık olarak $2\sigma_{\bar{x}}$ alınması tavsiye edilir.

³⁶ Amitava Mitra; Fundamentals of Quality Control and Improvement, MacMillan Publishing, 1993, s.215.

a: Standart hata ile çarpıldığında A değerini verir. $A = a \sigma_x$. Genelde a değerinin 2 alınması tavsiye edilir.

D: Ortaya çıkarılması arzu edilen kayma miktarıdır (σ cinsinden).

T: Hedef değeri ifade eder.

k: Referans değeridir. Kümülatif toplam değerinden hesaplanan farklardan elde edilen bir değerdir. V maskesi kollarının eğimini de ifade etmektedir. Yukarı doğru olan kaymayı tespit etmek için $k_1 = T + F$ ve aşağı doğru olan kaymayı tespit etmek için de $k_2 = T - F$ formülleri kullanılır.

S: Kümülatif toplam eksenindeki orijinal değerlere dayanarak belirlenmesi istenen, proses seviyesindeki en küçük kayma miktarını ifade eder. S değeri ile standart hata çarpıldığında D değerini verir.³⁷

V maskesinin düzenlenmesinde gerekli olabilecek ifade ve semboller izah edildikten sonra d tedarik uzunluğu ve θ açısıyla maskenin yarı çapı bulunarak V maskesi düzenlenebilir. Bu değerler,

$$\tan \theta = \frac{D}{2A} \quad (3.9)$$

$$D = \delta \sigma_x \quad (3.10)$$

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2} \right) \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right) \quad (3.11)$$

formülleri yardımıyla hesaplanabilir.³⁸

N. L. Johnson ve F. C. Leone(1962), Formül 3-11'deki β değerinin ihmal edilecek kadar küçük olması halinde,

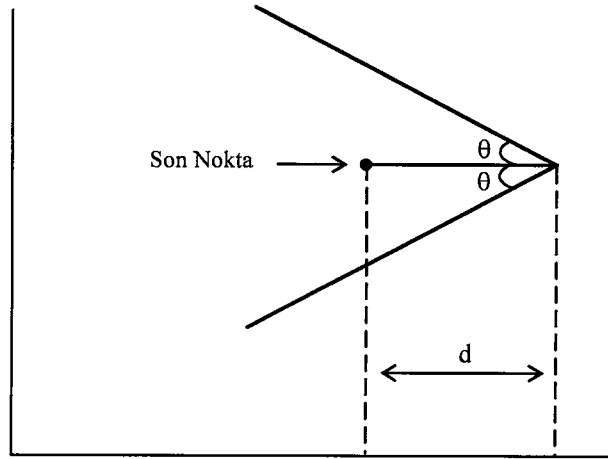
$$d = \frac{-2}{\delta^2} \ln \alpha \quad (3.12)$$

formülünün kullanılmasını tavsiye etmişlerdir.³⁹ Formüllerden elde edilen değerler kullanılarak Şekil 3-6'da verilen V maskesi düzenlenir.

³⁷ H. M. Wadsworth – K. S. Stephens – A. B. Godfrey; Modern Methods for Quality Control and Improvement, John Wiley and Sons. Inc., 1986, s.235-238.

³⁸ Ott – Schilling; Age., s.188-189.

³⁹ N. L. Johnson – F. C. Leone; Cumulative Sum Charts (Mathematical Principles Applied to their Construction and Use) Part-1, Industrial Quality Control, 1962, s.18.



Şekil 3-6: d ve θ 'ya göre V maskesinin düzenlenmesi

Kaynak: N. L. Johnson- F. C. Leone; Cumulative Sum Charts (Mathematical Principles Applied to their Construction and Use) Part-1, Industrial Quality Control, 1962, s.19.

Bu bölümde tek değişkenli CUSUM kontrol grafiğinin nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 3-1) Tek değişkenli CUSUM kontrol grafiğinin nasıl düzenleneceğini göstermek amacıyla alt grup verilerinin incelendiği bir prosesten alınan 25 alt gruba ait ortalamalar kullanılmıştır. Alt grupların her birinde 4 örnek alınmış ve bu örnek değerlerine ait ortalamalar hesaplanarak Tablo 3-1'de verilmiştir. Daha önceki verilere dayanarak hedef değer veya proses ortalaması $\mu_0=30$ ve standart sapma $\sigma=9.46$ olarak tespit edilmiştir.

İlk olarak her bir ortalama değerden $\mu_0=30$ değeri çıkarılıp, $(\bar{X}_i - \mu_0)$ değerleri elde edildikten sonra Formül 3-1 kullanılarak CUSUM değerleri hesaplanır. Söz konusu değerler de aynı tabloda verilmiştir.

CUSUM değerleri elde edildikten sonra V maskesinin düzenlenmesi için gerekli olan parametreler ise aşağıdaki gibi hesaplanır. Proseste $\alpha=0.00135$ için ortaya çıkarılması arzu edilen kayma miktarı $D=7.5$ olarak alınmıştır. Ayrıca dik eksenin yatay eksene oranını gösteren ölçek faktörü $A=4$ olarak alınmıştır. $\sigma=9.46$ değeri kullanılarak standart hata,

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9.46}{\sqrt{4}} = 4.73$$

olarak hesaplandıktan sonra $D = \delta \sigma_{\bar{x}}$ formülünden,

$$\delta = \frac{D}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{7.5}{4.73} = 1.59$$

şeklinde elde edilir. Formül 3-12 yardımıyla d uzunluğu,

$$d = \frac{-2}{\delta^2} \ln \alpha = \frac{-2}{(1.59)^2} \ln(0.00135) = 5.23$$

olarak hesaplanır. Son olarak V maskesinin kollarının yarı çapı Formül 3-9 yardımıyla,

$$\tan \theta = \frac{D}{2A} = \frac{7.5}{8} = 0.9375 \text{ ve } \theta = 43^\circ$$

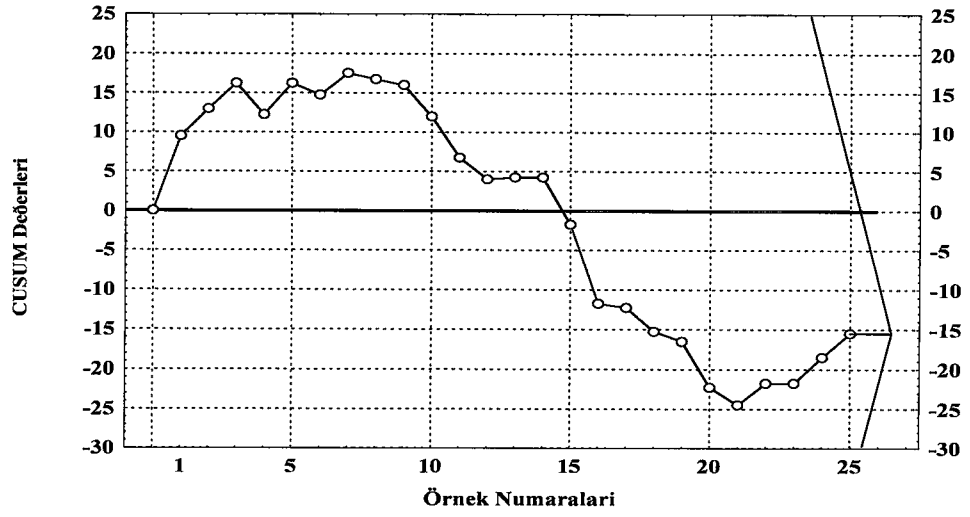
şeklinde hesaplanır.

Tablo 3-1: Alt grup verilerinin ortalamaları ve bu ortalamaların CUSUM değerleri

No	$\bar{X}$	$\bar{X}_i - \mu_0$	$\Sigma(\bar{X}_i - \mu_0)$	N	$\bar{X}$	$\bar{X}_i - \mu_0$	$\Sigma(\bar{X}_i - \mu_0)$
1	39.50	9.50	9.50	14	30.00	0.00	4.25
2	33.50	3.50	13.00	15	24.00	-6.00	-1.75
3	33.25	3.25	16.25	16	20.00	-10.00	-11.75
4	26.00	-4.00	12.25	17	29.50	-0.50	-12.25
5	34.00	4.00	16.25	18	27.00	-3.00	-15.25
6	28.50	-1.50	14.75	19	28.75	-1.25	-16.50
7	32.75	2.75	17.50	20	24.25	-5.75	-22.25
8	29.25	-0.75	16.75	21	27.75	-2.25	-24.50
9	29.25	-0.75	16.00	22	32.75	2.75	-21.75
10	26.00	-4.00	12.00	23	30.00	0.00	-21.75
11	24.75	-5.25	6.75	24	33.25	3.25	-18.50
12	27.25	-2.75	4.00	25	33.00	3.00	-15.50
13	30.25	0.25	4.25				

Kaynak: E. L. Grant – R. S. Leavenworth; Statistical Quality Control, 7th Edition, McGraw-Hill Inc., 1996, s.409.

Tablo 3-1'deki değerler kullanılarak V maskesi düzenlenir. Grafik üzerinde CUSUM değerleri işaretlendikten sonra en son alt grup numarası olan 25'inci değer P noktası olarak tespit edilir. Daha sonra yatay eksen $d=5.23$ uzunluğu belirlenerek maskenin V noktası tespit edilip $\theta=43^\circ$ açısı ile V maskesinin kolları çizilir. Dik eksenin yatay eksene oranı 4 birim alınarak Şekil 3-7'deki CUSUM kontrol grafiği düzenlenmiştir.



Şekil 3-7: Tablo 3-1’deki veriler için düzenlenen CUSUM kontrol grafiği

Kaynak: E. L. Grant – R. S. Leavenworth; Statistical Quality Control, 7th Edition, McGraw-Hill Inc., 1996, s.405.

Kontrol grafiği incelendiğinde bütün CUSUM değerlerinin V maskesinin kolları arasına düştüğü görülür. Bu durumda prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.⁴⁰

⁴⁰ Eugene L. Grant – Richard S. Leavenworth; Statistical Quality Control, 7th Edition, McGraw-Hill Inc., 1996, s.408-409.

3.2. Çok Değişkenli Kümülatif Toplam (MCUSUM) Kontrol Metotları

Proses ortalamasında meydana gelebilecek küçük kaymaların tespit edilmesinde tek değişkenli CUSUM kontrol metotları kullanılır. Fakat birçok sanayi dalında ürünün birden fazla karakteristiği veya özelliği ele alınarak ürünün kalitesi ölçülmektedir. Böyle birbirleriyle ilişkili iki veya daha fazla kalite değişkenine sahip bir ürünün kalitesinin incelenmesi istendiğinde proses ortalamasında meydana gelebilecek küçük kaymaların tespit edilmesi amacıyla çok değişkenli CUSUM (MCUSUM) kontrol metotlarına başvurulur.

Daha önceki bölümlerde tek değişkenli CUSUM proses kontrol metotları izah edildi. Bu bölümde ise araştırmacılar tarafından geliştirilmiş olan çok değişkenli CUSUM (MCUSUM) proses kontrol metotları anlatılacaktır.

3.2.1. Woodall ve Ncube'nin çok değişkenli CUSUM metodu (Tek değişkenli CUSUM kontrol grafiklerinin eş-zamanlı kullanımı)

Woodall ve Ncube (1985), tarafından geliştirilmiş olan bu metot; p adet tek değişkenli CUSUM kontrol grafiğinin eş-zamanlı kullanımından ibarettir. Bu kontrol grafikleri tek yönlü veya iki yönlü olabilir. Söz konusu metotta dağılımın, μ ortalama ve Σ kovaryans matrisi ile çok değişkenli normal dağılım olduğu ve kalite değişkenlerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılır.⁴¹

$X_n = (X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{mn})$ ve $(n=1, 2, \dots)$ olmak üzere m adet bağımsız rasgele değişkenlerin gözlemlendiği farz edilsin. Ayrıca her bir rasgele vektörde, Σ varyans-kovaryans matrisinin ve $E(X_n) = \mu_n = (\mu_{1n}, \dots, \mu_{mn})^T$ ($n=1, 2, \dots$) bilindiği varsayılmaktadır. Ayrıca genelleme yapmaksızın hedef değerin de $\mu_n = (0, \dots, 0)^T = 0$ ve ($n=1, 2, \dots$) olduğu varsayılınsın. Çok değişkenli CUSUM metodu için seçilen ardışık rasgele değişkenlere (X_{in} , $i=1, 2, \dots, m$) tek yönlü veya iki yönlü tek değişkenli CUSUM metodu uygulanabilir.

i 'inci değişkene ait tek yönlü CUSUM metodunun işletim uzunluğu aşağıdaki eşitlik ile ifade edilir.

$$N(i) = \min\{n : S_{i,n} \geq h_i\} \quad (3.13)$$

Eşitlikte $h_i > 0$ 'dır. $S_{i,n}$ değeri ise aşağıdaki formül yardımıyla hesaplanabilir.

$$S_{i,n} = \max(0, S_{i,n-1} + X_{in} - K_i), \quad n=1, 2, \dots, \quad (3.14)$$

⁴¹ Nancy D. Smith; Multivariate Cumulative Sum Control Charts, University of Maryland College Park, Unpublishing Ph. D. Thesis, 1987, s.35.

Formülde, $0 \leq S_{i,0} < h_i$ aralığında olup $K_i \geq 0$ 'dır. Eşitliklerde verilen X_{in} , n 'inci gözlem değerinin i 'inci değişkenini, h_i , i 'inci değişkenin karar aralığını ve K_i ise i 'inci değişkenin referans değerini ifade etmektedir.

Ardışık olarak seçilen (μ_{in}) değerlerinde ortaya çıkabilecek her iki yöndeki kaymayı tespit etmek amacıyla, iki yönlü CUSUM metodu kullanılarak $N(i)$ ve $T_{i,n}$ değerlerine bakılır. İki yönlü CUSUM metodu için kontrol prosedürü aşağıdaki gibidir.

$$N(i) = \min\{n : S_{i,n} \geq h_i \text{ veya } T_{i,n} \leq -h_i\} \quad (3.15)$$

Yukarıda verilen iki durumdan biri ortaya çıktığında iki yönlü CUSUM metodu bir kontrol dışı sinyali verir. Formüldeki $T_{i,n}$ değeri ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$T_{i,n} = \min(0, T_{i,n-1} + X_{in} + K_i), \quad n=1, 2, \dots, \quad (3.16)$$

Burada $-h_i < T_{i,0} \leq 0$ 'dır. i 'inci değişken için seçilen K_i referans değeri, kontrol dışı sinyali verebileceği düşünülen ve hızlı bir şekilde kontrol edilmek istenen değişkenin ortalamasında ortaya çıkabilecek bir kaymaya bağlıdır.

Böylece çok değişkenli CUSUM metodunun işletim uzunluğu,

$$N = \min\{N(1), N(2), \dots, N(m)\} \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanır.⁴²

Çok değişkenli CUSUM metodunun kontrol dışı sinyalinin yorumu tek değişkenli CUSUM kontrol grafiği yardımıyla kolaylıkla yapılabilir. Bu amaçla proses için düzenlenen tek değişkenli CUSUM kontrol grafiklerinden herhangi biri kontrol dışı sinyali verdiğinde incelenen çok değişkenli prosesin kontrol dışına çıkmış olduğuna karar verilir.⁴³

Woodall ve Ncube (1985), tarafından geliştirilmiş olan metodun iki avantajı vardır. Çok kolay anlaşılması ve kontrol dışı sinyalinin kolaylıkla yorumlanabilmesi bu metodun sağladığı önemli avantajlardır. Bu iki avantajına karşılık metodun önemli bir dezavantajı, kalite değişkenleri arasındaki korelasyonun dikkate alınmamasıdır. Bu durumda testin önem seviyesinin ne olduğunu tam olarak belirlemek mümkün değildir. Seçilen p adet kalite değişkeni birbirinden bağımsız ve her bir tek değişkenli CUSUM metodunun önem seviyesi α_u ile gösterildiğinde, çok değişkenli CUSUM metodunun

⁴² William H. Woodall – Matoteng M. Ncube; “Multivariate CUSUM Quality Control Procedures”, Technometrics, Vol:27, No: 3, 1985, s.285.

⁴³ S. J. Wierda; “Multivariate Statistical Process Control – Recent Results and Directions for Future Research”, Statistica Neerlandica, Vol:48, No:2, 1994, s.160.

önem seviyesi (α_M),

$$\alpha_M = 1 - (1 - \alpha_u)^p \quad (3.18)$$

şeklinde belirtilir. Örneğin $p=2$ ve $\alpha_u=0.0027$ için $\alpha_M=0.0054$ iken, $p=10$ ve $\alpha_u=0.0027$ için $\alpha_M=0.0267$ olmaktadır.⁴⁴

Woodall ve Ncube (1985), iki değişken için eş-zamanlı olarak düzenlenen MCUSUM metodu ile Hotelling T^2 kontrol grafiğini ortalama işletim uzunluklarını (ARL) kullanarak karşılaştırmışlardır. Karşılaştırma sonucunda, proseste ortaya çıkabilecek küçük kaymaların tespit edilmesinde MCUSUM metodunun T^2 kontrol grafiğinden daha etkili olduğu tespit edilmiştir.⁴⁵ Bu sonuç, değişkenler arasındaki korelasyon katsayısının mutlak değeri büyük olmadığında geçerlidir. Karşılaştırma sonucunda $|\rho| < 0.5$ olduğunda daha küçük ARL değerleri elde edilirken tersi durumda yani $|\rho| > 0.5$ olduğunda ise küçük ARL değerleri elde edilememiştir. Bu durum göstermektedir ki proseste incelenen iki kalite değişkeni birbirinden bağımsız ise Woodall ve Ncube (1985)'nin bu metodu iyi sonuçlar vermektedir. Bununla beraber kalite değişkenleri birbirleriyle ilişkili olduğunda ise T^2 kontrol grafiği daha iyi sonuçlar verir. Söz konusu araştırmacılar, ikiden fazla kalite değişkeninin incelendiği durumlarda kendi sonuçlarının doğru sonuçlar veremeyeceğini belirtmişlerdir.⁴⁶

3.2.2. Ardışık olasılık oran testine dayalı çok değişkenli CUSUM metotları

Kümülatif toplam (CUSUM) prosedürleri, proses ortalamasında ortaya çıkabilecek küçük kaymaları tespit etmek amacıyla kullanılan ve olabilirlik oranlarına dayalı ardışık metotlar serisidir.⁴⁷ Ayrıca CUSUM kontrol grafiği, ardışık olasılık oran testi kullanılarak düzenlenmektedir.⁴⁸ Metot anlatılmadan önce olabilirlik oran testi (Likelihood ratio) ve ardışık olasılık oran testi [Sequential probability ratio test (SPRT)] kısaca izah edilecektir.

Olabilirlik oran testi (Likelihood ratio): Bu metot tek değişkenli analizlerde de sıkça karşılaşılan en çok olabilirlik kestiricilerine dayanır. Metotta örneklem istatistiklerinin

⁴⁴ Smith; Age., s.36-37.

⁴⁵ Wierda; Age., s.160.

⁴⁶ Smith; Age., s.37.

⁴⁷ John D. Healy; "A Note on Multivariate CUSUM Procedures", Technometrics, Vol:29, No:4, 1987, s. 409.

⁴⁸ J. F. MacGregor – T. Kourti; "Statistical Process Control of Multivariate Processes Control", Engineering Practice, Vol:3, No:3 1995, s.405.

H_0 ve H_1 hipotezleri altında kestirilen en büyük değerleri birbirine oranlanır. θ 'nın tümüyle bilinmeyen anakütle parametrelerinden oluşan bir vektör olduğu farz edilsin. Parametre vektörü θ , çok değişkenli normal dağılıma sahip bir anakütleden çekilmiş örneklemin istatistiğidir. Bu durumda,

$$H_0 = \theta \in \Omega_0$$

$$H_1 = \theta \in \Omega$$

hipotezleri altında bu oran değeri;

$$\lambda(x) = L_0 / L_1 \quad (3.19)$$

biçiminde tanımlanır. Bu eşitlikte $l_0 = \log L_0$ ve $l_1 = \log L_1$ alındığında,

$$-2 \log \lambda = 2(l_1 - l_0) \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu eşitlik sayesinde hipotez testlerinde kullanılan test istatistikleri türetilmektedir. Söz konusu test istatistiklerinin büyük çoğunluğu χ^2 tablo değerleri ile karşılaştırılırken bazı durumlarda da F tablo değerleriyle karşılaştırılır.⁴⁹

Ardışık olasılık oran testi [Sequential probability ratio test (SPRT)]: Birçok istatistiksel probleme uygulanabilen ardışık olasılık oran testi (SPRT) ilk olarak Wald (1947) tarafından ortaya atılmıştır.

X değişkeninin dağılımı ile ilgili olan H_0 ve H_1 hipotezlerini test etmek amacıyla $X_1, X_2, \dots, X_m$ olmak üzere m adet rastgele örneğin olasılıklarının olabilirlik oranı (l_{1m} / l_{0m} oranı) hesaplanır. H_0 veya H_1 hipotezlerinden biri doğru olduğunda aşağıdaki durumlara göre karar verilir;

$$\text{I) } l_{1m} / l_{0m} \leq \beta / (1 - \alpha) \text{ olduğunda } H_0 \text{ hipotezi kabul edilir,}$$

$$\text{II) } l_{1m} / l_{0m} \geq (1 - \beta) / \alpha \text{ olduğunda } H_1 \text{ hipotezi kabul edilir,}$$

$$\text{III) } \beta / (1 - \alpha) < l_{1m} / l_{0m} < (1 - \beta) / \alpha \text{ olduğunda ise bir sonraki gözlem değeri olan}$$

X_{m+1} değeri alınır ve $l_{1(m+1)} / l_{0(m+1)}$ oranı hesaplanır. Karara ulaşıncaya kadar işlem tekrarlanır.

Daha sonra birinci ve ikinci tip hataların olasılıklarının yaklaşık olarak α ve β değerlerine eşit olacağı gösterilebilir. Bu özel durum, örnek ortalama değerleri için düzenlenen CUSUM kontrol grafiğine uygulanır. Söz konusu örnek ortalama değerleri,

⁴⁹ Hüseyin Tatlıdil; Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz, Akademi Matbaası, Ankara, 2002, s.107.

ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal dağılıma sahip bir dağılımından alınan birbirinden bağımsız X değişkenlerinden hesaplanmaktadır. H_0 hipotezi $\mu = \mu_0$ ve H_1 hipotezi ise $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ (Burada $\delta > 0$ 'dır) şeklinde düzenlenerek,

$$\begin{aligned} \frac{l_{1m}}{l_{0m}} &= \frac{(\sigma\sqrt{2\pi})^{-m} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_0 - \delta\sigma)^2\right]}{(\sigma\sqrt{2\pi})^{-m} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_0)^2\right]} \\ &= \exp\left\{+\frac{1}{2\sigma^2} \left[2\delta\sigma \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_0) - m\delta^2\sigma^2\right]\right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

şeklinde yazılır. Eşitlik yazıldıktan sonra yukarıda verilen üç karşılaştırma işleminden I ve II karşılaştırmaları,

$$\text{I')} \quad \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_0) \leq \frac{1}{\delta} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{1}{2} m\delta \quad \text{olduğunda } \mu = \mu_0 \text{ hipotezi kabul edilir.}$$

$$\text{II')} \quad \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_0) \geq \frac{1}{\delta} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{1}{2} m\delta \quad \text{olduğunda ise } \mu = \mu_0 + \delta\sigma \text{ hipotezi kabul}$$

şeklinde yeniden yazılır.

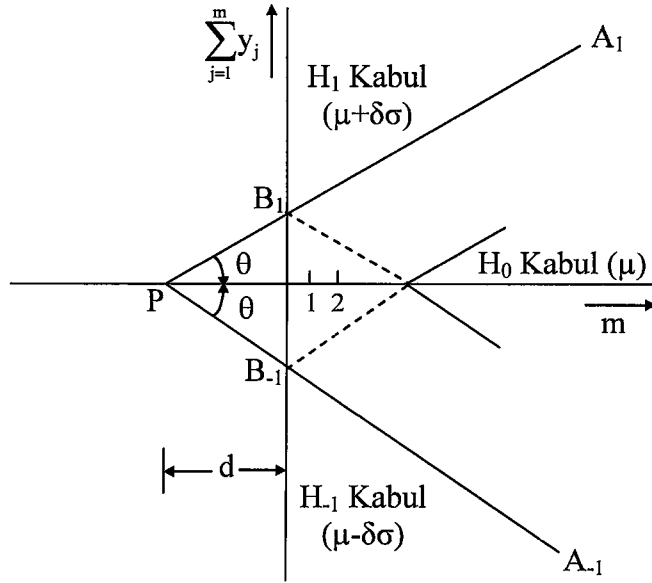
Şayet $\left[m, \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_0)\right]$ noktaları grafik üzerinde işaretlendiğinde “teste

devam etme bölgesi” iki paralel doğru arasında kalır. Söz konusu doğruların her birinin m eksenine eğim açısı $\tan^{-1} (\delta/2)$ iken, bu doğrular $\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_0)$ eksenini $\frac{1}{\delta} \ln \frac{\beta}{1-\alpha}$

ve $\frac{1}{\delta} \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$ noktalarında keserler.

H_0 , H_1 ve $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ ile gösterilen üçüncü bir hipotez olan H_{-1} hipotezleri test edilmek istenildiğinde yukarıda izah edilen durum daha karmaşık hale gelir. Armitage (1950) bu durum için pratik bir yol olan iki ardışık olabilirlik oran testinin eşanlı olarak kullanılması fikrini ortaya atmıştır. Bu testlerden ilki yukarıda izah edilen H_0 ve H_1 hipotezlerini test ederken; diğeri ise H_0 ve H_{-1} hipotezlerini test eder.⁵⁰ Söz konusu üç hipotezi test etmek amacıyla ardışık olasılık oran testi (SPRT) için kontrol sınırlarını gösteren grafik Şekil 3-8’de görülmektedir.

⁵⁰ Johnson – Leone; Age., s.15-16.



Şekil 3-8: Ardışık olasılık oran testi için kontrol sınırları

Kaynak: N. L. Johnson; "A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Charts", Journal of American Statistical Association, Vol:56, 1961, s.838.

Şekilde H_0 , H_1 ve H_{-1} hipotezleri için kabul ve red bölgeleri gösterilmiştir. Söz konusu şekil daha önce anlatılan ve Şekil 3-5'te verilen V maskesinin tersi olarak düşünülebilir. Burada proses gerçekte kontrol altında iken yanlışlıkla bir kontrol dışı sinyalinin elde edilmesi olasılığı yaklaşık olarak $2\alpha'$ 'dır.⁵¹

Bu bölümde, ardışık olasılık oran testine dayalı olarak düzenlenen çok değişkenli CUSUM (MCUSUM) metotları anlatılacaktır.

3.2.2.1. Alwan'ın ardışık olasılık oran testine dayalı çok değişkenli CUSUM metodu

Söz konusu metot ilk olarak Alwan (1986) tarafından önerilmiştir. Aşağıda verilen notasyon ve varsayımlar kullanılarak metot izah edilecektir.

p: kalite değişkenlerinin sayısını,

X: $X=(X_1, X_2, \dots, X_p)'$ olmak üzere p kalite değişkenine ait gözlem vektörünü,

μ : X gözlem vektörünün ortalama vektörünü,

μ_0 : Hedef ortalama vektörünü,

⁵¹ N. L. Johnson; "A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Charts", Journal of American Statistical Association, Vol:56, 1961, s.836-837.

n: Örnek hacmini,

Σ : X gözlem vektörünün kovaryans matrisini (Söz konusu matrisin bilindiği varsayılmaktadır.),

X_{ij} : i . zamandaki j . karakteristiğin örnek ortalama gözlem değerini,

X_i : i . zamandaki ($i = 1, 2, \dots, m$) örnek ortalama gözlem vektörünü ifade etmektedir.

Burada $X \sim N(\mu, \Sigma)$ olmak üzere,

$$c_i = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X}_i - \mu_0) \quad (3.22)$$

eşitliği yazılabilir. Formül 3-22'de $\mu = \mu_0$ olduğunda c_i istatistiği, p serbestlik dereceli ki-kare dağılımı gösterir. Ancak $\mu = \mu_1$ olduğunda; c_i istatistiği p serbestlik derecesi ve merkezi olmayan parametre λ ile merkezi olmayan ki-kare dağılımı gösterir. Söz konusu merkezi olmayan parametre λ ise

$$\lambda = (n/2)(\mu_1 - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0) \quad (3.23)$$

formülü yardımıyla hesaplanır. Formülde $\mu = \mu_0$ durumunda $\lambda = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Tek değişkenli CUSUM metodunda ifade edilen sıfır ve alternatif hipotezler çok değişkenli CUSUM'a adapte edilebilir. H_0 , prosesin kontrol altında olduğunu, buna karşılık alternatif hipotez H_1 ise belli bir zaman periyodunda ortaya çıkabilecek sapmayı yani prosesin kontrol dışı olma durumunu ifade eder. Söz konusu hipotezler, merkezi olmayan parametre λ için düzenlenebilir. Burada λ , prosesin kontrol dışına çıkmasının bir ölçüsü olarak alınacaktır. γ değeri merkezi olmayan parametre λ 'nın minimum değeri olarak alındığında söz konusu hipotezler,

$$H_0: \lambda = 0 \text{ ve } H_1: \lambda = \gamma$$

şeklinde kurulabilir. Bu hipotezleri test etmek için, Alwan (1986) tarafından önerilen ve en son gözlem değerinden başlayarak ters sıralama ile ardışık olarak olabilirlik oranlarını kullanan ardışıklık testi kullanılır. Söz konusu test aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$R_\ell = \prod_{j=0}^{\ell-1} \frac{f(c_{m-j}|H_1)}{f(c_{m-j}|H_0)} \quad (3.24)$$

Formülde c_m , en son gözlem değerini gösterirken, $f(c|H_i)$ ise H_i ($i=0, 1$ olmak üzere) doğru olduğunda c 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu ifade eder. Prosedürde $A > B$ olacak şekilde A ve B sayıları seçilir ve $R_\ell \geq A$ olduğunda H_0 hipotezi red edilirken,

$R_\ell < B$ olduğunda H_0 hipotezi kabul edilir. $B < R_\ell < A$ olduğunda ise örnekleme devam edilir.

Ardışık olasılık oran testinin uygulanması için A ve B limitleri, sırasıyla birinci (α) ve ikinci tip hata (β) olarak seçilir. A ve B limitlerinin hesaplanması zor olduğundan aşağıdaki yaklaşımlar ele alınacaktır.

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

İkinci tip hata (β)'nın küçük olduğu kabul edilerek aşağıdaki yaklaşım yazılabilir;

$$A = \frac{1}{\alpha}, \quad B=0$$

İkinci tip hata sıfır olarak alındığından dolayı sıfır hipotezi asla kabul edilmeyecektir. Bu nedenle burada karar modeli aşağıdaki gibi olacaktır.

* $R_\ell \geq 1/\alpha$ olduğunda H_0 hipotezi red edilir.

* $0 < R_\ell < 1/\alpha$ olduğunda ise örnekleme işlemine devam edilir.

Benzer şekilde her iki tarafın doğal logaritması alındığında ise karar modeli aşağıdaki gibi olur;

* Herhangi bir $\ln R_\ell \geq -\ln \alpha$ ($\ell=1, 2, \dots, m$) durumunda prosesin kontrol dışına çıktığına karar verilir.

* Tüm $\ln R_\ell < -\ln \alpha$ ($\ell=1, 2, \dots, m$) durumlarında ise prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

Uygulamada daha uygun olan $\ln R_\ell$ biçimine ihtiyaç duyulur. Bu durumda daha önce verilen R_ℓ istatistiği düzenlenerek,

$$R_\ell = \prod_{j=0}^{\ell-1} \frac{f(c_{m-j}|H_1)}{f(c_{m-j}|H_0)} = \prod_{j=0}^{\ell-1} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma} \gamma^i c_{m-j}^i r\left(\frac{p}{2}\right)}{i! 2^i r\left(\frac{p+2i}{2}\right)} \right] \quad (3.25)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Söz konusu ifade şekli kullanışsız olmakla beraber, verilen yaklaşım şekli pratikte oldukça faydalı olacaktır. Merkezi olmayan ki-kare dağılımı için çok sayıda yaklaşım vardır. Pearson'ın yaklaşımı uygun olduğundan söz konusu yaklaşım kullanılarak, $\ln R_\ell$ değeri,

$$\ln R_\ell = \ell \ln Q + K_1 \sum_{j=0}^{\ell-1} \ln c_{m-j} + K_2 \sum_{j=0}^{\ell-1} \ln \left(c_{m-j} + \frac{4\gamma^2}{p+6\gamma} \right) + K_3 \sum_{j=0}^{\ell-1} c_{m-j} \quad (3.26)$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. Formülde K_1 , K_2 ve K_3 değerleri sırasıyla,

$$K_1 = (2-p)/2 \quad (3.27)$$

$$K_2 = \frac{(p+4\gamma)^3}{2(p+6\gamma)^2} - 1 \quad (3.28)$$

$$K_3 = \frac{\gamma}{p+6\gamma} \quad (3.29)$$

formülleriyle hesaplanır. Formüllerin birleştirilmesi sonucu,

$$\left[\ell \ln Q + K_1 \sum_{j=0}^{\ell-1} \ln c_{m-j} + K_2 \sum_{j=0}^{\ell-1} \ln \left(c_{m-j} + \frac{4\gamma^2}{p+6\gamma} \right) + K_3 \sum_{j=0}^{\ell-1} c_{m-j} \right] \geq -\ln \alpha_0 \quad (3.30)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\ell=1, 2, \dots, m$ 'dir. Formül 3-30'daki ifade sağlandığında hipotez red edilir. Formül 3-30'daki eşitsizlik,

$$\ell \ln Q + \sum_{j=0}^{\ell-1} D_{m-j} \geq -\ln \alpha \quad (3.31)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Formülde D_{m-j} değeri,

$$D_{m-j} = K_1 \ln c_{m-j} + K_2 \ln \left(c_{m-j} + \frac{4\gamma^2}{p+6\gamma} \right) + K_3 c_{m-j} \quad (3.32)$$

formülü yardımıyla hesaplanır. Son olarak Formül 3-31,

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} D_{m-j} \geq -\ln Q \left(\ell + \frac{\ln \alpha_0}{\ln Q} \right) \quad (3.33)$$

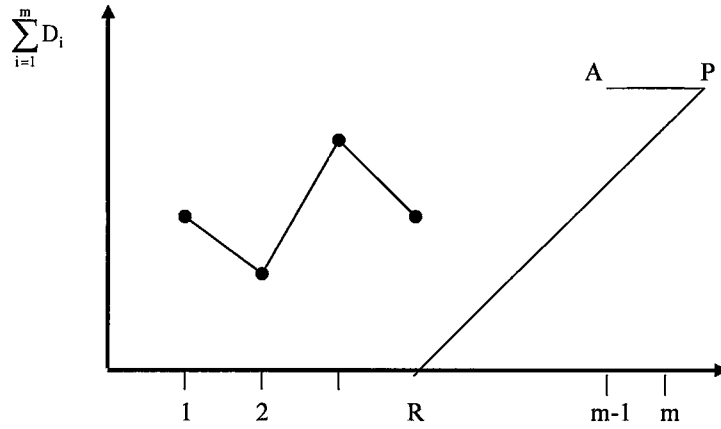
şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece, tek değişkenli prosedür de olduğu gibi çok değişkenli CUSUM prosedürü lineer metot için yeniden düzenlenir. Herhangi bir doğru için formül,

$$y = \tan \theta (X+d) \quad (3.34)$$

şeklinde yazılabilir.

Çok değişkenli CUSUM kontrol grafiği, $\left(m, \sum_{i=1}^m D_i \right)$ koordinatları kullanılarak elde

edilecek noktaların işaretlenmesi ile düzenlenir. Böyle bir çok değişkenli CUSUM kontrol grafiği Şekil 3-9'da görülmektedir.



Şekil 3-9: Çok değişkenli CUSUM kontrol grafiği

Kaynak: Layth. C. Alwan; “CUSUM Quality Control-Multivariate Approach”, Communications in Statistics: Theory and Method, Vol:15, No:12, 1986, s.3541.

Şekil 3-9'daki A noktası, en son işaretlenen noktayı göstermektedir. Şekilde AP uzunluğu ve tanjant açısı,

$$AP = \frac{\ln \alpha_0}{\ln Q} \quad (3.35)$$

$$\tan APR = \ln Q \quad (3.36)$$

formülleriyle elde edilir. Böylece çizilen doğru, prosesin kontrol altında olup olmadığını göstermek için bir kontrol prosedürü sağlar. Herhangi bir nokta PR doğrusunun dışına düştüğünde prosesin kontrol dışına çıktığına karar verilir. Bu metotta PR doğrusu tek değişkenli CUSUM prosedüründe düzenlenen hareketli V maskesine benzer işlem görür.⁵²

3.2.2.2. Ardışık olasılık oran testine dayalı çok değişkenli CUSUM metodunun çok değişkenli normal dağılıma sahip bir prosese uygulanması

Ardışık olasılık oran testine dayalı metot ilk olarak Healy (1987) tarafından önerilmiştir. Bu metotta Healy, μ_I gibi “iyi bir ortalamaya” sahip çok değişkenli normal dağılım ile μ_K gibi “kötü bir ortalamaya” sahip çok değişkenli normal dağılım arasında bir ayırım yapmaya çalışmıştır.⁵³

X_n değişkeninin, μ_I gibi “iyi bir ortalamaya” sahip yada μ_K gibi “kötü bir

⁵² Layth C. Alwan; “CUSUM Quality Control – Multivariate Approach”, Communications in Statistics: Theory and Method, Vol:15, No:12, 1986, s.3536-3541.

⁵³ Smith; Age., s.42.

ortalamaya” sahip çok değişkenli normal dağılım gösteren iki prosesin herhangi birinden alınmış olsun. Metotta Σ genel kovaryans matrisinin bilindiği kabul edilir.

Kullanılacak olan test istatistiği,

$$S_n = \max(S_{n-1} + a'X_n - K, 0) > H \quad (3.37)$$

şeklindedir. Formülde yer alan a' ve K değerleri ise

$$a' = \frac{(\mu_K - \mu_I)' \Sigma^{-1}}{\left[(\mu_K - \mu_I)' \Sigma^{-1} (\mu_K - \mu_I) \right]^{1/2}} \quad (3.38)$$

$$K = 0.5 \frac{(\mu_K + \mu_I)' \Sigma^{-1} (\mu_K - \mu_I)}{\left[(\mu_K - \mu_I)' \Sigma^{-1} (\mu_K - \mu_I) \right]^{1/2}} \quad (3.39)$$

formülleriyle hesaplanır. Formül 3-37'deki $a'X_n$ değişkeni, varyansı 1 olan tek değişkenli normal dağılım gösterir. Burada $a'x_n$ değişkeni, prosesin kontrol altında olması durumunda $a'\mu_I$ ve kontrol dışı olması durumunda ise $a'\mu_K$ şeklinde ifade edilir.

Formül 3-37'de verilen eşitlik yeniden düzenlenerek, çok değişkenli normal dağılıma sahip bir prosesin ortalamasında meydana gelebilecek kaymaları tespit etmek amacıyla kullanılacak çok değişkenli CUSUM metodu,

$$S_n = \max(S_{n-1} + a'(X_n - \mu_I) - 0.5 D, 0) > H \quad (3.40)$$

şeklinde ifade edilebilir. Formülde yer alan merkezi olmayan parametre D ,

$$D = \sqrt{(\mu_K - \mu_I)' \Sigma^{-1} (\mu_K - \mu_I)} \quad (3.41)$$

formülü yardımıyla hesaplanır. X_n değeri μ_I ortalamasına eşit olduğunda; $a'(X_n - \mu_I)$ ifadesi, tek değişkenli standart normal dağılım gösterir. Benzer şekilde X_n değeri μ_K ortalamasına eşit olduğunda, $a'(x_n - \mu_K)$ ifadesi, ortalaması D ve varyansı 1 olan tek değişkenli normal dağılım gösterir. Bu nedenle çok değişkenli normal dağılım gösteren tesadüfi değişkenin ortalamasında ortaya çıkabilecek kaymayı tespit etmek amacıyla çok değişkenli CUSUM metodu tek değişkenli CUSUM metoduna indirgenebilir. Böylece tek değişkenli CUSUM metodunda kullanılan ortalama işletim uzunluğu (ARL), H ve CUSUM kontrol grafiğinin ilk değeri olan S_0 değerleri çok değişkenli normal dağılıma sahip bir prosese uygulanacak olan MCUSUM metodunda da kullanılabilir.

μ_I ve μ_K ortalamalarını birbirinden ayırmak için kullanılan çok değişkenli CUSUM metodu, μ_I , μ_K ve Σ 'ya bağlı iken, p kalite değişkenine bağlı değildir.

Özellikle, p arttığında ortalama işletim uzunluğu (ARL) değerleri değişmez. Burada ifade edilen ortalama işletim uzunluğu (ARL), tek yönlü tek değişkenli CUSUM metodunda ifade edilen ARL ile aynıdır.

İzah edilen metotta, ortalama vektöründe μ_I 'dan $\mu_K = \mu_I + \delta$ 'ya doğru tek yönde meydana gelebilecek bir kayma göz önünde bulundurulur. Burada $\delta = \mu_K - \mu_I$ 'dır. Şayet proses ortalamasında μ_I ve μ_K ortalamalarını birleştiren doğru boyunca fakat aynı zamanda μ_K ortalamasından uzaklaşan bir değere (örneğin $\mu_I - \delta$ gibi bir değere) doğru bir kayma meydana geldiğinde diğer bir tek yönlü CUSUM metodu geliştirilebilir. Böylece iki adet tek yönlü CUSUM metodu birleştirilerek iki yönlü CUSUM metodu düzenlenebilir.⁵⁴

Healy'nin geliştirdiği metodun önemli bir dezavantajı, metodun sadece kaymanın yönü bilindiğinde veya sadece belirli bir yönde kaymaların meydana gelmesi beklenildiğinde iyi sonuçlar vermesidir.⁵⁵ Sonuç olarak söz konusu yaklaşım, gözlem vektörünün elemanlarının lineer kombinasyonuna dayalı olan tek değişkenli karar aralığı grafiğini kullanır. Bu yaklaşımda, referans değeri olarak tespit edilmek istenen kaymanın yarı uzunluğu kullanılır. Burada ifade edilen referans değeri tek değişkenli CUSUM metodunda da kullanılır. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, Healy'nin geliştirdiği metodun sadece proses ortalamasında meydana gelebilecek spesifik bir kayma üzerinde yoğunlaşmasıdır. Bu nedenle bir kontrol dışı sinyali meydana geldiğinde proses ortalamasının μ_I gibi bir değere kaymış olduğuna karar verilir. Görüldüğü gibi metotta kontrol dışı sinyalinin yorumlanması bu şekilde açıktır.⁵⁶

Bu bölümde yukarıda izah edilen metot ile ilgili bir örnek verilecektir.

Örnek 3-2) Bu örnekte çok değişkenli normal dağılıma sahip bir prosesin ortalamasında meydana gelebilecek bir kaymayı tespit etmek amacıyla çok değişkenli CUSUM (MCUSUM) metodunun nasıl kullanılacağını göstermek için optik fiber kablolarında kilometre başına iletim esnasında meydana gelen zayıflama ölçümleri kullanılmıştır. Her bir fiber kabloda iki ölçüm değeri alınmıştır. Verileri standartlaştırmak amacıyla bu ölçüm değerlerinin doğal logaritması alınmıştır.

⁵⁴ Healy; Agm., s.410-411.

⁵⁵ Smith; Age., s.43-44.

⁵⁶ Wierda; Agm., s.161.

Elektronik teknolojisine göre kilometre başına ortalama zayıflama değeri ürün kalitesi iyi olduğunda her iki ölçüm değeri için 0.4 desibel'dir. Bu değerın doğal logaritması alındığında, $\ln(0.4) = -0.92$ değeri elde edilir. Böylece μ_I matrisi,

$$\mu_I = \begin{bmatrix} -0.92 \\ -0.92 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Ürün kalitesi kötü olduğunda ise kilometre başına ortalama zayıflama değeri en az 0.5 desibel'dir. Bu değerinde doğal logaritması alındığında $\ln(0.5) = -0.69$ değeri elde edilir. Bu durumda μ_K matrisi,

$$\mu_K = \begin{bmatrix} -0.69 \\ -0.69 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu veriler kullanıldığında kovaryans matrisi şeklinde elde edilir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0121 & 0.0006 \\ 0.0006 & 0.0088 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Dikkat edilirse ikinci ölçüm değeri için hesaplanan varyans değeri birinci ölçüm değerine ait olan varyans değerinden daha küçüktür. Kovaryans matrisinin tersi alındığında,

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 83 & -6 \\ -6 & 114 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. μ_I , μ_K ve Σ^{-1} matrisleri elde edildikten sonra Formül 3-38 ve Formül 3-41'de verilen eşitlikler kullanılarak a' ve D değerleri,

$$a' = \frac{(\mu_K - \mu_I)' \Sigma^{-1}}{\left[(\mu_K - \mu_I)' \Sigma^{-1} (\mu_K - \mu_I) \right]^{1/2}} = [5.7 \quad 8]$$

$$D = \sqrt{(\mu_K - \mu_I)' \Sigma^{-1} (\mu_K - \mu_I)} = 3$$

şeklinde elde edilir. Burada ayrıca, proses ortalamasında bir kayma olmadığında yeteri kadar büyük bir ARL için H karar aralığı değeri seçilir. Bu örnekte proses ortalamasında bir kayma olmadığında ARL değerinin en az 5000 olması istenmektedir. Bu ARL değeri, tek yönlü CUSUM metodu için Lucas ve Croiser (1982) tarafından elde edilen ARL değerleri tablosundan elde edilmiştir. Tablodan, $K = D/2 = 1.5$ için ARL değeri 5871 ve H karar aralığı değeri ise 2.3 olarak elde edilir. Ayrıca CUSUM'ın başlangıç değeri olan S_0 değeri de 1.15 olarak elde edilir. Bu değerler elde edildikten

sonra çok değişkenli CUSUM metodu için S_n değeri Formül 3-40 kullanılarak,

$$S_n = \max(S_{n-1} + a'(X_n - \mu_1) - 0.5 D, 0) > H$$

$$S_n = \max\left[S_{n-1} + (5.7 \quad 8) \begin{pmatrix} X_n - (-0.92 \quad -0.92)' \end{pmatrix} - 1.5, 0\right] > 2.3$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu değere göre prosesin kontrol altında olup olmadığına karar verilir.⁵⁷

3.2.2.3. Ardışık olasılık oran testine dayalı çok değişkenli CUSUM metodunun çok değişkenli normal dağılımlı kovaryans matrisine sahip bir prosese uygulanması

Ardışık olasılık oran testine dayalı metot ilk olarak Healy (1987) tarafından önerilmiştir. Metotta, X_n değişkeninin “iyi” kovaryans matrisine (Σ) yada “kötü” kovaryans matrisine ($\Sigma_K = C\Sigma$) sahip çok değişkenli normal dağılım gösteren iki prosesin herhangi birinden alındığı farz edilsin. Ele alınan prosesin Σ ’dan $C\Sigma$ ’ya olan kayma şekli en basit kayma ihtimalidir. Bu tür durumlarda bütün varyanslar orantılı olarak değişirken, değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları aynı kalır. Bu tür bir kayma, tüm değişkenlerin etkilendiği üretim proseslerinde bir değişme olduğunda meydana gelebilir. Örneğin bir iletim sistemindeki birkaç frekansta ölçümler yapıldığında; herhangi bir frekansta meydana gelebilecek bir artış, diğer bir frekansta orantılı bir artışa neden olur. Metotta kullanılan tüm vektörler ($p \times 1$) ve tüm matrisler ($p \times p$) boyutludur. Bu metotta kullanılacak test istatistiği,

$$S_n = \max\left[S_{n-1} + (X_n - \mu)' \Sigma^{-1} (X_n - \mu) - K, 0\right] > H \quad (3.42)$$

şeklindedir. Formül 3-42’de yer alan $y_n = (X_n - \mu)' \Sigma^{-1} (X_n - \mu)$ ifadesi Hotelling T^2 istatistiğidir. Formülden anlaşılacağı üzere aslında metot, y_n değerinin kümülatif toplamının alınması ile elde edilmektedir. Formülde yer alan K değeri ise

$$K = (p) \log(C) [C/(C-1)] \quad (3.43)$$

formülü ile hesaplanır. Yukarıda izah edilen metotta, proseste veri setinin $n=1$ olduğu yani bireysel gözlemlerin ele alındığı ve her yeni gözlem alındığında çok değişkenli CUSUM istatistiğinin yeniden hesaplandığı varsayılmaktadır. Oysa her bir zaman periyodunda m adet gözlemin alındığı alt grup verilerinin ele alınıp incelendiği

⁵⁷ Healy; Agm., s.411-412.

proseslerde ise çok değişkenli CUSUM metodunun test istatistiği,

$$S_n = \max \left[S_{n-1} + \sum_{i=1}^m (X_{n,i} - \mu)' \Sigma^{-1} (X_{n,i} - \mu) - K, 0 \right] > H \quad (3.44)$$

şeklinde hesaplanır. Formüldeki $X_{n,i}$ ifadesi, n zaman aralığında alınan i 'inci gözlem değerini gösterirken, K değeri,

$$K = (pm) \log(C) [C/(C-1)] \quad (3.45)$$

şeklinde hesaplanır.⁵⁸

3.2.3. Croiser'in çok değişkenli CUSUM metodu

Ardışık olasılık oran testinin ardışıklığına dayanarak düzenlenen CUSUM kontrol grafiği çoğu zaman faydalı sonuçlar verir. Fakat söz konusu teste dayanarak tek değişkenli CUSUM kontrol grafiği düzenlenirken iki önemli problemle karşılaşılır. Bunlardan ilki, bu testin teorisi iki basit hipotezin test edilmesini gerektirir. Fakat kalite kontrol grafiklerinin çok genel bir uygulaması, “proses ortalaması arzu edilen değerdedir” şeklinde kurulan basit bir hipoteze karşı “proses ortalaması hedef değerden kaymıştır” şeklindeki karışık bir hipotezi test etmeyi gerektirir. İkinci önemli problem, basit ve pratik bir kalite kontrol grafiği elde etmek için oldukça karmaşık olan olasılık oranı logaritmasının kullanılmasıdır. Söz konusu problemler çok değişkenli CUSUM metodunun geliştirilmesinde de gözlenir.⁵⁹

Croiser (1988), tek değişkenli CUSUM metodundaki skaler değerlerinin vektörlere dönüştürülmesi ile çok değişkenli CUSUM metodunun türetilmesi fikrini ortaya atmıştır.⁶⁰

Çok değişkenli CUSUM metodu, tek değişkenli CUSUM metodundaki skaler değerlerinin vektörlere dönüştürülmesi ile türetilir. Proses ortalamasında meydana gelebilecek bir artışı tespit etmek amacıyla düzenlenen tek değişkenli CUSUM grafiğinin test istatistiği,

$$s_n = \max[0, s_{n-1} + (x_n - \mu_0) - k\sigma] \quad (3.46)$$

formülü yardımıyla hesaplanır. Formülde μ_0 , hedef değeri ve σ , x değerlerinden hesaplanan standart sapmayı gösterirken $k > 0$ ve ilk başlangıç değeri $s_0 = 0$ 'dır.

⁵⁸ Healy; Agm., s.411.

⁵⁹ Croiser; Agm., 1988, s.291.

⁶⁰ Wierda; Agm., s.161.

Skalerlerin vektörlere dönüştürülmesi ile,

$$S_n = \max[0, S_{n-1} + (X_n - \mu_0) - K]$$

elde edilir. Bu aşamada K değerinin nasıl bulunacağı ve alınan sıfır ve maksimum vektörlerinin nasıl yorumlanacağı problemi ile karşı karşıya kalınır. Tek değişkenli durumda $s_{n-1} + x_n - \mu_0$ değeri k standart sapma ile sıfıra yaklaşır. Bu işlem çok değişkenli metot için yapılmak istenildiğinde K değeri $K' \Sigma^{-1} K = k^2$ şeklinde düzenlenir. Yani K değeri, k uzunluğu olacak şekilde seçilir ve söz konusu uzunluk, Σ kovaryans matrisi kullanılarak belirlenir. K değerinin çıkarılması durumunda $S_{n-1} + X_n - \mu_0$ değeri sıfıra yaklaşıyorsa, K değeri $s_{n-1} + x_n - \mu_0$ değeri ile aynı yönde olmalıdır. Dolayısıyla $K = (k / C_n)(S_{n-1} + X_n - \mu_0)$ olur. Burada C_n ($S_{n-1} + X_n - \mu_0$)'nin uzunluğudur. Ne zaman K uzunluğu ($S_{n-1} + X_n - \mu_0$) uzunluğundan daha büyük olursa (yani $k > C_n$ olduğunda) sıfır ile maksimum vektörleri K değerinin çıkarılmasından ziyade $S_n = 0$ alınarak yorumlanır. K vektörünü hesaplamak ve ($S_{n-1} + X_n - \mu_0$) değerinden çıkarmaktansa ($S_{n-1} + X_n - \mu_0$) vektörünü ($k < C_n$ olması koşuluyla) $(1 - k / C_n)$ şeklinde kısaltmak daha kolaydır. Bu izahlardan sonra çok değişkenli CUSUM metodu,

$$C_n = \left[(S_{n-1} + X_n - \mu_0)' \Sigma^{-1} (S_{n-1} + X_n - \mu_0) \right]^{1/2} \quad (3.47)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $C_n \leq k$ iken $S_n = 0$ olur ve $C_n > k$ olduğunda,

$$S_n = (S_{n-1} + X_n - \mu_0)(1 - k / C_n) \quad (3.48)$$

olur. Burada $S_0 = 0$ ve $k > 0$ 'dır. Proses ortalama vektöründe meydana gelebilecek herhangi bir kaymayı tespit etmek amacıyla k referans değeri merkezi olmayan parametre D 'nin yarısı olacak şekilde ($k = D/2$) seçilir.⁶¹ Formül 3-47'deki C_n , geliştirilmiş fakat indirgenmemiş CUSUM vektörünün genelleştirilmiş uzunluğudur. Karar aralığı değeri $h=0$ ve k değeri üst kontrol sınırına eşit olduğunda ($k = \bar{UKS}$) Croiser'in çok değişkenli CUSUM metodu Hotelling T^2 kontrol grafiğine dönüşür.⁶² Böylece p değişken sayısı arttığında proses ortalama vektöründe meydana gelebilecek büyük kaymaların tespit edilmesinde bu metot yerine Hotelling T^2 kontrol grafiği kullanılabilir.⁶³

Çok değişkenli CUSUM kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyalinin tespit

⁶¹ Crosier; Agm., 1988, s.292.

⁶² Croiser; Agm., 1986, s.192.

⁶³ Crosier; Agm., 1988, s.293.

edilebilmesi için,

$$Y_n = [S'_n \Sigma^{-1} S_n]^{1/2} \quad (3.49)$$

değeri hesaplanır. Y_n değeri, h karar aralığı değerinden büyük olduğunda çok değişkenli CUSUM kontrol grafiği kontrol dışı sinyali verecektir.⁶⁴

Çok değişkenli CUSUM metodunun Hotelling T^2 kontrol grafiğine göre bazı üstünlükleri vardır. Bunlardan ilki, bu metot proses ortalamasında meydana gelebilecek spesifik bir kaymayı tespit edebilmesidir. İkincisi, CUSUM kontrol grafiklerinin avantajlarına sahip olmasıdır. Söz konusu metodun diğer bir avantajı ise proses bir kontrol dışı sinyali verdiğinde proses ortalamasının hangi gözlem değerinden itibaren kaydığını gösteren işaretler vermesidir.⁶⁵

3.2.4. T istatistiğinin kümülatif toplamlarına dayalı çok değişkenli CUSUM metodu (COT metodu)

Skaler T_n değerinin CUSUM formuna dönüştürülmüş hali olan bu metot, Croiser (1988) tarafından önerilmiştir. Metot, T istatistiğinin kümülatif toplamlarına dayalı olarak düzenlendiğinden COT (CUSUM of T) metodu olarak adlandırılmıştır.⁶⁶

Çok değişkenli Shewhart kontrol grafiğinden (Hotelling T^2 kontrol grafiği) çok değişkenli CUSUM metoduna geçmenin en direkt yolu skaler T_n ($n=1, 2, 3, \dots$) değerlerini CUSUM formuna dönüştürmektir. COT (CUSUM of T) metodu olarak adlandırılan metot,

$$S_n = \max(0, S_{n-1} + T_n - k) \quad (3.50)$$

eşitliği yardımıyla düzenlenir. Formülde $S_0 \geq 0$ ve $k > 0$ 'dır. COT metodu $S_n > h$ durumunda kontrol dışı sinyali verecektir. h değeri karar aralığı değeri olup prosesin kontrol altında olması durumundaki ARL'yi sağlayacak şekilde seçilir. Referans değeri olan k ise COT metodu için değişken sayısının kareköküne eşit olacak şekilde tespit edilir.⁶⁷ Karar aralığı değeri $h=0$ olduğunda COT metodu çok değişkenli Shewhart kontrol grafiğine (Hotelling T^2 kontrol grafiği) dönüşür.⁶⁸

T^2 ve T istatistiklerine dayalı çok değişkenli Shewhart kontrol grafikleri birbirlerine eşit olmalarına rağmen, T^2 ve T istatistiklerine dayalı olan CUSUM

⁶⁴ Wierda; Agm., s.161.

⁶⁵ Crosier; Agm., 1988, s.295.

⁶⁶ Wierda; Agm., s.161.

⁶⁷ Crosier; Agm., 1988, s.292.

⁶⁸ Crosier; Agm., 1986, s.192.

metotları birbirlerine eşit değildir. Dolayısıyla burada izah edilen COT metodunda, kümülatif uzaklıkların kareleri yerine kümülatif uzaklık değerleri alınarak işlemler yapılır.⁶⁹ Sözü geçen kümülatif uzaklıklar, gözlem vektörünü skalere indirgemek için kullanılır. Elde edilen bu skaler değer tek değişkenli CUSUM kontrol grafiğinin düzenlenmesinde kullanılabilir.⁷⁰

COT metodunun çok değişkenli Shewhart kontrol grafiklerine göre birkaç üstünlüğü vardır. Bunların ilki, COT metodunun proses ortalamasında meydana gelebilecek spesifik bir kaymayı tespit etmek amacıyla düzenlenebilmesidir. İkincisi, CUSUM kontrol grafiklerinin avantajları COT metodunda da mevcuttur. CUSUM kontrol grafiğinin küçük kaymaların tespit edilmesinde etkili olması ve prosesin kontrol dışı durumunu hızlı bir şekilde tespit etmesi örnek olarak verilebilir.⁷¹ Bu avantajlarına rağmen COT metodu proses ortalamasında bir kayma olduğunda bu kaymanın yönü hakkında bilgi verememektedir.⁷²

Croiser (1988), yaptığı çalışmada geliştirmiş olduğu çok değişkenli CUSUM metodunu, COT metodunu ve Hotelling T^2 kontrol grafiğini karşılaştırmıştır. B. karşılaştırma sonucunda hem çok değişkenli CUSUM metodu hem de COT metodunun proses ortalamasında meydana gelebilecek küçük kaymaları Hotelling T^2 kontrol grafiğinden daha hızlı bir şekilde tespit ettiklerini bulmuştur. Ayrıca COT metodundan ziyade çok değişkenli CUSUM metodu ile prosesin daha hızlı kontrol edileceğini belirtmiştir. Son olarak, proses ortalamasında bir kayma meydana geldiğinde CUSUM vektörünün bu kaymanın yönünü belirtmesinden dolayı çok değişkenli CUSUM metodunun COT metoduna tercih edilebileceğini ifade etmiştir.⁷³

Aşağıda hem Croiser'in çok değişkenli CUSUM metodunun için hem de COT metodunun nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 3-3) Croiser'in çok değişkenli CUSUM metodu ve COT metodunun düzenlenmesi için Tablo 3-2'de verilen iki değişkene ait veriler kullanılacaktır. Tabloda birim varyans ve 0.5 korelasyon değeri ile iki değişkenli normal dağılım için sayısal değerler verilmiştir. İlk beş gözlem değeri için proses ortalaması (0, 0) iken son beş

⁶⁹ Crosier; Agm., 1988, s.292.

⁷⁰ Wierda; Agm., s.162.

⁷¹ Crosier; Agm., 1988, s.293-294.

⁷² Wierda; Agm., s.162.

⁷³ Crosier; Agm., 1988, s.300.

gözleme ait proses ortalaması ise (1, 2) olarak hesaplanmıştır.

Tablo 3-2: İki kalite değişkenine ait veriler

n	Gözlem Değerleri		T ²	COT metodu		MCUSUM vektörü		Y
	X ₁	X ₂		T	S	S ₁	S ₂	
1	-1.19	0.59	3.2	1.81	0.40	-0.86	0.43	1.31
2	0.12	0.90	0.9	0.98	0.00	-0.56	1.01	1.60
3	-1.69	0.40	4.9	2.22	0.81	-1.95	1.22	3.20
4	0.30	0.46	0.2	0.47	0.00	-1.40	1.43	2.83
5	0.89	-0.75	2.7	1.64	0.23	-0.30	0.39	0.69
6	0.82	0.98	1.1	1.05	0.00	0.33	0.88	0.89
7	-0.30	2.28	7.9	2.82	1.41	0.03	2.72	3.13
8	0.63	1.75	3.1	1.77	1.77	0.59	4.01	4.33
9	1.56	1.58	3.2	1.81	2.18	1.96	5.09	5.14
10	1.46	3.05	9.3	3.05	3.82	3.21	7.65	7.68*
				ÜKS=3.26		h=4.04		h=5.5

Kaynak: Ronald B. Croiser; "Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality Control Schemes", Technometrics, Vol:30, No:3, 1988, s.293.

Tabloda yer alan S_1 ve S_2 değerleri Formül 3-48'de verilen çok değişkenli CUSUM vektörünün elemanlarını gösterirken, Y değeri Formül 3-49'da verilen eşitlik kullanılarak hesaplanmıştır. Çok değişkenli CUSUM metodu için k referans değeri 0.5 ve COT metodu için k değeri 1.41 olarak alınmıştır. Bu k değerleri genelleştirilmiş standart sapmayla bir kaymanın tespit edilmesi için gerekli olan optimal değerlerdir. Kontrol dışı sinyalinin tespit edilmesi için gereken kriter olan h değeri ise her bir metot için proses kontrol altında iken $ARL=200$ olacak şekilde belirlenir.

Çok değişkenli CUSUM metodu bir kontrol dışı sinyali verdiğinde CUSUM vektörünün elemanları hem pozitif hem de bireysel gözlem değerlerinin ortalamalarının oranı yaklaşık olarak 1/2'dir. Bu değerler proses ortalamasında bir kayma olduğuna dair işaretler verir. Tabloda görüldüğü üzere 10 numaralı gözlem değeri için hesaplanan Y değeri 7.68 olarak hesaplanmıştır. Söz konusu değer, $h=5.50$ değerinden büyük olduğu için bu örneğin alınması zamanında proses kontrol dışına çıkmıştır. Fakat yapılan bu işlemler proses ortalamasını tahmin etmek için bir mekanizma sağlamaz.⁷⁴

⁷⁴ Crosier; Agm., 1988, s.293.

3.2.5. Pignatiello ve Runger'in çok değişkenli CUSUM metotları

Bu bölümde Pignatiello ve Runger (1990) tarafından geliştirilmiş olan iki çok değişkenli CUSUM metodu incelenecektir. Söz konusu metotlar kovaryans matrisinin kullanılmasına dayanır. Her iki çok değişkenli CUSUM metodu ortalama vektörünün karesel biçimini kullanılır. Metotlar arasındaki farklılık ise kümülatif toplamlar arasındaki farklılıktan kaynaklanır.

İkinci metot olan MC2 metodunda her bir X gözlem değeri için karesel form hesaplanır ve daha sonra bu karesel formların kümülatif değerleri elde edilirken, birinci metot olan MC1 metodunda önce karesel formlar elde edilir daha sonra X gözlem vektörünün kümülatif değerleri hesaplanır.

3.2.5.1. Pignatiello ve Runger'in MC1 metodu

Bu metotta çok değişkenli toplam değerleri dikkate alınır. Toplam değer,

$$C_t = \sum_{i=t-n_t+1}^t (X_i - \mu_0) \quad (3.51)$$

formülü ile hesaplanır Formüldeki n_t değeri, CUSUM'ın en çok tekrar eden değerinden (yani sıfır değeri) sonraki alt grup sayısıdır. Daha sonra $(1/n_t)$ C_t değeri,

$$\frac{1}{n_t} C_t = \left(\frac{1}{n_t} \sum_{i=t-n_t+1}^t X_i \right) - \mu_0 \quad (3.52)$$

şeklinde yazılabilir. $(1/n_t)$ C_t vektörü kümülatif örnek ortalaması ile hedef değer arasındaki farkı gösterir. Dolayısıyla t zamandaki çok değişkenli proses ortalaması; $(1/n_t) C_t + \mu_0$ olarak tahmin edilebilir. C_t ise

$$\|C_t\| = \sqrt{C_t' \Sigma^{-1} C_t} \quad (3.53)$$

şekilde ifade edilir. C_t değeri, proses için tahmin edilen ortalamanın hedef değerden uzaklığının bir ölçüsü olarak düşünülebilir. Böylece çok değişkenli kontrol grafiği $MC1$ istatistiğinin tanımlanması ile,

$$MC1_t = \max\{\|C_t\| - kn_t, 0\} \quad (3.54)$$

şeklinde düzenlenebilir. $MC1_{t-1} > 0$ ise $n_{t-1}+1$ olurken; aksi durumda, yani $MC1_{t-1} < 0$ ise $n_t = 1$ 'dir. Burada k referans değeri ($k > 0$) olacak şekilde seçilir. $MC1_t$ değerlerinin kontrol grafiği üzerinde işaretlenmesi ile $MC1$ kontrol grafiği düzenlenmiş olunur. Söz

konusu grafikte bir de üst kontrol sınırı (ÜKS) çizilir. $MC1_t$ değeri üst kontrol sınırını aştığında, prosesin kontrol dışına çıktığına karar verilir.⁷⁵

3.2.5.2. Pignatiello ve Runger'in MC2 metodu

Çok değişkenli CUSUM istatistiğini kümülatif örnek ortalama değerinin μ_0 'dan uzaklığının karesine dayandırmaktan ziyade her bir ortalama değerinin μ_0 'dan uzaklığının karesi göz önünde bulundurulabilir. Daha sonra bu kareli uzaklık değerleri kümülatif olarak toplanır. Buradan, yukarıda verilen $MC1$ metoduna alternatif olarak t 'inci örnek ortalamasının μ_0 hedef değerden uzaklığının karesi D_t^2 kullanılabilir. D_t^2 değeri,

$$D_t^2 = (X_t - \mu_0)' \Sigma^{-1} (X_t - \mu_0) \quad (3.54)$$

formülü ile hesaplanır. Burada D_t^2 istatistiği, proses hedef değerde iken p serbestlik dereceli ki-kare dağılımı gösterirken; proses hedef değerden saptığında ise merkezi olmayan ki-kare dağılımı gösterir. Böylece tek yönlü tek değişkenli CUSUM metodu,

$$MC2_t = \max \{ 0, MC2_{t-1} + D_t^2 - k \} \quad (3.55)$$

şeklinde düzenlenir. Eşitlikte başlangıç değeri olan $MC2_0 = 0$ olarak alınır. Formülde k referans değerini ifade etmektedir. k referans değerinin nasıl tespit edileceği aşağıda anlatılacaktır. Burada izah edilen çok değişkenli CUSUM metodunda $MC2_t$ değeri, H_2 üst kontrol sınırını aştığında prosesin kontrol dışına çıktığına karar verilir.⁷⁶

Referans değerinin belirlenmesi: Prosesin kontrol altında olduğu durum μ_0 ve kontrol dışı durum ise μ_1 gösterilirse $H_0: \mu = \mu_0$ ve $H_1: \mu = \mu_1$ hipotezleri altında tek değişkenli CUSUM metodunda k referans değeri çoğu zaman proses ortalamasının beklenen değerinin ortalaması olacak şekilde alınır. k referans değeri, Wald'un ardışık olasılık oran testinden elde edilen CUSUM metodu takip edilerek bulunur. $MC2$ metodunda prosesin kontrol altında olması yada olmaması durumları için, gözlem değerlerinin merkezi yada merkezi olmayan ki-kare dağılımları simetrik olmamasına rağmen aynı yaklaşım kullanılabilir. Bu durumda $MC2$ metodu için k değeri,

$$p + 0.5\lambda^2(\mu_1) \quad (3.56)$$

⁷⁵ Joseph J. Pignatiello – George C. Runger; “Comparisons of Multivariate CUSUM Charts”, Journal of Quality Technology, Vol:22, No:3, 1990, s.177.

⁷⁶ Pignatiello – Runger; Agm., s.178.

formülü ile hesaplanır. *MC1* metodu, diğer CUSUM metotlarından farklı olduğundan dolayı k referans değeri benzer şekilde elde edilemez. Bunun yerine k değeri, μ_1 ile μ_0 arasındaki farkın yarısı olacak şekilde seçilir. Bu durumda k değeri,

$$k = 0.5\lambda(\mu_1) \quad (3.57)$$

şeklinde hesaplanır. Burada her iki çok değişkenli CUSUM metodu için k referans değerinin, μ_1 ile μ_0 arasındaki farkın büyüklüğüne bağlı olduğuna dikkat edilmelidir.⁷⁷

3.2.6. Regresyona uyarlanmış değişkenlere dayalı çok değişkenli CUSUM metodu

Hawkins (1991), “Regresyona uyarlama (Regression adjustment)” adı verilen çok faydalı bir metot geliştirmiştir. Metot esas itibarıyla diğer değişkenlerle beraber regresyon denkleminde sokulmuş olan her bir değişkenden elde edilen artık değerlerin (residual) tek değişkenli kontrol grafiği üzerinde işaretlenmesi ile elde edilmektedir. Söz konusu metot; ilk elde edilen verilere kontrol grafiği düzenlemek amacıyla sadece en küçük kareler regresyonu gerekli olduğunda bireysel gözlem değerlerine ve pratikte sık karşılaşılan çok değişkenli veri setine sahip proseslere uygulanabilir.⁷⁸

Proses, girdi ve çıktı değişken setleri gibi farklı değişkenlere sahip olduğunda regresyona uyarlama metodunun çok önemli bir uygulaması ortaya çıkar. Bu tür prosesler “kademeli proses” olarak adlandırılır. Kademeli proseslerin tipik bir örneği, seri üretimin yapıldığı proseslerdir. Bu tür proseslere, materyallerin peş peşe zenginleştirme aşamasından geçtiği madeni yüzer tanklar örnek olarak verilebilir. Böyle bir proseste herhangi bir aşamanın sonunda üretilen ürünün kalitesi, sadece aşamanın doğru bir şekilde icra edilip edilmediğine değil, aynı zamanda icra edilen bir önceki aşamanın da ne kadar iyi yapıldığına bağlıdır. Proses herhangi bir aşamada kontrol dışına çıktığında; bu durum, sadece bu aşamada değil aynı zamanda takip eden aşamaların bazılarında veya tümünde ürün ile ilgili ölçümleri etkileyecektir. Bu durum arzu edilmeyen sonuçlar doğurabilir. Örneğin prosesin kontrol dışına çıktığı aşamayı takip eden aşamalarda elde edilen ölçüm değerleri, proses kontrol altında olduğu halde kontrol dışına çıkmış gibi görünmesine neden olabilir. Bu yüzden herhangi bir aşamada problemi teşhis ederken bir önceki aşamaların etkileri hesaba katılmalıdır.⁷⁹

⁷⁷ Pignatiello – Runger; Agm., s.178.

⁷⁸ Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, 4th Edition, John Wiley and Sons. Inc., 2001, s.529.

⁷⁹ Douglas M. Hawkins; “Regression Adjustment for Variables in Multivariate Quality Control”, Journal of Quality Technology, Vol:25, No:3, 1993, s.170.

p adet elemana sahip bir X vektörü göz önünde bulundursun ve bu vektörün çok değişkenli normal dağılım gösterdiği farz edilsin [$X \sim N(\mu, \Sigma)$]. İncelenen proses kontrol altında iken $\mu = \mu_0$ ve $\Sigma = \Sigma_0$ 'dır. Kalite kontrol uygulamalarında genelde μ_0^* ortalama vektörü ve Σ_0 kovaryans matrisinin bilindiği kabul edilir. Pratikte bu parametreler prosesten elde edilen örnek değerleri kullanılarak tahmin edilir. Alınan örnek büyüklüğünün yeteri kadar büyük olması ve parametrelerin bilinmesi durumunda küçük bir hata yapılır. Ayrıca zaman içerisinde elde edilen ölçüm değerlerine ait vektörlerin birbirinden bağımsız olduğu varsayılır.⁸⁰

T^2 istatistiğinin önemli bir özelliği mevcuttur. Bu özellik, X 'in herhangi bir elemanını veya tüm elemanlarını etkileyen spesifikasyon vektöründen sapmalarla ve tamamen doğal bir yolla meydana gelen sapmalarla ilgilenildiğidir. T^2 istatistiği tek yönlü test edilerek bu varsayım tahmin edilir. Söz konusu testte sabit bir test istatistiği elde etmeye odaklanılır. Bu şartlar altında T^2 istatistiğinden daha etkili ve kolay yorumlanabilir bir test istatistiği bulunabilir. Bu fikir doğrultusunda aşağıda izah edilecek metod geliştirilir.

Metodun izah edilmesi amacıyla ilk olarak bazı notasyonlar verilecektir. Σ_0 ve Σ_0^{-1} 'nin i, j 'inci elemanları için sırasıyla σ_{ij} ve σ^{ij} yazılacaktır. X 'in diğer tüm elemanları ile ilgili X_i 'nin (X 'in i 'inci elemanı) çoklu regresyonu göz önünde bulundursun. Söz konusu regresyon denklemi,

$$(X_i - \mu_i) = \sum_{j \neq i} \beta_{ij} (X_j - \mu_j) + \varepsilon_i \quad (3.58)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca ε_i 'nin varyansı olan artık varyans için τ_{ii} değeri ise

$$\tau_{ii} = \sigma_{ii} - \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \sigma_{ij} \quad (3.59)$$

şeklindedir. $\sigma^{ii} = \tau_{ii}^{-1}$ olduğunda Formül 3-59'daki eşitlik,

$$\sigma^{ij} = -\beta_{ij} / \tau_{ii} \rightarrow (i \neq j) \quad (3.60)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Proses ortalamasında ortaya çıkabilecek bir kaymayı tam olarak tespit edememek yerine, proses dağılımının $N(\mu_0 + \delta e_i, \Sigma_0)$ değerine kaydığı kontrol dışı durumun i 'nci değişkenin ortalamasını etkilediği varsayılmaktadır. Burada e_i , i 'inci satırda 1 ve diğer yerlerde sıfır değerini alan sütun vektörünü ve skaler δ değeri ise kaymanın büyüklüğünü göstermektedir. Bu izahlardan sonra, $\delta = 0$

⁸⁰ Douglas M. Hawkins; "Multivariate Quality Control Based on Regression – Adjusted Variables", Technometrics, Vol:33, No:1, 1991, s.63.

hipotezini test etmek için gereken olabilirlik oran testinin test istatistiği,

$$Z_i = \frac{\left[(X_i - \mu_i) - \sum_{j \neq i} \beta_{ij} (X_j - \mu_j) \right]}{\tau_{ii}^{1/2}} \quad (3.61)$$

şeklinde bulunur. Söz konusu istatistiğin sıfır dağılımı $N(0, 1)$ 'dir. Yukarıda ifade edilen skaler Z_i istatistiği ise, X_i değerinin X 'in diğer tüm elemanları ile ilişkilendirildiği durumda artık değeri ifade eder. Artık değerler (residual) vektörü,

$$Y = \Sigma_0^{-1} (X - \mu_0) \quad (3.62)$$

şeklinde kolayca bulunabilir. Formül 3-60 göz önünde bulundurulduğunda, i 'inci değişken diğer tüm elemanlarla ilişkilendirildiğinde Y 'nin i 'inci elemanı, regresyon artık değeridir. Proses kontrol altında olduğunda $Y \sim N(0, \Sigma_0^{-1})$ 'dir. Y değeri yeniden düzenlendiğinde Z istatistiği,

$$Z = [\text{köşegen } (\Sigma_0^{-1})]^{-1/2} Y = A (X - \mu_0) \quad (3.63)$$

Şeklinde ifade edilebilir. Burada A dönüşüm matrisi ise,

$$A = [\text{köşegen } (\Sigma_0^{-1})]^{-1/2} \Sigma_0^{-1} \quad (3.64)$$

şeklindedir. $Z \sim N(0, B)$ tanımından anlaşıldığı gibi B istatistiği,

$$B = [\text{köşegen } (\Sigma_0^{-1})]^{-1/2} \Sigma_0^{-1} [\text{köşegen } (\Sigma_0^{-1})]^{-1/2} \quad (3.65)$$

formülü ile ifade edilir. Bu izahlardan sonra X , Z ve T^2 istatistikleri arasındaki ilişki incelenebilir. Özellikle T^2 istatistiğinden yararlanılarak,

$$T^2 = (X - \mu_0)^T \sum_0^{-1} (X - \mu_0) \quad (3.66)$$

$$= \sum_{i=1}^p (X_i - \mu_i) Y_i$$

formülleri yazılır. Ayrıca Z istatistiği kullanılarak formül,

$$T^2 = \sum_{i=1}^p W_i \quad (3.67)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Formülde yer alan W_i ifadesi ise

$$W_i = (X_i - \mu_i) Z_i \tau_{ii}^{-1/2} \quad (3.68)$$

formülü ile hesaplanır. Bu hesaplamalardan anlaşılabacağı üzere; T^2 istatistiği, Z istatistiği kullanılarak bir prosesin kontrol edilmesi aşamasında ortaya çıkan problemlerin türevidir. Burada izah edilen metodun iki kullanım şekli vardır. Birincisi her bir Z_i

değerinin ayrı ayrı gözlemlendiği bireysel kontrol grafiğine dayalı yaklaşım, ikincisi ise kontrol dışı sinyalinin tespit edilmesinde kullanılan p adet kontrol grafiğinden hesaplanan tek bir ölçünün ele alındığı grup kontrol grafiklerine dayalı yaklaşımdır.⁸¹

1-Bireysel kontrol grafiğine dayalı yaklaşım:

Yukarıda verilen Z vektörü, X gözlem vektöründeki bireysel gözlem değerlerinin ayrı ayrı kontrol edilmesine imkan sağlar. Böylece Z vektöründeki her bir değişken için bir kontrol grafiği olacak şekilde p adet kontrol grafiği düzenlenir. i 'inci kontrol grafiği, X gözlem vektörünün i 'inci değişkeni ile özdeşleştirilir. Daha sonra i 'inci değişken için düzenlenen kontrol grafiği, söz konusu değişkenin diğer değişkenlerin kontrol durumundaki koşullu dağılımına uyup uymadığını test eder. Metodu uygulamak amacıyla aşağıdaki eşitliklerden yararlanılır. Burada CUSUM kontrol grafiğinde kullanılan eşitliklerden yararlanılır.

İlk olarak $L_{i0}^+ = L_{i0}^- = S_{i0}^+ = S_{i0}^- = 0$ olduğu kabul edilir.

$$W_{ni} = \frac{(|Z_{ni}|^{1/2} - 0.822)}{0.349} \quad (3.69)$$

$$L_{in}^+ = \max(0, L_{i,n-1}^+ + Z_{ni} - k) \quad (3.70)$$

$$L_{in}^- = \min(0, L_{i,n-1}^- + Z_{ni} + k) \quad (3.71)$$

$$S_{in}^+ = \max(0, S_{i,n-1}^+ + W_{ni} - k) \quad (3.72)$$

$$S_{in}^- = \min(0, S_{i,n-1}^- + W_{ni} + k) \quad (3.73)$$

CUSUM'ın L^+ ve L^- karar aralıkları, proses ortalamasında ortaya çıkabilecek yukarı yada aşağı yöndeki kaymaları tespit etmede kullanılır. L^+ , yukarı ve L^- ise aşağı yöndeki kaymayı tespit etmede kullanılır. CUSUM'ın S^+ ve S^- istatistikleri ise sırasıyla yukarı yada aşağı yöndeki değişkenliği test eder. Burada Şayet $Z \sim N(0, 1)$ ise $|Z|^{1/2}$ değeri $N(0.822, 0.349^2)$ dağılımına oldukça yaklaşıp. Ayrıca Z değerinin ölçeğinde ortaya çıkan değişiklikler $|Z|^{1/2}$ değerinin yönünü etkiler. Yukarıda verilen dört CUSUM eşitliğinin tamamı bir kontrol grafiği üzerinde işaretlendiğinde, yön ve ölçek için etkili bir CUSUM kontrol metodu elde edilir. Bu dört CUSUM değerinden herhangi biri, h karar aralığını aştığında proses kontrol dışı sinyali verir.

Söz konusu kontrol grafikleri her bir değişkenin $N(0, 1)$ dağılımı gösterdiği

⁸¹ Hawkins; Agm., 1991, s.63-64.

rasgele değişkenlerden oluştuğundan dolayı bu grafikler CUSUM kontrol grafiğinin dizayn edildiği gibi düzenlenebilir.⁸²

2-Grup kontrol grafiklerine dayalı yaklaşım:

Bireysel gözlem değerleriyle ilişkili kontrol dışı sinyali ve bu değişkenlerde ortaya çıkan sapmaları tespit etmek amacıyla T^2 istatistiğinden ziyade Z istatistiği kullanılarak daha etkili sonuçlar elde edilir. Z_i istatistiği kullanılarak düzenlenen bireysel kontrol grafikleri ile faydalı sonuçlar elde edilmesine rağmen, bazı uygulamalarda bireysel kontrol grafiklerinin ayrıntılarına ihtiyaç duyulmaz. Bu tür uygulamalarda farklı Z_i istatistikleri için düzenlenen kontrol grafiklerinden elde edilen tek bir gösterge kullanılır. Bu metodun uygulanması için iki yol önerilmektedir. Bunlardan birincisi,

$$MCZ = \max \left\{ \max (L_{ni}^+, -L_{ni}^-) \right\} \quad (3.74)$$

iken diğeri,

$$ZNO = \sum_{i=1}^p (L_{ni}^+ + L_{ni}^-)^2 \quad (3.75)$$

şeklindedir. Burada MCZ , Z istatistiği için düzenlenen CUSUM metoduna uygulanan Woodall ve Ncube'nin ortaya koyduğu MCUSUM istatistiğini ifade ederken; ZNO ise proses ortalamasında ortaya çıkabilecek yukarı yada aşağı yöndeki kaymaları tespit etmek için elde edilen CUSUM vektörlerinin kareli öklit normudur. MCZ ve ZNO değerleri, istenilen ortalama işletim uzunluğuna karşılık gelen başlangıç değerini aştıklarında kontrol dışı sinyali elde edilir.

Bu kriterler L CUSUM değerlerine uygulanarak prosesin her iki yöndeki kontrolü yapılır. Bu kriterler aynı zamanda proseste ortaya çıkabilecek kaymaları tespit etmek amacıyla S^+ ve S^- kontrol grafiklerine de uygulanabilir.⁸³

Ortaya çıkabilecek bir kontrol dışı sinyalinin kolaylıkla yorumlanabilmesi MCZ istatistiğinin sağladığı bir avantajdır. Buna karşılık ZNO istatistiğinde kontrol dışı sinyali kolaylıkla yorumlanamaz. Ancak ZNO istatistiğine en fazla katkıyı hangi değişkenin yaptığı belirlenebilir.⁸⁴

Bu bölümde regresyona uyarlanmış değişkenlere dayalı çok değişkenli CUSUM

⁸² Hawkins; Agm., 1991, s.65.

⁸³ Hawkins; Agm., 1991, s.65.

⁸⁴ Wierda; Agm., s.163.

metodu bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 3-4) Regresyona uyarlanmış değişkenlere dayalı çok değişkenli CUSUM metodunu izah etmek için Tablo 3-3'te verilen veriler kullanılacaktır. Beş değişkene ait veriler kullanılarak örnek ortalamaları ve standart sapma değerleri hesaplanarak tabloda verilmiştir.

Tablo 3-3: Beş değişken için hesaplanan çok değişkenli özet istatistikler

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Ortalamalar					
	17.96	10.30	13.76	11.08	8.26
Standart sapmalar					
	1.8622	1.7053	1.7090	1.8718	2.2114
Korelasyon matrisi (Σ_0)					
X_1	1.0000	0.1388	0.3496	0.0829	0.2652
X_2	0.1388	1.0000	0.7324	0.9130	0.6932
X_3	0.3496	0.7324	1.0000	0.6824	0.8214
X_4	0.0829	0.9130	0.6824	1.0000	0.7640
X_5	0.2652	0.6932	0.8214	0.7640	1.0000
Korelasyon matrisinin tersi (Σ_0^{-1})					
X_1	1.2114	-0.1244	-0.5178	0.5311	-0.2155
X_2	-0.1244	7.9124	-2.7427	-6.9611	2.1191
X_3	-0.5178	-2.7427	4.3551	1.8037	-2.9168
X_4	0.5311	-6.9611	1.8037	8.7278	-3.4649
X_5	-0.2155	2.1191	-2.9168	-3.4649	4.6313
Dönüşüm matrisi: $A = [\text{köşegen } (\Sigma_0^{-1})]^{-1/2} \Sigma_0^{-1}$					
Z_1	1.1006	-0.1130	-0.4704	0.4826	-0.1958
Z_2	-0.0442	2.8129	-0.9750	-2.4747	0.7534
Z_3	-0.2481	-1.3142	2.0869	0.8643	-1.3977
Z_4	0.1798	-2.3563	0.6105	2.9543	-1.1728
Z_5	-0.1002	0.9847	-1.3554	-1.6100	2.1521
Z'nin korelasyon matrisi: $B = [\text{köşegen } (\Sigma_0^{-1})]^{-1/2} \Sigma_0^{-1} [\text{köşegen } (\Sigma_0^{-1})]^{-1/2}$					
Z_1	1.0000	-0.0403	-0.2255	0.1634	-0.0910
Z_2	-0.0403	1.0000	-0.4669	-0.8377	0.3499
Z_3	-0.2255	-0.4669	1.0000	0.2922	-0.6493
Z_4	0.1634	-0.8377	0.2922	1.0000	-0.5448
Z_5	-0.0910	0.3499	-0.6493	-0.5448	1.0000

Kaynak: Douglas M. Hawkins; "Multivariate Quality Control Based on Regression – Adjusted Variables", Technometrics, Vol:33, No:1, 1991, s.63.

Burada X gözlem vektörünü ve Z istatistiğini standartlaştırmak amacıyla kovaryans matrisi yerine korelasyon matrisi kullanılır. Hesaplamalarda gerekli olacak özet istatistikler de Tablo 3-3'te verilmiştir.

Tablo 3-3'te yer alan korelasyon matrisi Σ_0 incelendiğinde bazı değerlerin yüksek korelasyona sahip olduğu görülmektedir. Bu korelasyon değerleri, değişkenler arasında kuvvetli bir ilişkinin olduğunu ve tek değişkenli kontrol metotlarından ziyade çok değişkenli kontrol metotlarının daha etkili olduğunu gösterir. Tabloda ayrıca Formül 3-64'ten elde edilen A dönüşüm matrisi ve Formül 3-65'ten elde edilen Z vektörlerinin korelasyon matrisi olan B matrisi verilmiştir.

A katsayıları, proste X 'in kullanımıyla tek değişkenli kontrol metodundan ziyade Z istatistiği kullanılarak çok değişkenli kontrol metodunun nispi etkisinin hızlı bir görsel teşhisini sağlar.

A dönüşüm matrisi özdeşlik matrisine benzer olduğunda, X vektörünün Z istatistiğine dönüşümünde proses ortalamasında küçük bir kayma olabilir. Bu nedenle bu metot ile proses incelenirken değişkenler arasından tek bir değişkende ortaya çıkabilecek kayma tek değişkenli kontrol prosedürlerinden daha etkili bir şekilde tespit edilemez. Buna karşılık, A matrisindeki sayıca büyük elamanlar (özellikle köşegen elemanları) proses ortalamasında ortaya çıkabilecek büyük kaymaları gösterir.

Örneğin, A matrisinin $(2, 2)$ elemanı, X_2 'nin ortalamasında δ standart sapmalık bir kayma meydana geldiğinde Z_2 'nin ortalamasında $(2.8 \times \delta)$ standart sapmalık daha büyük bir kayma meydana getirdiğini gösterir. Bu nedenle prosesin kontrol edilmesi aşamasında Z_2 'nin kullanılması X_2 'nin kullanılmasından daha etkili sonuçlar verir. A matrisi, ayrıca μ_0 'ın birden daha fazla elemanında meydana gelebilecek değişikliklerin etkilerini de gösterir. A vektörü, $\Delta\mu$ gibi bir değere kaydıığında; bu kayma Z 'de, $A\Delta\mu$ büyüklüğünde bir kaymaya neden olur.⁸⁵

İkinci bölümde ortalama işletim uzunluğu (ARL) değerinden bahsedilmiş fakat herhangi bir karşılaştırma değerleri verilmemişti. Bu bölümde, ikinci bölümde anlatılan Hotelling T^2 kontrol grafiği ile bu bölümde anlatılan çok değişkenli CUSUM metotları ortalama işletim uzunluğu bakımından karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırmada araştırmacılar tarafından elde edilen ARL değerleri tablolar halinde verilerek söz konusu değerler yorumlanacaktır.

⁸⁵ Hawkins; Agm., 1991, s.67-68.

3.3. Hotelling T^2 Kontrol Grafiği İle Çok Değişkenli Kümülatif Toplam (MCUSUM) Kontrol Metotlarının ARL Bakımından Karşılaştırılması

Pignatiello ve Runger (1990), Hotelling T^2 kontrol grafiği ile çok değişkenli kümülatif toplam (MCUSUM) kontrol metotlarını ortalama işletim uzunluğu bakımından karşılaştırmışlardır. Bu karşılaştırmada aşağıda sıralanan çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları kullanılmıştır:

- * Hotelling T^2 kontrol grafiği,
- * Woodall ve Ncube'in çok değişkenli CUSUM metodu,
- * Pignatiello ve Runger'in MC1 metodu,
- * Pignatiello ve Runger'in MC2 metodu.

Söz konusu metotlar kullanılarak farklı değişkenler için ARL değerleri belirlenerek tablolar halinde verilmiştir. $p=2, 3$ ve 10 kalite değişkenleri kullanılarak proses ortalamasında ortaya çıkabilecek kaymalar için söz konusu metotlara ait ARL değerleri elde edilerek sırasıyla Tablo 3-4, Tablo 3-5 ve Tablo 3-6'da verilmiştir. Bu karşılaştırmada, $\mu=0$ olarak alınan hedef ortalamasından $\delta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ ve 3.0 büyüklüklerindeki kayma değerleri ele alınmıştır.

Tablo 3-4: $p=2$ değişken için ARL karşılaştırması

δ	MC1	MC2	W&N	T^2
0.0	202.81 (2.563)	2000.0	200.45 (2.426)	200.3
0.5	31.31 (0.339)	85.3	33.69 (0.349)	115.7
1.0	9.28 (0.066)	22.1	9.92 (0.068)	42.0
1.5	5.23 (0.027)	8.9	5.58 (0.029)	15.8
2.0	3.69 (0.016)	4.9	3.89 (0.016)	6.9
2.5	2.91 (0.011)	3.2	3.02 (0.011)	3.5
3.0	2.40 (0.008)	2.4	2.51 (0.008)	2.2
	k=0.50 ÜKS=4.75	k=2.50 ÜKS=13.0	k=0.50 h=4.83	ÜKS=10.6

W&N: Woodall ve Ncube'in çok değişkenli CUSUM metodu

Kaynak: Joseph J. Pignatiello – George C. Runger; "Comparisons of Multivariate CUSUM Charts", Journal of Quality Technology, Vol:22, No:3, 1990, s.180.

$p=2$ değişken için düzenlenen Tablo 3-4'deki veriler incelendiğinde, Pignatiello ve Runger'in MC1 metodunun diğer çok değişkenli CUSUM metotlarından daha küçük ARL değerlerine sahip olduğu görülür. MC1 metodu diğer çok değişkenli CUSUM metotlarından daha küçük ARL değerlerine sahip olduğu halde söz konusu metot Hotelling T^2 kontrol grafiği ile karşılaştırıldığında ise proses ortalamasında ortaya çıkabilecek büyük kayma değerlerinde T^2 kontrol grafiğinin daha küçük ARL değerlerine sahip olduğu görülür.

İki değişkenli normal dağılıma sahip bir proseste, değişkenlerden birinin ortalaması hedef değerde kalıp öteki değişkenin ortalaması hedef değerden kaydığında bu durum için bir karşılaştırma yapıldığında ise Pignatiello ve Runger'in MC1 metodu ile Woodall ve Ncube'in çok değişkenli CUSUM metodunun benzer sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Tablo incelendiğinde, hedef değerden 1.0 veya daha büyük kaymalar için söz konusu metotların ARL değerleri arasında yaklaşık olarak 0.6'dan daha küçük bir farklılık olduğu görülür.

Tablo 3-5: $p=3$ değişken için ARL karşılaştırması

δ	MC1	MC2	W&N	T^2
0.0	199.74 (2.571)	199.7	200.27 (2.481)	201.1
0.5	33.54 (0.362)	95.8	37.65 (0.386)	129.8
1.0	10.13 (0.071)	27.0	10.69 (0.071)	52.6
1.5	5.66 (0.028)	11.0	5.92 (0.029)	20.5
2.0	4.00 (0.016)	6.0	4.17 (0.017)	8.8
2.5	3.17 (0.011)	3.9	3.21 (0.012)	4.4
3.0	2.63 (0.008)	2.8	2.66 (0.009)	2.6
k=0.50		k=3.50	k=0.50	ÜKS=12.8
ÜKS=5.48		ÜKS=17.4	h=5.22	

W&N: Woodall ve Ncube'in çok değişkenli CUSUM metodu

Kaynak: Joseph J. Pignatiello – George C. Runger; "Comparisons of Multivariate CUSUM Charts", Journal of Quality Technology, Vol:22, No:3, 1990, s.180.

$p=3$ değişken ele alınarak elde edilen Tablo 3-5 incelendiğinde, $p=2$ değişkende olduğu gibi, Pignatiello ve Runger'in MC1 metodunun, 3.0 büyüklüğündeki kayma

değerleri hariç diğer kayma değerleri için diğer çok değişkenli metotlardan daha küçük ARL değerlerine sahip olduğu görülür. 3.0 büyüklüğündeki kayma değerleri için elde edilen ARL değerleri incelendiğinde ise tüm metotlar için elde edilen ARL değerlerinin birbirine çok yakın olduğu görülmektedir.

$p=2$ değişken için yapılan karşılaştırmada ifade edilen duruma benzer bir karşılaştırma yapıldığında gene Pignatiello ve Runger'in MC1 metodu ile Woodall ve Ncube'in çok değişkenli CUSUM metodunun benzer sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Üç değişkenden ikisi hedef değerde kalıp diğer değişken hedef değerden saptığı durumlar için karşılaştırma yapılmıştır. Bu karşılaştırmada hedef değerden 1.0 veya daha büyük kaymalar için söz konusu metotların ARL değerleri arasında yaklaşık olarak 0.4'ten daha küçük bir farklılık bulunmaktadır.

Tablo 3-6: $p=10$ değişken için ARL karşılaştırması

δ	MC1	MC2	W&N	T^2
0.0	201.57 (2.566)	200.0	200.38 (2.502)	200.8
0.5	43.86 (0.506)	126.9	48.22 (0.491)	162.0
1.0	12.62 (0.074)	49.1	12.93 (0.079)	92.8
1.5	7.66 (0.031)	21.5	7.10 (0.032)	44.7
2.0	5.66 (0.018)	11.8	4.91 (0.018)	20.6
2.5	4.55 (0.013)	7.5	3.81 (0.013)	9.9
3.0	3.84 (0.010)	5.3	3.12 (0.009)	5.2
k=0.50		k=10.5	k=0.50	ÜKS=25.2
ÜKS=9.55		ÜKS=38.1	h=6.40	

W&N: Woodall ve Ncube'in çok değişkenli CUSUM metodu

Kaynak: Joseph J. Pignatiello – George C. Runger; "Comparisons of Multivariate CUSUM Charts", Journal of Quality Technology, Vol:22, No:3, 1990, s.180.

Tablo 3-6 incelendiğinde ise proses ortalamasından 1.0'den daha büyük kayma değerleri için Pignatiello ve Runger'in MC1 metodunun diğer çok değişkenli metotlardan daha küçük ARL değerlerine sahip olduğu anlaşılır. Diğer metotlarla karşılaştırıldığında, Woodall ve Ncube'in çok değişkenli CUSUM metodu 1.5'ten daha büyük kayma değerlerinde diğer metotlardan daha küçük ARL değerleri vermektedir.

Hedef değerdan 1.0'den daha büyük kaymalar için karşılaştırılan metotların ARL değerdleri arasında yaklaşık olarak 0.8 gibi bir farklılık bulunmaktadır.

ARL karşılaştırması için verilen tüm tablolardaki veriler incelendiğinde, çok değışkenli normal dağılıma sahip bir proses ortalamasında ortaya çıkabilecek küçük kaymaları tespit etmede karşılaştırma yapılan metotlar arasında en iyi iki metodun; Pignatiello ve Runger'in MC1 metodu ile Woodall ve Ncube'in çok değışkenli CUSUM metodu olduğu söylenebilir. Bu metotlar, $p-1$ değışken hedef değerde kalıp p değışken hedef değerdan saptığında benzer ARL değerdleri vermektedir.⁸⁶

⁸⁶ Pignatiello – Runger; Agm., s.179-181.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. ÇOK DEĞİŞKENLİ ÜSTEL AĞIRLIKLİ HAREKETLİ ORTALAMA (MEWMA) KONTROL GRAFİĞİ

Çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafiği izah edilmeden önce konunun daha iyi anlaşılması amacıyla, tek değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (EWMA) kontrol grafiği kısaca izah edilecektir.

4.1. Tek Değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama (EWMA) Kontrol Grafiği

Üstel ağırlıklı hareketli ortalama (EWMA) kontrol grafiği ilk olarak Roberts (1959) tarafından ortaya konulmuştur. Metot, söz konusu araştırmacı tarafından “Geometrik hareketli ortalama metodu” olarak adlandırılmış daha sonraları ise “Üstel ağırlıklı hareketli ortalama (EWMA) kontrol grafiği” olarak adlandırılmıştır.¹

EWMA kontrol grafiği genellikle proses ortalamasında ortaya çıkabilecek küçük kaymaların daha hızlı bir şekilde tespit edilmesi gerektiğinde kullanılır.² EWMA grafiği, proseste ortaya çıkabilecek 0.5σ 'dan 2σ 'ya kadar olan kaymaları aynı örnek büyüklüğüne sahip Shewhart kontrol grafiğinden daha hızlı bir şekilde tespit eder.³ Büyük kaymaların tespit edilmesinde EWMA kontrol grafiği, Shewhart kontrol grafiği kadar etkili olmamakla beraber çoğu zaman CUSUM kontrol grafiğinden daha etkili sonuçlar vermektedir.⁴ EWMA kontrol grafiğinin bir diğer dezavantajı ise grafiğin düzenlenmesinin zor oluşudur. Bu özelliklerinin dışında kontrol grafiğinin diğer özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

* EWMA kontrol grafiği, bireysel gözlem değerleri ($n=1$) için düzenlendiği gibi alt grup verileri ($n>1$) için de düzenlenir.⁵

* Grafik, proses ortalaması için düzenlendiği gibi standart sapmaların izlenmesi amacıyla da kullanılabilir.

* Grafik, proses ortalamasının tahmin edilmesi amacıyla kullanılabilir.

* EWMA kontrol grafiği normallik varsayımlarına karşı hassas değildir.⁶

¹ S. W. Roberts; “Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages”, Technometrics, Vol:1, No:3, 1959, s.239.

² <http://www.sytsma.com/tqmttools/ewma.html>, s.1.

³ http://www.../knowctrWhen_to_Use_an-EWMA_Chart.html, s.1.

⁴ K. M. Bower; Using Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) Charts s.1.

⁵ <http://www.sytsma.com/tqmttools/ewma.html>, s.1.

⁶ Bower; Age., s.1.

4.1.1. Proses ortalamasının gözlenmesi amacıyla tek değişkenli EWMA kontrol grafiğinin düzenlenmesi

Proses ortalamasının gözlenmesi amacıyla düzenlenecek tek değişkenli EWMA kontrol grafiği için test istatistiği,

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda) z_{i-1} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır. Formülde x_i , i 'inci gözlem değerini, λ sabiti ise üzerinde durulan gözlem değerine verilecek ağırlığı belirtmektedir.⁷ Grafiğin başlangıç değeri olan z_0 değeri ($i=1$ olmak üzere ilk alınan örnek değeri) prosesin hedef değerine yerleştirilir. Yani $z_0 = \mu_0$ olur. Bazı durumlarda, EWMA kontrol grafiğinin başlangıç değeri olarak ilk gözlem değerlerinin ortalaması kullanılır. Bu durumda $z_0 = \bar{x}$ olur.⁸ Formülde verilen λ sabiti $0 < \lambda \leq 1$ aralığında olup, proses ortalamasındaki küçük değişiklik veya kaymalara duyarlılığın nasıl olacağını belirleyen bir ağırlık faktörüdür.⁹ Burada λ sabitinin pratikte hangi aralıkta olduğu sorusuyla karşılaşılabilir. Kalite kontrol uygulamalarında söz konusu ağırlık sabiti, $0.05 < \lambda \leq 0.25$ aralığında olacak şekilde seçilir. Proseste ortaya çıkabilecek küçük kaymaların tespit edilmesi arzu edildiğinde nispeten küçük λ değerleri alınmalıdır.¹⁰ Proses ortalamasının tahmini ve kontrolü yapılmak istenildiğinde λ sabiti için yukarıda verilen aralıktan daha büyük değerler seçilir.¹¹ λ değerinin seçiminde, λ ağırlık faktörü ile n örnek büyüklüğü arasındaki ilişkiyi veren $\lambda = 2/(n+1)$ eşitliği de kullanılabilir. Eşitlikten görüldüğü gibi $\lambda = 1$ olarak alındığında EWMA kontrol grafiği, $\bar{X}$ için düzenlenen Shewhart kontrol grafiğine benzer.¹²

z_i EWMA istatistiğinin, daha önce seçilmiş bütün örnek ortalamalarının ağırlıklı ortalaması olduğunu göstermek amacıyla Formül 4-1'deki eşitlik düzenlenerek,

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)[\lambda x_{i-1} + (1 - \lambda)z_{i-2}] \text{ veya } z_i = \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + (1 - \lambda)^2 z_{i-2} \quad (4.2)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Formülde λx_i , i 'inci zamanda alınan örnek değerinin ağırlığını gösterirken, bir önceki örnek değeri x_{i-1} değerinin ağırlığı ise $\lambda(1 - \lambda)$ 'dır.

⁷ Stefan H. Steiner; Exponentially Weighted Moving Average Control Charts with Time-Varying Control Limits and Fast Initial Response, <http://www.stats.uwaterloo.ca/~Shsteine/papers/ewmafir.pdf>, s.2.

⁸ Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, 4th Edition, John Wiley and Sons. Inc., 2001, s.426.

⁹ http://www.engineering.uiowa.edu/~qctrl/lectures2004/Lect19_040504.pdf, s.11.

¹⁰ <http://www.hha.dk/if/Bpm/Download/CUSUM-EWMA.pdf>, s.1.

¹¹ Steiner; Agm., s.2.

¹² Richard E. Devor – Tsong-how Chang – John W. Sutherland; Statistical Quality Design and Control: Contemporary Concepts and methods, Prentice Hall Inc., 1992, s.362.

Formül 4-2’de verilen eşitlik, z_{i-j} ($j=2, 3, \dots, i$) olmak üzere,

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j x_{i-j} + (1-\lambda)^i z_0 \quad (4.3)$$

şeklinde genelleştirilebilir. $\lambda(1-\lambda)^j$ ağırlıkları, örnek ortalaması ile birlikte geometrik olarak artmaktadır. Bununla birlikte ağırlıkların toplamı,

$$\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j = 1 - (1-\lambda)^i \quad (4.4)$$

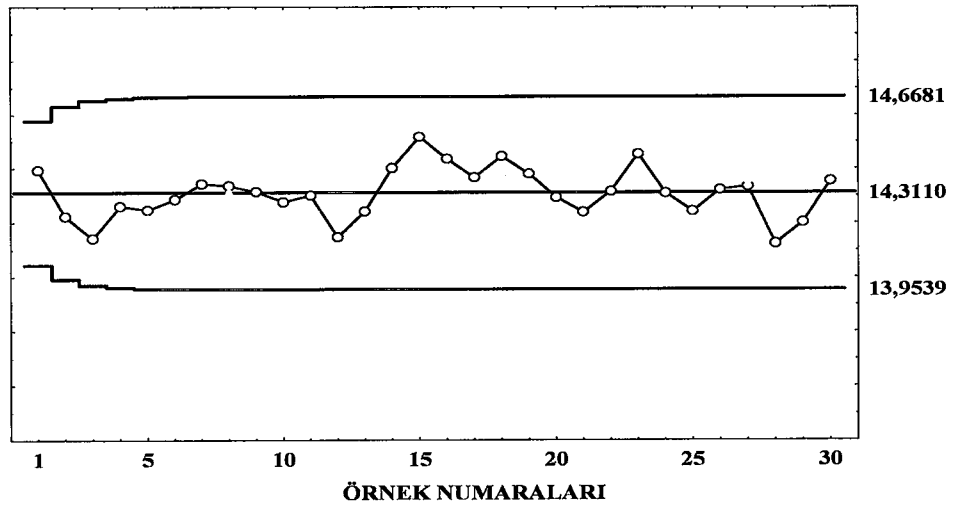
olarak elde edilir.¹³ x_i gözlem değerleri, σ^2 varyansa sahip bağımsız tesadüfi değişkenler olduğunda z_i istatistiğinin varyansı,

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad (4.5)$$

olarak elde edilir. Formülde i indeksi arttıkça $\sigma_{z_i}^2$ değeri de sınırlı bir değere doğru artacaktır. i indeksi büyük bir değere ulaşması durumunda Formül 4-5,

$$\sigma_{z_i}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \quad (4.6)$$

şeklinde daha basit bir hale dönüşür.¹⁴ Gerekli eşitlikler verildikten sonra bu eşitlikler yardımıyla örnek numaralarına karşılık gelen z_i değerleri hesaplanıp grafik üzerinde işaretlenerek EWMA kontrol grafiği düzenlenir. Böyle bir örnek EWMA kontrol grafiği Şekil 4-1’de görülmektedir.



Şekil 4-1: Örnek bir EWMA kontrol grafiği

Kaynak: R. E. Devor – T. Chang – J. W. Sutherland; Statistical Quality Design and Control: Contemporary and Methods, Prentice Hall Inc., 1992, s.367.

¹³ Jerry Banks; Principles of Quality Control, John Wiley and Sons, Inc., Canada, 1989, s.248.

¹⁴ Stephen V. Crowder; “A Simple Method for Studying Run-Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Charts”, Technometrics, Vol:29, No:4, 1987, s.403.

Kontrol grafiğindeki orta çizgi, μ_0 ile ifade edildiğinde alt ve üst kontrol sınırları,

$$\text{ÜKS} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad (4.7)$$

$$\text{AKS} = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad (4.8)$$

formülleri yardımıyla hesaplanır. Formüllerde L faktörü kontrol sınırlarının genişliğini ifade eder.¹⁵

Alt ve üst kontrol sınırlarının formüllerinde i indeksi arttıkça $[1 - (1-\lambda)^{2i}]$ değeri de 1'e yaklaşır. Bu durumda alt ve üst kontrol sınırları,

$$\text{ÜKS} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad (4.9)$$

$$\text{AKS} = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad (4.10)$$

yeniden düzenlenebilir.¹⁶ Başlangıç aşamasında birkaç örneğin kontrolü amacıyla başlangıç EWMA kontrol grafiği düzenlendikten sonra, proses durağan duruma geldiğinde kontrol sınırları, Formül 4-9 ve Formül 4-10'da verilen kontrol sınırlarına yaklaşır. Bununla birlikte küçük i değerleri için Formül 4-7 ve Formül 4-8'de verilen kontrol sınırlarının kullanılması tavsiye edilir. Bu durumda başlangıç için düzenlenen EWMA kontrol grafiğinden sonra proseste ortaya çıkabilecek kontrol dışı durumun tespit edilmesinde kontrol grafiğinin performansı artacaktır.¹⁷

Yukarıda verilen kontrol sınırları anakütle standart sapmasının (σ) bilindiği durumlar için kullanılabilir. Oysa uygulamalarda çoğu zaman σ değeri bilinmez. Bu durumlarda anakütle standart sapma değeri R kontrol grafiğinden tahmin edilebilir. Böylece EWMA kontrol grafiği için kontrol sınırları,

$$\text{ÜKS} = \bar{X} + A_2 \bar{R} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad (4.11)$$

$$\text{AKS} = \bar{X} - A_2 \bar{R} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad (4.12)$$

şeklinde hesaplanabilir. Yukarıda verilen formüller i değerinin yeterince büyük olduğu

¹⁵ Montgomery; Age., 2001, s.427.

¹⁶ Stephen V. Crowder; "Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes", Journal of Quality Technology, Vol:21, No:3, 1989, s.159.

¹⁷ Montgomery; Age., 2001, s.427-428.

durumlar için kullanılır. Formüllerdeki A_2 değeri, kontrol grafiklerinin düzenlenmesinde kullanılan faktörler tablosundan elde edilir.¹⁸

Roberts (1959) $X_1, X_2, \dots$ gözlem değerlerinin normal dağılıma uygunluk göstermesi halinde dağılımın ortalamasının sıfır ve varyansının $\sigma_{z_i}^2 = \{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}] / (2 - \lambda)\} \sigma^2$ olduğunu göstermiştir. Böylece proses kontrol altında iken, proses ortalaması sıfır olduğunda EWMA kontrol grafiğinin kontrol sınırları, çoğu zaman $\pm L\sigma_{z_i}$ değerine yerleştirilir. Burada L ve λ değerleri kontrol grafiğinin parametreleridir.¹⁹

Lucas ve Saccucci (1190) tek değişkenli EWMA kontrol grafiği için L ve λ değerlerinin nasıl tespit edileceğini tartışmışlardır. Söz konusu araştırmacılar σ_{z_i} değerinin asimptotik formuna dayalı kontrol sınırlarını tespit etmişlerdir. σ_{z_i} değeri ise $\sigma_{z_i}^2 \cong [\lambda / (2 - \lambda)]^{1/2} \sigma$ şeklindedir.²⁰

Bu bölümde tek değişkenli EWMA kontrol grafiğinin nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek 4-1) Tablo 4-1'deki veriler kullanılarak tek değişkenli EWMA kontrol grafiği düzenlenecektir. Üzerinde durulan gözlem değerine verilecek ağırlık $\lambda=0.1$ ve kontrol sınırlarının genişliği ise $L=2.7$ olarak alınmıştır. Burada hedef değer olan proses ortalaması $\mu_0=10$ ve standart sapma $\sigma=1$ 'dir. Tabloda aynı zamanda z_i EWMA değerleri hesaplanarak verilmiştir. Örnek olması açısından birinci ve ikinci gözlem değerleri için EWMA değerleri Formül 4-1 kullanılarak ilk gözlem değeri için z_1 değeri,

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda x_1 + (1 - \lambda) z_0 \\ &= 0.1(9.45) + 0.9(10) = 9.945 \end{aligned}$$

şeklde hesaplandıktan sonra ikinci gözlem değeri için z_2 değeri ise

$$\begin{aligned} z_2 &= \lambda x_2 + (1 - \lambda) z_1 \\ &= 0.1(7.99) + 0.9(9.945) = 9.7495 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Diğer EWMA değerleri de benzer şekilde hesaplanır.

¹⁸ Douglas C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control, Second Edition, John Wiley and Sons. Inc., 1991, s.304.

¹⁹ Roberts; Agm., s.239-250.

²⁰ J. M. Lucas – M. S. Saccucci; "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements", Technometrics, Vol:32, 1990, s.1-12.

Tablo 4-1: Otuz gözlem değeri ve bu değerlerin z_i değerleri

No	x_i	z_i	No	x_i	z_i
1	9.45	9.945	16	9.37	9.98426
2	7.99	9.7495	17	10.62	10.0478
3	9.29	9.70355	18	10.31	10.074
4	11.66	9.8992	19	8.52	9.91864
5	12.16	10.1253	20	10.84	10.0108
6	10.18	10.1307	21	10.9	10.0997
7	8.04	9.92167	22	9.33	10.0227
8	11.46	10.0755	23	12.29	10.2495
9	9.2	9.98796	24	11.5	10.3745
10	10.34	10.0232	25	10.6	10.3971
11	9.03	9.92384	26	11.08	10.4654
12	11.47	10.0785	27	10.38	10.4568
13	10.51	10.1216	28	11.62	10.5731
14	9.4	10.0495	29	11.31	10.6468*
15	10.08	10.0525	30	10.52	10.6341*

Kaynak: D. C: Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control 4th Edition, John Wiley and Sons. Inc., 2001, s.429.

EWMA değerleri hesaplandıktan sonra kontrol grafiğinin kontrol sınırları hesaplanır. $i=1$ için üst kontrol sınırı Formül 4-7 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\text{ÜKS} &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \\ &= 10 + 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} [1 - (1-0.1)^{2(1)}] = 10.27\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Alt kontrol sınırı ise Formül 4-8 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\text{AKS} &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \\ &= 10 - 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} [1 - (1-0.1)^{2(1)}] = 9.73\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Diğer i indeksleri için kontrol sınırları aynı yolla hesaplanır. i indeksi arttıkça kontrol sınırları da büyüyecektir. Bu durumda kontrol sınırları Formül 4-9 ve Formül 4-10 kullanılarak,

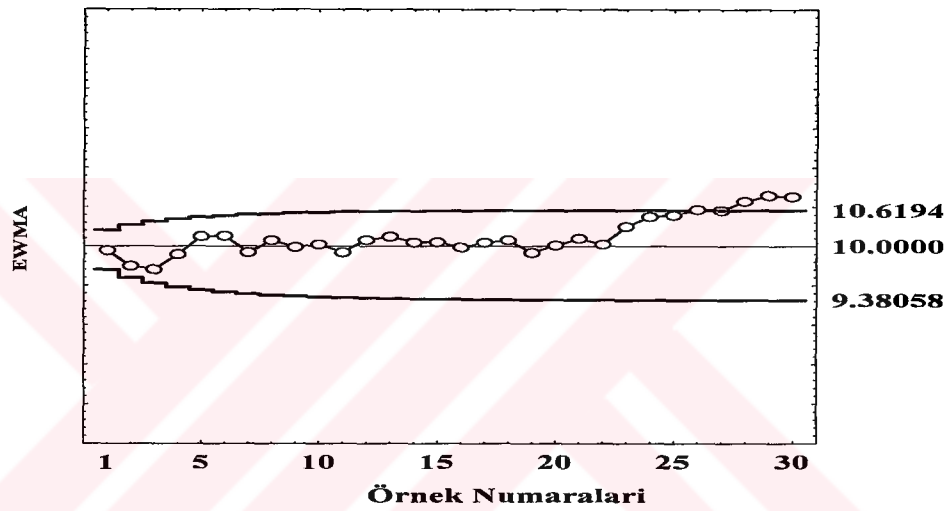
$$\text{ÜKS} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$$

$$= 10 + 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} = 10.62$$

$$AKS = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$$

$$= 10 - 2.7(1) \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} = 9.38$$

şeklinde hesaplanır. Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra EWMA kontrol grafiği Şekil 4-2'deki gibi düzenlenir.



Şekil 4-2: Tablo 4-1'deki veriler için düzenlenen EWMA kontrol grafiği

Kaynak: D. C. Montgomery; Introduction to Statistical Quality Control 4th Edition, John Wiley and Sons. Inc., 2001, s.428.

Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 28 numaralı örnekten itibaren kontrol dışına çıktığı görülür. Ayrıca grafik incelendiğinde proseste 22 numaralı örneğin alınması zamanından itibaren yukarı yönde bir kaymanın meydana geldiği görülür.²¹

²¹ Montgomery; Age., 2001, s.428-431.

4.2. Çok Değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama (MEWMA) Kontrol Grafiği

Çok değişkenli proseslerin ortalamalarının kontrol edilmesi amacıyla tek değişkenli EWMA kontrol grafiği, çok değişkenli kalite kontrol grafiğine genelleştirilebilir. Çok değişkenli EWMA (MEWMA) kontrol grafiği, köşegen matrisin düzeltilmiş ağırlığının kullanılmasıyla tek değişkenli prosedürün genelleştirilmiş halidir. Kontrol grafiğinde düzeltilmiş ağırlık, köşegen olmayan elemanları içeren genel matris ile tanımlanır. Lowry ve ark. (1992) köşegen forma sahip düzeltilmiş matrisin kullanılmasıyla çok değişkenli EWMA (MEWMA) kontrol grafiğini önermişlerdir.

Bir prosesten peş peşe alınan gözlem değerlerinin ($X_i, i=1, 2, \dots$) bağımsız ve aynı şekilde gözlem vektörlerinin çok değişkenli normal dağılım gösterdiği [$X_i \sim N(\mu, \Sigma)$] farz edilsin. Proses kontrol altında iken ortalama vektörünün $\mu_0=(0,0,\dots,0)'=0$ ve kovaryans matrisinin bilindiği varsayalım. Tüm köşegen elemanları 1 alınarak kovaryans matrisi standartlaştırılmıştır. Tek değişkenli EWMA kontrol grafiğine benzer şekilde MEWMA vektörünün tanımlanması ile p değişkenli normal dağılıma sahip proseslerin kontrol edilmesi için MEWMA kontrol grafiği düzenlenebilir²².

Böylece tek değişkenli EWMA kontrol grafiğinin çok değişkenli durum için genelleştirilmiş hali,

$$Z_i = RX_i + (I - R)Z_{i-1} \quad i=1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir. Formülde başlangıç değeri olan Z_0 değeri sıfır alınırken düzeltilmiş matris R ise köşegen matrisi ifade etmektedir. Düzeltilmiş matrisin köşegen elemanları $R=\text{köşegen}(r_1, r_2, \dots, r_p)$ olup, $j=1, 2, \dots, p$ olmak üzere $0 < r_j \leq 1$ 'dir.²³ Formül 4-13'teki eşitlik,

$$\begin{bmatrix} Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_i \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + (I - R) \begin{bmatrix} Z_{i-1} \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.²⁴

Çok değişkenli EWMA (MEWMA) kontrol grafiği aşağıdaki durumda kontrol dışı sinyali verecektir.

$$T_i^2 = Z_i' \Sigma_{Z_i}^{-1} Z_i > H \quad (4.15)$$

²² S. W. Choi – S. Lee; “A General Multivariate EWMA Control Chart”, International Journal of Management Science, Vol:6, No:1, 2000, s.2-3.

²³ C. A. Lowry – W. H. Woodall – C. W. Champ – S. E. Rigdon; “A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart”, Technometrics, Vol:34, No:1, 1992, s.48.

²⁴ http://www.engineering.uiowa.edu/~qctrl/lectures2004/Lect19_040504.pdf, s.12.

veya

$$\begin{bmatrix} T_i^2 \\ \vdots \\ T_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_i & \dots & Z_n \end{bmatrix} \Sigma_{Z_i}^{-1} \begin{bmatrix} Z_i \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada Σ_{Z_i} , Z_i istatistiğinin kovaryans matrisini ifade ederken, H değeri ise sıfırdan büyük bir değer olup, prosesin kontrol altında olması durumundaki ortalama işletim uzunluğunu (ARL) verecek şekilde seçilir.²⁵ Bir veya daha fazla nokta H noktasının dışına düştüğünde prosesin kontrol dışına çıkmış olduğuna karar verilir. Bu durumda proses ortalamasının μ_0 'dan μ_1 gibi bir değere kaydığına karar verilir ve bu kaymaya neden olan belirlenebilir değişkenliğin kaynağı araştırılır. Proses ortalamasında ortaya çıkan kaymanın büyüklüğü merkezi olmayan parametre δ ile belirlenir. Merkezi olmayan parametre δ ise

$$\delta = (\mu' \Sigma^{-1} \mu)^{1/2} \quad (4.17)$$

formülü yardımıyla hesaplanır. Formülde Σ , X örnek vektörünün kovaryans matrisini ifade eder.²⁶ İncelenen p adet kalite değişkeni için daha önceki gözlem değerlerinin farklı olarak ağırlıklandırılması için önemli bir neden olmadığı takdirde söz konusu ağırlık katsayıları eşit alınır ($r_1=r_2=\dots=r_p=r$). Bu yüzden MEWMA kontrol grafiğinde ARL'nin performansı sadece merkezi olmayan parametre'ye bağlı olur.

Bazı durumlarda eşit olmayan ağırlık katsayıları kullanılabilir. Bu durumda ARL sadece merkezi olmayan parametreye değil aynı zamanda proseste ortaya çıkabilecek kaymanın yönüne de bağlıdır.²⁷ Ağırlıklandırma yapılırken tespit edilmek istenen kaymanın büyüklüğü önemlidir. Tek değişkenli EWMA kontrol grafiğinde olduğu gibi çok değişkenli durumda da proseste ortaya çıkabilecek küçük kaymaların tespit edilmesinde küçük R değerleri daha etkili sonuçlar verir. Ağırlıklandırma yapılırken bu husus göz önünde bulundurulmalıdır.²⁸

Verilecek ağırlık değerleri eşit alınması durumunda ($r_1=r_2=\dots=r_p=r$) MEWMA vektörü,

$$Z_i = rX_i + (1-r)Z_{i-1} \quad i=1, 2, \dots, \quad (4.18)$$

²⁵ Lowry vd.; Agm., s.48.

²⁶ W. E. Molnau – G. C. Runger – D. C. Montgomery – K. R. Skinner – E. N. Loreda – S. S. Prabhu; "A Program for ARL Calculation for Multivariate EWMA Charts", Journal of Quality Technology, Vol:33, No:4, 2001, s.516.

²⁷ Lowry vd.; Agm., s.48.

²⁸ S. J. Wierda; "Multivariate Statistical Process Control – Recent Results and Directions for Future Research", Statistica Neerlandica, Vol:48, No:2, 1994, s.165.

şeklinde yazılabilir. Burada Z_i istatistiğinin kovaryans matrisi Σ_{Z_i} ise

$$\Sigma_{Z_i} = \left\{ r \left[1 - (1-r)^{2i} \right] / (2-r) \right\} \Sigma \quad (4.19)$$

şeklinde elde edilir.²⁹ Söz konusu kovaryans matrisi korelasyon matrisi biçiminde olup,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir. Kovaryans matrisinde bulunan değişkenlerin herbiri $\mu=0$ ve $\sigma^2=1$ ile standartlaştırılmıştır.³⁰

Tek değişkenli duruma benzer şekilde, $r=1$ alındığında MEWMA kontrol grafiği Hotelling T^2 kontrol grafiğine eşit olur.³¹³²

Kalite kontrolü çalışmalarında proses genellikle belli bir süre kontrol altında kalır daha sonra kontrol dışına çıkar. Bu nedenle MEWMA kontrol grafiği düzenlemek ve ARL karşılaştırmaları yapabilmek amacıyla Formül 4-15'te verilen MEWMA istatistiğinin hesaplanmasında,

$$\Sigma_{Z_i} = \left\{ r / (2-r) \right\} \Sigma \quad (4.20)$$

asimptotik ($i \rightarrow \infty$) kovaryans matrisi kullanılır.³³ Burada tam kovaryans matrisi ve asimptotik kovaryans matrisi olmak üzere iki kovaryans matrisine dayalı iki farklı metot ortaya çıkar.³⁴

Aşağıda sayısal bir örnek ile MEWMA kontrol grafiğinin nasıl düzenleneceği izah edilecektir.

Örnek 4-2) İki kalite değişkenine sahip bir prosesin izlenmesi amacıyla MEWMA kontrol grafiğinin düzenlenmesinde kullanılacak veriler Tablo 4-2'de verilmiştir. Bu prosesin iki değişkenli normal dağılıma sahip olduğu varsayılmaktadır.

Tabloda bulunan X_1 ve X_2 , gözlem değerlerini, Z_1 ve Z_2 değerleri ise $r=0.1$ ağırlık değeri ile Formül 4-18'den elde edilen MEWMA vektörüne karşılık gelen

²⁹ Lowry vd.; Agm., s.48.

³⁰ http://www.engineering.uiowa.edu/~qctrl/lectures2004/Lect19_040504.pdf, s.15.

³¹ Lowry vd.; Agm., s.48.

³² Kevin Linderman – Thomas E. Love; "Economic and Economic Statistical Designs for MEWMA Control Charts", Journal of Quality Technology, Vol:32, No:4, 2000, s.411.

³³ Choi – Lee; Agm., s.3.

³⁴ Linderman – Love; Agm., s.411.

değerleri göstermektedir. Ayrıca tabloda yer alan T_1^2 ve T_2^2 değerleri, sırasıyla Formül 4-19 ve Formül 4-20'den hesaplanan kovaryans matrislerinin Formül 4-15'te yerine konulmasıyla elde edilmiştir. Üst kontrol sınırı H ise $r=0.1$ ve prosesin kontrol altında olması durumu için $ARL=200$ olacak şekilde elde edilmiştir.

Tablo 4-2: İki kalite değişkenine ait örnek değerleri, MEWMA vektörü ve istatistiği

Örnek no	Örnek Değerleri		MEWMA VEKTÖRÜ		MEWMA İstatistiği	
	X_1	X_2	Z_1	Z_2	T_1^2	T_2^2
1	-1.19	0.59	-0.12	0.06	3.29	0.62
2	0.12	0.90	-0.10	0.14	3.17	1.09
3	-1.69	0.40	-0.25	0.17	7.37	3.45
4	0.30	0.46	-0.20	0.20	5.26	3.00
5	0.89	-0.75	-0.09	0.10	1.09	0.71
6	0.82	0.98	0.00	0.19	1.28	0.92
7	-0.30	2.28	-0.03	0.40	5.66	4.37
8	0.63	1.75	0.04	0.53	8.32	6.78
9	1.56	1.58	0.19	0.64	9.65*	8.20
10	1.46	3.05	0.32	0.88	17.21	15.12*
Kontrol Sınırları:					$H=8.79$	$H=8.66$

Kaynak: C. A. Lowry – W. H. Woodall – C. W. Champ – S. E. Rigdon; "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart", Technometrics, Vol:34, No:1, 1992, s.50.

Örnek olması açısından Z_1 ve Z_2 ile T_1^2 ve T_2^2 değerleri Tablo 4-2'de yer alan ilk örnek değerleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır. İlk olarak Formül 4-18 kullanılarak Z_1 ve Z_2 değerleri,

$$Z_1 = rX_1 + (1-r)Z_0 = 0.1(-1.19) + (1-0.1) \times 0 = -0.12$$

$$Z_2 = rX_2 + (1-r)Z_0 = 0.1(0.59) + (1-0.1) \times 0 = 0.06$$

şeklinde elde edilir. T_1^2 değerini hesaplamak amacıyla önce Formül 4-19 kullanılarak kovaryans matrisi Σ_{Z_1} ,

$$\Sigma_{Z_1} = \{r[1 - (1-r)^2] / (2-r)\} = \{0.1[1 - (1-0.1)^2] / (2-0.1)\} = 0.01$$

$$\Sigma_{Z_1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Kovaryans matrisi hesaplandıktan sonra T_1^2 değeri Formül 4-15 kullanılarak,

$$T_1^2 = Z_1' \Sigma_{Z_1}^{-1} Z_1 = \begin{bmatrix} -0.12 & 0.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.12 \\ 0.06 \end{bmatrix} = 3.29$$

olarak hesaplanır. T_2^2 değerini hesaplamak için ise ilk önce Formül 4-20 kullanılarak kovaryans matrisi Σ_{Z_i} ,

$$\Sigma_{Z_1} = \{ r / (2 - r) \} = \{ 0.1 / [2 - (0.1)] \} = 0.053$$

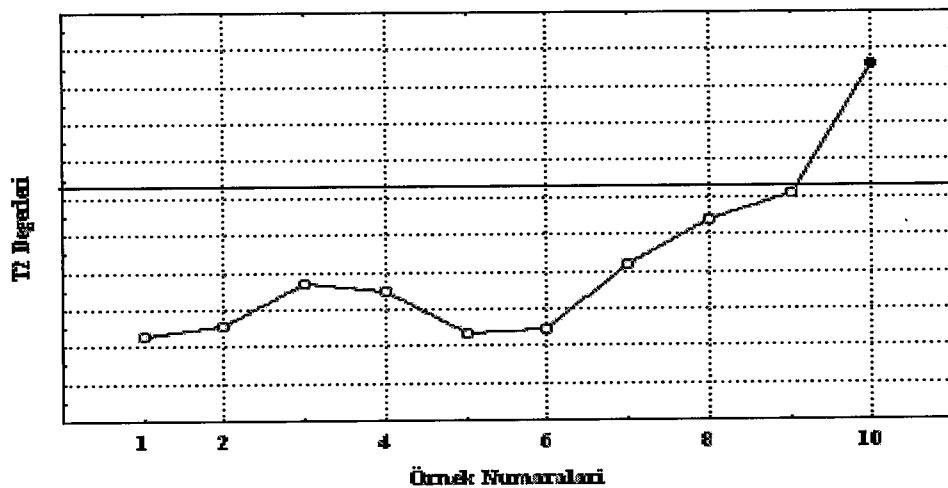
$$\Sigma_{Z_1} = \begin{bmatrix} 0.053 & 0 \\ 0 & 0.053 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Daha sonra T_2^2 değeri,

$$T_2^2 = Z_1' \Sigma_{Z_1}^{-1} Z_1 = \begin{bmatrix} -0.12 & 0.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.053 & 0 \\ 0 & 0.053 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.12 \\ 0.06 \end{bmatrix} = 0.62$$

şeklinde elde edilir. Formül 4-19'dan elde edilen kovaryans matrisinin kullanılması ile hesaplanan T_1^2 değerleri incelendiğinde, prosesin dokuz numaralı örnekten itibaren kontrol dışına çıktığı gözlenir. Formül 4-20'den elde edilen kovaryans matrisi kullanıldığında hesaplanan T_2^2 değerleri incelendiğinde ise proses onuncu örneğin alınması zamanında kontrol dışına çıktığı görülür.

Formül 4-20'den elde edilen kovaryans matrisi kullanılarak hesaplanan T_2^2 değerlerinin kullanılması ile düzenlenen MEWMA kontrol grafiği Şekil 4-3'te görülmektedir.



Şekil 4-3: Formül 4-20'den elde edilen kovaryans matrisi kullanılarak hesaplanan T_2^2 değerlerinin kullanılması ile düzenlenen MEWMA grafiği

Kaynak: C. A. Lowry – W. H. Woodall – C. W. Champ – S. E. Rigdon; "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart", Technometrics, Vol:34, No:1, 1992, s.50.

MEWMA kontrol grafiği kontrol dışı sinyali verdiğiğinde Tablo 4-2’de yer alan Z_1 ve Z_2 değerlerinin de proseste bir kaymanın olduğuna dair ipuçları verdiği dikkat edilmelidir.³⁵

4.2.1. MEWMA kontrol grafiğinin düzenlenmesi

Çok değişkenli EWMA kontrol grafiğini düzenlemek amacıyla çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda farklı kalite değişkenleri için çeşitli kayma değerlerine karşılık gelen optimal r değerleri elde edilerek grafik düzenlenmeye çalışılmıştır. Bu çalışmalardan Lowry ve arkadaşlarının yaptıkları çalışmada prosesin kontrol altında olması durumunda $ARL=200$ olacak şekilde çeşitli kayma değerlerinin tespit edilmesi amacıyla optimal r değerlerini hesaplamışlardır. Söz konusu değerler Tablo 4-3’te verilmiştir. Bu değerler yardımıyla MEWMA kontrol grafiği dizayn edilir.

Tablo 4-3: MEWMA kontrol grafiğinin düzenlenmesinde kullanılan optimal değerler ($ARL=200$ ve $p=2, 3, 4$)

δ		p		
		2	3	4
0.5	r	0.06	0.06	0.06
	H	7.70	9.80	11.66
	ARL_{min}	26.5	30.0	32.3
	r aralığı	0.04 – 0.06	0.04 – 0.06	0.04 – 0.08
1.0	r	0.16	0.16	0.14
	H	9.35	11.52	13.34
	ARL_{min}	9.95	11.0	12.0
	r aralığı	0.10 – 0.20	0.10 – 0.20	0.10 – 0.16
1.5	r	0.24	0.22	0.20
	H	9.90	11.96	13.84
	ARL_{min}	5.47	6.02	6.45
	r aralığı	0.18 – 0.30	0.20 – 0.30	0.18 – 30
2.0	r	0.34	0.30	0.28
	H	10.17	12.31	14.25
	ARL_{min}	3.53	3.87	4.20
	r aralığı	0.24 – 0.34	0.24 – 0.34	0.22 – 0.34

Kaynak: C. A. Lowr–W. H. Woodall–C. W. Champ–S. E. Rigdon; “A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart”, Technometrics, Vol:34, No:1, 1992, s.49.

³⁵ Lowry vd.; Agm., s.49-50.

Burada kalite kontrol altında iken ARL değerinin 200 olduğu göz önünde tutularak $p=2, 3, 4$ kalite değişkenleri için hesaplamalar yapılmıştır. Bu hesaplamalarda MEWMA kontrol grafiğinin küçük kaymaların tespit edilmesinde daha etkili olması sebebiyle 2'den büyük kayma değerleri ($\delta > 2$) ele alınmamıştır. Burada r değerinin optimallüğinden kasıt, üzerinde durulan kayma değerindeki ARL'nin prosesin kontrol durumunda verilen ARL değeri için minimize edilmesidir.

Tablo 4-3'te görüldüğü üzere, tek değişkenli EWMA kontrol grafiğinde olduğu gibi bu metotta da küçük r değerleri küçük kaymaların tespit edilmesinde daha etkili sonuçlar vermektedir. Tabloda aynı zamanda ilgilenilen kayma değeri için r değerlerinin aralıkları da verilmiştir. Söz konusu aralıklar incelendiğinde bu aralıkların hemen hemen aynı oldukları görülmektedir. Optimal r değerleri, değişken sayısının değişmesinden çok fazla etkilenmemektedir.³⁶

Prabhu ve Runger (1997), $p=4, p=10$ ve $p=20$ kalite değişkenleri için belirli kayma değerlerine karşılık gelen optimal r değerlerini ve kontrol sınırlarını hesaplamışlardır. Söz konusu değerler Tablo 4-4'te görülmektedir.

Tablo 4-4: MEWMA kontrol grafiğinin düzenlenmesinde kullanılan optimal değerler ($p=4, 10, 20$)

δ	$ARL_0 =$	$p=4$		$p=10$		$p=20$	
		500	1000	500	1000	500	1000
0.5	r	0.04	0.03	0.03	0.025	0.03	0.025
	H	13.37	14.86	22.69	24.70	37.09	39.63
	ARL_{min}	42.22	49.86	55.94	66.15	70.20	83.77
1.0	r	0.105	0.09	0.085	0.075	0.075	0.065
	H	15.26	16.79	25.42	27.38	40.09	42.47
	ARL_{min}	14.60	16.52	19.29	21.74	24.51	27.65
1.5	r	0.18	0.18	0.16	0.14	0.14	0.12
	H	16.03	17.71	26.58	28.46	41.54	43.80
	ARL_{min}	7.65	8.50	10.01	11.07	12.70	14.01
2.0	r	0.28	0.26	0.24	0.22	0.20	0.18
	H	16.49	18.06	27.11	29.02	42.15	44.45
	ARL_{min}	4.82	5.30	6.25	6.84	7.88	8.60
3.0	r	0.52	0.46	0.42	0.40	0.36	0.34
	H	16.84	18.37	27.55	29.45	42.80	45.08
	ARL_{min}	2.55	2.77	3.24	3.50	4.04	4.35

Kaynak: Sharad S. Prabhu – George C. Runger; "Designing A Multivariate EWMA Control Chart", Journal of Quality Technology, Vol:29, No:1, 1997, s.12.

³⁶ Lowry vd.; Agm., s.49.

Tabloda verilen değerler başlangıç durumu ARL değerlerine dayalı olarak elde edilmiştir. Bu çalışmada, $r < 0.01$ olduğunda en iyi r değerini elde etmek amacıyla 0.001'lik artış kullanılırken, $r > 0.01$ olduğunda ise 0.005'lik artış kullanılmıştır. Dolayısıyla tablodaki r değerleri için optimum değerlerin 0.005 değerine oldukça yakın olduğu belirlenmiştir.

Tablo 4-4 incelendiğinde $\delta = 0.5$ 'lik bir kaymayı tespit etmek için 0.05'ten daha küçük r değerinin tercih edilmesi gerektiğine karar verilir. Değişken sayısı önemli olmasına rağmen, $r = 0.03$ değeri $\delta = 0.5$ 'lik bir kaymayı tespit etmek için iyi bir tercih olabilir. $\delta = 1$ büyüklüğündeki bir kayma için $r = 0.1$ değeri p değişken sayısı artığında uygun bir seçenektir. $\delta = 1.5$ ve $\delta = 2$ büyüklüğündeki kayma değerleri için 0.15 ve 0.25 değerleri r için uygun değerlerdir. $\delta = 3$ şeklinde büyük kayma değerleri için 0.4 değerinin r için makul bir değer olduğu tablodan görülür.³⁷

Bu bölümde MEWMA kontrol grafiğinin nasıl düzenleneceği bir örnek ile izah edilecektir.

Örnek:4-3) $p=6$ değişkene sahip bir proses göz önünde bulundursun. Söz konusu değişkenlere ait Σ kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.9 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 1 & 0.8 & 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kovaryans matrisi incelendiğinde, matrisin korelasyon matrisi formunda olduğu görülür. Matris incelendiğinde, üç değişkenin kendi aralarında yüksek korelasyona diğer üç değişkeninde kendi aralarında düşük korelasyona sahip olduğu görülmektedir. Proses ortalaması $\mu' = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ gibi bir ortalamaya kaydığında merkezi olmayan parametre,

$$\delta = (\mu' \Sigma^{-1} \mu)^{1/2} = 1.75$$

şeklinde olur. Burada $\delta = 1.75$ büyüklüğündeki kayma için uygun ağırlık değeri Tablo 4-7'den $r = 0.2$ olarak bulunur. Ayrıca Tablo 4-7'den $ARL_0 = 200$ olacak şekilde $H = 17.51$ olarak elde edilir. Proses, $\mu' = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$ gibi bir ortalamaya kaydığında ise merkezi

³⁷ Sharad S. Prabhu – George C. Runger; "Designing A Multivariate EWMA Control Chart", Journal of Quality Technology, Vol:29, No:1, 1997, s.12.

olmayan parametre,

$$\delta = (\mu' \Sigma^{-1} \mu)^{1/2} = 1.21$$

şeklinde bulunur. Bu durum için optimal r değerlerine bakıldığında Tablo 4-7'den $r=0.1$ veya $r=0.2$ uygun değerler olarak seçilir. Tablo 4-7 incelendiğinde, (k herhangi bir sabit sayı olmak üzere) μ proses ortalaması, $k\mu$ gibi bir değer olduğunda; δ merkezi olmayan parametre, $k\delta$ gibi bir değer alır.³⁸

4.2.2. U Transformasyonu geçirmiş verilere uygulanan MEWMA kontrol grafiği

Bu bölümde öncelikle U transformasyonu izah edilecek daha sonra bu transformasyona dayalı olarak çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama kontrol grafiği (MEWMA kontrol grafiği) anlatılacaktır.

U transformasyonu:

Temel bileşenler analizi, birbirleriyle ilişkili birçok değişkeni daha az sayıdaki değişkene indirgediğinden dolayı istatistiksel proses kontrolünde kullanılır.³⁹ Temel bileşenler analizi, orijinal değişkenlerin lineer kombinasyonu olan yeni bir değişken seti üretir. Burada elde edilen ilk temel bileşen değişkeni en büyük varyansa sahip orijinal değişkenlerin lineer kombinasyonudur. İkinci temel bileşen değişkeni ise ilk katsayı vektörüne dik olan birim uzunluk katsayılarının vektörleri arasından seçilen en büyük varyansa sahip orijinal değişkenlerin lineer kombinasyonudur. Bu şekilde en son değişken olan p temel bileşen değişkenine kadar bu işlem tekrarlanır.⁴⁰ Burada amaç, orijinal veriyi daha az sayıda temel bileşen değişkeni ile gözlemlemektir. Proseste incelenen değişkenlerin boyutları azaldığından, ilk birkaç temel bileşen değişkenini kapsayan alt veri grubu içindeki proses ortalamasında meydana gelebilecek bir kaymaya duyarlılık artar. İlk birkaç temel bileşen değişkeni tarafından tanımlanan alt veri grubu prosesi gözlemlemek için uygun bir seçenektir. Ancak belirlenebilir bir değişkenlikten dolayı proses ortalamasının belirli bir alt veri grubundaki yeni bir değere kayacağı düşünüülüyorsa bu durumda söz konusu alt veri grubundaki değişkenler üzerinde odaklanarak kontrol grafiği bu değişkenler için düzenlenir. Örneğin belirlenebilir

³⁸ Prabhu – Runger; Agm., s.14.

³⁹ J. Edward Jackson; A User's Guide to Principal Components, John Wiley and Sons. Inc., 1991, New York, s.19.

⁴⁰ George C. Runger; "Projections and the U² Multivariate Control Chart", Journal of Quality Technology, Vol:28, No:3, 1996, s.313.

değişkenlik, tüm değişkenlerin alt veri gruplarının ortalamasında bir kaymaya neden olabilir. Yani kayma sadece $X_1, X_2, \dots, X_k$ değişkenlerinin ortalamasında meydana gelebilir. Bu değişkenler dışındaki $k+1$ 'den p 'ye kadar olan diğer değişkenlerin ortalaması belirlenebilir değişkenlikten etkilenmez.⁴¹

Runger (1996) belirli bir alt veri grubunda ortaya çıkabilecek kaymaları tespit etmek için U^2 kontrol grafiği olarak adlandırılan bir metot geliştirmiştir. Alt veri grubu kullanıcı tarafından tanımlanabilir ve aynı zamanda kontrol dışı olmayı tespit etmek amacıyla proses ile ilgili bazı bilgiler kontrol grafiği içerisinde birleştirilebilir.

Burada amaç özellikle U alt veri grubundaki k boyutlu keyfi kontrol dışı vektörü boyunca proses ortalamasının sıfırdan X gibi bir değere kaydığını tespit etmektir. Burada ifade edilen X 'in kovaryans matrisi Σ ile gösterilir. $(p \times k)$ boyutlu U matrisinin sütunları U alt veri grubu için k temel vektörlerini içerir. Burada standartlaştırma işlemi,

$$V = \Sigma^{-1/2} U \quad (4.21)$$

$$Z = \Sigma^{-1/2} X \quad (4.22)$$

formülleri yardımıyla yapılabilir. Böylece Runger'in U^2 istatistiği,

$$\begin{aligned} U^2 &= Z' V(V' V)^{-1} V' Z \\ &= X' \Sigma^{-1} U (U' \Sigma^{-1} U)^{-1} U' \Sigma^{-1} X \end{aligned} \quad (4.23)$$

şeklinde yazılır ve U^2 istatistiğine dayalı olarak Shewhart kontrol grafiği düzenlenir.⁴² Grafiğin üst kontrol sınırı, U^2 istatistiğinin k serbestlik dereceli ki-kare dağılımı göstermesi göz önünde bulundurularak kolaylıkla elde edilir. U^2 istatistiği karışık görünmesine rağmen söz konusu istatistik Z ve V standartlaştırılmış proses değişkenlerinin bir gösterimidir. Proseste temel bileşen değişkenlerine dik bir kayma olduğunda ve aynı zamanda proseste çok büyük değişiklikler olduğunda bile kontrol grafiği bir kontrol dışı sinyali vermeyebilir. Bu durumda U transformasyonu ve proses bilgisi kullanılarak proses daha etkili bir şekilde incelenir.⁴³

U transformasyonu geçirmiş verilere uygulanan MEWMA kontrol grafiği:

U transformasyonu geçirmiş verilere uygulanan çok değişkenli EWMA kontrol

⁴¹ G. C. Runger – J. B. Keats – D. C. Montgomery – R. D. Scranton; “Improving the Performance of the Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart”, Quality and Reliability Engineering International, Vol:15, 1999, s.163.

⁴² Runger; Agm., s.314.

⁴³ Runger vd.; Agm., s.163.

grafiğinin kullanımı daha önce izah edilen MEWMA metodu ile aynıdır. Metot,

$$X_{in} = (V' V)^{-1/2} V' Z \quad (4.24)$$

şeklinde ifade edilebilir. Formülde yer alan V ve Z değerleri ise

$$V = \Sigma^{-1/2} U \quad (4.25)$$

$$Z = \Sigma^{-1/2} X \quad (4.26)$$

şeklinde ifade edilir. Formül 4-25'te yer alan U değeri, üzerinde durulan alt veri gruplarının vektör veya matrisini gösterirken; Formül 4-24'teki X_{in} , MEWMA kontrol grafiği ile incelenecek U transformasyonu geçirmiş veriyi ifade eder. X ise prosesten elde edilen ham veriyi gösterir. X 'in ortalaması U alt veri grubundaki μ vektörüne kaydıgında, U transformasyonu geçirmiş verilere dayalı Formül 4-23'te verilen kontrol grafiğinin istatistiği merkezi olmayan parametre ile merkezi olmayan ki-kare dağılımı gösterir. Söz konusu merkezi olmayan parametre,

$$\delta_U^2 = \mu' \Sigma^{-1} \mu \quad (4.27)$$

şeklinde gösterilir. Bu durum, merkezi olmayan parametrenin büyüklüğünü azaltmamakla birlikte problemin boyutunu azaltır. Böylece incelenen prosesin ARL performansı artar. Bu durumda U transformasyonu geçirmiş verilerin alt veri gruplarındaki kaymalar için MEWMA kontrol grafiğinin merkezi olmayan parametresi U transformasyonu geçirmiş verilere uygulanır ve orijinal veriler aynı kalır. Bununla beraber U transformasyonu geçirmiş verilerin kullanılmasıyla elde edilen boyut azaltma sayesinde, MEWMA kontrol grafiğinin performansında çok önemli derecede gelişme olabilir. U transformasyonu geçirmiş alt veri grupları μ_X ile gösterildiğinde,

$$\delta_U^2 = \delta_X^2 \quad (4.28)$$

eşitliği yazılabilir.

MEWMA kontrol grafiğinin ARL değeri, rasgele veri vektörünün boyutu ile merkezi olmayan parametrenin bir fonksiyonudur. Bundan dolayı Formül 4-28'de verilen eşitlik U transformasyonu geçirmiş verilere uygulanan MEWMA kontrol grafiğinin ARL değerinin belirlenmesinde kullanılabilir.

Runger ve ark. (1999) transformasyon geçirmiş değişken sayıları ve merkezi olmayan parametre değerleri için U transformasyonu geçirmiş verilerin ortalamasında ortaya çıkabilecek bir kaymayı tespit etmek için MEWMA kontrol grafiğinin ARL değerlerini elde etmişlerdir. Söz konusu ARL değerleri Tablo 4-5'te verilmiştir.

Tablo 4-5: U transformasyonu geçirmiş verilerin ortalamasında ortaya çıkabilecek bir kaymayı tespit etmek için ARL değerleri

Değişken sayıları	Temel bileşen değişken sayıları	Merkezi olmayan parametre değerleri							$\delta=1.5$ ile T^2 kontrol grafiği
		0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	
		Değişkenlerin ARL değeri / U transformasyonuna uğramış değişkenlerin ARL değeri							
3	2	200/200	31.8/28.1	11.3/10.2	6.69/6.12	4.86/4.41	3.83/3.51	3.200/2.92	20.5
4	3	200/200	34.7/31.8	12.1/11.3	7.23/6.69	5.18/4.86	4.10/3.83	3.41/3.20	24.6
4	2	200/200	34.7/28.1	12.1/10.2	7.23/6.12	5.18/4.41	4.10/3.51	3.41/2.92	24.6
5	4	200/200	37.7/34.7	12.9/12.1	7.63/7.23	5.49/5.18	4.32/4.10	3.59/3.41	28.5
5	3	200/200	37.7/31.8	12.9/11.3	7.63/6.69	5.49/4.86	4.32/3.83	3.59/3.20	28.5
5	2	200/200	37.7/28.1	12.9/10.2	7.63/6.12	5.49/4.41	4.32/3.51	3.59/2.92	28.5
10	5	200/200	48.1/37.7	15.9/12.9	9.16/7.63	6.55/5.49	5.15/4.32	4.28/3.59	44.7
10	4	200/200	48.1/34.7	15.9/12.1	9.16/7.23	6.55/5.18	5.15/4.10	4.28/3.41	44.7
10	3	200/200	48.1/31.8	15.9/11.3	9.16/6.69	6.55/4.86	5.15/3.83	4.28/3.20	44.7
10	2	200/200	48.1/28.1	15.9/10.2	9.16/6.12	6.55/4.41	5.15/3.51	4.28/2.92	44.7
20	10	200/200	64.1/48.1	20.0/15.9	11.3/9.16	8.00/6.55	6.26/5.15	5.19/4.28	66.2
20	5	200/200	64.1/37.7	20.0/12.9	11.3/7.83	8.00/5.49	6.26/4.32	5.19/3.59	66.2
20	4	200/200	64.1/34.7	20.0/12.1	11.3/7.23	8.00/5.18	6.26/4.10	5.19/3.41	66.2
20	3	200/200	64.1/31.8	20.0/11.3	11.3/6.69	8.00/4.86	6.26/3.83	5.19/3.20	66.2
20	2	200/200	64.1/28.1	20.0/10.2	11.3/6.12	8.00/4.41	6.26/3.51	5.19/3.20	66.2

Kaynak: G. C. Runger – J. B. Keats – D. C. Montgomery – R. D. Scranton; “Improving the Performance of the Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart”, Quality and Reliability Engineering International, Vol:15, 1999, s.163.

Tablo 4-5’te verilen U transformasyonu geçirmiş veriler incelendiğinde MEWMA kontrol grafiğinin performansının önemli derecede geliştirilebileceği görülür. Örneğin değişken boyutu yirmi değişkenden dört veya beş değişkene indirildiğinde ARL değerleri bir buçuk veya daha fazla azalabilir. Ayrıca tabloda U transformasyonu geçirmiş verilere uygulanan MEWMA kontrol grafiği ile Hotelling T^2 kontrol grafiği ARL değerleri bakımından karşılaştırılmış ve söz konusu MEWMA kontrol grafiğinin performansının daha iyi olduğu tespit edilmiştir. Bu karşılaştırma sadece merkezi olmayan parametrenin tek bir değeri ($\delta=1.5$ değeri) için yapılmıştır.⁴⁴

Bu bölümde çok değişkenli EWMA kontrol grafiği bir örnek izah edilecektir.

Örnek: 4-4) Bir prosten seçilen on kalite değişkeni kullanılarak çok değişkenli EWMA kontrol grafiği düzenlenecektir. Proses kontrol altında olduğunda proses

⁴⁴ Runger vd.; Agm., s.163-164.

ortalaması, (10×1) boyutunda sıfır vektörüdür. Proseste belirlenebilir değişkenlikten dolayı sadece X_1 , X_2 , ve X_3 değişkenlerinin ortalamalarında bir kaymanın olduğu düşünülmektedir. Bu kaymaların temel vektörleri $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)'$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)'$ ve $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)'$ şeklinde olup U' matrisi ise

$$U' = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. X' in kovaryans matrisi Σ ile gösterildiğinde Formül 4-25 ve Formül 4-26'da verilen eşitlikler kullanılarak V ve Z değerleri hesaplanır. Ayrıca $(V'V)^{-1/2}$ değerinin de hesaplanması gerekir. Elde edilen bu değerler $X_{in} = (V'V)^{-1/2} V'Z$ formülünde yerine konularak X_{in} hesaplanır.

a , b , c değerleri keyfi sabitler olmak üzere $\mu_X = (a, b, c, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)'$ şeklindeki bir herhangi bir vektörde X' in ortalamasında ortaya çıkabilecek bir kayma U değerlerinin olduğu sütunların altındaki alt veri gruplarında ortaya çıkan kaymadır. Dolayısıyla Formül 4-27'de verilen merkezi olmayan parametre ve U^2 kontrol grafiğinin performansı Tablo 4-5'te verilen sonuçlardan yararlanarak değerlendirilebilir. Örneğin merkezi olmayan parametre $\delta^2=1$ olduğunda U^2 kontrol grafiğinin ARL değeri Tablo 4-5'ten 11.3 olarak elde edilir.⁴⁵

4.2.3. MEWMA kontrol grafiği için ortalama işletim uzunluğunun belirlenmesi

Kalite kontrol grafikleri için ortalama işletim uzunluğunun (ARL) belirlenmesinde; "Simülasyon yaklaşımı", "İntegral denklemi yaklaşımı" ve "Markov Zinciri yaklaşımı" olmak üzere üç farklı yaklaşım vardır. Ancak MEWMA kontrol grafiği için genellikle simülasyon ve integral denklemi yaklaşımları daha yaygın olarak kullanılır.⁴⁶ MEWMA kontrol grafiğinin ARL performansı, ortalama vektörü ve kovaryans matrisi kullanılarak sadece merkezi olmayan parametre değeri ile belirlenir.⁴⁷

Bu konuda yapılan çalışmalarda Lowry ve ark. (1992) simülasyon yaklaşımını kullanırken, Crowder (1987) prosesin kontrol altında olması durumu için ARL değerinin belirlenmesinde integral denklemi yaklaşımını kullanmıştır. Bodden ve Ridgon (1999) ile Ridgon (1995) yaptıkları çalışmalarda Crowder'in sonuçlarını

⁴⁵ Runger vd.; Agm., s.164.

⁴⁶ Molnau vd.; Agm., s.515.

⁴⁷ Choi – Lee; Agm., s.2.

geliştirmişlerdir. Ridgon (1995) integral denklemi yaklaşımını kullanarak çok değişkenli EWMA kontrol grafiği için ARL değerlerini elde etmiştir. Söz konusu araştırmacı, ortalama vektörü herhangi bir değere kaydığında MEWMA kontrol grafiği için ARL değerlerini elde etmek için analitik bir metot ortaya koymuştur. Bu analitik metot diğer çok değişkenli metotlara nazaran MEWMA kontrol grafiğine bir üstünlük sağlar.⁴⁸ Runger ve Prabhu (1996) ise MEWMA kontrol grafiği için ARL değerini hesaplamak amacıyla iki boyutlu Markov zinciri yaklaşımını tanımlamışlardır. Son yıllarda yapılan çalışmalarda ise Linderman ve Love (2000) MEWMA kontrol grafiğinin ekonomik dizaynında ARL değerlerinin elde edilmesi amacıyla simülasyon yaklaşımını kullanmışlardır. Bu bölümde Lowry ve arkadaşlarının (1992) simülasyon yaklaşımı ve Prabhu ve Runger'in (1997) Markov zinciri yaklaşımı ile elde ettikleri ARL değerleri ile ilgili sonuçlar verilecektir.

4.2.3.1. Simülasyon yaklaşımı

Lowry ve ark. (1992), simülasyon yaklaşımını kullanarak $p=2$ ve farklı r ağırlık değerleri için ARL değerlerini elde etmişlerdir. Söz konusu değerler Tablo 4-6'da gösterilmiştir.

Tablo 4-6: MEWMA kontrol grafiği için ARL değerleri

δ	r			
	0.8	0.6	0.4	0.2
0.0	200	200	199	201
0.5	95.5	73.6	51.9	35.1
1.0	28.1	19.3	13.2	10.1
1.5	10.3	7.24	5.74	5.50
2.0	4.75	3.86	3.54	3.80
2.5	2.75	2.53	2.55	2.91
3.0	1.91	1.88	2.04	2.42
H				
	10.58	10.53	10.29	9.65

Kaynak: C. A. Lowry-W. H. Woodall-C. W. Champ-S. E. Rigdon; "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart", Technometrics, Vol:34, No:1, 1992, s.48.

Tablo 4-6 incelendiğinde, MEWMA kontrol grafiğinin düzenlenmesinde küçük r

⁴⁸ Steven E. Rigdon; "A Double-Integral Equation for the Average Run Length of a Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart", Statistics and Probability Letters, Vol:24, 1995, s.365-373.

değerlerinin kullanılmasının, ortalama vektöründe ortaya çıkabilecek küçük kaymaların tespit edilmesinde daha etkili olduğu görülür. Bu durum tek değişkenli EWMA kontrol grafiği ile paralellik arz eder. Burada ARL tahminlerinin standart hataları, tahmin edilen ARL değerlerinin %1'ine yakındır.⁴⁹

Testik ve ark. (2003) simülasyon yaklaşımını kullanarak MEWMA kontrol grafiği için ARL değerlerini elde etmişlerdir. Elde ettikleri simülasyon sonuçlarına göre, uygulamalarda yaygın olarak kullanılan bireysel çok değişkenli ölçüm değerleri için kontrol grafiği düzenlenecekse MEWMA kontrol grafiği için $r=0.05$ ağırlık değerini önermektedirler. Ayrıca MEWMA kontrol grafiği, Hotelling T^2 kontrol grafiği ile karşılaştırıldığında, $\delta < 2.0$ olduğu proseslerde, küçük kaymaların tespit edilmesinde MEWMA kontrol grafiğinin daha etkili sonuçlar verdiği tespit edilmiştir.⁵⁰

4.2.3.2. Markov zinciri yaklaşımı

Markov zinciri yaklaşımı kullanılarak herhangi bir kontrol grafiğinin ortalama işletim uzunluğu (ARL) bakımından performansı, geçiş olasılık matrisinden belirlenebilir. Bu amaçla s duruma sahip bir Markov zinciri farz edildiğinde; geçiş olasılık matrisi, bir durumdan öbür duruma geçiş için gerekli olan geçiş olasılıklarını içerir. Proses ortalaması, δ merkezi olmayan parametreye eşit olduğunda $s \times s$ boyutlu geçiş olasılıkları matrisi P_δ ile gösterilir. $s \times 1$ boyutlu b matrisi ise Markov zincirinin başlangıç durumunu gösterir. Söz konusu b vektörünün başlangıç durumuna karşılık gelen elemanları 1, diğer tüm elemanları ise sıfırdır. Böylece Markov zinciri yaklaşımı kullanılarak kontrol grafiğinin sıfır durumu ARL değeri,

$$ARL = b' (I - P_\delta)^{-1} 1 \quad (4.29)$$

formülüyle hesaplanır. Formülde 1 değeri, tüm birlerin $s \times 1$ boyutlu vektörünü göstermektedir. MEWMA prosedürü, Formül 4-29'daki eşitliğe uydurularak ve Markov zinciri yaklaşımından yararlanarak düzenlenebilir.⁵¹

Formül 4-29'daki eşitlikte uygun bir değişiklik yapılarak sıfır durumu, sabit durum ve en kötü durum için ARL değerleri elde edilebilir.⁵²

Prabhu ve Runger (1997) Markov zinciri yaklaşımını kullanarak "sıfır durumu

⁴⁹ Lowry vd.; Agm., s.48.

⁵⁰ M. C: Testik – G. C: Runger – C. M. Borrer; "Robustness Properties of Multivariate EWMA Control Charts", Quality and Reliability Engineering International, Vol:19, 2003, s.31-38.

⁵¹ Molnau vd.; Agm., s.516.

⁵² Prabhu – Runger; Agm., s.11.

(Prosesin başlangıç durumu)", "sabit durum (Prosesin kontrol altında olduğu durum)" ve "kontrol dışı durumu (Prosesin kontrol dışına çıktığı durum)" için ARL değerlerini elde edip tablolar halinde özetlemiştir.

Tablo 4-7: MEWMA kontrol grafiği için ARL değerleri (Sıfır durumu)

p	δ	r							
		0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.80
2	$H=$	7.35	8.64	9.65	10.08	10.31	10.44	10.52	10.58
	0.0	199.93	199.98	199.91	199.82	199.83	200.16	200.04	200.20
	0.5	26.91	28.07	35.17	44.10	53.82	64.07	74.50	95.88
	1.0	11.23	10.15	10.20	11.36	13.26	15.88	19.24	28.65
	1.5	7.14	6.11	5.49	5.48	5.78	6.36	7.25	10.28
	2.0	5.28	4.42	3.78	3.56	3.53	3.62	3.84	4.79
	3.0	3.56	2.93	2.42	2.20	2.05	1.95	1.90	1.91
4	$H=$	11.22	12.73	13.87	14.34	14.58	14.71	14.78	14.85
	0.0	199.84	200.12	199.94	199.91	199.96	200.05	199.99	200.05
	0.5	32.29	35.11	46.30	59.28	72.43	85.28	97.56	120.27
	1.0	13.48	12.17	13.67	14.81	18.12	22.54	28.06	42.58
	1.5	8.54	7.22	6.53	6.68	7.31	8.40	10.03	15.40
	2.0	6.31	5.19	4.41	4.20	4.24	4.48	4.93	6.75
	3.0	4.23	3.41	2.77	2.50	2.36	2.27	2.24	2.37
6	$H=$	14.60	16.27	17.51	18.01	18.26	18.39	18.47	18.54
	0.0	200.11	200.03	200.11	200.18	199.81	200.01	199.87	200.17
	0.5	36.39	40.38	54.71	70.30	85.10	99.01	111.65	133.91
	1.0	15.08	13.66	14.63	17.71	22.27	28.22	35.44	53.51
	1.5	9.54	8.01	7.32	7.65	8.60	10.20	12.53	20.05
	2.0	7.05	5.74	4.88	4.68	4.80	5.20	5.89	8.60
	3.0	4.72	3.76	3.03	2.72	2.58	2.51	2.51	2.77
10	$H=$	20.72	22.67	24.07	24.62	24.89	25.03	25.11	25.17
	0.0	199.91	199.95	200.08	200.01	199.98	199.84	200.12	200.00
	0.5	42.49	48.52	67.25	85.68	102.05	116.25	128.82	148.96
	1.0	17.48	15.98	17.92	22.72	29.47	37.81	47.54	69.71
	1.5	11.04	9.23	8.58	9.28	10.91	13.49	17.17	28.33
	2.0	8.15	6.57	5.60	5.47	5.77	6.48	7.68	12.15
	3.0	5.45	4.28	3.43	3.07	2.93	2.90	2.97	3.54
15	$H=$	27.82	30.03	31.59	32.19	32.48	32.63	32.71	32.79
	0.0	199.95	199.89	200.08	200.03	199.96	199.91	199.93	200.16
	0.5	48.20	56.19	78.41	98.54	115.36	129.36	141.10	159.55
	1.0	19.77	18.28	21.40	28.06	36.96	47.44	59.03	83.86
	1.5	12.46	10.41	9.89	11.08	13.53	17.26	22.38	37.07
	2.0	9.20	7.36	6.32	6.30	6.84	7.97	9.80	16.36
	3.0	6.16	4.78	3.80	3.43	3.29	3.31	3.49	4.49

Kaynak: Sharad S. Prabhu – George C. Runger; "Designing A Multivariate EWMA Control Chart", Journal of Quality Technology, Vol:29, No:1, 1997, s.11.

Tablo 4-7, p adet kalite değişkeni, farklı r ağırlık katsayıları ve δ kayma

büyüklikleri için MEWMA kontrol grafiğinin sıfır durumu (Prosesin başlangıç durumu) ARL değerlerini göstermektedir.⁵³ Tabloda yer alan bütün ARL değerleri, sıfır durumu için ARL değerlerini göstermektedir.⁵⁴

Tablo 4-8: MEWMA kontrol grafiği için ARL değerleri (Sabit durum)

p	δ	r							
		0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.80
2	H=	7.35	8.64	9.65	10.08	10.31	10.44	10.52	10.58
	0.0	199.98	200.03	200.12	200.06	200.03	199.90	199.99	199.89
	0.5	25.09	26.87	34.26	43.36	53.22	63.49	74.09	95.62
	1.0	10.65	9.71	9.87	11.08	13.01	15.65	19.06	28.55
	1.5	6.78	5.85	5.30	5.32	5.64	6.24	7.15	10.23
	2.0	5.03	4.23	3.65	3.46	3.44	3.54	3.78	4.76
	3.0	3.39	2.81	2.34	2.12	1.99	1.91	1.88	1.91
4	H=	11.22	12.73	13.87	14.34	14.58	14.71	14.78	14.85
	0.0	199.98	200.05	199.85	200.14	199.86	199.96	199.93	200.05
	0.5	29.52	33.12	44.86	58.20	71.49	84.52	96.99	120.08
	1.0	12.27	11.38	12.13	14.38	17.74	22.21	27.78	42.47
	1.5	7.75	6.70	6.21	6.43	7.10	8.22	9.87	15.33
	2.0	5.71	4.80	4.17	4.02	4.09	4.35	4.83	6.71
	3.0	3.82	3.14	2.61	2.37	2.25	2.19	2.18	2.35
6	H=	14.60	16.27	17.51	18.01	18.26	18.39	18.47	18.54
	0.0	199.88	200	200	200.02	199.95	199.98	200.03	200.13
	0.5	31.91	37.08	52.28	68.56	83.92	98.09	111.07	133.66
	1.0	13.31	12.41	13.72	17.02	21.74	27.78	35.11	53.35
	1.5	8.43	7.25	6.80	7.26	8.31	9.95	12.33	19.95
	2.0	6.23	5.18	4.51	4.42	4.60	5.03	5.76	8.53
	3.0	4.17	3.38	2.79	2.55	2.44	2.40	2.43	2.75
10	H=	20.72	22.67	24.07	24.62	24.89	25.03	25.11	25.17
	0.0	200.06	200.06	200.03	199.93	199.98	200.04	199.87	200.16
	0.5	36.87	44.19	64.35	83.63	100.58	115.26	127.88	148.80
	1.0	15.23	14.32	16.76	21.83	28.77	37.27	47.04	69.56
	1.5	9.64	8.23	7.91	8.79	10.52	13.17	16.89	28.21
	2.0	7.11	5.83	5.12	5.12	5.50	6.26	7.49	12.06
	3.0	4.76	3.79	3.10	2.84	2.74	2.75	2.86	3.49
15	H=	27.82	30.03	31.59	32.19	32.48	32.63	32.71	32.79
	0.0	200.05	199.95	200.04	199.92	199.99	200.10	199.91	199.96
	0.5	41.78	51.23	75.13	96.21	113.72	128.23	140.17	159.07
	1.0	17.13	16.30	19.99	26.97	36.10	46.78	58.46	83.54
	1.5	10.80	9.21	9.07	10.46	13.03	16.86	22.04	36.87
	2.0	7.97	6.48	5.74	5.86	6.51	7.70	9.57	16.23
	3.0	5.32	4.18	3.40	3.13	3.06	3.13	3.34	4.42

Kaynak: Sharad S. Prabhu – George C. Runger; “Designing A Multivariate EWMA Control Chart”, Journal of Quality Technology, Vol:29, No:1, 1997, s.13.

⁵³ Prabhu – Runger; Agm., s.12.

⁵⁴ Montgomery; Age., 2001, s:526.

Tablo 4-7’de her bir p ve δ değeri için en küçük ARL değerini sağlayan r değerleri verilmiştir. Genelde küçük kaymaları tespit etmek amacıyla küçük r değerleri tercih edilir. Bu durum bütün p değerleri için geçerlidir. Bununla birlikte $p=15$ olduğunda, $\delta=2$ kayma büyüklüğünü tespit etmek için tercih edilen r değeri ($r=0.30$), $p=2$ değişkeni için tercih edilen r değerinden ($r=0.40$) küçüktür. Tablo 4-7’de ayrıca prosesin kontrol altında olması durumunda $ARL=200$ olacak şekilde $\delta=2$ kayma büyüklüğü için p değişkenleri için farklı H kontrol sınırları da verilmiştir.

Tablo 4-8, p adet kalite değişkeni, farklı r ağırlık katsayıları ve δ kayma büyüklükleri için MEWMA kontrol grafiğinin sabit durumu (Prosesin kontrol altında olduğu durum) için ARL değerlerini göstermektedir. Tabloda yer alan ARL değerleri, sıfır durumu için elde edilen ARL değerlerine yakın olmalarına rağmen söz konusu değerlerden biraz küçüktür. MEWMA kontrol grafiğinde, proseste incelenen değişkenler kontrol sınırlarına yakın bir durumda olduğunda ve kontrol sınırlarından bir kayma olduğunda grafikte ARL değerleri küçülür.

MEWMA değerleri kontrol sınırlarına yakın değerler aldığında, bu değerlerinin ters yöndeki kontrol sınırlarına doğru kayması durumunda ARL değeri düşürülebilir. Bu durumu incelemek amacıyla Tablo 4-9’deki “Kontrol dışı durumu” (Prosesin kontrol dışına çıktığı durum) için ARL değerleri göz önünde bulundurulabilir.

Tablo 4-9: MEWMA kontrol grafiği için ARL değerleri (Kontrol dışı durumu)

δ	$p=4$ ($H=15.19$)		$p=10$ ($H=25.76$)		$p=20$ ($H=40.82$)	
	Sıfır Dur.	Kötü Dur.	Sıfır Dur.	Kötü Dur.	Sıfır Dur.	Kötü Dur.
	ARL	ARL	ARL	ARL	ARL	ARL
0.5	51.65	58.05	77.44	84.39	107.05	114.24
1.0	14.61	19.58	19.42	25.24	25.23	31.78
1.5	8.23	12.20	10.46	15.15	12.95	18.30
2.0	5.80	9.05	7.26	11.13	8.82	13.30
3.0	3.74	6.08	4.64	7.43	5.57	8.86

Kaynak: Sharad S. Prabhu – George C. Runger; “Designing A Multivariate EWMA Control Chart”, Journal of Quality Technology, Vol:29, No:1, 1997, s.14.

Tablo 4-9’deki değerler $ARL_0=500$ ve $r=0.1$ için elde edilmiştir. Tabloda aynı zamanda karşılaştırmak amacıyla sıfır durumu ARL değerleri de verilmiştir. Her iki durum incelendiğinde; belirli kayma değerleri için en büyük ARL değerinin elde

edildiği başlangıç durumu, kontrol dışı duruma tercih edilir⁵⁵

Runger ve Prabhu (1996) yaptıkları çalışmada Markov zinciri yaklaşımı ile simülasyon yaklaşımı ve integral denklemi yaklaşımı ile elde edilen ARL değerlerini karşılaştırmışlardır. Bu karşılaştırmada, Lowry ve arkadaşlarının (1992) simülasyon yaklaşımı ile elde ettikleri ARL değerleri ile Rigdon'un (1995) integral denklemi yaklaşımı ile elde ettiği ARL değerleri kullanılarak karşılaştırma yapılmıştır. Söz konusu araştırmacılar MEWMA kontrol grafiği için ARL değerlerini elde etmek amacıyla iki boyutlu Markov zinciri yaklaşımını kullanmışlardır. Runger ve Prabhu (1996) bu karşılaştırma sonucunda Markov zinciri yaklaşımı ile elde edilen sonuçların daha önce yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlara paralellik arz ettiğini ifade etmişlerdir.⁵⁶

4.2.4. MEWMA kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyalinin yorumlanması

Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotların herhangi biri ile proses kontrol edildiğinde söz konusu proseste bir kontrol dışı sinyali meydana geldiğinde bu kontrol dışı sinyalin hangi değişken yada değişkenlerden kaynaklandığını tespit etmek gerekir. Bu tür proseslerde belirlenebilir değişkenlikten kaynaklanan kontrol dışı sinyalinin yorumlanmasının zor olması yanında bu kontrol dışı sinyale neden olan değişken yada değişkenlerin tespit edilmesi de oldukça zaman alır.⁵⁷ Birbirleriyle ilişkili iki veya daha fazla değişkenin incelendiği prosesler çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları ile incelendiğinde bir kontrol dışı sinyali tespit edilebildiği halde her bir değişken tek değişkenli metotlarla incelendiğinde bu kontrol dışı sinyali tespit edilemeyebilir. Bu konuyla ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır. Alt (1984), Chua ve Montgomery (1991), Doğanaksoy ve ark. (1991), Jackson (1985), Murphy (1987), Pignatello ve Runger (1990) ve Mason ve ark. (1995) bu konuda çalışma yapmışlardır. Jackson (1985) ve Pignatello ve Runger (1990) değişkenlerin tek değişkenli kontrol grafikleri ile ayrı ayrı veya temel bileşenler yardımıyla incelenmesini önermişlerdir. Alt (1984) ve Doğanaksoy ve ark. (1991) da değişkenlerin ayrı ayrı incelenmesini fakat tek değişkenli kontrol grafikleri için Bonferroni limitlerinin kullanılmasını önermişlerdir.

Lowry ve ark. (1992), yorumlanabilir olması şartıyla çok değişkenli proseste yer

⁵⁵ Prabhu – Runger; Agm., s.12-14.

⁵⁶ George C. Runger – Sharad S. Prabhu; "A Markov Chain Model for the Multivariate Exponentially Weighted Moving Averages Control Chart", Journal of American Statistical Association, Vol:91, No:436, 1996, s.1701-1706.

⁵⁷ Runger vd.; Agm., s.164.

alan değişkenlerin temel bileşenlerin gözlenmesini yada tek değişkenli kontrol grafikleri kullanılarak orijinal değişkenlerin gözlenmesini önermişlerdir. Değişkenleri kontrol altında veya kontrol dışı olarak sınıflandıran bu metotların tamamı kontrol dışı sinyali üreten tek bir gözlem değeri olan en son gözlem değerine dayanır. Bununla beraber tek değişkenli EWMA istatistiği MEWMA metodunun bir kısmı olarak hesaplanır. Bu yüzden Lowry ve ark. (1992) belirli bir değişkenin hedef değerinden kayıp kaymadığını tespit etmek için bu değişkenlerin kullanılmasını önermişlerdir. Bu kontrol dışı sinyalinin tespiti, MEWMA kontrol grafiğinde bir kontrol dışı sinyali görülünceye kadar yapılamadığından dolayı operatör, MEWMA kontrol grafiğinin yanlış bir kontrol dışı sinyali vermesi olasılığını etkilemeden karar kriterini seçmede serbesttir. Formül 4-18'de verilen MEWMA vektörü kaymanın yönünü göstermesine rağmen proses ortalama vektörünün tam tahminini vermez.

Blazek ve ark. (1987) hangi değişkenin kontrol dışına çıktığını tespit etmede oldukça faydalı olan polyplot metoduna dayanan grafiksel bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Polyplot üzerindeki alanının uzunluğu, hedef değer ile ilişkili olan her bir orijinal değişkenin değeri hakkında bilgi sağlar.⁵⁸

U transformasyonu geçirmiş verilerle çalışıldığı zaman çok değişkenli bir proseste ortaya çıkan bir kontrol dışı sinyalinin hangi değişken veya değişkenlerden kaynaklandığını tespit etmek, diğer çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarından çoğu zaman daha kolaydır. Proseste olası bir karışıklık hakkında spesifik bir bilgi, U transformasyonu geçirmiş veriler elde edilerek kullanılabilir.⁵⁹

4.3. Çok Değişkenli İstatistiksel Proses Kontrol Metotlarının (Hotelling T^2 , MCUSUM, MEWMA) ARL Bakımından Karşılaştırılması

Tek değişkenli CUSUM ve EWMA kontrol grafiklerinin proseste ortaya çıkabilecek küçük kaymaları tespit etmede Shewhart kontrol grafiğine nazaran daha etkili oldukları bilinmektedir. Bu özellik iki kontrol grafiği için önemli bir avantaj sağlar. Örneğin Shewhart kontrol grafiği kullanılarak proses ortalamasında ortaya çıkabilecek 1 sigmalık kaymayı tespit etmek için ortalama işletim uzunluğu (ARL) yaklaşık olarak 44 örnektir. Yani proses ortalamasında ortaya çıkabilecek bir kaymayı tespit etmek için 44 örneğin alınması gerekir. Buna karşılık aynı kaymayı tek değişkenli

⁵⁸ Lowry vd.; Agm., s.52.

⁵⁹ Runger vd.; Agm., s.164.

CUSUM veya EWMA kontrol grafiklerinden birisi ile tespit etmek istediğimizde 10 veya daha az sayıda örnek almak yeterli olmaktadır. Bu önemli avantaj çok değişkenli prosesler için de geçerlidir. Çok değişkenli EWMA (MEWMA) veya çok değişkenli CUSUM (MCUSUM) metotları, proses ortalamasında ortaya çıkabilecek küçük veya orta derecedeki kaymaları Hotelling T^2 kontrol grafiğinden mümkün olduğu kadar daha küçük bir ARL değeri ile tespit edebilirler.⁶⁰

Lowry ve ark. (1992), çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının ortalama işletim uzunluğu (ARL) bakımından performanslarını karşılaştırmışlardır. Bu karşılaştırmada aşağıda sıralanan çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları kullanılmıştır:

- * Hotelling T^2 kontrol grafiği,
- * Crosier'in çok değişkenli CUSUM (MCUSUM) metodu,
- * Pignatiello ve Runger'in MCUSUM(MC1) metodu,
- * Formül 4-19'dan elde edilen kovaryans matrisinin kullanılması ile hesaplanan T_1^2 istatistiği ile düzenlenen MEWMA1 kontrol grafiği,
- * Formül 4-20'den elde edilen kovaryans matrisinin kullanılması ile hesaplanan T_1^2 istatistiği ile düzenlenen MEWMA2 kontrol grafiği.

Burada proses ortalama vektörünün herhangi bir değere kaydığı durumlar için bu kaymanın, kontrol grafiği düzenlenmeden önce meydana geldiği varsayılmıştır. Prosesin sabit durumu için ARL karşılaştırmaları, proses ortalama vektöründe kaymaların meydana geldiği durumlardaki performans karşılaştırmasında oldukça yardımcı olmaktadır. Yukarıda ifade edilen çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının her birinin performansı, ortalama vektörü ve kovaryans matrisi ile sadece merkezi olmayan parametre değerine bağlı olmasından dolayı ARL karşılaştırmaları oldukça kolaydır. Sabit bir ortalama vektörü için T_1^2 değerleri bağımsız aynı zamanda p serbestlik derecesi ve merkezi olmayan parametre δ ile merkezi olmayan ki-kare dağılımı gösterdiğinden dolayı Hotelling T^2 kontrol grafiği için bu durum doğrudur.

Lowry ve ark. (1992) yaptıkları ARL karşılaştırmalarını tablolar halinde sunmuşlardır. $p=2, 3, 4, 5, 10$ ve 20 kalite değişkenleri için söz konusu metotların ARL karşılaştırmaları Tablo 4-10'da verilmiştir. Her bir metot, proses kontrol altında iken

⁶⁰ Runger vd.; Agm., s.164.

ARL değeri yaklaşık olarak 200 olacak şekilde düzenlenmiştir. Hotelling T^2 kontrol grafiği hariç diğer metotların ARL değerleri, simülasyon yaklaşımı kullanılarak elde edilmiştir. Bu karşılaştırmada, Hotelling T^2 kontrol grafiğinin kontrol durumundaki ortalama vektöründe meydana gelebilecek büyük kaymalar hariç diğer kaymaları tespit etmede fazla etkili olmadığı görülür.

Tablo:4-10: p=2, 3, 4, 5, 10 ve 20 kalite değişkenleri için ARL karşılaştırmaları

p=2 için ARL karşılaştırması					
δ	Hotelling T^2	MCUSUM	MC1	MEWMA1	MEWMA2
0.0	200	200	203	200	200
0.5	116	28.8	31.3	25.3	28.1
1.0	42.0	9.35	9.28	7.76	10.2
1.5	15.8	5.94	5.23	4.07	6.12
2.0	6.9	4.20	3.69	2.59	4.41
2.5	3.5	3.26	2.91	1.89	3.51
3.0	2.2	2.78	2.40	1.50	2.92
p=3 için ARL karşılaştırması					
0.0	201	200	200	202	200
0.5	130	32.7	33.5	28.5	31.8
1.0	52.6	11.2	10.1	8.64	11.3
1.5	20.5	6.69	5.66	4.47	6.69
2.0	8.8	4.70	4.00	2.84	4.86
2.5	4.4	3.83	3.17	2.08	3.83
3.0	2.6	3.17	2.63	1.62	3.20
p=4 için ARL karşılaştırması					
0.0	200	200	---	201	201
0.5	138	34.2	---	32.1	34.7
1.0	60.9	12.2	---	9.46	12.1
1.5	24.6	7.42	---	4.84	7.23
2.0	10.6	5.42	---	3.07	5.18
2.5	5.19	4.34	---	2.22	4.10
3.0	2.93	3.65	---	1.72	3.41
p=5 için ARL karşılaştırması					
0.0	200	200	---	201	201
0.5	145	37.2	---	34.3	37.7
1.0	68.1	14.0	---	10.2	12.9
1.5	28.5	8.25	---	5.18	7.63
2.0	12.4	6.20	---	3.28	5.49
2.5	5.99	4.94	---	2.34	4.32
3.0	3.31	4.04	---	1.80	3.59

Kaynak: C. A. Lowry-W. H. Woodall-C. W. Champ-S. E. Rigdon; "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart", Technometrics, Vol:34, No:1, 1992, s.50-52.

Tablo:4-10'un devamı

p=10 için ARL karşılaştırması					
δ	Hotelling T^2	MCUSUM	MC1	MEWMA1	MEWMA2
0.0	200	200	202	201	200
0.5	162	43.2	43.9	44.3	48.1
1.0	92.8	18.6	12.6	12.8	15.9
1.5	44.7	11.8	7.66	6.28	9.16
2.0	20.6	8.79	5.66	3.96	6.55
2.5	9.90	7.03	4.55	2.79	5.15
3.0	5.20	5.86	3.84	2.14	4.28
p=20 için ARL karşılaştırması					
0.0	200	200	---	200	201
0.5	174	55.9	---	58.1	64.1
1.0	117	27.2	---	16.4	20.0
1.5	66.2	17.9	---	7.96	11.3
2.0	34.3	13.3	---	4.96	8.00
2.5	17.4	10.8	---	3.43	6.26
3.0	9.1	9.1	---	2.59	5.19

Kaynak: C. A. Lowry-W. H. Woodall-C. W. Champ-S. E. Rigdon; "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart", Technometrics, Vol:34, No:1, 1992, s.50-52.

Formül 4-19'dan elde edilen kovaryans matrisinin kullanılması ile hesaplanan T_1^2 istatistiği ile düzenlenen MEWMA1 kontrol grafiği ilk başlarda meydana gelebilecek kaymaların tespit edilmesinde oldukça etkilidir. Formül 4-20'den elde edilen kovaryans matrisinin kullanılması ile hesaplanan T_1^2 istatistiği ile düzenlenen MEWMA2 kontrol grafiğinin ARL performansı ise bu karşılaştırmada kullanılan çok değişkenli CUSUM metotlarının performansına oldukça benzer.

Lowry ve ark. (1992) MEWMA istatistiğinin hesaplanmasında Formül 4-19'dan elde edilen kovaryans matrisinin kullanılmasını tavsiye etmişlerdir. Şayet proses başlarda kontrol dışına çıkarsa Formül 4-19'dan elde edilen kovaryans matrisinin kullanılması ile hesaplanan T_1^2 istatistiği ile düzenlenen MEWMA1 kontrol grafiğinin ARL performansı oldukça iyidir. Oysa proses başlarda kontrol altında olup daha sonra kontrol dışına çıkarsa bu durumda Formül 4-20'den elde edilen kovaryans matrisinin kullanılması ile hesaplanan T_1^2 istatistiği ile düzenlenen MEWMA2 kontrol grafiği daha etkili sonuçlar verir.

Ayrıca burada merkezi olmayan parametreye dayalı ARL karşılaştırmalarında iki varsayımın olduğunu ifade etmek gerekir. Bu varsayımların ilkinde, kontrol durumundaki ortalama vektöründe meydana gelebilecek herhangi bir kaymanın

büyükliğüne bakılmaksızın, bu kaymanın mümkün olduğu kadar çabuk tespit edildiği varsayılır. İkincisinde, $\mu_1' \Sigma^{-1} \mu_1 = \mu_2' \Sigma^{-1} \mu_2$ olduğunda proses ortalama vektörü $\mu = \mu_1$ gibi bir değere kaydığında bu kaymanın, $\mu = \mu_2$ gibi bir kaymanın tespit edildiği kadar çabuk tespit edildiği varsayılır. Kısaca ifade etmek gerekirse ARL değeri, merkezi olmayan parametrenin bir fonksiyonudur.⁶¹



⁶¹ Lowry vd.; Agm., s.50-52.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL PROSES KONTROL METOTLARI İLE DÖKÜM SANAYİNDE İCRA EDİLEN BİR İSTATİSTİKSEL PROSES KONTROL (İPK) UYGULAMASI

Bu bölümde, çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları kullanılarak otomotiv sanayine döküm parçaları üreten Döktaş Dökümcülük Tic. ve San. A.Ş.'de bir istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması yapılacaktır. Uygulamada işletmede üretimi yapılan “otomatik transmisyonlarda kullanılan kavrama silindiri” döküm parçası ile ilgili veriler kullanılmıştır. Söz konusu veriler; kavrama silindirine ait $\phi 1$, $\phi 2$, yükseklik ve kaçıklık olmak üzere dört değişkenden oluşmaktadır. İPK uygulaması icra edilmeden önce işletme hakkında kısa bir bilgi verilecektir.

Bursa iline bağlı Orhangazi ilçesinde faaliyet gösteren işletme; motor blok kafaları, debriyaj merkezi silindirleri, transmisyon gövdeleri, dişli kutuları, fren kampanaları ve diskleri, volanlar, kam milleri, krank milleri, manifoldlar, diferansiyel kutuları, poryalar, planet taşıyıcı, aks kovanları ve aks dingilleri gibi muhtelif döküm parçaları üretmektedir. İşletme iç pazarda; Tofaş, Renault, Otosan, Hyundai Assan, Toyota, Paksan, Türk Traktör, Otoyol, Türkiye Ziraat Donatım Kurumu, dış pazarda ise Ford, Caterpillar, Massey Ferguson, New Holland, Iveco, Kessler, Carraro ve Graziano gibi firmalara döküm parçaları üretmektedir.

5.1. İşletmede Yürütülen İPK Uygulamaları

Bu bölümde, işletmede yürütülen İPK uygulamalarından kısaca bahsedilecektir. İşletmede üretilen döküm parçaları kimyasal, fiziksel ve metalografik testlerden geçirilmektedir. Bu testlerin yapılacağı bir laboratuvar mevcuttur. Bu laboratuvar da üretimi yapılan parçalar yukarıda sıraladığımız testlerden geçirilerek elde edilen sonuçlar İPK uygulamalarında kullanılmaktadır. İPK çalışmaları laboratuvardaki uzmanlar tarafından yürütülmektedir.

Üretilen parçalardan Tablo 5-1’de görülen örnekleme planına göre örnekleme yapılarak kontroller yapılmaktadır. Tablo 5-1’de sayılabilen taneli malzemeler için örnekleme planı görülmektedir. Bu tablo üretilen parçaların kitle büyüklüğüne ve kabul edilen kalite seviyesine (AQL) göre alınması gereken örnek büyüklüklerini göstermektedir. Üretilen parçanın kabul edilen kalite seviyesi ve kitle büyüklüğü tespit

edilip, tablodan örnek büyüklüğü belirlenerek kontrol çalışmaları yürütülmektedir. Döküm parçaları için kabul edilen kalite seviyesi işletme tarafından AQL=0.65 olarak belirlenmiştir.

Tablo 5-1: Sayılabilen taneli malzemeler için örnekleme planı

Kitle büyüklüğü	Kabul edilen kalite seviyesi (AQL)						
	0.10	0.25	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0
100'den az	%100	40/0	20/0	15/0	10/0	8/0	5/0
101-280	90/0	45/0	24/0	15/0	10/0	8/0	3/0
281-1200	125/0	60/0	30/0	15/0	20/0	16/0	9/0
	125/0	60/0	30/0	15/0	20/0	16/0	9/0
1201-3200	150/0	100/0	50/0	20/0	40/0	28/0	16/0
	150/0	100/0	50/0	20/0	40/0	28/0	16/0
3201-10000	250/0	160/0	90/0	40/0	55/0	34/0	22/0
	250/0	160/0	90/0	40/0	55/0	34/0	22/0
10001-35000	300/0	200/0	120/0	80/0	70/0	44/0	28/0
	300/0	200/0	120/0	80/0	70/0	44/2	28/0
35001-150000	500/0	300/0	150/0	100/1	80/1	50/1	32/1
	500/1	300/1	150/1	100/2	80/2	50/3	32/3

Kaynak: Döktaş Dökümcülük Tic. ve San. A.Ş Kalite Bölümü.

Elde edilen bu değerlerin İPK analizleri Ford firmasının onaylı “Quality Analyst” paket programında yapılmakta ve elde edilen sonuçlar yorumlanarak proseste bir değişme olduğunda prosesin düzeltilmesi için gerekli bilgi ilgili üretim bölümlerine iletilmektedir.

İşletme ile ilgili kısa bir bilgi verildikten sonra uygulamanın nasıl ve ne şekilde icra edileceği hakkında da kısa bir bilgi verilecektir. Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları ile istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması yapmak amacıyla otomatik transmisyonlarda kullanılan “kavrama silindiri” döküm parçası kullanılmıştır. Bu amaçla fabrikada üretilen kavrama silindirinin dört değişkenine ait 150 örnek büyüklüğünde veri seti alınmıştır. Bu seri seti tespit edilirken Tablo 5-1’deki örnekleme planı kullanılmıştır. Tablo 5-1’den 0.65 kabul edilebilir kalite seviyesi ve 36000 adet olarak üretilen bir partiden örnek büyüklüğü, 150 olarak tespit edilmiştir. Örnek büyüklüğü tespit edildikten sonra, kontrol amacıyla döküm parçasında ölçülen; çap1,

çap2, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri ilgili değerler ele alınmıştır. Söz konusu değişkenlere ait değerler Ek Tablo 1’de verilmiştir. Döküm parçasına ait bu dört kalite değişkeni kullanılarak çok değişkenli istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması icra edilecektir.

İPK uygulaması iki şekilde icra edilecektir. İlk olarak söz konusu dört değişken tek tek ele alınarak tek değişkenli metotlarla İPK uygulaması yapılacaktır. Tek değişkenli metotlar ile incelendikten sonra proses, çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları ile incelenecektir. Bu amaçla değişkenler ikişerli ve üçerli olarak gruplandırılıp çok değişkenli İPK uygulaması icra edildikten sonra son olarak dört değişken birlikte ele alınarak çok değişkenli İPK uygulaması yapılacaktır. Böylece kavrama silindiri üretim prosesi her açıdan izlenecektir. Bu sayede tek ve çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları arasındaki karşılaştırmada ortaya konulacaktır.

İPK uygulaması üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde kavrama silindiri üretim prosesi Hotelling T^2 kontrol grafiği ile incelenmiştir. Proses Hotelling T^2 kontrol grafiği ile incelenmeden önce Shewhart kontrol grafikleri ile gözlenmiştir. Bu amaçla kavrama silindirine ait dört değişken tek tek ele alınarak bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri düzenlenmiştir. Daha sonra ise söz konusu değişkenler ikişerli ve üçerli olarak gruplandırılıp Hotelling T^2 kontrol grafiği ile proses gözlenmiştir. Son olarak dört değişken birlikte ele alınarak Hotelling T^2 kontrol grafiği düzenlenerek proses incelenmiştir. İkinci bölümde ise proses çok değişkenli kümülatif toplam kontrol metotları (MCUSUM) ile incelenmiştir. Bu bölümde de ilk olarak tek değişkenli kümülatif toplam (CUSUM) kontrol grafiği ile proses kontrol edilmiştir. Daha sonra yukarıda ifade edildiği gibi değişkenler gruplandırılarak çok değişkenli MCUSUM metotları ile prosesin kontrol altında olup olmadığı araştırılmıştır. Son bölümde ise çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama kontrol grafiği (MEWMA) ile prosesin kontrolü yapılmıştır. Yukarıda ifade edilen aşamalar bu bölümde de tekrarlanmıştır.

Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulamasının nasıl icra edileceği genel çerçevesi ile anlatıldıktan sonra yukarıda ifade edilen aşamalar sırasıyla icra edilecektir. Teori bölümünde metotlar geniş bir şekilde izah edildiğinde dolayı bu bölümde fazla ayrıntıya girilmeyecektir. Bu bölümde sadece elde edilen değerler tablolar halinde verilip bu tablolardaki değerler kullanılarak grafikler düzenlenecektir.

5.2. Hotelling T^2 Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması

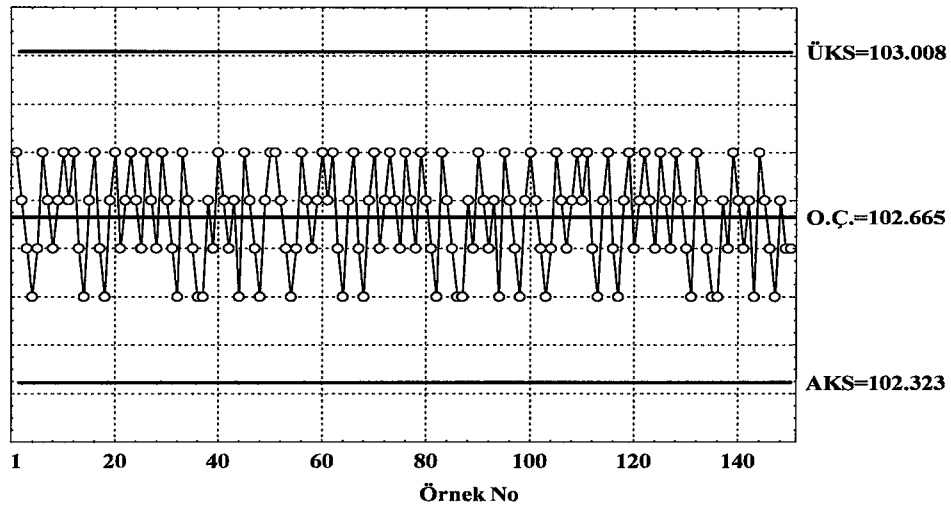
Bu bölümde otomatik transmisyonlarda kullanılan “kavrama silindirine” ait ϕ_1 , ϕ_2 , yükseklik ve kaçıklık değerleri ele alınarak ilk olarak Shewhart kontrol grafikleri düzenlenecektir. Daha sonra ise Hotelling T^2 kontrol grafiği ile bir istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması yapılacaktır. Elde edilen veri seti $n=1$ bireysel gözlem değerlerinden oluştuğundan bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri ile bireysel gözlemler için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği kullanılarak İPK uygulaması icra edilecektir.

5.2.1. Shewhart kontrol grafikleri ile İPK uygulaması

Bu bölümde proseste incelenen dört değişkene ait 150 örnekten oluşan veri seti kullanılarak her bir değişken için bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri düzenlenecektir.

Çap1 değişkeni için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı kontrol grafikleri:

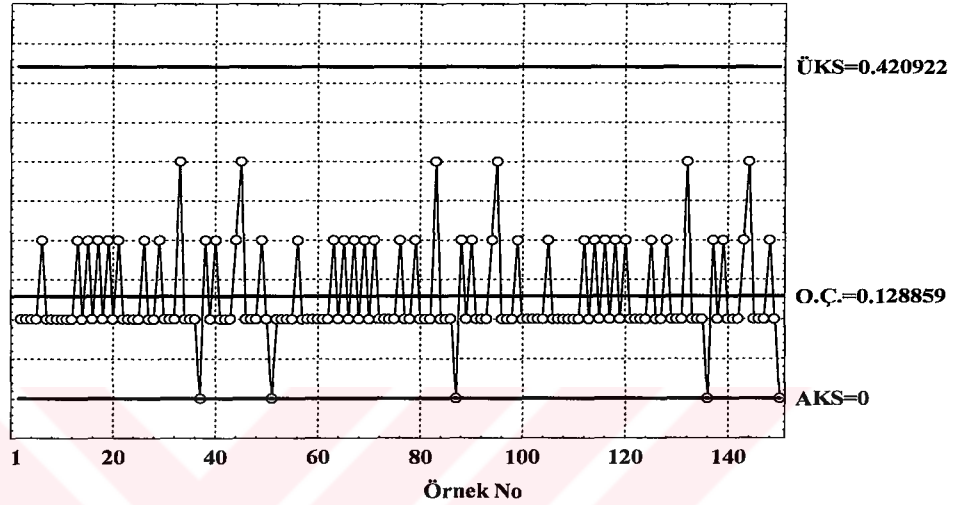
Kavrama silindirinin ϕ_1 değişkenine ait veriler kullanılarak bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri düzenlenmiştir. Söz konusu ϕ_1 değişkenine ait veriler ve MR değerleri Ek Tablo 2’de verilmiştir.



Şekil 5-1: Çap1 değerlerine ait bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği

Kavrama silindirinin ϕ_1 değişkenine ait Ek Tablo 2’deki veriler kullanılarak

bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-1'de verilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu görülmektedir. Kontrol grafiğinde görüldüğü üzere bütün gözlem değerleri alt ve üst kontrol sınırlarının arasında kalmıştır.



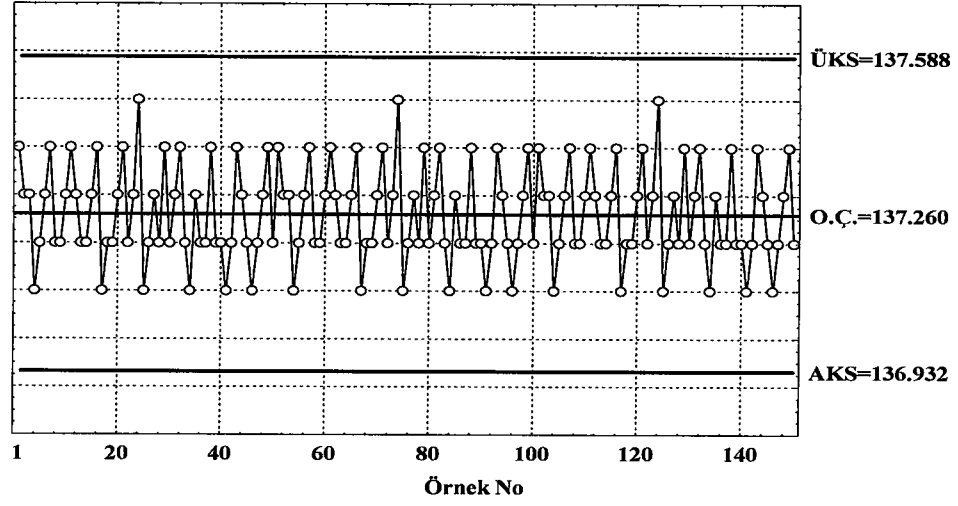
Şekil 5-2: Çap1 değişkenine ait MR kontrol grafiği

Bu bölümde ayrıca çap1 değişkeni için hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu kontrol grafiği Şekil 5-2'de görülmektedir. *MR* kontrol grafiği incelendiğinde tüm hareketli değişim aralığı değerlerinin kontrol sınırlarının arasında olduğu görülür. Bu durumda prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir. Bu bölümde düzenlenen her iki kontrol grafiği de prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Çap2 değişkeni için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı kontrol grafikleri:

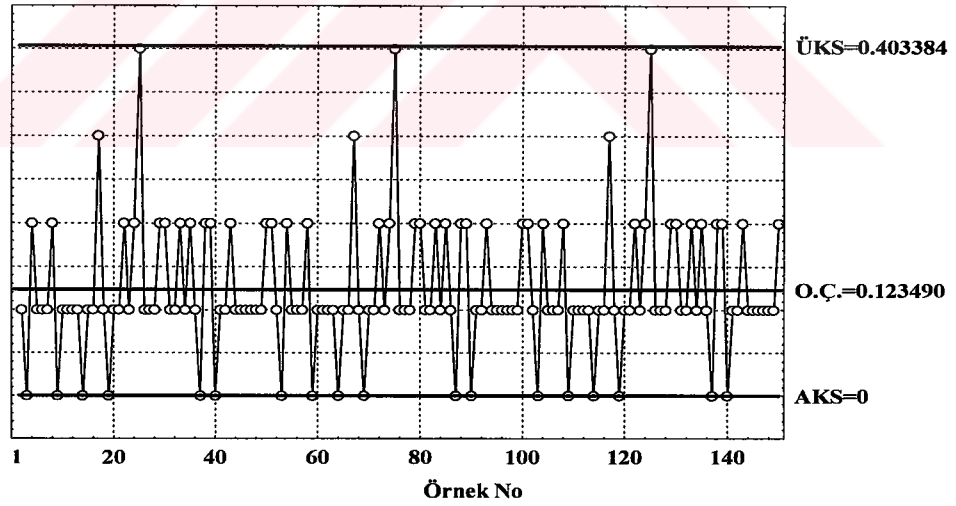
Kavrama silindirinin çap2 değişkenine için bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri düzenlenmek amacıyla söz konusu değişkene ait veriler ve *MR* değerleri Ek Tablo 3'te verilmiştir.

Kavrama silindirinin çap2 değişkenine ait veriler kullanılarak bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-3'te verilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.



Şekil 5-3: Çap2 değişkenine ait bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği

Bu bölümde ayrıca çap2 değişkeni için hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu kontrol grafiği Şekil 5-4'te görülmektedir. *MR* kontrol grafiğinde görüldüğü gibi proses kontrol altındadır. Böylece çap2 değişkeni için düzenlenen her iki kontrol grafiği prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

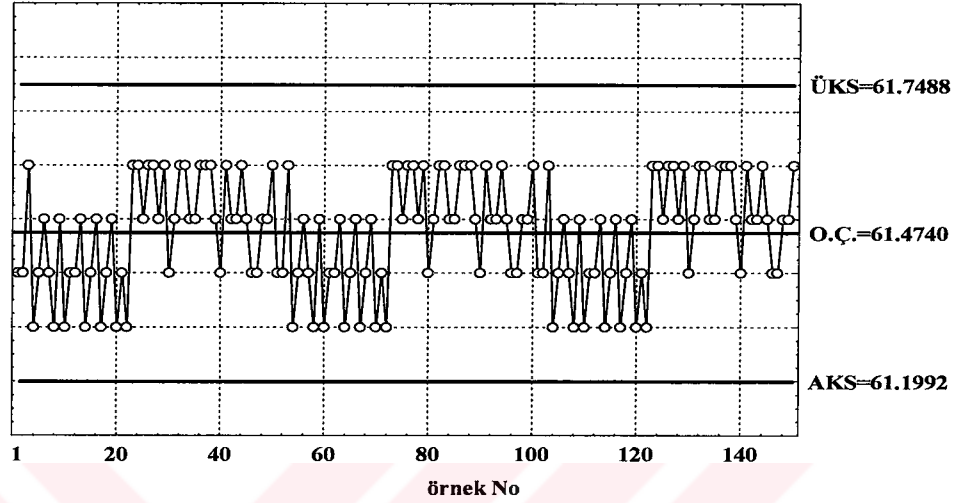


Şekil 5-4: Çap2 değişkenine ait MR kontrol grafiği

Yükseklik değişkeni için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı kontrol grafikleri:

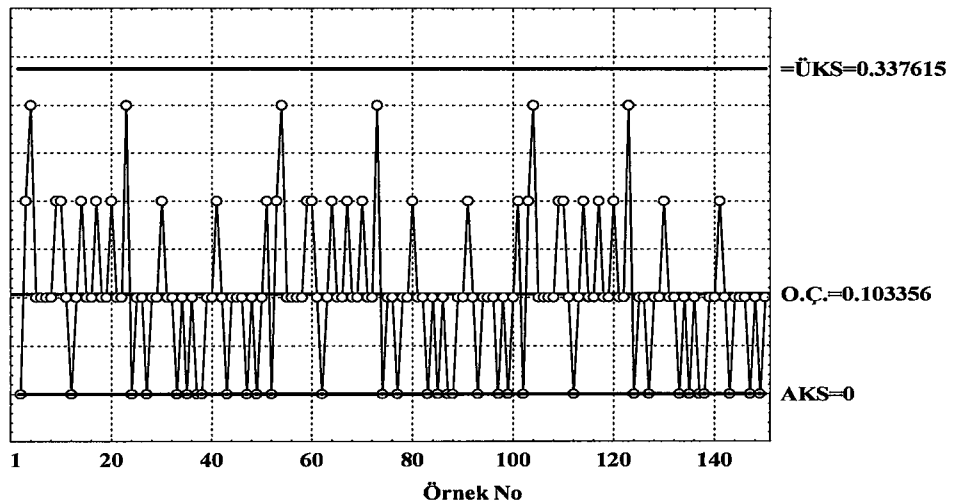
Kavrama silindirinin yükseklik değişkenine ait veriler kullanılarak bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri düzenlenmiştir. Bu amaçla yükseklik değişkeni için elde edilen veriler ve *MR* değerleri Ek Tablo 4'te

verilmiştir. Tablodaki değerler kullanılarak bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği düzenlenmiştir. Yükseklik değerleri için düzenlenen bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği Şekil 5-5'te görülmektedir.



Şekil 5-5: Yükseklik değerlerine ait bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği

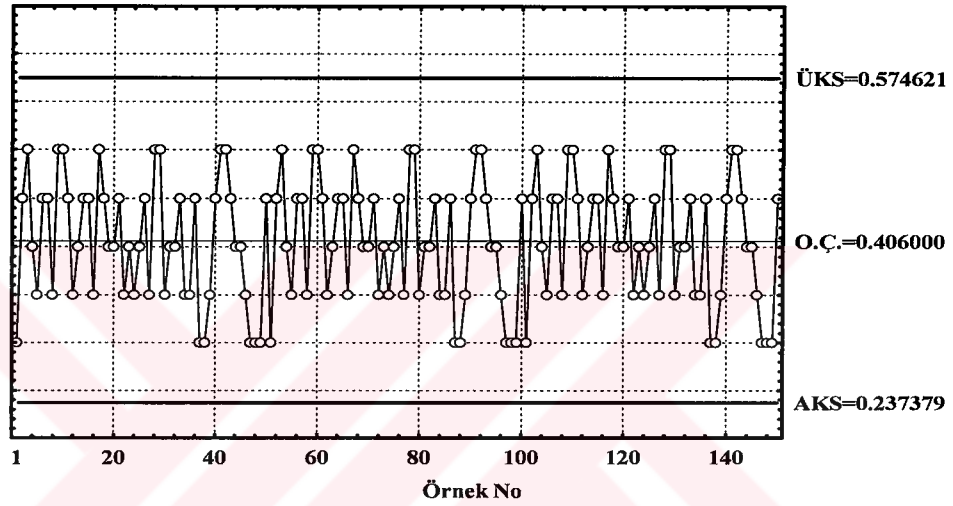
Kontrol grafiği incelendiğinde bütün değerlerin kontrol sınırları arasında olduğu görülür. Bu durumda prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir. Yükseklik değişkeni için hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafiği düzenlendiğinde ise aynı şekilde prosesin kontrol altında olduğu görülmüştür. Yükseklik değişkeni için düzenlenen hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafiği Şekil 5-6'da verilmiştir.



Şekil 5-6: Yükseklik değişkenine ait MR kontrol grafiği

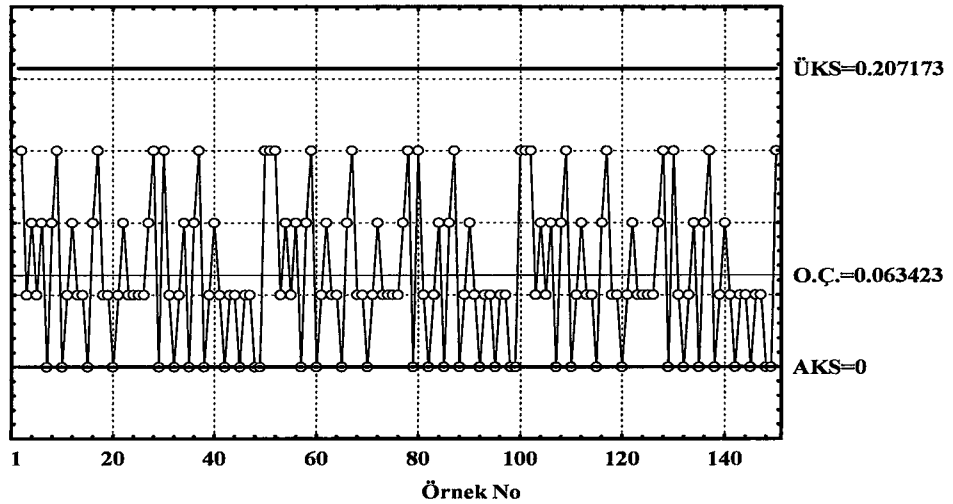
Kaçıklık değişkeni için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı kontrol grafikleri:

Bu bölümde son olarak kavrama silindirinin kaçıklık değişkenine ait veriler için bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri düzenlenmiştir. Kaçıklık değişkenine ait veriler ve hesaplanan *MR* değerleri Ek Tablo 5'te verilmiştir. Ek Tablo 5'te verilen kaçıklık değerleri için düzenlenen bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği Şekil 5-7'de görülmektedir.



Şekil 5-7: Kaçıklık değerlerine ait bireysel gözlem değerleri kontrol grafiği

Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu görülür. Kaçıklık değişkeni için düzenlenen *MR* kontrol grafiği ise Şekil 5-8'de görülmektedir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu gözlemlenir.



Şekil 5-8: Kaçıklık değişkenine ait MR kontrol grafiği

Kavrama silindirinin dört değişkeni için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir. Proses, tek değişkenli Shewhart kontrol grafikleri ile incelendikten sonra bu bölümde Hotelling T^2 kontrol grafikleri ile incelenecektir.



5.2.2. Hotelling T^2 kontrol grafikleri ile İPK uygulaması

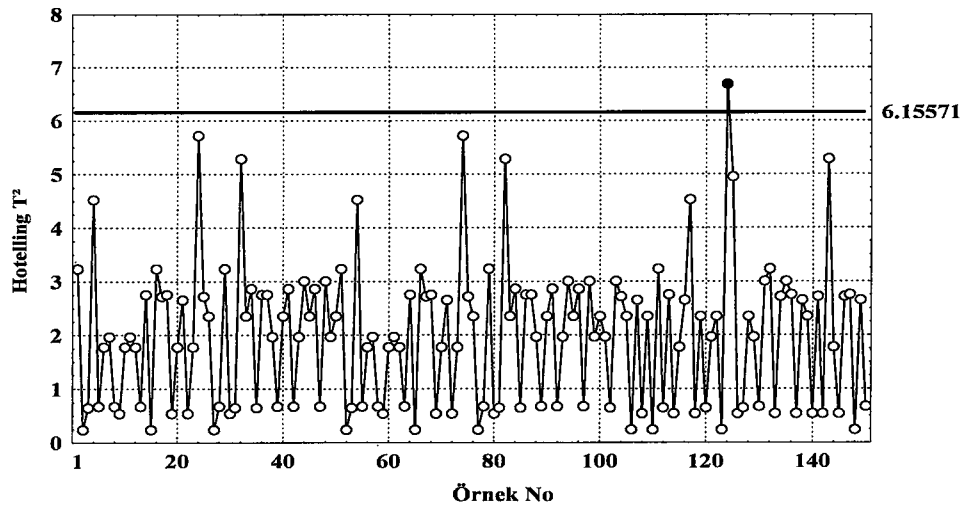
Proses, Shewhart kontrol grafikleri ile kontrol edildikten sonra bu bölümde Hotelling T^2 kontrol grafikleri ile incelenecektir. Proseste kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni incelenmiştir. Bu bölümde, dört değişken öncelikle ikiyeşerli daha sonra üçerli gruplandırılarak Hotelling T^2 kontrol grafikleri düzenlenecektir. Son bölümde ise dört değişken birlikte ele alınıp Hotelling T^2 kontrol grafiği düzenlenerek prosesin kontrolü yapılacaktır.

5.2.2.1. İki değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri

Bu bölümde kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni ikiyeşerli gruplandırılarak proses incelenecektir. Bu gruplandırmalar; $\text{çap1} - \text{çap2}$, $\text{çap1} - \text{yükseklik}$, $\text{çap1} - \text{kaçıklık}$, $\text{çap2} - \text{yükseklik}$, $\text{çap2} - \text{kaçıklık}$, ve $\text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ şeklindedir. Bu gruplandırmalar için Hotelling T^2 kontrol grafikleri aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

Çap1 – Çap2 değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 ve çap2 değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından Hotelling T^2 kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için elde edilen T^2 değerleri Ek Tablo 6'da verilmiştir. Tablodaki değerler kullanılarak çap1 ve çap2 değişkenleri birlikte ele alınarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği ise Şekil 5-9'da görülmektedir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 124 numaralı örneğin alınması zamanından itibaren kontrol dışına çıktığı tespit edilir.



Şekil 5-9: Çap1 - çap2 değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Burada kontrol dışı sinyali tespit edilmesine rağmen söz konusu iki değişken daha önceki bölümde Shewhart kontrol grafikleri ile incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu tespit edilmişti. Böylece proses tek değişkenli metotlar ile incelendiğinde kontrol dışı durum tespit edilemezken çok değişkenli metotlar ile proses kontrol edildiğinde kontrol dışı sinyali tespit edilebilir. Bu durum değişkenler arasındaki ilişki ile açıklanabilir.

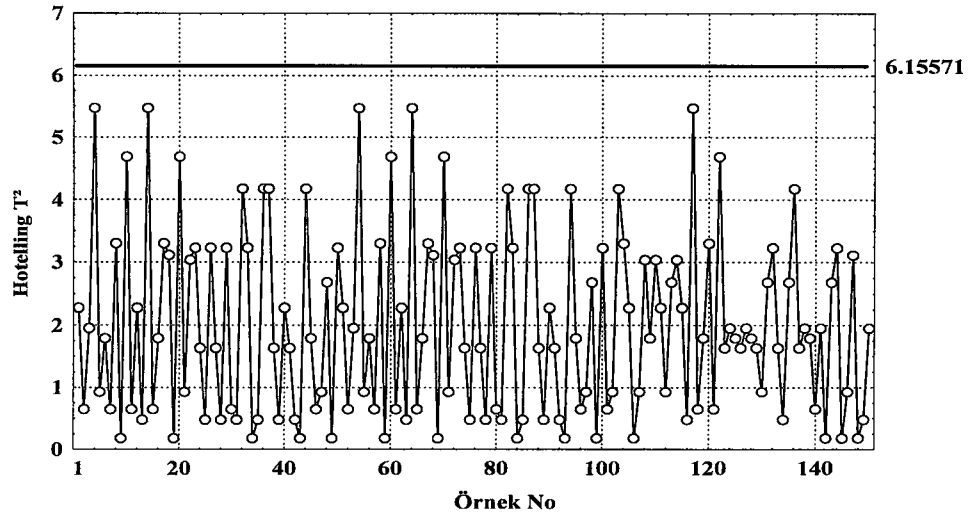
Prosesin kontrol dışına çıktığı tespit edildikten sonra kontrol dışı sinyalinin hangi değişken yada değişkenlerden kaynaklandığı problemi ile karşı karşıya kalınır. Bu problemi çözmek amacıyla Mason, Young ve Tracy (MYT)'nin T^2 istatistiğini ayrıştırma metodu kullanılabilir. Söz konusu metot ikinci bölümde geniş bir şekilde anlatılmıştı. Bu metot yardımıyla çap1 ve çap2 değişkenleri için elde edilen T^2 istatistiği ayrıştırılarak söz konusu problem çözülebilir.

Yukarıda prosesin 124 numaralı örneğin alınması zamanından itibaren kontrol dışına çıktığı tespit edilmişti. Söz konusu örnek için T^2 değeri 6.68 olarak hesaplanmıştır. İki değişken için ayrıştırma işlemi yapıldığında T^2 değeri çap1 değişkeni için 0.4035 ve çap2 değişkeni için ise 6.276 olarak hesaplanır. Bu durumda genel T^2 değerine en büyük katkının çap2 değişkeni için hesaplanan T^2 değerinden kaynaklandığı belirlenir. Bu değer istatistiki bakımından da anlamlı bulunmuştur. Böylece 124 numaralı örnekte ortaya çıkan kontrol dışı sinyalinin çap2 değişkeninden kaynaklandığına karar verilir.

Çap1 – Yükseklik değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından Hotelling T^2 kontrol grafiği ile kontrol edilmiştir. Bu iki değişken için elde edilen T^2 değerleri Ek Tablo 7'de verilmiştir.

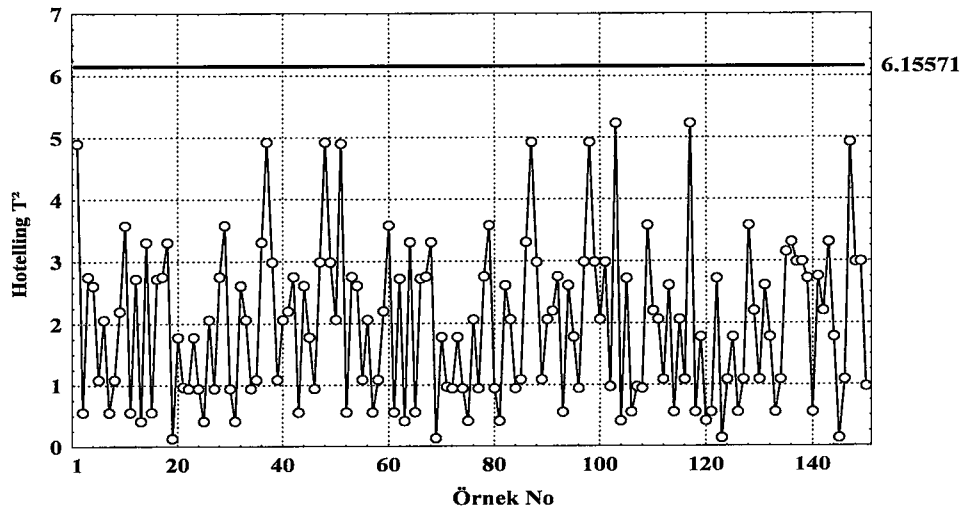
Tablodaki değerler kullanılarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği Şekil 5-10'da görülmektedir. Çap1 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir. Bu durum iki değişken için düzenlenen Shewhart kontrol grafikleri ile paralellik arz etmektedir. Çap1 ve yükseklik değişkenleri için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri de prosesin kontrol altında olduğunu göstermişti.



Şekil 5-10: Çap1 - yükseklik değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Çap1 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından Hotelling T^2 kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için hesaplanan T^2 değerleri Ek Tablo 8’de verilmiştir. Ek Tablo 8’deki değerler kullanılarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği ise Şekil 5-11’de görülmektedir. Çap1 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak iki değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu tespit edilir. Bu bölümde de çap1 ve yükseklik değişkenlerinde olduğu gibi bir kontrol dışı sinyali tespit edilememiştir. Shewhart kontrol grafikleri ile proses incelendiğinde de aynı durum ile karşılaşmıştır.

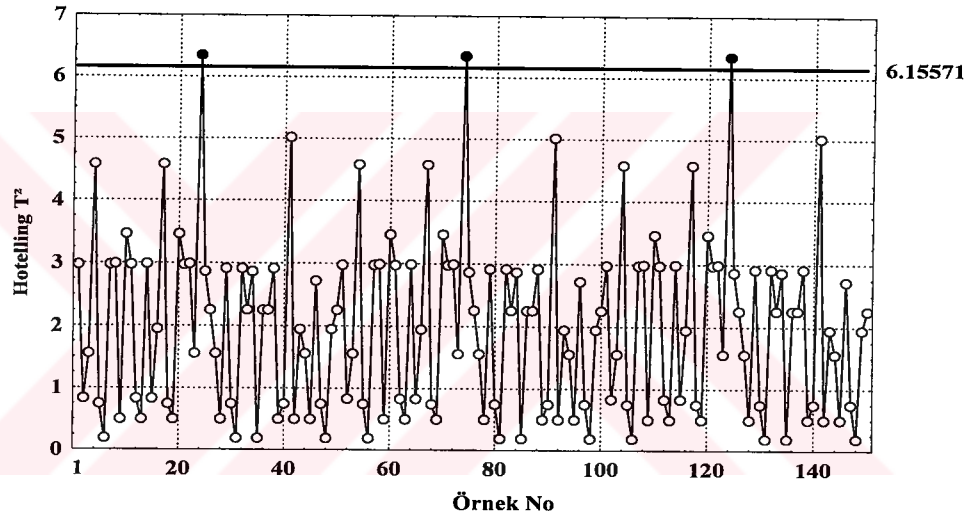


Şekil 5-11: Çap1 - kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Çap2 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak iki değişken açısından Hotelling T^2 kontrol grafiği ile prosesin kontrolü yapılmıştır. Bu iki değişken için elde edilen T^2 değerleri Ek Tablo 9'da verilmiştir. Tablodaki değerler kullanılarak Çap1 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak iki değişken için Hotelling T^2 kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-12'de verilmiştir.

Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 24 numaralı örneğin alınması zamanından itibaren kontrol dışına çıktığı görülmektedir. Üretime devam edildiğinden dolayı proses aynı zamanda 74 ve 125 numaralı örneklerde de kontrol dışına çıkmıştır.



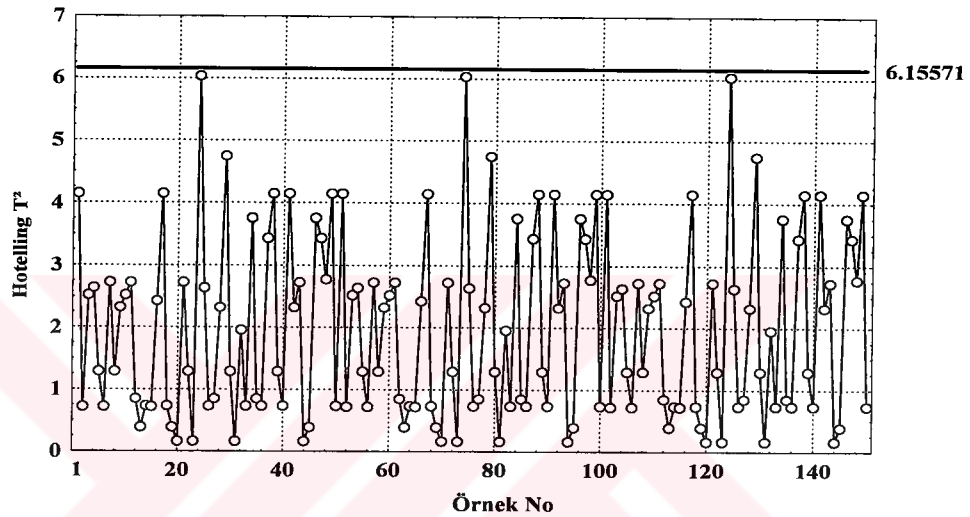
Şekil 5-12: Çap2 - yükseklik değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Burada tespit edilen kontrol dışı sinyali daha önce söz konusu iki değişken için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafiklerinde tespit edilememiştir.

Proseste kontrol dışı tespit edildikten sonra MYT ayrıştırma metodu kullanılarak kontrol dışı sinyaline neden olan değişken ve tespit edilebilir. 24 numaralı örnek için ayrıştırma işlemi yapıldığında söz konusu kontrol dışı sinyalinin çap2 değişkeninden kaynaklandığı belirlenir. 24 numaralı örnek için T^2 değeri 6.34 olarak hesaplanmıştır. Bu değer ayrıştırıldığında çap2 değişkeni için T^2 değeri 5.72 ve yükseklik değişkeni için T^2 değeri 0.62 olarak hesaplanır. Böylece genel T^2 değerine en büyük katkı çap2 değişkeninden kaynaklandığından dolayı kontrol dışı sinyaline çap2 değişkeni neden olmuştur.

Çap2 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından Hotelling T^2 kontrol grafiği ile gözlemlenmiştir. Söz konusu değişkenler için T^2 değerleri hesaplanmış ve Ek Tablo 10'da verilmiştir. Çap2 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği ise Şekil 5-13'te görülmektedir.

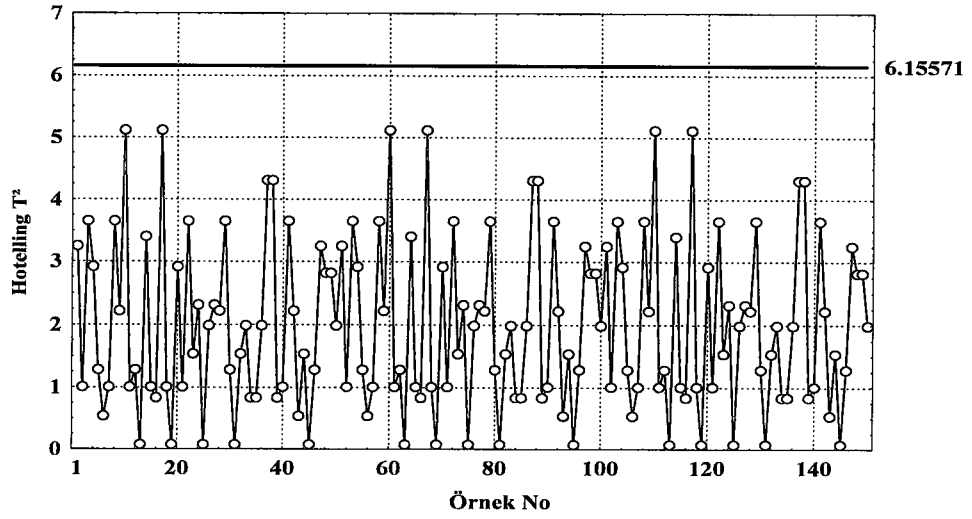


Şekil 5-13: Çap2 - kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Kontrol grafiği incelendiğinde tüm T^2 değerlerinin üst kontrol sınırının altında olduğu görülür. Bu durum prosesin kontrol altında olduğunu gösterir. Her ne kadar proses kontrol altındaymış gibi görünse de proses kontrol dışı sinyali verme eğilimindedir. T^2 kontrol grafiği incelendiğinde 24, 74 ve 125 numaralı örneklerden elde edilen T^2 değerleri üst kontrol sınırına oldukça yakın olduğu görülmektedir. Benzer durum çap2 değişkeni için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafiklerinde de görüldüğü halde bir kontrol dışı sinyali tespit edilememiştir.

Yükseklik – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses Hotelling T^2 kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için elde edilen T^2 değerleri Ek Tablo 11'de verilmiştir. Bu değerler için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği Şekil 5-14'te görülmektedir.



Şekil 5-14: Yükseklik-kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Şekil 5-14'te verilen Hotelling T^2 kontrol grafiği incelendiğinde kontrol grafiğindeki bütün noktalar üst kontrol sınırının altında bulunmaktadır. Bu durumda prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir. Söz konusu iki değişken için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafiklerinde aynı durum ile karşılaşmıştır. Bu grafiklerde de prosesin kontrol altında olduğu görülmüştür.

İki değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiklerinden sadece ikisi kontrol dışı sinyali vermiştir. Çap1 – çap2 ve çap2 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer değişkenler için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

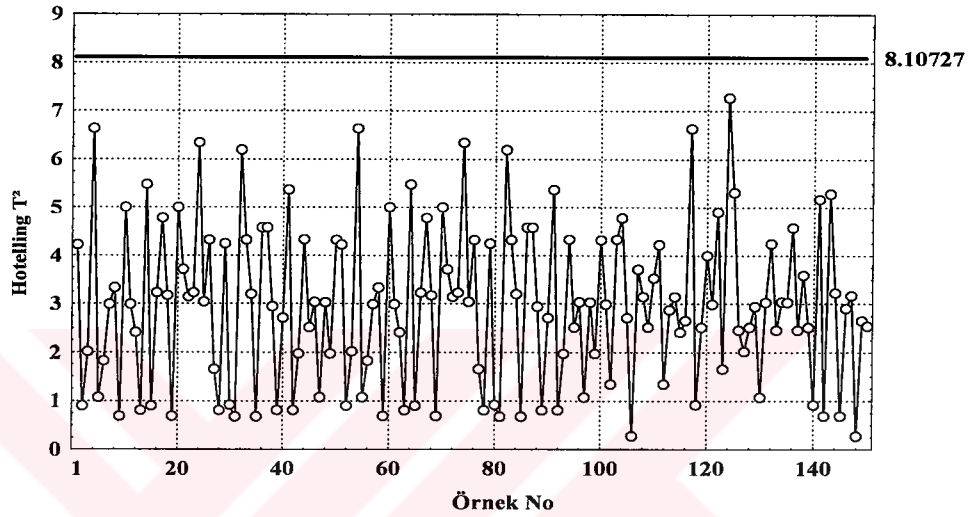
Proses iki değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri ile incelendikten sonra bu bölümde üç değişken açısından incelenecektir.

5.2.2.2. Üç değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri

Bu bölümde kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni üzerli gruplandırılıp proses Hotelling T^2 kontrol grafikleri incelenecektir. Bu gruplandırmalar; çap1 – çap2 – yükseklik, çap1 – çap2 – kaçıklık, çap1 – yükseklik – kaçıklık ve çap2 – yükseklik – kaçıklık şeklindedir. Bu gruplandırmalar için Hotelling T^2 kontrol grafikleri aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

Çap1 – çap2 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1, çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak proses üç değişken açısından Hotelling T^2 kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu üç değişken için hesaplanan T^2 değerleri Ek Tablo 12’de verilmiştir. Söz konusu değerler kullanılarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği ise Şekil 5-15’te verilmiştir.



Şekil 5-15: Çap1-çap2-yükseklik değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Kontrol grafiği çap1, çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak üç değişken için düzenlenmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

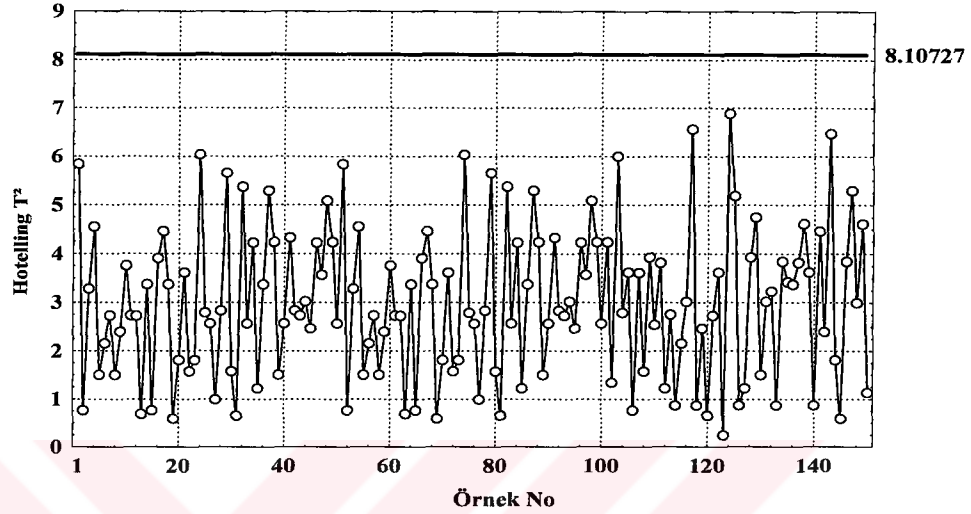
Burada bir kontrol dışı sinyali tespit edilemezken daha önce iki değişken için düzenlenen çap1 – çap2 ve çap2 – yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri proseste bir kontrol dışı sinyalinin olduğu göstermişti.

Çap1 – çap2 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1, çap2 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak prosesin kontrolü üç değişken açısından Hotelling T^2 kontrol grafiği ile yapılmıştır. Bu üç değişken için T^2 değerleri hesaplanmış ve Ek Tablo 13’te verilmiştir.

Ek Tablo 13’teki değerler kullanılarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği ise Şekil 5-16’da görülmektedir. Kontrol grafiği söz konusu üç değişken için

düzenlenmiştir. Grafik incelendiğinde tüm T^2 değerlerinin üst kontrol sınırının altında olduğu görülür. Dolayısıyla kavrama silindiri üretim prosesinin kontrol altında olduğuna karar verilir.



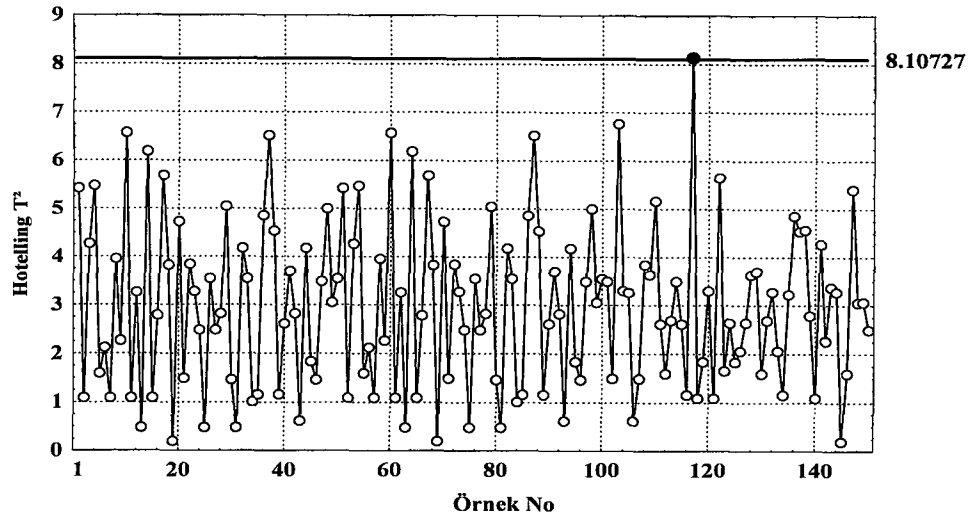
Şekil 5-16: Çap1-çap2-kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Burada kontrol dışı durum tespit edilmemiştir. Daha önce çap1 – çap2 değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiğinde bir kontrol dışı sinyali tespit edilmesine rağmen çap1 – kaçıklık ve çap2 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri bir kontrol dışı sinyali vermemiştir.

Çap1–yükseklik–kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindiri üretim prosesi çap1, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses üç değişken açısından Hotelling T^2 kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu üç değişken için hesaplanan T^2 değerleri Ek Tablo 14’te verilmiştir.

Ek Tablo 14’te verilen T^2 değerleri kullanılarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği ise Şekil 5-17’de görülmektedir. Çap1, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak üç değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. Hotelling T^2 kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol dışına çıkmış olduğuna karar verilir. Proses 117 numaralı örneğin alınması zamanında kontrol dışına çıkmıştır.



Şekil 5-17: Çap1-yükseklik-kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

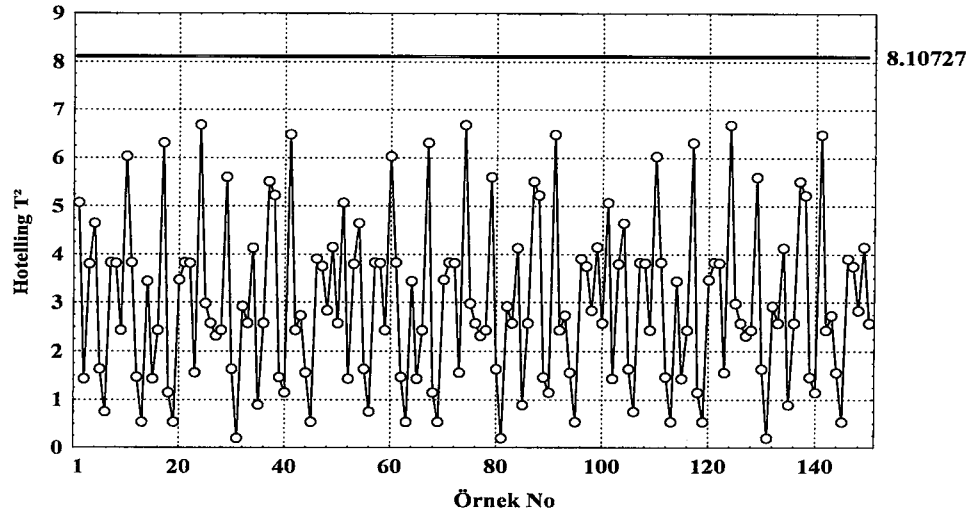
Burada bir kontrol dışı durum tespit edilmesine rağmen daha önce iki değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiklerinde burada sözü geçen değişkenler için kontrol dışı durum tespit edilememişti. çap1 – yükseklik, çap1 – kaçıklık ve yükseklik – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri bir kontrol dışı sinyali vermemiştir.

Kontrol dışı durum tespit edildikten sonra proseste üç değişken birlikte ele alındığından kontrol dışı sinyale neden olan değişken yada değişkenler belirlenmelidir. Mason, Young ve Tracy (MYT)'nin T^2 istatistiğini ayrıştırma metodu kullanılarak kontrol dışı sinyaline neden olan değişken yada değişkenler tespit edilebilir. 117 numaralı örneğin T^2 değeri 8.14 olarak hesaplanmıştır. Bu değer üç parçaya ayrıştırıldığında çap1 değişkenine ait T^2 değeri 2.45, yükseklik değişkenine ait T^2 değeri 2.73 ve kaçıklık değişkenine ait T^2 değeri 3.28 şeklinde elde edilir. 117 numaralı örneğin T^2 değerine en büyük katkının kaçıklık değişkenine ait olduğu görülmektedir. Bu durumda kontrol dışı sinyalinin kaçıklık değişkeninden kaynaklandığına karar verilir.

Çap2–yükseklik–kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses üç değişken açısından Hotelling T^2 kontrol grafiği ile kontrol edilmiştir. Bu üç değişken için elde edilen T^2 değerleri Ek Tablo 15'te verilmiştir. Tabloda verilen

değerler kullanılarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği ise Şekil 5-18'de görülmektedir.



Şekil 5-18: Çap2-yükseklik-kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Söz konusu üç değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir. Burada bir kontrol dışı durum olmamasına rağmen daha önce düzenlenen çap2 – yükseklik değişkenleri için Hotelling T^2 kontrol grafiğinin kontrol dışı sinyali verdiği görülmüştür. Fakat çap2 – kaçıklık ve yükseklik – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri bir kontrol dışı sinyali vermemiştir.

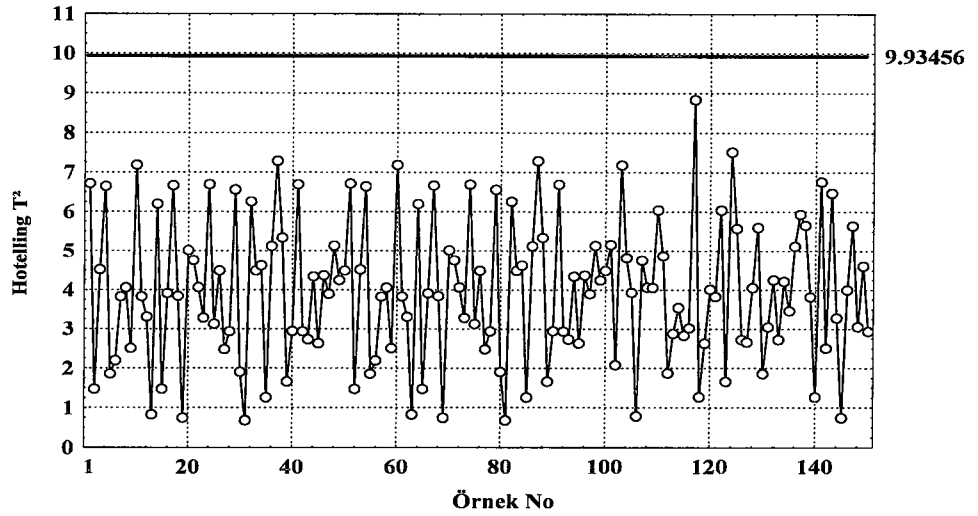
Üç değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiklerinden sadece birisi kontrol dışı sinyali vermiştir. Çap1 – yükseklik – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen kontrol grafiği prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer değişkenler için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Kavrama silindiri üretim prosesi üç değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri ile incelendikten sonra bu bölümde proses dört değişken birlikte ele alınarak incelenecektir.

5.2.2.3. Dört değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Bu bölümde kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni birlikte ele alınarak prosesin kontrolü yapılmıştır. Bu amaçla kavrama silindirine ait dört değişken birlikte

ele alınıp Hotelling T^2 kontrol grafiği düzenlenerek proses incelenmiştir. Bu dört değişken için hesaplanan T^2 değerleri Ek Tablo 16'da verilmiştir.



Şekil 5-19: Dört değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği

Söz konusu değerler kullanılarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği ise Şekil 5-19'da görülmektedir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

5.2.3. Hotelling T^2 kontrol grafikleri ile elde edilen sonuçlar

Kavrama silindiri üretim prosesi ilk olarak tek değişkenli Shewhart kontrol grafikleri ile incelendiğinde, tüm değişkenler için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Daha sonra proses iki değişken açısından incelenmiştir. Burada iki değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiklerinden sadece $\text{çap1} - \text{çap2}$ ve $\text{çap2} - \text{yükseklik}$ değişkenleri için düzenlenen kontrol grafikleri prosesin kontrol dışı olduğunu göstermiştir. Diğer kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Proses üç değişken için düzenlenen kontrol grafikleri ile incelendiğinde ise sadece $\text{çap1} - \text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ değişkenleri birlikte ele alınarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiğinin kontrol dışı sinyali verdiği görülmüştür. Düzenlenen diğer Hotelling T^2 kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Son olarak proses dört değişken açısından incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu tespit edilmiştir.

5.3. Çok Değişkenli Kümülatif Toplam (MCUSUM) Kontrol Metotları İle İPK Uygulaması

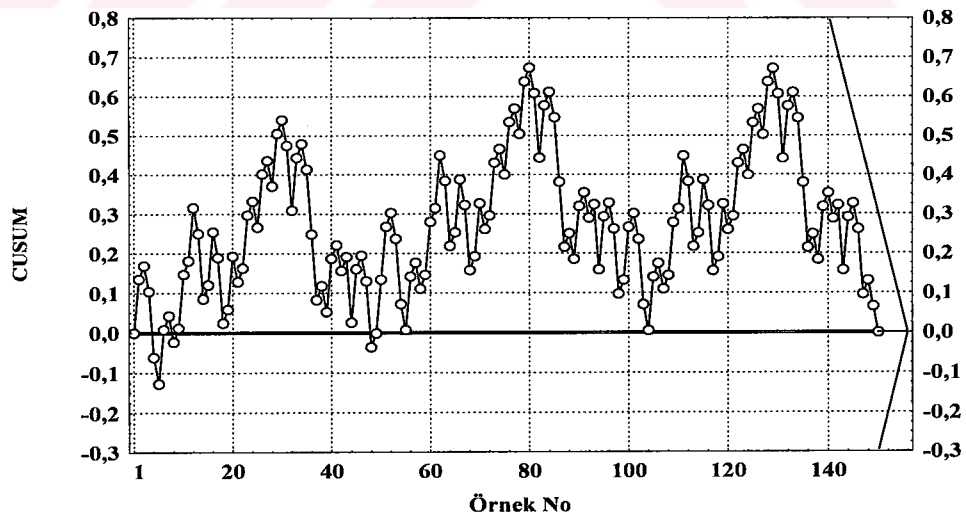
Bu bölümde otomatik transmisyonlarda kullanılan “kavrama silindirine” ait ϕ_1 , ϕ_2 , yükseklik ve kaçıklık değerleri ele alınarak ilk olarak her bir değişken için tek değişkenli kümülatif toplam (CUSUM) kontrol grafikleri düzenlenecektir. Daha sonra ise çok değişkenli kümülatif toplam (MCUSUM) kontrol metotları ile bir istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması yapılacaktır.

5.3.1. Tek değişkenli CUSUM kontrol grafikleri ile İPK uygulaması

Bu bölümde kavrama silindirinin dört değişkenine ait 150 örnekten oluşan veri seti kullanılarak her bir değişken için ayrı ayrı CUSUM kontrol grafikleri düzenlenerek istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması yapılacaktır.

Çap1 değişkeni için düzenlenen CUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin ϕ_1 değişkenine ait veriler kullanılarak CUSUM kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu değişkene ait veriler ve kümülatif toplam (S_m) değerleri Ek Tablo 17’de verilmiştir.



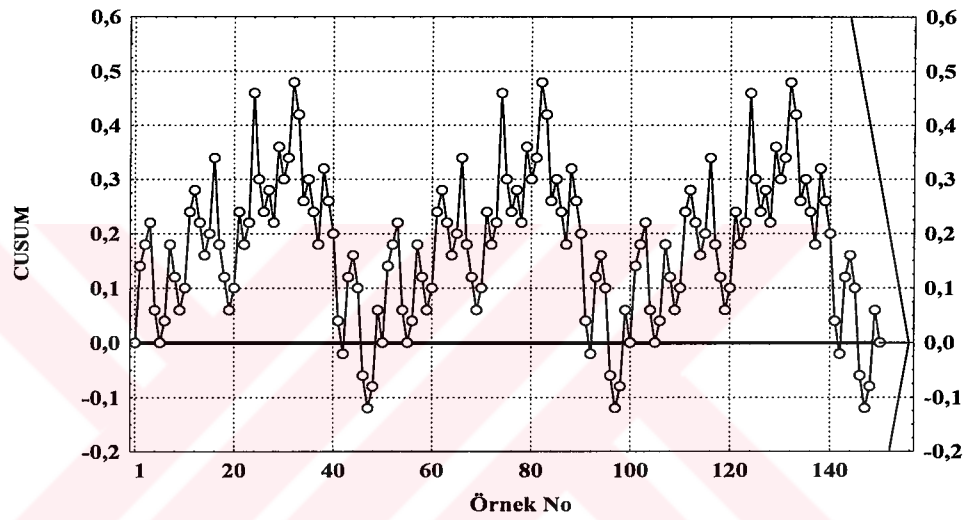
Şekil 5-20: Çap1 değerlerine ait V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Tablodaki veriler kullanılarak ϕ_1 değişkeni için V maskeli CUSUM kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu kontrol grafiği Şekil 5-20’de görülmektedir. Kontrol

grafiğindeki V maskesi en son örneğe yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

Çap2 değişkeni için düzenlenen CUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2 değişkenine ait veriler kullanılarak V maskeli CUSUM kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu değişkene ait veriler ve kümülatif toplam (S_m) değerleri Ek Tablo 18’de verilmiştir.



Şekil 5-21: Çap2 değerlerine ait V maskeli CUSUM kontrol grafiği

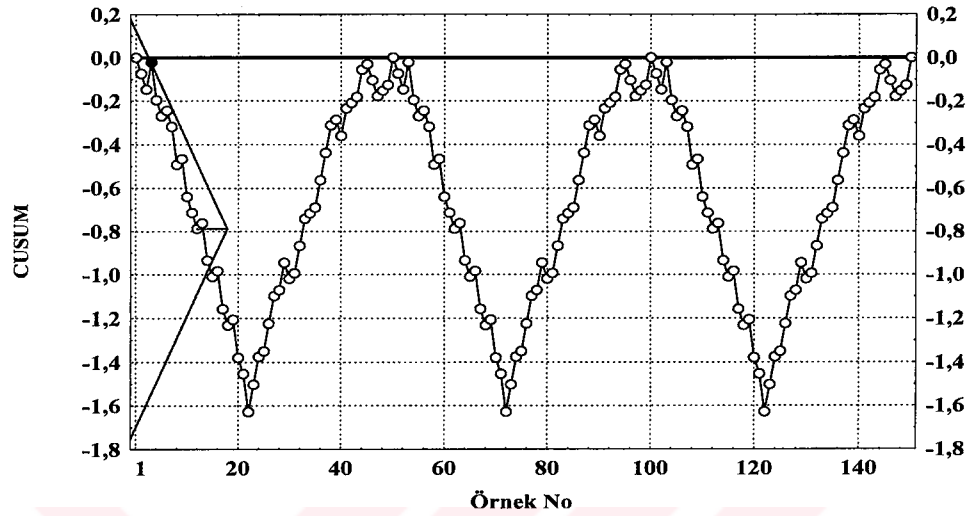
Ek Tablo 18’deki veriler kullanılarak çap2 değişkeni için CUSUM kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-21’de verilmiştir. Kontrol grafiğinde görüldüğü üzere V maskesi en son örneğe yerleştirilmiştir. CUSUM kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu görülür.

Yükseklik değişkeni için düzenlenen CUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirine ait yükseklik değişkeninden elde edilen veriler kullanılarak V maskeli CUSUM kontrol grafiği düzenlenmiştir. Bu değişkene ait veriler ve kümülatif toplam (S_m) değerleri Ek Tablo19’da verilmiştir.

Söz konusu veriler kullanılarak yükseklik değişkeni için CUSUM kontrol grafiği düzenlenerek Şekil 5-22’de verilmiştir. Kontrol grafiğinde V maskesi ilk kontrol dışı

sinyali veren örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin dört numaralı örneğin alınması zamanından itibaren kontrol dışına çıktığı tespit edilir.



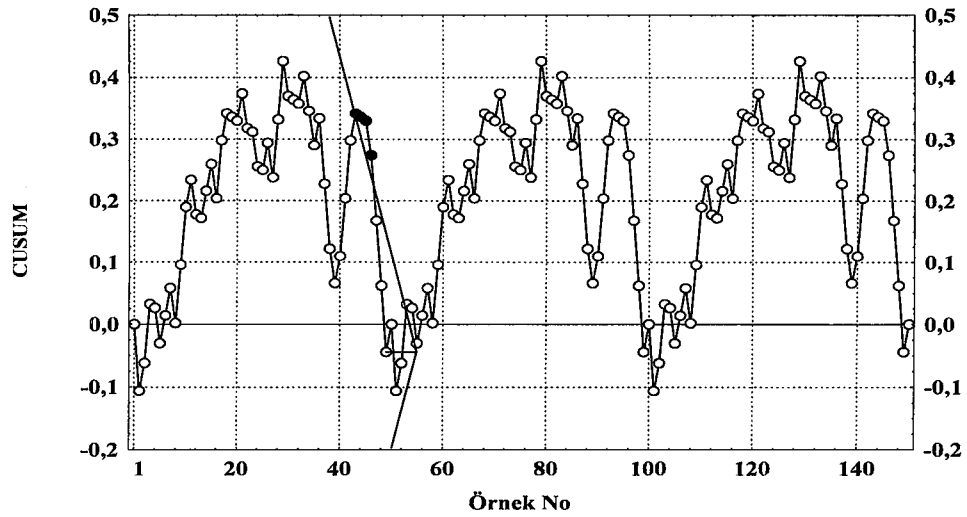
Şekil 5-22: Yükseklik değerlerine ait V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Daha önce yükseklik değişkeni için düzenlenen Shewhart kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermesine rağmen burada düzenlenen CUSUM kontrol grafiği kontrol dışı sinyali vermiştir. CUSUM kontrol grafiği proste meydana gelebilecek küçük kaymaları tespit etmede Shewhart kontrol grafiğinden daha etkili olduğu bilinmektedir. Bu durumda yükseklik değişkeni için düzenlenen CUSUM kontrol grafiği prosesin ortalamasında küçük bir kaymanın olduğunu göstermektedir.

Kaçıklık değişkeni için düzenlenen CUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin kaçıklık değişkenine ait veriler kullanılarak V maskeli CUSUM kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu değişkene ait veriler ve kümülatif toplam (S_m) değerleri Ek Tablo 20’de verilmiştir.

Tablodaki veriler kullanılarak kaçıklık değişkeni için CUSUM kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu kontrol grafiği Şekil 5-23’te görülmektedir. Kontrol grafiğindeki V maskesi ilk kontrol dışı sinyali veren örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 43 numaralı örneğin alınması zamanında kontrol dışına çıkmış olduğu görülür. Proses aynı zamanda 44, 45 ve 46 numaralı örneklerde de kontrol dışına çıkmıştır.



Şekil 5-23: Kaçıklık değerlerine ait V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Burada yükseklik değişkenindeki duruma benzer bir durum ile karşılaşmıştır. Daha önce kaçıklık değişkeni için düzenlenen Shewhart kontrol grafikleri bir kontrol dışı sinyali vermemesine rağmen burada düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği proses ortalamasında küçük bir kaymanın olduğunu göstermiştir.

Kavrama silindirinin dört değişkeni için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiklerinden yükseklik ve kaçıklık değişkenleri için düzenlenen kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Çap1 ve çap2 değişkenleri için düzenlenen CUSUM kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir. Daha önceki bölümde kavrama silindirinin dört değişkeni için düzenlenen Shewhart kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermesine rağmen bu bölümde düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Bu durumda kavrama silindiri üretim prosesinin ortalamasında küçük bir kaymanın olduğu söylenebilir.

Prosesin kontrolü tek değişkenli CUSUM kontrol grafikleri ile yapıldıktan sonra bu bölümde proses, MCUSUM kontrol metotları ile incelenecektir.

5.3.2. MCUSUM Kontrol Metotları İle İPK Uygulaması

Proses tek değişkenli CUSUM kontrol grafikleri ile incelendikten sonra bu bölümde MCUSUM kontrol metotları ile incelenecektir. Proseste kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni incelenmiştir. Bu bölümde dört değişken öncelikle ikiyeşerli daha sonra üçerli gruplandırılarak V maskeli CUSUM kontrol grafikleri düzenlenecektir. Son bölümde ise dört değişken birlikte ele alınarak CUSUM kontrol grafiği düzenlenerek proses incelenecektir.

Croiser (1988), tek değişkenli CUSUM metodundaki skaler değerlerinin vektörlere dönüştürülmesi ile çok değişkenli CUSUM metodunun türetilmesi fikrini ortaya atmıştır.¹ Burada bu fikre dayanarak incelen değişkenlerin T değerleri ve bu T değerlerinin kümülatif toplam değerleri (S_m) hesaplanarak V maskeli CUSUM kontrol grafikleri düzenlenecektir. Böylece bu bölümde V maskeli CUSUM kontrol grafikleri kullanılarak MCUSUM kontrol metotları ile istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması icra edilecektir.

5.3.2.1. İki değişken için düzenlenen MCUSUM kontrol grafikleri

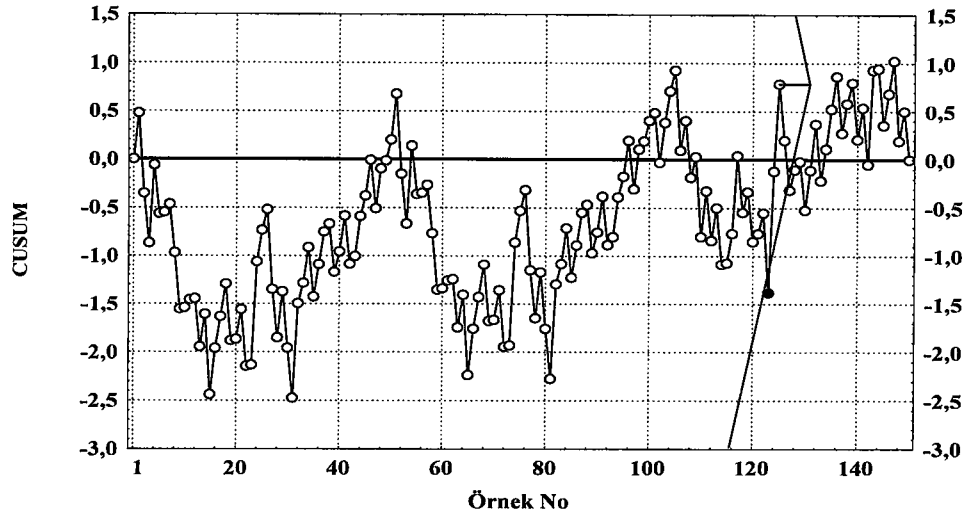
Bu bölümde kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni ikiyeşerli gruplandırılarak proses incelenecektir. Bu gruplandırmalar; $\text{çap1} - \text{çap2}$, $\text{çap1} - \text{yükseklik}$, $\text{çap1} - \text{kaçıklık}$, $\text{çap2} - \text{yükseklik}$, $\text{çap2} - \text{kaçıklık}$, ve $\text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ şeklindedir. Bu gruplandırmalar için V maskeli CUSUM kontrol grafikleri aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

Çap1 – Çap2 değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 ve çap2 değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için elde edilen T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) Ek Tablo 21’de verilmiştir.

Tablodaki değerler kullanılarak düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği Şekil 5-24’te görülmektedir. Çap1 ve çap2 değişkenleri ele alınarak iki değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde V maskesi kontrol dışı sinyali veren ilk örnek üzerine yerleştirilmiştir.

¹ Ronald B. Croiser; “Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality Control Schemes”, Technometrics, Cilt:30, No:3, 1988.



Şekil 5-24: Çap1 - çap2 değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol dışına çıktığı görülür. Proses 123 numaralı örneğin alınması zamanında kontrol dışına çıkmıştır. Burada kontrol dışı durum tespit edilmesine rağmen daha önce çap1 ve çap2 değişkenleri için düzenlenen tek değişkenli CUSUM kontrol grafikleri proseste bir kontrol dışı sinyali tespit edememişlerdir. Böylece söz konusu iki değişken birlikte incelendiğinde prosesin kontrol dışı olduğu tespit edilir.

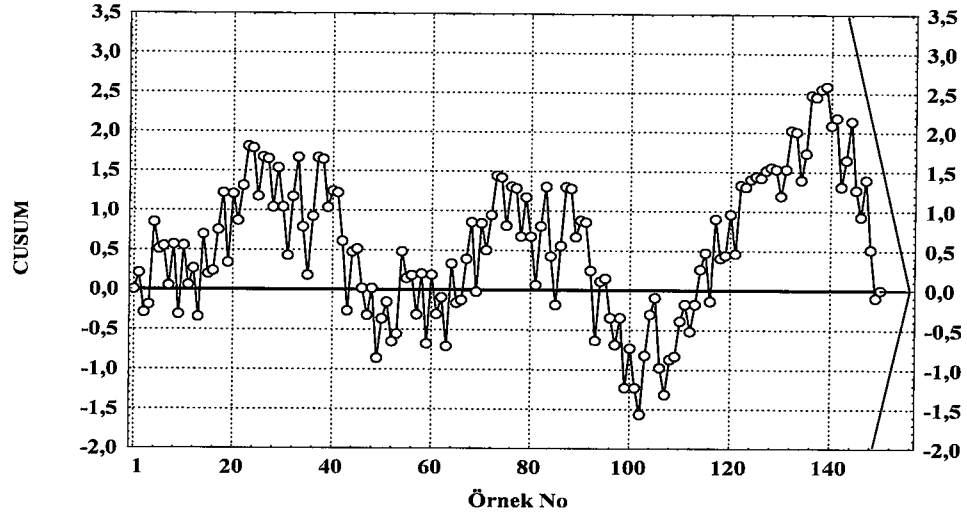
Çap1 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için elde edilen T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) Ek Tablo 22’de verilmiştir.

Ek Tablo 22’deki değerler kullanılarak düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği Şekil 5-25’te görülmektedir. Çap1 ve yükseklik değişkenleri ele alınarak iki değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde görüldüğü üzere V maskesi en son numaralı örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

Burada düzenlenen CUSUM kontrol grafiği prosesin kontrol altında olduğunu göstermesine rağmen daha önce yükseklik değişkeni için düzenlenen CUSUM kontrol grafiğinde ise kontrol dışı sinyali tespit edilmişti. Oysa çap1 değişkeni için düzenlenen CUSUM kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyali tespit edilememiştir. Böylece iki

değişken birlikte incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu söylenebilir.



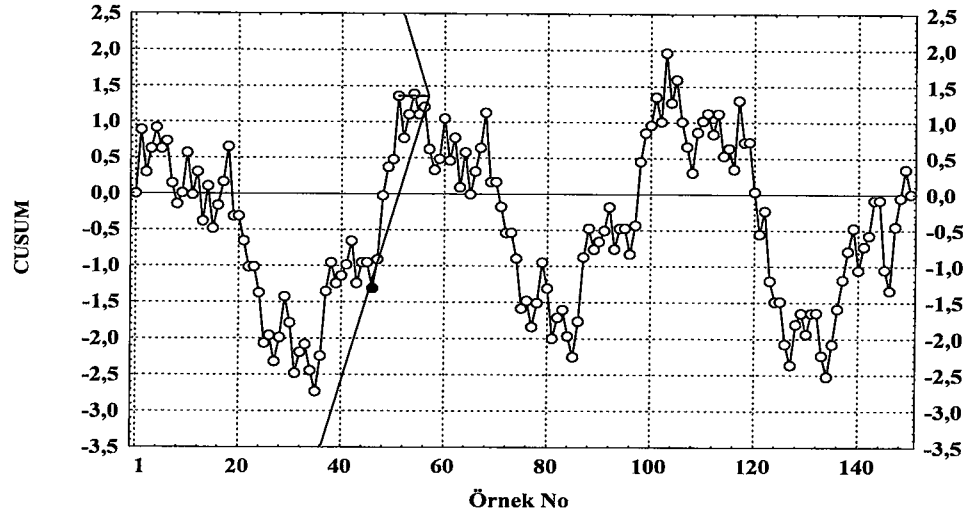
Şekil 5-25: Çap1 - yükseklik değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Çap1 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile kontrol edilmiştir. Bu iki değişken için hesaplanan T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) Ek Tablo 23'te verilmiştir.

Söz konusu değerler kullanılarak düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği ise Şekil 5-26'da görülmektedir. Çap1 ve kaçıklık değişkenleri ele alınarak iki değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde V maskesi ilk kontrol dışı sinyali veren örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol dışına çıkmış olduğuna karar verilir. Kavrama silindiri üretim prosesi 46 numaralı örneğin alınması zamanından itibaren kontrol dışına çıkmıştır.

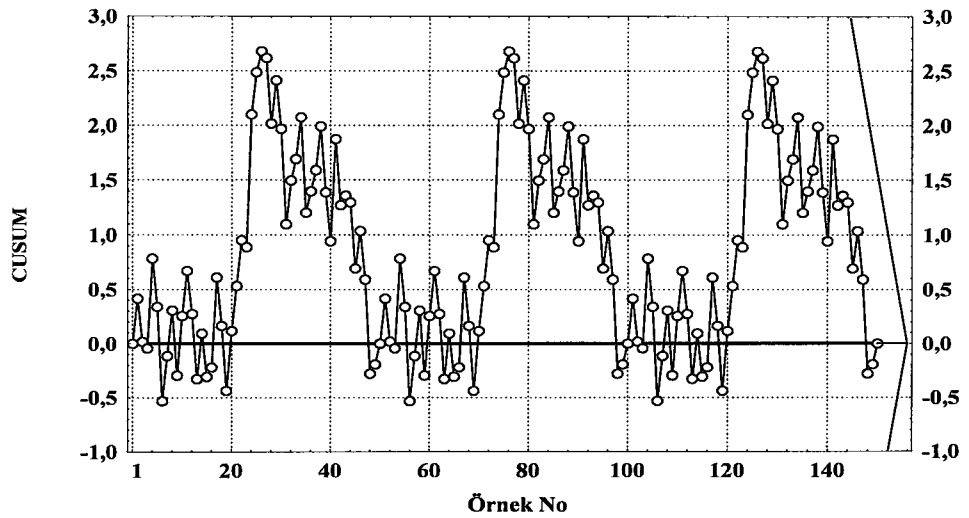
Daha önce kaçıklık değişkeni için düzenlenen CUSUM kontrol grafiği kontrol dışı sinyali verirken çap1 değişkeni için düzenlenen kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyali tespit edilememiştir. Burada olduğu gibi iki değişken birlikte incelendiğinde prosesin kontrol dışı olduğu kararına varılır. Son olarak kontrol dışı durumun kaçıklık değişkeninden kaynaklandığı söylenebilir.



Şekil 5-26: Çap1 - kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Çap2 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için elde edilen T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) Ek Tablo 24’te verilmiştir. Ek Tablo 24’teki değerler kullanılarak düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği ise Şekil 5-27’de görülmektedir.



Şekil 5-27: Çap2 - yükseklik değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

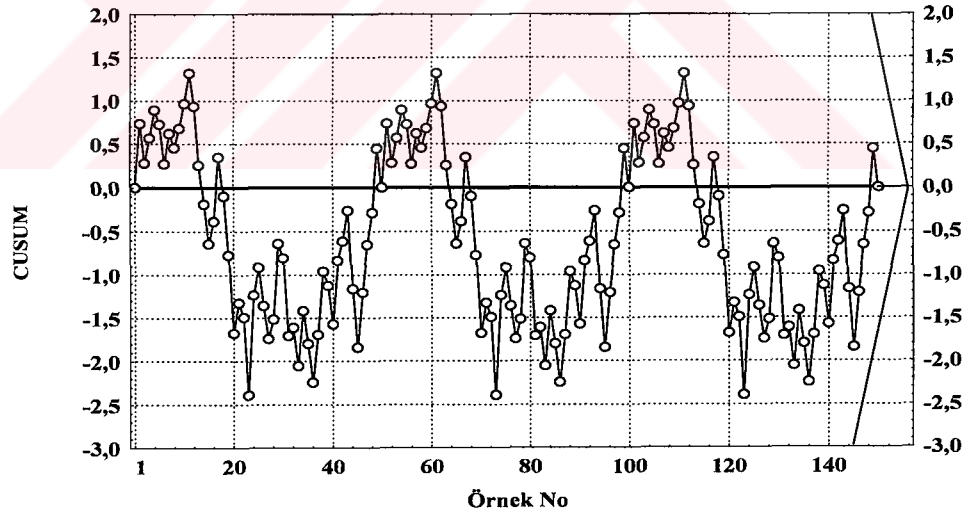
Çap2 ve yükseklik değişkenleri ele alınarak kontrol grafiği iki değişken için düzenlenmiştir. Söz konusu iki değişken için düzenlenen kontrol grafiği incelendiğinde

prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir. Daha önce düzenlenen CUSUM kontrol grafiklerinden çap2 değişkeni için düzenlenen kontrol grafiği prosesin kontrol altında olduğunu gösterirken yükseklik değişkeni için düzenlenen kontrol grafiği ise prosesin kontrol dışı olduğunu göstermiştir. İki değişken birlikte kontrol edildiğinde prosesin kontrol altında olduğu tespit edilir.

Çap2 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile kontrol edilmiştir. Bu iki değişken için elde edilen T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) Ek Tablo 2’te verilmiştir.

Tablodaki değerler kullanılarak düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği Şekil 5-28’de görülmektedir. Çap2 ve kaçıklık değişkenleri ele alınarak kontrol grafiği iki değişken için düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde V maskesi en son numaralı örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu anlaşılr.



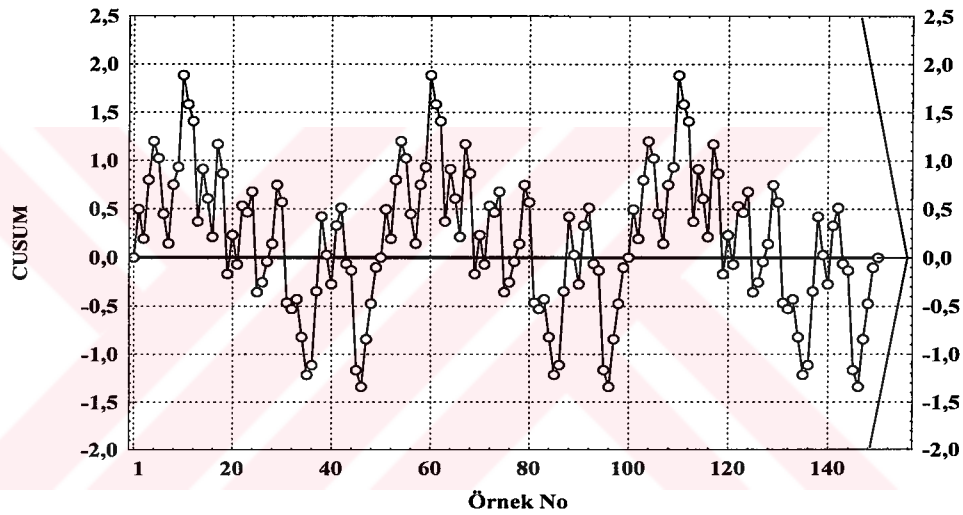
Şekil 5-28: Çap2 - kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Daha önce çap2 değişkeni için düzenlenen tek değişkenli CUSUM kontrol grafiği prosesin kontrol altında olduğunu gösterirken kaçıklık değişkeni için düzenlenen kontrol grafiği ise prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. İki değişken için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Yükseklik – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için elde edilen T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) Ek Tablo 26'da görülmektedir.

Bu değerler kullanılarak düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği ise Şekil 5-29'da verilmiştir. Söz konusu kontrol grafiği yükseklik ve kaçıklık değişkenleri ele alınarak düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde V maskesi en son numaralı örnek üzerine yerleştirilmiştir.



Şekil 5-29: Yükseklik - kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Yükseklik – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği kavrama silindiri üretim prosesinin kontrol altında olduğunu göstermektedir.

İki değişken için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiklerinden sadece ikisi kontrol dışı sinyali vermiştir. Çap1 – çap2 ve çap1 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer değişkenler için düzenlenen MCUSUM kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

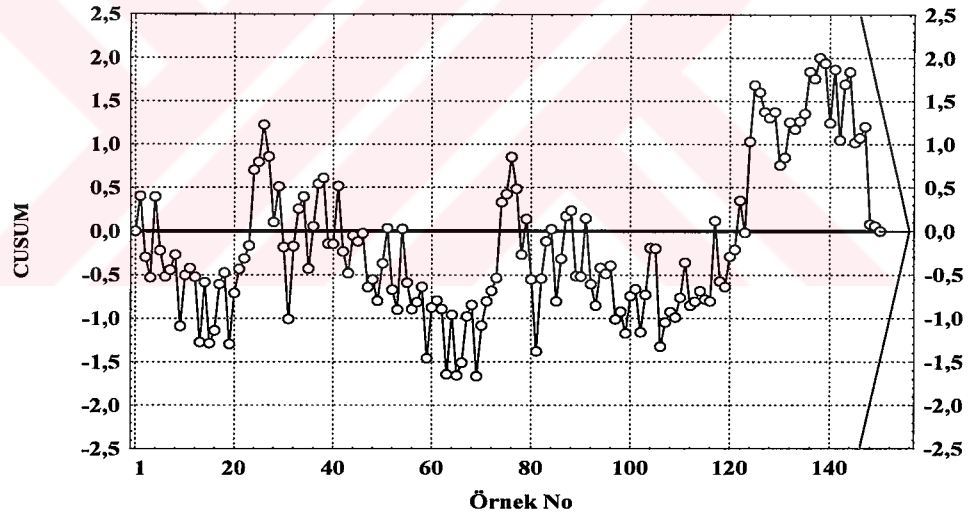
Kavrama silindiri üretim prosesi iki değişken için düzenlenen MCUSUM kontrol grafikleri ile incelendikten sonra bu bölümde üç değişken açısından incelenecektir.

5.3.2.2. Üç değişken için düzenlenen MCUSUM kontrol grafikleri

Bu bölümde kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni üçerli olarak gruplandırılarak MCUSUM kontrol grafikleri ile incelenecektir. Bu gruplandırmalar; $\text{çap1} - \text{çap2} - \text{yükseklik}$, $\text{çap1} - \text{çap2} - \text{kaçıklık}$, $\text{çap1} - \text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ ve $\text{çap2} - \text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ şeklindedir. Bu gruplandırmalar için MCUSUM kontrol grafikleri aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

Çap1 – çap2 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 , çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak proses, üç değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile kontrol edilmiştir. Bu üç değişken için T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) hesaplanarak Ek Tablo 27’de verilmiştir.

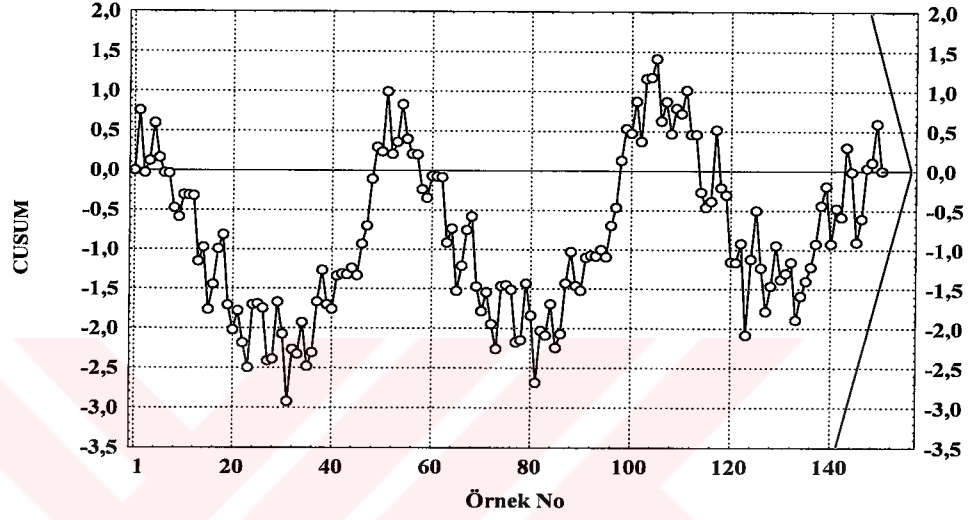


Şekil 5-30: Çap1 - çap2 - yükseklik değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Ek Tablo 27’deki değerler kullanılarak düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği ise Şekil 5-30’da görülmektedir. Çap1 , çap2 ve yükseklik değişkenleri eie alınarak kontrol grafiği üç değişken için düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde V maskesi en son numaralı örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

Çap1 – çap2 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1, çap2 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses üç değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile incelenmiştir. Üç değişken için elde edilen T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) Ek Tablo 28’de verilmiştir.



Şekil 5-31: Çap1 - çap2 - kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

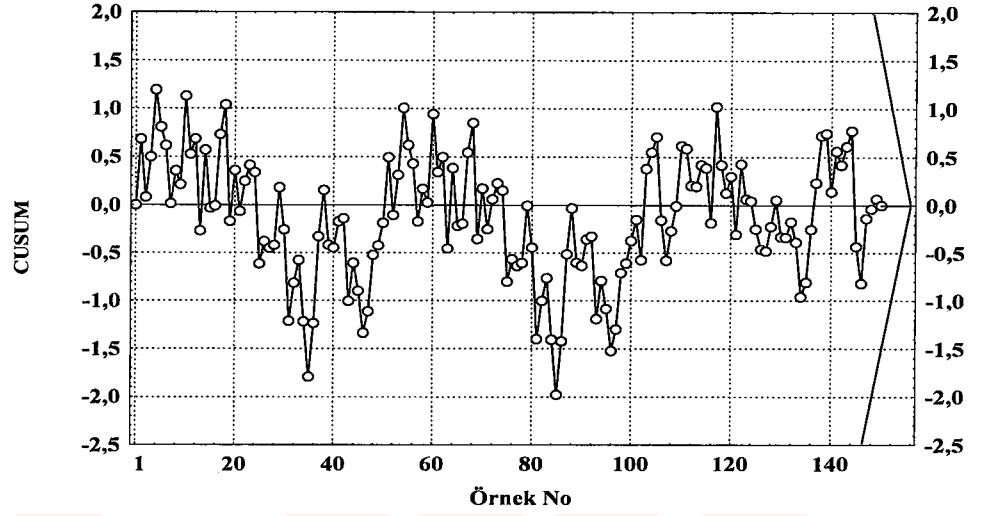
Tablodaki değerler kullanılarak düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği ise Şekil 5-31’de görülmektedir. Çap1, çap2 ve kaçıklık değişkenleri ele alınarak üç değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde V maskesi en son numaralı örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu görülür.

Çap1–yükseklik–kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses üç değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile kontrol edilmiştir. Üç değişken için hesaplanan T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) Ek Tablo 29’da verilmiştir.

Söz konusu değerler kullanılarak düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği ise Şekil 5-32’de verilmiştir. Kontrol grafiği, Çap1, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri ele alınarak üç değişken için düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde V maskesi en son

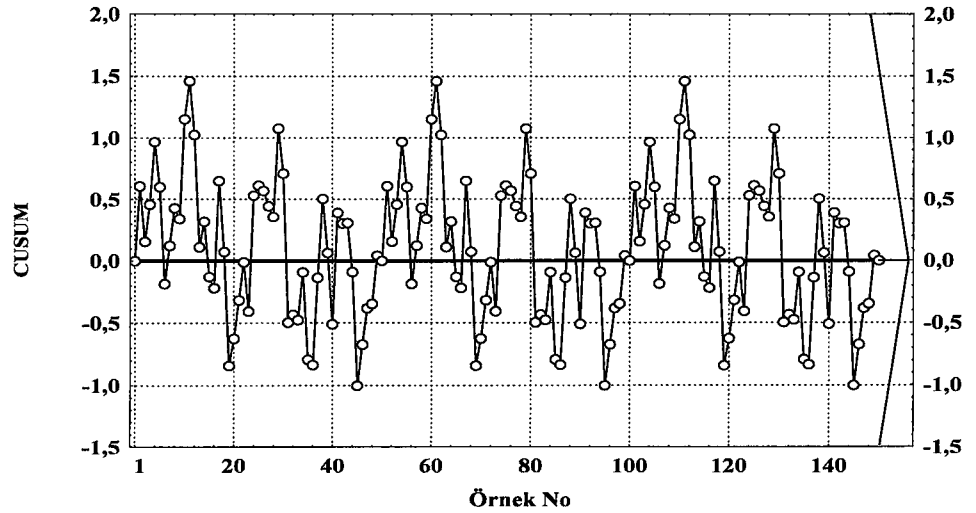
numaralı örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu anlaşılr.



Şekil 5-32: Çap1 – yükseklik – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Çap2–yükseklik–kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses üç değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile incelenmiştir. Söz konusu değişkenler için T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) hesaplanmış ve Ek Tablo 30’da gösterilmiştir.



Şekil 5-33: Çap2 – yükseklik – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

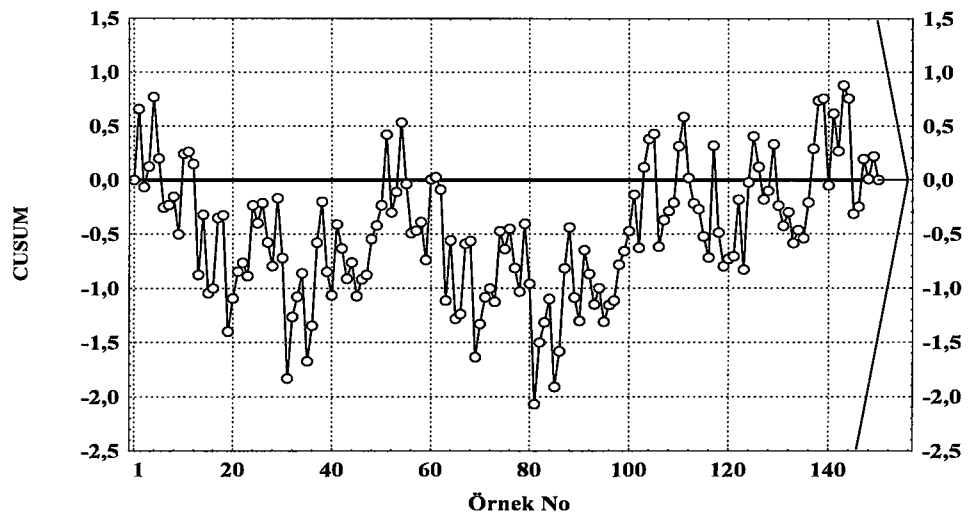
Tablodaki değerler kullanılarak V maskeli CUSUM kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-33'te verilmiştir. Kontrol grafiği $\hat{\sigma}_2$, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri olmak üzere üç değişken birlikte ele alınarak düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde görüldüğü üzere V maskesi en son numaralı örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu görülmektedir.

Bu bölümde üç değişken birlikte ele alınarak düzenlenen MCUSUM kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir. Düzenlenen bütün V maskeli CUSUM kontrol grafikleri proste bir kontrol dışı sinyali tespit edememiştir.

Kavrama silindiri üretim prosesi, üç değişken için düzenlenen MCUSUM kontrol grafikleri ile incelendikten sonra bu bölümde dört değişken birlikte ele alınarak incelenecektir.

5.3.2.3. Dört değişken için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiği

Bu bölümde kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni birlikte ele alınarak proses incelenmiştir. Kavrama silindirine ait dört değişken birlikte ele alınarak proses dört değişken açısından MCUSUM kontrol grafiği ile kontrol edilmiştir. Bu dört değişken için hesaplanan T değerleri ve kümülatif toplam değerleri (S_m) Ek Tablo 31'de verilmiştir. Söz konusu değerler yardımıyla düzenlenen CUSUM kontrol grafiği ise Şekil 5-34'te görülmektedir.



Şekil 5-34: Dört değişken için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafiği

Çap1, çap2, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak dört değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. Kontrol grafiğinde V maskesi en son numaralı örnek üzerine yerleştirilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde kavrama silindiri üretim prosesinin kontrol altında olduğuna karar verilir.

5.3.3. MCUSUM kontrol metotları ile elde edilen sonuçlar

Otomatik transmisyonlarda kullanılan kavrama silindiri üretim prosesi ilk olarak tek değişkenli CUSUM kontrol grafikleri ile kontrol edilmiştir. Yapılan kontroller sonucunda yükseklik ve kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını gösterirken çap1 ve çap2 değişkenleri için düzenlenen CUSUM kontrol grafikleri ise proseste herhangi bir kontrol dışı sinyali göstermemiştir.

Kavrama silindiri üretim prosesi tek değişkenli CUSUM kontrol grafikleri ile incelendikten sonra çok değişkenli CUSUM (MCUSUM) kontrol metotları ile incelenmiştir. Bu incelemede iki değişken için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiklerinden, çap1 – çap2 ve çap1 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Proses üç değişken için incelendiğinde ise MCUSUM kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir. Son olarak proses dört değişken açısından incelendiğinde de prosesin kontrol altında olduğu belirlenmiştir.

5.4. Çok Değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama (MEWMA) Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması

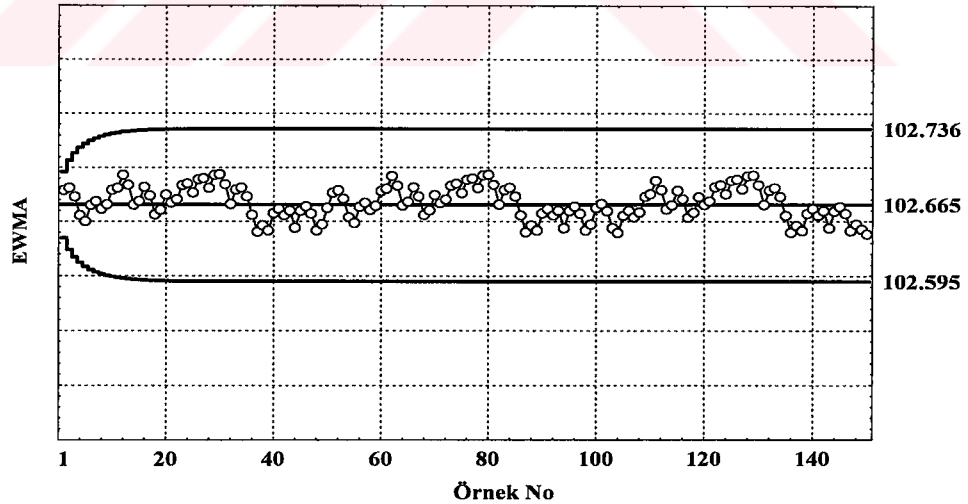
Bu bölümde otomatik transmisyonlarda kullanılan “kavrama silindirine” ait ϕ_1 , ϕ_2 , yükseklik ve kaçıklık değerleri ele alınarak ilk olarak tek değişkenli EWMA kontrol grafikleri düzenlenecektir. Daha sonra ise çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafikleri ile bir istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması yapılacaktır.

5.4.1. Tek değişkenli EWMA kontrol grafikleri ile İPK uygulaması

Bu bölümde proseste incelenen dört değişkene ait 150 örnekten oluşan veri seti kullanılarak her bir değişken için ayrı ayrı EWMA kontrol grafikleri düzenlenecektir.

Çap1 değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin ϕ_1 değişkenine ait veriler kullanılarak EWMA kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu değişkene ait veriler, EWMA değerleri (z_i) ve kontrol grafiğinin alt ve üst kontrol sınırları elde edilerek Ek Tablo 32’de verilmiştir.



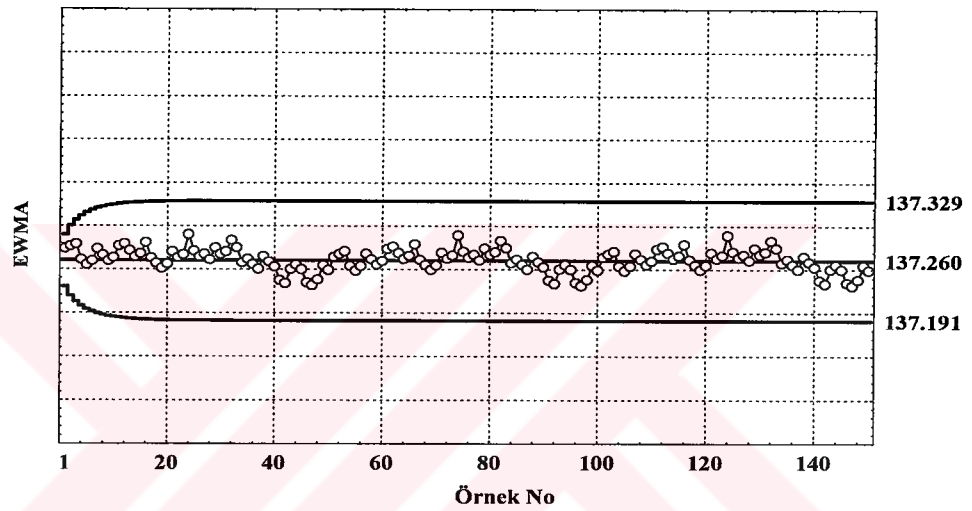
Şekil 5-35: Çap1 değerlerine ait EWMA kontrol grafiği

Kavrama silindirinin ϕ_1 değişkenine ait tablodaki veriler kullanılarak EWMA kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-35’te verilmiştir. EWMA kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu görülmektedir. EWMA kontrol grafiği, ϕ_1 değişkeni için düzenlenen Shewhart ve tek değişkenli CUSUM kontrol grafikleri

ile aynı sonucu vermiştir. Daha önce düzenlenen söz konusu kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Çap2 değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2 değişkenine ait veriler kullanılarak EWMA kontrol grafiği düzenlenmiştir. Çap2 değişkenine ait veriler ve hesaplanan EWMA değerleri (z_i) ve kontrol grafiğinin alt ve üst kontrol sınırları Ek Tablo 33'te verilmiştir.



Şekil 5-36: Çap2 değerlerine ait EWMA kontrol grafiği

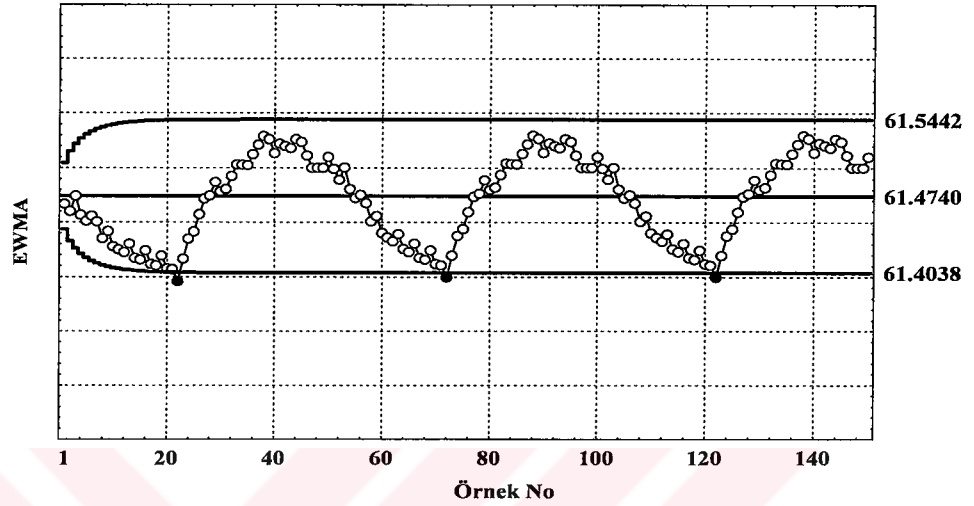
Kavrama silindirinin çap2 değişkeni için hesaplanan değerler kullanılarak düzenlenen EWMA kontrol grafiği ise Şekil 5-36'da görülmektedir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir. Shewhart ve CUSUM kontrol grafikleri kullanılarak kavrama silindirinin çap2 değişkeni için icra edilen İPK uygulaması sonucunda da aynı sonuç elde edilmiştir.

Yükseklik değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin yükseklik değişkenine ait veriler kullanılarak EWMA kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu değişkene ait veriler, EWMA değerleri (z_i) ve kontrol grafiğinin alt ve üst kontrol sınırları elde edilerek Ek Tablo 34'te verilmiştir.

Yükseklik değişkenine ait veriler kullanılarak EWMA kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-37'de verilmiştir. Yükseklik değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol dışına çıktığı görülür. Proses 21

numaralı örneğin alınması zamanında kontrol dışına çıkmıştır. Ayrıca üretime devam edildiğinden dolayı proses 72 ve 121 numaralı örneklerin alınması zamanında da kontrol dışına çıkmıştır.



Şekil 5-37: Yükseklik değerlerine ait EWMA kontrol grafiği

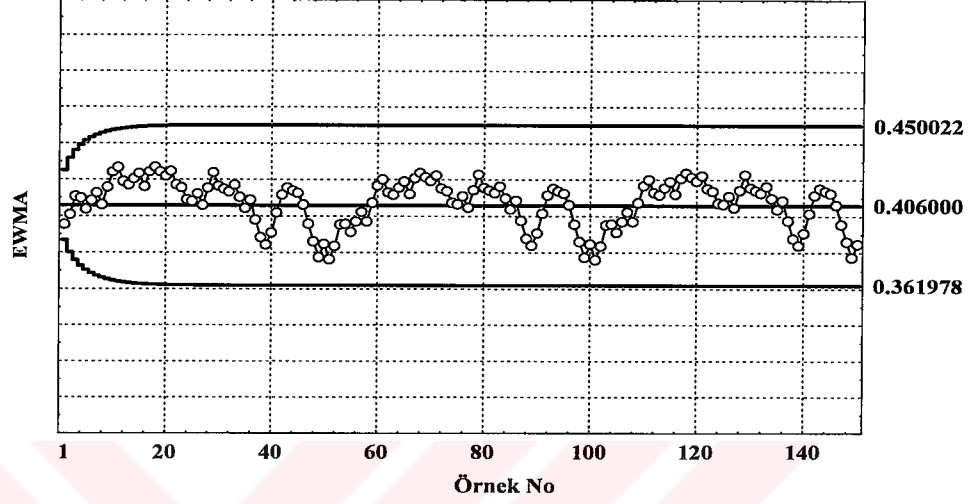
EWMA kontrol grafiği ile prosesin kontrol dışına çıktığı tespit edilmesine rağmen yükseklik değişkeni için düzenlenen Shewhart kontrol grafiği proseste bir kontrol dışı sinyali tespit edememiştir. Fakat CUSUM kontrol grafiği EWMA kontrol grafiğinde olduğu gibi prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Proses ortalamasında ortaya çıkabilecek küçük kaymaları tespit etmede CUSUM ve EWMA kontrol grafikleri Shewhart kontrol grafiklerinden daha etkili olduğundan burada yükseklik değişkenine ait proses ortalamasında küçük bir kayma olduğu sonucuna varılır.

Kaçıklık değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin kaçıklık değişkenine ait veriler için EWMA kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu değişkene ait veriler, EWMA değerleri (z_i) ve kontrol grafiğinin alt ve üst kontrol sınırları elde edilerek Ek Tablo 35'te verilmiştir.

Kaçıklık değişkenine ait değerler kullanılarak EWMA kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-38'de verilmiştir. Kaçıklık değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

Burada Shewhart kontrol grafikleri ile aynı sonuç elde edilmesine rağmen kaçıklık değişkeni için düzenlenen tek değişkenli CUSUM kontrol grafiği prosesin kontrol altında olmadığını göstermiştir.



Şekil 5-38: Kaçıklık değerlerine ait EWMA kontrol grafiği

Kavrama silindirinin dört değişkeni için düzenlenen tek değişkenli EWMA kontrol grafiklerinden sadece yükseklik değişkeni için düzenlenen kontrol grafiği prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer üç değişken için düzenlenen EWMA kontrol grafikleri ise kavrama silindiri üretim prosesinin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Tek değişkenli Shewhart ve CUSUM kontrol grafikleri ile karşılaştırıldığında sadece yükseklik değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği kontrol dışı sinyali vermiştir. Daha önceki bölümde kavrama silindirinin dört değişkeni için düzenlenen Shewhart kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu gösterirken yükseklik ve kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. EWMA ve CUSUM kontrol grafikleri proses ortalamasında ortaya çıkabilecek küçük kaymaları tespit etmede daha etkili olduklarından yükseklik ve kaçıklık değişkenlerinin ortalamasında küçük bir kaymanın olduğuna karar verilir.

Proses, tek değişkenli EWMA kontrol grafikleri ile incelendikten sonra bu bölümde, MEWMA kontrol grafikleri ile incelenecektir.

5.4.2. MEWMA Kontrol Grafikleri İle İPK Uygulaması

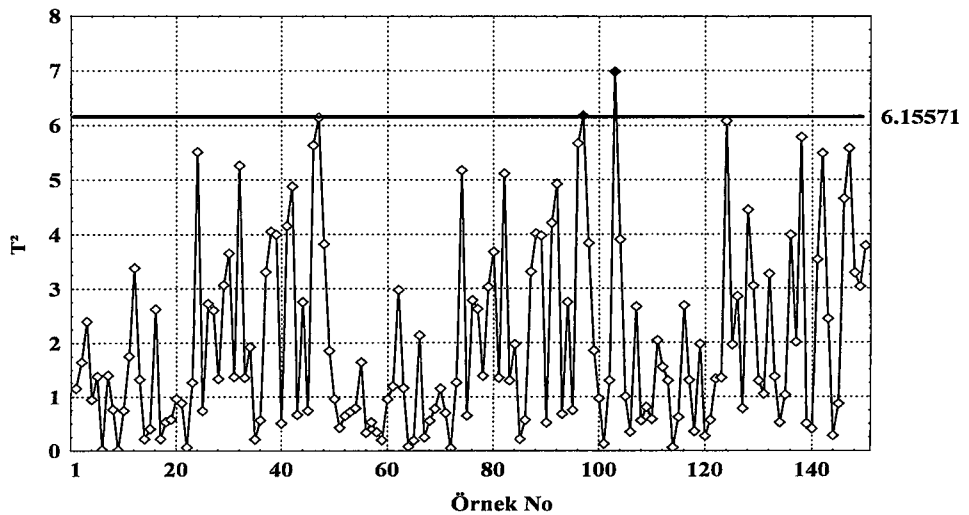
Tek değişkenli EWMA kontrol grafikleri düzenlendikten sonra bu bölümde çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafikleri düzenlenerek prosesin kontrolü yapılacaktır. Proseste kavrama silindrine ait dört kalite değişkeni incelenmiştir. Bu bölümde dört değişken öncelikle ikişerli daha sonra üçerli gruplandırılarak MEWMA kontrol grafikleri düzenlenecektir. En son bölümde ise dört değişken ele alınarak MEWMA kontrol grafiği düzenlenip proses incelenecektir.

5.4.2.1. İki değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafikleri

Bu bölümde kavrama silindrine ait dört kalite değişkeni ikişerli gruplandırılarak proses incelenecektir. Bu gruplandırmalar; $\text{çap1} - \text{çap2}$, $\text{çap1} - \text{yükseklik}$, $\text{çap1} - \text{kaçıklık}$, $\text{çap2} - \text{yükseklik}$, $\text{çap2} - \text{kaçıklık}$, ve $\text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ şeklindedir. Bu gruplandırmalar için MEWMA kontrol grafikleri aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

Çap1 – çap2 değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 ve çap2 değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından MEWMA kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için elde edilen Z_i ve T^2 değerleri Ek Tablo 36’da verilmiştir. Tablodaki değerler kullanılarak MEWMA kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu kontrol grafiği Şekil 5-39’da görülmektedir.

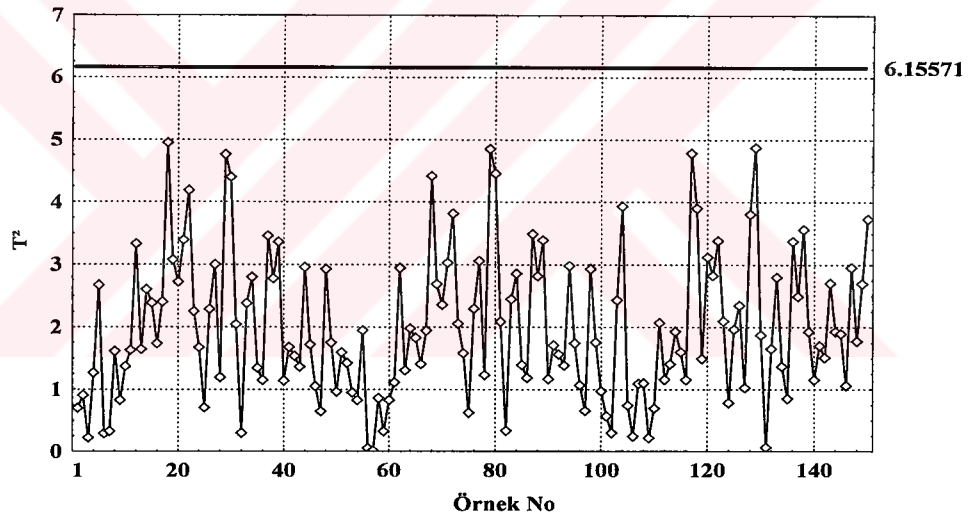


Şekil 5-39: Çap1-çap2 değerlerine ait MEWMA kontrol grafiği

Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 97 ve 103 numaralı örneklerde kontrol dışına çıktığına karar verilir. Burada kontrol dışı sinyali tespit edilmesine rağmen çap1 ve çap2 değişkenleri ayrı ayrı incelendiğinde düzenlenen EWMA kontrol grafikleri kontrol dışı sinyali tespit edememişti. Böylece tek değişkenli EWMA kontrol grafiklerinde tespit edilemeyen kontrol dışı sinyali iki değişken birlikte incelenerek tespit edilmiştir.

Çap1 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından MEWMA kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için elde edilen Z_i ve T^2 değerleri Ek Tablo 37’de verilmiştir.



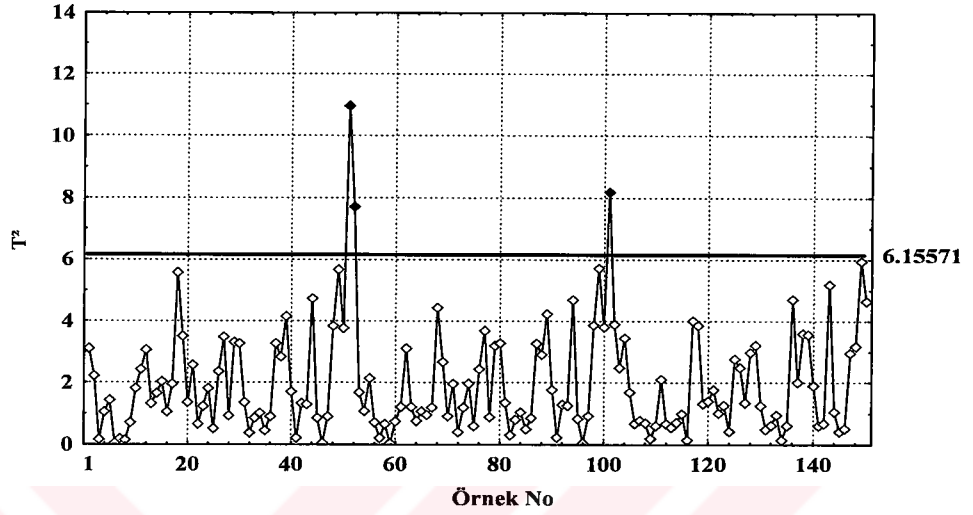
Şekil 5-40: Çap1-yükseklik değerlerine ait MEWMA kontrol grafiği

Söz konusu değerler kullanılarak için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği Şekil 5-40’ta görölmektedir. MEWMA kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu tespit edilir. Çap1 değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği prosesin kontrol altında olduğunu göstermesine rağmen yükseklik değişkeni için düzenlenen kontrol grafiği prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir.

Çap1 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses MEWMA kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu iki değişken için elde edilen Z_i ve T^2

değerleri Ek Tablo 38’de verilmiştir. Tablodaki değerler kullanılarak MEWMA kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-41’de verilmiştir.



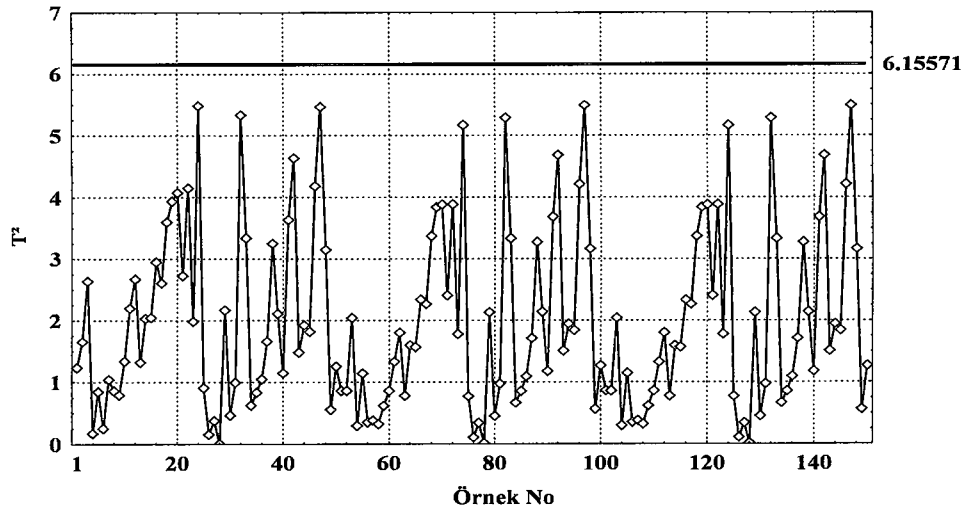
Şekil 5-41: Çap1-kaçıklık değerlerine ait MEWMA kontrol grafiği

MEWMA kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 51 numaralı örneğin alınması zamanından itibaren kontrol dışına çıkmış olduğu görülür. Üretime devam edildiğinden dolayı proses 52 ve 101 numaralı örneklerin alınması zamanında da kontrol dışına çıkmıştır. Daha önce çap1 ve kaçıklık değişkenleri için düzenlenen EWMA kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermesine rağmen iki değişken birlikte incelendiğinde prosesin kontrol dışı olduğu tespit edilmiştir.

Çap2 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak prosesin kontrolü iki değişken açısından MEWMA kontrol grafiği ile yapılmıştır. Bu değişkenler için Z_i ve T^2 değerleri hesaplanarak Ek Tablo 39’da verilmiştir.

Ek Tablo 39’daki değerler kullanılarak MEWMA kontrol grafiği düzenlenmiştir. Söz konusu kontrol grafiği Şekil 5-42’de görülmektedir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

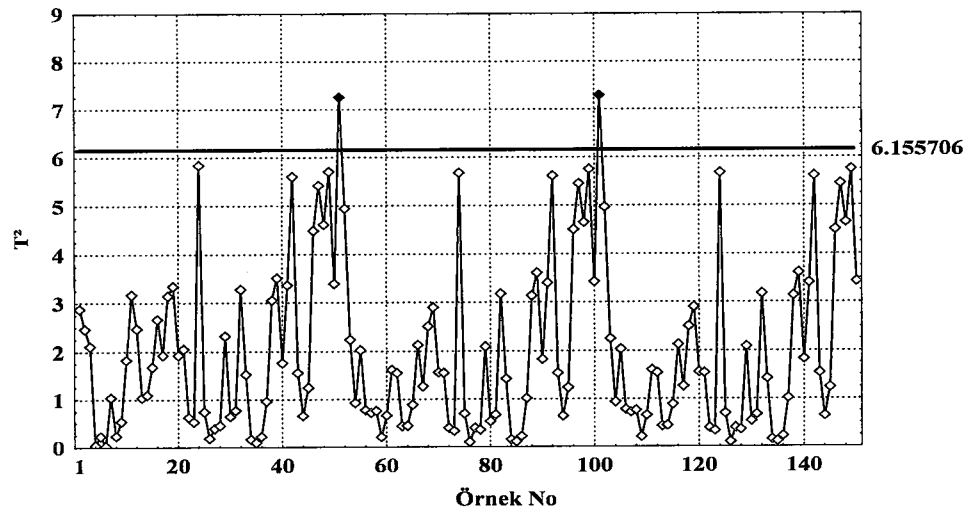


Şekil 5-42: Çap2-yükseklik değerlerine ait MEWMA kontrol grafiği

Burada kontrol dışı bir durum tespit edilememesine rağmen daha önce yükseklik değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği prosesin kontrol dışı olduğunu göstermiştir. Çap2 değişkeni kullanılarak düzenlenen EWMA kontrol grafiği ise buradaki gibi prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Çap2 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses MEWMA kontrol grafiği ile incelenmiştir. Söz konusu değişkenler için elde edilen Z_i ve T^2 değerleri Ek Tablo 40'ta verilmiştir.



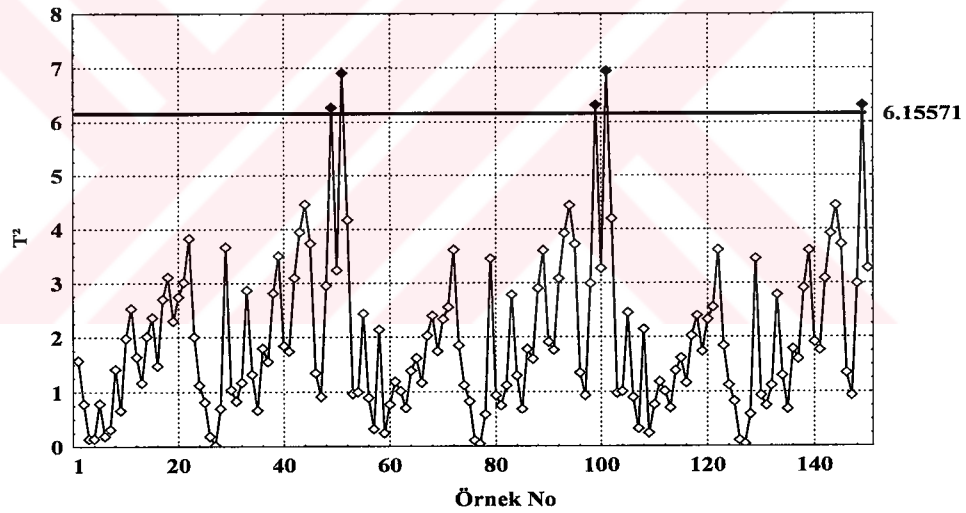
Şekil 5-43: Çap2-kaçıklık değerlerine ait MEWMA kontrol grafiği

Ek Tablo 40'taki değerler kullanılarak MEWMA kontrol grafiği düzenlenmiş ve Şekil 5-43'te verilmiştir. MEWMA kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 51 ve 101 numaralı örneklerin alınması zamanında kontrol dışına çıktığı tespit edilmiştir.

Burada kontrol dışı sinyali tespit edilmesine rağmen daha önce $\hat{\sigma}_2$ ve kaçıklık değişkenleri için düzenlenen EWMA kontrol grafiklerinden sadece kaçıklık değişkeni için düzenlenen kontrol grafiği kontrol dışı sinyali vermiştir. $\hat{\sigma}_2$ değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Yükseklik – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses iki değişken açısından MEWMA kontrol grafiği ile kontrol edilmiştir. Bu iki değişken için hesaplanan Z_i ve T^2 değerleri Ek Tablo 41'de verilmiştir.



Şekil 5-44: Yükseklik-kaçıklık değerlerine ait MEWMA kontrol grafiği

Tablodaki değerler kullanılarak MEWMA kontrol grafiği düzenlenerek Şekil 5-44'te verilmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 49 numaralı örneğin alınması zamanından itibaren kontrol dışına çıktığı görülmektedir. Proses ayrıca 51, 99 ve 101 numaralı örneklerde de kontrol dışına çıkmıştır.

Yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde prosesin kontrol dışına çıktığı tespit edilmesine rağmen bu durum tek değişkenli EWMA kontrol grafiğinde tespit edilememiştir. İki değişken için ayrı ayrı düzenlenen EWMA kontrol grafiklerinden sadece yükseklik değişkeni için düzenlenen kontrol grafiği proseste

kontrol dışı sinyali tespit etmiştir. Yükseklik değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği ise kontrol dışı sinyali tespit edememiştir.

İki değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafiklerinden sadece ikisinin kontrol dışı sinyali verdiği tespit edilmiştir. Çap1 – kaçıklık ve çap2 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer değişkenler için düzenlenen MEWMA kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

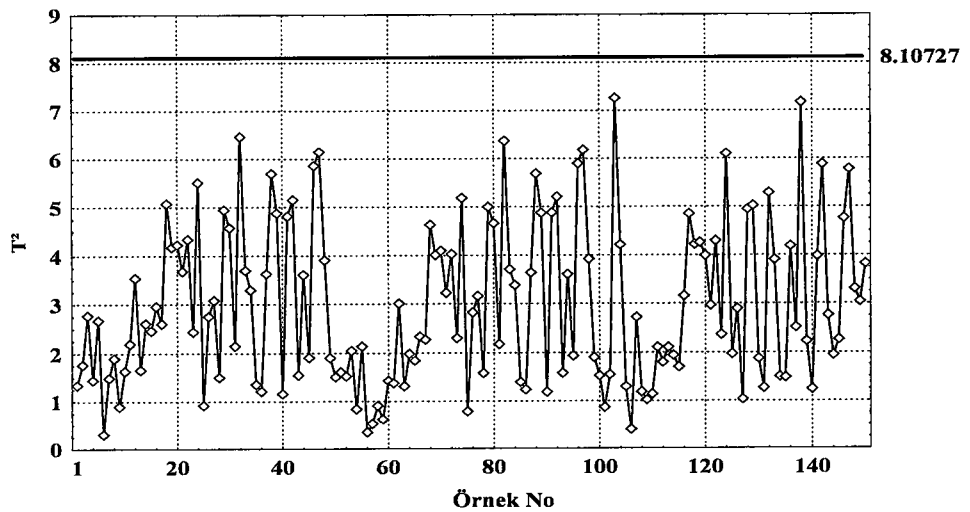
Kavrama silindiri üretim prosesi iki değişken açısından incelendikten sonra bu bölümde üç değişken için düzenlenecek MEWMA kontrol grafikleri ile incelenecektir.

5.4.2.2. Üç değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafikleri

Bu bölümde kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni üçerli olarak gruplandırılıp proses incelenecektir. Bu gruplandırmalar; çap1 – çap2 – yükseklik, çap1 – çap2 – kaçıklık, çap1 – yükseklik – kaçıklık ve çap2 – yükseklik – kaçıklık şeklindedir. Bu gruplandırmalar için MEWMA kontrol grafikleri aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

Çap1 – çap2 – yükseklik değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1, çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak proses üç değişken açısından MEWMA kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu üç değişken için elde edilen T^2 değerleri Ek Tablo 42’de verilmiştir.

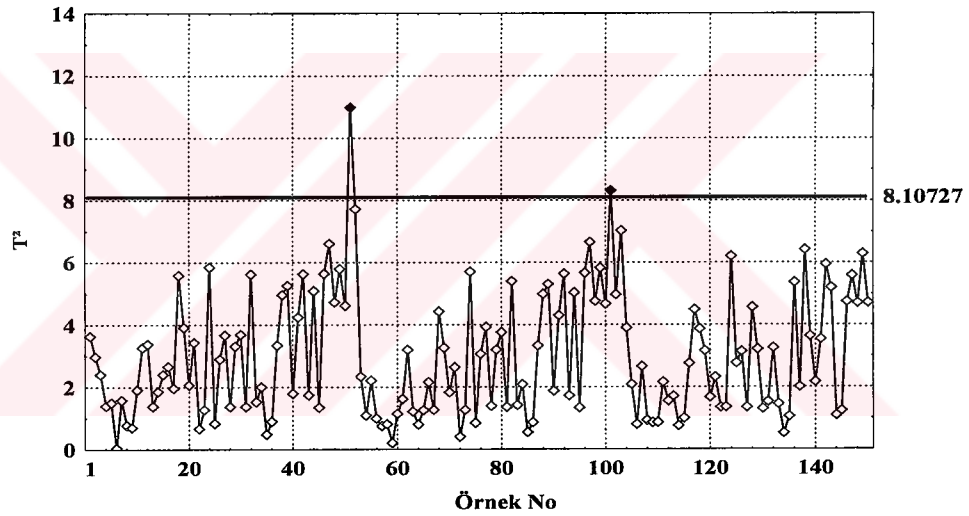


Şekil 5-45: Çap1-çap2-yükseklik değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği

Tablodaki değerler kullanılarak düzenlenen MEWMA kontrol grafiği Şekil 5-45'te görülmektedir. Çap1, çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte ele alınarak üç değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. MEWMA kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

Çap1 – çap2 – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1, çap2 ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses üç değişken açısından MEWMA kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu üç değişken kullanılarak hesaplanan T^2 değerleri Ek Tablo 43'te verilmiştir. T^2 değerleri kullanılarak düzenlenen MEWMA kontrol grafiği ise Şekil 5-46'da görülmektedir.



Şekil 5-46: Çap1-çap2-kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği

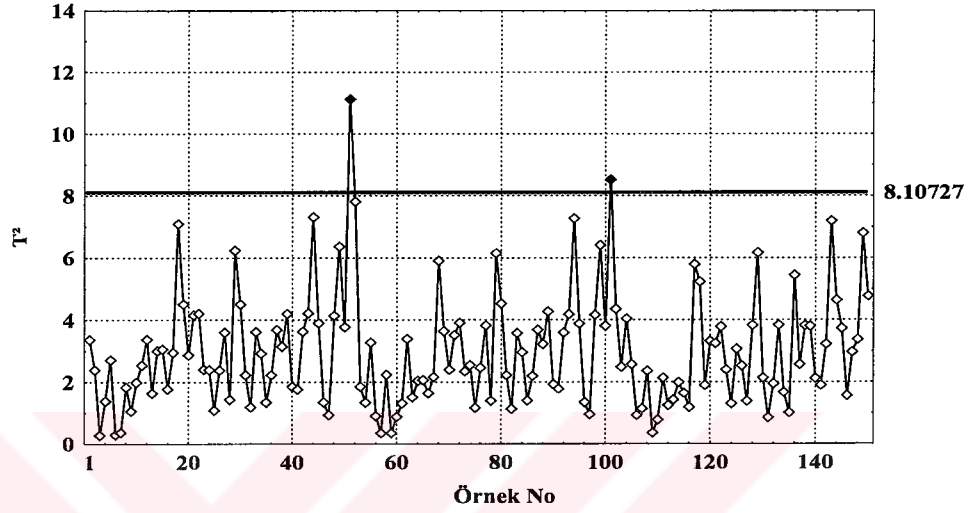
Çap1, çap2 ve kaçıklık değişkenleri ele alınarak üç değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. MEWMA kontrol grafiği incelendiğinde prosesin 51 numaralı örneğin alınması zamanında kontrol dışına çıktığı tespit edilmiştir.

Çap1–yükseklik–kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap1, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri için MEWMA kontrol grafiği düzenlenerek proses üç değişken açısından kontrol edilmiştir. Bu üç değişken için T^2 değerleri hesaplanarak Ek Tablo 44'te verilmiştir.

Tablodaki değerler kullanılarak düzenlenen MEWMA kontrol grafiği ise Şekil

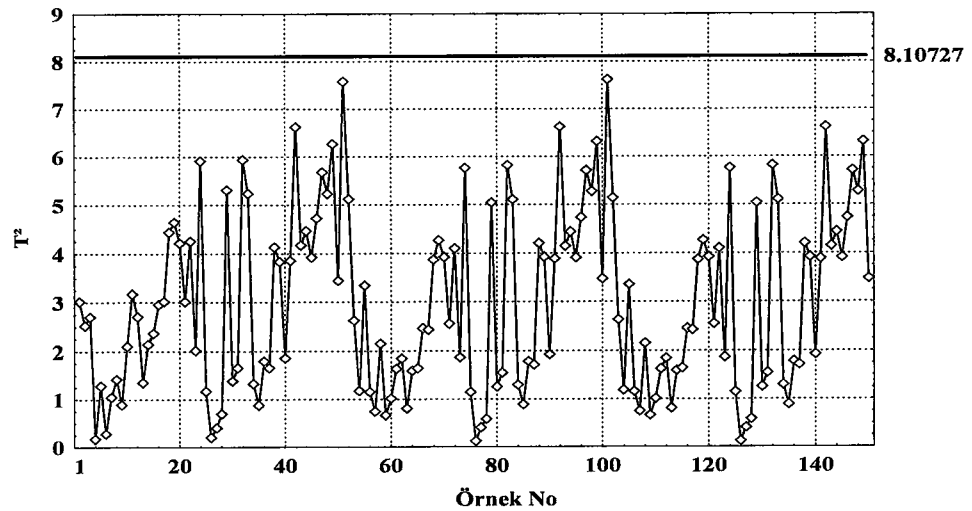
5-47’de görülmektedir. Çap1, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak üç değişken için kontrol grafiği düzenlenmiştir. Kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol dışına çıkmış olduğu anlaşılar. Proses 51 numaralı örneğin alınması zamanından itibaren kontrol dışına çıkmıştır.



Şekil 5-47: Çap1-yükseklik-kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği

Çap2-yükseklik-kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği:

Kavrama silindirinin çap2, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak proses üç değişken açısından MEWMA kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu üç değişken için hesaplanan T^2 değerleri Ek Tablo 45’te verilmiştir.



Şekil 5-48: Çap2-yükseklik-kaçıklık değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği

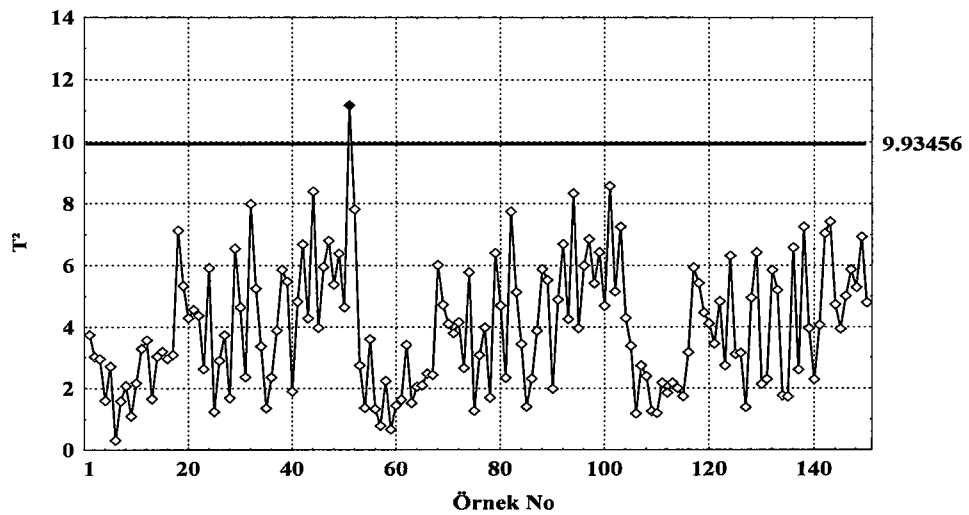
Tablodaki değerler kullanılarak düzenlenen MEWMA kontrol grafiği ise Şekil 5-48’de görülmektedir. Üç değişken için düzenlenen kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğuna karar verilir.

Bu bölümde üç değişken birlikte incelenmiştir. Üç değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafiklerinden sadece ikisinin kontrol dışı sinyali verdiği tespit edilmiştir. Düzenlenen kontrol grafiklerinden, $\text{çap1} - \text{çap2} - \text{kaçıklık}$ ve $\text{çap1} - \text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ değişkenleri için düzenlenen MEWMA kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer değişkenler için düzenlenen MEWMA kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Kavrama silindiri üretim prosesi üç değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafikleri ile incelendikten sonra son olarak dört değişken için düzenlenecek MEWMA kontrol grafikleri ile incelenecektir.

5.4.2.3. Dört değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği

Bu bölümde kavrama silindirine ait dört kalite değişkeni birlikte ele alınarak proses incelenecektir. Kavrama silindirine ait dört değişken birlikte ele alınarak proses MEWMA kontrol grafiği ile incelenmiştir. Bu dört değişken için T^2 değerleri hesaplanarak Ek Tablo 46’da verilmiştir. Ek Tablo 46’daki değerler kullanılarak düzenlenen MEWMA kontrol grafiği ise Şekil 5-49’da görülmektedir.



Şekil 5-49: Dört değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafiği

Kontrol grafiği Çap1 , çap2 , yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte ele

alınarak düzenlenmiştir. MEWMA kontrol grafiği incelendiğinde prosesin kontrol dışına çıkmış olduğuna karar verilir. Proses 51 numaralı örneğin alınması zamanında kontrol dışına çıkmıştır.

5.4.3. MEWMA kontrol grafikleri ile elde edilen sonuçlar

Otomatik transmisyonlarda kullanılan kavrama silindiri üretim prosesi ilk olarak tek değişkenli EWMA kontrol grafikleri ile incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda sadece yükseklik değişkeninin kontrol dışına çıktığı tespit edilmiştir. Yükseklik değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer üç değişken için düzenlenen EWMA kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Üretim prosesi tek değişkenli EWMA kontrol grafikleri ile kontrol edildikten sonra çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafikleri ile kontrol edilmiştir. Bu kontrolde iki değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafiklerinden; $\text{çap1} - \text{çap2}$, $\text{çap1} - \text{kaçıklık}$, $\text{çap2} - \text{kaçıklık}$ ve $\text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ değişkenleri kullanılarak düzenlenen kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Proses üç değişken açısından incelendiğinde, $\text{çap1} - \text{çap2} - \text{kaçıklık}$ ve $\text{çap1} - \text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ değişkenleri birlikte ele alınarak düzenlenen MEWMA kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını gösterirken üç değişken için düzenlenen diğer kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Proses son olarak dört değişken açısından incelendiğinde ise düzenlenen MEWMA kontrol grafiği prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir.

5.5. Hotelling T^2 – MCUSUM – MEWMA Kontrol Grafikleri İle Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması

Bu bölümde kavrama silindiri üretim prosesi için düzenlenen kontrol grafiklerinden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. İlk olarak tek değişkenli kontrol grafiklerinden elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında; Shewhart kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermesine rağmen CUSUM ve EWMA kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermişlerdir. Yükseklik ve kaçıklık değişkenleri için düzenlenen CUSUM kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını

tespit ederken EWMA kontrol grafiklerinden sadece yükseklik değişkeni için düzenlenen kontrol grafiği proste bir kontrol dışı sinyali tespit etmiştir. Tek değişkenli kontrol grafiklerinden sadece yükseklik ve kaçıklık değişkenleri için kontrol dışı sinyali tespit edilirken $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ değişkenleri için herhangi bir kontrol dışı durum tespit edilememiştir. Shewhart kontrol grafiklerinde herhangi bir kontrol dışı sinyali tespit edilemezken CUSUM ve EWMA kontrol grafiklerinde iki değişken için kontrol dışı sinyali tespit edilmiştir. CUSUM ve EWMA kontrol grafikleri, proses ortalamasında ortaya çıkabilecek küçük kaymaları tespit etmede Shewhart kontrol grafiklerinden daha etkili oldukları bilinmektedir. Bu durumda yükseklik ve kaçıklık değişkenlerinin ortalamalarında küçük bir kaymanın olduğuna karar verilir.

İki değişken için düzenlenen kontrol grafikleri karşılaştırıldığında; Hotelling T^2 kontrol grafiklerinden $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2$ ve $\hat{\mu}_2 - \text{yükseklik}$ değişkenlerinde bir kontrol dışı sinyali tespit edilirken, MCUSUM kontrol grafiklerinden $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2$ ve $\hat{\mu}_1 - \text{kaçıklık}$ değişkenleri için düzenlenen kontrol grafikleri kontrol dışı sinyali tespit etmiştir. Son olarak iki değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafiklerinde ise $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_1 - \text{kaçıklık}$, $\hat{\mu}_2 - \text{kaçıklık}$ ve $\text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ değişkenlerinde prosesin kontrol dışına çıktığı tespit edilmiştir. İki değişken açısından üç kontrol grafiği karşılaştırıldığında MEWMA kontrol grafiğinin kontrol dışı sinyali tespit etmede diğer kontrol grafiklerinden daha etkili olduğu görülür.

Kontrol grafikleri üç değişken açısından kontrol edildiğinde ise gene MEWMA kontrol grafiğinin daha etkili sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Üç değişken için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiklerinden hiçbirisi kontrol dışı sinyali tespit edemezken, $\hat{\mu}_1 - \text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ değişkenleri birlikte incelendiğinde düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiği kontrol dışı sinyali tespit etmiştir. Oysa MEWMA kontrol grafikleri, $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \text{kaçıklık}$ ve $\hat{\mu}_1 - \text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ değişkenleri birlikte incelendiğinde prosesin kontrol dışına çıktığını tespit etmiştir.

Son olarak kavrama silindirisinin dört değişkeni birlikte ele alınarak proses gözlemlendiğinde ise sadece MEWMA kontrol grafiği kontrol dışı sinyali tespit etmiştir. Dört değişken birlikte ele alınarak, Hotelling T^2 ve MCUSUM kontrol grafikleri ile proses gözlemlendiğinde ise prosesin kontrol altında olduğu tespit edilmiştir.

Bu sonuçlara göre tek değişken açısından CUSUM kontrol grafiğinin diğer iki

kontrol grafiğinden daha etkili olduğu, iki değışken birlikte ele alınarak proses incelendiğinde ise MEWMA kontrol grafiğinin daha etkili olduğu tespit edilmiştir. Kavrama silindiri üretim prosesi üç değışken açısından gözlemlendiğinde ise iki değışkende olduğu gibi MEWMA kontrol grafiğı daha etkili sonuçlar vermiştir. Son olarak kontrol grafikleri dört değışken açısından karşılaştırıldıklarında, MEWMA kontrol grafiğı ile proses incelendiğinde daha etkili sonuçlar elde edilmiştir. Sonuçlara bakıldığında kavrama silindiri üretim prosesinin ortalamasında küçük bir kaymanın olduğu anlaşılır.



SONUÇ VE ÖNERİLER

Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları son yıllarda yabancı literatürde büyük önem arz etmektedir. Bu konu ile ilgili yerli literatürdeki boşluğun doldurulmasına katkı sağlamak amacıyla hazırlanan bu çalışmada sözü geçen metotlar kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, çalışmanın teori bölümünde çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarından; Hotelling T^2 kontrol grafiği, çok değişkenli kümülatif toplam (MCUSUM) kontrol metotları ve çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafiği incelenmiştir. Çalışmanın son bölümü olan uygulama bölümünde ise söz konusu metotlar kullanılarak otomotiv sanayi için döküm parçaları üreten bir işletmede istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması yapılmıştır.

Teorik çerçevenin birinci bölümünde kalite kontrolü ve istatistiksel proses kontrolü konuları anlatılmıştır. Kalite kontrolü ve istatistiksel proses kontrolünün tanımı yapılarak bu konularla ilgili bilgiler verildikten sonra çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının özelliklerinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarından Hotelling T^2 kontrol grafiği anlatılmıştır. Hotelling T^2 kontrol grafikleri izah edilmeden önce tek değişkenli Shewhart kontrol grafikleri kısaca incelenmiştir. Bu bölümde Shewhart kontrol grafiklerinden, Ortalama ($\bar{X}$) ve değişim aralığı (R) kontrol grafikleri ile bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri incelenmiştir. Shewhart kontrol grafikleri incelendikten sonra Hotelling T^2 kontrol grafikleri kapsamlı bir şekilde incelenerek bu kontrol grafikleri ile ilgili örnekler verilmiştir. Bu bölüme ilişkin istatistiksel proses kontrol uygulamasının sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Kavrama silindiri üretim prosesi ilk olarak tek değişkenli Shewhart kontrol grafikleri ile incelendiğinde, tüm değişkenler için düzenlenen bireysel gözlem değerleri ve hareketli değişim aralığı (MR) kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Daha sonra proses iki değişken açısından incelenmiştir. Burada iki değişken için düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiklerinden sadece $\text{çap1} - \text{çap2}$ ve $\text{çap2} - \text{yükseklik}$ değişkenleri için düzenlenen kontrol grafikleri prosesin kontrol dışı olduğunu

göstermiştir. Diğer kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Proses, üç değişken için düzenlenen kontrol grafikleri ile incelendiğinde ise sadece $\hat{\mu}_1$ – yükseklik – kaçıklık değişkenleri birlikte ele alınarak düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafiğinin kontrol dışı sinyali verdiği görülmüştür. Düzenlenen diğer kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir. Son olarak proses dört değişken açısından incelendiğinde prosesin kontrol altında olduğu tespit edilmiştir.

Çok değişkenli kümülatif toplam (MCUSUM) kontrol metotlarına ayrılan üçüncü bölümde, ilk olarak tek değişkenli kümülatif toplam (CUSUM) kontrol grafikleri incelenmiştir. Daha sonra araştırmacılar tarafından geliştirilmiş olan çok değişkenli kümülatif toplam kontrol metotları geniş bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümle ilgili istatistiksel proses kontrol uygulamasının sonuçları birkaç paragraf altında şu şekilde özetlenebilir:

Kavrama silindiri üretim prosesi ilk olarak tek değişkenli CUSUM kontrol grafikleri ile incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda yükseklik ve kaçıklık değişkenleri için düzenlenen V maskeli CUSUM kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını gösterirken, $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ değişkenleri için düzenlenen CUSUM kontrol grafikleri ise proseste herhangi bir kontrol dışı sinyali vermemiştir.

Kavrama silindiri üretim prosesi tek değişkenli CUSUM kontrol grafikleri ile incelendikten sonra çok değişkenli CUSUM kontrol metotları ile incelenmiştir. Bu incelemede iki değişken için düzenlenen MCUSUM kontrol grafiklerinden, $\hat{\mu}_1$ – $\hat{\mu}_2$ ve $\hat{\mu}_1$ – kaçıklık değişkenleri için düzenlenen kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Proses üç değişken için incelendiğinde ise MCUSUM kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir. Son olarak proses dört değişken açısından incelendiğinde de prosesin kontrol altında olduğu belirlenmiştir.

Teorik çerçevenin son bölümü olan dördüncü bölümünde ise çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol grafiği incelenmiştir. MEWMA kontrol grafiği incelenmeden önce konunun daha iyi anlaşılması amacıyla, tek değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (EWMA) kontrol grafiği kısaca izah edilmiştir. Bu bölümde çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama kontrol grafiği,

elde edilen literatür kullanılarak kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Çalışmanın teorik kısmının bu son bölümüne ilişkin istatistiksel proses kontrol uygulamasının sonuçları şu şekilde özetlenebilir:

Kavrama silindiri üretim prosesi ilk olarak tek değişkenli EWMA kontrol grafikleri ile incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda sadece yükseklik değişkeninin kontrol dışına çıktığı tespit edilmiştir. Yükseklik değişkeni için düzenlenen EWMA kontrol grafiği prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer üç değişken için düzenlenen EWMA kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Üretim prosesi tek değişkenli EWMA kontrol grafikleri ile kontrol edildikten sonra MEWMA kontrol grafikleri ile kontrol edilmiştir. Bu kontrolde iki değişken için düzenlenen MEWMA kontrol grafiklerinden; $\text{çap1} - \text{çap2}$, $\text{çap1} - \text{kaçıklık}$, $\text{çap2} - \text{kaçıklık}$ ve yükseklik – kaçıklık değişkenleri kullanılarak düzenlenen kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir. Diğer kontrol grafikleri ise prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir.

Proses üç değişken açısından incelendiğinde, $\text{çap1} - \text{çap2} - \text{kaçıklık}$ ve $\text{çap1} - \text{yükseklik} - \text{kaçıklık}$ değişkenleri birlikte ele alınarak düzenlenen MEWMA kontrol grafikleri prosesin kontrol dışına çıktığını gösterirken üç değişken için düzenlenen diğer kontrol grafikleri prosesin kontrol altında olduğunu göstermiştir. Proses son olarak dört değişken açısından incelendiğinde ise düzenlenen MEWMA kontrol grafiği prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir.

Kavrama silindiri üretim prosesi için icra edilen istatistiksel proses kontrol uygulamasının sonuçları bu şekilde özetlendikten sonra bu sonuçların bir karşılaştırması aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Teorik çerçevede anlatılan üç metodun bir karşılaştırması ilk olarak tek değişken açısından yapıldığında, CUSUM kontrol grafiğinin diğer iki kontrol grafiğinden daha etkili olduğu tespit edilmiştir. Kavrama silindiri üretim prosesi için düzenlenen tek değişkenli kontrol grafiklerinden CUSUM kontrol grafiği iki değişkende kontrol dışı sinyali verirken EWMA kontrol grafiğinde sadece bir değişkenin kontrol dışı olduğu tespit edilmiştir. Düzenlenen Shewhart kontrol grafikleri ise herhangi bir kontrol dışı sinyali tespit edememiştir.

İki değişken açısından bir karşılaştırma yapıldığında, MEWMA kontrol

grafiğinin daha etkili olduğu tespit edilmiştir. İki değişken birlikte ele alınarak proses incelendiğinde, düzenlenen Hotelling T^2 kontrol grafikleri ile MCUSUM kontrol grafikleri sadece iki grafikte kontrol dışı sinyali vermiştir. İki değişken birlikte ele alınarak düzenlenen MEWMA kontrol grafiklerinde ise üç kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyali tespit edilmiştir.

Kavrama silindiri üretim prosesi üç değişken açısından gözlemlendiğinde ise iki değişkende olduğu gibi MEWMA kontrol grafiğinin daha etkili sonuçlar verdiği görülmüştür. Üç değişken birlikte incelendiğinde düzenlenen MCUSUM kontrol grafiklerinden ikisi kontrol dışı sinyali verirken Hotelling T^2 kontrol grafiklerinde ise sadece bir grafik kontrol dışı sinyali vermiştir. Proses üç değişken açısından MEWMA kontrol grafikleri ile incelendiğinde ise düzenlenen üç kontrol grafiğinde kontrol dışı sinyali belirlenmiştir.

Son olarak kontrol grafikleri dört değişken açısından karşılaştırıldıklarında, proses MEWMA kontrol grafiği ile incelendiğinde daha etkili sonuçlar elde edilmiştir. Kavrama silindiri üretim prosesi dört değişken açısından incelendiğinde diğer iki kontrol grafiği ile proses incelendiğinde kontrol dışı sinyali tespit edilemezken MEWMA kontrol grafiği prosesin kontrol dışına çıktığını göstermiştir.

Bu sonuçlara bakıldığında, tek değişkenli kontrol grafiklerle yapılan istatistiksel proses kontrol uygulaması sonucunda kavrama silindiri üretim prosesinin ortalamasında küçük bir kaymanın olduğuna karar verilir. Çünkü CUSUM ve EWMA kontrol grafikleri, proses ortalamasında ortaya çıkabilecek küçük kaymaları tespit etmede Shewhart kontrol grafiklerinden daha etkili olmaktadır. Bu durum, kavrama silindiri üretim prosesi için icra edilen istatistiksel proses kontrol uygulamasında görülmüştür.

Çok değişkenli metotlarla yapılan istatistiksel proses kontrol uygulaması sonucunda ise gene kavrama silindiri üretim prosesinin ortalamasında küçük bir kaymanın olduğuna karar verilir. Yukarıda anlatıldığı gibi MEWMA ve MCUSUM kontrol grafikleri, Hotelling T^2 kontrol grafiklerine kıyasla daha etkili sonuçlar vermiştir.

Tek değişkenli ve çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının bir karşılaştırması yapıldığı takdirde; şayet değişkenler arasında anlamlı bir ilişki olduğunda tek değişkenli metotlara kıyasla çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotlarının daha sağlıklı sonuçlar verdiği söylenebilir. Bir ürünün kalitesi birden fazla değişkenle

ölçüldüğünde, bu değişkenler tek değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları ile incelendiğinde kontrol dışı sinyali tespit edilemezken çok değişkenli metotlar kullanıldığında değişkenler arasındaki ilişkiden dolayı kontrol dışı sinyali tespit edilebilir.

Sonuç olarak birden fazla kalite değişkenine sahip proseslerde, değişkenler arasında bir ilişki olduğunda, prosesin incelenmesinde tek değişkenli metotlara kıyasla çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metotları daha sağlıklı sonuçlar vermektedir.



KAYNAKLAR

Kitap ve Yayınlar:

- Akın, Besim. **İşletmelerde İstatistik Proses Kontrol (İPK) Teknikleri**, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul, 1996.
- Akün, Faruk. **İstatistik ve Kalite Kontrolü**, İTÜ Yay., No:923, İstanbul, 1973.
- Alt, Frank B. **Multivariate Quality Control: Encyclopedia of Statistical Sciences**, Vol:6, Editor: N. L. Johnson – S. Kotz, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1985.
- Arslan, Demir. **İstatistik Kalite Kontrolü**, A. Ü. Yayınları, Yayın No:388, Sevinç Matbaası, Ankara, 1974.
- Banks, Jerry. **Principles of Quality Control**, John Wiley and Sons. Inc., Canada, 1989.
- Başar, Alaaddin. **Uygulamalı İstatistik (Kalite Kontrolü)**, Atatürk Üniversitesi İ.İ.B.F. Araştırma Merkezi Ders Notları, No:119, Erzurum, 1985.
- Berenson, Mark L. – Levine, David M. **Basic Business Statistics: Concepts and Applications**, 5th Edition, Prentice Hall Inc., 1992.
- Berenson, Mark L. – Levine David M. **Basic Business Statistics: Concepts and Applications**, 6th Edition, Prentice Hall Inc., 1996.
- Berkün, İ. Taner. **Standartlaştırma ve Türkiye'deki Uygulamaları**, Ankara, 1975.
- Besterfield, Dale H. **Quality Control**, Third Edition, Prentice Hall Inc., 1990.
- Beyer, William H. **CRC Standart Probability and Statistics Tables and Formulae**, CRC Press Inc., 1991.
- Bhote, Keki R. **World Class Quality**, AMA Membership Publications, 1988.
- Bicking, C. A. – Gryna, Jr. F. M. **Process Control by Statistical Methods: Quality Control Handbook**, Third Edition, McGraw – Hill Inc., New York, 1974.
- Dale, Barrie – Oakland, John. **Quality Improvement Through Standarts**, Stanley Thornes Inc., 1991.
- Demir, M. Hulusi – Gümüsoğlu, Şevkinaz. **Üretim/İşlemler Yönetimi**, 4. Baskı, Beta Yayınevi, İstanbul, 1994.
- Devor, Richard E. – Chang, Tsong-how – Sutherland, J. W. **Statistical Quality Design and Control: Contemporary Concepts and Methods**, Prentice Hall Inc., 1992.

- Duncan, Acheson J. **Quality Control and Industrial Statistics**, Third Edition, Richard D. Irwin Inc., 1965.
- Duncan, Acheson J. **Quality Control and Industrial Statistics**, 5th Edition, Richard D. Irwin Inc., 1986.
- Feingenbaum, A.V. **Total Quality Control**, Third Edition, McGraw – Hill Inc., 1991.
- Fevzi, Faruk. **Kalite Yönetimi**, TSE Kalite Seminer Notları, Ankara, 1998.
- Fırat, S. Ümit Oktay – Arıcıgil Cilan, Çiğdem. **Multivariate Statistical Process Control Methods and New Approaches**, The 6th TQM World Congress, Saint Petersburg, 2001.
- Gözlü, Sıtkı. **Endüstriyel Kalite Kontrolü**, İTÜ Yayınları, İstanbul, 1990.
- Grant, Eugene L. – Leavenworth, Richard S. **Statistical Quality Control**, 7th Edition, McGraw – Hill Inc., 1996.
- Gümüšoğlu, Şevkinaz. **İstatistiksel Kalite Kontrolü**, Beta Yayınevi, İstanbul, 1995.
- Hawkins, D. M. – Olwell, D. H. **Statistics for Engineering and Physical Science: Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement**, Springer – Verlag Inc., New York, 1998.
- Ishikawa, Kaoru. **Introduction to Quality Control**, Chapman and Hall Inc., 1989.
- Ishikawa, Kaoru. **Toplam Kalite Kontrol**, Çev: KalDer, KalDer Yayınları, Yayın No:7, İstanbul, 1995.
- Jackson, J. Edward. **A User's Guide to Principal Components**, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1991.
- Johnson, N. L. – Leone, F. C. **Cumulative Sum Charts (Mathematical Principles Applied to their Construction and Use)** Part-1, Industrial Quality Control, 1962.
- Johnson, Richard A. – Wichern, Dean W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**, 4th Edition, Prentice Hall Inc., 1998.
- Juran, J. M. – Gryna, F. M. **Quality Planning and Analysis**, McGraw – Hill Inc., New York, 1970.
- Kartal, Mahmut. **İstatistiksel Kalite Kontrolü**, Şafak Yayınevi, Erzurum, 1999.
- Kobu, Bülent. **Endüstriyel Kalite Kontrolü**, İkinci Baskı, İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1987.

- Kobu, Bülent. **Üretim Yönetimi**, Sekizinci Baskı, İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1994.
- KOSEM, **Kalite Sistemine Hazırlık (Seminer Notları)**, KOSEM Yayınları, Ankara.
- Lester, R. H. – Enrick, N. L. **Quality Control for Profit**, Third Edition, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.
- Mason, Robert L. – Young, John C. **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**, ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Probability, 2002.
- McClave, J. T. – Benson, P. G. **Statistics for Business and Economics**, 6th Edition, MacMillan Publishing, New York. 1994.
- Messina, William. S. **Statistical Quality Control for Manufacturing Managers**, John Wiley and Sons. Inc., 1987.
- Mitra, Amitava. **Fundamentals of Quality Control and Improvement**, MacMillan Publishing, 1993.
- Montgomery, Douglas C. **Introduction to Statistical Quality Control**, Second Edition, John Wiley and Sons. Inc., 1991.
- Montgomery, Douglas C. **Introduction to Statistical Quality Control**, 4th Edition, John Wiley and Sons. Inc., 2001.
- Murdoch, J. **Control Charts**, MacMillan Publishing, 1979.
- Oakland, John S. – Followell, Roy F. **Statistical Process Control: A Practical Guide**, Second Edition, Heinemann Pub., Inc., 1990.
- Ott, Ellis R. – Schilling, Edward G. **Process Quality Control**, Second Edition, McGraw-Hill Inc., 1990.
- Ozeki, Kazuo – Asaka, Tetsuichi. **Handbook of Quality Tools: The Japanese Approach**, Productivity Press Inc., Cambridge, 1990.
- Özdamar, Kazım. **Paket Programlar İle İstatistiksel Veri Analizi (Çok Değişkenli Analizler)**, İkinci Baskı, Kaan Kitabevi, 1999.
- Özkan, Füsun Z., **Kalite Kontrolünde Kullanılabilen Çok Değişkenli İstatistik Yöntemlerin Normallikten Sapmadan Etkilenme Bakımından Karşılaştırılmaları**, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayınlanmamış Doktora Tezi, 1994.

- Ryan, Thomas P. **Statistical Methods for Quality Improvement**, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1989.
- Smith, Nancy D. **Multivariate Cumulative Sum Control Charts**, University of Maryland College Park, Unpublishing Ph.D. Thesis, 1987.
- Smith, G. **Statistical Process Control and Quality Improvement**, MacMillan Publishing, 1993.
- Tatlıdil; Hüseyin. Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz, Akademi Matbaası, Ankara, 2002.
- Tan, S. – Pişkırcıoğlu, N. **Kalitesizliğin Maliyeti**, MPM Yay., No:316, Ankara, 1991.
- Uğur, A. N. – Çaltuğ, H. **İstatistik Kalite Kontrol**, KOSGEB Yay., Ankara, 1994.
- Wadsworth, H. M. – Stephens, K. S. – Godfrey, A. B. **Modern Methods for Quality Control and Improvement**, John Wiley and Sons. Inc., 1986.
- Woodward, R. H. – Goldsmith, P. L. **Cumulative Sum Techniques: Monograf No:3**, Oliver and Boyd Inc., Edinburgh, 1964.
- Yağız, Ömer. **Kalite Planlaması ve Kontrolü (Seminer Notları)**, SEGEM Yay., Ankara, 1981.
- Ye, Nong - Chen, Qiang - Erman, Syed M. - Vilbert, Sean. **Hotelling's T^2 Multivariate Profiling for Anomaly Detection**, Workshop on Information Assurance and Security, United States Military Academy, West Point, NY, 6-7 June, 2000.

Makaleler:

- Alwan, Layth C. "*CUSUM Quality Control–Multivariate Approach*", Communications in Statistics: Theory and Method, Vol:15, No:12, 1986, s.3531-3543.
- Aparisi, F. "*Hotelling's T^2 Control Chart with Adaptive Sample Sizes*", International Journal of Production Research, Vol:34, No:10, 1996, s.2853-2862.
- Bakır, M. Akif – Karaca, Sezer. "*Çok Değişkenli Kalite Kontrol Yaklaşımlarının Bir Değerlendirmesi*", İstatistik Araştırma Dergisi, Cilt:1, No:1, 2002, s.67-85.
- Blazek, L. W. – Novic, B. – Scott, D. M. "*Displaying Multivariate Data Using Polyplots*", Journal of Quality Technology, Vol:19, 1987, s.69-74.
- Choi, S. W. – Lee, S. "*A General Multivariate EWMA Control Chart*", International Journal of Management Science, Vol:6, No:1, 2000, s.1-21.
- Chua, M. – Montgomery, D. C. "*Investigation and Characterization of a Control Scheme for Multivariate Quality Control*", Quality and Reliability Engineering International, No:8, 1992, s.37-44.
- Croiser, Ronald B. "*A New Two – Sided Cumulative Sum Quality Control Scheme*", Technometrics, Vol:28, No:3, 1986, s.187-194.
- Croiser, Ronald B. "*Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality Control Schemes*", Technometrics, Vol:30, No:3, 1988, s.291-303.
- Crowder, Stephen V. "*A Simple Method for Studying Run-Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Charts*", Technometrics, Vol:29, No:4, 1987, s.401-407.
- Crowder, Stephen V. "*Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes*", Journal of Quality Technology, Vol:21, No:3, 1989, s.155-162.
- Doğanaksoy, N. – Faltin, F. W. – Tucker, W. T. "*Identification of Out of Control Quality Characteristics in a Multivariate Manufacturing Environment*", Communications in Statistics: Theory and Methods, Vol:20, No:9, 1991, s.2775-2790.
- Hawkins, Douglas M. "*Multivariate Quality Control Based on Regression – Adjusted Variables*", Technometrics, Vol:33, No:1, 1991, s.61-75.
- Hawkins, Douglas M. "*Regression Adjustment for Variables in Multivariate Quality Control*", Journal of Quality Technology, Vol:25, No:3, 1993, s.170-182.

- Hayter, Anthony J. – Tsui, Kwok L. “*Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems*”, Journal of Quality Technology, Vol:26, No:3, 1994, s.197-208.
- Healy, John D. “*A Note on Multivariate CUSUM Procedures*”, Technometrics, Vol:29, No:4, 1987, s.409-412.
- Jackson, J. Edward. “*Multivariate Quality Control*”, Communications in Statistics: Theory and Methods, Vol:14, No:11, 1985, s.2657-2688.
- Johnson, N. L. “*A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Charts*”, Journal of American Statistical Association, Vol:56, 1961, s.835-840.
- Kavrakoğlu, İbrahim. “*Kalite ve Verimlilik*”, MPM Verimlilik Dergisi, Özel Sayı, 1990.
- Linderman, Kevin – Love, Thomas E. “*Economic and Economic Statistical Designs for MEWMA Control Charts*”, Journal of Quality Technology, Vol:32, No:4, 2000, s.410-417.
- Lowry, C. A. – Montgomery, D. C. “*A Review of Multivariate Control Charts*”; Institute of Industrial Engineers Transactions, Vol:27, No:6, 1995, s.800-810.
- Lowry, C. A. – Woodall, W. H. – Champ, C. W. – Rigdon, S. E. “*A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart*”, Technometrics, Vol:34, No:1, 1992, s.46-53.
- Lucas, James M. “*The Design and Use of V-Mask Control Schemes*”, Journal of Quality Technology, Vol:8, No:1, 1976, s.1-12.
- Lucas James M. “*Cumulative Sum (CUSUM) Control Schemes*”, Communications in Statistics: Theory and Method, Vol:14, No:11, 1985, s.2689-2704.
- Lucas, James M. – Saccucci, M. S. “*Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements*”, Technometrics, Vol:32, 1990, s.1-12.
- MacGregor, J. F. – Kourti, T. “*Statistical Process Control of Multivariate Processes Control*”, Engineering Practice, Vol:3, No:3, 1995, s.403-414.
- Martin, E. B. – Morris, A. J. – Kiparissides, C. “*Manufacturing Performance Enhancement Through Multivariate Statistical Process Control*”, Annual Reviews in Control, Vol:23, 1999, s.35-44.
- Mason, Robert L. – Champ, C. W. – Tracy, N. L. – Wierda, S. J. – Young, J. C. “*Assessment of Multivariate Process Control Techniques*”, Journal of Quality Technology, Vol:29, No:2, 1997, s.140-143.

- Mason, Robert L. – Tracy, Nola D. – Young, John C. “*Decomposition of T^2 for Multivariate Control Chart Interpretation*”, Journal of Quality Technology, Vol:27, No:2, 1995, s.99-108.
- Mason, Robert L. – Tracy, Nola D. – Young, John C. “*A Practical Approach for Interpreting Multivariate T^2 Control Chart Signals*”, Journal of Quality Technology, Vol:29, No:4, 1997, s.396-406.
- Mason, Robert L. – Young, John C. “*Improving the Sensitivity of the T^2 Statistic in Multivariate Process Control*”, Journal of Quality Technology, Vol:31, No:2, 1999, s.155-165.
- Mason, Robert L. – Young, John C. “*Interpretive Features of a T^2 Chart in Multivariate SPC*”, Quality Progress, Vol:33, No:4, 2000, s.84-89.
- Molnau, W. E. – Runger, G. C. – Montgomery, D. C. – Skinner, K. R. – Lored, E. N. – Prabhu, S. S. “*A Program for ARL Calculation for Multivariate EWMA Charts*”, Journal of Quality Technology, Vol:33, No:4, 2001, s.515-521.
- Monden, Yasuhiro. “*Tam Zamanında Üretim Ortamında Kalite Kontrol*”, Çev: Nesime Acar, MPM Verimlilik Dergisi, 1993.
- Murphy, B. J. “*Selecting Out of Control Variables with the T^2 Multivariate Quality Control Procedure*”, The Statistician, Vol: 36, 1987, s.571-583.
- Nedumaran, Gunabushanam – Pignatiello, Joseph J. “*On Constructing T^2 Control Charts for On-Line Process Monitoring*”, Institute of Industrial Engineers (IIE) Transactions: Quality and Reliability Engineering, Vol:31, 1999, s.529-536.
- Pignatiello, Joseph J. – Runger, George C. “*Comparisons of Multivariate CUSUM Charts*”, Journal of Quality Technology, Vol:22, No:3, 1990, s.173-186.
- Prabhu, Sharad S. – Runger, George C. “*Designing A Multivariate EWMA Control Chart*”, Journal of Quality Technology, Vol:29, No:1, 1997, s.8-15.
- Rigdon, Steven E. “*A Double-Integral Equation for the Average Run Length of a Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart*”, Statistics and Probability Letters, Vol:24, 1995, s.365-373.
- Roberts, S. W. “*Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages*”, Technometrics, Vol:1, No:3, 1959, s.239-250.
- Runger, George C. “*Projections and the U^2 Multivariate Control Chart*”, Journal of Quality Technology, Vol:28, No:3, 1996, s.313-319.

- Runger, George C. – Prabhu, Sharad S. "*A Markov Chain Model for the Multivariate Exponentially Weighted Moving Averages Control Chart*", Journal of American Statistical Association, Vol:91, No:436, 1996, s.1701-1706.
- Runger, G. C. – Keats, J. B. – Montgomery, D. C. – Scranton, R. D. "*Improving the Performance of the Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart*", Quality and Reliability Engineering International, Vol:15, 1999, s.161-166.
- Sullivan, Joe H. – Woodall, William H. "*A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations*", Journal of Quality Technology, Vol:28, No:4, 1996, s.398-408.
- Testik, M. C. – Runger, G. C. – Borror, C. M. "*Robustness Properties of Multivariate EWMA Control Charts*", Quality and Reliability Engineering International, Vol:19, 2003, s.31-38.
- Tracy, Nola D. – Young, John C. – Mason, Robert L. "*Multivariate Control Charts for Individual Observations*", Journal of Quality Technology, Vol:24, No:2, 1992, s.88-95.
- Wierda, S. J. "*Multivariate Statistical Process Control – Recent Results and Directions for Future Research*", Statistica Neerlandica, Vol:48, No:2, 1994, s.147-168.
- Woodall, William H. "*On the Markov Chain Approach to The Two-Sided CUSUM Procedure*", Technometrics, Vol:26, No:1, 1984, s.41-46.
- Woodall, William H. – Ncube, Matoteng M. "*Multivariate CUSUM Quality Control Procedures*", Technometrics, Vol:27, No: 3, 1985, s.285-292.

Web Adresleri:

Bower, K. M. **Using Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) Charts,**

<http://www.sytsma.com/tqmttools/ewma.html>.

Houshmand, Ali A. – Golnabi, Saeed. **Multivariate Shewhart $\bar{x}$ Chart,**

<http://interstat.stat.vt.edu/interstat/index/Sep99.html>.

http://www.../knowctrWhen_to_Use_an-EWMA_Chart.html.

http://www.engineering.uiowa.edu/~qctrl/lectures2004/Lect19_040504.pdf.

<http://www.hha.dk/if/Bpm/Download/CUSUM-EWMA.pdf>.

<http://www.incontroltech.com/mvspc/hotelling/hotelling.html>.

<http://www.sytsma.com/tqmttools/ewma.html>.

<http://www.sys.virginia.edu/mqc/index2a.html>, s.e.t.

Steiner, Stefan H. **Exponentially Weighted Moving Average Control Charts with Time-Varying Control Limits and Fast Initial Response,**

<http://www.stats.uwaterloo.ca/~Shsteine/papers/ewmafir.pdf>.

EKLER

Ek Tablo 1: Kavrama Silindirinin dört değişkenine ait veriler

No	Çap1	Çap2	Yük.	Kaç.	No	Çap1	Çap2	Yük.	Kaç.
1	102.8	137.4	61.4	0.3	44	102.5	137.3	61.6	0.4
2	102.7	137.3	61.4	0.45	45	102.8	137.2	61.5	0.4
3	102.6	137.3	61.6	0.5	46	102.7	137.1	61.4	0.35
4	102.5	137.1	61.3	0.4	47	102.6	137.2	61.4	0.3
5	102.6	137.2	61.4	0.35	48	102.5	137.3	61.5	0.3
6	102.8	137.3	61.5	0.45	49	102.7	137.4	61.5	0.3
7	102.7	137.4	61.4	0.45	50	102.8	137.2	61.6	0.45
8	102.6	137.2	61.3	0.35	51	102.8	137.4	61.4	0.3
9	102.7	137.2	61.5	0.5	52	102.7	137.3	61.4	0.45
10	102.8	137.3	61.3	0.5	53	102.6	137.3	61.6	0.5
11	102.7	137.4	61.4	0.45	54	102.5	137.1	61.3	0.4
12	102.8	137.3	61.4	0.35	55	102.6	137.2	61.4	0.35
13	102.6	137.2	61.5	0.4	56	102.8	137.3	61.5	0.45
14	102.5	137.2	61.3	0.45	57	102.7	137.4	61.4	0.45
15	102.7	137.3	61.4	0.45	58	102.6	137.2	61.3	0.35
16	102.8	137.4	61.5	0.35	59	102.7	137.2	61.5	0.5
17	102.6	137.1	61.3	0.5	60	102.8	137.3	61.3	0.5
18	102.5	137.2	61.4	0.45	61	102.7	137.4	61.4	0.45
19	102.7	137.2	61.5	0.4	62	102.8	137.3	61.4	0.35
20	102.8	137.3	61.3	0.4	63	102.6	137.2	61.5	0.4
21	102.6	137.4	61.4	0.45	64	102.5	137.2	61.3	0.45
22	102.7	137.2	61.3	0.35	65	102.7	137.3	61.4	0.45
23	102.8	137.3	61.6	0.4	66	102.8	137.4	61.5	0.35
24	102.7	137.5	61.6	0.35	67	102.6	137.1	61.3	0.5
25	102.6	137.1	61.5	0.4	68	102.5	137.2	61.4	0.45
26	102.8	137.2	61.6	0.45	69	102.7	137.2	61.5	0.4
27	102.7	137.3	61.6	0.35	70	102.8	137.3	61.3	0.4
28	102.6	137.2	61.5	0.5	71	102.6	137.4	61.4	0.45
29	102.8	137.4	61.6	0.5	72	102.7	137.2	61.3	0.35
30	102.7	137.2	61.4	0.35	73	102.8	137.3	61.6	0.4
31	102.6	137.3	61.5	0.4	74	102.7	137.5	61.6	0.35
32	102.5	137.4	61.6	0.4	75	102.6	137.1	61.5	0.4
33	102.8	137.2	61.6	0.45	76	102.8	137.2	61.6	0.45
34	102.7	137.1	61.5	0.35	77	102.7	137.3	61.6	0.35
35	102.6	137.3	61.5	0.35	78	102.6	137.2	61.5	0.5
36	102.5	137.2	61.6	0.45	79	102.8	137.4	61.6	0.5
37	102.5	137.2	61.6	0.3	80	102.7	137.2	61.4	0.35
38	102.7	137.4	61.6	0.3	81	102.6	137.3	61.5	0.4
39	102.6	137.2	61.5	0.35	82	102.5	137.4	61.6	0.4
40	102.8	137.2	61.4	0.45	83	102.8	137.2	61.6	0.45
41	102.7	137.1	61.6	0.5	84	102.7	137.1	61.5	0.35
42	102.6	137.2	61.5	0.5	85	102.6	137.3	61.5	0.35
43	102.7	137.4	61.5	0.45	86	102.5	137.2	61.6	0.45

Ek Tablo 1'in devamı

No	Çap1	Çap2	Yük.	Kaç.	No	Çap1	Çap2	Yük.	Kaç.
87	102.5	137.2	61.6	0.3	119	102.8	137.2	61.5	0.4
88	102.7	137.4	61.6	0.3	120	102.6	137.3	61.3	0.4
89	102.6	137.2	61.5	0.35	121	102.7	137.4	61.4	0.45
90	102.8	137.2	61.4	0.45	122	102.8	137.2	61.3	0.35
91	102.7	137.1	61.6	0.5	123	102.7	137.3	61.6	0.4
92	102.6	137.2	61.5	0.5	124	102.6	137.5	61.6	0.35
93	102.7	137.4	61.5	0.45	125	102.8	137.1	61.5	0.4
94	102.5	137.3	61.6	0.4	126	102.7	137.2	61.6	0.45
95	102.8	137.2	61.5	0.4	127	102.6	137.3	61.6	0.35
96	102.7	137.1	61.4	0.35	128	102.8	137.2	61.5	0.5
97	102.6	137.2	61.4	0.3	129	102.7	137.4	61.6	0.5
98	102.5	137.3	61.5	0.3	130	102.6	137.2	61.4	0.35
99	102.7	137.4	61.5	0.3	131	102.5	137.3	61.5	0.4
100	102.8	137.2	61.6	0.45	132	102.8	137.4	61.6	0.4
101	102.7	137.4	61.4	0.3	133	102.7	137.2	61.6	0.45
102	102.6	137.3	61.4	0.45	134	102.6	137.1	61.5	0.35
103	102.5	137.3	61.6	0.5	135	102.5	137.3	61.5	0.35
104	102.6	137.1	61.3	0.4	136	102.5	137.2	61.6	0.45
105	102.8	137.2	61.4	0.35	137	102.7	137.2	61.6	0.3
106	102.7	137.3	61.5	0.45	138	102.6	137.4	61.6	0.3
107	102.6	137.4	61.4	0.45	139	102.8	137.2	61.5	0.35
108	102.7	137.2	61.3	0.35	140	102.7	137.2	61.4	0.45
109	102.8	137.2	61.5	0.5	141	102.6	137.1	61.6	0.5
110	102.7	137.3	61.3	0.5	142	102.7	137.2	61.5	0.5
111	102.8	137.4	61.4	0.45	143	102.5	137.4	61.5	0.45
112	102.6	137.3	61.4	0.35	144	102.8	137.3	61.6	0.4
113	102.5	137.2	61.5	0.4	145	102.7	137.2	61.5	0.4
114	102.7	137.2	61.3	0.45	146	102.6	137.1	61.4	0.35
115	102.8	137.3	61.4	0.45	147	102.5	137.2	61.4	0.3
116	102.6	137.4	61.5	0.35	148	102.7	137.3	61.5	0.3
117	102.5	137.1	61.3	0.5	149	102.6	137.4	61.5	0.3
118	102.7	137.2	61.4	0.45	150	102.6	137.2	61.6	0.45

Ek Tablo 2: Çap1 değişkenine ait veriler ve MR değerleri

No	Çap1	MR	No	Çap1	MR	No	Çap1	MR	No	Çap1	MR
1	102.8	---	39	102.6	0.1	77	102.7	0.1	115	102.8	0.1
2	102.7	0.1	40	102.8	0.2	78	102.6	0.1	116	102.6	0.2
3	102.6	0.1	41	102.7	0.1	79	102.8	0.2	117	102.5	0.1
4	102.5	0.1	42	102.6	0.1	80	102.7	0.1	118	102.7	0.2
5	102.6	0.1	43	102.7	0.1	81	102.6	0.1	119	102.8	0.1
6	102.8	0.2	44	102.5	0.2	82	102.5	0.1	120	102.6	0.2
7	102.7	0.1	45	102.8	0.3	83	102.8	0.3	121	102.7	0.1
8	102.6	0.1	46	102.7	0.1	84	102.7	0.1	122	102.8	0.1
9	102.7	0.1	47	102.6	0.1	85	102.6	0.1	123	102.7	0.1
10	102.8	0.1	48	102.5	0.1	86	102.5	0.1	124	102.6	0.1
11	102.7	0.1	49	102.7	0.2	87	102.5	0	125	102.8	0.2
12	102.8	0.1	50	102.8	0.1	88	102.7	0.2	126	102.7	0.1
13	102.6	0.2	51	102.8	0	89	102.6	0.1	127	102.6	0.1
14	102.5	0.1	52	102.7	0.1	90	102.8	0.2	128	102.8	0.2
15	102.7	0.2	53	102.6	0.1	91	102.7	0.1	129	102.7	0.1
16	102.8	0.1	54	102.5	0.1	92	102.6	0.1	130	102.6	0.1
17	102.6	0.2	55	102.6	0.1	93	102.7	0.1	131	102.5	0.1
18	102.5	0.1	56	102.8	0.2	94	102.5	0.2	132	102.8	0.3
19	102.7	0.2	57	102.7	0.1	95	102.8	0.3	133	102.7	0.1
20	102.8	0.1	58	102.6	0.1	96	102.7	0.1	134	102.6	0.1
21	102.6	0.2	59	102.7	0.1	97	102.6	0.1	135	102.5	0.1
22	102.7	0.1	60	102.8	0.1	98	102.5	0.1	136	102.5	0
23	102.8	0.1	61	102.7	0.1	99	102.7	0.2	137	102.7	0.2
24	102.7	0.1	62	102.8	0.1	100	102.8	0.1	138	102.6	0.1
25	102.6	0.1	63	102.6	0.2	101	102.7	0.1	139	102.8	0.2
26	102.8	0.2	64	102.5	0.1	102	102.6	0.1	140	102.7	0.1
27	102.7	0.1	65	102.7	0.2	103	102.5	0.1	141	102.6	0.1
28	102.6	0.1	66	102.8	0.1	104	102.6	0.1	142	102.7	0.1
29	102.8	0.2	67	102.6	0.2	105	102.8	0.2	143	102.5	0.2
30	102.7	0.1	68	102.5	0.1	106	102.7	0.1	144	102.8	0.3
31	102.6	0.1	69	102.7	0.2	107	102.6	0.1	145	102.7	0.1
32	102.5	0.1	70	102.8	0.1	108	102.7	0.1	146	102.6	0.1
33	102.8	0.3	71	102.6	0.2	109	102.8	0.1	147	102.5	0.1
34	102.7	0.1	72	102.7	0.1	110	102.7	0.1	148	102.7	0.2
35	102.6	0.1	73	102.8	0.1	111	102.8	0.1	149	102.6	0.1
36	102.5	0.1	74	102.7	0.1	112	102.6	0.2	150	102.6	0
37	102.5	0	75	102.6	0.1	113	102.5	0.1			
38	102.7	0.2	76	102.8	0.2	114	102.7	0.2			

Ek Tablo 3: Çap2 değişkenine ait veriler ve MR değerleri

No	Çap2	MR	No	Çap2	MR	No	Çap2	MR	No	Çap2	MR
1	137.4	---	39	137.2	0.2	77	137.3	0.1	115	137.3	0.1
2	137.3	0.1	40	137.2	0	78	137.2	0.1	116	137.4	0.1
3	137.3	0	41	137.1	0.1	79	137.4	0.2	117	137.1	0.3
4	137.1	0.2	42	137.2	0.1	80	137.2	0.2	118	137.2	0.1
5	137.2	0.1	43	137.4	0.2	81	137.3	0.1	119	137.2	0
6	137.3	0.1	44	137.3	0.1	82	137.4	0.1	120	137.3	0.1
7	137.4	0.1	45	137.2	0.1	83	137.2	0.2	121	137.4	0.1
8	137.2	0.2	46	137.1	0.1	84	137.1	0.1	122	137.2	0.2
9	137.2	0	47	137.2	0.1	85	137.3	0.2	123	137.3	0.1
10	137.3	0.1	48	137.3	0.1	86	137.2	0.1	124	137.5	0.2
11	137.4	0.1	49	137.4	0.1	87	137.2	0	125	137.1	0.4
12	137.3	0.1	50	137.2	0.2	88	137.4	0.2	126	137.2	0.1
13	137.2	0.1	51	137.4	0.2	89	137.2	0.2	127	137.3	0.1
14	137.2	0	52	137.3	0.1	90	137.2	0	128	137.2	0.1
15	137.3	0.1	53	137.3	0	91	137.1	0.1	129	137.4	0.2
16	137.4	0.1	54	137.1	0.2	92	137.2	0.1	130	137.2	0.2
17	137.1	0.3	55	137.2	0.1	93	137.4	0.2	131	137.3	0.1
18	137.2	0.1	56	137.3	0.1	94	137.3	0.1	132	137.4	0.1
19	137.2	0	57	137.4	0.1	95	137.2	0.1	133	137.2	0.2
20	137.3	0.1	58	137.2	0.2	96	137.1	0.1	134	137.1	0.1
21	137.4	0.1	59	137.2	0	97	137.2	0.1	135	137.3	0.2
22	137.2	0.2	60	137.3	0.1	98	137.3	0.1	136	137.2	0.1
23	137.3	0.1	61	137.4	0.1	99	137.4	0.1	137	137.2	0
24	137.5	0.2	62	137.3	0.1	100	137.2	0.2	138	137.4	0.2
25	137.1	0.4	63	137.2	0.1	101	137.4	0.2	139	137.2	0.2
26	137.2	0.1	64	137.2	0	102	137.3	0.1	140	137.2	0
27	137.3	0.1	65	137.3	0.1	103	137.3	0	141	137.1	0.1
28	137.2	0.1	66	137.4	0.1	104	137.1	0.2	142	137.2	0.1
29	137.4	0.2	67	137.1	0.3	105	137.2	0.1	143	137.4	0.2
30	137.2	0.2	68	137.2	0.1	106	137.3	0.1	144	137.3	0.1
31	137.3	0.1	69	137.2	0	107	137.4	0.1	145	137.2	0.1
32	137.4	0.1	70	137.3	0.1	108	137.2	0.2	146	137.1	0.1
33	137.2	0.2	71	137.4	0.1	109	137.2	0	147	137.2	0.1
34	137.1	0.1	72	137.2	0.2	110	137.3	0.1	148	137.3	0.1
35	137.3	0.2	73	137.3	0.1	111	137.4	0.1	149	137.4	0.1
36	137.2	0.1	74	137.5	0.2	112	137.3	0.1	150	137.2	0.2
37	137.2	0	75	137.1	0.4	113	137.2	0.1			
38	137.4	0.2	76	137.2	0.1	114	137.2	0			

Ek Tablo 4: Yükseklik değişkenine ait veriler ve MR değerleri

No	Yük.	MR	No	Yük.	MR	No	Yük.	MR	No	Yük.	MR
1	61.4	---	39	61.5	0.1	77	61.6	0	115	61.4	0.1
2	61.4	0	40	61.4	0.1	78	61.5	0.1	116	61.5	0.1
3	61.6	0.2	41	61.6	0.2	79	61.6	0.1	117	61.3	0.2
4	61.3	0.3	42	61.5	0.1	80	61.4	0.2	118	61.4	0.1
5	61.4	0.1	43	61.5	0	81	61.5	0.1	119	61.5	0.1
6	61.5	0.1	44	61.6	0.1	82	61.6	0.1	120	61.3	0.2
7	61.4	0.1	45	61.5	0.1	83	61.6	0	121	61.4	0.1
8	61.3	0.1	46	61.4	0.1	84	61.5	0.1	122	61.3	0.1
9	61.5	0.2	47	61.4	0	85	61.5	0	123	61.6	0.3
10	61.3	0.2	48	61.5	0.1	86	61.6	0.1	124	61.6	0
11	61.4	0.1	49	61.5	0	87	61.6	0	125	61.5	0.1
12	61.4	0	50	61.6	0.1	88	61.6	0	126	61.6	0.1
13	61.5	0.1	51	61.4	0.2	89	61.5	0.1	127	61.6	0
14	61.3	0.2	52	61.4	0	90	61.4	0.1	128	61.5	0.1
15	61.4	0.1	53	61.6	0.2	91	61.6	0.2	129	61.6	0.1
16	61.5	0.1	54	61.3	0.3	92	61.5	0.1	130	61.4	0.2
17	61.3	0.2	55	61.4	0.1	93	61.5	0	131	61.5	0.1
18	61.4	0.1	56	61.5	0.1	94	61.6	0.1	132	61.6	0.1
19	61.5	0.1	57	61.4	0.1	95	61.5	0.1	133	61.6	0
20	61.3	0.2	58	61.3	0.1	96	61.4	0.1	134	61.5	0.1
21	61.4	0.1	59	61.5	0.2	97	61.4	0	135	61.5	0
22	61.3	0.1	60	61.3	0.2	98	61.5	0.1	136	61.6	0.1
23	61.6	0.3	61	61.4	0.1	99	61.5	0	137	61.6	0
24	61.6	0	62	61.4	0	100	61.6	0.1	138	61.6	0
25	61.5	0.1	63	61.5	0.1	101	61.4	0.2	139	61.5	0.1
26	61.6	0.1	64	61.3	0.2	102	61.4	0	140	61.4	0.1
27	61.6	0	65	61.4	0.1	103	61.6	0.2	141	61.6	0.2
28	61.5	0.1	66	61.5	0.1	104	61.3	0.3	142	61.5	0.1
29	61.6	0.1	67	61.3	0.2	105	61.4	0.1	143	61.5	0
30	61.4	0.2	68	61.4	0.1	106	61.5	0.1	144	61.6	0.1
31	61.5	0.1	69	61.5	0.1	107	61.4	0.1	145	61.5	0.1
32	61.6	0.1	70	61.3	0.2	108	61.3	0.1	146	61.4	0.1
33	61.6	0	71	61.4	0.1	109	61.5	0.2	147	61.4	0
34	61.5	0.1	72	61.3	0.1	110	61.3	0.2	148	61.5	0.1
35	61.5	0	73	61.6	0.3	111	61.4	0.1	149	61.5	0
36	61.6	0.1	74	61.6	0	112	61.4	0	150	61.6	0.1
37	61.6	0	75	61.5	0.1	113	61.5	0.1			
38	61.6	0	76	61.6	0.1	114	61.3	0.2			

Ek Tablo 5: Kaçıklık değişkenine ait veriler ve MR değerleri

No	Kaç.	MR	No	Kaç.	MR	No	Kaç.	MR	No	Kaç.	MR
1	0.30	---	39	0.35	0.05	77	0.35	0.1	115	0.45	0
2	0.45	0.15	40	0.45	0.1	78	0.50	0.15	116	0.35	0.1
3	0.50	0.05	41	0.50	0.05	79	0.50	0	117	0.50	0.15
4	0.40	0.1	42	0.50	0	80	0.35	0.15	118	0.45	0.05
5	0.35	0.05	43	0.45	0.05	81	0.40	0.05	119	0.40	0.05
6	0.45	0.1	44	0.40	0.05	82	0.40	0	120	0.40	0
7	0.45	0	45	0.40	0	83	0.45	0.05	121	0.45	0.05
8	0.35	0.1	46	0.35	0.05	84	0.35	0.1	122	0.35	0.1
9	0.50	0.15	47	0.30	0.05	85	0.35	0	123	0.40	0.05
10	0.50	0	48	0.30	0	86	0.45	0.1	124	0.35	0.05
11	0.45	0.05	49	0.30	0	87	0.30	0.15	125	0.40	0.05
12	0.35	0.1	50	0.45	0.15	88	0.30	0	126	0.45	0.05
13	0.40	0.05	51	0.30	0.15	89	0.35	0.05	127	0.35	0.1
14	0.45	0.05	52	0.45	0.15	90	0.45	0.1	128	0.50	0.15
15	0.45	0	53	0.50	0.05	91	0.50	0.05	129	0.50	0
16	0.35	0.1	54	0.40	0.1	92	0.50	0	130	0.35	0.15
17	0.50	0.15	55	0.35	0.05	93	0.45	0.05	131	0.40	0.05
18	0.45	0.05	56	0.45	0.1	94	0.40	0.05	132	0.40	0
19	0.40	0.05	57	0.45	0	95	0.40	0	133	0.45	0.05
20	0.40	0	58	0.35	0.1	96	0.35	0.05	134	0.35	0.1
21	0.45	0.05	59	0.50	0.15	97	0.30	0.05	135	0.35	0
22	0.35	0.1	60	0.50	0	98	0.30	0	136	0.45	0.1
23	0.40	0.05	61	0.45	0.05	99	0.30	0	137	0.30	0.15
24	0.35	0.05	62	0.35	0.1	100	0.45	0.15	138	0.30	0
25	0.40	0.05	63	0.40	0.05	101	0.30	0.15	139	0.35	0.05
26	0.45	0.05	64	0.45	0.05	102	0.45	0.15	140	0.45	0.1
27	0.35	0.1	65	0.45	0	103	0.50	0.05	141	0.50	0.05
28	0.50	0.15	66	0.35	0.1	104	0.40	0.1	142	0.50	0
29	0.50	0	67	0.50	0.15	105	0.35	0.05	143	0.45	0.05
30	0.35	0.15	68	0.45	0.05	106	0.45	0.1	144	0.40	0.05
31	0.40	0.05	69	0.40	0.05	107	0.45	0	145	0.40	0
32	0.40	0	70	0.40	0	108	0.35	0.1	146	0.35	0.05
33	0.45	0.05	71	0.45	0.05	109	0.50	0.15	147	0.30	0.05
34	0.35	0.1	72	0.35	0.1	110	0.50	0	148	0.30	0
35	0.35	0	73	0.40	0.05	111	0.45	0.05	149	0.30	0
36	0.45	0.1	74	0.35	0.05	112	0.35	0.1	150	0.45	0.15
37	0.30	0.15	75	0.40	0.05	113	0.40	0.05			
38	0.30	0	76	0.45	0.05	114	0.45	0.05			

Ek Tablo 6: Çap1 ve çap2 değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	3.23	31	0.65	61	1.97	91	2.86	121	1.97
2	0.24	32	5.28	62	1.78	92	0.67	122	2.35
3	0.65	33	2.35	63	0.67	93	1.97	123	0.24
4	4.53	34	2.86	64	2.75	94	3.01	124	6.68
5	0.67	35	0.65	65	0.24	95	2.35	125	4.95
6	1.78	36	2.75	66	3.23	96	2.86	126	0.54
7	1.97	37	2.75	67	2.72	97	0.67	127	0.65
8	0.67	38	1.97	68	2.75	98	3.01	128	2.35
9	0.54	39	0.67	69	0.54	99	1.97	129	1.97
10	1.78	40	2.35	70	1.78	100	2.35	130	0.67
11	1.97	41	2.86	71	2.65	101	1.97	131	3.01
12	1.78	42	0.67	72	0.54	102	0.65	132	3.23
13	0.67	43	1.97	73	1.78	103	3.01	133	0.54
14	2.75	44	3.01	74	5.72	104	2.72	134	2.72
15	0.24	45	2.35	75	2.72	105	2.35	135	3.01
16	3.23	46	2.86	76	2.35	106	0.24	136	2.75
17	2.72	47	0.67	77	0.24	107	2.65	137	0.54
18	2.75	48	3.01	78	0.67	108	0.54	138	2.65
19	0.54	49	1.97	79	3.23	109	2.35	139	2.35
20	1.78	50	2.35	80	0.54	110	0.24	140	0.54
21	2.65	51	3.23	81	0.65	111	3.23	141	2.72
22	0.54	52	0.24	82	5.28	112	0.65	142	0.54
23	1.78	53	0.65	83	2.35	113	2.75	143	5.28
24	5.72	54	4.53	84	2.86	114	0.54	144	1.78
25	2.72	55	0.67	85	0.65	115	1.78	145	0.54
26	2.35	56	1.78	86	2.75	116	2.65	146	2.72
27	0.24	57	1.97	87	2.75	117	4.53	147	2.75
28	0.67	58	0.67	88	1.97	118	0.54	148	0.24
29	3.23	59	0.54	89	0.67	119	2.35	149	2.65
30	0.54	60	1.78	90	2.35	120	0.65	150	0.67

Ek Tablo 7: Çap1 ve yükseklik değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	2.28	31	0.48	61	0.65	91	1.63	121	0.65
2	0.65	32	4.18	62	2.28	92	0.48	122	4.69
3	1.95	33	3.23	63	0.48	93	0.18	123	1.63
4	5.47	34	0.18	64	5.47	94	4.18	124	1.95
5	0.93	35	0.48	65	0.65	95	1.79	125	1.79
6	1.79	36	4.18	66	1.79	96	0.65	126	1.63
7	0.65	37	4.18	67	3.30	97	0.93	127	1.95
8	3.30	38	1.63	68	3.12	98	2.68	128	1.79
9	0.18	39	0.48	69	0.18	99	0.18	129	1.63
10	4.69	40	2.28	70	4.69	100	3.23	130	0.93
11	0.65	41	1.63	71	0.93	101	0.65	131	2.68
12	2.28	42	0.48	72	3.04	102	0.93	132	3.23
13	0.48	43	0.18	73	3.23	103	4.18	133	1.63
14	5.47	44	4.18	74	1.63	104	3.30	134	0.48
15	0.65	45	1.79	75	0.48	105	2.28	135	2.68
16	1.79	46	0.65	76	3.23	106	0.18	136	4.18
17	3.30	47	0.93	77	1.63	107	0.93	137	1.63
18	3.12	48	2.68	78	0.48	108	3.04	138	1.95
19	0.18	49	0.18	79	3.23	109	1.79	139	1.79
20	4.69	50	3.23	80	0.65	110	3.04	140	0.65
21	0.93	51	2.28	81	0.48	111	2.28	141	1.95
22	3.04	52	0.65	82	4.18	112	0.93	142	0.18
23	3.23	53	1.95	83	3.23	113	2.68	143	2.68
24	1.63	54	5.47	84	0.18	114	3.04	144	3.23
25	0.48	55	0.93	85	0.48	115	2.28	145	0.18
26	3.23	56	1.79	86	4.18	116	0.48	146	0.93
27	1.63	57	0.65	87	4.18	117	5.47	147	3.12
28	0.48	58	3.30	88	1.63	118	0.65	148	0.18
29	3.23	59	0.18	89	0.48	119	1.79	149	0.48
30	0.65	60	4.69	90	2.28	120	3.30	150	1.95

Ek Tablo 8: Çap1 ve kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	4.90	31	0.41	61	0.55	91	2.20	121	0.55
2	0.55	32	2.61	62	2.72	92	2.75	122	2.72
3	2.75	33	2.06	63	0.41	93	0.55	123	0.13
4	2.61	34	0.94	64	3.31	94	2.61	124	1.08
5	1.08	35	1.08	65	0.55	95	1.78	125	1.78
6	2.06	36	3.31	66	2.72	96	0.94	126	0.55
7	0.55	37	4.92	67	2.75	97	2.99	127	1.08
8	1.08	38	2.98	68	3.31	98	4.92	128	3.58
9	2.20	39	1.08	69	0.13	99	2.98	129	2.20
10	3.58	40	2.06	70	1.78	100	2.06	130	1.08
11	0.55	41	2.20	71	0.97	101	2.98	131	2.61
12	2.72	42	2.75	72	0.94	102	0.97	132	1.78
13	0.41	43	0.55	73	1.78	103	5.23	133	0.55
14	3.31	44	2.61	74	0.94	104	0.41	134	1.08
15	0.55	45	1.78	75	0.41	105	2.72	135	3.15
16	2.72	46	0.94	76	2.06	106	0.55	136	3.31
17	2.75	47	2.99	77	0.94	107	0.97	137	2.98
18	3.31	48	4.92	78	2.75	108	0.94	138	2.99
19	0.13	49	2.98	79	3.58	109	3.58	139	2.72
20	1.78	50	2.06	80	0.94	110	2.20	140	0.55
21	0.97	51	4.90	81	0.41	111	2.06	141	2.75
22	0.94	52	0.55	82	2.61	112	1.08	142	2.20
23	1.78	53	2.75	83	2.06	113	2.61	143	3.31
24	0.94	54	2.61	84	0.94	114	0.55	144	1.78
25	0.41	55	1.08	85	1.08	115	2.06	145	0.13
26	2.06	56	2.06	86	3.31	116	1.08	146	1.08
27	0.94	57	0.55	87	4.92	117	5.23	147	4.92
28	2.75	58	1.08	88	2.98	118	0.55	148	2.98
29	3.58	59	2.20	89	1.08	119	1.78	149	2.99
30	0.94	60	3.58	90	2.06	120	0.41	150	0.97

Ek Tablo 9: Çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	2.98	31	0.19	61	2.98	91	5.02	121	2.98
2	0.83	32	2.92	62	0.83	92	0.50	122	2.99
3	1.55	33	2.25	63	0.50	93	1.95	123	1.55
4	4.58	34	2.87	64	2.99	94	1.55	124	6.34
5	0.74	35	0.19	65	0.83	95	0.50	125	2.87
6	0.19	36	2.25	66	1.95	96	2.72	126	2.25
7	2.98	37	2.25	67	4.58	97	0.74	127	1.55
8	2.99	38	2.92	68	0.74	98	0.19	128	0.50
9	0.50	39	0.50	69	0.50	99	1.95	129	2.92
10	3.46	40	0.74	70	3.46	100	2.25	130	0.74
11	2.98	41	5.02	71	2.98	101	2.98	131	0.19
12	0.83	42	0.50	72	2.99	102	0.83	132	2.92
13	0.50	43	1.95	73	1.55	103	1.55	133	2.25
14	2.99	44	1.55	74	6.34	104	4.58	134	2.87
15	0.83	45	0.50	75	2.87	105	0.74	135	0.19
16	1.95	46	2.72	76	2.25	106	0.19	136	2.25
17	4.58	47	0.74	77	1.55	107	2.98	137	2.25
18	0.74	48	0.19	78	0.50	108	2.99	138	2.92
19	0.50	49	1.95	79	2.92	109	0.50	139	0.50
20	3.46	50	2.25	80	0.74	110	3.46	140	0.74
21	2.98	51	2.98	81	0.19	111	2.98	141	5.02
22	2.99	52	0.83	82	2.92	112	0.83	142	0.50
23	1.55	53	1.55	83	2.25	113	0.50	143	1.95
24	6.34	54	4.58	84	2.87	114	2.99	144	1.55
25	2.87	55	0.74	85	0.19	115	0.83	145	0.50
26	2.25	56	0.19	86	2.25	116	1.95	146	2.72
27	1.55	57	2.98	87	2.25	117	4.58	147	0.74
28	0.50	58	2.99	88	2.92	118	0.74	148	0.19
29	2.92	59	0.50	89	0.50	119	0.50	149	1.95
30	0.74	60	3.46	90	0.74	120	3.46	150	2.25

Ek Tablo 10: Çap2 ve kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	4.14	31	0.16	61	2.73	91	4.15	121	2.73
2	0.72	32	1.96	62	0.85	92	2.32	122	1.29
3	2.52	33	0.73	63	0.39	93	2.73	123	0.16
4	2.64	34	3.75	64	0.73	94	0.16	124	6.03
5	1.29	35	0.85	65	0.72	95	0.39	125	2.64
6	0.72	36	0.73	66	2.43	96	3.75	126	0.73
7	2.73	37	3.43	67	4.15	97	3.43	127	0.85
8	1.29	38	4.14	68	0.73	98	2.78	128	2.32
9	2.32	39	1.29	69	0.39	99	4.14	129	4.75
10	2.52	40	0.73	70	0.16	100	0.73	130	1.29
11	2.73	41	4.15	71	2.73	101	4.14	131	0.16
12	0.85	42	2.32	72	1.29	102	0.72	132	1.96
13	0.39	43	2.73	73	0.16	103	2.52	133	0.73
14	0.73	44	0.16	74	6.03	104	2.64	134	3.75
15	0.72	45	0.39	75	2.64	105	1.29	135	0.85
16	2.43	46	3.75	76	0.73	106	0.72	136	0.73
17	4.15	47	3.43	77	0.85	107	2.73	137	3.43
18	0.73	48	2.78	78	2.32	108	1.29	138	4.14
19	0.39	49	4.14	79	4.75	109	2.32	139	1.29
20	0.16	50	0.73	80	1.29	110	2.52	140	0.73
21	2.73	51	4.14	81	0.16	111	2.73	141	4.15
22	1.29	52	0.72	82	1.96	112	0.85	142	2.32
23	0.16	53	2.52	83	0.73	113	0.39	143	2.73
24	6.03	54	2.64	84	3.75	114	0.73	144	0.16
25	2.64	55	1.29	85	0.85	115	0.72	145	0.39
26	0.73	56	0.72	86	0.73	116	2.43	146	3.75
27	0.85	57	2.73	87	3.43	117	4.15	147	3.43
28	2.32	58	1.29	88	4.14	118	0.73	148	2.78
29	4.75	59	2.32	89	1.29	119	0.39	149	4.14
30	1.29	60	2.52	90	0.73	120	0.16	150	0.73

Ek Tablo 11: Yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	3.25	31	0.07	61	1.01	91	3.66	121	1.01
2	1.01	32	1.54	62	1.28	92	2.22	122	3.65
3	3.66	33	1.99	63	0.07	93	0.54	123	1.54
4	2.92	34	0.84	64	3.41	94	1.54	124	2.31
5	1.28	35	0.84	65	1.01	95	0.07	125	0.07
6	0.54	36	1.99	66	0.84	96	1.28	126	1.99
7	1.01	37	4.31	67	5.12	97	3.25	127	2.31
8	3.65	38	4.31	68	1.01	98	2.82	128	2.22
9	2.22	39	0.84	69	0.07	99	2.82	129	3.66
10	5.12	40	1.01	70	2.92	100	1.99	130	1.28
11	1.01	41	3.66	71	1.01	101	3.25	131	0.07
12	1.28	42	2.22	72	3.65	102	1.01	132	1.54
13	0.07	43	0.54	73	1.54	103	3.66	133	1.99
14	3.41	44	1.54	74	2.31	104	2.92	134	0.84
15	1.01	45	0.07	75	0.07	105	1.28	135	0.84
16	0.84	46	1.28	76	1.99	106	0.54	136	1.99
17	5.12	47	3.25	77	2.31	107	1.01	137	4.31
18	1.01	48	2.82	78	2.22	108	3.65	138	4.31
19	0.07	49	2.82	79	3.66	109	2.22	139	0.84
20	2.92	50	1.99	80	1.28	110	5.12	140	1.01
21	1.01	51	3.25	81	0.07	111	1.01	141	3.66
22	3.65	52	1.01	82	1.54	112	1.28	142	2.22
23	1.54	53	3.66	83	1.99	113	0.07	143	0.54
24	2.31	54	2.92	84	0.84	114	3.41	144	1.54
25	0.07	55	1.28	85	0.84	115	1.01	145	0.07
26	1.99	56	0.54	86	1.99	116	0.84	146	1.28
27	2.31	57	1.01	87	4.31	117	5.12	147	3.25
28	2.22	58	3.65	88	4.31	118	1.01	148	2.82
29	3.66	59	2.22	89	0.84	119	0.07	149	2.82
30	1.28	60	5.12	90	1.01	120	2.92	150	1.99

Ek Tablo 12: Çap1, çap2 ve yükseklik değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	4.22	31	0.68	61	2.99	91	5.37	121	2.99
2	0.90	32	6.19	62	2.41	92	0.81	122	4.90
3	2.02	33	4.32	63	0.81	93	1.97	123	1.65
4	6.63	34	3.20	64	5.47	94	4.33	124	7.28
5	1.07	35	0.68	65	0.90	95	2.52	125	5.31
6	1.82	36	4.58	66	3.23	96	3.04	126	2.46
7	2.99	37	4.58	67	4.78	97	1.07	127	2.02
8	3.34	38	2.94	68	3.18	98	3.03	128	2.52
9	0.69	39	0.81	69	0.69	99	1.97	129	2.94
10	5.00	40	2.71	70	5.00	100	4.32	130	1.07
11	2.99	41	5.37	71	3.71	101	2.99	131	3.03
12	2.41	42	0.81	72	3.15	102	1.34	132	4.24
13	0.81	43	1.97	73	3.23	103	4.33	133	2.46
14	5.47	44	4.33	74	6.35	104	4.78	134	3.04
15	0.90	45	2.52	75	3.04	105	2.71	135	3.03
16	3.23	46	3.04	76	4.32	106	0.28	136	4.58
17	4.78	47	1.07	77	1.65	107	3.71	137	2.46
18	3.18	48	3.03	78	0.81	108	3.15	138	3.59
19	0.69	49	1.97	79	4.24	109	2.52	139	2.52
20	5.00	50	4.32	80	0.92	110	3.53	140	0.92
21	3.71	51	4.22	81	0.68	111	4.22	141	5.17
22	3.15	52	0.90	82	6.19	112	1.34	142	0.69
23	3.23	53	2.02	83	4.32	113	2.88	143	5.29
24	6.35	54	6.63	84	3.20	114	3.15	144	3.23
25	3.04	55	1.07	85	0.68	115	2.41	145	0.69
26	4.32	56	1.82	86	4.58	116	2.65	146	2.91
27	1.65	57	2.99	87	4.58	117	6.63	147	3.18
28	0.81	58	3.34	88	2.94	118	0.92	148	0.28
29	4.24	59	0.69	89	0.81	119	2.52	149	2.65
30	0.92	60	5.00	90	2.71	120	4.00	150	2.54

Ek Tablo 13: Çap1, çap2 ve kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	5.84	31	0.65	61	2.73	91	4.33	121	2.73
2	0.76	32	5.37	62	2.73	92	2.84	122	3.62
3	3.29	33	2.57	63	0.69	93	2.73	123	0.25
4	4.55	34	4.23	64	3.37	94	3.03	124	6.89
5	1.50	35	1.22	65	0.76	95	2.46	125	5.19
6	2.16	36	3.37	66	3.91	96	4.23	126	0.86
7	2.73	37	5.30	67	4.46	97	3.57	127	1.22
8	1.50	38	4.24	68	3.37	98	5.09	128	3.93
9	2.40	39	1.50	69	0.59	99	4.24	129	4.75
10	3.76	40	2.57	70	1.81	100	2.57	130	1.50
11	2.73	41	4.33	71	3.62	101	4.24	131	3.03
12	2.73	42	2.84	72	1.57	102	1.34	132	3.23
13	0.69	43	2.73	73	1.81	103	6.01	133	0.86
14	3.37	44	3.03	74	6.04	104	2.79	134	3.85
15	0.76	45	2.46	75	2.79	105	3.62	135	3.43
16	3.91	46	4.23	76	2.57	106	0.76	136	3.37
17	4.46	47	3.57	77	0.99	107	3.62	137	3.82
18	3.37	48	5.09	78	2.84	108	1.57	138	4.61
19	0.59	49	4.24	79	5.66	109	3.93	139	3.62
20	1.81	50	2.57	80	1.57	110	2.54	140	0.86
21	3.62	51	5.84	81	0.65	111	3.82	141	4.46
22	1.57	52	0.76	82	5.37	112	1.22	142	2.40
23	1.81	53	3.29	83	2.57	113	2.75	143	6.47
24	6.04	54	4.55	84	4.23	114	0.86	144	1.81
25	2.79	55	1.50	85	1.22	115	2.16	145	0.59
26	2.57	56	2.16	86	3.37	116	3.02	146	3.85
27	0.99	57	2.73	87	5.30	117	6.57	147	5.30
28	2.84	58	1.50	88	4.24	118	0.86	148	2.99
29	5.66	59	2.40	89	1.50	119	2.46	149	4.61
30	1.57	60	3.76	90	2.57	120	0.65	150	1.13

Ek Tablo 14: Çap1, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	5.43	31	0.48	61	1.09	91	3.70	121	1.09
2	1.09	32	4.18	62	3.26	92	2.82	122	5.65
3	4.27	33	3.55	63	0.48	93	0.61	123	1.65
4	5.48	34	1.01	64	6.19	94	4.18	124	2.64
5	1.59	35	1.16	65	1.09	95	1.84	125	1.84
6	2.12	36	4.86	66	2.79	96	1.46	126	2.06
7	1.09	37	6.52	67	5.69	97	3.49	127	2.64
8	3.95	38	4.54	68	3.82	98	5.00	128	3.63
9	2.26	39	1.16	69	0.19	99	3.05	129	3.70
10	6.57	40	2.61	70	4.73	100	3.55	130	1.59
11	1.09	41	3.70	71	1.49	101	3.50	131	2.69
12	3.26	42	2.82	72	3.84	102	1.49	132	3.28
13	0.48	43	0.61	73	3.28	103	6.77	133	2.06
14	6.19	44	4.18	74	2.48	104	3.30	134	1.16
15	1.09	45	1.84	75	0.48	105	3.26	135	3.23
16	2.79	46	1.46	76	3.55	106	0.61	136	4.86
17	5.69	47	3.49	77	2.48	107	1.49	137	4.54
18	3.82	48	5.00	78	2.82	108	3.84	138	4.56
19	0.19	49	3.05	79	5.05	109	3.63	139	2.79
20	4.73	50	3.55	80	1.46	110	5.17	140	1.09
21	1.49	51	5.43	81	0.48	111	2.61	141	4.27
22	3.84	52	1.09	82	4.18	112	1.59	142	2.26
23	3.28	53	4.27	83	3.55	113	2.69	143	3.38
24	2.48	54	5.48	84	1.01	114	3.49	144	3.28
25	0.48	55	1.59	85	1.16	115	2.61	145	0.19
26	3.55	56	2.12	86	4.86	116	1.16	146	1.59
27	2.48	57	1.09	87	6.52	117	8.14	147	5.41
28	2.82	58	3.95	88	4.54	118	1.09	148	3.05
29	5.05	59	2.26	89	1.16	119	1.84	149	3.07
30	1.46	60	6.57	90	2.61	120	3.30	150	2.49

Ek Tablo 15: Çap2, yükseklik ve kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	5.07	31	0.19	61	3.82	91	6.48	121	3.82
2	1.43	32	2.92	62	1.47	92	2.43	122	3.81
3	3.79	33	2.57	63	0.54	93	2.73	123	1.56
4	4.64	34	4.13	64	3.44	94	1.56	124	6.69
5	1.63	35	0.89	65	1.43	95	0.54	125	2.98
6	0.74	36	2.57	66	2.43	96	3.90	126	2.57
7	3.82	37	5.51	67	6.31	97	3.75	127	2.31
8	3.81	38	5.22	68	1.15	98	2.83	128	2.43
9	2.43	39	1.46	69	0.54	99	4.15	129	5.60
10	6.03	40	1.15	70	3.46	100	2.57	130	1.63
11	3.82	41	6.48	71	3.82	101	5.07	131	0.19
12	1.47	42	2.43	72	3.81	102	1.43	132	2.92
13	0.54	43	2.73	73	1.56	103	3.79	133	2.57
14	3.44	44	1.56	74	6.69	104	4.64	134	4.13
15	1.43	45	0.54	75	2.98	105	1.63	135	0.89
16	2.43	46	3.90	76	2.57	106	0.74	136	2.57
17	6.31	47	3.75	77	2.31	107	3.82	137	5.51
18	1.15	48	2.83	78	2.43	108	3.81	138	5.22
19	0.54	49	4.15	79	5.60	109	2.43	139	1.46
20	3.46	50	2.57	80	1.63	110	6.03	140	1.15
21	3.82	51	5.07	81	0.19	111	3.82	141	6.48
22	3.81	52	1.43	82	2.92	112	1.47	142	2.43
23	1.56	53	3.79	83	2.57	113	0.54	143	2.73
24	6.69	54	4.64	84	4.13	114	3.44	144	1.56
25	2.98	55	1.63	85	0.89	115	1.43	145	0.54
26	2.57	56	0.74	86	2.57	116	2.43	146	3.90
27	2.31	57	3.82	87	5.51	117	6.31	147	3.75
28	2.43	58	3.81	88	5.22	118	1.15	148	2.83
29	5.60	59	2.43	89	1.46	119	0.54	149	4.15
30	1.63	60	6.03	90	1.15	120	3.46	150	2.57

Ek Tablo 16:Dört değişken birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	6.72	31	0.68	61	3.82	91	6.70	121	3.82
2	1.47	32	6.26	62	3.31	92	2.94	122	6.04
3	4.51	33	4.49	63	0.82	93	2.73	123	1.66
4	6.64	34	4.62	64	6.20	94	4.34	124	7.51
5	1.86	35	1.26	65	1.47	95	2.64	125	5.57
6	2.19	36	5.12	66	3.91	96	4.37	126	2.72
7	3.82	37	7.29	67	6.67	97	3.89	127	2.66
8	4.06	38	5.33	68	3.83	98	5.13	128	4.05
9	2.51	39	1.66	69	0.74	99	4.24	129	5.60
10	7.18	40	2.94	70	5.02	100	4.49	130	1.86
11	3.82	41	6.70	71	4.75	101	5.15	131	3.05
12	3.31	42	2.94	72	4.06	102	2.08	132	4.25
13	0.82	43	2.73	73	3.28	103	7.19	133	2.72
14	6.20	44	4.34	74	6.70	104	4.82	134	4.21
15	1.47	45	2.64	75	3.12	105	3.93	135	3.46
16	3.91	46	4.37	76	4.49	106	0.79	136	5.12
17	6.67	47	3.89	77	2.48	107	4.75	137	5.93
18	3.83	48	5.13	78	2.94	108	4.06	138	5.66
19	0.74	49	4.24	79	6.56	109	4.05	139	3.82
20	5.02	50	4.49	80	1.91	110	6.04	140	1.27
21	4.75	51	6.72	81	0.68	111	4.87	141	6.76
22	4.06	52	1.47	82	6.26	112	1.87	142	2.51
23	3.28	53	4.51	83	4.49	113	2.88	143	6.48
24	6.70	54	6.64	84	4.62	114	3.54	144	3.28
25	3.12	55	1.86	85	1.26	115	2.83	145	0.74
26	4.49	56	2.19	86	5.12	116	3.02	146	4.00
27	2.48	57	3.82	87	7.29	117	8.84	147	5.64
28	2.94	58	4.06	88	5.33	118	1.27	148	3.06
29	6.56	59	2.51	89	1.66	119	2.64	149	4.61
30	1.91	60	7.18	90	2.94	120	4.01	150	2.94

Ek Tablo 17: Çap1 değişkenine ait veriler ve CUSUM (S_m) değerleri

No	Çap1	S_m	No	Çap1	S_m	No	Çap1	S_m	No	Çap1	S_m
1	102.8	0.13	39	102.6	0.05	77	102.7	0.57	115	102.8	0.39
2	102.7	0.17	40	102.8	0.19	78	102.6	0.50	116	102.6	0.32
3	102.6	0.10	41	102.7	0.22	79	102.8	0.64	117	102.5	0.16
4	102.5	-0.06	42	102.6	0.16	80	102.7	0.67	118	102.7	0.19
5	102.6	-0.13	43	102.7	0.19	81	102.6	0.61	119	102.8	0.33
6	102.8	0.01	44	102.5	0.03	82	102.5	0.44	120	102.6	0.26
7	102.7	0.04	45	102.8	0.16	83	102.8	0.58	121	102.7	0.29
8	102.6	-0.02	46	102.7	0.19	84	102.7	0.61	122	102.8	0.43
9	102.7	0.01	47	102.6	0.13	85	102.6	0.55	123	102.7	0.46
10	102.8	0.15	48	102.5	-0.04	86	102.5	0.38	124	102.6	0.40
11	102.7	0.18	49	102.7	0.00	87	102.5	0.22	125	102.8	0.53
12	102.8	0.32	50	102.8	0.13	88	102.7	0.25	126	102.7	0.37
13	102.6	0.25	51	102.8	0.27	89	102.6	0.19	127	102.6	0.50
14	102.5	0.09	52	102.7	0.30	90	102.8	0.32	128	102.8	0.64
15	102.7	0.12	53	102.6	0.24	91	102.7	0.35	129	102.7	0.67
16	102.8	0.25	54	102.5	0.07	92	102.6	0.29	130	102.6	0.61
17	102.6	0.19	55	102.6	0.01	93	102.7	0.32	131	102.5	0.44
18	102.5	0.02	56	102.8	0.14	94	102.5	0.16	132	102.8	0.58
19	102.7	0.06	57	102.7	0.18	95	102.8	0.29	133	102.7	0.61
20	102.8	0.19	58	102.6	0.11	96	102.7	0.33	134	102.6	0.55
21	102.6	0.13	59	102.7	0.15	97	102.6	0.26	135	102.5	0.38
22	102.7	0.16	60	102.8	0.28	98	102.5	0.10	136	102.5	0.21
23	102.8	0.30	61	102.7	0.31	99	102.7	0.13	137	102.7	0.25
24	102.7	0.33	62	102.8	0.45	100	102.8	0.27	138	102.6	0.18
25	102.6	0.27	63	102.6	0.38	101	102.7	0.30	139	102.8	0.32
26	102.8	0.40	64	102.5	0.22	102	102.6	0.24	140	102.7	0.35
27	102.7	0.44	65	102.7	0.25	103	102.5	0.07	141	102.6	0.29
28	102.6	0.37	66	102.8	0.39	104	102.6	0.01	142	102.7	0.32
29	102.8	0.51	67	102.6	0.32	105	102.8	0.14	143	102.5	0.16
30	102.7	0.54	68	102.5	0.16	106	102.7	0.17	144	102.8	0.29
31	102.6	0.47	69	102.7	0.19	107	102.6	0.11	145	102.7	0.33
32	102.5	0.31	70	102.8	0.33	108	102.7	0.14	146	102.6	0.26
33	102.8	0.44	71	102.6	0.26	109	102.8	0.28	147	102.5	0.10
34	102.7	0.48	72	102.7	0.30	110	102.7	0.31	148	102.7	0.13
35	102.6	0.41	73	102.8	0.43	111	102.8	0.45	149	102.6	0.07
36	102.5	0.25	74	102.7	0.47	112	102.6	0.38	150	102.6	0.00
37	102.5	0.08	75	102.6	0.40	113	102.5	0.22			
38	102.7	0.12	76	102.8	0.53	114	102.7	0.25			

Ek Tablo 18: Çap2 değişkenine ait veriler ve CUSUM (S_m) değerleri

No	Çap2	S_m	No	Çap2	S_m	No	Çap2	S_m	No	Çap2	S_m
1	137.4	0.14	39	137.2	0.26	77	137.3	0.28	115	137.3	0.20
2	137.3	0.18	40	137.2	0.20	78	137.2	0.22	116	137.4	0.34
3	137.3	0.22	41	137.1	0.04	79	137.4	0.36	117	137.1	0.18
4	137.1	0.06	42	137.2	-0.02	80	137.2	0.30	118	137.2	0.12
5	137.2	0.00	43	137.4	0.12	81	137.3	0.34	119	137.2	0.06
6	137.3	0.04	44	137.3	0.16	82	137.4	0.48	120	137.3	0.10
7	137.4	0.18	45	137.2	0.10	83	137.2	0.42	121	137.4	0.24
8	137.2	0.12	46	137.1	-0.06	84	137.1	0.26	122	137.2	0.18
9	137.2	0.06	47	137.2	-0.12	85	137.3	0.30	123	137.3	0.22
10	137.3	0.10	48	137.3	-0.08	86	137.2	0.24	124	137.5	0.46
11	137.4	0.24	49	137.4	0.06	87	137.2	0.18	125	137.1	0.30
12	137.3	0.28	50	137.2	0.00	88	137.4	0.32	126	137.2	0.24
13	137.2	0.22	51	137.4	0.14	89	137.2	0.26	127	137.3	0.28
14	137.2	0.16	52	137.3	0.18	90	137.2	0.20	128	137.2	0.22
15	137.3	0.20	53	137.3	0.22	91	137.1	0.04	129	137.4	0.36
16	137.4	0.34	54	137.1	0.06	92	137.2	-0.02	130	137.2	0.30
17	137.1	0.18	55	137.2	0.00	93	137.4	0.12	131	137.3	0.34
18	137.2	0.12	56	137.3	0.04	94	137.3	0.16	132	137.4	0.48
19	137.2	0.06	57	137.4	0.18	95	137.2	0.10	133	137.2	0.42
20	137.3	0.10	58	137.2	0.12	96	137.1	-0.06	134	137.1	0.26
21	137.4	0.24	59	137.2	0.06	97	137.2	-0.12	135	137.3	0.30
22	137.2	0.18	60	137.3	0.10	98	137.3	-0.08	136	137.2	0.24
23	137.3	0.22	61	137.4	0.24	99	137.4	0.06	137	137.2	0.18
24	137.5	0.46	62	137.3	0.28	100	137.2	0.00	138	137.4	0.32
25	137.1	0.30	63	137.2	0.22	101	137.4	0.14	139	137.2	0.26
26	137.2	0.24	64	137.2	0.16	102	137.3	0.18	140	137.2	0.20
27	137.3	0.28	65	137.3	0.20	103	137.3	0.22	141	137.1	0.04
28	137.2	0.22	66	137.4	0.34	104	137.1	0.06	142	137.2	-0.02
29	137.4	0.36	67	137.1	0.18	105	137.2	0.00	143	137.4	0.12
30	137.2	0.30	68	137.2	0.12	106	137.3	0.04	144	137.3	0.16
31	137.3	0.34	69	137.2	0.06	107	137.4	0.18	145	137.2	0.10
32	137.4	0.48	70	137.3	0.10	108	137.2	0.12	146	137.1	-0.06
33	137.2	0.42	71	137.4	0.24	109	137.2	0.06	147	137.2	-0.12
34	137.1	0.26	72	137.2	0.18	110	137.3	0.10	148	137.3	-0.08
35	137.3	0.30	73	137.3	0.22	111	137.4	0.24	149	137.4	0.06
36	137.2	0.24	74	137.5	0.46	112	137.3	0.28	150	137.2	0.00
37	137.2	0.18	75	137.1	0.30	113	137.2	0.22			
38	137.4	0.32	76	137.2	0.24	114	137.2	0.16			

Ek Tablo 19: Yükseklik değişkenine ait veriler ve CUSUM (S_m) değerleri

No	Yük.	S_m	No	Yük.	S_m	No	Yük.	S_m	No	Yük.	S_m
1	61.4	-0.07	39	61.5	-0.29	77	61.6	-1.10	115	61.4	-1.01
2	61.4	-0.15	40	61.4	-0.36	78	61.5	-1.07	116	61.5	-0.98
3	61.6	-0.02	41	61.6	-0.23	79	61.6	-0.95	117	61.3	-1.16
4	61.3	-0.20	42	61.5	-0.21	80	61.4	-1.02	118	61.4	-1.23
5	61.4	-0.27	43	61.5	-0.18	81	61.5	-0.99	119	61.5	-1.21
6	61.5	-0.24	44	61.6	-0.06	82	61.6	-0.87	120	61.3	-1.38
7	61.4	-0.32	45	61.5	-0.03	83	61.6	-0.74	121	61.4	-1.45
8	61.3	-0.49	46	61.4	-0.10	84	61.5	-0.72	122	61.3	-1.63
9	61.5	-0.47	47	61.4	-0.18	85	61.5	-0.69	123	61.6	-1.50
10	61.3	-0.64	48	61.5	-0.15	86	61.6	-0.56	124	61.6	-1.38
11	61.4	-0.71	49	61.5	-0.13	87	61.6	-0.44	125	61.5	-1.35
12	61.4	-0.79	50	61.6	0.00	88	61.6	-0.31	126	61.6	-1.22
13	61.5	-0.76	51	61.4	-0.07	89	61.5	-0.29	127	61.6	-1.10
14	61.3	-0.94	52	61.4	-0.15	90	61.4	-0.36	128	61.5	-1.07
15	61.4	-1.01	53	61.6	-0.02	91	61.6	-0.23	129	61.6	-0.95
16	61.5	-0.98	54	61.3	-0.20	92	61.5	-0.21	130	61.4	-1.02
17	61.3	-1.16	55	61.4	-0.27	93	61.5	-0.18	131	61.5	-0.99
18	61.4	-1.23	56	61.5	-0.24	94	61.6	-0.06	132	61.6	-0.37
19	61.5	-1.21	57	61.4	-0.32	95	61.5	-0.03	133	61.6	-0.74
20	61.3	-1.38	58	61.3	-0.49	96	61.4	-0.10	134	61.5	-0.72
21	61.4	-1.45	59	61.5	-0.47	97	61.4	-0.18	135	61.5	-0.69
22	61.3	-1.63	60	61.3	-0.64	98	61.5	-0.15	136	61.6	-0.56
23	61.6	-1.50	61	61.4	-0.71	99	61.5	-0.13	137	61.6	-0.44
24	61.6	-1.38	62	61.4	-0.79	100	61.6	0.00	138	61.6	-0.31
25	61.5	-1.35	63	61.5	-0.76	101	61.4	-0.07	139	61.5	-0.29
26	61.6	-1.22	64	61.3	-0.94	102	61.4	-0.15	140	61.4	-0.36
27	61.6	-1.10	65	61.4	-1.01	103	61.6	-0.02	141	61.6	-0.23
28	61.5	-1.07	66	61.5	-0.98	104	61.3	-0.20	142	61.5	-0.21
29	61.6	-0.95	67	61.3	-1.16	105	61.4	-0.27	143	61.5	-0.18
30	61.4	-1.02	68	61.4	-1.23	106	61.5	-0.24	144	61.6	-0.06
31	61.5	-0.99	69	61.5	-1.21	107	61.4	-0.32	145	61.5	-0.03
32	61.6	-0.87	70	61.3	-1.38	108	61.3	-0.49	146	61.4	-0.10
33	61.6	-0.74	71	61.4	-1.45	109	61.5	-0.47	147	61.4	-0.18
34	61.5	-0.72	72	61.3	-1.63	110	61.3	-0.64	148	61.5	-0.15
35	61.5	-0.69	73	61.6	-1.50	111	61.4	-0.71	149	61.5	-0.13
36	61.6	-0.56	74	61.6	-1.38	112	61.4	-0.79	150	61.6	0.00
37	61.6	-0.44	75	61.5	-1.35	113	61.5	-0.76			
38	61.6	-0.31	76	61.6	-1.22	114	61.3	-0.94			

Ek Tablo 20: Kaçıklık değişkenine ait veriler ve CUSUM (S_m) değerleri

No	Kaç.	S_m	No	Kaç.	S_m	No	Kaç.	S_m	No	Kaç.	S_m
1	0.30	-0.11	39	0.35	0.07	77	0.35	0.24	115	0.45	0.26
2	0.45	-0.06	40	0.45	0.11	78	0.50	0.33	116	0.35	0.20
3	0.50	0.03	41	0.50	0.20	79	0.50	0.43	117	0.50	0.30
4	0.40	0.03	42	0.50	0.30	80	0.35	0.37	118	0.45	0.34
5	0.35	-0.03	43	0.45	0.34	81	0.40	0.36	119	0.40	0.34
6	0.45	0.01	44	0.40	0.34	82	0.40	0.36	120	0.40	0.33
7	0.45	0.06	45	0.40	0.33	83	0.45	0.40	121	0.45	0.37
8	0.35	0.00	46	0.35	0.27	84	0.35	0.35	122	0.35	0.32
9	0.50	0.10	47	0.30	0.17	85	0.35	0.29	123	0.40	0.31
10	0.50	0.19	48	0.30	0.06	86	0.45	0.33	124	0.35	0.26
11	0.45	0.23	49	0.30	-0.04	87	0.30	0.23	125	0.40	0.25
12	0.35	0.18	50	0.45	0.00	88	0.30	0.12	126	0.45	0.29
13	0.40	0.17	51	0.30	-0.11	89	0.35	0.07	127	0.35	0.24
14	0.45	0.22	52	0.45	-0.06	90	0.45	0.11	128	0.50	0.33
15	0.45	0.26	53	0.50	0.03	91	0.50	0.20	129	0.50	0.43
16	0.35	0.20	54	0.40	0.03	92	0.50	0.30	130	0.35	0.37
17	0.50	0.30	55	0.35	-0.03	93	0.45	0.34	131	0.40	0.36
18	0.45	0.34	56	0.45	0.01	94	0.40	0.34	132	0.40	0.36
19	0.40	0.34	57	0.45	0.06	95	0.40	0.33	133	0.45	0.40
20	0.40	0.33	58	0.35	0.00	96	0.35	0.27	134	0.35	0.35
21	0.45	0.37	59	0.50	0.10	97	0.30	0.17	135	0.35	0.29
22	0.35	0.32	60	0.50	0.19	98	0.30	0.06	136	0.45	0.33
23	0.40	0.31	61	0.45	0.23	99	0.30	-0.04	137	0.30	0.23
24	0.35	0.26	62	0.35	0.18	100	0.45	0.00	138	0.30	0.12
25	0.40	0.25	63	0.40	0.17	101	0.30	-0.11	139	0.35	0.07
26	0.45	0.29	64	0.45	0.22	102	0.45	-0.06	140	0.45	0.11
27	0.35	0.24	65	0.45	0.26	103	0.50	0.03	141	0.50	0.20
28	0.50	0.33	66	0.35	0.20	104	0.40	0.03	142	0.50	0.30
29	0.50	0.43	67	0.50	0.30	105	0.35	-0.03	143	0.45	0.34
30	0.35	0.37	68	0.45	0.34	106	0.45	0.01	144	0.40	0.34
31	0.40	0.36	69	0.40	0.34	107	0.45	0.06	145	0.40	0.33
32	0.40	0.36	70	0.40	0.33	108	0.35	0.00	146	0.35	0.27
33	0.45	0.40	71	0.45	0.37	109	0.50	0.10	147	0.30	0.17
34	0.35	0.35	72	0.35	0.32	110	0.50	0.19	148	0.30	0.06
35	0.35	0.29	73	0.40	0.31	111	0.45	0.23	149	0.30	-0.04
36	0.45	0.33	74	0.35	0.26	112	0.35	0.18	150	0.45	0.00
37	0.30	0.23	75	0.40	0.25	113	0.40	0.17			
38	0.30	0.12	76	0.45	0.29	114	0.45	0.22			

Ek Tablo 21: Çap1 ve çap2 değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	1.80	0.48	39	0.82	-1.17	77	0.49	-1.15	115	1.33	-1.07
2	0.49	-0.35	40	1.53	-0.96	78	0.82	-1.65	116	1.63	-0.77
3	0.81	-0.87	41	1.69	-0.59	79	1.80	-1.17	117	2.13	0.04
4	2.13	-0.06	42	0.82	-1.09	80	0.73	-1.76	118	0.73	-0.55
5	0.82	-0.56	43	1.40	-1.00	81	0.81	-2.27	119	1.53	-0.33
6	1.33	-0.55	44	1.73	-0.59	82	2.30	-1.30	120	0.81	-0.85
7	1.40	-0.47	45	1.53	-0.38	83	1.53	-1.08	121	1.40	-0.77
8	0.82	-0.97	46	1.69	-0.01	84	1.69	-0.71	122	1.53	-0.55
9	0.73	-1.55	47	0.82	-0.51	85	0.81	-1.23	123	0.49	-1.38
10	1.33	-1.54	48	1.73	-0.09	86	1.66	-0.89	124	2.58	-0.12
11	1.40	-1.46	49	1.40	-0.01	87	1.66	-0.55	125	2.23	0.79
12	1.33	-1.45	50	1.53	0.20	88	1.40	-0.47	126	0.73	0.20
13	0.82	-1.95	51	1.80	0.68	89	0.82	-0.97	127	0.81	-0.32
14	1.66	-1.61	52	0.49	-0.15	90	1.53	-0.76	128	1.53	-0.10
15	0.49	-2.44	53	0.81	-0.67	91	1.69	-0.38	129	1.40	-0.02
16	1.80	-1.96	54	2.13	0.14	92	0.82	-0.88	130	0.82	-0.52
17	1.65	-1.63	55	0.82	-0.36	93	1.40	-0.80	131	1.73	-0.11
18	1.66	-1.29	56	1.33	-0.35	94	1.73	-0.39	132	1.80	0.37
19	0.73	-1.88	57	1.40	-0.27	95	1.53	-0.18	133	0.73	-0.22
20	1.33	-1.87	58	0.82	-0.77	96	1.69	0.19	134	1.65	0.11
21	1.63	-1.56	59	0.73	-1.35	97	0.82	-0.31	135	1.73	0.52
22	0.73	-2.15	60	1.33	-1.34	98	1.73	0.11	136	1.66	0.86
23	1.33	-2.13	61	1.40	-1.26	99	1.40	0.19	137	0.73	0.28
24	2.39	-1.06	62	1.33	-1.24	100	1.53	0.40	138	1.63	0.58
25	1.65	-0.73	63	0.82	-1.75	101	1.40	0.48	139	1.53	0.80
26	1.53	-0.52	64	1.66	-1.41	102	0.81	-0.03	140	0.73	0.21
27	0.49	-1.35	65	0.49	-2.24	103	1.73	0.38	141	1.65	0.54
28	0.82	-1.85	66	1.80	-1.76	104	1.65	0.71	142	0.73	-0.05
29	1.80	-1.37	67	1.65	-1.43	105	1.53	0.92	143	2.30	0.93
30	0.73	-1.96	68	1.66	-1.09	106	0.49	0.09	144	1.33	0.94
31	0.81	-2.48	69	0.73	-1.68	107	1.63	0.40	145	0.73	0.36
32	2.30	-1.50	70	1.33	-1.67	108	0.73	-0.18	146	1.65	0.68
33	1.53	-1.28	71	1.63	-1.36	109	1.53	0.03	147	1.66	1.02
34	1.69	-0.91	72	0.73	-1.94	110	0.49	-0.80	148	0.49	0.19
35	0.81	-1.43	73	1.33	-1.93	111	1.80	-0.32	149	1.63	0.50
36	1.66	-1.09	74	2.39	-0.86	112	0.81	-0.84	150	0.82	0.00
37	1.66	-0.75	75	1.65	-0.53	113	1.66	-0.50			
38	1.40	-0.67	76	1.53	-0.32	114	0.73	-1.09			

Ek Tablo 22: Çap1 ve yükseklik değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	1.51	0.21	39	0.69	1.03	77	1.28	1.28	115	1.51	0.47
2	0.80	-0.29	40	1.51	1.24	78	0.69	0.67	116	0.69	-0.14
3	1.40	-0.19	41	1.28	1.22	79	1.80	1.17	117	2.34	0.90
4	2.34	0.85	42	0.69	0.61	80	0.80	0.67	118	0.80	0.40
5	0.96	0.51	43	0.42	-0.27	81	0.69	0.06	119	1.34	0.44
6	1.34	0.55	44	2.04	0.48	82	2.04	0.81	120	1.82	0.96
7	0.80	0.05	45	1.34	0.51	83	1.80	1.30	121	0.80	0.46
8	1.82	0.57	46	0.80	0.02	84	0.42	0.42	122	2.17	1.33
9	0.42	-0.31	47	0.96	-0.32	85	0.69	-0.19	123	1.28	1.31
10	2.17	0.55	48	1.64	0.02	86	2.04	0.56	124	1.40	1.40
11	0.80	0.06	49	0.42	-0.86	87	2.04	1.30	125	1.34	1.44
12	1.51	0.27	50	1.80	-0.36	88	1.28	1.28	126	1.28	1.42
13	0.69	-0.34	51	1.51	-0.16	89	0.69	0.67	127	1.40	1.51
14	2.34	0.69	52	0.80	-0.65	90	1.51	0.88	128	1.34	1.55
15	0.80	0.20	53	1.40	-0.56	91	1.28	0.86	129	1.28	1.53
16	1.34	0.24	54	2.34	0.48	92	0.69	0.24	130	0.96	1.19
17	1.82	0.75	55	0.96	0.14	93	0.42	-0.63	131	1.64	1.53
18	1.77	1.22	56	1.34	0.18	94	2.04	0.11	132	1.80	2.03
19	0.42	0.34	57	0.80	-0.31	95	1.34	0.15	133	1.28	2.00
20	2.17	1.20	58	1.82	0.20	96	0.80	-0.35	134	0.69	1.39
21	0.96	0.87	59	0.42	-0.68	97	0.96	-0.69	135	1.64	1.73
22	1.74	1.31	60	2.17	0.19	98	1.64	-0.35	136	2.04	2.48
23	1.80	1.81	61	0.80	-0.31	99	0.42	-1.23	137	1.28	2.45
24	1.28	1.78	62	1.51	-0.10	100	1.80	-0.73	138	1.40	2.55
25	0.69	1.17	63	0.69	-0.71	101	0.80	-1.23	139	1.34	2.59
26	1.80	1.67	64	2.34	0.33	102	0.96	-1.56	140	0.80	2.09
27	1.28	1.65	65	0.80	-0.17	103	2.04	-0.82	141	1.40	2.19
28	0.69	1.04	66	1.34	-0.13	104	1.82	-0.30	142	0.42	1.31
29	1.80	1.53	67	1.82	0.39	105	1.51	-0.10	143	1.64	1.65
30	0.80	1.04	68	1.77	0.85	106	0.42	-0.97	144	1.80	2.14
31	0.69	0.43	69	0.42	-0.03	107	0.96	-1.31	145	0.42	1.27
32	2.04	1.17	70	2.17	0.84	108	1.74	-0.87	146	0.96	0.93
33	1.80	1.67	71	0.96	0.50	109	1.34	-0.83	147	1.77	1.39
34	0.42	0.79	72	1.74	0.94	110	1.74	-0.39	148	0.42	0.51
35	0.69	0.18	73	1.80	1.44	111	1.51	-0.18	149	0.69	-0.10
36	2.04	0.92	74	1.28	1.42	112	0.96	-0.52	150	1.40	0.00
37	2.04	1.67	75	0.69	0.81	113	1.64	-0.18			
38	1.28	1.64	76	1.80	1.31	114	1.74	0.26			

Ek Tablo 23: Çap1 ve kaçıklık değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	2.21	0.88	39	1.04	-1.25	77	0.97	-1.84	115	1.44	0.64
2	0.74	0.30	40	1.44	-1.14	78	1.66	-1.51	116	1.04	0.35
3	1.66	0.63	41	1.48	-0.99	79	1.89	-0.95	117	2.29	1.31
4	1.62	0.91	42	1.66	-0.66	80	0.97	-1.31	118	0.74	0.72
5	1.04	0.62	43	0.74	-1.24	81	0.64	-2.00	119	1.33	0.72
6	1.44	0.73	44	1.62	-0.96	82	1.62	-1.71	120	0.64	0.03
7	0.74	0.14	45	1.33	-0.95	83	1.44	-1.61	121	0.74	-0.55
8	1.04	-0.15	46	0.97	-1.31	84	0.97	-1.97	122	1.65	-0.23
9	1.48	0.01	47	1.73	-0.91	85	1.04	-2.25	123	0.36	-1.20
10	1.89	0.57	48	2.22	-0.02	86	1.82	-1.77	124	1.04	-1.49
11	0.74	-0.02	49	1.73	0.37	87	2.22	-0.88	125	1.33	-1.49
12	1.65	0.30	50	1.44	0.48	88	1.73	-0.48	126	0.74	-2.07
13	0.64	-0.39	51	2.21	1.36	89	1.04	-0.77	127	1.04	-2.36
14	1.82	0.10	52	0.74	0.78	90	1.44	-0.66	128	1.89	-1.80
15	0.74	-0.48	53	1.66	1.11	91	1.48	-0.51	129	1.48	-1.65
16	1.65	-0.16	54	1.62	1.39	92	1.66	-0.18	130	1.04	-1.94
17	1.66	0.17	55	1.04	1.10	93	0.74	-0.76	131	1.62	-1.65
18	1.82	0.65	56	1.44	1.21	94	1.62	-0.48	132	1.33	-1.65
19	0.36	-0.31	57	0.74	0.62	95	1.33	-0.47	133	0.74	-2.23
20	1.33	-0.31	58	1.04	0.33	96	0.97	-0.83	134	1.04	-2.52
21	0.98	-0.66	59	1.48	0.49	97	1.73	-0.44	135	1.78	-2.08
22	0.97	-1.02	60	1.89	1.05	98	2.22	0.45	136	1.82	-1.59
23	1.33	-1.02	61	0.74	0.46	99	1.73	0.85	137	1.73	-1.19
24	0.97	-1.37	62	1.65	0.78	100	1.44	0.96	138	1.73	-0.79
25	0.64	-2.07	63	0.64	0.09	101	1.73	1.35	139	1.65	-0.47
26	1.44	-1.96	64	1.82	0.58	102	0.98	1.01	140	0.74	-1.06
27	0.97	-2.32	65	0.74	-0.01	103	2.29	1.97	141	1.66	-0.73
28	1.66	-1.99	66	1.65	0.31	104	0.64	1.28	142	1.48	-0.57
29	1.89	-1.43	67	1.66	0.64	105	1.65	1.60	143	1.82	-0.08
30	0.97	-1.79	68	1.82	1.13	106	0.74	1.01	144	1.33	-0.08
31	0.64	-2.48	69	0.36	0.16	107	0.98	0.66	145	0.36	-1.05
32	1.62	-2.19	70	1.33	0.17	108	0.97	0.30	146	1.04	-1.34
33	1.44	-2.08	71	0.98	-0.18	109	1.89	0.86	147	2.22	-0.45
34	0.97	-2.44	72	0.97	-0.54	110	1.48	1.02	148	1.73	-0.05
35	1.04	-2.73	73	1.33	-0.54	111	1.44	1.12	149	1.73	0.35
36	1.82	-2.24	74	0.97	-0.90	112	1.04	0.84	150	0.98	0.00
37	2.22	-1.36	75	0.64	-1.59	113	1.62	1.12			
38	1.73	-0.96	76	1.44	-1.48	114	0.74	0.53			

Ek Tablo 24:Çap2 ve yükseklik değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	1.72	0.42	39	0.71	1.39	77	1.25	2.62	115	0.91	-0.31
2	0.91	0.02	40	0.86	0.94	78	0.71	2.01	116	1.40	-0.22
3	1.25	-0.04	41	2.24	1.87	79	1.71	2.41	117	2.14	0.61
4	2.14	0.79	42	0.71	1.27	80	0.86	1.97	118	0.86	0.16
5	0.86	0.34	43	1.40	1.36	81	0.44	1.10	119	0.71	-0.44
6	0.44	-0.53	44	1.25	1.30	82	1.71	1.50	120	1.86	0.12
7	1.72	-0.11	45	0.71	0.70	83	1.50	1.69	121	1.72	0.53
8	1.73	0.31	46	1.65	1.04	84	1.69	2.08	122	1.73	0.95
9	0.71	-0.30	47	0.86	0.59	85	0.44	1.21	123	1.25	0.89
10	1.86	0.26	48	0.44	-0.28	86	1.50	1.40	124	2.52	2.10
11	1.72	0.67	49	1.40	-0.19	87	1.50	1.59	125	1.69	2.49
12	0.91	0.27	50	1.50	0.00	88	1.71	1.99	126	1.50	2.68
13	0.71	-0.33	51	1.72	0.42	89	0.71	1.39	127	1.25	2.62
14	1.73	0.09	52	0.91	0.02	90	0.86	0.94	128	0.71	2.01
15	0.91	-0.31	53	1.25	-0.04	91	2.24	1.87	129	1.71	2.41
16	1.40	-0.22	54	2.14	0.79	92	0.71	1.27	130	0.86	1.97
17	2.14	0.61	55	0.86	0.34	93	1.40	1.36	131	0.44	1.10
18	0.86	0.16	56	0.44	-0.53	94	1.25	1.30	132	1.71	1.50
19	0.71	-0.44	57	1.72	-0.11	95	0.71	0.70	133	1.50	1.69
20	1.86	0.12	58	1.73	0.31	96	1.65	1.04	134	1.69	2.08
21	1.72	0.53	59	0.71	-0.30	97	0.86	0.59	135	0.44	1.21
22	1.73	0.95	60	1.86	0.26	98	0.44	-0.28	136	1.50	1.40
23	1.25	0.89	61	1.72	0.67	99	1.40	-0.19	137	1.50	1.59
24	2.52	2.10	62	0.91	0.27	100	1.50	0.00	138	1.71	1.99
25	1.69	2.49	63	0.71	-0.33	101	1.72	0.42	139	0.71	1.39
26	1.50	2.68	64	1.73	0.09	102	0.91	0.02	140	0.86	0.94
27	1.25	2.62	65	0.91	-0.31	103	1.25	-0.04	141	2.24	1.87
28	0.71	2.01	66	1.40	-0.22	104	2.14	0.79	142	0.71	1.27
29	1.71	2.41	67	2.14	0.61	105	0.86	0.34	143	1.40	1.36
30	0.86	1.97	68	0.86	0.16	106	0.44	-0.53	144	1.25	1.30
31	0.44	1.10	69	0.71	-0.44	107	1.72	-0.11	145	0.71	0.70
32	1.71	1.50	70	1.86	0.12	108	1.73	0.31	146	1.65	1.04
33	1.50	1.69	71	1.72	0.53	109	0.71	-0.30	147	0.86	0.59
34	1.69	2.08	72	1.73	0.95	110	1.86	0.26	148	0.44	-0.28
35	0.44	1.21	73	1.25	0.89	111	1.72	0.67	149	1.40	-0.19
36	1.50	1.40	74	2.52	2.10	112	0.91	0.27	150	1.50	0.00
37	1.50	1.59	75	1.69	2.49	113	0.71	-0.33			
38	1.71	1.99	76	1.50	2.68	114	1.73	0.09			

Ek Tablo 25:Çap2 ve kaçıklık değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	2.04	0.73	39	1.14	-1.13	77	0.92	-1.74	115	0.85	-0.64
2	0.85	0.28	40	0.86	-1.57	78	1.52	-1.52	116	1.56	-0.39
3	1.59	0.57	41	2.04	-0.84	79	2.18	-0.64	117	2.04	0.35
4	1.62	0.89	42	1.52	-0.61	80	1.14	-0.81	118	0.86	-0.10
5	1.14	0.73	43	1.65	-0.26	81	0.40	-1.71	119	0.62	-0.77
6	0.85	0.27	44	0.40	-1.16	82	1.40	-1.61	120	0.40	-1.67
7	1.65	0.62	45	0.62	-1.84	83	0.86	-2.06	121	1.65	-1.32
8	1.14	0.46	46	1.94	-1.21	84	1.94	-1.42	122	1.14	-1.49
9	1.52	0.68	47	1.85	-0.65	85	0.92	-1.80	123	0.40	-2.39
10	1.59	0.97	48	1.67	-0.29	86	0.86	-2.25	124	2.46	-1.24
11	1.65	1.32	49	2.04	0.45	87	1.85	-1.69	125	1.62	-0.91
12	0.92	0.93	50	0.86	0.00	88	2.04	-0.96	126	0.86	-1.36
13	0.62	0.26	51	2.04	0.73	89	1.14	-1.13	127	0.92	-1.74
14	0.86	-0.19	52	0.85	0.28	90	0.86	-1.57	128	1.52	-1.52
15	0.85	-0.64	53	1.59	0.57	91	2.04	-0.84	129	2.18	-0.64
16	1.56	-0.39	54	1.62	0.89	92	1.52	-0.61	130	1.14	-0.81
17	2.04	0.35	55	1.14	0.73	93	1.65	-0.26	131	0.40	-1.71
18	0.86	-0.10	56	0.85	0.27	94	0.40	-1.16	132	1.40	-1.61
19	0.62	-0.77	57	1.65	0.62	95	0.62	-1.84	133	0.86	-2.06
20	0.40	-1.67	58	1.14	0.46	96	1.94	-1.21	134	1.94	-1.42
21	1.65	-1.32	59	1.52	0.68	97	1.85	-0.65	135	0.92	-1.80
22	1.14	-1.49	60	1.59	0.97	98	1.67	-0.29	136	0.86	-2.25
23	0.40	-2.39	61	1.65	1.32	99	2.04	0.45	137	1.85	-1.69
24	2.46	-1.24	62	0.92	0.93	100	0.86	0.00	138	2.04	-0.96
25	1.62	-0.91	63	0.62	0.26	101	2.04	0.73	139	1.14	-1.13
26	0.86	-1.36	64	0.86	-0.19	102	0.85	0.28	140	0.86	-1.57
27	0.92	-1.74	65	0.85	-0.64	103	1.59	0.57	141	2.04	-0.84
28	1.52	-1.52	66	1.56	-0.39	104	1.62	0.89	142	1.52	-0.61
29	2.18	-0.64	67	2.04	0.35	105	1.14	0.73	143	1.65	-0.26
30	1.14	-0.81	68	0.86	-0.10	106	0.85	0.27	144	0.40	-1.16
31	0.40	-1.71	69	0.62	-0.77	107	1.65	0.62	145	0.62	-1.84
32	1.40	-1.61	70	0.40	-1.67	108	1.14	0.46	146	1.94	-1.21
33	0.86	-2.06	71	1.65	-1.32	109	1.52	0.68	147	1.85	-0.65
34	1.94	-1.42	72	1.14	-1.49	110	1.59	0.97	148	1.67	-0.29
35	0.92	-1.80	73	0.40	-2.39	111	1.65	1.32	149	2.04	0.45
36	0.86	-2.25	74	2.46	-1.24	112	0.92	0.93	150	0.86	0.00
37	1.85	-1.69	75	1.62	-0.91	113	0.62	0.26			
38	2.04	-0.96	76	0.86	-1.36	114	0.86	-0.19			

Ek Tablo 26: Yükseklik ve kaçıklık değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	1.80	0.50	39	0.91	0.03	77	1.52	-0.04	115	1.00	0.61
2	1.00	0.19	40	1.00	-0.27	78	1.49	0.14	116	0.91	0.21
3	1.91	0.80	41	1.91	0.33	79	1.91	0.75	117	2.26	1.17
4	1.71	1.20	42	1.49	0.51	80	1.13	0.57	118	1.00	0.87
5	1.13	1.02	43	0.73	-0.06	81	0.27	-0.46	119	0.27	-0.17
6	0.73	0.45	44	1.24	-0.13	82	1.24	-0.53	120	1.71	0.23
7	1.00	0.14	45	0.27	-1.17	83	1.41	-0.43	121	1.00	-0.07
8	1.91	0.75	46	1.13	-1.34	84	0.91	-0.82	122	1.91	0.53
9	1.49	0.93	47	1.80	-0.84	85	0.91	-1.22	123	1.24	0.47
10	2.26	1.89	48	1.68	-0.47	86	1.41	-1.11	124	1.52	0.68
11	1.00	1.58	49	1.68	-0.10	87	2.08	-0.35	125	0.27	-0.36
12	1.13	1.41	50	1.41	0.00	88	2.08	0.42	126	1.41	-0.25
13	0.27	0.37	51	1.80	0.50	89	0.91	0.03	127	1.52	-0.04
14	1.85	0.91	52	1.00	0.19	90	1.00	-0.27	128	1.49	0.14
15	1.00	0.61	53	1.91	0.80	91	1.91	0.33	129	1.91	0.75
16	0.91	0.21	54	1.71	1.20	92	1.49	0.51	130	1.13	0.57
17	2.26	1.17	55	1.13	1.02	93	0.73	-0.06	131	0.27	-0.46
18	1.00	0.87	56	0.73	0.45	94	1.24	-0.13	132	1.24	-0.53
19	0.27	-0.17	57	1.00	0.14	95	0.27	-1.17	133	1.41	-0.43
20	1.71	0.23	58	1.91	0.75	96	1.13	-1.34	134	0.91	-0.82
21	1.00	-0.07	59	1.49	0.93	97	1.80	-0.84	135	0.91	-1.22
22	1.91	0.53	60	2.26	1.89	98	1.68	-0.47	136	1.41	-1.11
23	1.24	0.47	61	1.00	1.58	99	1.68	-0.10	137	2.08	-0.35
24	1.52	0.68	62	1.13	1.41	100	1.41	0.00	138	2.08	0.42
25	0.27	-0.36	63	0.27	0.37	101	1.80	0.50	139	0.91	0.03
26	1.41	-0.25	64	1.85	0.91	102	1.00	0.19	140	1.00	-0.27
27	1.52	-0.04	65	1.00	0.61	103	1.91	0.80	141	1.91	0.33
28	1.49	0.14	66	0.91	0.21	104	1.71	1.20	142	1.49	0.51
29	1.91	0.75	67	2.26	1.17	105	1.13	1.02	143	0.73	-0.06
30	1.13	0.57	68	1.00	0.87	106	0.73	0.45	144	1.24	-0.13
31	0.27	-0.46	69	0.27	-0.17	107	1.00	0.14	145	0.27	-1.17
32	1.24	-0.53	70	1.71	0.23	108	1.91	0.75	146	1.13	-1.34
33	1.41	-0.43	71	1.00	-0.07	109	1.49	0.93	147	1.80	-0.84
34	0.91	-0.82	72	1.91	0.53	110	2.26	1.89	148	1.68	-0.47
35	0.91	-1.22	73	1.24	0.47	111	1.00	1.58	149	1.68	-0.10
36	1.41	-1.11	74	1.52	0.68	112	1.13	1.41	150	1.41	0.00
37	2.08	-0.35	75	0.27	-0.36	113	0.27	0.37			
38	2.08	0.42	76	1.41	-0.25	114	1.85	0.91			

Ek Tablo 27: Çap1 - çap2 - yükseklik değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	2.05	0.40	39	0.90	-0.14	77	1.28	0.48	115	1.55	-0.78
2	0.95	-0.30	40	1.65	-0.15	78	0.90	-0.27	116	1.63	-0.80
3	1.42	-0.53	41	2.32	0.52	79	2.06	0.14	117	2.58	0.12
4	2.58	0.40	42	0.90	-0.23	80	0.96	-0.55	118	0.96	-0.57
5	1.04	-0.22	43	1.40	-0.48	81	0.82	-1.38	119	1.59	-0.64
6	1.35	-0.52	44	2.08	-0.05	82	2.49	-0.54	120	2.00	-0.29
7	1.73	-0.44	45	1.59	-0.12	83	2.08	-0.11	121	1.73	-0.21
8	1.83	-0.27	46	1.74	-0.02	84	1.79	0.02	122	2.21	0.35
9	0.83	-1.09	47	1.04	-0.64	85	0.82	-0.80	123	1.28	-0.01
10	2.24	-0.50	48	1.74	-0.55	86	2.14	-0.32	124	2.70	1.03
11	1.73	-0.42	49	1.40	-0.80	87	2.14	0.17	125	2.31	1.69
12	1.55	-0.52	50	2.08	-0.37	88	1.72	0.24	126	1.57	1.60
13	0.90	-1.27	51	2.05	0.03	89	0.90	-0.51	127	1.42	1.37
14	2.34	-0.59	52	0.95	-0.67	90	1.65	-0.52	128	1.59	1.31
15	0.95	-1.29	53	1.42	-0.90	91	2.32	0.15	129	1.72	1.37
16	1.80	-1.14	54	2.58	0.02	92	0.90	-0.61	130	1.04	0.76
17	2.19	-0.61	55	1.04	-0.59	93	1.40	-0.85	131	1.74	0.85
18	1.78	-0.47	56	1.35	-0.89	94	2.08	-0.42	132	2.06	1.25
19	0.83	-1.30	57	1.73	-0.81	95	1.59	-0.49	133	1.57	1.17
20	2.24	-0.71	58	1.83	-0.64	96	1.74	-0.40	134	1.74	1.26
21	1.93	-0.43	59	0.83	-1.46	97	1.04	-1.01	135	1.74	1.35
22	1.77	-0.31	60	2.24	-0.87	98	1.74	-0.92	136	2.14	1.84
23	1.80	-0.17	61	1.73	-0.80	99	1.40	-1.17	137	1.57	1.76
24	2.52	0.70	62	1.55	-0.89	100	2.08	-0.74	138	1.90	2.00
25	1.74	0.80	63	0.90	-1.65	101	1.73	-0.66	139	1.59	1.94
26	2.08	1.22	64	2.34	-0.96	102	1.16	-1.16	140	0.96	1.24
27	1.28	0.86	65	0.95	-1.66	103	2.08	-0.73	141	2.27	1.87
28	0.90	0.10	66	1.80	-1.51	104	2.19	-0.19	142	0.83	1.05
29	2.06	0.51	67	2.19	-0.98	105	1.65	-0.20	143	2.30	1.69
30	0.96	-0.18	68	1.78	-0.85	106	0.53	-1.32	144	1.80	1.84
31	0.82	-1.01	69	0.83	-1.67	107	1.93	-1.05	145	0.83	1.02
32	2.49	-0.17	70	2.24	-1.08	108	1.77	-0.93	146	1.71	1.07
33	2.08	0.26	71	1.93	-0.81	109	1.59	-0.99	147	1.78	1.20
34	1.79	0.40	72	1.77	-0.68	110	1.88	-0.76	148	0.53	0.08
35	0.82	-0.43	73	1.80	-0.54	111	2.05	-0.36	149	1.63	0.06
36	2.14	0.06	74	2.52	0.33	112	1.16	-0.85	150	1.59	0.00
37	2.14	0.54	75	1.74	0.42	113	1.70	-0.81			
38	1.72	0.61	76	2.08	0.85	114	1.77	-0.69			

Ek Tablo 28:Çap1- çap2 - kaçıklık değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	2.42	0.76	39	1.22	-1.70	77	1.00	-2.17	115	1.47	-0.46
2	0.87	-0.03	40	1.60	-1.76	78	1.68	-2.15	116	1.74	-0.38
3	1.81	0.12	41	2.08	-1.34	79	2.38	-1.43	117	2.56	0.52
4	2.13	0.60	42	1.68	-1.31	80	1.25	-1.83	118	0.93	-0.21
5	1.22	0.16	43	1.65	-1.32	81	0.81	-2.69	119	1.57	-0.30
6	1.47	-0.03	44	1.74	-1.24	82	2.32	-2.03	120	0.81	-1.15
7	1.65	-0.04	45	1.57	-1.33	83	1.60	-2.09	121	1.65	-1.16
8	1.22	-0.47	46	2.06	-0.93	84	2.06	-1.69	122	1.90	-0.92
9	1.55	-0.58	47	1.89	-0.70	85	1.11	-2.24	123	0.50	-2.08
10	1.94	-0.30	48	2.26	-0.10	86	1.84	-2.07	124	2.62	-1.12
11	1.65	-0.31	49	2.06	0.29	87	2.30	-1.43	125	2.28	-0.50
12	1.65	-0.32	50	1.60	0.24	88	2.06	-1.03	126	0.93	-1.23
13	0.83	-1.15	51	2.42	0.99	89	1.22	-1.46	127	1.11	-1.78
14	1.84	-0.97	52	0.87	0.21	90	1.60	-1.52	128	1.98	-1.46
15	0.87	-1.76	53	1.81	0.36	91	2.08	-1.10	129	2.18	-0.94
16	1.98	-1.44	54	2.13	0.83	92	1.68	-1.07	130	1.22	-1.38
17	2.11	-0.99	55	1.22	0.40	93	1.65	-1.08	131	1.74	-1.30
18	1.84	-0.82	56	1.47	0.21	94	1.74	-1.00	132	1.80	-1.16
19	0.77	-1.71	57	1.65	0.20	95	1.57	-1.09	133	0.93	-1.89
20	1.35	-2.02	58	1.22	-0.24	96	2.06	-0.69	134	1.96	-1.59
21	1.90	-1.78	59	1.55	-0.35	97	1.89	-0.46	135	1.85	-1.40
22	1.25	-2.18	60	1.94	-0.07	98	2.26	0.13	136	1.84	-1.22
23	1.35	-2.50	61	1.65	-0.07	99	2.06	0.53	137	1.95	-0.93
24	2.46	-1.70	62	1.65	-0.08	100	1.60	0.47	138	2.15	-0.44
25	1.67	-1.69	63	0.83	-0.91	101	2.06	0.87	139	1.90	-0.19
26	1.60	-1.75	64	1.84	-0.74	102	1.16	0.37	140	0.93	-0.93
27	1.00	-2.41	65	0.87	-1.52	103	2.45	1.16	141	2.11	-0.47
28	1.68	-2.39	66	1.98	-1.21	104	1.67	1.17	142	1.55	-0.58
29	2.38	-1.67	67	2.11	-0.75	105	1.90	1.42	143	2.54	0.30
30	1.25	-2.07	68	1.84	-0.58	106	0.87	0.63	144	1.35	-0.01
31	0.81	-2.92	69	0.77	-1.47	107	1.90	0.87	145	0.77	-0.91
32	2.32	-2.27	70	1.35	-1.78	108	1.25	0.47	146	1.96	-0.60
33	1.60	-2.32	71	1.90	-1.54	109	1.98	0.79	147	2.30	0.04
34	2.06	-1.93	72	1.25	-1.95	110	1.59	0.72	148	1.73	0.11
35	1.11	-2.48	73	1.35	-2.26	111	1.95	1.02	149	2.15	0.60
36	1.84	-2.30	74	2.46	-1.46	112	1.11	0.46	150	1.06	0.00
37	2.30	-1.66	75	1.67	-1.45	113	1.66	0.46			
38	2.06	-1.26	76	1.60	-1.51	114	0.93	-0.27			

Ek Tablo 29: Çap1 - yükseklik - kaçıklık değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	2.33	0.68	39	1.07	-0.42	77	1.57	-0.64	115	1.62	0.39
2	1.04	0.08	40	1.62	-0.45	78	1.68	-0.61	116	1.07	-0.18
3	2.07	0.50	41	1.92	-0.17	79	2.25	-0.01	117	2.85	1.02
4	2.34	1.19	42	1.68	-0.14	80	1.21	-0.44	118	1.04	0.42
5	1.26	0.81	43	0.78	-1.00	81	0.69	-1.40	119	1.36	0.13
6	1.46	0.62	44	2.04	-0.61	82	2.04	-1.00	120	1.82	0.30
7	1.04	0.01	45	1.36	-0.90	83	1.88	-0.76	121	1.04	-0.30
8	1.99	0.36	46	1.21	-1.34	84	1.00	-1.41	122	2.38	0.43
9	1.50	0.21	47	1.87	-1.11	85	1.07	-1.98	123	1.29	0.07
10	2.56	1.13	48	2.24	-0.52	86	2.20	-1.42	124	1.63	0.04
11	1.04	0.53	49	1.75	-0.42	87	2.55	-0.52	125	1.36	-0.25
12	1.80	0.69	50	1.88	-0.19	88	2.13	-0.03	126	1.43	-0.46
13	0.69	-0.27	51	2.33	0.50	89	1.07	-0.60	127	1.63	-0.48
14	2.49	0.57	52	1.04	-0.11	90	1.62	-0.63	128	1.91	-0.22
15	1.04	-0.03	53	2.07	0.31	91	1.92	-0.36	129	1.92	0.05
16	1.67	-0.01	54	2.34	1.01	92	1.68	-0.33	130	1.26	-0.33
17	2.39	0.73	55	1.26	0.62	93	0.78	-1.19	131	1.64	-0.34
18	1.95	1.04	56	1.46	0.43	94	2.04	-0.79	132	1.81	-0.17
19	0.44	-0.17	57	1.04	-0.17	95	1.36	-1.08	133	1.43	-0.39
20	2.17	0.36	58	1.99	0.17	96	1.21	-1.52	134	1.07	-0.96
21	1.22	-0.06	59	1.50	0.03	97	1.87	-1.30	135	1.80	-0.81
22	1.96	0.25	60	2.56	0.94	98	2.24	-0.71	136	2.20	-0.25
23	1.81	0.41	61	1.04	0.34	99	1.75	-0.61	137	2.13	0.23
24	1.57	0.34	62	1.80	0.50	100	1.88	-0.37	138	2.14	0.72
25	0.69	-0.62	63	0.69	-0.46	101	1.87	-0.15	139	1.67	0.75
26	1.88	-0.38	64	2.49	0.39	102	1.22	-0.57	140	1.04	0.14
27	1.57	-0.45	65	1.04	-0.22	103	2.60	0.38	141	2.07	0.56
28	1.68	-0.42	66	1.67	-0.19	104	1.82	0.55	142	1.50	0.42
29	2.25	0.18	67	2.39	0.54	105	1.80	0.71	143	1.84	0.61
30	1.21	-0.26	68	1.95	0.85	106	0.78	-0.16	144	1.81	0.77
31	0.69	-1.21	69	0.44	-0.35	107	1.22	-0.58	145	0.44	-0.43
32	2.04	-0.81	70	2.17	0.17	108	1.96	-0.27	146	1.26	-0.82
33	1.88	-0.58	71	1.22	-0.25	109	1.91	-0.01	147	2.33	-0.14
34	1.00	-1.22	72	1.96	0.06	110	2.27	0.62	148	1.75	-0.04
35	1.07	-1.79	73	1.81	0.23	111	1.62	0.59	149	1.75	0.07
36	2.20	-1.24	74	1.57	0.15	112	1.26	0.20	150	1.58	0.00
37	2.55	-0.33	75	0.69	-0.80	113	1.64	0.20			
38	2.13	0.15	76	1.88	-0.57	114	1.87	0.42			

Ek Tablo 30: Çap2 - yükseklik - kaçıklık değişkenleri için elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	2.25	0.61	39	1.21	0.06	77	1.52	0.44	115	1.20	-0.13
2	1.20	0.16	40	1.07	-0.51	78	1.56	0.36	116	1.56	-0.22
3	1.95	0.46	41	2.55	0.39	79	2.37	1.08	117	2.51	0.65
4	2.16	0.97	42	1.56	0.30	80	1.28	0.71	118	1.07	0.07
5	1.28	0.60	43	1.65	0.31	81	0.44	-0.50	119	0.73	-0.84
6	0.86	-0.19	44	1.25	-0.09	82	1.71	-0.43	120	1.86	-0.63
7	1.96	0.12	45	0.73	-1.00	83	1.60	-0.48	121	1.96	-0.32
8	1.95	0.43	46	1.98	-0.67	84	2.03	-0.09	122	1.95	-0.01
9	1.56	0.34	47	1.94	-0.38	85	0.94	-0.79	123	1.25	-0.41
10	2.46	1.15	48	1.68	-0.35	86	1.60	-0.84	124	2.59	0.53
11	1.96	1.46	49	2.04	0.04	87	2.35	-0.14	125	1.73	0.61
12	1.21	1.03	50	1.60	0.00	88	2.29	0.50	126	1.60	0.57
13	0.73	0.11	51	2.25	0.61	89	1.21	0.06	127	1.52	0.44
14	1.85	0.32	52	1.20	0.16	90	1.07	-0.51	128	1.56	0.36
15	1.20	-0.13	53	1.95	0.46	91	2.55	0.39	129	2.37	1.08
16	1.56	-0.22	54	2.16	0.97	92	1.56	0.30	130	1.28	0.71
17	2.51	0.65	55	1.28	0.60	93	1.65	0.31	131	0.44	-0.50
18	1.07	0.07	56	0.86	-0.19	94	1.25	-0.09	132	1.71	-0.43
19	0.73	-0.84	57	1.96	0.12	95	0.73	-1.00	133	1.60	-0.48
20	1.86	-0.63	58	1.95	0.43	96	1.98	-0.67	134	2.03	-0.09
21	1.96	-0.32	59	1.56	0.34	97	1.94	-0.38	135	0.94	-0.79
22	1.95	-0.01	60	2.46	1.15	98	1.68	-0.35	136	1.60	-0.84
23	1.25	-0.41	61	1.96	1.46	99	2.04	0.04	137	2.35	-0.14
24	2.59	0.53	62	1.21	1.03	100	1.60	0.00	138	2.29	0.50
25	1.73	0.61	63	0.73	0.11	101	2.25	0.61	139	1.21	0.06
26	1.60	0.57	64	1.85	0.32	102	1.20	0.16	140	1.07	-0.51
27	1.52	0.44	65	1.20	-0.13	103	1.95	0.46	141	2.55	0.39
28	1.56	0.36	66	1.56	-0.22	104	2.16	0.97	142	1.56	0.30
29	2.37	1.08	67	2.51	0.65	105	1.28	0.60	143	1.65	0.31
30	1.28	0.71	68	1.07	0.07	106	0.86	-0.19	144	1.25	-0.09
31	0.44	-0.50	69	0.73	-0.84	107	1.96	0.12	145	0.73	-1.00
32	1.71	-0.43	70	1.86	-0.63	108	1.95	0.43	146	1.98	-0.67
33	1.60	-0.48	71	1.96	-0.32	109	1.56	0.34	147	1.94	-0.38
34	2.03	-0.09	72	1.95	-0.01	110	2.46	1.15	148	1.68	-0.35
35	0.94	-0.79	73	1.25	-0.41	111	1.96	1.46	149	2.04	0.04
36	1.60	-0.84	74	2.59	0.53	112	1.21	1.03	150	1.60	0.00
37	2.35	-0.14	75	1.73	0.61	113	0.73	0.11			
38	2.29	0.50	76	1.60	0.57	114	1.85	0.32			

Ek Tablo 31: Dört değişken birlikte incelendiğinde elde edilen T ve CUSUM (S_m) değerleri

No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m	No	T	S_m
1	2.59	0.00	39	1.29	-0.20	77	1.57	-0.45	115	1.68	-0.27
2	1.21	0.66	40	1.72	-0.85	78	1.71	-0.81	116	1.74	-0.52
3	2.12	-0.06	41	2.59	-1.07	79	2.56	-1.03	117	2.97	-0.72
4	2.58	0.13	42	1.71	-0.41	80	1.38	-0.41	118	1.13	0.32
5	1.36	0.77	43	1.65	-0.63	81	0.82	-0.96	119	1.62	-0.49
6	1.48	0.20	44	2.08	-0.91	82	2.50	-2.07	120	2.00	-0.80
7	1.96	-0.26	45	1.62	-0.76	83	2.12	-1.50	121	1.96	-0.73
8	2.01	-0.23	46	2.09	-1.07	84	2.15	-1.32	122	2.46	-0.71
9	1.58	-0.15	47	1.97	-0.92	85	1.12	-1.10	123	1.29	-0.18
10	2.68	-0.50	48	2.27	-0.88	86	2.26	-1.91	124	2.74	-0.83
11	1.96	0.24	49	2.06	-0.55	87	2.70	-1.58	125	2.36	-0.02
12	1.82	0.26	50	2.12	-0.42	88	2.31	-0.82	126	1.65	0.40
13	0.91	0.15	51	2.59	-0.24	89	1.29	-0.44	127	1.63	0.12
14	2.49	-0.88	52	1.21	0.42	90	1.72	-1.09	128	2.01	-0.18
15	1.21	-0.32	53	2.12	-0.30	91	2.59	-1.30	129	2.37	-0.10
16	1.98	-1.04	54	2.58	-0.11	92	1.71	-0.65	130	1.36	0.33
17	2.58	-1.00	55	1.36	0.53	93	1.65	-0.87	131	1.75	-0.24
18	1.96	-0.35	56	1.48	-0.04	94	2.08	-1.15	132	2.06	-0.43
19	0.86	-0.33	57	1.96	-0.49	95	1.62	-1.00	133	1.65	-0.30
20	2.24	-1.40	58	2.01	-0.47	96	2.09	-1.31	134	2.05	-0.58
21	2.18	-1.09	59	1.58	-0.39	97	1.97	-1.15	135	1.86	-0.46
22	2.02	-0.85	60	2.68	-0.74	98	2.27	-1.12	136	2.26	-0.54
23	1.81	-0.77	61	1.96	0.00	99	2.06	-0.78	137	2.44	-0.21
24	2.59	-0.89	62	1.82	0.03	100	2.12	-0.66	138	2.38	0.29
25	1.77	-0.24	63	0.91	-0.09	101	2.27	-0.47	139	1.95	0.74
26	2.12	-0.40	64	2.49	-1.12	102	1.44	-0.14	140	1.13	0.76
27	1.57	-0.22	65	1.21	-0.56	103	2.68	-0.63	141	2.60	-0.05
28	1.71	-0.58	66	1.98	-1.28	104	2.20	0.12	142	1.58	0.62
29	2.56	-0.80	67	2.58	-1.24	105	1.98	0.38	143	2.55	0.27
30	1.38	-0.17	68	1.96	-0.59	106	0.89	0.43	144	1.81	0.88
31	0.82	-0.72	69	0.86	-0.57	107	2.18	-0.62	145	0.86	0.76
32	2.50	-1.83	70	2.24	-1.64	108	2.02	-0.37	146	2.00	-0.32
33	2.12	-1.26	71	2.18	-1.33	109	2.01	-0.29	147	2.38	-0.25
34	2.15	-1.08	72	2.02	-1.08	110	2.46	-0.21	148	1.75	0.19
35	1.12	-0.86	73	1.81	-1.00	111	2.21	0.31	149	2.15	0.01
36	2.26	-1.67	74	2.59	-1.13	112	1.37	0.59	150	1.71	0.22
37	2.70	-1.35	75	1.77	-0.47	113	1.70	0.02			
38	2.31	-0.58	76	2.12	-0.64	114	1.88	-0.22			

Ek Tablo 32: Çap1 değişkeni için elde edilen değerler

No	Çap1	z _i	AKS	ÜKS	No	Çap1	z _i	AKS	ÜKS
1	102.80	102.68	102.63	102.70	42	102.60	102.66	102.59	102.74
2	102.70	102.68	102.62	102.71	43	102.70	102.66	102.59	102.74
3	102.60	102.67	102.62	102.71	44	102.50	102.64	102.59	102.74
4	102.50	102.66	102.61	102.72	45	102.80	102.66	102.59	102.74
5	102.60	102.65	102.61	102.72	46	102.70	102.66	102.59	102.74
6	102.80	102.66	102.61	102.72	47	102.60	102.66	102.59	102.74
7	102.70	102.67	102.60	102.73	48	102.50	102.64	102.59	102.74
8	102.60	102.66	102.60	102.73	49	102.70	102.65	102.59	102.74
9	102.70	102.67	102.60	102.73	50	102.80	102.66	102.59	102.74
10	102.80	102.68	102.60	102.73	51	102.80	102.68	102.59	102.74
11	102.70	102.68	102.60	102.73	52	102.70	102.68	102.59	102.74
12	102.80	102.69	102.60	102.73	53	102.60	102.67	102.59	102.74
13	102.60	102.68	102.60	102.73	54	102.50	102.65	102.59	102.74
14	102.50	102.67	102.60	102.73	55	102.60	102.65	102.59	102.74
15	102.70	102.67	102.60	102.73	56	102.80	102.66	102.59	102.74
16	102.80	102.68	102.60	102.73	57	102.70	102.67	102.59	102.74
17	102.60	102.67	102.60	102.73	58	102.60	102.66	102.59	102.74
18	102.50	102.66	102.60	102.73	59	102.70	102.66	102.59	102.74
19	102.70	102.66	102.60	102.74	60	102.80	102.68	102.59	102.74
20	102.80	102.67	102.60	102.74	61	102.70	102.68	102.59	102.74
21	102.60	102.67	102.60	102.74	62	102.80	102.69	102.59	102.74
22	102.70	102.67	102.60	102.74	63	102.60	102.68	102.59	102.74
23	102.80	102.68	102.60	102.74	64	102.50	102.66	102.59	102.74
24	102.70	102.69	102.60	102.74	65	102.70	102.67	102.59	102.74
25	102.60	102.68	102.60	102.74	66	102.80	102.68	102.59	102.74
26	102.80	102.69	102.60	102.74	67	102.60	102.67	102.59	102.74
27	102.70	102.69	102.60	102.74	68	102.50	102.66	102.59	102.74
28	102.60	102.68	102.60	102.74	69	102.70	102.66	102.59	102.74
29	102.80	102.69	102.59	102.74	70	102.80	102.67	102.59	102.74
30	102.70	102.69	102.59	102.74	71	102.60	102.67	102.59	102.74
31	102.60	102.68	102.59	102.74	72	102.70	102.67	102.59	102.74
32	102.50	102.67	102.59	102.74	73	102.80	102.68	102.59	102.74
33	102.80	102.68	102.59	102.74	74	102.70	102.68	102.59	102.74
34	102.70	102.68	102.59	102.74	75	102.60	102.68	102.59	102.74
35	102.60	102.67	102.59	102.74	76	102.80	102.69	102.59	102.74
36	102.50	102.66	102.59	102.74	77	102.70	102.69	102.59	102.74
37	102.50	102.64	102.59	102.74	78	102.60	102.68	102.59	102.74
38	102.70	102.65	102.59	102.74	79	102.80	102.69	102.59	102.74
39	102.60	102.64	102.59	102.74	80	102.70	102.69	102.59	102.74
40	102.80	102.66	102.59	102.74	81	102.60	102.68	102.59	102.74
41	102.70	102.66	102.59	102.74	82	102.50	102.67	102.59	102.74

Ek Tablo 32'nin devamı

No	Çap1	z _i	AKS	ÜKS	No	Çap1	z _i	AKS	ÜKS
83	102.80	102.68	102.59	102.74	117	102.50	102.65	102.59	102.74
84	102.70	102.68	102.59	102.74	118	102.70	102.66	102.59	102.74
85	102.60	102.67	102.59	102.74	119	102.80	102.67	102.59	102.74
86	102.50	102.66	102.59	102.74	120	102.60	102.67	102.59	102.74
87	102.50	102.64	102.59	102.74	121	102.70	102.67	102.59	102.74
88	102.70	102.65	102.59	102.74	122	102.80	102.68	102.59	102.74
89	102.60	102.64	102.59	102.74	123	102.70	102.68	102.59	102.74
90	102.80	102.66	102.59	102.74	124	102.60	102.68	102.59	102.74
91	102.70	102.66	102.59	102.74	125	102.80	102.69	102.59	102.74
92	102.60	102.66	102.59	102.74	126	102.70	102.69	102.59	102.74
93	102.70	102.66	102.59	102.74	127	102.60	102.68	102.59	102.74
94	102.50	102.64	102.59	102.74	128	102.80	102.69	102.59	102.74
95	102.80	102.66	102.59	102.74	129	102.70	102.69	102.59	102.74
96	102.70	102.66	102.59	102.74	130	102.60	102.68	102.59	102.74
97	102.60	102.66	102.59	102.74	131	102.50	102.67	102.59	102.74
98	102.50	102.64	102.59	102.74	132	102.80	102.68	102.59	102.74
99	102.70	102.65	102.59	102.74	133	102.70	102.68	102.59	102.74
100	102.80	102.66	102.59	102.74	134	102.60	102.67	102.59	102.74
101	102.70	102.67	102.59	102.74	135	102.50	102.66	102.59	102.74
102	102.60	102.66	102.59	102.74	136	102.50	102.64	102.59	102.74
103	102.50	102.64	102.59	102.74	137	102.70	102.65	102.59	102.74
104	102.60	102.64	102.59	102.74	138	102.60	102.64	102.59	102.74
105	102.80	102.66	102.59	102.74	139	102.80	102.66	102.59	102.74
106	102.70	102.66	102.59	102.74	140	102.70	102.66	102.59	102.74
107	102.60	102.65	102.59	102.74	141	102.60	102.66	102.59	102.74
108	102.70	102.66	102.59	102.74	142	102.70	102.66	102.59	102.74
109	102.80	102.67	102.59	102.74	143	102.50	102.64	102.59	102.74
110	102.70	102.68	102.59	102.74	144	102.80	102.66	102.59	102.74
111	102.80	102.69	102.59	102.74	145	102.70	102.66	102.59	102.74
112	102.60	102.68	102.59	102.74	146	102.60	102.66	102.59	102.74
113	102.50	102.66	102.59	102.74	147	102.50	102.64	102.59	102.74
114	102.70	102.67	102.59	102.74	148	102.70	102.65	102.59	102.74
115	102.80	102.68	102.59	102.74	149	102.60	102.64	102.59	102.74
116	102.60	102.67	102.59	102.74	150	102.60	102.64	102.59	102.74

Ek Tablo 33: Çap2 değişkeni için elde edilen değerler

No	Çap2	z _i	AKS	ÜKS	No	Çap2	z _i	AKS	ÜKS
1	137.40	137.27	137.23	137.29	42	137.20	137.23	137.19	137.33
2	137.30	137.28	137.22	137.30	43	137.40	137.25	137.19	137.33
3	137.30	137.28	137.21	137.31	44	137.30	137.26	137.19	137.33
4	137.10	137.26	137.21	137.31	45	137.20	137.25	137.19	137.33
5	137.20	137.25	137.20	137.32	46	137.10	137.23	137.19	137.33
6	137.30	137.26	137.20	137.32	47	137.20	137.23	137.19	137.33
7	137.40	137.27	137.20	137.32	48	137.30	137.24	137.19	137.33
8	137.20	137.27	137.20	137.32	49	137.40	137.25	137.19	137.33
9	137.20	137.26	137.20	137.32	50	137.20	137.25	137.19	137.33
10	137.30	137.26	137.20	137.32	51	137.40	137.26	137.19	137.33
11	137.40	137.28	137.19	137.33	52	137.30	137.27	137.19	137.33
12	137.30	137.28	137.19	137.33	53	137.30	137.27	137.19	137.33
13	137.20	137.27	137.19	137.33	54	137.10	137.25	137.19	137.33
14	137.20	137.26	137.19	137.33	55	137.20	137.25	137.19	137.33
15	137.30	137.27	137.19	137.33	56	137.30	137.25	137.19	137.33
16	137.40	137.28	137.19	137.33	57	137.40	137.27	137.19	137.33
17	137.10	137.26	137.19	137.33	58	137.20	137.26	137.19	137.33
18	137.20	137.26	137.19	137.33	59	137.20	137.26	137.19	137.33
19	137.20	137.25	137.19	137.33	60	137.30	137.26	137.19	137.33
20	137.30	137.26	137.19	137.33	61	137.40	137.27	137.19	137.33
21	137.40	137.27	137.19	137.33	62	137.30	137.28	137.19	137.33
22	137.20	137.26	137.19	137.33	63	137.20	137.27	137.19	137.33
23	137.30	137.27	137.19	137.33	64	137.20	137.26	137.19	137.33
24	137.50	137.29	137.19	137.33	65	137.30	137.27	137.19	137.33
25	137.10	137.27	137.19	137.33	66	137.40	137.28	137.19	137.33
26	137.20	137.26	137.19	137.33	67	137.10	137.26	137.19	137.33
27	137.30	137.27	137.19	137.33	68	137.20	137.26	137.19	137.33
28	137.20	137.26	137.19	137.33	69	137.20	137.25	137.19	137.33
29	137.40	137.27	137.19	137.33	70	137.30	137.25	137.19	137.33
30	137.20	137.27	137.19	137.33	71	137.40	137.27	137.19	137.33
31	137.30	137.27	137.19	137.33	72	137.20	137.26	137.19	137.33
32	137.40	137.28	137.19	137.33	73	137.30	137.27	137.19	137.33
33	137.20	137.28	137.19	137.33	74	137.50	137.29	137.19	137.33
34	137.10	137.26	137.19	137.33	75	137.10	137.27	137.19	137.33
35	137.30	137.26	137.19	137.33	76	137.20	137.26	137.19	137.33
36	137.20	137.26	137.19	137.33	77	137.30	137.27	137.19	137.33
37	137.20	137.25	137.19	137.33	78	137.20	137.26	137.19	137.33
38	137.40	137.27	137.19	137.33	79	137.40	137.27	137.19	137.33
39	137.20	137.26	137.19	137.33	80	137.20	137.27	137.19	137.33
40	137.20	137.25	137.19	137.33	81	137.30	137.27	137.19	137.33
41	137.10	137.24	137.19	137.33	82	137.40	137.28	137.19	137.33

Ek Tablo 33'ün devamı

No	Çap2	z _i	AKS	ÜKS	No	Çap2	z _i	AKS	ÜKS
83	137.20	137.27	137.19	137.33	117	137.10	137.26	137.19	137.33
84	137.10	137.26	137.19	137.33	118	137.20	137.26	137.19	137.33
85	137.30	137.26	137.19	137.33	119	137.20	137.25	137.19	137.33
86	137.20	137.26	137.19	137.33	120	137.30	137.25	137.19	137.33
87	137.20	137.25	137.19	137.33	121	137.40	137.27	137.19	137.33
88	137.40	137.26	137.19	137.33	122	137.20	137.26	137.19	137.33
89	137.20	137.26	137.19	137.33	123	137.30	137.27	137.19	137.33
90	137.20	137.25	137.19	137.33	124	137.50	137.29	137.19	137.33
91	137.10	137.24	137.19	137.33	125	137.10	137.27	137.19	137.33
92	137.20	137.23	137.19	137.33	126	137.20	137.26	137.19	137.33
93	137.40	137.25	137.19	137.33	127	137.30	137.27	137.19	137.33
94	137.30	137.26	137.19	137.33	128	137.20	137.26	137.19	137.33
95	137.20	137.25	137.19	137.33	129	137.40	137.27	137.19	137.33
96	137.10	137.23	137.19	137.33	130	137.20	137.27	137.19	137.33
97	137.20	137.23	137.19	137.33	131	137.30	137.27	137.19	137.33
98	137.30	137.24	137.19	137.33	132	137.40	137.28	137.19	137.33
99	137.40	137.25	137.19	137.33	133	137.20	137.27	137.19	137.33
100	137.20	137.25	137.19	137.33	134	137.10	137.26	137.19	137.33
101	137.40	137.26	137.19	137.33	135	137.30	137.26	137.19	137.33
102	137.30	137.27	137.19	137.33	136	137.20	137.26	137.19	137.33
103	137.30	137.27	137.19	137.33	137	137.20	137.25	137.19	137.33
104	137.10	137.25	137.19	137.33	138	137.40	137.26	137.19	137.33
105	137.20	137.25	137.19	137.33	139	137.20	137.26	137.19	137.33
106	137.30	137.25	137.19	137.33	140	137.20	137.25	137.19	137.33
107	137.40	137.27	137.19	137.33	141	137.10	137.24	137.19	137.33
108	137.20	137.26	137.19	137.33	142	137.20	137.23	137.19	137.33
109	137.20	137.26	137.19	137.33	143	137.40	137.25	137.19	137.33
110	137.30	137.26	137.19	137.33	144	137.30	137.26	137.19	137.33
111	137.40	137.27	137.19	137.33	145	137.20	137.25	137.19	137.33
112	137.30	137.28	137.19	137.33	146	137.10	137.23	137.19	137.33
113	137.20	137.27	137.19	137.33	147	137.20	137.23	137.19	137.33
114	137.20	137.26	137.19	137.33	148	137.30	137.24	137.19	137.33
115	137.30	137.27	137.19	137.33	149	137.40	137.25	137.19	137.33
116	137.40	137.28	137.19	137.33	150	137.20	137.25	137.19	137.33

Ek Tablo 34: Yükseklik değişkeni için elde edilen değerler

No	Yük.	z_i	AKS	ÜKS	No	Yük.	z_i	AKS	ÜKS
1	61.40	61.47	61.44	61.50	42	61.50	61.52	61.40	61.54
2	61.40	61.46	61.43	61.52	43	61.50	61.52	61.40	61.54
3	61.60	61.47	61.43	61.52	44	61.60	61.53	61.40	61.54
4	61.30	61.46	61.42	61.53	45	61.50	61.52	61.40	61.54
5	61.40	61.45	61.42	61.53	46	61.40	61.51	61.40	61.54
6	61.50	61.46	61.41	61.53	47	61.40	61.50	61.40	61.54
7	61.40	61.45	61.41	61.54	48	61.50	61.50	61.40	61.54
8	61.30	61.44	61.41	61.54	49	61.50	61.50	61.40	61.54
9	61.50	61.44	61.41	61.54	50	61.60	61.51	61.40	61.54
10	61.30	61.43	61.41	61.54	51	61.40	61.50	61.40	61.54
11	61.40	61.42	61.41	61.54	52	61.40	61.49	61.40	61.54
12	61.40	61.42	61.41	61.54	53	61.60	61.50	61.40	61.54
13	61.50	61.43	61.41	61.54	54	61.30	61.48	61.40	61.54
14	61.30	61.42	61.41	61.54	55	61.40	61.47	61.40	61.54
15	61.40	61.42	61.41	61.54	56	61.50	61.47	61.40	61.54
16	61.50	61.42	61.41	61.54	57	61.40	61.47	61.40	61.54
17	61.30	61.41	61.40	61.54	58	61.30	61.45	61.40	61.54
18	61.40	61.41	61.40	61.54	59	61.50	61.46	61.40	61.54
19	61.50	61.42	61.40	61.54	60	61.30	61.44	61.40	61.54
20	61.30	61.41	61.40	61.54	61	61.40	61.44	61.40	61.54
21	61.40	61.41	61.40	61.54	62	61.40	61.43	61.40	61.54
22	61.30	61.40	61.40	61.54	63	61.50	61.44	61.40	61.54
23	61.60	61.42	61.40	61.54	64	61.30	61.43	61.40	61.54
24	61.60	61.43	61.40	61.54	65	61.40	61.42	61.40	61.54
25	61.50	61.44	61.40	61.54	66	61.50	61.43	61.40	61.54
26	61.60	61.46	61.40	61.54	67	61.30	61.42	61.40	61.54
27	61.60	61.47	61.40	61.54	68	61.40	61.42	61.40	61.54
28	61.50	61.47	61.40	61.54	69	61.50	61.42	61.40	61.54
29	61.60	61.49	61.40	61.54	70	61.30	61.41	61.40	61.54
30	61.40	61.48	61.40	61.54	71	61.40	61.41	61.40	61.54
31	61.50	61.48	61.40	61.54	72	61.30	61.40	61.40	61.54
32	61.60	61.49	61.40	61.54	73	61.60	61.42	61.40	61.54
33	61.60	61.50	61.40	61.54	74	61.60	61.44	61.40	61.54
34	61.50	61.50	61.40	61.54	75	61.50	61.44	61.40	61.54
35	61.50	61.50	61.40	61.54	76	61.60	61.46	61.40	61.54
36	61.60	61.51	61.40	61.54	77	61.60	61.47	61.40	61.54
37	61.60	61.52	61.40	61.54	78	61.50	61.48	61.40	61.54
38	61.60	61.53	61.40	61.54	79	61.60	61.49	61.40	61.54
39	61.50	61.53	61.40	61.54	80	61.40	61.48	61.40	61.54
40	61.40	61.51	61.40	61.54	81	61.50	61.48	61.40	61.54
41	61.60	61.52	61.40	61.54	82	61.60	61.49	61.40	61.54

Ek Tablo 34'ün devamı

No	Yük.	z_i	AKS	ÜKS	No	Yük.	z_i	AKS	ÜKS
83	61.60	61.50	61.40	61.54	117	61.30	61.42	61.40	61.54
84	61.50	61.50	61.40	61.54	118	61.40	61.42	61.40	61.54
85	61.50	61.50	61.40	61.54	119	61.50	61.42	61.40	61.54
86	61.60	61.51	61.40	61.54	120	61.30	61.41	61.40	61.54
87	61.60	61.52	61.40	61.54	121	61.40	61.41	61.40	61.54
88	61.60	61.53	61.40	61.54	122	61.30	61.40	61.40	61.54
89	61.50	61.53	61.40	61.54	123	61.60	61.42	61.40	61.54
90	61.40	61.51	61.40	61.54	124	61.60	61.44	61.40	61.54
91	61.60	61.52	61.40	61.54	125	61.50	61.44	61.40	61.54
92	61.50	61.52	61.40	61.54	126	61.60	61.46	61.40	61.54
93	61.50	61.52	61.40	61.54	127	61.60	61.47	61.40	61.54
94	61.60	61.53	61.40	61.54	128	61.50	61.48	61.40	61.54
95	61.50	61.52	61.40	61.54	129	61.60	61.49	61.40	61.54
96	61.40	61.51	61.40	61.54	130	61.40	61.48	61.40	61.54
97	61.40	61.50	61.40	61.54	131	61.50	61.48	61.40	61.54
98	61.50	61.50	61.40	61.54	132	61.60	61.49	61.40	61.54
99	61.50	61.50	61.40	61.54	133	61.60	61.50	61.40	61.54
100	61.60	61.51	61.40	61.54	134	61.50	61.50	61.40	61.54
101	61.40	61.50	61.40	61.54	135	61.50	61.50	61.40	61.54
102	61.40	61.49	61.40	61.54	136	61.60	61.51	61.40	61.54
103	61.60	61.50	61.40	61.54	137	61.60	61.52	61.40	61.54
104	61.30	61.48	61.40	61.54	138	61.60	61.53	61.40	61.54
105	61.40	61.47	61.40	61.54	139	61.50	61.53	61.40	61.54
106	61.50	61.48	61.40	61.54	140	61.40	61.51	61.40	61.54
107	61.40	61.47	61.40	61.54	141	61.60	61.52	61.40	61.54
108	61.30	61.45	61.40	61.54	142	61.50	61.52	61.40	61.54
109	61.50	61.46	61.40	61.54	143	61.50	61.52	61.40	61.54
110	61.30	61.44	61.40	61.54	144	61.60	61.53	61.40	61.54
111	61.40	61.44	61.40	61.54	145	61.50	61.52	61.40	61.54
112	61.40	61.43	61.40	61.54	146	61.40	61.51	61.40	61.54
113	61.50	61.44	61.40	61.54	147	61.40	61.50	61.40	61.54
114	61.30	61.43	61.40	61.54	148	61.50	61.50	61.40	61.54
115	61.40	61.42	61.40	61.54	149	61.50	61.50	61.40	61.54
116	61.50	61.43	61.40	61.54	150	61.60	61.51	61.40	61.54

Ek Tablo 35: Kaçıklık değişkeni için elde edilen değerler

No	Kaç.	z_i	AKS	ÜKS	No	Kaç.	z_i	AKS	ÜKS
1	0.30	0.40	0.39	0.43	42	0.50	0.41	0.36	0.45
2	0.45	0.40	0.38	0.43	43	0.45	0.42	0.36	0.45
3	0.50	0.41	0.38	0.44	44	0.40	0.41	0.36	0.45
4	0.40	0.41	0.37	0.44	45	0.40	0.41	0.36	0.45
5	0.35	0.40	0.37	0.44	46	0.35	0.41	0.36	0.45
6	0.45	0.41	0.37	0.44	47	0.30	0.40	0.36	0.45
7	0.45	0.41	0.37	0.44	48	0.30	0.39	0.36	0.45
8	0.35	0.41	0.37	0.45	49	0.30	0.38	0.36	0.45
9	0.50	0.42	0.37	0.45	50	0.45	0.38	0.36	0.45
10	0.50	0.42	0.36	0.45	51	0.30	0.38	0.36	0.45
11	0.45	0.43	0.36	0.45	52	0.45	0.38	0.36	0.45
12	0.35	0.42	0.36	0.45	53	0.50	0.40	0.36	0.45
13	0.40	0.42	0.36	0.45	54	0.40	0.40	0.36	0.45
14	0.45	0.42	0.36	0.45	55	0.35	0.39	0.36	0.45
15	0.45	0.42	0.36	0.45	56	0.45	0.40	0.36	0.45
16	0.35	0.42	0.36	0.45	57	0.45	0.40	0.36	0.45
17	0.50	0.42	0.36	0.45	58	0.35	0.40	0.36	0.45
18	0.45	0.43	0.36	0.45	59	0.50	0.41	0.36	0.45
19	0.40	0.42	0.36	0.45	60	0.50	0.42	0.36	0.45
20	0.40	0.42	0.36	0.45	61	0.45	0.42	0.36	0.45
21	0.45	0.42	0.36	0.45	62	0.35	0.41	0.36	0.45
22	0.35	0.42	0.36	0.45	63	0.40	0.41	0.36	0.45
23	0.40	0.42	0.36	0.45	64	0.45	0.42	0.36	0.45
24	0.35	0.41	0.36	0.45	65	0.45	0.42	0.36	0.45
25	0.40	0.41	0.36	0.45	66	0.35	0.41	0.36	0.45
26	0.45	0.41	0.36	0.45	67	0.50	0.42	0.36	0.45
27	0.35	0.41	0.36	0.45	68	0.45	0.42	0.36	0.45
28	0.50	0.42	0.36	0.45	69	0.40	0.42	0.36	0.45
29	0.50	0.42	0.36	0.45	70	0.40	0.42	0.36	0.45
30	0.35	0.42	0.36	0.45	71	0.45	0.42	0.36	0.45
31	0.40	0.41	0.36	0.45	72	0.35	0.42	0.36	0.45
32	0.40	0.41	0.36	0.45	73	0.40	0.41	0.36	0.45
33	0.45	0.42	0.36	0.45	74	0.35	0.41	0.36	0.45
34	0.35	0.41	0.36	0.45	75	0.40	0.41	0.36	0.45
35	0.35	0.40	0.36	0.45	76	0.45	0.41	0.36	0.45
36	0.45	0.41	0.36	0.45	77	0.35	0.40	0.36	0.45
37	0.30	0.40	0.36	0.45	78	0.50	0.41	0.36	0.45
38	0.30	0.39	0.36	0.45	79	0.50	0.42	0.36	0.45
39	0.35	0.38	0.36	0.45	80	0.35	0.42	0.36	0.45
40	0.45	0.39	0.36	0.45	81	0.40	0.41	0.36	0.45
41	0.50	0.40	0.36	0.45	82	0.40	0.41	0.36	0.45

Ek Tablo 35'in devamı

No	Kaç.	z_i	AKS	ÜKS	No	Kaç.	z_i	AKS	ÜKS
83	0.45	0.42	0.36	0.45	117	0.50	0.42	0.36	0.45
84	0.35	0.41	0.36	0.45	118	0.45	0.42	0.36	0.45
85	0.35	0.40	0.36	0.45	119	0.40	0.42	0.36	0.45
86	0.45	0.41	0.36	0.45	120	0.40	0.42	0.36	0.45
87	0.30	0.40	0.36	0.45	121	0.45	0.42	0.36	0.45
88	0.30	0.39	0.36	0.45	122	0.35	0.42	0.36	0.45
89	0.35	0.38	0.36	0.45	123	0.40	0.41	0.36	0.45
90	0.45	0.39	0.36	0.45	124	0.35	0.41	0.36	0.45
91	0.50	0.40	0.36	0.45	125	0.40	0.41	0.36	0.45
92	0.50	0.41	0.36	0.45	126	0.45	0.41	0.36	0.45
93	0.45	0.42	0.36	0.45	127	0.35	0.40	0.36	0.45
94	0.40	0.41	0.36	0.45	128	0.50	0.41	0.36	0.45
95	0.40	0.41	0.36	0.45	129	0.50	0.42	0.36	0.45
96	0.35	0.41	0.36	0.45	130	0.35	0.42	0.36	0.45
97	0.30	0.40	0.36	0.45	131	0.40	0.41	0.36	0.45
98	0.30	0.39	0.36	0.45	132	0.40	0.41	0.36	0.45
99	0.30	0.38	0.36	0.45	133	0.45	0.42	0.36	0.45
100	0.45	0.38	0.36	0.45	134	0.35	0.41	0.36	0.45
101	0.30	0.38	0.36	0.45	135	0.35	0.40	0.36	0.45
102	0.45	0.38	0.36	0.45	136	0.45	0.41	0.36	0.45
103	0.50	0.40	0.36	0.45	137	0.30	0.40	0.36	0.45
104	0.40	0.40	0.36	0.45	138	0.30	0.39	0.36	0.45
105	0.35	0.39	0.36	0.45	139	0.35	0.38	0.36	0.45
106	0.45	0.40	0.36	0.45	140	0.45	0.39	0.36	0.45
107	0.45	0.40	0.36	0.45	141	0.50	0.40	0.36	0.45
108	0.35	0.40	0.36	0.45	142	0.50	0.41	0.36	0.45
109	0.50	0.41	0.36	0.45	143	0.45	0.42	0.36	0.45
110	0.50	0.42	0.36	0.45	144	0.40	0.41	0.36	0.45
111	0.45	0.42	0.36	0.45	145	0.40	0.41	0.36	0.45
112	0.35	0.41	0.36	0.45	146	0.35	0.41	0.36	0.45
113	0.40	0.41	0.36	0.45	147	0.30	0.40	0.36	0.45
114	0.45	0.42	0.36	0.45	148	0.30	0.39	0.36	0.45
115	0.45	0.42	0.36	0.45	149	0.30	0.38	0.36	0.45
116	0.35	0.41	0.36	0.45	150	0.45	0.38	0.36	0.45

Ek Tablo 36: Çap1 ve çap2 değişkenlerine ait Z_1 ve T^2 değerleri

No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2
1	102.8	137.4	1.16	38	102.7	137.4	4.06	75	102.6	137.1	0.65
2	102.7	137.3	1.64	39	102.6	137.2	4.00	76	102.8	137.2	2.79
3	102.6	137.3	2.40	40	102.8	137.2	0.50	77	102.7	137.3	2.62
4	102.5	137.1	0.95	41	102.7	137.1	4.16	78	102.6	137.2	1.38
5	102.6	137.2	1.38	42	102.6	137.2	4.88	79	102.8	137.4	3.03
6	102.8	137.3	0.02	43	102.7	137.4	0.66	80	102.7	137.2	3.68
7	102.7	137.4	1.40	44	102.5	137.3	2.76	81	102.6	137.3	1.35
8	102.6	137.2	0.76	45	102.8	137.2	0.74	82	102.5	137.4	5.12
9	102.7	137.2	0.01	46	102.7	137.1	5.64	83	102.8	137.2	1.30
10	102.8	137.3	0.74	47	102.6	137.2	6.14	84	102.7	137.1	1.97
11	102.7	137.4	1.76	48	102.5	137.3	3.83	85	102.6	137.3	0.22
12	102.8	137.3	3.38	49	102.7	137.4	1.86	86	102.5	137.2	0.56
13	102.6	137.2	1.32	50	102.8	137.2	0.96	87	102.5	137.2	3.31
14	102.5	137.2	0.21	51	102.8	137.4	0.42	88	102.7	137.4	4.02
15	102.7	137.3	0.40	52	102.7	137.3	0.64	89	102.6	137.2	3.98
16	102.8	137.4	2.62	53	102.6	137.3	0.72	90	102.8	137.2	0.51
17	102.6	137.1	0.22	54	102.5	137.1	0.79	91	102.7	137.1	4.21
18	102.5	137.2	0.53	55	102.6	137.2	1.64	92	102.6	137.2	4.93
19	102.7	137.2	0.58	56	102.8	137.3	0.33	93	102.7	137.4	0.68
20	102.8	137.3	0.97	57	102.7	137.4	0.53	94	102.5	137.3	2.75
21	102.6	137.4	0.88	58	102.6	137.2	0.34	95	102.8	137.2	0.75
22	102.7	137.2	0.06	59	102.7	137.2	0.19	96	102.7	137.1	5.67
23	102.8	137.3	1.26	60	102.8	137.3	0.95	97	102.6	137.2	6.18
24	102.7	137.5	5.51	61	102.7	137.4	1.19	98	102.5	137.3	3.84
25	102.6	137.1	0.74	62	102.8	137.3	2.97	99	102.7	137.4	1.85
26	102.8	137.2	2.73	63	102.6	137.2	1.16	100	102.8	137.2	0.97
27	102.7	137.3	2.60	64	102.5	137.2	0.08	101	102.7	137.4	0.13
28	102.6	137.2	1.33	65	102.7	137.3	0.19	102	102.6	137.3	1.30
29	102.8	137.4	3.07	66	102.8	137.4	2.14	103	102.5	137.3	6.99
30	102.7	137.2	3.65	67	102.6	137.1	0.24	104	102.6	137.1	3.91
31	102.6	137.3	1.37	68	102.5	137.2	0.55	105	102.8	137.2	1.00
32	102.5	137.4	5.27	69	102.7	137.2	0.77	106	102.7	137.3	0.35
33	102.8	137.2	1.35	70	102.8	137.3	1.15	107	102.6	137.4	2.66
34	102.7	137.1	1.93	71	102.6	137.4	0.70	108	102.7	137.2	0.56
35	102.6	137.3	0.21	72	102.7	137.2	0.05	109	102.8	137.2	0.81
36	102.5	137.2	0.56	73	102.8	137.3	1.26	110	102.7	137.3	0.58
37	102.5	137.2	3.31	74	102.7	137.5	5.18	111	102.8	137.4	2.04

Ek Tablo 36'nın devamı

No	Z ₁	Z ₂	T ²	No	Z ₁	Z ₂	T ²	No	Z ₁	Z ₂	T ²
112	102.6	137.3	1.55	125	102.8	137.1	1.96	138	102.6	137.4	5.78
113	102.5	137.2	1.30	126	102.7	137.2	2.85	139	102.8	137.2	0.50
114	102.7	137.2	0.06	127	102.6	137.3	0.78	140	102.7	137.2	0.41
115	102.8	137.3	0.62	128	102.8	137.2	4.45	141	102.6	137.1	3.53
116	102.6	137.4	2.68	129	102.7	137.4	3.05	142	102.7	137.2	5.49
117	102.5	137.1	1.30	130	102.6	137.2	1.29	143	102.5	137.4	2.44
118	102.7	137.2	0.36	131	102.5	137.3	1.05	144	102.8	137.3	0.28
119	102.8	137.2	1.97	132	102.8	137.4	3.27	145	102.7	137.2	0.87
120	102.6	137.3	0.27	133	102.7	137.2	1.37	146	102.6	137.1	4.65
121	102.7	137.4	0.57	134	102.6	137.1	0.52	147	102.5	137.2	5.58
122	102.8	137.2	1.33	135	102.5	137.3	1.03	148	102.7	137.3	3.28
123	102.7	137.3	1.35	136	102.5	137.2	3.99	149	102.6	137.4	3.03
124	102.6	137.5	6.08	137	102.7	137.2	2.01	150	102.6	137.2	3.79

Ek Tablo 37: Çap1 ve yükseklik değişkenlerine ait Z_1 ve T^2 değerleri

No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2
1	102.8	61.4	0.70	38	102.7	61.6	2.78	75	102.6	61.5	0.63
2	102.7	61.4	0.90	39	102.6	61.5	3.36	76	102.8	61.6	2.30
3	102.6	61.6	0.22	40	102.8	61.4	1.14	77	102.7	61.6	3.06
4	102.5	61.3	1.26	41	102.7	61.6	1.68	78	102.6	61.5	1.23
5	102.6	61.4	2.68	42	102.6	61.5	1.54	79	102.8	61.6	4.85
6	102.8	61.5	0.29	43	102.7	61.5	1.36	80	102.7	61.4	4.46
7	102.7	61.4	0.32	44	102.5	61.6	2.96	81	102.6	61.5	2.09
8	102.6	61.3	1.61	45	102.8	61.5	1.72	82	102.5	61.6	0.34
9	102.7	61.5	0.83	46	102.7	61.4	1.05	83	102.8	61.6	2.45
10	102.8	61.3	1.37	47	102.6	61.4	0.65	84	102.7	61.5	2.86
11	102.7	61.4	1.63	48	102.5	61.5	2.93	85	102.6	61.5	1.39
12	102.8	61.4	3.33	49	102.7	61.5	1.75	86	102.5	61.6	1.19
13	102.6	61.5	1.64	50	102.8	61.6	0.96	87	102.5	61.6	3.50
14	102.5	61.3	2.61	51	102.8	61.4	1.60	88	102.7	61.6	2.82
15	102.7	61.4	2.39	52	102.7	61.4	1.42	89	102.6	61.5	3.40
16	102.8	61.5	1.74	53	102.6	61.6	0.95	90	102.8	61.4	1.17
17	102.6	61.3	2.41	54	102.5	61.3	0.83	91	102.7	61.6	1.71
18	102.5	61.4	4.95	55	102.6	61.4	1.95	92	102.6	61.5	1.56
19	102.7	61.5	3.08	56	102.8	61.5	0.05	93	102.7	61.5	1.39
20	102.8	61.3	2.73	57	102.7	61.4	0.01	94	102.5	61.6	2.98
21	102.6	61.4	3.40	58	102.6	61.3	0.86	95	102.8	61.5	1.74
22	102.7	61.3	4.19	59	102.7	61.5	0.33	96	102.7	61.4	1.07
23	102.8	61.6	2.25	60	102.8	61.3	0.83	97	102.6	61.4	0.65
24	102.7	61.6	1.68	61	102.7	61.4	1.11	98	102.5	61.5	2.94
25	102.6	61.5	0.71	62	102.8	61.4	2.95	99	102.7	61.5	1.76
26	102.8	61.6	2.29	63	102.6	61.5	1.31	100	102.8	61.6	0.97
27	102.7	61.6	3.01	64	102.5	61.3	1.98	101	102.7	61.4	0.57
28	102.6	61.5	1.19	65	102.7	61.4	1.83	102	102.6	61.4	0.30
29	102.8	61.6	4.77	66	102.8	61.5	1.41	103	102.5	61.6	2.44
30	102.7	61.4	4.40	67	102.6	61.3	1.94	104	102.6	61.3	3.93
31	102.6	61.5	2.05	68	102.5	61.4	4.42	105	102.8	61.4	0.74
32	102.5	61.6	0.30	69	102.7	61.5	2.69	106	102.7	61.5	0.25
33	102.8	61.6	2.39	70	102.8	61.3	2.36	107	102.6	61.4	1.09
34	102.7	61.5	2.80	71	102.6	61.4	3.03	108	102.7	61.3	1.10
35	102.6	61.5	1.35	72	102.7	61.3	3.82	109	102.8	61.5	0.22
36	102.5	61.6	1.15	73	102.8	61.6	2.06	110	102.7	61.3	0.70
37	102.5	61.6	3.46	74	102.7	61.6	1.58	111	102.8	61.4	2.07

Ek Tablo 37'nin devamı

No	Z₁	Z₂	T²	No	Z₁	Z₂	T²	No	Z₁	Z₂	T²
112	102.6	61.4	1.16	125	102.8	61.5	1.97	138	102.6	61.6	3.56
113	102.5	61.5	1.41	126	102.7	61.6	2.35	139	102.8	61.5	1.92
114	102.7	61.3	1.93	127	102.6	61.6	1.02	140	102.7	61.4	1.15
115	102.8	61.4	1.60	128	102.8	61.5	3.81	141	102.6	61.6	1.70
116	102.6	61.5	1.15	129	102.7	61.6	4.88	142	102.7	61.5	1.51
117	102.5	61.3	4.79	130	102.6	61.4	1.87	143	102.5	61.5	2.71
118	102.7	61.4	3.90	131	102.5	61.5	0.06	144	102.8	61.6	1.93
119	102.8	61.5	1.49	132	102.8	61.6	1.65	145	102.7	61.5	1.89
120	102.6	61.3	3.13	133	102.7	61.6	2.80	146	102.6	61.4	1.06
121	102.7	61.4	2.83	134	102.6	61.5	1.37	147	102.5	61.4	2.96
122	102.8	61.3	3.39	135	102.5	61.5	0.85	148	102.7	61.5	1.77
123	102.7	61.6	2.10	136	102.5	61.6	3.38	149	102.6	61.5	2.70
124	102.6	61.6	0.79	137	102.7	61.6	2.50	150	102.6	61.6	3.74

Ek Tablo 38: Çap1 ve kaçıklık değişkenlerine ait Z_i ve T^2 değerleri

No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2
1	102.8	0.3	3.11	38	102.7	0.3	2.84	75	102.6	0.4	0.60
2	102.7	0.45	2.21	39	102.6	0.35	4.15	76	102.8	0.45	2.44
3	102.6	0.5	0.16	40	102.8	0.45	1.70	77	102.7	0.35	3.69
4	102.5	0.4	1.05	41	102.7	0.5	0.21	78	102.6	0.5	0.89
5	102.6	0.35	1.42	42	102.6	0.5	1.33	79	102.8	0.5	3.20
6	102.8	0.45	0.05	43	102.7	0.45	1.29	80	102.7	0.35	3.28
7	102.7	0.45	0.19	44	102.5	0.4	4.73	81	102.6	0.4	1.34
8	102.6	0.35	0.14	45	102.8	0.4	0.85	82	102.5	0.4	0.30
9	102.7	0.5	0.70	46	102.7	0.35	0.05	83	102.8	0.45	0.80
10	102.8	0.5	1.82	47	102.6	0.3	0.90	84	102.7	0.35	1.04
11	102.7	0.45	2.43	48	102.5	0.3	3.83	85	102.6	0.35	0.50
12	102.8	0.35	3.06	49	102.7	0.3	5.67	86	102.5	0.45	0.86
13	102.6	0.4	1.32	50	102.8	0.45	3.76	87	102.5	0.3	3.27
14	102.5	0.45	1.66	51	102.8	0.3	10.9	88	102.7	0.3	2.91
15	102.7	0.45	2.02	52	102.7	0.45	7.71	89	102.6	0.35	4.23
16	102.8	0.35	1.06	53	102.6	0.5	1.68	90	102.8	0.45	1.77
17	102.6	0.5	1.95	54	102.5	0.4	1.08	91	102.7	0.5	0.23
18	102.5	0.45	5.57	55	102.6	0.35	2.13	92	102.6	0.5	1.29
19	102.7	0.4	3.51	56	102.8	0.45	0.71	93	102.7	0.45	1.26
20	102.8	0.4	1.36	57	102.7	0.45	0.22	94	102.5	0.4	4.68
21	102.6	0.45	2.57	58	102.6	0.35	0.66	95	102.8	0.4	0.83
22	102.7	0.35	0.66	59	102.7	0.5	0.04	96	102.7	0.35	0.05
23	102.8	0.4	1.24	60	102.8	0.5	0.74	97	102.6	0.3	0.92
24	102.7	0.35	1.81	61	102.7	0.45	1.22	98	102.5	0.3	3.86
25	102.6	0.4	0.51	62	102.8	0.35	3.11	99	102.7	0.3	5.71
26	102.8	0.45	2.36	63	102.6	0.4	1.21	100	102.8	0.45	3.80
27	102.7	0.35	3.48	64	102.5	0.45	0.76	101	102.7	0.3	8.18
28	102.6	0.5	0.93	65	102.7	0.45	1.08	102	102.6	0.45	3.89
29	102.8	0.5	3.31	66	102.8	0.35	0.96	103	102.5	0.5	2.48
30	102.7	0.35	3.27	67	102.6	0.5	1.20	104	102.6	0.4	3.45
31	102.6	0.4	1.36	68	102.5	0.45	4.43	105	102.8	0.35	1.68
32	102.5	0.4	0.37	69	102.7	0.4	2.67	106	102.7	0.45	0.68
33	102.8	0.45	0.86	70	102.8	0.4	0.91	107	102.6	0.45	0.77
34	102.7	0.35	1.02	71	102.6	0.45	1.96	108	102.7	0.35	0.70
35	102.6	0.35	0.45	72	102.7	0.35	0.40	109	102.8	0.5	0.20
36	102.5	0.45	0.90	73	102.8	0.4	1.19	110	102.7	0.5	0.60
37	102.5	0.3	3.27	74	102.7	0.35	1.96	111	102.8	0.45	2.10

Ek Tablo 38'in devamı

No	Z ₁	Z ₂	T ²	No	Z ₁	Z ₂	T ²	No	Z ₁	Z ₂	T ²
112	102.6	0.35	0.67	125	102.8	0.4	2.77	138	102.6	0.3	3.60
113	102.5	0.4	0.56	126	102.7	0.45	2.49	139	102.8	0.35	3.56
114	102.7	0.45	0.72	127	102.6	0.35	1.35	140	102.7	0.45	1.90
115	102.8	0.45	0.99	128	102.8	0.5	2.98	141	102.6	0.5	0.62
116	102.6	0.35	0.15	129	102.7	0.5	3.21	142	102.7	0.5	0.67
117	102.5	0.5	4.00	130	102.6	0.35	1.26	143	102.5	0.45	5.18
118	102.7	0.45	3.85	131	102.5	0.4	0.49	144	102.8	0.4	1.06
119	102.8	0.4	1.32	132	102.8	0.4	0.63	145	102.7	0.4	0.42
120	102.6	0.4	1.40	133	102.7	0.45	0.96	146	102.6	0.35	0.52
121	102.7	0.45	1.77	134	102.6	0.35	0.15	147	102.5	0.3	2.96
122	102.8	0.35	1.02	135	102.5	0.35	0.62	148	102.7	0.3	3.18
123	102.7	0.4	1.27	136	102.5	0.45	4.70	149	102.6	0.3	5.94
124	102.6	0.35	0.43	137	102.7	0.3	2.01	150	102.6	0.45	4.64

Ek Tablo 39: Çap2 ve yükseklik değişkenlerine ait Z_i ve T^2 değerleri

No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2
1	137.4	61.4	1.23	38	137.4	61.6	3.25	75	137.1	61.5	0.77
2	137.3	61.4	1.65	39	137.2	61.5	2.11	76	137.2	61.6	0.11
3	137.3	61.6	2.64	40	137.2	61.4	1.14	77	137.3	61.6	0.34
4	137.1	61.3	0.17	41	137.1	61.6	3.64	78	137.2	61.5	0.01
5	137.2	61.4	0.85	42	137.2	61.5	4.63	79	137.4	61.6	2.13
6	137.3	61.5	0.25	43	137.4	61.5	1.48	80	137.2	61.4	0.45
7	137.4	61.4	1.04	44	137.3	61.6	1.92	81	137.3	61.5	0.97
8	137.2	61.3	0.86	45	137.2	61.5	1.82	82	137.4	61.6	5.28
9	137.2	61.5	0.80	46	137.1	61.4	4.18	83	137.2	61.6	3.34
10	137.3	61.3	1.34	47	137.2	61.4	5.46	84	137.1	61.5	0.66
11	137.4	61.4	2.20	48	137.3	61.5	3.15	85	137.3	61.5	0.86
12	137.3	61.4	2.68	49	137.4	61.5	0.55	86	137.2	61.6	1.09
13	137.2	61.5	1.32	50	137.2	61.6	1.25	87	137.2	61.6	1.71
14	137.2	61.3	2.03	51	137.4	61.4	0.86	88	137.4	61.6	3.28
15	137.3	61.4	2.05	52	137.3	61.4	0.86	89	137.2	61.5	2.14
16	137.4	61.5	2.95	53	137.3	61.6	2.04	90	137.2	61.4	1.18
17	137.1	61.3	2.61	54	137.1	61.3	0.30	91	137.1	61.6	3.69
18	137.2	61.4	3.60	55	137.2	61.4	1.14	92	137.2	61.5	4.68
19	137.2	61.5	3.94	56	137.3	61.5	0.35	93	137.4	61.5	1.51
20	137.3	61.3	4.08	57	137.4	61.4	0.38	94	137.3	61.6	1.94
21	137.4	61.4	2.73	58	137.2	61.3	0.32	95	137.2	61.5	1.84
22	137.2	61.3	4.15	59	137.2	61.5	0.61	96	137.1	61.4	4.21
23	137.3	61.6	1.99	60	137.3	61.3	0.86	97	137.2	61.4	5.49
24	137.5	61.6	5.48	61	137.4	61.4	1.33	98	137.3	61.5	3.17
25	137.1	61.5	0.91	62	137.3	61.4	1.80	99	137.4	61.5	0.56
26	137.2	61.6	0.15	63	137.2	61.5	0.78	100	137.2	61.6	1.27
27	137.3	61.6	0.38	64	137.2	61.3	1.59	101	137.4	61.4	0.86
28	137.2	61.5	0.01	65	137.3	61.4	1.57	102	137.3	61.4	0.86
29	137.4	61.6	2.17	66	137.4	61.5	2.34	103	137.3	61.6	2.04
30	137.2	61.4	0.46	67	137.1	61.3	2.27	104	137.1	61.3	0.30
31	137.3	61.5	1.00	68	137.2	61.4	3.38	105	137.2	61.4	1.14
32	137.4	61.6	5.33	69	137.2	61.5	3.85	106	137.3	61.5	0.35
33	137.2	61.6	3.34	70	137.3	61.3	3.89	107	137.4	61.4	0.38
34	137.1	61.5	0.63	71	137.4	61.4	2.41	108	137.2	61.3	0.32
35	137.3	61.5	0.83	72	137.2	61.3	3.89	109	137.2	61.5	0.61
36	137.2	61.6	1.05	73	137.3	61.6	1.78	110	137.3	61.3	0.86
37	137.2	61.6	1.66	74	137.5	61.6	5.17	111	137.4	61.4	1.32

Ek Tablo 39'un devamı

No	Z ₁	Z ₂	T ²	No	Z ₁	Z ₂	T ²	No	Z ₁	Z ₂	T ²
112	137.3	61.4	1.80	125	137.1	61.5	0.77	138	137.4	61.6	3.28
113	137.2	61.5	0.78	126	137.2	61.6	0.11	139	137.2	61.5	2.14
114	137.2	61.3	1.59	127	137.3	61.6	0.34	140	137.2	61.4	1.18
115	137.3	61.4	1.56	128	137.2	61.5	0.01	141	137.1	61.6	3.69
116	137.4	61.5	2.34	129	137.4	61.6	2.13	142	137.2	61.5	4.68
117	137.1	61.3	2.26	130	137.2	61.4	0.45	143	137.4	61.5	1.51
118	137.2	61.4	3.37	131	137.3	61.5	0.97	144	137.3	61.6	1.94
119	137.2	61.5	3.84	132	137.4	61.6	5.28	145	137.2	61.5	1.84
120	137.3	61.3	3.89	133	137.2	61.6	3.34	146	137.1	61.4	4.21
121	137.4	61.4	2.40	134	137.1	61.5	0.66	147	137.2	61.4	5.49
122	137.2	61.3	3.89	135	137.3	61.5	0.86	148	137.3	61.5	3.17
123	137.3	61.6	1.78	136	137.2	61.6	1.09	149	137.4	61.5	0.56
124	137.5	61.6	5.17	137	137.2	61.6	1.71	150	137.2	61.6	1.27

Ek Tablo 40: Çap2 ve kaçıklık değişkenlerine ait Z_i ve T^2 değerleri

No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2
1	137.4	0.3	2.88	38	137.4	0.3	3.06	75	137.1	0.4	0.70
2	137.3	0.45	2.46	39	137.2	0.35	3.51	76	137.2	0.45	0.10
3	137.3	0.5	2.11	40	137.2	0.45	1.76	77	137.3	0.35	0.39
4	137.1	0.4	0.04	41	137.1	0.5	3.37	78	137.2	0.5	0.35
5	137.2	0.35	0.23	42	137.2	0.5	5.61	79	137.4	0.5	2.09
6	137.3	0.45	0.02	43	137.4	0.45	1.55	80	137.2	0.35	0.53
7	137.4	0.45	1.04	44	137.3	0.4	0.65	81	137.3	0.4	0.67
8	137.2	0.35	0.24	45	137.2	0.4	1.24	82	137.4	0.4	3.18
9	137.2	0.5	0.54	46	137.1	0.35	4.49	83	137.2	0.45	1.42
10	137.3	0.5	1.83	47	137.2	0.3	5.42	84	137.1	0.35	0.15
11	137.4	0.45	3.17	48	137.3	0.3	4.61	85	137.3	0.35	0.11
12	137.3	0.35	2.47	49	137.4	0.3	5.71	86	137.2	0.45	0.22
13	137.2	0.4	1.04	50	137.2	0.45	3.39	87	137.2	0.3	1.02
14	137.2	0.45	1.09	51	137.4	0.3	7.26	88	137.4	0.3	3.14
15	137.3	0.45	1.68	52	137.3	0.45	4.94	89	137.2	0.35	3.61
16	137.4	0.35	2.67	53	137.3	0.5	2.24	90	137.2	0.45	1.83
17	137.1	0.5	1.92	54	137.1	0.4	0.92	91	137.1	0.5	3.40
18	137.2	0.45	3.15	55	137.2	0.35	2.02	92	137.2	0.5	5.61
19	137.2	0.4	3.34	56	137.3	0.45	0.77	93	137.4	0.45	1.54
20	137.3	0.4	1.93	57	137.4	0.45	0.72	94	137.3	0.4	0.64
21	137.4	0.45	2.05	58	137.2	0.35	0.76	95	137.2	0.4	1.24
22	137.2	0.35	0.63	59	137.2	0.5	0.20	96	137.1	0.35	4.50
23	137.3	0.4	0.53	60	137.3	0.5	0.66	97	137.2	0.3	5.46
24	137.5	0.35	5.84	61	137.4	0.45	1.61	98	137.3	0.3	4.65
25	137.1	0.4	0.74	62	137.3	0.35	1.55	99	137.4	0.3	5.75
26	137.2	0.45	0.18	63	137.2	0.4	0.43	100	137.2	0.45	3.43
27	137.3	0.35	0.39	64	137.2	0.45	0.44	101	137.4	0.3	7.30
28	137.2	0.5	0.45	65	137.3	0.45	0.88	102	137.3	0.45	4.97
29	137.4	0.5	2.32	66	137.4	0.35	2.13	103	137.3	0.5	2.25
30	137.2	0.35	0.64	67	137.1	0.5	1.26	104	137.1	0.4	0.94
31	137.3	0.4	0.77	68	137.2	0.45	2.51	105	137.2	0.35	2.04
32	137.4	0.4	3.28	69	137.2	0.4	2.90	106	137.3	0.45	0.78
33	137.2	0.45	1.52	70	137.3	0.4	1.56	107	137.4	0.45	0.72
34	137.1	0.35	0.16	71	137.4	0.45	1.55	108	137.2	0.35	0.76
35	137.3	0.35	0.09	72	137.2	0.35	0.39	109	137.2	0.5	0.20
36	137.2	0.45	0.22	73	137.3	0.4	0.33	110	137.3	0.5	0.65
37	137.2	0.3	0.95	74	137.5	0.35	5.68	111	137.4	0.45	1.60

Ek Tablo 40'in devamı

No	Z ₁	Z ₂	T ²	No	Z ₁	Z ₂	T ²	No	Z ₁	Z ₂	T ²
112	137.3	0.35	1.54	125	137.1	0.4	0.70	138	137.4	0.3	3.14
113	137.2	0.4	0.43	126	137.2	0.45	0.10	139	137.2	0.35	3.61
114	137.2	0.45	0.44	127	137.3	0.35	0.39	140	137.2	0.45	1.83
115	137.3	0.45	0.88	128	137.2	0.5	0.35	141	137.1	0.5	3.40
116	137.4	0.35	2.12	129	137.4	0.5	2.09	142	137.2	0.5	5.61
117	137.1	0.5	1.26	130	137.2	0.35	0.53	143	137.4	0.45	1.54
118	137.2	0.45	2.51	131	137.3	0.4	0.67	144	137.3	0.4	0.64
119	137.2	0.4	2.90	132	137.4	0.4	3.18	145	137.2	0.4	1.24
120	137.3	0.4	1.56	133	137.2	0.45	1.42	146	137.1	0.35	4.50
121	137.4	0.45	1.54	134	137.1	0.35	0.15	147	137.2	0.3	5.46
122	137.2	0.35	0.39	135	137.3	0.35	0.11	148	137.3	0.3	4.65
123	137.3	0.4	0.33	136	137.2	0.45	0.22	149	137.4	0.3	5.75
124	137.5	0.35	5.68	137	137.2	0.3	1.02	150	137.2	0.45	3.43

Ek Tablo 41: Yükseklik ve kaçıklık değişkenlerine ait Z_i ve T^2 değerleri

No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2	No	Z_1	Z_2	T^2
1	61.4	0.3	1.57	38	61.6	0.3	2.81	75	61.5	0.4	0.83
2	61.4	0.45	0.79	39	61.5	0.35	3.50	76	61.6	0.45	0.11
3	61.6	0.5	0.14	40	61.4	0.45	1.84	77	61.6	0.35	0.05
4	61.3	0.4	0.15	41	61.6	0.5	1.74	78	61.5	0.5	0.59
5	61.4	0.35	0.79	42	61.5	0.5	3.10	79	61.6	0.5	3.45
6	61.5	0.45	0.20	43	61.5	0.45	3.95	80	61.4	0.35	0.93
7	61.4	0.45	0.32	44	61.6	0.4	4.46	81	61.5	0.4	0.75
8	61.3	0.35	1.41	45	61.5	0.4	3.73	82	61.6	0.4	1.12
9	61.5	0.5	0.66	46	61.4	0.35	1.35	83	61.6	0.45	2.78
10	61.3	0.5	1.98	47	61.4	0.3	0.91	84	61.5	0.35	1.29
11	61.4	0.45	2.53	48	61.5	0.3	2.95	85	61.5	0.35	0.68
12	61.4	0.35	1.64	49	61.5	0.3	6.27	86	61.6	0.45	1.78
13	61.5	0.4	1.17	50	61.6	0.45	3.24	87	61.6	0.3	1.60
14	61.3	0.45	2.02	51	61.4	0.3	6.91	88	61.6	0.3	2.91
15	61.4	0.45	2.36	52	61.4	0.45	4.17	89	61.5	0.35	3.60
16	61.5	0.35	1.48	53	61.6	0.5	0.96	90	61.4	0.45	1.91
17	61.3	0.5	2.70	54	61.3	0.4	0.99	91	61.6	0.5	1.76
18	61.4	0.45	3.11	55	61.4	0.35	2.44	92	61.5	0.5	3.08
19	61.5	0.4	2.30	56	61.5	0.45	0.89	93	61.5	0.45	3.92
20	61.3	0.4	2.74	57	61.4	0.45	0.32	94	61.6	0.4	4.44
21	61.4	0.45	3.02	58	61.3	0.35	2.14	95	61.5	0.4	3.72
22	61.3	0.35	3.83	59	61.5	0.5	0.24	96	61.4	0.35	1.35
23	61.6	0.4	2.00	60	61.3	0.5	0.77	97	61.4	0.3	0.93
24	61.6	0.35	1.13	61	61.4	0.45	1.19	98	61.5	0.3	2.99
25	61.5	0.4	0.82	62	61.4	0.35	1.01	99	61.5	0.3	6.32
26	61.6	0.45	0.19	63	61.5	0.4	0.70	100	61.6	0.45	3.27
27	61.6	0.35	0.02	64	61.3	0.45	1.39	101	61.4	0.3	6.95
28	61.5	0.5	0.70	65	61.4	0.45	1.62	102	61.4	0.45	4.20
29	61.6	0.5	3.67	66	61.5	0.35	1.16	103	61.6	0.5	0.97
30	61.4	0.35	1.04	67	61.3	0.5	2.03	104	61.3	0.4	1.01
31	61.5	0.4	0.83	68	61.4	0.45	2.40	105	61.4	0.35	2.45
32	61.6	0.4	1.17	69	61.5	0.4	1.74	106	61.5	0.45	0.90
33	61.6	0.45	2.87	70	61.3	0.4	2.33	107	61.4	0.45	0.33
34	61.5	0.35	1.32	71	61.4	0.45	2.55	108	61.3	0.35	2.15
35	61.5	0.35	0.66	72	61.3	0.35	3.62	109	61.5	0.5	0.24
36	61.6	0.45	1.80	73	61.6	0.4	1.85	110	61.3	0.5	0.77
37	61.6	0.3	1.55	74	61.6	0.35	1.12	111	61.4	0.45	1.18

Ek Tablo 41'in devamı

No	Z₁	Z₂	T²	No	Z₁	Z₂	T²	No	Z₁	Z₂	T²
112	61.4	0.35	1.01	125	61.5	0.4	0.83	138	61.6	0.3	2.91
113	61.5	0.4	0.70	126	61.6	0.45	0.11	139	61.5	0.35	3.60
114	61.3	0.45	1.39	127	61.6	0.35	0.05	140	61.4	0.45	1.91
115	61.4	0.45	1.61	128	61.5	0.5	0.59	141	61.6	0.5	1.76
116	61.5	0.35	1.16	129	61.6	0.5	3.45	142	61.5	0.5	3.08
117	61.3	0.5	2.02	130	61.4	0.35	0.93	143	61.5	0.45	3.92
118	61.4	0.45	2.39	131	61.5	0.4	0.75	144	61.6	0.4	4.44
119	61.5	0.4	1.74	132	61.6	0.4	1.12	145	61.5	0.4	3.72
120	61.3	0.4	2.32	133	61.6	0.45	2.78	146	61.4	0.35	1.35
121	61.4	0.45	2.55	134	61.5	0.35	1.29	147	61.4	0.3	0.93
122	61.3	0.35	3.62	135	61.5	0.35	0.68	148	61.5	0.3	2.99
123	61.6	0.4	1.85	136	61.6	0.45	1.78	149	61.5	0.3	6.32
124	61.6	0.35	1.12	137	61.6	0.3	1.60	150	61.6	0.45	3.27

Ek Tablo 42: Çap1 - çap2 - yükseklik değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	1.34	26	2.75	51	1.61	76	2.83	101	0.86	126	2.90
2	1.76	27	3.08	52	1.52	77	3.16	102	1.55	127	1.03
3	2.78	28	1.50	53	2.05	78	1.58	103	7.26	128	4.95
4	1.44	29	4.94	54	0.84	79	5.00	104	4.22	129	5.02
5	2.68	30	4.58	55	2.14	80	4.66	105	1.29	130	1.87
6	0.31	31	2.15	56	0.35	81	2.18	106	0.40	131	1.27
7	1.49	32	6.46	57	0.53	82	6.37	107	2.73	132	5.29
8	1.90	33	3.70	58	0.90	83	3.71	108	1.19	133	3.91
9	0.89	34	3.30	59	0.62	84	3.39	109	1.02	134	1.50
10	1.63	35	1.35	60	1.43	85	1.39	110	1.14	135	1.49
11	2.20	36	1.21	61	1.38	86	1.24	111	2.11	136	4.19
12	3.54	37	3.63	62	3.01	87	3.65	112	1.80	137	2.52
13	1.65	38	5.69	63	1.31	88	5.69	113	2.11	138	7.17
14	2.61	39	4.88	64	1.99	89	4.88	114	1.94	139	2.23
15	2.47	40	1.16	65	1.84	90	1.19	115	1.70	140	1.24
16	2.96	41	4.81	66	2.34	91	4.88	116	3.16	141	3.98
17	2.61	42	5.15	67	2.27	92	5.21	117	4.85	142	5.88
18	5.07	43	1.55	68	4.64	93	1.58	118	4.22	143	2.77
19	4.18	44	3.60	69	4.01	94	3.61	119	4.26	144	1.95
20	4.23	45	1.91	70	4.10	95	1.94	120	3.99	145	2.26
21	3.68	46	5.86	71	3.23	96	5.90	121	2.97	146	4.76
22	4.34	47	6.15	72	4.03	97	6.18	122	4.30	147	5.78
23	2.44	48	3.91	73	2.31	98	3.92	123	2.37	148	3.31
24	5.51	49	1.90	74	5.19	99	1.90	124	6.10	149	3.04
25	0.92	50	1.51	75	0.79	100	1.52	125	1.97	150	3.82

Ek Tablo 43: Çap1 - çap2 - kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	3.64	26	2.90	51	10.9	76	3.07	101	8.32	126	3.15
2	2.98	27	3.67	52	7.72	77	3.93	102	4.97	127	1.35
3	2.41	28	1.37	53	2.34	78	1.39	103	7.03	128	4.57
4	1.40	29	3.32	54	1.08	79	3.20	104	3.91	129	3.22
5	1.50	30	3.69	55	2.21	80	3.76	105	2.08	130	1.31
6	0.05	31	1.37	56	0.99	81	1.35	106	0.80	131	1.53
7	1.58	32	5.62	57	0.75	82	5.40	107	2.67	132	3.27
8	0.78	33	1.52	58	0.81	83	1.42	108	0.93	133	1.45
9	0.71	34	2.01	59	0.21	84	2.09	109	0.85	134	0.52
10	1.91	35	0.49	60	1.14	85	0.54	110	0.86	135	1.05
11	3.28	36	0.91	61	1.61	86	0.86	111	2.16	136	5.37
12	3.38	37	3.34	62	3.20	87	3.33	112	1.55	137	2.01
13	1.38	38	4.96	63	1.21	88	4.99	113	1.70	138	6.41
14	1.85	39	5.25	64	0.81	89	5.30	114	0.76	139	3.63
15	2.41	40	1.80	65	1.26	90	1.87	115	1.00	140	2.16
16	2.67	41	4.24	66	2.16	91	4.31	116	2.76	141	3.54
17	1.96	42	5.63	67	1.26	92	5.65	117	4.49	142	5.95
18	5.58	43	1.74	68	4.43	93	1.72	118	3.87	143	5.19
19	3.91	44	5.09	69	3.26	94	5.03	119	3.17	144	1.09
20	2.06	45	1.35	70	1.83	95	1.34	120	1.67	145	1.24
21	3.44	46	5.64	71	2.64	96	5.67	121	2.32	146	4.74
22	0.67	47	6.61	72	0.40	97	6.66	122	1.35	147	5.59
23	1.27	48	4.73	73	1.27	98	4.76	123	1.35	148	4.70
24	5.85	49	5.79	74	5.71	99	5.83	124	6.20	149	6.29
25	0.84	50	4.62	75	0.85	100	4.67	125	2.77	150	4.71

Ek Tablo 44: Çap1 - yükseklik - kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	3.36	26	2.38	51	11.1	76	2.46	101	8.52	126	2.52
2	2.39	27	3.60	52	7.82	77	3.81	102	4.35	127	1.38
3	0.28	28	1.43	53	1.85	78	1.40	103	2.48	128	3.82
4	1.39	29	6.24	54	1.34	79	6.15	104	4.04	129	6.17
5	2.71	30	4.50	55	3.27	80	4.52	105	2.57	130	2.13
6	0.29	31	2.23	56	0.90	81	2.22	106	0.93	131	0.85
7	0.36	32	1.20	57	0.35	82	1.13	107	1.14	132	1.94
8	1.84	33	3.62	58	2.24	83	3.58	108	2.36	133	3.83
9	1.06	34	2.93	59	0.35	84	2.96	109	0.36	134	1.66
10	1.98	35	1.35	60	0.88	85	1.40	110	0.78	135	1.01
11	2.54	36	2.23	61	1.31	86	2.19	111	2.13	136	5.45
12	3.37	37	3.68	62	3.39	87	3.68	112	1.25	137	2.57
13	1.64	38	3.14	63	1.50	88	3.22	113	1.43	138	3.81
14	3.00	39	4.19	64	2.04	89	4.27	114	1.99	139	3.79
15	3.05	40	1.86	65	2.06	90	1.92	115	1.64	140	2.12
16	1.77	41	1.76	66	1.64	91	1.78	116	1.19	141	1.90
17	2.95	42	3.62	67	2.16	92	3.59	117	5.79	142	3.22
18	7.09	43	4.22	68	5.91	93	4.18	118	5.23	143	7.19
19	4.50	44	7.32	69	3.63	94	7.27	119	1.90	144	4.63
20	2.87	45	3.90	70	2.40	95	3.88	120	3.32	145	3.75
21	4.16	46	1.35	71	3.52	96	1.35	121	3.25	146	1.56
22	4.21	47	0.94	72	3.91	97	0.96	122	3.77	147	2.97
23	2.40	48	4.13	73	2.34	98	4.16	123	2.39	148	3.37
24	2.40	49	6.37	74	2.54	99	6.41	124	1.30	149	6.80
25	1.09	50	3.77	75	1.16	100	3.81	125	3.06	150	4.76

Ek Tablo 45: Çap2 - yükseklik - kaçıklık değişkenleri birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	3.02	26	0.20	51	7.58	76	0.12	101	7.62	126	0.12
2	2.52	27	0.41	52	5.12	77	0.41	102	5.14	127	0.41
3	2.70	28	0.70	53	2.63	78	0.59	103	2.63	128	0.59
4	0.17	29	5.31	54	1.18	79	5.05	104	1.19	129	5.04
5	1.28	30	1.38	55	3.34	80	1.26	105	3.36	130	1.26
6	0.28	31	1.65	56	1.15	81	1.55	106	1.16	131	1.55
7	1.05	32	5.94	57	0.75	82	5.82	107	0.75	132	5.82
8	1.42	33	5.23	58	2.15	83	5.11	108	2.15	133	5.11
9	0.90	34	1.32	59	0.66	84	1.30	109	0.67	134	1.30
10	2.10	35	0.88	60	1.01	85	0.89	110	1.01	135	0.89
11	3.17	36	1.80	61	1.63	86	1.78	111	1.63	136	1.78
12	2.71	37	1.66	62	1.85	87	1.71	112	1.84	137	1.71
13	1.35	38	4.13	63	0.81	88	4.21	113	0.81	138	4.21
14	2.15	39	3.83	64	1.60	89	3.93	114	1.59	139	3.93
15	2.37	40	1.86	65	1.65	90	1.93	115	1.64	140	1.93
16	2.96	41	3.86	66	2.46	91	3.89	116	2.46	141	3.89
17	3.02	42	6.63	67	2.43	92	6.63	117	2.43	142	6.63
18	4.44	43	4.17	68	3.87	93	4.15	118	3.87	143	4.15
19	4.65	44	4.46	69	4.27	94	4.44	119	4.27	144	4.44
20	4.22	45	3.93	70	3.93	95	3.91	120	3.93	145	3.91
21	3.02	46	4.73	71	2.55	96	4.74	121	2.55	146	4.74
22	4.26	47	5.68	72	4.10	97	5.71	122	4.10	147	5.71
23	2.02	48	5.23	73	1.87	98	5.28	123	1.87	148	5.28
24	5.92	49	6.27	74	5.77	99	6.32	124	5.77	149	6.32
25	1.17	50	3.44	75	1.15	100	3.48	125	1.15	150	3.48

Ek Tablo 46:Dört değişken birlikte incelendiğinde T^2 değerleri

No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2	No	T^2
1	3.75	26	2.90	51	11.1	76	3.07	101	8.57	126	3.15
2	3.02	27	3.73	52	7.82	77	3.98	102	5.15	127	1.38
3	2.95	28	1.68	53	2.75	78	1.70	103	7.26	128	4.95
4	1.60	29	6.55	54	1.36	79	6.41	104	4.29	129	6.43
5	2.71	30	4.65	55	3.60	80	4.70	105	3.38	130	2.13
6	0.32	31	2.36	56	1.33	81	2.33	106	1.17	131	2.29
7	1.59	32	7.98	57	0.78	82	7.75	107	2.74	132	5.86
8	2.07	33	5.25	58	2.24	83	5.13	108	2.39	133	5.20
9	1.10	34	3.37	59	0.66	84	3.44	109	1.25	134	1.76
10	2.17	35	1.35	60	1.44	85	1.40	110	1.19	135	1.72
11	3.29	36	2.36	61	1.63	86	2.31	111	2.17	136	6.59
12	3.57	37	3.89	62	3.42	87	3.88	112	1.85	137	2.66
13	1.65	38	5.86	63	1.52	88	5.89	113	2.17	138	7.26
14	3.03	39	5.48	64	2.05	89	5.53	114	2.00	139	3.96
15	3.20	40	1.90	65	2.09	90	1.98	115	1.73	140	2.28
16	2.96	41	4.82	66	2.48	91	4.89	116	3.16	141	4.06
17	3.08	42	6.68	67	2.44	92	6.69	117	5.93	142	7.05
18	7.13	43	4.28	68	6.02	93	4.25	118	5.43	143	7.43
19	5.34	44	8.40	69	4.73	94	8.33	119	4.47	144	4.74
20	4.29	45	3.97	70	4.10	95	3.96	120	4.11	145	3.94
21	4.56	46	5.95	71	3.80	96	5.99	121	3.45	146	5.01
22	4.37	47	6.80	72	4.15	97	6.85	122	4.83	147	5.87
23	2.63	48	5.38	73	2.65	98	5.42	123	2.73	148	5.30
24	5.92	49	6.39	74	5.79	99	6.43	124	6.31	149	6.93
25	1.24	50	4.64	75	1.27	100	4.69	125	3.11	150	4.80

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Suphi ÖZÇOMAK, 1972 yılında Mardin’de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Mardin’de tamamladıktan sonra 1991 yılında Harran Üniversitesi Ziraat Fakültesi’ni kazandı. 1995 yılında bu fakülteden mezun oldu. 1996 yılında Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Ana Bilim Dalında yüksek lisans programına başladı. Aynı yılın kasım ayında Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi’nde açılan araştırma görevliliği sınavını kazandı. 1999 yılında, “Nicel ve Nitel CUSUM Kontrol Grafikleri ile Bir Kalite Kontrol Çalışması” adlı tez çalışması ile yüksek lisans programını tamamladı. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Ana Bilim Dalında doktora programına başladı. Halen Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler Bilim dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

