



**HERMİTE-HADAMARD-JENSEN-MERCER
TİPLİ YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

Melek Çağla TATAR

Danışman: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2024

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**HERMİTE-HADAMARD-JENSEN-MERCER TİPLİ YENİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ**

(New Integral Inequalities of the Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Type)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melek Çağla TATAR

Danışman: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Erzurum
Aralık, 2024

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Melek Çağla TATAR tarafından hazırlanan “Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı çalışması 26/12/2024 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Doç. Dr. Yeşim AKBULUT <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır
Danışman:	Prof. Dr. Çetin YILDIZ <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Yeşim AKBULUT <i>Atatürk Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. İbrahim KARAHAN <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	Aslı ıslak imzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmelięi’nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Aslı ıslak imzalıdır

Prof. Dr. Alper NUHOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak *Prof. Dr. Çetin YILDIZ* danışmanlığında sunulan “Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan “Turnitin” Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	7	30
Kuramsal Temeller	16	30
Materyal ve Metot	16	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	7	20
Sonuçlar	1	20
Tezin Geneli	15	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Melek Çağla TATAR	Prof. Dr. Çetin YILDIZ
11.12.2024	11.12.2024
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ' de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez çalışmamda her türlü bilgisi ve desteğiyle danışmanlığımı yürüten, her aşamada yardımını esirgemeyen, beni yüreklendiren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Çetin YILDIZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim sürecinde desteklerini esirgemeyen kıymetli aileme şükranlarımı sunarım.

Yüksek Lisans sürecimde bana her anlamda destek olan ve beni yalnız bırakmayan kıymetli arkadaşım Emrah AVCIOĞLU'na, tezimi imla ve yazım kurallarına uygun inceleyerek gerekli dönütleri sunan değerli arkadaşım Öznur EKMEKÇİ' ye teşekkür ederim.

Melek Çağla TATAR



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ HERMİTE-HADAMARD-JENSEN-MERCER TİPLİ YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Melek Çağla TATAR

Danışman: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Amaç: Çalışmamızda Jensen-Mercer eşitsizliğinden yararlanılarak ve eşitsizlik teorisinde yer alan özellikleri kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Yöntem: Hölder, Hölder-İşcan, Power-Mean, Geliştirilmiş Power-Mean, Young, Jensen-Mercer Eşitsizliği, Üçgen Eşitsizliği teorem ve sonuçları elde etmek için kullanılmıştır.

Bulgular: İki yeni Lemma ve Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılarak yeni teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç: Bu çalışmada, konveks fonksiyonlar için Hölder, Power-Mean, Geliştirilmiş Power-Mean, Hölder-İşcan ve Young Eşitsizliklerini de kullanarak Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizliklerle ilgili hem literatürde var olan sonuçlar hem de yeni sonuçlar bulunmuştur. Bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Jensen-Mercer Eşitsizliği, Hölder Eşitsizliği, Power-Mean Eşitsizliği, Hölder-İşcan Eşitsizliği, Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizliği, Young Eşitsizliği.

Aralık 2024, 62 sayfa

ABSTRACT

MS THESIS

NEW INTEGRAL INEQUALITIES OF THE HERMITE-HADAMARD-JENSEN-MERCER TYPE

Melek Çağla TATAR

Supervisor: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Purpose: In our study, it is aimed to obtain new inequalities by using the Jensen-Mercer inequality and using the features contained in the inequality theory.

Method: Hölder, Hölder-İşcan, Power-Mean, Improved Power-Mean, Young, Jensen-Mercer Inequality, Triangle Inequality were used to obtain theorems and results.

Findings: New theorems and results have been obtained by using two new Lemmas and the Jensen-Mercer inequality.

Results: In this study, new integral inequalities of the Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer type were obtained by using the Hölder, Power-Mean, Improved Power-Mean, Hölder-İşcan and Young Inequalities for convex functions. Both the existing results in the literature and new results have been found about the obtained inequalities. The found results were compared.

Keywords: Jensen-Mercer Inequality, Power-Mean Inequality, Improved Power-Mean Inequality, Hölder Inequality, Hölder-İşcan Inequality, Young Inequality.

December 2024, 62 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ.....	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	4
Pozitif Reel Sayılar İçin Bazı Özel Ortalamalar.....	10
MATERYAL VE YÖNTEM	12
Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler	12
Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Tipli Sonuçlar	15
ARAŞTIRMA BULGULARI	19
Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler.....	19
Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikleri.....	22
SONUÇ VE ÖNERİLER	48
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	52

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Konveks Kümeler.....	4
Şekil 2. Konkav Kümeler	5
Şekil 3. Kapalı bir disk	5
Şekil 4. Bir Düzlem Görüntüsü	5
Şekil 5. Konveks Fonksiyonun Grafiği	6
Şekil 6. $\mathcal{F}(\sigma) = \sigma^2$ Fonksiyonunun Grafiği.....	7
Şekil 7. Konveks Fonksiyon.....	7
Şekil 8. Konkav Fonksiyon	7
Şekil 9. Ne Konveks Ne Konkav Fonksiyon.....	8
Şekil 10. Reel eksen boyunca gama fonksiyonu	9
Şekil 11. Pozitif σ ve ρ değerleri için beta fonksiyonu grafiği	10
Şekil 12. e^u fonksiyonunun grafiği	12
Şekil 13. Örnek 6'nın grafiği.....	25
Şekil 14. Örnek 7'nin grafiği.....	37

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\geq$	Büyük veya eşittir
Σ	Toplam Sembolü
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathcal{I}$	$\mathbb{R}$ 'de bir aralık
$\mathcal{I}^o$	$\mathcal{I}$ aralığının içi
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt küme veya eşit
β	Beta fonksiyonu
$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, y)$	Aritmetik Ortalama
$\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y)$	Geometrik Ortalama
$\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, y)$	Harmonik Ortalama
$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y)$	Logaritmik Ortalama
$L[x, y]$	(x, y) Aralığında integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$\mathfrak{F}'$	$\mathfrak{F}$ fonksiyonunun birinci türevi
$\mathfrak{F}''$	$\mathfrak{F}$ fonksiyonunun ikinci türevi

GİRİŞ

Eşitsizlik, iki değerin büyüklük ve küçüklük bakımından karşılaştırılmasıdır. Matematiksel eşitsizliklerin amacı; değeri net olarak bilinmeyen bazı matematiksel ifadeleri ya da fonksiyonları, daha iyi bildiğimiz ifadeler veya fonksiyonlarla üstten ve alttan sınırlandırmaktır ve bazen de doğrudan sayısal sınırlar belirlemektir. 17. ve 18. yüzyıllarda, eşitsizlikleri belirtmek için kişisel notasyonlar veya daktilo işaretleri kullanıldı. Örneğin, 1670'te John Wallis, < ve > işaretlerinin altında değil tek bir yatay çubuk kullandı. Daha sonra 1734'te 'Daha küçük (daha büyük) eşit üzerine eşit' veya 'Daha küçük (daha büyük) veya eşit çift yatay çubuklu' olarak bilinen $\leq$ ve $\geq$ sembolleri ilk olarak Pierre Bouguer'in çalışmasında ortaya çıkmıştır. Bundan sonra matematikçiler, Bouguer'in sembolünü 'Daha küçük (daha büyük) veya eşit tek yatay çubuklu ($\geq$) veya daha küçük (daha büyük) veya eğimli eşit ($\leq$)' olarak basitleştirdiler.

Matematiğin gelişim sürecini incelediğimizde eşitsizliklerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır ve yapılmaya devam edilmektedir. Bu çalışmaların arasında gösterebileceğimiz en önemli çalışmaların ilki Littlewood, Hardy ve Polya'nın 1952 yılında yazdığı 'Inequalities' adlı kitaptır. İkinci olarak E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961 yılında yazılan 'Inequalities' isimli kitaptır. Üçüncü çalışma olarak gösterebileceğimiz, Mitrinovic'in 1970 yılında 'Analytic Inequalities' adıyla yayınlanan önemli kitabıdır. Bu kitaplarda önemli birçok eşitsizlikten bahsedilmiş ve matematikte eşitsizliğin ilerlemesinde kayda değer bir sonuçlar elde edilmiştir. 2003 yılında ise S.S.Dragomir ve C.E.M.Pearce tarafından yazılan 'Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications' isimli kitapta eşitsizliklerle ilgili bilgiler bir araya toplanmıştır.

Eşitsizliklerin yanı sıra önemli olan bir diğer kavram konvekslik kavramıdır. Konvekslik, matematiğin olasılık teorisi, kompleks analiz, fonksiyonel analiz, kodlama teorisi, cebirsel geometri, kısmi diferansiyel denklemler vb. çeşitli alanlarında önemli bir yer tutar. 1883 yılında Hermite'nin, Mathesis dergisinde yayınladığı çalışmada yer alan bir eşitsizlik konveks fonksiyonlar için belki de bilinen en meşhur eşitsizlik olmuştur. Literatürde ya Hadamard ya da Hermite-Hadamard Eşitsizliği olarak bilinmektedir. Bu eşitsizlik aşağıdaki gibidir:

$$(\vartheta - \eta)\mathfrak{F}\left(\frac{\vartheta + \eta}{2}\right) < \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u)du < (\vartheta - \eta)\frac{\mathfrak{F}(\vartheta) + \mathfrak{F}(\eta)}{2}$$

Hadamard tarafından üretilen bu eşitsizlik bundan 10 yıl sonra yeniden Hadamard tarafından ele alınarak günümüzde Hermite-Hadamard Eşitsizliği olarak tanınan yeni formatına

dönüştürülmüştür. Hermite Hadamard'ın çalışmalarında konveksliğe dair bilgiler yer alsa da konveks fonksiyonların detaylı olarak çalışılması 1905-1906 yılları arasında J.L.W.V. Jensen ile başlamıştır. Johan Jensen'in fonksiyonlar ile ilgili çalışmaların yaygınlaşmasında yaptığı bu öncülüğü ile matematik tarihinde önemli bir yere sahip olmuştur. Konveks fonksiyonların farklı sınıfları üzerinde birçok yeni tanım ve özellikler keşfedilmiştir. 19-20. yüzyıllarda bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline getirilmiştir. Son yıllarda, konvekslik kavramı yeni fikirler kullanılarak çeşitli yönlerde genişletilmiştir (Dragomir and Pearce, 2003; Chen, 2006; Lupşa and Cristescu, 2002).

Konveks fonksiyonlar detaylı bir şekilde 'Convex Functions' adlı kitapta A.W. Roberts ve D.E. Varberg tarafından ele alınmıştır. Bu konu, önemini her zaman koruyarak yeniliğe açık birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Bu nedenle eşitsizlik teorisi matematiğin bütün dallarında önemli bir yere sahip olmuştur ve geniş bir çalışma aralığında çok etkili, sürekli gelişmekte olan bir teori haline gelmiştir. Matematiksel analiz ve uygulamalar farklı bakış açıları üzerinde etkili olmakla birlikte yeni araştırmaları da canlı tutmaktadır. Lyapunov, Opial, Hilbert, Levin, Hadamard, Poincare, Sobolev, Hardy ve Jensen isimleriyle özdeşleşmiş eşitsizlik tipleri arasında derin bağlar kurulmuştur ve matematiğin dalları üzerinde büyük etkileri olmuştur. Son birkaç yıllık süreçte bu eşitsizliklerle ilgili çok önemli uygulamalı çalışma alanlarında sağlam ve etkili sonuçların elde edilmesine şahit olmaktayız. Bu eşitsizlikler üzerine çalışmalar yapan araştırmacıların artması sonucuyla çalışma alanlarının yenilenmesi ve mevcut çalışma alanlarının genişlemesi, teorinin cazibesini de artırmıştır ve zamanla daha da gelişen bu teori geniş bir çalışma alanına yayılmıştır.

Eşitsizlikler içerisinde önemli olan bir diğer eşitsizliğimiz Jensen Eşitsizliğidir. Danimarkalı bilim adamı Johan Jensen karşımıza ilk olarak 'Actuarial Mathematics'in 9. sayfasında çıkmıştır (Panjer, 1986). Jensen Eşitsizliğini matematik camiasıyla buluşturan Jensen, birçok çalışmaya ışık tutmuştur. Jensen Eşitsizliği konveks fonksiyonlar için önemli bir eşitsizliktir. Literatürde bilinen ve yaygın kullandığımız eşitsizliklerin çoğu Jensen Eşitsizliğinden türetilmiştir. Bu durum konvekslik kavramının da ne kadar temel bir kavram olduğunu ifade etmede önemli bir yere sahiptir. Jensen eşitsizliğinin; bilgisayar problemleri, olasılık teorisi, optimizasyon ve bilgi teorisi gibi alanlarda uygulamaları vardır. Jensen eşitsizliğinden türetilen önemli bir matematiksel eşitsizlik olan Jensen-Mercer Eşitsizliği; ekonomi, istatistik, makine, matematik dahil birçok farklı alanda kullanılmıştır. Jensen-Mercer Eşitsizliği ve Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Eşitsizliği olarak Kian ve Moslehian tarafından 2013 yılında literatüre kazandırılmıştır. Daha sonra Pavic tarafından 2019 yılında geliştirilmiştir ve günümüzde kullanılmaktadır. Birçok çalışmaya kaynaklık eden Jensen-

Mercer Eşitsizliği araştırmacıların ilgiyle takip ettiği bir konu olmuştur (Butt *et al.* 2022; Khan and Saadi, 2016; Baric and Matkovic, 2009; Ivelić Bradanović and Lovričević, 2024; Moradi and Furuichi, 2020; Khan and Pečarić, 2020). Bu alanı daha da genişleten çalışmalar Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer ile ilgili yapılan çalışmalardır. Bu çalışmalar bir sonraki araştırmacılara da ışık tutmuştur (Ciurdariu and Grecu, 2024; İşcan, 2021; Faisal *et al.* 2022). Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Eşitsizliği kesirli integrallerle de çok çalışılan bir alandır. Bu alanda önemli çalışmalar ortaya atılmıştır ve bu alanın kapsamını genişletmiştir (Sitthiwiratttham *et al.* 2024; Öğülmüş and Sarıkaya, 2021; Wang *et al.* 2021; Vivas-Cortez *et al.* 2022).

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde; eşitsizliğin tarihi gelişiminden, konvekslik kavramının eşitsizlikler alanındaki öneminden ve kullanım alanlarından, matematik tarihinin ilk anından günümüze kadar bu alanda önemli çalışmalar yapmış bilim insanlarından, Jensen Eşitsizliğinin ve Jensen Eşitsizliğinden türetilen Jensen-Mercer Eşitsizliğinden ve kullanım alanlarından bahsedilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde konveks fonksiyonlarla ilgili literatürde yer alan tanım ve teoremlerden, konveks fonksiyon örneklerinden, konveks fonksiyonun geometrik olarak incelenmesi ve yorumlanmasından, Beta ve Gama fonksiyonlarından ve bunlara ek olarak iki pozitif sayı için bazı ortalamalara ilişkin bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; konveks fonksiyonlar için temel eşitsizliklerden, Jensen Eşitsizliğinden ve Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Eşitsizliği ile ilgili daha önceden elde edilmiş teoremlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde; lemmalar kullanarak Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer tipli konveks fonksiyonlar ile ilgili Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan, Geliştirilmiş Power-Mean ve Young İntegral Eşitsizlikleri kullanarak yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Tezin beşinci bölümünde dördüncü bölümde elde edilen eşitsizlikleri farklı lemma ve tanımlara uygulayabilmek adına okuyucu için önerilere yer verilmiştir.

KURAMSAL TEMELLER

Tanım 1. (Lineer Uzay): $\mathcal{M}$ bir cisim, L boştan farklı bir küme olmak üzere $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: \mathcal{M} \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Eğer L kümesi aşağıda ifade edilen şartları sağlıyorsa L 'ye $\mathcal{M}$ cismi üzerinde bir 'Vektör Uzayı' veya 'Lineer Uzay' denir.

1) L , $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur.

$$R1) \forall \sigma, \rho, \mu \in L \text{ için } \sigma + (\rho + \mu) = (\sigma + \rho) + \mu \text{ dir,}$$

$$R2) \forall \sigma \in L \text{ için } \sigma + \theta = \theta + \sigma = \sigma \text{ olacak şekilde } \theta \in L \text{ vardır,}$$

$$R3) \forall \sigma \in L \text{ için } \sigma + (-\sigma) = (-\sigma) + \sigma = 0 \text{ olacak şekilde } -\sigma \in L \text{ vardır,}$$

$$R4) \forall \sigma, \rho \in L \text{ için } \sigma + \rho = \rho + \sigma \text{ dir.}$$

2) $\sigma, \rho \in L$ ve $a, b \in \mathcal{M}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

$$T1) a.(\sigma + \rho) = a.\sigma + a.\rho' \text{ dir,}$$

$$T2) (a + b).\sigma = a.\sigma + b.\sigma' \text{ dir,}$$

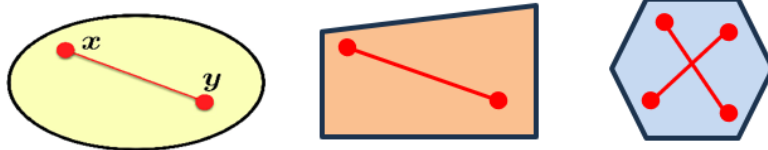
$$T3) (ab).\sigma = a.(b\sigma)' \text{ dir,}$$

$$T4) 1.\sigma = \sigma' \text{ dir (1, } \mathcal{M}' \text{ nın birim elemanıdır).}$$

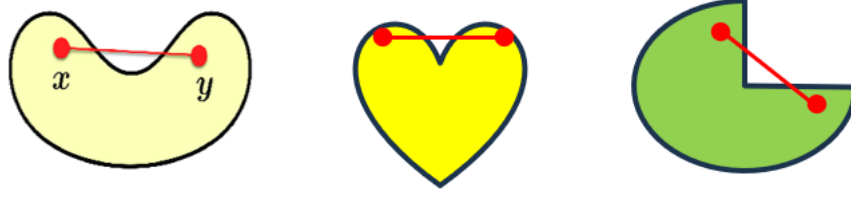
$\mathcal{M} = \mathbb{R}$ ise L 'ye reel vektör uzayı denir (Anton, 1994).

Tanım 2. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $\mathcal{H} \subseteq L$ ve $\sigma, \rho \in \mathcal{H}$ olsun. $\mathcal{B} = \{z \in L: z = \ell\sigma + (1 - \ell)\rho, 0 \leq \ell \leq 1\} \subseteq \mathcal{H}$ şartını sağlıyorsa $\mathcal{H}$ 'ya konveks küme denir. Eğer $z \in \mathcal{B}$ ise $z = \ell\sigma + (1 - \ell)\rho$ eşitliğinde ifade edilen σ ve ρ katsayıları için $\ell + (1 - \ell) = 1$ eşitliği her şartta geçerlidir. Bu nedenle konveks kümenin tanımında ifade edilen $\ell, (1 - \ell)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılar alabiliriz. Geometrik ifade edersek $\mathcal{B}$ kümesi uç noktaları σ ve ρ olan bir doğru parçasıdır. Bu anlayışla boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren kümeye konveks küme denir (Bayraktar, 2000).

Konveks kümeler reel eksen üzerinde bulunan aralıklar örnek verilebilir. Konveks olmayan küme ise konkav küme denir.



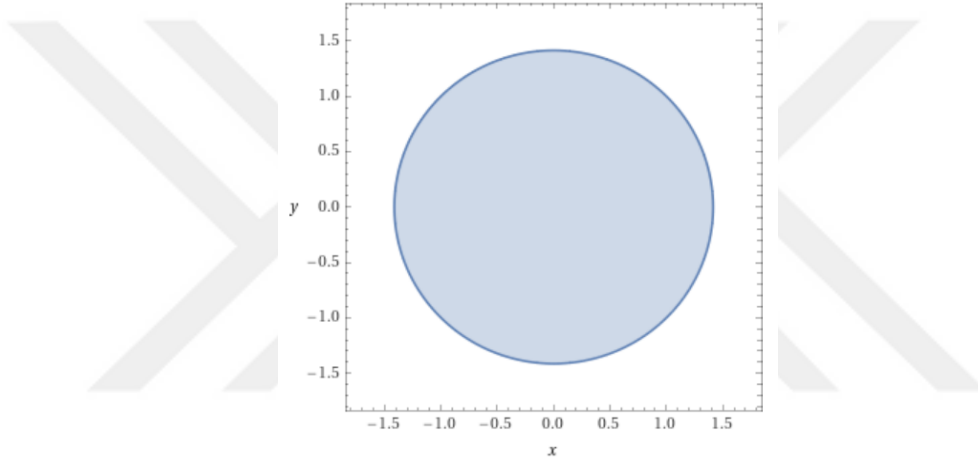
Şekil 1. Konveks Kümeler



Şekil 2. Konkav Kümeler

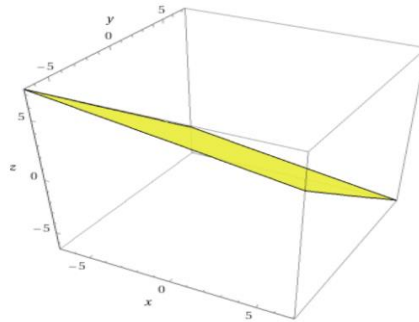
Konveks kümelerle aşağıdaki örnekleri verebiliriz ve görüntülerini inceleyebiliriz. İki elemanı arasındaki doğru parçasının tamamını ihtiva eden kümeler dışbükey (konveks) küme denir.

Örnek 1.: $A = \{(\sigma, \rho): \sigma^2 + \rho^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ bu küme $\mathbb{R}^2$ 'de kapalı bir disk ifade eder.



Şekil 3. Kapalı bir disk

Örnek 2.: $A = \{(\sigma, \rho, \mu): \sigma + 4\rho + 7\mu = 3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ bu küme $\mathbb{R}^3$ 'te bir düzlem denklemdir.



Şekil 4. Bir Düzlem Görüntüsü

Örnek 3.: $\mathcal{D}: \{\sigma: \|\sigma\| \leq 1\}$ kapalı yuvarı konvekstir. ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$)

Çözüm: $\sigma, \rho \in \mathcal{D}$ ve $\ell \in [0,1]$ için $\ell\sigma + (1 - \ell)\rho \in \mathcal{D}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\|\ell\sigma + (1 - \ell)\rho\| &\leq \|\ell\sigma\| + \|(1 - \ell)\rho\| \\
&\leq \ell\|\sigma\| + (1 - \ell)\|\rho\| \\
&\leq \ell \cdot 1 + (1 - \ell) \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

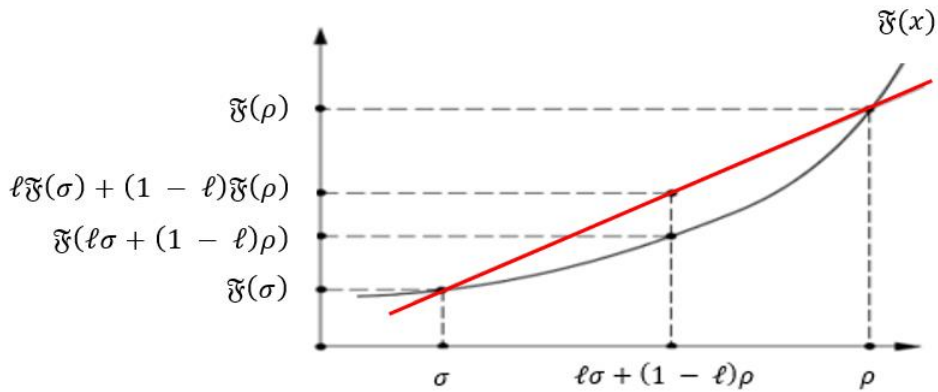
olur. Verilen kapalı yuvar bir konveks bir kümedir.

Tanım 3. (Konveks Fonksiyon): $\mathcal{I}$, $\mathbb{R}'$ 'de bir aralık ve $\mathfrak{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall \sigma, \rho \in \mathcal{I}$ ve $\ell \in [0,1]$ için,

$$\mathfrak{F}(\ell\sigma + (1 - \ell)\rho) \leq \ell\mathfrak{F}(\sigma) + (1 - \ell)\mathfrak{F}(\rho)$$

eşitsizliği geçerlidir (Pečarić et al, 1992).

$\mathcal{I}$ üzerinde tanımlanan bir $\mathfrak{F}$ fonksiyonunun konveksliğini geometrik olarak ifade edersek $\mathcal{I}$ üzerinde bulunan ve $(\sigma, \mathfrak{F}(\sigma))$ ve $(\rho, \mathfrak{F}(\rho))$ noktalarını içeren doğru parçasının $\mathfrak{F}$ fonksiyonunun grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Şekil 5'te konveks fonksiyonun grafiği verilmiştir.



Şekil 5. Konveks Fonksiyonun Grafiği

Örnek 4.: $\mathfrak{F}: \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(\sigma) = \sigma^2$ fonksiyonu $\mathcal{I}$ üzerinde konveks fonksiyondur.

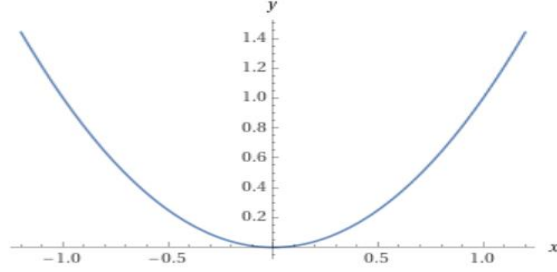
Çözüm: $\sigma^2 + \rho^2 \geq 2\sigma\rho$ özelliğini kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(\ell\sigma + (1 - \ell)\rho) &= (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho)^2 \\
&= \ell^2\sigma^2 + 2\ell(1 - \ell)\sigma\rho + (1 - \ell)^2\rho^2 \\
&\leq \ell^2\sigma^2 + \ell(1 - \ell)(\sigma^2 + \rho^2) + (1 - \ell)^2\rho^2 \\
&= \ell^2\sigma^2 + \ell(1 - \ell)\sigma^2 + \ell(1 - \ell)\rho^2 + (1 - \ell)^2\rho^2 \\
&= \sigma^2(\ell^2 + \ell - \ell^2) + \rho^2(1 - \ell)(\ell + 1 - \ell)
\end{aligned}$$

$$= \ell \sigma^2 + (1 - \ell) \rho^2$$

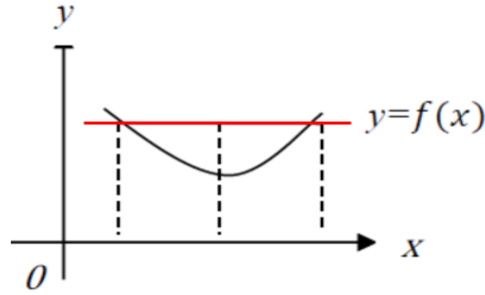
$$= \ell \mathfrak{F}^2(\sigma) + (1 - \ell) \mathfrak{F}^2(\rho)$$

olarak bulunur. Buradan $\mathfrak{F}(\sigma) = \sigma^2$ fonksiyonunun $\mathcal{I}$ kümesi üzerinde konveks bir fonksiyon olduğu görülür. Aşağıda bu fonksiyonun grafiği de verilmiştir.

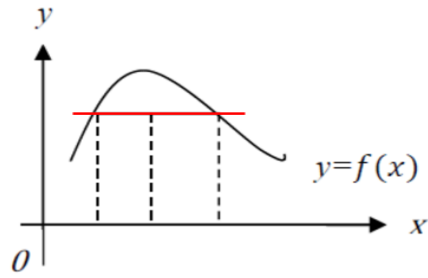


Şekil 6. $\mathfrak{F}(\sigma) = \sigma^2$ Fonksiyonunun Grafiği

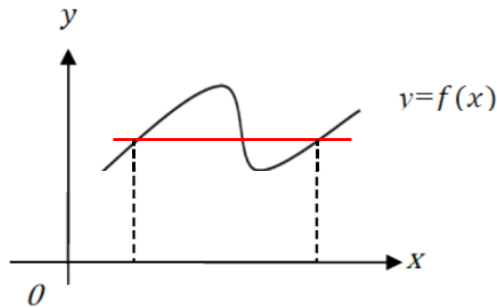
Konveks fonksiyon tanımında eşitsizliğin yönü " $\geq$ " olması durumunda ise $\mathfrak{F}$ fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.



Şekil 7. Konveks Fonksiyon



Şekil 8. Konkav Fonksiyon



Şekil 9. Ne Konveks Ne Konkav Fonksiyon

Tanım 4.: Eğer $\mathfrak{F}$ fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise $\mathfrak{F}'$ 'ye afindir (lineerdir) denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 1. $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ için bir $\mathfrak{F}$ fonksiyonunun $\mathcal{I}$ kümesinde konveks bir fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\sigma, \rho \in \mathcal{I}$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$\mathfrak{F}\left(\frac{p\sigma + q\rho}{p + q}\right) \leq \frac{p\mathfrak{F}(\sigma) + q\mathfrak{F}(\rho)}{p + q}$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Teorem 1. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi bir σ, ρ reel sayıları için,

$$|\sigma + \rho| \leq |\sigma| + |\rho|,$$

$$||\sigma| - |\rho|| \leq |\sigma - \rho|,$$

$$||\sigma| - |\rho|| \leq |\sigma + \rho|,$$

ve tümevarım metodu yoluyla,

$$|\sigma_1 + \dots + \sigma_n| \leq |\sigma_1| + \dots + |\sigma_n|$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic *et al*, 1993).

Teorem 2. (İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği): $\mathfrak{F}, [\eta, \vartheta]$ aralığında reel değerli ve sürekli bir fonksiyon için,

$$\left| \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(\sigma) d\sigma \right| \leq \int_{\eta}^{\vartheta} |\mathfrak{F}(\sigma)| d\sigma \quad (\eta < \vartheta)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic *et al*, 1993).

Tanım 5. (J-Konveks Fonksiyon): $\mathcal{I}, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık olsun. Her $\sigma, \rho \in \mathcal{I}$ için,

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \leq \frac{\mathfrak{F}(\sigma) + \mathfrak{F}(\rho)}{2}$$

şartını sağlıyorsa $\mathfrak{F}$ fonksiyonuna $\mathcal{I}$ üzerinde J -konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970).

Tanım 6. (Kesin J-Konveks Fonksiyon): Her $\sigma, \rho \in \mathcal{I}$ ve $\sigma \neq \rho$ için,

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) < \frac{\mathfrak{F}(\sigma) + \mathfrak{F}(\rho)}{2}$$

şartını sağlayan $\mathfrak{F}$ fonksiyonuna $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde kesin J -konveks fonksiyon denir (Mitrinović, 1970).

Sonuç 2.: Her konveks fonksiyon aynı zamanda J -konveks fonksiyondur. (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.: $\mathfrak{F}$ fonksiyonu $[\sigma, \rho]$ aralığında konveks ise,

- i. $\mathfrak{F}$, $[\sigma, \rho]$ aralığında süreklidir.
- ii. $\mathfrak{F}$, $[\sigma, \rho]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Tanım 7. (Gama Fonksiyonu): $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Gama fonksiyonu,

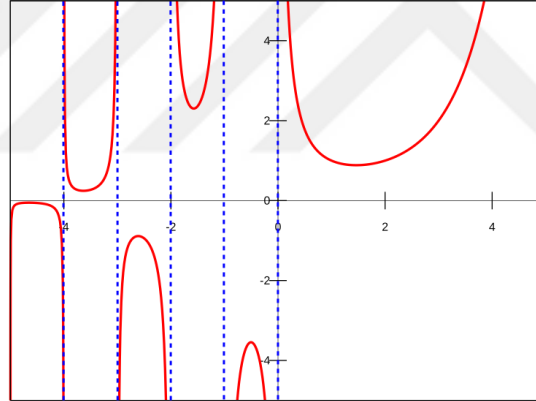
$$\Gamma(\sigma) = \int_0^1 \ell^{\sigma-1} e^{-\ell} d\ell$$

biçiminde tanımlanır (Dragomir *et al.* 2000).

Gama fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$w \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

- i. $\Gamma(w) = (w - 1)!$
- ii. $\Gamma(1) = 1$
- iii. $\Gamma(w + 1) = w\Gamma(w)$.



Şekil 10. Reel eksen boyunca gama fonksiyonu

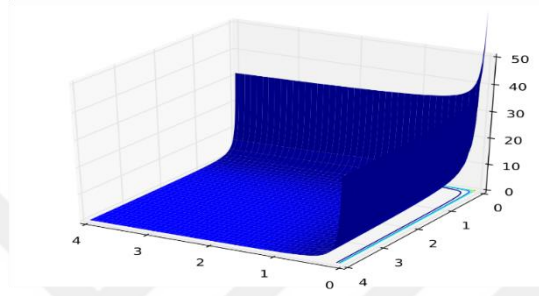
Tanım 8. (Beta Fonksiyonu): Beta fonksiyonu

$$\beta(\sigma, \rho) = \int_0^1 \ell^{\sigma-1} (1 - \ell)^{\rho-1} d\ell, \quad \sigma, \rho > 0$$

şeklinde tanımlanır ve Euler tipi Beta fonksiyonu olarak adlandırılır. Aynı zamanda, birinci tür Euler integrali olarak da bilinir. Bu tür integraller, genellikle belirli bir parametre aralığında, özellikle de $[0,1]$ aralığında, karmaşık fonksiyonların integral hesaplamalarında kullanılır. Euler'in bu integrali, özellikle Gama fonksiyonu ile olan bağlantısı nedeniyle, pek çok matematiksel ve uygulamalı alanda kullanışlıdır.

Beta fonksiyonu her $\sigma, \rho > 0$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $\beta(\sigma, \rho) = \beta(\rho, \sigma)$
- ii. $\beta(\sigma, \rho + 1) = \frac{\rho}{\sigma + \rho} \beta(\sigma, \rho)$
- iii. $\beta(\sigma, \rho) = \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\sigma + \rho)}$
- iv. $\beta(\sigma) = \frac{\Gamma(\sigma)^2}{\Gamma(2\sigma)}$



Şekil 11. Pozitif σ ve ρ değerleri için beta fonksiyonu grafiği

Pozitif Reel Sayılar İçin Bazı Özel Ortalamalar

$\sigma, \rho \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

Aritmetik Ortalama:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\sigma, \rho) = \frac{\sigma + \rho}{2},$$

Geometrik Ortalama:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\sigma, \rho) = \sqrt{\sigma\rho},$$

Harmonik Ortalama:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\sigma, \rho) = \frac{2\sigma\rho}{\sigma + \rho},$$

Logaritmik Ortalama:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\sigma, \rho) = \begin{cases} \sigma, & \sigma = \rho \\ \frac{\rho - \sigma}{\ln \rho - \ln \sigma}, & \sigma \neq \rho \end{cases},$$

p –Logaritmik Ortalama:

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\sigma, \rho) = \begin{cases} \sigma, & \sigma = \rho \\ \left[\frac{\rho^{p+1} - \sigma^{p+1}}{(p+1)(\rho - \sigma)} \right]^{\frac{1}{p}}, & \sigma \neq \rho \end{cases}$$

İdentrik Ortalama:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\sigma, \rho) = \begin{cases} \sigma, & \sigma = \rho \\ \frac{1}{e} \left(\frac{\rho^\rho}{\sigma^\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho - \sigma}}, & \sigma \neq \rho \end{cases}$$

Bu özel ortalamalar arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{I} \leq \mathcal{A}.$$



MATERYAL VE YÖNTEM

Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler

Teorem 4. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $\mathcal{I}, \mathbb{R}$ 'de bir aralık, $\eta, \vartheta \in \mathcal{I}$ ve $\eta < \vartheta$ olmak üzere $\mathfrak{F}: \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise,

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\eta + \vartheta}{2}\right) \leq \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \leq \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Pecaric *et al.* 1992).

Örnek 5.: $\mathfrak{F}(u) = \exp(u) = e^u$ olsun. Bu takdirde,

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\eta + \vartheta}{2}\right) \leq \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \leq \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2}$$

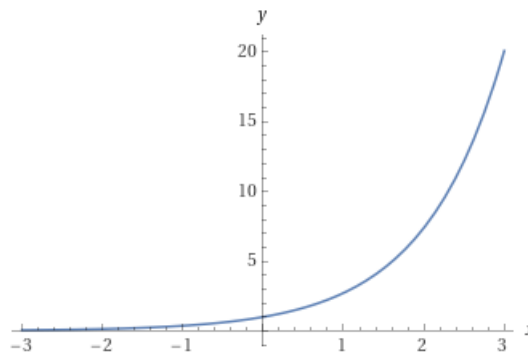
$$e^{\frac{\eta + \vartheta}{2}} \leq \frac{1}{\vartheta - \eta} (e^{\vartheta} - e^{\eta}) \leq \frac{e^{\eta} + e^{\vartheta}}{2}$$

yazılır. Burada da $\sigma = e^{\vartheta}$ ve $\rho = e^{\eta}$ dersek aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\sqrt{\sigma\rho} \leq \frac{\sigma - \rho}{\log \sigma - \log \rho} \leq \frac{\sigma + \rho}{2}, (\sigma \neq \rho \text{ ve } \sigma, \rho \in [0, \infty))$$

$$\mathcal{G} \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{A}$$

olur.



Şekil 12. e^u fonksiyonunun grafiği

Teorem 5. (Fejer Eşitsizliği): $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$, konveks fonksiyon $g: [\eta, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$

integrallenebilir, negatif olmayan ve $\frac{\eta + \vartheta}{2}$ ye göre simetrik bir fonksiyon ise,

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\eta + \vartheta}{2}\right) \int_{\eta}^{\vartheta} g(u) du \leq \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) g(u) du \leq \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} \int_{\eta}^{\vartheta} g(u) du$$

eşitsizliği geçerlidir (Fejer, 1906).

Eğer $g(u) = 1$ seçilirse Fejer Eşitsizliği Hermite-Hadamard Eşitsizliğine indirgenmiş olur.

Teorem 6. (Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $\mathfrak{F}$ ve g fonksiyonları $[\eta, \vartheta]$ aralığında tanımlı integrallenebilen iki fonksiyon ve $|\mathfrak{F}(u)|^p, |g(u)|^q$ $[\eta, \vartheta]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_{\eta}^{\vartheta} |\mathfrak{F}(u)g(u)| du \leq \left(\int_{\eta}^{\vartheta} |\mathfrak{F}(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\eta}^{\vartheta} |g(u)|^q du \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic *et al.* 1993).

Teorem 7. (Hölder-İşcan Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $\mathfrak{F}$ ve g fonksiyonları $[\eta, \vartheta]$ aralığında tanımlı integrallenebilen iki fonksiyon ve $|\mathfrak{F}(u)|^p, |g(u)|^q$ $[\eta, \vartheta]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\vartheta} |\mathfrak{F}(u)g(u)| du &\leq \frac{1}{\vartheta - \eta} \left\{ \left(\int_{\eta}^{\vartheta} (\vartheta - u) |\mathfrak{F}(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\eta}^{\vartheta} (\vartheta - u) |g(u)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\eta}^{\vartheta} (u - \eta) |\mathfrak{F}(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\eta}^{\vartheta} (u - \eta) |g(u)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (İşcan, 2019).

Teorem 8. (Power-Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. $\mathfrak{F}$ ve g fonksiyonları $[\eta, \vartheta]$ aralığında tanımlı iki fonksiyon olsun. $|\mathfrak{F}(u)|$ ve $|g(u)|^q$ fonksiyonları $[\eta, \vartheta]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_{\eta}^{\vartheta} |\mathfrak{F}(u)g(u)| du \leq \left(\int_{\eta}^{\vartheta} |\mathfrak{F}(u)| du \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_{\eta}^{\vartheta} |\mathfrak{F}(u)| |g(u)|^q du \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Sonuç 3. Hölder Eşitsizliğinin bir sonucu olan Power-Mean Eşitsizliği kullanılarak daha iyi üst sınırlar bulunmaktadır.

Teorem 9. (Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. $\mathfrak{F}$ ve g fonksiyonları $[\eta, \vartheta]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olmak üzere $|\mathfrak{F}(u)|$ ve $|\mathfrak{F}(u)||g(u)|^q$ fonksiyonları $[\eta, \vartheta]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_{\eta}^{\vartheta} |\mathfrak{F}(u)g(u)| du \leq \frac{1}{\vartheta - \eta} \left\{ \left(\int_{\eta}^{\vartheta} (\vartheta - u) |\mathfrak{F}(u)| du \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\eta}^{\vartheta} (\vartheta - u) |\mathfrak{F}(u)||g(u)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_{\eta}^{\vartheta} (u - \eta) |\mathfrak{F}(u)| du \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\eta}^{\vartheta} (u - \eta) |\mathfrak{F}(u)||g(u)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Kadalkal *et al.* 2019).

Teorem 10. (Young Eşitsizliği): σ, ρ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$\sigma\rho \leq \frac{1}{p}\sigma^p + \frac{1}{q}\rho^q$$

eşitsizliği geçerlidir (Niculescu ve Persson 2006).

Teorem 11. (Jensen Eşitsizliği): $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $\sigma_i \in [\eta, \vartheta]$, $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. Bu durumda $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ve $\alpha_i > 0$ ise

$$\mathfrak{F}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathfrak{F}(\sigma_i)$$

eşitsizliği geçerlidir (Jensen, 1905).

Teorem 12. (Jensen Eşitsizliği): $\mathfrak{F}: \mathcal{I} = [\eta, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $h: \mathcal{I} \rightarrow (0, \infty)$ ve $s: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\int_{\eta}^{\vartheta} h(u)s(u)du}{\int_{\eta}^{\vartheta} h(u)du}\right) \leq \frac{\int_{\eta}^{\vartheta} h(u)\mathfrak{F}(s(u))du}{\int_{\eta}^{\vartheta} h(u)du}$$

eşitsizliği geçerlidir (Kufner *et al.* 1977).

Teorem 13. (Jensen Eşitsizliğinin İntegral Formu): $\mathfrak{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun, $\Phi: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan reel değerli integrallenebilir bir fonksiyon ise,

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \Phi(u) du\right) \leq \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(\Phi(u)) du$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic *et al.* 1993)

Teorem 14. (Jensen-Mercer Eşitsizliği): $\mathfrak{F}: [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun.

Bu durumda $\lambda_i \in [\sigma, \rho]$, $\eta_i \in [0,1]$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) ve $\sum_{i=1}^n \eta_i = 1$ için,

$$\mathfrak{F}\left(\sigma + \rho - \sum_{i=1}^n \eta_i \lambda_i\right) \leq \mathfrak{F}(\sigma) + \mathfrak{F}(\rho) - \sum_{i=1}^n \eta_i \mathfrak{F}(\lambda_i)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mercer, 2003).

Pavic, 2019 yılında Jensen-Mercer eşitsizliğinin genelleştirilmiş halini Teorem 15'te sunmuştur.

Teorem 15. $\mathfrak{F}: [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\lambda_i \in [\sigma, \rho]$ ve $\alpha, \beta, \eta_i \in [0,1]$, $\gamma \in [-1,1]$ olmak üzere $\alpha + \beta + \gamma = \sum_{i=1}^n \eta_i = 1$ için,

$$\mathfrak{F}\left(\alpha\sigma + \beta\rho + \gamma \sum_{i=1}^n \eta_i \lambda_i\right) \leq \alpha\mathfrak{F}(\sigma) + \beta\mathfrak{F}(\rho) + \gamma \sum_{i=1}^n \eta_i \mathfrak{F}(\lambda_i)$$

eşitsizliği geçerlidir (Pavic, 2019).

Sonuç 4.: Teorem 15'te $\alpha = \beta = 1$ ve $\gamma = -1$ alınırsa, eşitsizlik Jensen Mercer eşitsizliğine (Teorem 14'e) dönüşür.

Sonuç 5.: Teorem 15'te $\alpha = \beta = 0$ ve $\gamma = 1$ alınırsa, eşitsizlik bilinen Jensen Eşitsizliğine (Teorem 11'e) dönüşür.

Teorem 16. (Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Eşitsizliği): $\mathfrak{F}, [\eta, \vartheta]$ aralığında bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ için,

$$\mathfrak{F}\left(\eta + \vartheta - \frac{\sigma + \rho}{2}\right) \leq \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - u) du \leq \mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta) - \mathfrak{F}\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Kian and Moslehian, 2013).

Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Tipli Sonuçlar

Lemma 1: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ üç kez diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $\sigma < \rho$ için;

$$\frac{6}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du - 4\mathfrak{F}\left(\eta + \vartheta - \frac{\sigma + \rho}{2}\right) - (\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\rho - \sigma)^3}{16} \int_0^1 \ell^2 (1 - \ell) \\
&\quad \times \left[\mathfrak{F}''' \left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\ell}{2} \sigma + \frac{2 - \ell}{2} \rho \right) \right) - \mathfrak{F}''' \left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\ell}{2} \rho + \frac{2 - \ell}{2} \sigma \right) \right) \right] d\ell
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Ciurdariu and Grecu, 2024).

Sonuç 6.: Lemma 1’de $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du - 4\mathfrak{F}\left(\frac{\eta + \vartheta}{2}\right) - [\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)] \\
&= \frac{(\vartheta - \eta)^3}{16} \int_0^1 \ell^2 (1 - \ell) \left[\mathfrak{F}''' \left(\left(1 - \frac{\ell}{2}\right) \eta + \frac{\ell}{2} \vartheta \right) - \mathfrak{F}''' \left(\left(1 - \frac{\ell}{2}\right) \vartheta + \frac{\ell}{2} \eta \right) \right] d\ell
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 17.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ üç kez diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$, $\sigma < \rho$ için ve $|\mathfrak{F}'''|$ konveks fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{6}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du - 4\mathfrak{F}\left(\eta + \vartheta - \frac{\sigma + \rho}{2}\right) - (\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)) \right| \\
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^3}{96} \left[\mathfrak{F}'''(\eta) + \mathfrak{F}'''(\vartheta) - \frac{1}{2} (|\mathfrak{F}'''(\rho)| + |\mathfrak{F}'''(\sigma)|) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ciurdariu and Grecu, 2024).

Sonuç 7.: Teorem 17’de $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{6}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du - 4\mathfrak{F}\left(\frac{\eta + \vartheta}{2}\right) - [\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)] \right| \leq \frac{(\vartheta - \eta)^3}{192} [|\mathfrak{F}'''(\eta)| + |\mathfrak{F}'''(\vartheta)|].$$

Teorem 18.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ üç kez diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$, $\sigma < \rho$, $|\mathfrak{F}'''|^q$ konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{6}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du - 4\mathfrak{F}\left(\eta + \vartheta - \frac{\sigma + \rho}{2}\right) - (\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)) \right| \\
&\leq \frac{(\rho - \sigma)^3}{192} \left\{ \left(|\mathfrak{F}'''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'''(\vartheta)|^q - \frac{1}{10} (3|\mathfrak{F}'''(\rho)|^q + 7|\mathfrak{F}'''(\sigma)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(|\mathfrak{F}'''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'''(\vartheta)|^q - \frac{1}{10} (3|\mathfrak{F}'''(\sigma)|^q + 7|\mathfrak{F}'''(\rho)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ciurdariu and Grecu, 2024).

Teorem 19.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ üç kez diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$, $\sigma < \rho$, $|\mathfrak{F}'''|^q$ konveks fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{6}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du - 4\mathfrak{F}\left(\eta + \vartheta - \frac{\sigma + \rho}{2}\right) - (\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)) \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^3}{192} \beta^{\frac{1}{p}} (2p + 1, p + 1) \\ & \quad \times \left\{ \left[|\mathfrak{F}'''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'''(\vartheta)|^q - \frac{1}{4} (|\mathfrak{F}'''(\rho)|^q + 3|\mathfrak{F}'''(\sigma)|^q) \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left[|\mathfrak{F}'''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'''(\vartheta)|^q - \frac{1}{4} (|\mathfrak{F}'''(\sigma)|^q + 3|\mathfrak{F}'''(\rho)|^q) \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ciurdariu and Grecu, 2024).

Lemma 2.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $\sigma < \rho$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du - \mathfrak{F}\left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right)\right) \\ & = \frac{(\rho - \sigma)^2}{16} \left\{ \int_0^1 \ell^2 \left[\mathfrak{F}''\left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\ell}{2}\rho + \frac{2 - \ell}{2}\sigma\right)\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \mathfrak{F}''\left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\ell}{2}\sigma + \frac{2 - \ell}{2}\rho\right)\right) \right] d\ell \right\} \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Ali et al. 2024).

Sonuç 8.: Lemma 2’de $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ olarak alınırsa 2015 yılında Sarıkaya ve Kiriş’in çalışmasında yer alan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du - \mathfrak{F}\left(\frac{\eta + \vartheta}{2}\right) \\ & = \frac{(\vartheta - \eta)^2}{16} \left[\int_0^1 \ell^2 \left[\mathfrak{F}''\left(\frac{\ell}{2}\eta + \frac{2 - \ell}{2}\vartheta\right) + \mathfrak{F}''\left(\frac{\ell}{2}\vartheta + \frac{2 - \ell}{2}\eta\right) \right] d\ell \right]. \end{aligned}$$

Teorem 20.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $\sigma < \rho$, $|\mathfrak{F}''|$ konveks fonksiyon için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du - \mathfrak{F} \left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right) \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{16} \left[\frac{2}{3} (|\mathfrak{F}''(\eta)| + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|) - \frac{1}{3} (|\mathfrak{F}''(\sigma)| + |\mathfrak{F}''(\rho)|) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ali *et al.* 2024).

Sonuç 9.: $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ alınırsa,

$$\left| \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du - \mathfrak{F} \left(\frac{\eta + \vartheta}{2} \right) \right| \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{48} [|\mathfrak{F}''(\eta)| + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|]$$

elde edilir. Bu sonuç Sarıkaya ve Kiriş'in, Teorem 3'te $s = 1$ alındığı bir sonucuna indirgenir (Sarıkaya and Kiriş, 2015).

Teorem 21.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $\sigma < \rho$, $|\mathfrak{F}''|^q$ konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du - \mathfrak{F} \left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right) \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{16} \left(\frac{1}{3} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left\{ \left(\frac{1}{3} (|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q) - \frac{1}{8} (|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + \frac{5}{3} |\mathfrak{F}''(\rho)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{3} (|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q) - \frac{1}{8} (|\mathfrak{F}''(\rho)|^q + \frac{5}{3} |\mathfrak{F}''(\sigma)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ali *et al.* 2024).

Teorem 22.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$, $\sigma < \rho$, $|\mathfrak{F}''|^q$ konveks fonksiyon ve $q > 1$ için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du - \mathfrak{F} \left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\sigma + \rho}{2} \right) \right) \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{16(2^{p+1})} \left\{ \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q + 3|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{4} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + 3|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{4} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ali *et al.* 2024).

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümün ilk kısmında Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Tipli Eşitsizlikler oluşturulmuştur. İkinci kısmında ise lemmalardan faydalanarak Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu eşitsizlikleri elde etmek için Jensen Mercer Eşitsizliğinin tanımı, Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan, Geliştirilmiş Power-Mean ve Young İntegral Eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Teorem 23.: $\mathfrak{F}: [\sigma, \rho] \subseteq \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ üzerinde bir konveks fonksiyon ve $2\vartheta \geq \eta \geq \frac{\vartheta}{2} > 0$ için,

$$\begin{aligned} \left| \mathfrak{F}\left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta}\right) \right| &\leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] \mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho) d\ell \leq \frac{\eta\mathfrak{F}(\sigma) + \vartheta\mathfrak{F}(\rho)}{\eta + \vartheta} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Xiao *et al.* 2011).

Teorem 24.: $\mathfrak{F}: \mathcal{I} \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir dönüşüm ve $\mathfrak{F} \in L[\sigma, \rho]$ olmak üzere, $\sigma, \rho \in \mathcal{I}$ ve $\sigma < \rho$, $\ell \in [0, 1]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{F}|^q$, $[\sigma, \rho]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $2\vartheta \geq \eta \geq \frac{\vartheta}{2} > 0$ ise,

$$\begin{aligned} \left| \mathfrak{F}\left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta}\right) \right| &\leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)| d\ell \\ &\leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \left(\frac{(2\vartheta - \eta)^{p+1} - (2\eta - \vartheta)^{p+1}}{3(\vartheta - \eta)(p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Tatar *et al.* 2023).

İspat: Teorem 23 ve Üçgen Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left| \mathfrak{F}\left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta}\right) \right| &\leq \left| \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] \mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho) d\ell \right| \\ &\leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 |2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell| |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)| d\ell \\ &= \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)| d\ell \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Hölder Eşitsizliği ve konveksliğin tanımından,

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{F} \left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta} \right) \right| \\
& \leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)| d\ell \\
& \leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \left(\int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell]^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \left(\int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell]^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 [(1 - \ell)|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + \ell|\mathfrak{F}(\rho)|^q] d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{2}{\eta + \vartheta} \left(\frac{(2\vartheta - \eta)^{p+1} - (2\eta - \vartheta)^{p+1}}{3(\vartheta - \eta)(p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell]^p d\ell = \frac{(2\vartheta - \eta)^{p+1} - (2\eta - \vartheta)^{p+1}}{3(\vartheta - \eta)(p + 1)}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 25.: $\mathfrak{F}: \mathcal{I} \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir dönüşüm ve $\mathfrak{F} \in L[\sigma, \rho]$ olmak üzere, $\sigma, \rho \in \mathcal{I}$ ve $\sigma < \rho$, $\ell \in [0, 1]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{F}|^q$, $[\sigma, \rho]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ve $q \geq 1$, $2\vartheta \geq \eta \geq \frac{\vartheta}{2} > 0$ ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \mathfrak{F} \left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta} \right) \right| \\
& \leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)| d\ell \\
& \leq \left(\frac{2}{\eta + \vartheta} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{\eta|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + \vartheta|\mathfrak{F}(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Tatar et al. 2023).

İspat: Teorem 23'den ve Power-Mean Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\left| \mathfrak{F} \left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta} \right) \right| & \leq \left| \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] \mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho) d\ell \right| \\
& \leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)| d\ell
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \left(\int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] d\ell \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left(\int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] |\mathfrak{F}((1-\ell)\sigma + \ell\rho)|^q d\ell \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Burada $|\mathfrak{F}|^q$ konveks olduğundan,

$$\left| \mathfrak{F} \left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta} \right) \right| \\ \leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \left(\int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] d\ell \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left(\int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] [(1-\ell)|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + \ell|\mathfrak{F}(\rho)|^q] d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\ = \left(\frac{2}{\eta + \vartheta} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{\eta|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + \vartheta|\mathfrak{F}(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Burada,

$$\int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] [(1-\ell)|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + \ell|\mathfrak{F}(\rho)|^q] d\ell = \frac{\eta|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + \vartheta|\mathfrak{F}(\rho)|^q}{2}$$

ve

$$\int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] d\ell = \frac{\eta + \vartheta}{2}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 26.: $\mathfrak{F}: \mathcal{I} \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir dönüşüm ve $\mathfrak{F} \in L[\sigma, \rho]$ olmak üzere, $\sigma, \rho \in \mathcal{I}$ ve $\sigma < \rho$, $\ell \in [0, 1]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{F}|^q$, $[\sigma, \rho]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $2\vartheta \geq \eta \geq \frac{\vartheta}{2} > 0$ ise,

$$\left| \mathfrak{F} \left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta} \right) \right| \\ \leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] |\mathfrak{F}((1-\ell)\sigma + \ell\rho)| d\ell \\ \leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \left[\frac{(2\vartheta - \eta)^{p+1} - (2\eta - \vartheta)^{p+1}}{p(p+1)3(\vartheta - \eta)} + \frac{1}{q} \left(\frac{|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}(\rho)|^q}{2} \right) \right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Tatar *et al.* 2023).

İspat: Teorem 23 ve Young Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\left| \mathfrak{F}\left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta}\right) \right| &\leq \left| \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] \mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho) d\ell \right| \\
&\leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell] |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)| d\ell \\
&\leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell]^p d\ell + \frac{1}{q} \int_0^1 |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)|^q d\ell \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|\mathfrak{F}|^q$ konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
\left| \mathfrak{F}\left(\frac{\eta\sigma + \vartheta\rho}{\eta + \vartheta}\right) \right| &\leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell]^p d\ell + \frac{1}{q} \int_0^1 |\mathfrak{F}((1 - \ell)\sigma + \ell\rho)|^q d\ell \right] \\
&\leq \frac{2}{\eta + \vartheta} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 [2\eta - \vartheta + 3(\vartheta - \eta)\ell]^p d\ell + \frac{1}{q} \int_0^1 [(1 - \ell)|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + \ell|\mathfrak{F}(\rho)|^q] d\ell \right] \\
&= \frac{2}{\eta + \vartheta} \left[\frac{(2\vartheta - \eta)^{p+1} - (2\eta - \vartheta)^{p+1}}{p(p+1)3(\vartheta - \eta)} + \frac{1}{q} \left(\frac{|\mathfrak{F}(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}(\rho)|^q}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Tipli Yeni İntegral Eşitsizlikleri

Lemma 3.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $\ell \in [0, 1]$ olsun. Eğer $\mathfrak{F}' \in L[\eta, \vartheta]$ ise,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \\
= \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 (2\ell - 1) \mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho)) d\ell
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Öğülmüş and Sarıkaya, 2021).

İspat: Bu eşitliği ispatlamak için önce eşitliğin sağ tarafına kısmi integrasyon metodu uygulanır ve $\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho) = u$ dönüşümü yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (2\ell - 1) \mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho)) d\ell \\
&= \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{\rho - \sigma} - \frac{2}{\rho - \sigma} \int_0^1 \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho)) d\ell \\
&= \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{\rho - \sigma} - \frac{2}{(\rho - \sigma)^2} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du
\end{aligned}$$

olur. Her iki taraf $\frac{\rho - \sigma}{2}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \\
&= \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 (2\ell - 1) \mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho)) d\ell
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 10. Lemma 3'te $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ alınırsa 1998 yılında Dragomir ve Agarwal'ın çalışmasında yer alan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du = \frac{\vartheta - \eta}{2} \int_0^1 (2\ell - 1) \mathfrak{F}'((1 - \ell)\eta + \ell\vartheta) d\ell.$$

Teorem 27.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$, $\ell \in [0, 1]$ ve $\mathfrak{F}' \in L[\eta, \vartheta]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{F}'|$, $[\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)| + |\mathfrak{F}'(\vartheta)| - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)| + |\mathfrak{F}'(\rho)|}{2} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 3 ve Jensen-Mercer Eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 |2\ell - 1| |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))| d\ell \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 |2\ell - 1| (|\mathfrak{F}'(\eta)| + |\mathfrak{F}'(\vartheta)| - \ell|\mathfrak{F}'(\sigma)| - (1 - \ell)|\mathfrak{F}'(\rho)|) d\ell \\
& = \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2\ell) (|\mathfrak{F}'(\eta)| + |\mathfrak{F}'(\vartheta)| - \ell|\mathfrak{F}'(\sigma)| - (1 - \ell)|\mathfrak{F}'(\rho)|) d\ell \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2\ell - 1) (|\mathfrak{F}'(\eta)| + |\mathfrak{F}'(\vartheta)| - \ell|\mathfrak{F}'(\sigma)| - (1 - \ell)|\mathfrak{F}'(\rho)|) d\ell \right\} \\
& = \frac{\rho - \sigma}{4} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)| + |\mathfrak{F}'(\vartheta)| - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)| + |\mathfrak{F}'(\rho)|}{2} \right)
\end{aligned}$$

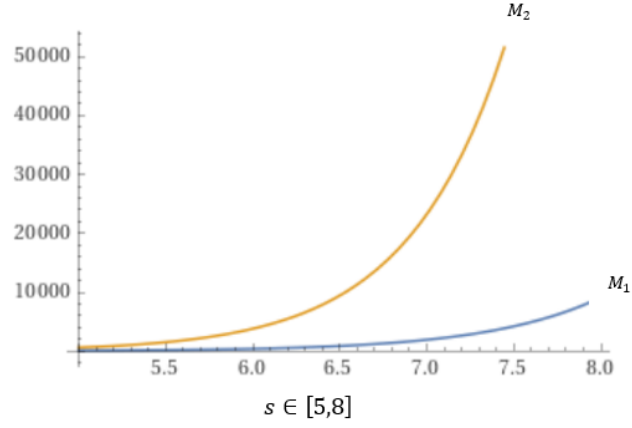
elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 11.: Teorem 27’de $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ alınırsa 1998 yılında Dragomir ve Agarwal’ın çalışmasında yer alan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| \leq \frac{\vartheta - \eta}{8} (|\mathfrak{F}'(\eta)| + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|).$$

Örnek 6.: Teorem 27’nin şartları düşünüldüğünde, $h: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(\ell) = \ell^s$, $\eta = 2, \vartheta = 5$, $\sigma = 3$, $\rho = 4$ ve $s \in [5, 8]$ için $|h'(\ell)| = s(\ell)^{s-1}$ $[\eta, \vartheta]$ üzerinde bir konveks fonksiyon için eşitsizliğin sol ve sağ taraflarını hesaplayarak sırasıyla aşağıdaki eşitlikleri elde ediyoruz,

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left| \frac{h(3) + h(4)}{2} - \int_3^4 h(\ell) d\ell \right| = \left| \frac{4^s + 3^s}{2} - \frac{\ell^{s+1}}{s+1} \Big|_3^4 \right| = \left| \frac{4^s + 3^s}{2} - \left(\frac{4^{s+1} - 3^{s+1}}{s+1} \right) \right|, \\
M_2 &= \frac{1}{4} \left[|h'(2)| + |h'(5)| - \frac{|h'(3)| + |h'(4)|}{2} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[s(2)^{s-1} + s(5)^{s-1} - \frac{s(3)^{s-1} + s(4)^{s-1}}{2} \right].
\end{aligned}$$



Şekil 13. Örnek 6'nın grafiği

Teorem 27'deki eşitsizlik için Şekil 13'teki grafiği incelersek M_1 eğrisi eşitsizliğin sol tarafını temsil eder; M_2 eğrisi de eşitsizliğin sağ tarafını temsil eder. Grafikten de görüleceği üzere eşitsizliğin sağ tarafı sol tarafından daha büyük değerler alır.

Teorem 28.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $|\mathfrak{F}'|^q, [\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\ell \in [0, 1]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 'dir.

İspat: Lemma 3 ve Hölder Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 |2\ell - 1| |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))| d\ell \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\int_0^1 |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazılır. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden de,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\int_0^1 |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \ell |\mathfrak{F}'(\sigma)|^q - (1 - \ell) |\mathfrak{F}'(\rho)|^q) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2\ell)^p d\ell + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2\ell - 1)^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \ell |\mathfrak{F}'(\sigma)|^q - (1 - \ell) |\mathfrak{F}'(\rho)|^q) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 12.: Teorem 28’de $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ alınırsa 1998 yılında Dragomir ve Agarwal’ın çalışmasında yer alan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(v) dv \right| \leq \frac{\vartheta - \eta}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 29.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $|\mathfrak{F}'|^q, [\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon için,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q}{3} - \frac{|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\ell \in [0,1]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 'dir.

İspat: Lemma 3 ve Hölder-İşcan Eşitsizliğinden yola çıkarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 |2\ell - 1| |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1-\ell)\rho))| d\ell \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1-\ell) |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-\ell) |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1-\ell)\rho))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \ell |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \ell |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1-\ell)\rho))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1-\ell) |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\int_0^1 (1-\ell) (|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - (\ell|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + (1-\ell)|\mathfrak{F}'(\rho)|^q)) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 \ell |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \ell (|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - (\ell |\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + (1 - \ell) |\mathfrak{F}'(\rho)|^q)) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q}{3} - \frac{|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\left(\int_0^1 (1 - \ell) |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 \ell |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitliği geçerlidir.

Sonuç 13.: Teorem 29'da $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ alınırsa 2019 yılında İşcan'ın çalışmasında yer alan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\vartheta - \eta}{4} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + 2|\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Sonuç 14.: Teorem 29 eşitsizliği Teorem 28 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç verir.

İspat: $\mathfrak{F}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(\sigma) = \sigma^s$, $0 < s \leq 1$ olmak üzere konkav $\mathfrak{F}$ fonksiyonu için, $\frac{\eta^s + \vartheta^s}{2} \leq \left(\frac{\eta + \vartheta}{s} \right)^s$ özelliği geçerlidir. Bu özellik Teorem 29 ile verilen eşitsizliğin sağ tarafında kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q}{3} - \frac{|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Teorem 29'un sağ tarafı aşağıdaki gibi düzenlenebilir;

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q}{3} - \frac{|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq (\rho - \sigma) \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\frac{1}{(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Teorem 28'in sağ tarafı elde edilmiş olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 30.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ olmak üzere $|\mathfrak{F}'|^q, [\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\ell \in [0, 1]$, $q \geq 1$ 'dir.

İspat: Lemma 3 ve Power-Mean Eşitsizliğinden,

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 |2\ell - 1| |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))| d\ell \\
&\leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left(\int_0^1 |2\ell - 1| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |2\ell - 1| |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
&\leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \left(\int_0^1 |2\ell - 1| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_0^1 |2\ell - 1| (|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \ell|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q - (1 - \ell)|\mathfrak{F}'(\rho)|^q) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \frac{\rho - \sigma}{4} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 15.: Teorem 30'da $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ alınırsa 2000 yılında Pearce and Pečarić'in çalışmasında yer alan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| \leq \frac{\vartheta - \eta}{4} \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sonuç 16.: Teorem 30 eşitsizliğinde $q = 1$ alınırsa Teorem 27 eşitsizliği elde edilir.

Teorem 31.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ olmak üzere $|\mathfrak{F}'|^q, [\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{8} \left\{ \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + 3|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{3|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\ell \in [0,1]$, $q \geq 1$ 'dir.

İspat: Lemma 3 ve Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 |2\ell - 1| |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))| d\ell \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \ell) |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \ell) |2\ell - 1| |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \ell |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \ell |2\ell - 1| |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden de,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \ell) |2\ell - 1|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 (1-\ell)|2\ell-1| (|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \ell|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q - (1-\ell)|\mathfrak{F}'(\rho)|^q) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 \ell|2\ell-1|^p de \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \ell|2\ell-1| (|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \ell|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q - (1-\ell)|\mathfrak{F}'(\rho)|^q) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& = \frac{\rho-\sigma}{8} \left\{ \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + 3|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{3|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(\int_0^1 (1-\ell)|2\ell-1| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 \ell|2\ell-1| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur.

Sonuç 17.: Teorem 31'de $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\vartheta - \eta}{8} \left\{ \left(\frac{3|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + 3|\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 18.: Teorem 31 eşitsizliği Teorem 30 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç verir.

İspat: $\mathfrak{F}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(\sigma) = \sigma^s$, $0 \leq s \leq 1$ olmak üzere konkav $\mathfrak{F}$ fonksiyonu için, $\frac{\eta^s + \vartheta^s}{2} \leq \left(\frac{\eta + \vartheta}{s} \right)^s$ özelliği geçerlidir. Bu özellik Teorem 31 ile verilen eşitsizliğin sağ tarafında kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + 3|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{1}{2} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{3|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Teorem 31'in sağ tarafı aşağıdaki gibi düzenlenebilir;

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{\rho - \sigma}{8} \left\{ \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + 3|\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{3|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{4} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Teorem 30'un sağ tarafı elde edilmiş olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 32.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\mathfrak{F}' \in L[\eta, \vartheta]$ ve her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ olsun. $|\mathfrak{F}'|^q, [\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{q} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$ 'dir.

İspat: Lemma 3 ve Young Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 |2\ell - 1| |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))| d\ell
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \left(\int_0^1 \frac{1}{p} |2\ell - 1|^p d\ell + \int_0^1 \frac{1}{q} |\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))|^q d\ell \right) \right\}$$

yazılır. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\ & \leq \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{p} |2\ell - 1|^p d\ell \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \frac{1}{q} (|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \ell |\mathfrak{F}'(\sigma)|^q - (1 - \ell) |\mathfrak{F}'(\rho)|^q) d\ell \right\} \\ & = \frac{\rho - \sigma}{2} \left\{ \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{q} \left(|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}'(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}'(\rho)|^q}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 19.: Teorem 32'de $\sigma = \eta$ ve $y = \vartheta$ alınırsa,

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| \leq \frac{\vartheta - \eta}{2} \left\{ \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{q} \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\eta)|^q + |\mathfrak{F}'(\vartheta)|^q}{2} \right) \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$, $\ell \in [0, 1]$ ve $\eta < \vartheta$ olsun. Eğer $\mathfrak{F}'' \in L[\eta, \vartheta]$ ise,

$$\begin{aligned} & \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \\ & = \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \int_0^1 \ell(1 - \ell) \mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1 - \ell)\sigma)) d\ell \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

İspat: Bu eşitliği kanıtlamak için öncelikle eşitliğin sağ tarafına kısmi integrasyon metodu uygulanır ve $\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho) = u$ dönüşümü yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \ell(1-\ell) \mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1-\ell)\sigma)) d\ell \\
&= \ell(1-\ell) \frac{\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1-\ell)\sigma))}{\sigma - \rho} \Big|_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 (1-2\ell) \frac{\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1-\ell)\sigma))}{\sigma - \rho} d\ell \\
&= - \int_0^1 (1-2\ell) \frac{\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1-\ell)\sigma))}{\sigma - \rho} d\ell
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki ifadeye tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 (1-2\ell) \frac{\mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1-\ell)\sigma))}{\sigma - \rho} d\ell \\
&= \frac{1}{\rho - \sigma} \left\{ (1-2\ell) \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1-\ell)\sigma))}{\sigma - \rho} \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\rho - \sigma} \int_0^1 \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1-\ell)\rho)) d\ell \right\} \\
&= \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{(\rho - \sigma)^2} \\
&\quad - \frac{2}{(\rho - \sigma)^2} \int_0^1 \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1-\ell)\rho)) d\ell
\end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafı $\frac{\rho - \sigma}{2}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \\
&= \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \int_0^1 \ell(1-\ell) \mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1-\ell)\sigma)) d\ell
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 20.: Lemma 4'te $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ yazılırsa 2010 yılında Alomari ve arkadaşlarının çalışmasında yer alan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du = \frac{(\vartheta - \eta)^2}{2} \int_0^1 \ell(1-\ell) \mathfrak{F}''(\ell\eta + (1-\ell)\vartheta) d\ell.$$

Teorem 33.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$, $\ell \in [0, 1]$ olsun. Eğer $|\mathfrak{F}''|$, $[\eta, \vartheta]$ aralığında konveks fonksiyon ise,

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{12} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)| + |\mathfrak{F}''(\vartheta)| - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)| + |\mathfrak{F}''(\rho)|}{2} \right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4 ve Jensen-Mercer Eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \int_0^1 |\ell(1 - \ell)| |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1 - \ell)\sigma))| d\ell \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \int_0^1 |\ell(1 - \ell)| (|\mathfrak{F}''(\eta)| + |\mathfrak{F}''(\vartheta)| - \ell|\mathfrak{F}''(\rho)| - (1 - \ell)|\mathfrak{F}''(\sigma)|) d\ell \\ & = \frac{(\rho - \sigma)^2}{12} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)| + |\mathfrak{F}''(\vartheta)| - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)| + |\mathfrak{F}''(\sigma)|}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 21.: Teorem 33'te $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ yazılırsa 2011 yılında Sarıkaya ve Aktan'ın çalışmasında yer alan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

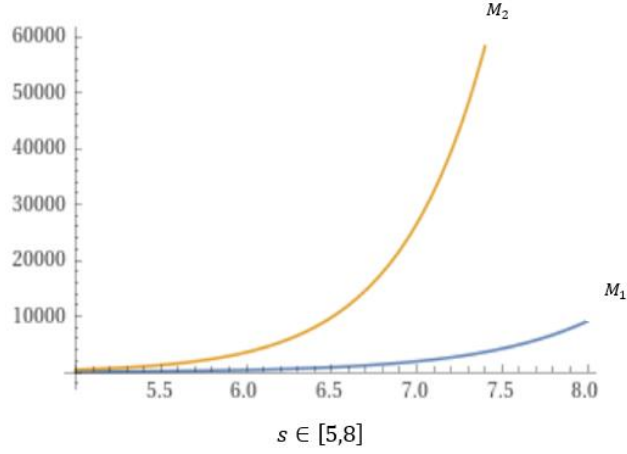
$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| = \frac{(\rho - \sigma)^2}{24} (|\mathfrak{F}''(\eta)| + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|).$$

Örnek 7.: Teorem 33'ün şartları düşünüldüğünde, $h: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(\ell) = \ell^s$, $\eta = 2, \vartheta = 5, \sigma = 3, \rho = 4$ ve $s \in [5, 8]$ için $|h''(\ell)| = s(s - 1)(\ell)^{s-2}$ $[\eta, \vartheta]$ üzerinde bir konveks fonksiyon için eşitsizliğin sol ve sağ taraflarını hesaplayarak sırasıyla aşağıdaki ifadeleri elde ediyoruz;

$$\begin{aligned} M_1 &= \left| \frac{h(3) + h(4)}{2} - \int_3^4 h(\ell) d\ell \right| \\ &= \left| \frac{h(3) + h(4)}{2} - \int_3^4 h(\ell) d\ell \right| = \left| \frac{4^s + 3^s}{2} - \frac{\ell^{s+1}}{s+1} \Big|_3^4 \right| = \left| \frac{4^s + 3^s}{2} - \left(\frac{4^{s+1} - 3^{s+1}}{s+1} \right) \right|, \end{aligned}$$

$$M_2 = \frac{1}{12} \left[|h''(2)| + |h''(5)| - \frac{|h''(3)| + |h''(4)|}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{12} \left[s(s-1)(2)^{s-2} + s(s-1)(5)^{s-2} - \frac{s(s-1)(3)^{s-2} + s(s-1)(4)^{s-2}}{2} \right].$$



Şekil 14. Örnek 7'nin grafiği

Teorem 33'teki eşitsizlik için Şekil 14'teki grafiği incelersek M_1 eğrisi eşitsizliğin sol tarafını temsil eder; M_2 eğrisi de eşitsizliğin sağ tarafını temsil eder. Grafikten de görüleceği üzere eşitsizliğin sağ tarafı sol tarafından daha büyük değerler alır.

Teorem 34.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $|\mathfrak{F}''|^q, [\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon için,

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right|$$

$$\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} [\beta(p+1, p+1)]^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\ell \in [0, 1]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve β , beta fonksiyonudur.

İspat: Lemma 4 ve Hölder Eşitsizliğinden,

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right|$$

$$\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \int_0^1 |\ell(1 - \ell)| |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1 - \ell)\sigma))| d\ell$$

$$\leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left(\int_0^1 |\ell(1 - \ell)|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1 - \ell)\sigma))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden de,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left(\int_0^1 |\ell(1 - \ell)|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 (|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - (\ell|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + (1 - \ell)|\mathfrak{F}''(\rho)|^q)) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} [\beta(p + 1, p + 1)]^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)| + |\mathfrak{F}''(\vartheta)| - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)| + |\mathfrak{F}''(\sigma)|}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 |\ell(1 - \ell)|^p d\ell = \int_0^1 \ell^p (1 - \ell)^p d\ell = \beta(p + 1, p + 1), \quad \ell \in [0, 1]$$

olur.

Sonuç 22.: Teorem 34'te $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ yazılırsa 2011 yılında Özdemir ve arkadaşlarının çalışmasında yer alan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| \\ & \leq \frac{(\vartheta - \eta)^2}{2} [\beta(p + 1, p + 1)]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Teorem 35.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $|\mathfrak{F}''|^q, [\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon için,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(u + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(u + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{u + \vartheta - \rho}^{u + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} (\beta(p + 1, p + 2))^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{3} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\ell \in [0, 1]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve β , beta fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3 ve Hölder-İşcan Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(v) dv \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \int_0^1 |\ell(1 - \ell)| |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1 - \ell)\sigma))| d\ell \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \ell) |\ell(1 - \ell)|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \ell) |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1 - \ell)\sigma))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \ell |\ell(1 - \ell)|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \ell |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1 - \ell)\sigma))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \ell) |\ell(1 - \ell)|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 (1-\ell) (|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - (\ell|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + (1-\ell)|\mathfrak{F}''(\rho)|^q)) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 \ell |\ell(1-\ell)|^p d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \ell (|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - (\ell|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + (1-\ell)|\mathfrak{F}''(\rho)|^q)) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left\{ (\beta(p+1, p+2))^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{3} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (\beta(p+2, p+1))^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada beta fonksiyonunun özelliği,

$$\beta(p+1, p+2) = \beta(p+2, p+1)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(v) dv \right| \\
& = \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} (\beta(p+1, p+2))^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{3} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 23.: Teorem 35'te $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| \\ & \leq \frac{(\vartheta - \eta)^2}{2} (\beta(p+1, p+2))^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + 2|\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 24.: Teorem 35 eşitsizliği Teorem 34 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç verir.

İspat: $\mathfrak{F}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(\sigma) = \sigma^s$, $0 \leq s \leq 1$ olmak üzere konkav $\mathfrak{F}$ fonksiyonu için, $\frac{\eta^s + \vartheta^s}{2} \leq \left(\frac{\eta + \vartheta}{s} \right)^s$ özelliği geçerlidir. Bu özellik Teorem 35 ile verilen eşitsizliğin sağ tarafında kullanılırsa:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{3} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Beta fonksiyonunun özelliğini kullanarak Teorem 35'in sağ tarafı aşağıdaki gibi düzenlenebilir;

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} (\beta(p+1, p+2))^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{3} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \leq (\rho - \sigma)^2 (\beta(p+1, p+2))^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\rho - \sigma)^2}{2^{\frac{1}{q}}} (\beta(p+1, p+2))^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

yazılır. Beta fonksiyonun aşağıdaki belirtilen özelliğinden faydalanırsak,

$$\beta(p+1, p+2) = \frac{\beta(p+1, p+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho - \sigma)^2}{2^{\frac{1}{q}}} (\beta(p+1, p+2))^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} (\beta(p+1, p+1))^{\frac{1}{p}} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 34'ün sağ tarafı elde edilmiş olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 36.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ olmak üzere $|\mathfrak{F}''|^q$, $[\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{12} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\ell \in [0, 1]$, $q \geq 1$ 'dir.

İspat: Lemma 4 ve Power-Mean Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \int_0^1 |\ell(1 - \ell)| |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1 - \ell)\sigma))| d\ell \\ & \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left(\int_0^1 |\ell(1 - \ell)| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\ell(1 - \ell)| |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\rho + (1 - \ell)\sigma))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazılır. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden de,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left(\int_0^1 |\ell(1 - \ell)| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 |\ell(1 - \ell)| (|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - (\ell|\mathfrak{F}''(\rho)|^q + (1 - \ell)|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q)) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{(\rho - \sigma)^2}{12} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 25.: Teorem 36'da $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ yazılırsa;

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(v) dv \right| \leq \frac{(\vartheta - \eta)^2}{12} \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sonuç 26.: Teorem 36'da $q = 1$ alınırsa Teorem 33 elde edilir.

Teorem 37.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ olmak üzere $|\mathfrak{F}''|^q$, $[\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{4} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{15} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{10} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{10} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{15} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\ell \in [0, 1]$, $q \geq 1$ 'dir.

İspat: Lemma 4 ve Geliştirilmiş Power-Mean Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \int_0^1 |\ell(1 - \ell)| |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))| d\ell \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \ell) |\ell(1 - \ell)| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \ell) |\ell(1 - \ell)| |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \ell |\ell(1 - \ell)| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left. \left(\int_0^1 \ell |\ell(1 - \ell)| |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))|^q d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden de,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \ell) |\ell(1 - \ell)| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \ell) |\ell(1 - \ell)| (|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - (\ell|\mathfrak{F}''(\rho)|^q + (1 - \ell)|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q)) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \ell |\ell(1 - \ell)| d\ell \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left. \left(\int_0^1 \ell |\ell(1 - \ell)| (|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - (\ell|\mathfrak{F}''(\rho)|^q + (1 - \ell)|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q)) d\ell \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\rho - \sigma)^2}{4} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{10} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{15} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{10} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{15} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 27.: Teorem 37’de $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ yazılırsa;

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| \\ \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{24} \left\{ \left(\frac{2|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + 3|\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{5} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + 2|\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{5} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

elde edilir.

Sonuç 28.: Teorem 37 eşitsizliği Teorem 36 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç verir.

İspat: $\mathfrak{F}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(\sigma) = \sigma^s$, $0 \leq s \leq 1$ olmak üzere konkav $\mathfrak{F}$ fonksiyonu için, $\frac{\eta^s + \vartheta^s}{2} \leq \left(\frac{\eta + \vartheta}{s} \right)^s$ özelliği geçerlidir. Bu özellik Teorem 37 ile verilen eşitsizliğin sağ tarafında kullanılırsa:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{10} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{15} \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{10} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{15} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{12} \right)^{\frac{1}{q}} \\ = \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Teorem 37’nin sağ tarafı aşağıdaki gibi düzenlenebilir;

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho - \sigma)^2}{4} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{10} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{15} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{6} - \frac{|\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{10} - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q}{15} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{(\rho - \sigma)^2}{12} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Teorem 36'nın sağ tarafı elde edilmiş olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 38.: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (η, ϑ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\mathfrak{F}'' \in L[\eta, \vartheta]$ ve her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ olsun. $|\mathfrak{F}''|^q$, $[\eta, \vartheta]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left\{ \frac{\beta(p+1, p+1)}{p} + \frac{1}{q} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$ ve β , beta fonksiyonudur.

İspat: Lemma 4 ve Young Eşitsizliğinden yola çıkarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \int_0^1 |\ell(1 - \ell)| |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))| d\ell \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{p} |\ell(1 - \ell)|^p d\ell + \int_0^1 \frac{1}{q} |\mathfrak{F}''(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho))|^q d\ell \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Jensen-Mercer Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{2} - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \\
& \quad \times \left\{ \int_0^1 \frac{1}{p} |\ell(1 - \ell)|^p d\ell + \int_0^1 \frac{1}{q} (|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \ell |\mathfrak{F}''(\sigma)|^q - (1 - \ell) |\mathfrak{F}''(\rho)|^q) d\ell \right\} \\
& = \frac{(\rho - \sigma)^2}{2} \left\{ \frac{\beta(p + 1, p + 1)}{p} + \frac{1}{q} \left(|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q - \frac{|\mathfrak{F}''(\sigma)|^q + |\mathfrak{F}''(\rho)|^q}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 29.: Teorem 38'de $\sigma = \eta$ ve $\rho = \vartheta$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathfrak{F}(\eta) + \mathfrak{F}(\vartheta)}{2} - \frac{1}{\vartheta - \eta} \int_{\eta}^{\vartheta} \mathfrak{F}(u) du \right| \\
& \leq \frac{(\vartheta - \eta)^2}{2} \left\{ \frac{\beta(p + 1, p + 1)}{p} + \frac{1}{q} \left(\frac{|\mathfrak{F}''(\eta)|^q + |\mathfrak{F}''(\vartheta)|^q}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Jensen Mercer Eşitsizliği kullanarak Hermite-Hadamard için Hölder, Power-Mean, Hölder-İşcan, Geliştirilmiş Power-Mean, Young İntegral Eşitsizlikleri kullanılarak yeni teoremler oluşturulmuş ve özel değerler kullanarak hem yeni hem de literatürde var olan bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Elde edilen teoremlerin üçüncü türevleri üzerine de çalışmalar gerçekleştirilebilir. Üçüncü türevler üzerine okuyucuya ilham ve motivasyon kaynağı olması açısından 2024 yılında Ciurdariu L ve Grecu E. tarafından yapılan çalışmalarda bulunan Lemma 5 incelenebilir.

Lemma 5: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ üç kez diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer her $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ ve $\sigma < \rho$ için;

$$\begin{aligned} & \frac{6}{\rho - \sigma} \int_{\eta + \vartheta - \rho}^{\eta + \vartheta - \sigma} \mathfrak{F}(u) du - 4\mathfrak{F}\left(\eta + \vartheta - \frac{\sigma + \rho}{2}\right) - (\mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)) \\ &= \frac{(\rho - \sigma)^3}{16} \int_0^1 \ell^2 (1 - \ell) \\ & \quad \times \left[\mathfrak{F}''' \left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\ell}{2} \sigma + \frac{2 - \ell}{2} \rho \right) \right) - \mathfrak{F}''' \left(\eta + \vartheta - \left(\frac{\ell}{2} \rho + \frac{2 - \ell}{2} \sigma \right) \right) \right] d\ell \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Ciurdariu and Grecu, 2024).

2021 yılında Wang ve arkadaşlarının çalışmasında yer alan Riemann-Liouville operatörünün Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer tipli lemması aşağıda verilmiştir:

Lemma 6: $\mathfrak{F}: [\eta, \vartheta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $\sigma, \rho \in [\eta, \vartheta]$ $\sigma < \rho$ olsun. Eğer $\mathfrak{F}' \in L[\sigma, \rho]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \sigma) + \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho)}{\alpha + 1} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(\rho - \sigma)^\alpha} {}_{\mathcal{J}}^{\alpha}_{(\eta + \vartheta - \sigma)^-} \mathfrak{F}(\eta + \vartheta - \rho) \\ &= \frac{\rho - \sigma}{\alpha + 1} \int_0^1 [(\alpha + 1)\ell^\alpha - 1] \mathfrak{F}'(\eta + \vartheta - (\ell\sigma + (1 - \ell)\rho)) d\ell \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir (Wang *et al.* 2021).

Yukarıdaki lemma ile farklı konvekslik çeşitleri üzerine çalışmalar yapılabilir. Elde edilen teorem ve sonuçlar tezde yer alan sonuçlar ile karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Ali, M. A., Sitthiwiratham, T., Köbis, E., & Hanif, A. (2024). Hermite–Hadamard–Mercer Inequalities Associated with Twice-Differentiable Functions with Applications. *Axioms*, 13(2), 114.
- Alomari M., Darus M. and Dragomir S.S. (2010). New inequalities of Hermite-Hadamard type for Functions whose second derivatives absolute values are quasi-convex. *Tamkang Jour. Math.*, 41(4), 353-359.
- Anton, H. (1994). *Elementary Linear Algebra*, Jhon Wiley & Sons, Inc.
- Azpeitia, A. G. (1994). Convex functions and the Hadamard inequality. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 28(1), 7-12.
- Baric, J., & Matkovic, A. (2009). Bounds for the normalized Jensen Mercer functional. *J. Math. Inequal*, 3(4), 529-541.
- Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.
- Bellman, R., & Beckenbach, E. F. (1961). *Inequalities*. Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- Butt, S. I., Agarwal, P., Yousaf, S., & Guirao, J. L. (2022). Generalized fractal Jensen and Jensen–Mercer inequalities for harmonic convex function with applications. *Journal of Inequalities and Applications*, 2022, 1-18.
- Chen, J. S. (2006). The convex and monotone functions associated with second-order cone. *Optimization*, 55(4), 363-385.
- Ciurdariu, L., & Grecu, E. (2024). Hermite–Hadamard–Mercer-Type Inequalities for Three-Times Differentiable Functions. *Axioms*, 13(6), 413.
- Dragomir, S. S., & Agarwal, R. P. (1998). Two new mappings associated with Hadamard's inequalities for convex functions. *Applied Mathematics Letters*, 11(3), 33-38.
- Dragomir, S. S., & Pearce, C. (2003). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. *Science direct working paper*, (S1574-0358), 04.
- Dragomir, S., Agarwal, R., & Barnett, N.S. (2000). Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities *Journal of Inequal. and Appl*, 5 (2), 103-165.
- Dragomir, S. S., Pecaric, J., & Persson, L. E. (1995). Some inequalities of Hadamard type. *Soochow J. Math*, 21(3), 335-341.
- Faisal, S., Khan, M. A., & Iqbal, S. (2022). Generalized Hermite-Hadamard-Mercer type inequalities via majorization. *Filomat*, 36(2), 469-483.
- Fejér, L. (1906). Über die Fourierreihen. *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss*, 24, 369-390.
- Greenberg, H. J., & Pierskalla, W. P. (1971). A review of quasi-convex functions. *Operations research*, 19(7), 1553-1570.
- Hardy, G. H., Pólya G., & Littlewood JE. (1952). *Inequalities*. Cambridge University Press.
- IveliĆ Bradanović, S., & Lovrićević, N. (2024). Generalized Jensen and Jensen–Mercer inequalities for strongly convex functions with applications. *Journal of inequalities and applications*, 2024(1), 112.

- İşcan, İ. (2019). New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality. *Journal of inequalities and applications*, 2019(1), 304.
- İşcan, İ. (2021). Weighted Hermite–Hadamard–Mercer type inequalities for convex functions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 37(1), 118-130.
- Jensen, J. L. W. V. (1905). Om konvekse funktioner og uligheder imellem middelveerdier. *Nyt tidsskrift for matematik*, 16, 49-68.
- Kadakal, M., İşcan, İ., Kadakal, H. & Bekar, K., (2019). On improvements of some integral inequalities. *Honam Math. Jour.*, 43(3), 441-452.
- Khan, A. R., & Saadi, S. (2016). Generalized Jensen-Mercer Inequality for Functions with Nondecreasing Increments. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2016, No. 1, p. 5231476). Hindawi Publishing Corporation.
- Khan, M. A., & Pečarić, J. (2020). New refinements of the Jensen-Mercer inequality associated to positive n -tuples. *Armenian Journal of Mathematics*, 12(4), 1-12.
- Kian, M., & Moslehian, M. (2013). Refinements of the operator Jensen-Mercer inequality. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 26, 742-753.
- Kufner, A., John, O., & Fucik, S. (1977). *Function spaces* (Vol. 3). Springer Science & Business Media, 8, 15-17.
- Lupşa, L., & Cristescu, G. (2002). Some concepts of generalized convex functions (I). *Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation*, 31(2), 171-177.
- Mercer, A. (2003). McD. "A variant of Jensen's inequality." *J. Inequal. Pure Appl. Math* 4.4, 73.
- Mitrinović, D. S. (1970). *Analytic Inequalities*, Springer-Verlang, Berlin.
- Mitrinovic, D.S., Pecaric, J.E., & Fink, A.M., (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
- Moradi, H. R., & Furuichi, S. (2020). Improvement and generalization of some Jensen-Mercer-type inequalities, *J. Math. Inequal.*, 17, 377-383
- Niculescu, C., & Persson, L. E. (2006). *Convex functions and their applications* (Vol. 23). New York: Springer.
- Öğülmüş, H., & Sarıkaya, Z. M. (2021). Hermite-Hadamard-Mercer type inequalities for fractional integrals. *Filomat*, 35(7), 2425-2435.
- Özdemir, M. E., Avci, M., & Kavurmaci, H. (2011). Hermite–Hadamard-type inequalities via (α, m) -convexity. *Computers & mathematics with applications*, 61(9), 2614-2620.
- Panjer, H. H. (1986). *Models in risk theory*. Actuarial Mathematics.
- Pavic, Z. (2019). The Jensen-Mercer inequality with infinite convex combinations. *Mathematical sciences and applications e-notes*, 7(1), 19-27.
- Pearce, C. E., & Pečarić, J. (2000). Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae. *Applied Mathematics Letters*, 13(2), 51-55.
- Pecaric, L., Proschan, F., & Tong, Y.L. (1992). *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, Inc.
- Roberts, A. W., & Varberg, D. E. (1974). *Convex Functions: Convex Functions*. Academic Press.
- Sarikaya, M. Z., & Aktan, N. (2011). On the generalization of some integral inequalities and their applications. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(9-10), 2175-2182.

- Sarikaya, M. Z., & Kiris, M. E. (2015). Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for s -convex functions. *Miskolc Mathematical Notes*, 16(1), 491-501.
- Sitthiwiratham, T., Vivas-Cortez, M. I., Ali, M. A., & Budak, H. (2024). Hermite-hadamard-mercer inequalities for differentiable functions. *Fractals*, 32(2), 1-13.
- Tatar, M. Ç., Çoşkun, M., & Yıldız, Ç. (2023). Some New Application For Weighted Hermite-Hadamard Type Inequalities. *Turkish J. Ineq*, 7(2), 15-28.
- Vivas-Cortez, M., Awan, M. U., Javed, M. Z., Kashuri, A., Noor, M. A., Noor, K. I., & Vlora, A. (2022). Some new generalized κ -fractional Hermite-Hadamard-Mercer type integral inequalities and their applications. *AIMS Math*, 7(2), 3203-3220.
- Wang, H., Khan, J., Adil Khan, M., Khalid, S., & Khan, R. (2021). The Hermite–Hadamard–Jensen–Mercer type inequalities for Riemann–Liouville fractional integral. *Journal of Mathematics*, 2021(1), 5516987.
- Xiao, Z. G., Zhang, Z. H., & Wu, Y. D. (2011). On weighted Hermite–Hadamard inequalities. *Applied Mathematics and Computation*, 218(3), 1147-1152.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Melek Çağla TATAR
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Ünye/Ordu, Ünye Anadolu Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi,Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Orta
Makaleler	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
Tatar, M.Ç.; Coşkun, M.; Yıldız, Ç. Some New Applications for Weighted Hermite-Hadamard Type Inequalities, Turkish Journal of Inequalities, 7(2) (2023), 15-28	
Tatar, M.Ç., Yıldız, Ç, Some New Estimates for Hermite-Hadamard-Jensen-Mercer Type Inequalities, Turkish Journal of Science, Submitted.	