



**LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN
TÜREV VE UYGULAMALARINA İLİŞKİN
PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİN
İNCELENMESİ**

Murat DURAN

Doktora Tezi

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

2018

(Her hakkı saklıdır)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

**LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN TÜREV VE UYGULAMALARINA
İLİŞKİN PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ**

(Review of Pedagogical Content Knowledge of High School Mathematics Teachers with
Regard to Derivatives and Their Implementations)

DOKTORA TEZİ

Murat DURAN

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KAPLAN

Erzurum
Mart, 2018

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Murat DURAN tarafından hazırlanan “Lise Matematik Öğretmenlerinin Türev ve Uygulamalarına İlişkin Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi” başlıklı çalışması 19/03/2018 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, İlköğretim Matematik Eğitimi Bilim Dalında doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

Amasya Üniversitesi

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KAPLAN

Atatürk Üniversitesi

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Alper Cihan KONYALIOĞLU

Atatürk Üniversitesi

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Yaşar AKKAN

Gümüşhane Üniversitesi

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Alper ÇILTAŞ

Atatürk Üniversitesi

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

27 Nisan 2018



Prof. Dr. Mustafa SÖZBİLİR

Enstitü Müdürü

ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Doktora Tezi olarak sunduğum “Lise Matematik Öğretmenlerinin Türev ve Uygulamalarına İlişkin Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi” başlıklı çalışmanın tarafımdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını ve yararlandığım eserleri kaynakçada gösterdiğimi beyan ederim.

☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☒ Tezim 1 (bir) yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

19/03/2018



Murat DURAN

ÖZ
DOKTORA TEZİ
LİSE MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN TÜREV VE UYGULAMALARINA
İLİŞKİN PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

Murat DURAN

Nisan 2018, 283 Sayfa

Amaç: Bu araştırmanın amacı lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik pedagojik alan bilgilerini konu alanı, öğrenci ve öğretim stratejileri bilgileri bağlamında incelemektir.

Yöntem: Bu çalışmada, nitel araştırma metodolojisi desenlerinden biri olan durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. 2015-2016 öğretim yılı güz döneminin sonu ile bahar döneminin başında gerçekleştirilen bu araştırmanın katılımcılarını Karadeniz Bölgesinin bir ilinde Milli Eğitim Bakanlığına bağlı genel liselerde görev yapan dört lise matematik öğretmeni oluşturmaktadır. Araştırmanın veri toplama araçları görüşme, gözlem ve döküman analizidir. Araştırmanın verileri betimsel analiz ve içerik analizi teknikleri kullanılarak analiz edilmiştir.

Bulgular: Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde öğretmenlerin en çok türevin geometrik anlamının izahında zorluk yaşadıkları görülmüştür. Lise matematik öğretmenlerinin ilgili konulara yönelik öğrenci bilgileri incelendiğinde öğretmenlerin tamamının kapalı fonksiyonun türevi haricinde öğrencinin yaptığı hataları eksiksiz ve doğru belirledikleri söylenebilir. Öğrenci bilgisi bağlamındaki soruları çoğunlukla doğru cevaplayan lise matematik öğretmenlerinin hatanın ve kaynağının belirlenmesinde ve hatanın giderilmesine yönelik önlemler almada başarılı oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin türev ve uygulamaları konusunun öğretiminde en çok düz anlatım yöntemini, soru-cevap tekniğini ve sunuş yoluyla öğretim stratejisini kullandıkları görülmüştür.

Sonuç: Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgileri mesleki deneyime göre farklılaşırken cinsiyet ve mezun olunan fakülte türüne göre farklılaşmamıştır. Buna göre lise matematik öğretmenlerinin mesleki deneyimleri arttıkça türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgi düzeylerinin de yükseldiği söylenebilir. Öğretmenlerin türev ve uygulamaları konusuna yönelik öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerinin ise cinsiyete, mezun olunan fakülte türüne ve mesleki deneyime göre farklılaşmadığı görülmüştür. Son olarak lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgileriyle öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerinin ilişkili olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Pedagojik alan bilgisi, konu alanı bilgisi, öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisi, türev ve uygulamaları, lise matematik öğretmenleri

ABSTRACT
DOCTORAL DISSERTATION
REVIEW OF PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE OF HIGH
SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS WITH REGARD TO DERIVATIVES AND
THEIR IMPLEMENTATIONS

Murat DURAN

April 2018, 283 pages

Purpose: The aim of this research is examining the pedagogical content knowledge of high school mathematics teachers with regard to derivations and their implementations in context of subject matter, student and teaching strategies knowledge.

Method: In this research, case study method of the patterns of qualitative research methodology was used. Participants of this research conducted at the end of the fall semester and at the beginning of the spring semester in 2015-2016 school year were four high school mathematics teachers officiated in general high schools under the Ministry of National Education in a city in Black Sea Region in Turkey. Data collection tools of this research were interview, observation and document analysis. Descriptive analysis and content analysis techniques were used to analyze the data of this research.

Findings: It was seen that the teachers mostly had difficulty in explaining the geometrical meaning of the derivative. It can be said that all of the teachers determined the errors made by the student except the derivative of the closed function completely and correctly. It can be said that high school mathematics teachers who answered the questions in the context of student knowledge mostly succeeded in determining the mistake and source and taking precautions to correct the mistake. It was seen that teachers mostly use direct instruction method, question-answer technique and expository teaching strategy in teaching of derivatives and their implementations.

Results: The subject matter knowledge of high school mathematics teachers regarding derivatives and their implementations differentiate with respect to professional experience, it did not differ with respect to gender and the type of faculty that they graduated from. According to this, it can be said that the knowledge level of high school mathematics teachers regarding the subject matter of derivatives and their implementations increases as their professional experience increases. It was seen that the mathematics teachers' knowledge about student and teaching strategies with regard to derivatives and their implementations do not differentiate in terms of gender, type of the faculty that they graduated from and professional experience. It was seen that the subject matter knowledge of high school mathematics teachers regarding derivatives and their implementations is interrelated with their knowledge of students and teaching strategies.

Keywords: Pedagogical content knowledge, subject matter knowledge, knowledge of students and teaching strategies, derivatives and their implementations, high school mathematics teachers

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkması sürecinde beni cesaretlendiren, bana yardımcı olan ve danışmanlığımı yaptığı günden bu yana bana güven veren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah KAPLAN'a teşekkür ederim.

Amasya Üniversitesinin Rektör Yardımcılığı görevinde bulunan ve aynı zamanda tezimi bitirebilmem için bana sürekli moral vermeye ve motivasyonumu yükseltmeye çalışan kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Kemal POLAT'a şükranlarımı bir borç bilirim. Şahsımın matematik alanında deneyim kazanmasında büyük emeği olan ve lisans döneminden beri kendisine ve bilgisine saygı duyduğum Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dekanı Sayın Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında emek harcayan, görüşlerini esirgemeyen ve beni onure eden değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Alper Cihan KONYALIOĞLU'na, Sayın Doç. Dr. Yaşar AKKAN'a ve Sayın Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ'a teşekkür ederim.

Tezi yazarken ve bölümlerini kontrol ederken samimi görüşlerini ve desteklerini benden esirgemeyen, tezimin doğru ve iyi bir tez olarak ortaya çıkmasında çaba harcayan başta en yakın arkadaşım Sayın Dr. Öğretim Üyesi Muhammet DORUK'a ve diğer arkadaşlarım Sayın Dr. Öğretim Üyesi Mesut ÖZTÜRK ile Arş. Gör. Kayhan BOZGÜN'e teşekkür ederim.

Tezin verilerini elde etmem sürecinde bana çok yardımı dokunan, aynı zamanda lisede matematiği sevmemde ve matematiğimin gelişmesinde olağanüstü katkısı olan öğretmenim Sayın Ahmet DEMİRTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Murat DURAN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
ÖZ.....	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
TABLolar DİZİNİ.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xiii
KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
BİRİNCİ BÖLÜM.....	1
Giriş	1
Problem Durumu	1
Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi	5
Problem Cümlesi	16
Alt Problemler	16
Varsayımlar	16
Sınırlılıklar.....	17
Tanımlar	17
İKİNCİ BÖLÜM	18
Kuramsal Çerçeve Ve İlgili Çalışmalar.....	18
Öğretmen Bilgisi Modelleri.....	18
Konu alanı bilgisi.	36
Öğrenci bilgisi.....	38
Öğretim stratejileri bilgisi.	39
İlgili Araştırmalar	41
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM.....	54
Yöntem	54
Araştırmanın Tasarımı.....	54
Araştırma Paradigmasının Kabulleri	54
Araştırmanın Deseni	58
Araştırma Grubu.....	59

Veri Toplama Araçları.....	61
Pilot çalışma.	61
Yarı-yapılandırılmış görüşme.	66
Öğretmen görüşme formu.	68
Yarı yapılandırılmış gözlem.....	71
Döküman inceleme.	75
Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği.....	75
Araştırmacının Rolü	77
Verilerin Analizi.....	78
Konu alanı bilgisine yönelik elde edilen verilerin analizi.....	79
Öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisine yönelik elde edilen verilerin analizi.	86
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM.....	87
Bulgular	87
Öğretmenlerin Türev ve Uygulamalarına Yönelik Konu Alanı Bilgilerine İlişkin	
Bulgular	87
Türevin formel tanımı, örneklendirilmesi ve kullanım alanları.	87
Türev-süreklilik ilişkisi.	95
Mutlak değer fonksiyonunun türevi.	103
Kapalı fonksiyonun türevi.....	108
Türevin geometrik anlamının izahı ve türev-eğim-teğet ilişkisi.	115
Artan-azalan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların türevle ilişkisi.	134
Ekstremum noktaları ve bu noktaların türevle ilişkisi.	143
Konvekslik-konkavlık tanımı ile dönüm noktasının II. türevle ilişkisi	156
Maksimum-minimum problemi kurma ve çözme.....	164
Asimptotlar ve grafik çizimi.	169
4.2. Öğretmenlerin Türev ve Uygulamalarına Yönelik Öğrenci ve Öğretim Stratejileri	
Bilgilerine İlişkin Bulgular.....	178
Mutlak değer fonksiyonunun sağdan-soldan türevinin aranması.	178
Köklü sayılarda türev arama kurallarının uygulanması.	184
Kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisi.....	188
Kapalı fonksiyonlarda türevin aranması.	193
Ekstremum noktaları ve bu noktaların türevle ilişkisi.	199

BEŞİNCİ BÖLÜM.....	205
Sonuç, Tartışma ve Öneriler.....	205
Öğretmenlerin Türev ve Uygulamalarına Yönelik Konu Alanı Bilgilerine İlişkin Sonuç ve Tartışma	205
Öğretmenlerin Türev ve Uygulamalarına Yönelik Öğrenci ve Öğretim Stratejileri Bilgilerine İlişkin Sonuç ve Tartışma.....	211
Pedagogik Alan Bilgisi Bileşenlerinin Birbirleriyle İlişkilerine Yönelik Sonuçlar ve Tartışma.....	212
Öneriler.....	213
KAYNAKLAR.....	215
EKLER	243
EK-1. Öğretmen Görüşme Formu.....	243
EK-2. Demografik Bilgi Formu	244
EK-3. Konu Alanı Bilgisi Mülakat Formu.....	245
EK-4. Konu Alanı Bilgisi Gözlem Formu	252
EK-5. Öğrenci ve Öğretim Stratejileri Bilgisi Mülakat Formu.....	254
EK-6. Öğrenci Bilgisi Gözlem Formu	259
EK-7. Öğretim Stratejileri Bilgisi Gözlem Formu	260
EK-8. Amasya İl Milli Eğitim Müdürlüğü İzin Yazısı	261
ÖZGEÇMİŞ	262

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Pedagojik Alan Bilgisi Bileşenlerinin Farklı Araştırmacılara Göre Kavramsallaştırılması	32
Tablo 2. Öğretmenlerin Demografik Özellikleri	60
Tablo 3. Pilot Çalışmaya Katılan Öğretmenlerin Demografik Özellikleri.....	62
Tablo 4. Pilot Çalışmadaki Öğretmenlerin Görüşme-Gözlemine Yönelik Uygulama Süreci.....	63
Tablo 5. Nihai Çalışmadaki Öğretmenlerle Yapılan Görüşmelerin Takvimi.....	71
Tablo 6. Nihai Çalışmadaki Öğretmenlerin Derslerine Yönelik Yapılan Gözlemlerin Takvimi.....	74
Tablo 7. Konu Alanı Bilgisinde Kullanılan Kategoriler ve Kodlar.....	79
Tablo 8. Türevin Tanımının Analizinde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri	82
Tablo 9. Türev-Süreklilik İlişkisinin Analizinde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri	82
Tablo 10. Türevin Geometrik Anlamının Analizinde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri	83
Tablo 11. Maksimum-Minimum Problemlerinin Çözümünde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri	83
Tablo 12. Grafik Çiziminin Analizinde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri	84
Tablo 13. Problem Kurmaya ve Çözmeye Yönelik Değerlendirme Kriterleri.....	85
Tablo 14. Türevin Formel Tanımına İlişkin Kategoriler ve Kodlar	88
Tablo 15. Türevin Formel Tanımında Olması Gereken Özelliklere Yönelik Kategoriler ve Kodlar	89
Tablo 16. Türeve Verilen Örnekler ve Türevin Kullanım Alanlarına Yönelik Açıklamalar ...	90
Tablo 17. Türeve Formel Tanımına Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları.....	92
Tablo 18. $f(x)$ Fonksiyonunun Türevli Olduğu Noktada $-f^2(x)$ Fonksiyonunun Türevli Olma Durumu	94
Tablo 19. Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Kategoriler ve Kodlar.....	96
Tablo 20. Türev-Süreklilik İlişkisindeki Özelliklere Yönelik Kategoriler ve Kodlar.....	97
Tablo 21. Fonksiyon Üzerindeki Noktalarda Türev Varlığı ve Nedenlerine Yönelik Kategoriler ile Kodlar.....	99
Tablo 22. Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları	101
Tablo 23. Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevine Yönelik Kategoriler ve Kodlar	103

Tablo 24. Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevine Yönelik Görüşme-Gözlem	
Yansımaları.....	105
Tablo 25. Kapalı Fonksiyonunun Türevine Yönelik Kategoriler ve Kodlar	108
Tablo 26. Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Açıklamalar ile Kullanılan Notasyonlar..	109
Tablo 27. Kapalı Fonksiyonun Türevine İlişkin Kurulan ve Çözülen Problemlere	
Yönelik Kategoriler	111
Tablo 28. Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları.....	113
Tablo 29. Türevin Geometrik Anlamının İzahına Yönelik Kategoriler ve Kodlar	115
Tablo 30. Türevin Geometrik Anlamının İzahındaki Özelliklere Yönelik Kategoriler ve	
Kodlar	116
Tablo 31. Türevin Geometrik Anlamının İzahındaki Gösterimlere Yönelik Kategoriler ve	
Kodlar	117
Tablo 32. Teğet Kavramına Yönelik Öğretmen Görüşleri	118
Tablo 33. Eğri Üzerindeki Doğruların Teğet Olmasına Yönelik Kategoriler ve Kodlar	120
Tablo 34. Eğri Üzerindeki Noktalarda Çizilen Teğet Doğrularına Yönelik Kategoriler ve	
Kodlar	122
Tablo 35. Öğretmenlerin Eğri Üzerindeki Bazı Noktalarda Teğet Doğrularına Yönelik	
Çizimleri	127
Tablo 36. Türev-Eğim-Teğet İlişkisine Yönelik Kurulan ve Çözülen Problemlere Yönelik	
Kategoriler	128
Tablo 37. Türev-Eğim-Teğet İlişkisine Yönelik Kurulan Problemler ve Problemlerin	
Çözümleri	130
Tablo 38. Türev-Eğim-Teğet İlişkisine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları	131
Tablo 39. Artan-Azalan Fonksiyonlara Yönelik Kategoriler ve Kodlar	134
Tablo 40. Artan-Azalan Fonksiyonlara Yönelik Öğretmen Görüşleri	135
Tablo 41. Artan-Azalan Fonksiyonların Türevle İlişkisine Yönelik Öğretmen Görüşleri.....	136
Tablo 42. $f(x)$ Fonksiyonunun Özelliklerine Bağlı Olarak Başka Fonksiyonların Aynı	
Aralıkta Artan-Azalan Olmasına Yönelik Öğretmen Görüşleri	138
Tablo 43. $f(x)$ 'in Alt Aralıklarında Türevin Pozitif, Negatif ve Sıfır Olmasına Yönelik	
Öğretmen Görüşleri	140
Tablo 44. Artan-Azalan Fonksiyonlar ve Bu Fonksiyonların Türevle İlişkisine Yönelik	
Görüşme-Gözlem Yansımaları	141
Tablo 45. Kritik Nokta ve Ekstremum Noktalarına Yönelik Kategoriler ve Kodlar	144
Tablo 46. Kritik Nokta ve Ekstremum Noktalarına Yönelik Öğretmen Görüşleri	145

Tablo 47. Ekstremum Noktaları İle Türevin İlişkisi ve Bu ilişkinin Nedenlerine Dair Öğretmen Görüşleri	146
Tablo 48. $f(x)$ 'in Yerel Ekstremum Noktalarına Yönelik Öğretmen Görüşleri.....	149
Tablo 49. $f'(x)$ 'in Grafiğinin Çizimine Yönelik Öğretmen Görüşleri.....	151
Tablo 50. Öğretmenlerin $f'(x)$ 'in Grafiğine Yönelik Çizimleri	152
Tablo 51. Ekstremum Noktaları ve Bu Noktaların Türevle İlişkisine Yönelik Görüşme- Gözlem Yansımaları	154
Tablo 52. Konvekslik-Konkavlık ve Dönüm Noktasına Yönelik Kategoriler ve Kodlar	156
Tablo 53. Konveks, Konkav, Dönüm Noktası Kavramı ile Bu Kavramların II.Türevle İlişkisine Yönelik Öğretmen Görüşleri	157
Tablo 54. Öğretmenlerin Konvekslik-Konkavlık ve Dönüm Noktası Problemine Yönelik Görüşleri	159
Tablo 55. $f(x)$ 'in Konveks-Konkav Aralıkları İle Dönüm Noktalarına Yönelik Öğretmenlerin Görüşleri.....	161
Tablo 56. Konveks, Konkav ve Dönüm Noktası Kavramlarına Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları.....	162
Tablo 57. Maksimum-Minimum Kavramına Yönelik Kurulan ve Çözülen Problemlere İlişkin Kategoriler.....	164
Tablo 58. Maksimum-Minimum Problemlerinin Çözüm Aşamalarına İlişkin Kategoriler ...	166
Tablo 59. Asimptot Kavramına ve Çeşitlerine Yönelik Kategoriler ve Kodlar	169
Tablo 60. Asimptot Kavramına ve Çeşitlerine İlişkin Öğretmenlerin Görüşlerine Yönelik Kategoriler ve Kodlar	170
Tablo 61. Öğretmenlerin Grafik Çiziminde Dikkate Alınması Gerektiğini Düşündükleri Özellikler	173
Tablo 62. Grafik Çizimine Yönelik Kategoriler ve Kodlar.....	173
Tablo 63. Asimptotlar ve Grafik Çizimine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları.....	176
Tablo 64. Mutlak Değer Fonksiyonunun Türeviyle İlgili Öğrenci Bilgisine Yönelik Kategoriler ve Kodlar	179
Tablo 65. Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevine İlişkin Öğretim Stratejileri Bilgilerine Yönelik Öğretmen Görüşleri	182
Tablo 66. Köklü Sayıların Türeviyle İlgili Öğrenci Bilgisine Yönelik Kategoriler ve Kodlar	185
Tablo 67. Köklü Sayıların Türevine İlişkin Öğretim Stratejileri Bilgilerine Yönelik Öğretmen Görüşleri	187

Tablo 68. Kırılma Noktası ve Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Öğrenci Bilgisine İlişkin Kategoriler-Kodlar	190
Tablo 69. Kırılma Noktası ve Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Öğretim Stratejileri Bilgilerine İlişkin Öğretmen Görüşleri.....	192
Tablo 70. Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Öğrenci Bilgisine İlişkin Kategoriler-Kodlar	195
Tablo 72. Ekstremum Noktasına ve Bu Noktanın Türevle İlişkisine Yönelik Öğrenci Bilgisine İlişkin Kategoriler-Kodlar	200
Tablo 73. Ekstremum Noktası ve Bu Noktanın Türevle İlişkisine Yönelik Öğretim Stratejileri Bilgilerine İlişkin Öğretmen Görüşleri.....	203



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Türevin geometrik anlamı	11
Şekil 2. Shulman (1986b)'ın öğretmen bilgisi modeli	19
Şekil 3. Grossman (1990)'ın öğretmen bilgisi modeli	21
Şekil 4. Marks (1990)'ın öğretmen bilgisi modeli	22
Şekil 5. Fennema ve Franke (1992)'nin öğretmen bilgisi modeli.....	23
Şekil 6. Magnusson vd. (1999)'nin öğretmen bilgisi modeli	25
Şekil 7. Gess-Newsome (1999)'ın öğretmen bilgisi modeli	26
Şekil 8. An vd. (2004)'nin öğretmen bilgisi modeli.....	27
Şekil 9. Ball vd. (2008)'nin öğretmen bilgisi modeli.....	28
Şekil 10. Araştırmanın pedagojik alan bilgisine yönelik teorik çatısı.....	36
Şekil 11. $\hat{O}_1$ 'in $-f^2(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki türevine yönelik işlemler.....	94
Şekil 12. $\hat{O}_2$ 'nin $-f^2(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki türevine yönelik işlemler.....	95
Şekil 13. $g(x)$ üzerindeki noktalarda türevin varlığına yönelik problem.....	98
Şekil 14. $\hat{O}_3$ 'ün mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik işlemleri	104
Şekil 15. Eğri üzerindeki doğruların teğet doğrusu olma durumlarına yönelik problem	119
Şekil 16. Eğri üzerindeki noktalarda çizilen teğet doğrularına yönelik problem	122
Şekil 17. $f(x)$ 'in alt aralıklarında türevin pozitif, negatif ya da sıfır olmasına dair problem .	139
Şekil 18. $f(x)$ üzerindeki yerel ekstremum noktalarının belirlenmesine yönelik problem.....	149
Şekil 19. $f'(x)$ 'in grafiğinin çiziminde yararlanılacak $f(x)$ fonksiyonunun grafiği.....	151
Şekil 20. $f(x)$ 'in konveks-konkav aralıkları ile dönüm noktalarına yönelik problem.....	160
Şekil 21. Toplam-çarpım-fark ifadesine yönelik maksimum-minimum problemi.....	168
Şekil 22. Kenar-çevre-alan ifadesine yönelik maksimum-minimum problemi.....	168
Şekil 23. Mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik soru ve çözümü	179
Şekil 24. Köklü sayıların türevine yönelik soru ve çözümü.....	184
Şekil 25. Kırılma noktasına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik soru ve çözümü	189
Şekil 26. Kapalı fonksiyonların türevine yönelik soru ve çözümü.....	194
Şekil 27. Ekstremum noktasına yönelik soru ve çözümü	199

KISALTMALAR DİZİNİ

<i>bk.</i>	: Bakınız
MEB	: Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics
PAB	: Pedagojik Alan Bilgisi



BİRİNCİ BÖLÜM

Giriş

Problem Durumu

Teknolojik ve bilimsel gelişmelerin yaşandığı günümüzde toplumların nitelikleri de değişim göstermiştir (Güler, 2014). Bilgi toplumu olarak isimlendirilen günümüz toplumunda araştıran, sorgulayan ve gündelik problemlerin üstesinden gelen bireylere ihtiyaç duyulmaktadır (Kutluk, 2011). Toplumda arzu edilen bireylerin yetişmesi etkili bir eğitim süreciyle ilişkilidir (Dinçer, 2003). Eğitim sürecinin odağını şekillendiren üç ana bileşen öğretmen, öğrenci ve öğretim programıdır (Gökkurt, 2014; Karahan, 2008). Bu bileşenlerden biri olan öğretmen, bir toplumun sosyo-ekonomik açıdan gelişmişlik düzeyinin belirlenmesinde rol oynar (Özkan, 2005). Öğretmen, öğrencilerin gelecekte toplum içinde nasıl bir birey olacağına karar veren mekanizmalardan biridir (Aktürk, 2012). Öğretmen, toplumların geliştirdikleri eğitim teorilerini bire bir uygulayan ve öğretimin merkezindeki bireyleri yetiştiren en önemli kişidir (Küçükahmet, 1976). Öğrenmenin sadece konu ile birey arasındaki fiziksel etkileşim olmadığı düşünülecek olursa farklı öğrenme araçları kullanılarak yapılan öğrenimlerde öğretmen rol oynar (Kuzgun, 1991). Öğrenci niteliği ve başarısı, öğretmenin sahip olduğu niteliğin ve başarının bir yansımasıdır (Baştürk, 2009a). Bundan dolayı matematik öğretimini etkileyen en önemli değişkenlerden birisi öğretmendir (Aytaçlı, 2012; Oktay, 1991; Sönmez, 1990). Eğitim ve öğretimle ilgili yapılan araştırmalarda öğretmen niteliklerinin diğer tüm faktörlere oranla öğrencinin anlaması ve başarısı üzerinde daha etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Darling-Hammond, 2000; Hill, Rowan & Ball, 2005; Sanders, 2000; Sanders & Rivers, 1996; Wright, Horn & Sanders, 1997).

Bir toplumun muasır medeniyetler seviyesine ulaşabilmesi ve güçlü bir ülke olabilmesi için eğitim yuvalarında kaliteli bir öğretimin yapılması gerekir (Acar, 2012). Eğitim kurumlarında yetişen başarılı öğrencilerden söz etmek için de donanımlı öğretmenlere ihtiyaç vardır (Seferoğlu, 2004). Öğretmenlerin eğitim kurumlarındaki görevlerini doğru şekilde gerçekleştirebilmesi için iyi bir öğretmende bulunması gereken niteliklere sahip olmaları şarttır (Kılıç & Saruhan, 2006). Çünkü öğretmenlerin niteliğinin ve öğretmen yetiştirme sürecindeki kalitenin artması öğretimdeki başarıyı da olumlu etkilemektedir (Nuangchalem, 2011). Dünyada gerçekleşen teknolojik hamleler bilgiye daha çabuk ulaşma imkânı vermektedir. Buna rağmen eğitim alanındaki sorunların günden güne daha karmaşık bir hal alması yükseköğrenim kurumlarındaki öğretmen yetiştirme programlarının önemini

ortaya çıkarmıştır (elikten, anal & Yeni, 2005). Devletlerin eğitim ve ğretim politikalarındaki etkinlikleri, öğrenme sürecinde aktif rol oynayan öğretmenlerin görevlerine yönelik niteliklerin sorgulanmasını gerekli kılmıştır (Baştürk, 2009b). Eğitimde ve öğretimde verimliliğin arttırılması büyük çapta kaliteli bir ğretmen yetiştirme sistemine bağlıdır (Hedges & Valija, 1995). Eğitim alanında yapılan araştırmalarda öğretmenlerin bilgi seviyeleri incelendiğinden ğretmen yeterlilikleri, ğretmen nitelikleri ve öğretimin geliştirilmesi konularına yönelik araştırma sayılarının yakın zamanda arttığı görülmüştür (Arzi & White, 2008; Bromme, 1994; Darling-Hammond, 2000; Hacıömeroğlu & ahin Taşkın, 2009; Ponte & Chapman, 2008; Sanders & Morris, 2000; ara & Kocabaş, 2012). Bir dersin öğretimine dair ğretmen yeterlikleri incelendiğinde bu yeterliklerin başında konu alanı bilgisi gelmektedir (Alev & Karal, 2013). Nasıl ki bir ğretim etkinliği bireylerin öğrenmesinde bireylere rehberlik ediyorsa ğretimi yapılan konuya dönük bilgi de o ğretim için temel bir gerekliliktir (Karal Eyüboğlu, 2011). Kaliteli bir öğretmenin sahip olması gereken genel ve özel alan yeterlikleri (Magnusson, Krajcik & Borko, 1999) düşünüldüğünde ğretmen bilgisi bakımından alan bilgisi ön plana çıkar (Becker, Kennedy & Hundersmarck, 2003'ten Akt., Yıldırım & Vural, 2014; iltaş & Akıllı, 2011; Schempp, Manroos & Tan, 1998; Tanışlı, 2013).

Öğretmenin sahip olduğu bilgiyi organize etmesi anlamı taşıyan alan bilgisi, hem üzerinde çalışılan alandaki kavramları ve olguları doğru şekilde bilmeyi hem de alana yeni bilgiler kazandırarak araştırmalar yapmayı gerektiren bilgi türüdür (Shulman, 1987). Yararlı ğretim uygulamalarının belirlenmesi, üretici soruların sorulması ve öğretmenin ğrencilerinin ne düzeyde kazanımlara hâkim olduğunu değerlendirmesi gibi etkinlikler öğretmenin sahip olduğu alan bilgisiyle özdeşleşmiştir (Ball & McDiarmid, 1990). Alan bilgisinde öğretmenin bir konuyla ilgili kavramsal anlamda temsiller oluşturması, temsil edilen kavramların matematiksel anlamlarına sahip olmasıyla sağlanır (Borko & Putnam, 1996; McDiarmid, Ball & Anderson, 1989). Öğretmenlerin matematiğe yönelik sahip oldukları alan bilgileri eğitim ve öğretimde alınan kararları etkilemektedir (Lloyd & Wilson, 1998; Stein, Baxter & Leinhardt, 1990). Ball (1990a, 1991) matematik bilmenin ve matematik yapmanın nasıl bir şey olduğu sorusuna verilen ğretmen cevaplarının alan bilgisi bağlamında değerlendirilebileceğini belirtmiştir. İyi bir konu alanı bilgisi, dersin niteliğini arttırdığı gibi öğrencilerin başarılarına da olumlu etki eder (Brown & Borko, 1992; Ma, 1999).

Yeterli düzeyde konu alanı bilgisine sahip öğretmenler derste konuyu daha rahat anlatmakta, dersin öğretimine yönelik farklı yöntem ve stratejiler kullanmakta ve dersi daha

eğlenceli kılmaktadır (Cohen, McLaughlin & Talbert, 1993). Tam aksine yeterli düzeyde alan bilgisine sahip olmayan öğretmenler ise sahip oldukları olumsuz bilgileri öğrencilerine aktarmakta, öğrencilerin kavramsal sorularına cevap verirken zorlanmakta, öğrencilerin sahip oldukları kavram yanlışlarını değiştirmekte güçlük yaşamakta (Carlsen, 1999; Hashweh, 1987; Suh, 2005) ve derste daha despot tutum sergilemektedir (Bukova Güzel, Uğurel, Özgür & Kula, 2010). Derste öğrencilerin konuyla ilgili yönelttikleri sorulara verilen doğru yanıtlar ile uygulanan çözümler bir öğretmenin sahip olduğu alan bilgisinin önemli olduğunun göstergesidir (Kutluk, 2011). Ancak bir konuyu iyi bilmek bir öğretmeni nitelikli yapmadığı (Appleton, 2006) gibi öğrenme ortamlarında ortaya çıkan problemlerin de tümünü ortadan kaldırmamaktadır (Üner, 2016). Çünkü konuyu çok iyi bilmekle o konunun nasıl ve neden öğretileceğini bilmek farklıdır (Bucat, 2004). Buradan hareketle iyi bir öğretmen olarak anılmak yüksek düzeyde alan bilgisine sahip olmaktan daha fazlasını gerektirir (Davis, 2003; Kind, 2009). Öğretmen konu alanı bilgisine ne kadar çok hâkim olursa olsun bilgisini öğrencilerine aktarma ve öğretme becerilerine sahip değilse başarılı olamaz (Gökkurt, 2014). Öğretmenler iyi bir alan bilgisinin yanında konuyla ilgili önemli ve özel temsilleri, çoklu gösterimleri, kavramların akılda kalacağı doğru tanımlarını ve uygun öğretim yöntemlerini bilmeleri gerekir (Daehler, Heller & Wong, 2015; Hill, Schilling & Ball, 2004). Etkili bir öğretim yaparken öğretmen sahip olduğu kavramsal bilgiyi öğrencilerine doğrudan aktarmakla kalmamalı aynı zamanda öğrencilerin hazırbulunuşluk düzeylerini ve ön koşul öğrenmelerini belirleyerek o bilginin neden ve nasıl öğretilmesi gerektiğini de ifade edebilmelidir (Shulman, 1986a). Öğretmenin sahip olduğu alan bilgisiyle uygun öğretim etkinliklerinde bulunması öğrenci başarısındaki en önemli yordayıcılar arasında kabul edilmektedir (Baumert vd., 2010; Hill vd., 2005). Yakın zamanda bilim insanları araştırmalarında bir öğretmenin sahip olduğu konu alanı bilgisinin yanı sıra konuyu öğretme şekline ve alan bilgisini dersin öğretiminde nasıl kullandığına odaklanmıştır (Ball & McDiarmid, 1990; Goodnough, 2006; Hill, Ball & Schilling, 2008; Marks, 1990; Mishra & Koehler, 2006; Park & Oliver, 2008a; Staley, 2004; Tchoshanov, 2011). Bu doğrultuda öğretmenlerin iyi düzeydeki konu alanı bilgilerinin yanında konunun öğrenciler tarafından kolayca anlaşılabilmesi sunum bilgisine ve öğrencilerin sahip oldukları kavram yanlışları ile hataları anlamayı gerektiren öğrenci bilgisine sahip olmaları gerekir (Adams & Krockover, 1997; Gökkurt, 2014). Öğretmenlerin konu alanı bilgilerinin transferi anlamına gelen bu bilgi Shulman (1986a) tarafından ortaya atılan Pedagojik Alan Bilgisidir.

Pedagojik alan bilgisi (PAB), anlamlı öğrenmeler sağlamak için öğretmenin kavrama yönelik temsil düzeyi en yüksek analogileri, görsel materyalleri, tanımlamaları ve örnekleri kullanmasını gerektiren bir bilgi türüdür (Shulman, 1986a). Ball ve Bass (2000) daha özele

indirgediği pedagojik alan bilgisini öğretim için gerekli matematik bilgisi şeklinde ifade etmiştir. Konu alanı bilgisinin öğretiminde kullanılan pedagojik alan bilgisi (Gökkurt, Şahin, Soylu & Soylu, 2013), öğretmenlerin öğrenme ortamlarında edindikleri tecrübelerle, öğretim pratiklikleriyle ve öğrencileriyle kurdukları iletişimle gelişen bir süreçtir (Lee, Brown, Luft & Roehrig, 2007). Alan bilgisi ile pedagoji bilgisini birbirine entegre eden pedagojik alan bilgisi (Loughran, Mulhall & Berry, 2004), bir öğretmendeki konu alanı bilgisinin neden yetersiz kaldığı sorusunun cevabıyla ilgilenir (Shulman, 1987). Bu nedenle pedagojik alan bilgisi, etkili bir öğretim için öğretmenin bilgisini öğrencisine aktarmasından ve öğrencinin de o bilgiyi özümsemesinden çok daha fazlasını gerektirir (Loughran, Berry & Mulhall, 2006). Öğrencilerin ön öğrenmelerinin, öğrenme zorluklarının ve kavram yanlışlarının ortaya çıkması durumunda öğretmenin içerik bilgisini kullanarak öğrencideki durumları öğretime dönüştürmesi de pedagojik alan bilgisinin bir özelliğidir (Shulman, 1986a, 1986b, 1987).

Pedagojik alan bilgi düzeyi gelişmiş öğretmenler, öğrenciler için konuyu daha anlaşılır hale getirmekte, öğrencilerin sahip oldukları öğrenme zorluklarını, kavram yanlışlarını kolayca tespit etmekte ve öğrenme güçlüklerini giderici öğretim stratejilerini kullanmaktadır (Griffin, Dodds & Rovegno, 1996; Gudmundsdottir, 1987; Padilla, Ponce-de-Leon, Rembelo & Garritz, 2008; Smith & Neale, 1989). Pedagojik alan bilgisi düşük düzeyde olan öğretmenler ise öğrencilerini gözlemlerken ve onlara dönüt verirken zorlanmakta (Uşak, 2005), derste öğrencilerine sürekli basit hatırlatma soruları sormakta (Cochran, 1997) ve öğrencilerin öğrenme zorluklarını ortadan kaldırmada problem yaşamaktadır (Bütün, 2012). Shulman (1986a) pedagojik alan bilgisine dikkat çektikten sonra eğitim bilimleri alanındaki araştırmacılar pedagojik alan bilgisinin doğası, gelişim kaynakları ve modelleri üzerine çalışmalar yapmıştır (Ball, Thames & Phelps, 2008; Baxter & Lederman, 1999; Clermont, Borko & Krajcik, 1994; Cochran, De Ruiter & King, 1993; Geddis, 1993; Fennema & Franke, 1992; Park & Oliver, 2008b; Silverman, 2005). Pedagojik alan bilgisi üzerinde çalışan bazı bilim insanları Shulman'ın PAB fikrini geliştirdikleri modellerde sadece temel olarak alırken birçok bilim insanı PAB'ı tamamen benimsemiş ve desteklemiştir (Bromme, 1995; Evens, Elen & Depaepe, 2015; Gess Newsome & Lederman, 1999). Pedagojik alan bilgisine yönelik farklı öğrenme ve yaş düzeyindeki bireylerle yapılan çalışmalar öğretmen bilgi modelini temel edinen PAB'ın anlaşılmasına katkı sağlamıştır (Gökkurt, 2014). Öğretim sürecinde edinilen tecrübeler ile öğrencilerin nasıl öğrendikleri hakkında pedagojik alan bilgisinin anlaşılması bu kavramın eğitim alanındaki değerini daha da arttırmıştır (Abell, 2008).

Öğretmenlerin güçlü bir PAB'a sahip olmasının öğrencilerin öğrenmeleri ve başarıları üzerinde pozitif etki ettiği bilinmektedir (An, 2009; Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang & Loef, 1989; Choy, Wong, Lim & Chong, 2013; Hill vd., 2005; Jüttner & Neuhaus, 2012; Lange, Kleickmann & Möller, 2012). Fakat öğretmenlerin PAB yeterlik düzeylerine yönelik çalışmalar incelendiğinde öğretmen PAB düzeylerinin düşük olduğu sonuçlarına ulaşılmıştır (Ball, 1990; Even & Tirosh, 1995; Gökkurt, 2014; Gökkurt, Şahin & Soylu, 2012; Sarkim, 2004; Van Driel, Verloop & Vos, 1998). Öğretmenlerin düşük düzeyde PAB'a sahip olmaları öğrencilerin başarılarına da olumsuz yansımaktadır (Cheang, Yeo, Chan & Lim-Teo, 2007; Dönmez, 2009). Bu nedenle öğretimin düzenli bir şekilde sürdürülmesi ve öğrenci öğrenmelerinin başarılı şekilde gerçekleştirilmesi için öğretmenlerin PAB düzeylerinin yüksek olması gerekir (Özmantar & Bingölbali, 2009; Tirosh, Even & Robinson, 1998). Öte yandan literatürde matematik eğitime yönelik PAB araştırmaları incelendiğinde bu araştırmaların büyük çoğunluğunun ortaokul matematik öğretmen adaylarıyla gerçekleştirildiği görülmüştür (Baki, 2013; Even, 1993; Goulding, Rowland & Barber, 2002; Hacıömeroğlu, 2013; Krauss, Baumert & Blum, 2008; Leinhardt ve Smith, 1985; Lesniak, 2003; Şahin vd., 2013; Tanışlı, 2013; Tichá & Hošpesová, 2010). Matematik öğretmen adaylarından elde edilen bilgiler lise matematik öğretmenlerinin PAB yeterliklerini belirlemede yetersiz kalabilir (Duran & Kaplan, 2016). Bu nedenle mevcut çalışmanın öğretmenlik mesleği içinde bulunan ve öğrencilerin öğrenmelerinde önemli bir pozisyona sahip olan öğretmenlerle yapılması kararlaştırılmıştır. Bu doğrultuda yapılan bu araştırmanın amacı, lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik pedagojik alan bilgilerini incelemektir.

Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

Analiz, matematiğin önemli bir öğrenme alanı olup lise düzeyinde öğrenim gören öğrencilerin karşılaştığı bir ders olarak bilinir (Desfitri, 2016). Hacısalihoglu vd. (2000)'ne göre analiz (calculus), fonksiyonların diferansiyelleri ve integralleriyle uğraşılacak bir matematik dalıdır. Buna göre analiz, türev ve integral gibi önemli konuları barındırmakla beraber türev ve integralin bağlantılı olduğu konulardan ve kullanılan notasyonlardan dolayı fonksiyon, limit ve süreklilik konularını da içermektedir. Üniversite düzeyinde analiz mühendislik, ekonomi, iktisat-işletme, matematik bölümlerinde okutulmakta ve matematiğin değişen hızlarla ilgili birimini konu edinmektedir (Işık & Bekdemir, 1998). Zhang (2003)'a göre analiz dersinin öğretimindeki temel amaç, öğrencilerin hesap becerilerinin gelişmesini, matematiksel notasyonları iyi kullanmalarını ve teoremleri etkili şekilde öğrenmelerini sağlamaktır. Amerika'daki Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi (NCTM) ortaöğretim

düzeyindeki analiz konularından limit, değişim oranı, teğetin eğimi, grafiğin altında kalan alanın hesaplanması gibi konuların yüzeysel şekilde anlatılmasını tavsiye etmiştir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989).

Hughes-Hallet vd. (1994)'ne göre analiz, insan zekâsının en büyük başarılarından biridir. Ancak üniversite düzeyinde yüksek not ortalamasına sahip öğrencilerin bile analiz dersinde kavramlar arasındaki ilişkilere yönelik eksik anlamalarından dolayı rutin olmayan problemlerdeki başarısızlıkları ortaya çıkmıştır (Selden, Selden, Hauk & Mason, 2000). Analiz dersinin öğretiminde ve öğreniminde hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin güçlük yaşadığı bilinen bir gerçektir (Ferrini-Mundy & Graham, 1991; Kertil, 2014; Hähkiöniemi, 2006; Orton, 1983; Tall & Vinner, 1981; Ubuz, 2001; White & Mitchelmore, 1996; Viholainen, 2006; Zandieh & Knapp, 2006). Tall (1992) çalışmasında öğrencilerin analize yönelik zorluklarını; sonsuzda limit alma, Leibniz notasyonlarını yorumlama, fonksiyonları anlayabilme, işlemsel bilginin ve temsillerin kullanımı başlıkları altında belirlemiştir. Analiz dersine yönelik öğrencilerle yapılan araştırmalardan elde edilen olumsuz sonuçlar analizdeki başarısızlıkların öğretimsel, sosyo-ekonomik, epistemolojik, politik ve bireysel kaynaklı olabileceğini ortaya koymuştur (Amit & Vinner, 1990).

Tek bir nicelikteki değişimi izlemek, iki değişkenli niceliklerin birbirine göre nasıl değiştiğini anlamak ve geleceğe dönük tahminlerde bulunmak amacıyla analizin en önemli kavramlarından birisi olan türev kullanılmaktadır (Çetinkaya, Erbaş & Alacacı, 2013). Astronomi, fizik ve mekanik alanında bulunan en önemli denklemler 17. yüzyılın sonunda analizin türev ve integral denklemleri olarak bilim alanında yer edinmiştir (Kleiner, 2001). 17. yüzyıl matematikçilerinden Fermat ve Descartes, eğri üzerindeki bir noktaya çizilen teğet doğrusunun eğiminin grafiksel şemalarını göstererek eğrideki bir sekantın (kiriş) nasıl teğet doğrusu haline geldiğini cebirsel gösterimlerle açıklamıştır (Grabiner, 2004). Bu yüzyılın matematikçilerinden Fermat, polinom fonksiyonların grafiklerinin en büyük ve en küçük değerlerini kullanarak türevin gelişiminde öncü olmuştur (Katz, 2009).

17. yüzyılın sonlarında Newton ve Leibniz cebirsel sembollerden yararlanarak türev-diferansiyel sembollerini keşfetmiş, 18. yüzyılda Euler, fonksiyonu kullanarak türevi geliştirmiş, 19. yüzyılda ise Lagrange türevin cebirsel tanımını, Cauchy limit ve sonsuz küçüklükler tanımını, Weierstrass ise epsilon-delta tanımını yapmıştır (Duru, 2006). Grabiner (1983)'e göre türev önce kullanılmış, daha sonra keşfedilmiş ve en sonunda da tanımlanmıştır. Türev, farklı alanlardaki diğer kavramları anlayabilmek için üniversite matematiğinde ihtiyaç duyulan önemli bir kavram haline gelmiştir (Tall, 1992, 1993). Bir miktarın başka bir miktara göre değişme oranını temsil etmede kullanılan türev (Weber,

Tallman, Byerley & Thompson, 2012), başta matematik, fen ve mühendislik alanlarındaki birçok uygulamada bireylerin karşısına çıkar (Jones & Watson, 2017; Kaplan, Öztürk & Öcal, 2015; Swanagan, 2008). Buna göre matematiğin sayısal analizinde (İbrahimoglu & Bayram, 2008), fiziksel hız, ivme ve deneysel zaman serilerinde, biyolojide nüfus artışı gibi çeşitli sayısal soruların çözümünde (Yılmaz & Güler, 2006) ve ekonomideki limit kavramlarının açıklanmasında (Gür & Barak, 2007) türevden yararlanılır.

Türev kullanılarak bir ülkedeki kanser hastalarının sayısının hangi değere kaçınıcı yılda ulaşabileceği öngörülebilir, borsadaki hisselerin satışındaki artma veya azalma hızları bulunabilir, sabit hızla hareket etmeyen bir hareketlinin bir andaki hızının ne olduğu hesaplanabilir veya zeytinyağının bombeli bir şişeye doldurulurken zeytinyağı yüksekliğinin zeytinyağı miktarına göre nasıl değiştiği hakkında yorum yapılabilir. Öğrencilerin türevi daha iyi anlayabilmeleri türevin çoklu temsilleri arasındaki bağlantılarını bilmelerine bağlıdır (Herbert & Pierce, 2012; Roorda, Vos & Goedhart, 2009; Santos & Thomas, 2001; Tall, 2010). Çünkü türevin çoklu gösterimlerini değerlendirmek, temsiller arasındaki bağlantılara yönelik düşünme biçimini geliştirmektedir (Hiebert & Carpenter, 1992). NCTM, belirlediği standartlar arasında “çoklu gösterimler ve bunlar arasındaki bağlantılar” konusuna da vurgu yapmıştır (NCTM, 1989). Türevin birden fazla tanımı ve yorumu olduğundan dolayı çoklu temsillerin türevin tanımında ve yorumunda kilit rol oynadığı görülmektedir. Türev kavramının öğretiminde bilim insanları birbirinden farklı yaklaşımlar sergileyerek türevi tanımlamaya ve yorumlamaya çalışmıştır.

Girard (2002)’a göre türev nümeriksel (sayısal), grafiksel (geometrik) ve cebirsel (sembolik) temsiller olmak üzere üç temsilde incelenmiştir. Nümeriksel temsilde matematiksel problemleri açıklamaya yönelik nümerikler hesaplanarak tablo şeklinde sunulmaktadır. Geometrik temsilde bir fonksiyonun grafik üzerinde tanımlanmasına yönelik işlemler söz konusudur. Cebirsel temsilde ise problemde yer alan değişkenlerin ve cebirsel özelliklerin sembolik kullanımları söz konusudur.

Kendal (2001)’a göre türev nümeriksel, geometrik, fiziksel ve sembolik anlamda açıklanmıştır. Nümeriksel anlamda, ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki ilişki belirtilmiştir. Geometrik anlamda, düz doğrular kullanılarak eğri üzerindeki bir noktaya lokal yaklaşma yapıp o noktadaki teğet doğrusunun eğimi belirtilmiştir. Fiziksel anlamda türev; büyüme oranı, enflasyon oranı ve hız kavramlarıyla betimlenmiştir. Sembolik anlamda ise standart türev kurallarını işe koşarak türevin sembolik sonucuna ya da fonksiyonun bir noktadaki değerine yönelik sonuçlara ve limit alma işlemlerine vurgu yapılmıştır. Kendal (2001)’ın ortaya koyduğu türev kavramı ağında türevin fiziksel, nümeriksel, sembolik ve

geometrik temsilleri arasında ilişkiler gösterilmiştir. Buna göre türevin fiziksel anlamının nümeriksel anlamına ve bunun tam tersine bir dönüşümün olmadığı gösterilmiştir. Ancak türevin nümeriksel anlamındaki anlık değişim oranı kavramı hem geometrik hem de sembolik anlamlarda karşılık bulduğundan bu üç temsilin birbiriyle ilişkili olduğu belirtilmiştir.

Park (2012)'a göre türev kavramı sembolik, geometrik, fiziksel ve cebirsel formlarda temsil edilebilir (Park, 2012). Türevin sembolik gösterimleri $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ile $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ şeklindeki formüllerle ifade edilirken geometrik yorumda “fonksiyona bir noktada çizilen teğetin eğimi fonksiyonun o noktadaki türevidir” şeklindeki tanım vurgulanmıştır. Sembolik gösterimde bir noktada aranan türev ile bir aralıkta aranan türev formülleri dikkati çeker. Türevin fiziksel gösteriminde hareketli bir nesnenin bir andaki hızı gibi fiziksel durumlara yönelik uygulamalar söz konusuysen cebirsel gösterimler, türev formüllerinin uygulanmasına neden olan öğrenme ürünleri için kullanılır (Park, 2012).

Zandieh (2000) ise türev tanımını açık şekilde ifade etmek amacıyla eylem (action), süreç (process), nesne (object) ve şema (schema) bölümlerinden oluşan kapsamlı bir çerçeve oluşturmuştur. Bu çerçeveyi türevin çoklu gösterimleri (sembolik, geometrik, fiziksel, sözel) ile süreç-nesne çiftleri (oran, limit, fonksiyon) olmak üzere iki bileşene ayırmıştır. Çoklu gösterimlere yönelik türev; farkların oranının limiti olarak sembolik anlamda, bir eğriye bir noktadan çizilen teğetin eğimi olarak geometrik anlamda, hız olarak fiziksel anlamda ve anlık değişim oranı olarak sözel anlamda ifade edilmiştir (Zandieh, 2000). Süreç-nesne çifti boyutundan bakıldığında ise matematiksel olarak türev, oran bağlamında $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ veya $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ notasyonlarıyla sembolize edilmiştir. Buna göre bu gösterimlerde bağımsız değişkene yönelik herhangi bir limit alma işlemine gidilmeyerek sadece iki değişkenli niceliklerin birbirine göre durumları oran kullanılarak gösterilmiştir. Limit bağlamında türev $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ veya $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ notasyonlarla sembolize edilmiştir. Buna göre bu gösterimlerde farkların oranına yönelik bir limit alma işlemi vardır. Bununla birlikte ifadeler, bağımsız değişkenin tanımlandığı aralıkta sadece belirli bir noktadaki türev değerini bulmaya yöneliktir. Fonksiyon bağlamında ise türev $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ notasyonu ile sembolize edilmiştir. Buna göre bu gösterimde belirli bir aralıktaki genel bir türev fonksiyonunun varlığı söz konusudur.

Araştırmacıların türev tanımına yönelik çoklu temsilleri incelendiğinde anlık değişim oranı, anlık değişim hızı, fonksiyonun bir noktadaki teğet doğrusunun eğimi,

ortalama değişim oranlarının limiti ve farkların oranının limiti şeklinde türevi yorumladıkları görölmektedir. Türev tanımında fonksiyon, limit ve oran kavramlarının yer alması bu üç kavramın türev öğretiminde temel oluşturduğunu göstermiştir (Park, 2012; Thompson, 1994). Önceki öğrenmelerinde fonksiyon, limit ve süreklilik kavramlarının iyi öğrenilmemesi türev öğretimini de zorlaştıracaktır (Carlson, 1998; Confrey & Smith, 1994; Monk, 1992). Lise ders kitaplarında da türevin formel tanımı fonksiyon, limit ve oran temelinde şekillenmektedir. Lise ders kitapları incelendiğinde (Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2014; Keskin, 2017) türevin cebirsel anlamdaki formel tanımı şu şekilde yapılmıştır:

$a, b \in R$ ve $(a, b) \subset A$ olmak üzere $f: A \rightarrow R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $x_0 \in (a, b)$ için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ veya $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ limiti mevcutsa bu limite f 'nin x_0 noktasındaki türevi denir.

Türevin formel tanımı incelendiğinde bir f fonksiyonuna yönelik bilgilerin sunulduğu görölmektedir. Öncelikle türevi aranan fonksiyon ve nokta ile ilgili kesin bilgiler verilmektedir. Türevi aranan fonksiyonun tanım kümesi olan A kümesinin reel sayıların bir alt kümesi olduğu, türevi aranacak x_0 noktasının da tanım kümesindeki açık aralıkta olması gerektiği belirtilmiştir. Buradan hareketle x_0 noktasının tanımlı ve tanım kümesinin bir yığılma noktası olduğu söylenebilir. Tanımda ayrıca limit alma işlemi dikkat çekmektedir. Buna göre f fonksiyonunun değil onunla ilişkili yeni bir fonksiyonun limitinin alındığı görölmektedir. Limiti aranan $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ fonksiyonu incelendiğinde x_0 sabit ve x değişken olmak üzere bu fonksiyonun nümeriksel olarak f fonksiyonunun $[x_0, x]$ aralığındaki ortalama değişim oranı, geometrik olarak da x_0 ve x noktalarından geçen sekant (kiriş) doğrusunun eğimi anlamına geldiği söylenebilir. Bu araştırmada türev ve uygulamaları konusu içerisinde değerlendirilen bazı alt konular ve kavramlar bulunmaktadır. Bu alt konularda da türevin formel tanımında olduğu gibi dikkat edilmesi gereken matematiksel ifadeler ve notasyonlar yer almaktadır. Buna göre türevle ilişkisi olduğu bilinen ve türevin öncesinde öğretilen süreklilik kavramı dikkat çekmektedir. Süreklilik kavramı Balcı (1999)'ya göre hem sembolik şekilde hem de sözel olarak ifade edilmiştir. Sembolik olarak süreklilik kavramının tanımı şu şekilde yapılmıştır:

$A \subset R$ ve $f: A \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu “ a ” noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A kümesi üzerinde süreklidir denir. Yukarıda ifade edilen sembolik süreklilik tanımına tanımına göre bir f fonksiyonunun bir “ a ” noktasında sürekli olması için

fonksiyonun $x = a$ noktasında tanımlı olması gerekir. Ayrıca fonksiyonun $x = a$ noktasında limitinin olması gerekir. Bununla birlikte fonksiyonun $x = a$ noktasındaki limiti aynı noktadaki fonksiyon değerine de eşit olmalıdır. Süreklilik tanımında dikkat edilecek önemli noktalardan birisinin a 'nın A kümesinin bir elemanı olduğu yani bu kümenin bir yığılma noktası olduğunu belirtmesidir. Bunun yanı sıra fonksiyonun tanımlı olması, limitinin olması ve limit değerinin fonksiyon değerine eşit olmasına yönelik özelliklerin limit yardımı ile yapılan süreklilik tanımındaki özelliklere karşılık geldiği söylenebilir.

Öte yandan özel tanımlı fonksiyonlardan birisi kabul edilen mutlak değer fonksiyonunun türevi de birçok uygulama alanında ön plana çıkmaktadır. Hatta mutlak değer fonksiyonunun özelliğinden dolayı fonksiyon eğrilerinin ya da doğrularının kesişme noktalarındaki türevleri aranırken mutlak değer fonksiyonun özelliklerine ve sağdan-soldan türevin aranmasına dikkat edilmesi gerekir. Mutlak değer fonksiyonunun türeviyle ilgili Aydın ve Erbaş (2014) tarafından yapılan açıklamalar şu şekildedir:

$y = h(x)$ fonksiyonu R 'de türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$f(x) = |h(x)|$ fonksiyonunda $h(x_0) = 0$ ise $x = x_0$ noktasında $f(x)$ 'in sağdan ve soldan türevi alınarak türev kontrol edilir.

$f(x) = |h(x)|$ fonksiyonunda $h(x) \neq 0$ ise $f(x)$ 'in sağdan ve soldan türevini almadan $f'(x)$ bulunabilir.

$$f'(x) = (|h(x)|)' = \begin{cases} -h'(x), & h(x) < 0 \\ h'(x), & h(x) > 0 \end{cases} \text{ olur.}$$

$f(x) = |h(x)|$ fonksiyonunda, $h(x) = 0$ için bazı özel durumlar dışında $f(x)$ 'in türevi yoktur denilmektedir. Türev konularından birisi olan kapalı fonksiyonun türevleri de öğrenciler tarafından hataya düşülen konular arasında yer almaktadır. Öğrenciler kapalı fonksiyonun türevini ararken y 'nin x 'e bağlı bir fonksiyon olduğunun farkına varamamaktadır. Kapalı fonksiyonun türevini incelemeden önce kapalı fonksiyonun tanımının iyi bilinmesi gerekir. Kapalı fonksiyon kavramı Kandemir (2015) tarafından şu şekilde tanımlanmıştır:

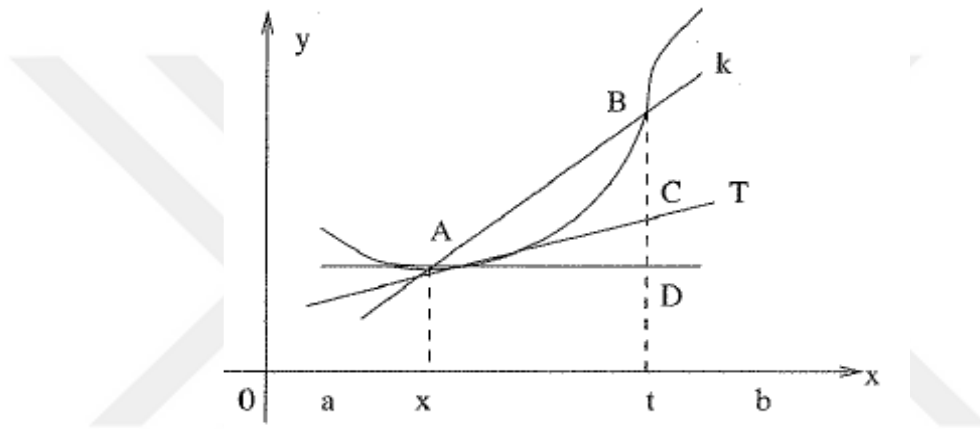
$F: D \subset R \times R \rightarrow R$ olmak üzere

$$F(x, y) = 0 \dots(3)$$

Denklemini göz önüne alalım. $f: I \subset R \rightarrow R$,

$$y = f(x) \dots(4)$$

fonksiyonu x noktasının bir $B(x_0, \varepsilon)$ komşuluğunda (3) denklemini sağlarsa yani $F(x, f(x)) = 0$ ise (4) fonksiyonu (3) denklemi tarafından tanımlanan kapalı fonksiyon olur şeklinde tanımlanmıştır. Öte yandan türevin çoklu temsilleri arasındaki ilişkilerin en yoğun olduğu durumlardan birisi de türevin geometrik anlamıdır. Türevin geometrik anlamında bir eğri üzerindeki kirişin zamanla nasıl teğet doğrusuna nasıl dönüştüğü ifade edilir. Bu süreçte türev ile eğim kavramları arasındaki ilişki de ortaya çıkmaktadır. Türevle eğim arasındaki ilişkiden kasıt türevin geometrik anlamıyla sembolik anlamı arasındaki ilişkidir. Türevin formel tanımında yer alan formüle aslında türevin geometrik anlamını ifade ederken ulaşıldığı da söylenebilir. Türevin geometrik anlamı Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu (2007) tarafından Şekil 1’de şematize edilmiş ve açıklanmıştır:



Şekil 1. Türevin geometrik anlamı.

Şekil 1’e göre $[a, b]$ üzerinde sürekli bir $f: [a, b] \rightarrow R$ ve $y = f(t)$ fonksiyonu ile $x, t \in A$ noktaları verilsin. Bu fonksiyonun G eğrisi üzerindeki $A(x, f(x))$ ve $B(t, f(t))$ noktalarından geçen k kirişini göz önüne alalım. B noktası G eğrisi üzerinde A noktasına yaklaştığında bu K kirişinin limit durumuna A noktasında G eğrisinin teğeti denir. Şekil 1’e göre k kirişinin eğimi $m(\widehat{DAB}) = \alpha$ olmak üzere $\tan \alpha = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ olduğuna göre $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \tan \alpha$ olur. Bu durumda $f'(x)$ türevi $B \in G, B \rightarrow A$ iken k kirişinin limit durumu, yani A noktasında G eğrisine çizilen teğetin $0x$ eksenine oluşturduğu açının tanjantıdır. Buna göre x noktasında türevli $y = f(t)$ fonksiyonunun $A(x, f(x))$ noktasında teğet denklemi $y = f(x) + f'(x)(t - x)$ şeklinde yazılır. Tüm bu ifadeler kısaca özetlenecek olursa fonksiyonun bir noktadaki türevinin fonksiyona o noktada teğet olan doğrunun eğimine eşit olduğu söylenebilir. Öte yandan teğet kavramıyla ilgili olarak bir eğriye bir noktada değebilen ya da birden fazla noktada eğriyi kesebilen doğruya teğet doğrusu denir (Thomas, Weir, Hass & Giordano, 2005). Örneğin $y = x^2 + 1$ parabolünün $x = 2$ noktasındaki teğeti parabole tek bir noktada değerken $y = \tan x$ fonksiyon eğrisine $(0,0)$ noktasından çizilen teğeti ise eğriyi

birden fazla noktada kesmektedir. Öte yandan türevin uygulamalarında yer alan artan-azalan fonksiyonlar da türev kavramıyla ilişkili olan kavramlardır. Artan-azalan fonksiyonlar Demir (2014)'e göre şu şekilde tanımlanmıştır.

$y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığındaki tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ için $a < x_1 < x_2 < b$ şartı gerçekleşsin. Bu durumda

$f(x_1) < f(x_2)$ ise $f(x)$, (a, b) aralığında artan bir fonksiyon

$f(x_1) > f(x_2)$ ise $f(x)$, (a, b) aralığında azalan bir fonksiyon olur.

Artan-azalan fonksiyonlar gibi türev kavramıyla ilişkili olduğu düşünülen diğer önemli bir kavram da ekstremum kavramıdır. Ekstremum kavramı türevin uygulamalarında yer almakla birlikte kendi içerisinde yerel ekstremum ve mutlak ekstremum olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Yerel ve mutlak ekstremum kavramları da kendi içerisinde yerel maksimum-yerel minimum ve mutlak maksimum-mutlak minimum olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Ekstremum kavramı genel olarak tepe ya da çukur nokta olarak bilinir. Karadeniz (2003)'e göre yerel maksimum ve yerel minimum kavramları şu şekilde tanımlanmıştır:

$f: [c, d] \rightarrow R$ olmak üzere bir $y = f(x)$ fonksiyonunu ele alalım. $\varepsilon > 0$ ve $a \in (c, d)$ için f fonksiyonu a 'nın ε komşuluğunda en büyük değerini a noktasında alıyorsa $(a, f(a))$ noktasına fonksiyonun bir yerel maksimum noktası denir. $f(a)$ değerine de fonksiyonun bir yerel maksimum değeri denir. Benzer şekilde $f: [c, d] \rightarrow R$ olmak üzere bir $y = f(x)$ fonksiyonunu ele alalım. $\varepsilon > 0$ ve $a \in (c, d)$ için f fonksiyonu a 'nın ε komşuluğunda en küçük değerini a noktasında alıyorsa $(a, f(a))$ noktasına fonksiyonun bir yerel minimum noktası denir. $f(a)$ değerine de fonksiyonun bir yerel minimum değeri denir. Türevin uygulamaları arasında yer alan dönüm noktası, konvekslik-konkavlık kavramları da türevle ilişkili olan diğer kavramlardır. Dönüm noktası kavramı konvekslik ve konkavlıkla da ilişkili bir kavramdır. Nitekim dönüm noktası genel olarak fonksiyonun konvekslikten konkavlığa ya da konkavlıktan konveksliğe geçtiği nokta olarak bilinir. Konveks ve konkav kavramları da Kadakal (2010)'a göre şu şekilde tanımlanmıştır:

$f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu verilsin. $x_1, x_2 \in [a, b]$ olmak üzere f fonksiyonunun eğrisi x_1 'in en az bir $\delta > 0$ komşuluğunda teğetlerinin üzerinde kalıyorsa f fonksiyonunun x_1 'in komşuluğundaki eğrisine yukarı bükümlü (konveks) eğri denir. f fonksiyonunun eğrisi x_2 'nin bir $\delta > 0$ komşuluğunda teğetlerinin altında kalıyorsa f fonksiyonunun x_2 'nin komşuluğundaki eğrisine aşağı bükümlü (konkav) eğri denir.

Öğrenciler, türevin farklı temsilleri arasındaki ilişkilerini anlamada kendilerine göre öğrenme yolları keşfedebilirler (Santos & Thomas, 2003). Türev kavramının nasıl ve ne tür bir formda vurgulandığı öğrencilerin türeve yönelik farklı disiplinlerdeki anlayışlarını etkilemektedir (Bingölbali, 2008). Örneğin mühendislik fakültesinde öğrenim gören bir mühendislik öğrencisi, türevin fiziksel anlamını açıklamak için değişim oranı kavramını kullanırken fen edebiyat fakültesinde öğrenim gören bir matematik bölümü öğrencisi, ϵ (epsilon) – δ (delta) kanıtının anlaşılmasına yardımcı olmak için bir fonksiyonun sonsuz aralıkları üzerindeki davranışını tanımlayan matematiksel anlamına vurgu yapar (Park, 2012).

Lise matematik dersi öğretim programında diğer konulara oranla türev kavramı üzerinde daha fazla durulmasına (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013) ve türevin analizdeki merkezi rolüne (Furinghetti & Paola, 1991) rağmen türev öğrenciler için zor bir kavram olarak görülmektedir (Kieran, 1992; Tall, 1993; Willcox & Bounova, 2004). Analiz öğretimi yapılırken özellikle türev öğretimi üzerindeki engeller (Tall, 2010, 2012; White & Mitchelmore, 1996) türevin öğrenciler bakımından zor olduğu düşüncesini daha da desteklemektedir. Alanyazında hem lise hem de üniversite öğrencilerinin türevle ilgili öğrenme güçlüklerine, kavramsal zorluklara, hatalara, kavram yanılgılarına ve düşük başarı düzeylerine sahip olduklarını gösteren birçok araştırmaya rastlanmıştır (Hähkiöniemi, 2006; Hauger, 2000; Heid, 1988; Orton, 1983; Özkan & Ünal, 2009; Park, 2011; Stroup, 2002; Tall, 1997; Tyne, 2016; Ubuz, 2001; Viholainen, 2006). Buna göre lisans öğrencileri bir fonksiyonun sürekliliği ile türevi arasındaki ilişkiyi açıklayamamaktadır (Duru, Köklü & Jakubovski, 2010). Üniversite birinci sınıf öğrencilerinin % 45’inden fazlası, analiz dersini anlamada problem yaşamaktadır (Desfitri, 2008’den Akt., Desfitri, 2016). Yine lise öğretmenleriyle yapılan mülakatlarda öğretmenler, lise öğrencilerinin limit ve türev konusunda eksikliklerin farkında olduklarını belirtmiştir (Desfitri, 2016). Hatta bazı öğretmenler, kendilerinin dahi limit ve türevdeki bazı kavramlara halen hâkim olamadıklarını açıklamıştır.

Öğrencilerin bir diğer kavramsal zorluğu da değişim oranı kavramının türevle ilişkilendirilememesi durumudur (Heid, 1988). Öğrenciler bağımlı değişkene verilen değişim miktarıyla değişim oranı kavramlarını yanlış anlamaktadır (Rowland & Javanovski, 2004). Bununla birlikte öğrenciler doğrusal fonksiyonlardaki ortalama değişim oranını hesaplayabilirken lineer olmayan durumlarda ve eğrilerin bir noktasındaki değişim oranını bulmakta zorluk çekmektedir (Stroup, 2002; Teuscher & Reys, 2012). Ubuz (2007)’un çalışmasında öğrenciler bir noktadaki türevi ararken işlemsel olarak ulaştıkları sonucu değişim oranı kullanarak gösterememiştir. Öğrenciler türevin fiziksel anlamını ifade ederken

de zorlanmakta ve ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki farkı türev kavramıyla ilişkilendirememektedir (Bingölbalı, 2008; Orton, 1983; Teuscher & Reys, 2010). Ayrıca öğrenciler ortalama değişim oranının anlık değişim oranına nasıl yaklaştığını anlamakta güçlük yaşamaktadır (Hähkiöniemi, 2006; Hausknecht & Kowalczyk, 2008). Carlson, Jacobs, Coe, Larsen ve Hsu (2002)'nın yaptığı bir araştırmada üniversite öğrencileri türevin özelliklerini işlemsel olarak kullanabilmesine rağmen bir şişede zamana bağlı olarak yükselen suyun hacim fonksiyonunu grafiksel olarak gösterememiş, şişenin genişliğine göre yükseklikte meydana gelen değişimi şişenin genişliğiyle ilişkilendirememiş ve dolayısıyla değişim oranı kavramını problemin çözümünde uygulayamamıştır.

Öğrencilerin türevin geometrik anlamıyla ilgili öğrenme zorluklarından birisi de fonksiyonun bir noktadaki türevinin fonksiyona o noktada çizilen teğet doğrusunun denklemiyle açıklanmasıdır (Amit & Vinner, 1990; Ferrini-Mundy & Graham, 1991; Gür & Barak, 2007; Orton, 1980). Bu hataların nedeni olarak öğrencilerin türevin geometrik anlamını yeterince yorumlayamaması ve limit-türev ilişkisini anlayamaması gösterilebilir (Ubuz, 2001, 2007). Orton (1983) türevin geometrik yorumuna yönelik öğrenci zorluklarının sadece karmaşık eğrilerle değil düz çizgilerde de oluşabileceğini belirtmiştir. Orton (1983) öğrencilerin yaklaşık % 20'sinin bir noktadaki türevi, teğet noktasının ordinat değeriyle karıştırdıklarını belirlemiştir. Ferrini-Mundi ve Graham (1994)'a göre öğrenci fonksiyonun türevinin grafiğini çizmeden önce grafiksel temsil edilen fonksiyona yönelik bir denklem bulma çabasına girmektedir. Leinhardt, Zaslavsky ve Stein (1990) öğrencilerin grafikler üzerinde eğim hesaplarken zorlandığını bildirmiştir. Öğrenciler fonksiyon ile fonksiyonun birinci türevine yönelik grafikleri analitik ifadeyle ilişkilendirmede yetersiz kalmakta (Asiala vd., 1997; Biza, Christou & Zachariades, 2008) hatta fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri arasındaki ilişkiyi de zor anlamaktadır (Garcia, Llinares & Sánchez-Matamoros 2011; Sánchez-Matamoros, Garcia & Llinares, 2006, 2008; Sánchez-Matamoros, Fernández & Llinares, 2015). Dahası, öğrenciler türevin geometrik anlamını doğru tanımlasalar bile bu tanımları yanlış yorumlamaktadır (Amit & Vinner, 1990; Ubuz, 2001; White & Mitchelmore, 1996).

Yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçlarda lise ve üniversite öğrencilerinin türeve yönelik kavramsal ve sezgisel anlayışlarının sınırlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Metaxas, 2007; Orton, 1983; Stacey, 2006). Lise düzeyinde limit, türev, integral gibi analiz konularının öğretiminde öğrenciler çoğunlukla işlemsel becerileri kazanıp kavramsal bilgileri göz ardı etmektedir (James, 1995). Bununla birlikte türev alma becerilerini ölçmeye ve öğrenci-öğretmen görüşlerine yönelik çalışmalar göstermiştir ki öğrenciler türeve yönelik düşük başarı

düzeyine sahiptir (Orton, 1983; Selden, Mason & Selden, 1989, 1994; Viholainen, 2006). Üniversite düzeyinde bile türev konusuyla baş etmekte güçlük yaşayan öğrenciler (Parameswaran, 2007) sadece tek bir türev temsilini göstermeye yönelmekte (Habre & Abboud, 2006; Morgan, 1990; Ferrini-Mundy & Lauten, 1994) ancak türevin çoklu temsilleri arasındaki bağlantılarını belirlemede yetersiz kalmaktadır (Dunham & Osborne, 1991; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Viholainen, 2008). Bununla birlikte öğrenciler türeve yönelik öğrendiklerini gündelik yaşama da yansıtamamaktadır (Frid, 1992, 1994).

Öğretmenler, öğrencilerin türev ve uygulamalarına dönük yaşadıkları güçlüklerin en az aza indirilmesi ya da ortadan kaldırılması noktasında kilit rol oynamaktadır. Öğrencilerin türevi anlamamasının nedenlerinden birisinin uygulanan öğretim yöntemi olduğu (Bingölbalı, Monaghan & Roper, 2007) düşünüldüğünde öğrencilerin türev konusunda başarılı olmalarında öğretmenin önemli bir faktör olduğu söylenebilir. Öğrencilerin matematikteki bir konuya yönelik öğrenme eksikliklerinin farkında olma ve bu eksiklikleri düzeltme noktasında ilk sorumlu kişi öğretmendir (Açıkyıldız, 2013). Buradan hareketle iyi bir konu alanı bilgisine, öğrenci zorlukları bilgisine ve öğretim sunum bilgisine sahip öğretmenler türev konusunda öğrencilerin yaşayabilecekleri öğrenme zorluklarının farkında olacağından hem bu zorluklara yönelik tedbirleri alabilir hem de öğrencilerin türev konusunda daha başarılı olmalarını sağlayabilir.

Öğrencilerin türevin çoklu temsiller arasındaki farklılıkları ve bağlantıları görememesi çoğu zaman kavram yanlışlarının gelişmesine neden olmaktadır (Park, 2011, 2013). Türev kavramının iyi anlaşılması için çoklu temsiller arasındaki sıkı ilişkilerin ve fonksiyon, limit, süreklilik gibi konuların iyi kavranması gerekir. Lise düzeyinde türev konusunun kavramsal anlamda iyi anlatılmış olması (James, 1995) öğrencilerin üniversitenin ilk sınıfında analiz dersinin iyi anlaşılmasının önündeki engelleri ortadan kaldıracaktır (Burton, 1989). Öğrencilerin türev ve uygulamalarını kavramsal anlamda, kalıcı şekilde öğrenebilmeleri lise matematik öğretmenlerinin türev konusunda yeterli düzeydeki pedagojik alan bilgileriyle mümkündür. Bu açıdan lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki pedagojik alan bilgilerinin belirlenmesine yönelik çalışmaların yapılması önemlidir.

Alanyazında türevin çoklu temsillerine ve uygulamalarına yönelik çalışmalar incelendiğinde bu çalışmaların çoğunlukla matematik öğretmen adaylarıyla yapıldığı görülmüştür. (Akkaya, 2009; Aldemir, 2017; Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997; Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Ergene, 2011; Hacıömeroğlu, Aspinwall & Presmeg, 2010; Maharaj, 2013; Monk & Nemirovsky, 1994; Pinzka, 1999; Pustejovsky, 1999; Siyepu, 2013a, 2013b). Bu durumun yanı sıra PAB’la ilgili olarak kesirler (Duran, 2017; Sezer, 2012),

geometrik cisimler (Bilik, 2016; Yıldız, 2017), sayı örüntüleri (Yeşildere & Akkoç, 2010) ve cebir (Çıkrıkçı, 2015; Muflihin, 2015; Şahin, 2016) konularına yönelik çalışmaların ortak bir yanı ise bu çalışmaların çoğunlukla ortaokul düzeyinde yapılmış olmasıdır. Ortaokul düzeyinde PAB'a yönelik çalışmalardan elde edilen sonuçlar lise öğretmenlerinin PAB düzeylerini açıklamada yetersiz kalabilir (Käpyla, Heikkinen & Asunta, 2009). Buna göre, yapılan bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik pedagojik alan bilgilerinin detaylı bir şekilde incelenmesi amaçlanmıştır. Bu araştırmayla birlikte lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik PAB düzeyleri ve PAB'larındaki eksiklikler tespit edilerek araştırmadan elde edilecek sonuçların öğrenme ortamlarının düzenlenmesinde etkili olacağı ve öğretmenlerin PAB düzeylerinin artırılmasına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Problem Cümlesi

Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki pedagojik alan bilgileri nasıl farklılaşmaktadır?

Alt Problemler

1. Öğretmenlerin türev ve uygulamaları konusundaki konu alanı bilgileri nasıldır?
2. Öğretmenlerin türev ve uygulamaları konusundaki öğrenci ve öğretim strateji bilgileri nasıldır?
3. Öğretmenlerin konu alanı bilgileri mesleki deneyim, cinsiyet ve mezun olunan fakülte türüne göre farklılaşmakta mıdır?
4. Pedagojik alan bilgisinin konu alanı bilgisi, öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi bileşenleri arasında türev ve uygulamaları bağlamında nasıl bir ilişki vardır?

Varsayımlar

Araştırmaya katılan lise matematik öğretmenlerinin veri toplama araçlarına hiçbir baskı altında kalmadan, gönül rahatlığı içinde, içtenlikle ve şeffaf bir şekilde cevap verdikleri kabul edilmektedir. Gözlem sürecinde lise matematik öğretmenlerinin öğrencilerine ders anlatırken dışarıdan bir etkiye kapılmadan her zamanki doğal haliyle öğrencilerine ders anlattığı düşünülmüştür. Araştırma süresince araştırmacının öğretmenlere herhangi bir önyargılı davranışta bulunmadığı ve öğretmenlerle arasında olumsuz bir diyalogun yaşanmadığı varsayılmıştır.

Sınırlılıklar

Bu araştırma, Türkiye'nin Karadeniz Bölgesi'nin bir ilindeki genel liselerde görev yapan dört matematik öğretmeni ile sınırlıdır. Bu araştırmanın uygulama süresi 2015-2016 öğretim yılı ile sınırlandırılmıştır. Bu araştırma lise matematik öğretmenlerinin 12.sınıftaki türev ve uygulamaları konusuna dönük pedagojik alan bilgileri ile sınırlıdır. Bu araştırmanın pedagojik alan bilgisi boyutları konu alanı bilgisi, öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi ile sınırlandırılmıştır. Bu araştırma dört lise matematik öğretmeniyle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler ve ders içi gözlemlerle sınırlandırılmıştır.

Tanımlar

Pedagojik Alan Bilgisi: Pedagojik alan bilgisi (PAB), anlamlı öğrenmeler sağlamak için öğretmenin kavrama yönelik temsil düzeyi en yüksek analogileri, görsel materyalleri, tanımlamaları ve örnekleri kullanmasını gerektiren bir bilgi türüdür (Shulman, 1986a).

Konu Alanı Bilgisi: Konu alanı bilgisi, öğretmenlerin öğretecekleri konuya dönük bilgi düzeylerini, ispatlarını, işlem basamaklarını ve problem çözme becerilerini kapsayan çok boyutlu bir yapıdır (Shulman, 1986b).

Öğrenci Bilgisi: Öğrencilerin bir konuyu kolay veya zor öğrenmesi altında yatan nedenleri bilme durumlarını ve öğrencilerin öğrenme sürecinde ortaya çıkan bireysel farklılıklarını kavrama durumlarıdır (Cochran vd., 1993)

Öğretim Stratejileri Bilgisi: Bir konunun öğretimi sırasında öğretmenin sunumda kullanacağı simülasyon, analogi ve model gibi özel argümanlara yönelik bilgisidir (Magnusson vd., 1999).

İKİNCİ BÖLÜM

Kuramsal Çerçeve Ve İlgili Çalışmalar

Öğretmen Bilgisi Modelleri

Pedagojik alan bilgisine yönelik ilk çalışmalar incelendiğinde bu kavrama yönelik çalışmaların “öğretmenin pratik bilgisi” tanımıyla Elbaz (1981) tarafından başlatıldığı görülmektedir. Buna göre Elbaz (1981) çalışmasında öğretmenlerin öğretimi öğrenebilmelerine ve öğrenmeyi anlayabilmelerine katkı sağlayacak pratik bilgi (practical knowledge) modelini geliştirmiştir. Elbaz (1981) çalışmasında öğretmen bilgisi modeline yönelik ilk kuramsal sınıflandırmayı oluşturmuştur. Elbaz’ın tanımladığı pratik bilgi modeli, bir öğretmenin öğretim etkinliklerine yönelik düşünceleri, öğretimde konuya dönük alan bilgileri ve öğretime yönelik inançlarıyla gerçekleştirebileceklerini anlamaya yönelik bir modeldir. Pratik bilgi modelinin bileşenleri ise öğretim bilgisi, program bilgisi, alan bilgisi, bireysel bilgi ve okul çevresi bilgisi olmak üzere beş bileşenden oluşmaktadır (Elbaz, 1983). Öğretim bilgisi bileşeninde öğrencilerin konuyu anlamlı şekilde öğrenebilmeleri için öğretmene yönelik püf noktaları vardır. Program bilgisi bileşeninde bir öğretmenin müfredata yönelik sahip olduğu bilgi bütünü söz konusudur. Alan bilgisi bileşeninde öğretmenin öğretim yapacağı konuya dönük sahip olduğu bilgiye atıf yapılmaktadır. Bireysel bilgi bileşeninde bir öğretmenin bir konuyu nasıl öğretebileceğine yönelik bir öz yargı ve öz değerlendirme vardır. Son olarak okul çevresi bilgisinde ise bir öğretmenin okul ortamına ve okuldaki diğer öğretmenlere bakış açısına yönelik bilgisine vurgu yapılmıştır. Elbaz (1981)’a göre öğretmenler kendi deneyimlerinden yararlanarak pratik bilgilerindeki program ve öğretim bilgisi bileşenlerini yapılandırmaktadır. Leinhardt ve Smith (1985), pedagojik alan bilgisine yönelik öğretmen bilgisini konu alanı bilgisi ve ders yapısı bilgisi olmak üzere iki ana kategori altında sınıflandırmıştır. Konu alanı bilgisi kategorisinde bir öğretmenin konuya dönük kavramsal bilgisine ve algoritmik işlemler arasındaki ilişkileri anlamasına dikkat çekilmiştir. Ders yapısı bilgisi kategorisinde ise öğretmenlerin dersin öğretimini kaliteli şekilde planlamasına, dersi etkili bir şekilde tamamlamaya ve konuyu öğrencilerin anlayabileceği şekilde açıklamaya dönük bilgiler yer almaktadır.

Öğretmen bilgisine yönelik Elbaz (1981) ile Leinhardt ve Smith (1985) taraflarından geliştirilen modeller incelendiğinde, bu modellerde yer alan ortak unsurların konu alanı bilgisi ile pedagojik beceriler olduğu dikkat çekmektedir. Ancak tüm bu unsurların yanı sıra öğretmenin sınıf yönetimini nasıl sağladığı, ders içi etkinliklere ne düzeyde zaman ayırdığı ve

derste bir öğrencinin konuyu anlayıp anlamadığını nasıl düşündüğüne yönelik cevap bulması gereken sorulara modellerde yer verilmemiştir. Buna göre tek düze pedagojiden bağımsız olan konu alanı bilgisinin yetersiz olduğu söylenebilir (Gözel, 2016). Shulman (1986b) bir öğretmenin konu alanı bilgisinin, öğrencilerin anlayacağı bir forma dönüştüremediğini düşünerek bu durumu kayıp paradigma olarak belirtmiştir. Shulman (1986b), bir öğretmenin konu alanı bilgisi boyutuyla pedagojik becerilerini birbirine entegre ederek dersi işlemesi gerektiğini düşünmektedir. Bu düşünceyle Shulman (1986b) bir öğretmende bulunması gereken bilgiye yönelik konu alanı bilgisi (content knowledge), pedagojik alan bilgisi (pedagogical content knowledge) ve müfredat bilgisi (curricular knowledge) kavramlarını ön plana çıkarmıştır. Shulman'ın öğretmen bilgisi modeli, hem konu alanı bilgisi hem de pedagojik alan bilgisine dikkat çekilmesi nedeniyle önceki çalışmalarda oluşturulan öğretmen modellerinden ayrılmaktadır (Güler, 2014). Shulman (1986b)'dan uyarlanan öğretmen bilgisi modeli Şekil 2'de gösterilmiştir.

Öğretmenin Bilgisi		
Alan Bilgisi (Content Knowledge)	Pedagojik Alan Bilgisi (Pedagogical Content Knowledge)	Müfredat Bilgisi (Curricular knowledge)

Şekil 2. Shulman (1986b)'ın öğretmen bilgisi modeli (Akt., Gözel, 2016).

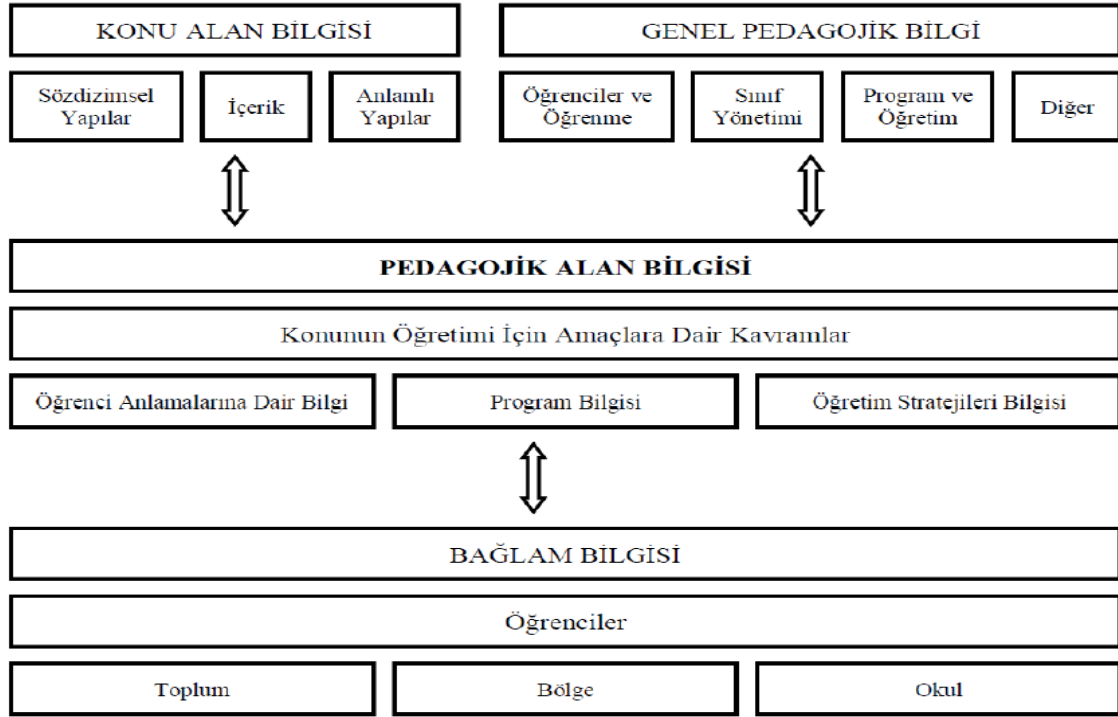
Şekil 2'deki model incelendiğinde pedagojik alan bilgisi kavramının bir öğretmen bilgisi modelinde ilk defa yer aldığı söylenebilir. Shulman (1986b)'ın öğretmen bilgisi modelindeki konu alanı bilgisi, matematiksel kavramların arka planında bulunan gerçeklikleri anlayabilme ve bu kavramlar arasındaki bağlantılara hakim olma olarak tanımlanmıştır. Buna göre kavramların özelliklerinin bilinmesinin yanı sıra bu kavramların neden önemli olduğu da konu alanı bilgisiyle ilgilidir (Shulman, 2004). Aynı modeldeki pedagojik alan bilgisi kavramı ise konu alanı bilgisinin çok daha ötesinde değerlendirilmekle birlikte konu alanı bilgisinin öğretiminde işe koşulan bilgi olarak tanımlanmıştır. Buna göre bir konunun öğretimindeki sunuş türleri, benzeşimler ve en uygun açıklamalar ile örnekler pedagojik alan bilgisinin sınırları içerisinde yer almaktadır. Ayrıca konunun öğretimini kolaylaştıracak veya tam tersi zorlaştıracak faktörler de pedagojik alan bilgisiyle ilgilidir. Modeldeki müfredat bilgisi ise bir dersin öğretiminde konunun ve ders materyallerinin öğretim programı içerisindeki pozisyonuyla ve konuya yönelik kazanımların diğer kazanımlarla olan ilişkisiyle ilgilenmektedir.

Shulman (1987) önceki çalışmalarında oluşturduğu öğretmen bilgisi modelini daha da geliştirerek modeli yedi ana başlık altında tanımlamıştır. Buna göre bu modelde alan bilgisi, genel pedagojik bilgi, program bilgisi, alanı öğretme bilgisi, öğrenci özelliklerine yönelik bilgi, eğitim ortamlarına yönelik bilgi ile eğitimsel amaçlara ve felsefelerine yönelik bilgi başlıkları bulunmaktadır. Modeldeki başlıklardan alan bilgisi, bir öğretmenin bir derse yönelik olguların doğruluklarını, geçerliklerini bilmeye dayanan bilgi türüdür. Genel pedagoji bilgisi, öğretmenin bir konuyu ne şekilde öğreteceğine yönelen bilgi türüdür. Bu bilgi türünde sınıf yönetiminin kuralları, materyal geliştirme aşamaları, ölçme-değerlendirme durumları ve öğrenme teorileri yer almaktadır. Program bilgisinde öğretimde kullanılacak materyallerin hangi zamanda ve hangi durumda işe koşulacağını gösteren bilgiler yer almaktadır. Alanı öğretme bilgisi, alan bilgisiyle pedagojik becerilerin kaynaşarak bütünleştiği bilgi türü olarak ifade edilir. Bu bilgi türü aynı zamanda konu alanı bilgisiyle pedagojik beceriler arasındaki bağı kurmaktadır. Alanı öğretme bilgisinde bir alan uzmanının bilgisi o alandaki bir pedagogun yani eğitimcinin bilgisinden ayrılmaktadır. Alanı öğretme bilgisinin diğer bir adı da pedagojik alan bilgisidir. Öğrenci özelliklerine yönelik bilgi, bireylerin yaşlarına göre hangi gelişim dönemlerinde yer aldıkları, hangi öğrenme dönemlerinin ödevlerini yerine getirebilecekleri, gelişim dönemlerinde öğrenmeyi nasıl gerçekleştirebilecekleri ve hangi bireysel ihtiyaçlara sahip oldukları bilgilerini içermektedir. Eğitim ortamlarına yönelik bilgi, okulun yapısı, sınıf ortamı ve araç-gereçlere yönelik bilgileri kapsamaktadır. Son olarak eğitimsel amaçlara ve felsefesine yönelik bilgide ise eğitimin dayandığı tarihsel ve felsefi temellere vurgu yapılmaktadır.

Shulman (1986a, 1986b, 1987) öğretmen bilgisi modelindeki pedagojik alan bilgisi kavramında, konu alanı bilgisindeki sunuş bilgisi ile öğrenci güçlükleri kavramlarına dikkat çekmiş ve bu kavramların pedagojik alan bilgisindeki anahtar kavramlar olduğunu dile getirmiştir (Van Driel vd., 1998). Shulman (1986a, 1986b, 1987) geliştirdiği öğretmen bilgisi modelinde, pedagojik alan bilgisinin konu alanı bilgisine dönüşümünden bahsederek pedagojik alan bilgisinin temel amacının, konu alan bilgisini farklı öğrenme düzeylerinde farklı bireysel ihtiyaçlara sahip öğrencilerin öğrenebilecekleri formlara dönüştürme veya değiştirme olarak ifade etmiştir. Buna göre öğretmen metafor, gündelik yaşam örnekleri, benzeşim, görseller ve sınıf içi çalışmalarla konu alanı bilgisine yönelik temsili güçlendirir ve öğretim materyallerini öğrencilerin bireysel farklılıklarına, sahip oldukları kavram yanılgılarına göre hazırlar (Cochran, 1997).

Shulman'ın öğretmen bilgisi modelini inceleyen Grossman (1990) ise bu modeli dikkate alıp modelde eksiklikler olduğunu düşünerek yeni bir öğretmen bilgisi modeli

geliştirmiştir. Grossman (1990) geliştirdiği öğretmen bilgisi modelinde alan öğretim bilgisini yani pedagojik alan bilgisini merkeze alarak konu alanı bilgisinin, genel pedagoji bilgisinin ve bağlam bilgisinin pedagojik alan bilgisiyle olan ilişkisine ve birbirilerini etkilemelerine vurgu yapmıştır. Grossman (1990)’dan uyarlanan öğretmen bilgisi modeli Şekil 3’de verilmiştir.

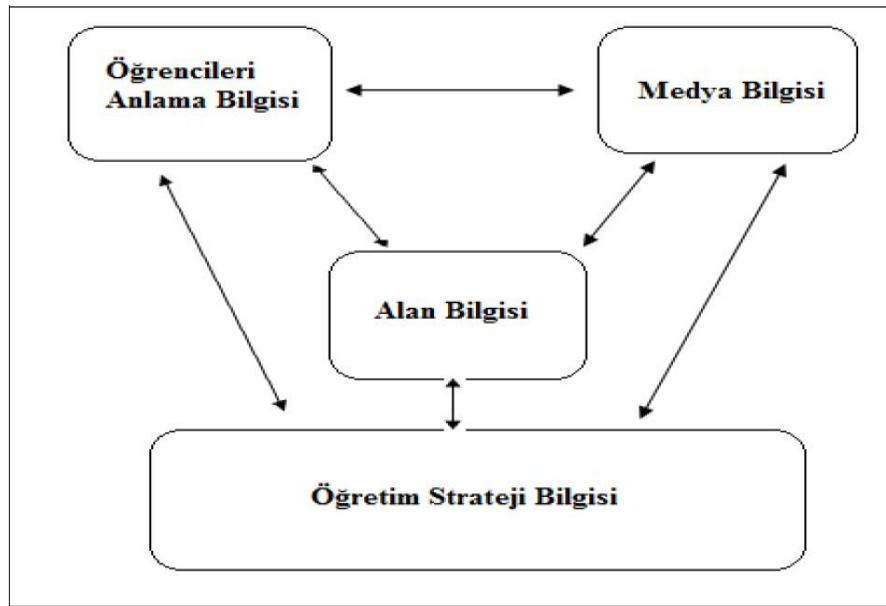


Şekil 3. Grossman (1990)’ın öğretmen bilgisi modeli (Akt., Kartal, 2017).

Şekil 3’deki model incelendiğinde Shulman (1986b)’ın öğretmen bilgisi modelinden farklı olarak Grossman (1990) modelinde öğretmeyi ve öğretmeni destekleyen pedagojik alan bilgisi kavramını dört bileşende incelemiştir. Ayrıca Grossman (1990) modelinde Shulman’dan farklı olarak da bağlam bilgisi kavramını PAB’ı etkileyen bir bileşen olarak göstermiştir. Shulman (1986b)’ın modelinde bir alt bileşen olarak yer alan program bilgisi bu modelde pedagojik alan bilgisinin bir parçası olarak gösterilmiştir. Grossman bu modelde konu alanı bilgisi, genel pedagoji bilgisi ve bağlam bilgisi bileşenlerini pedagojik alan bilgisi etrafında çevreleterek pedagojik alan bilgisini merkeze almıştır. Grossman (1990)’ın PAB içeriğinde ise konunun öğretimi için amaçlara dair kavramlar (öğretimin amaçları), öğrencilerin konuyu öğrenmelerini değerlendirme (öğrenci anlamalarına dair bilgi), öğretim stratejisi bilgisi ve müfredat bilgisi (program bilgisi) kavramları barınmaktadır. Grossman (1990)’ın öğretmen bilgisi modelindeki konu alanı bilgisi, öğretilecek konunun özelliklerine ve içeriğine yönelik bilgidir. Buna göre sözdizimsel yapılar içeriğe yönelik bilgi olarak yorumlanırken anlamlı yapılar konuyla alakalı temel bilgiler şeklinde belirtilmiştir. Genel pedagoji bilgisi, eğitim ve öğretimin genel prensiplerine yönelik özelliklerin yer aldığı bilgidir. Bağlam bilgisi ise okul ortamındaki tüm gelişmelerin merkezinde bulunan öğrencinin

toplumu, okulu ve sosyal çevreyi bilmesine yönelik bilgisidir. Grossman (1995) ilerleyen dönemlerde öğretmen bilgisi modelini geliştirerek dört bileşenden oluşturduğu modele öğretmenlerin öz değerlendirmesi bilgisi olan benlik bilgisi bileşenini eklemiştir.

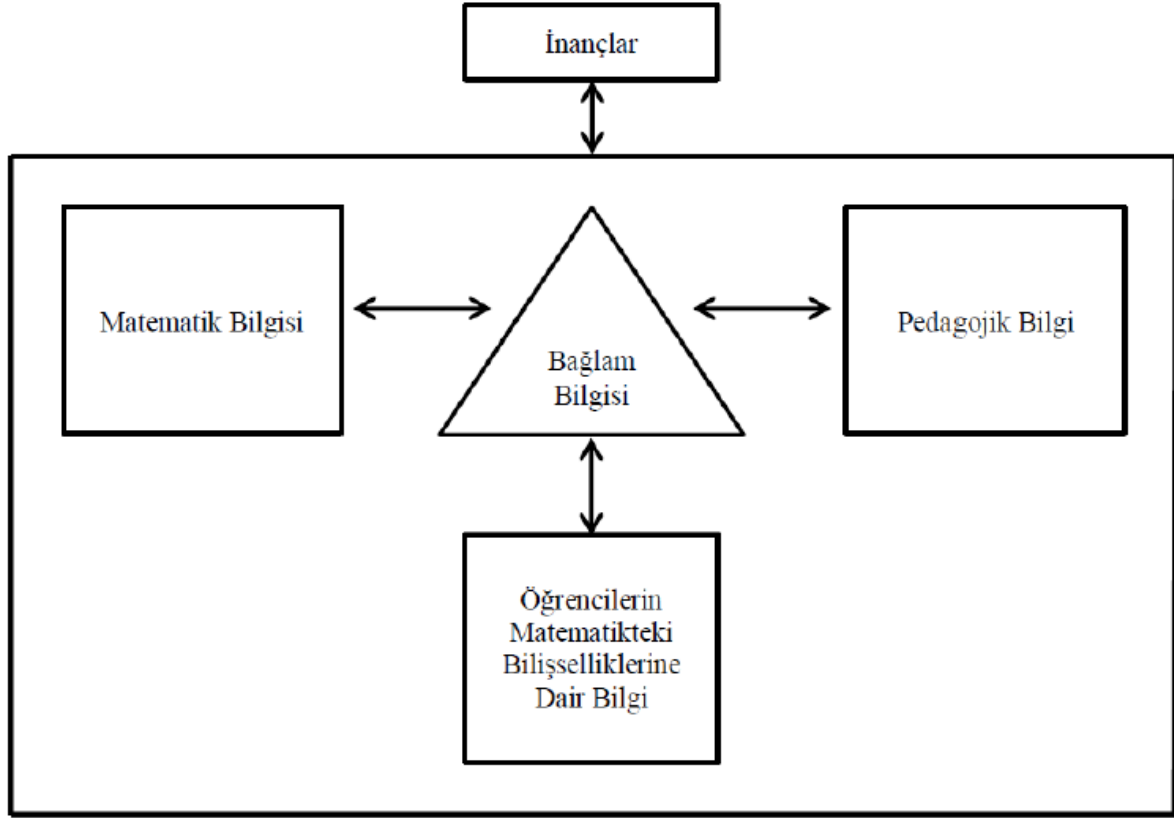
Marks (1990) daha önce Shulman (1986b) ve Grossman (1990)'ın geliştirdiği öğretmen bilgi modellerine karşı çıkmış ve PAB'ın konu alanı bilgisinden ayrı tutulamayacağını belirtmiştir. PAB sınırlarının belirli olmadığını düşünen Marks (1990) PAB'ın konu alanı bilgisinden keskin bir sınırla ayrılamayacağını iddia etmektedir. Marks (1990)'a göre konu alanı bilgisi kavramı PAB'ın bir parçasıdır. Marks (1990)'tan uyarlanan öğretmen bilgisi modeli Şekil 4'te gösterilmiştir.



Şekil 4. Marks (1990)'ın öğretmen bilgisi modeli (Akt., Şahin, 2016).

Şekil 4'teki model incelendiğinde Marks (1990)'ın PAB kavramını; öğrenci zorluklarına ve dersin anlaşılmasına yönelik öğrencileri anlama bilgisi, öğretim amaçlarına yönelik alan bilgisi, konunun öğretiminde kullanılacak araçlara yönelik medya bilgisi ve konunun öğretim süreçlerine yönelen öğretim stratejisi bilgisi olmak üzere dört bileşenle gösterdiği görülmektedir. Bileşenlere dikkat edildiğinde tüm bileşenlerin çift yönlü oklardan dolayı birbirleriyle ilişkili olduğunu söylenebilir. Ancak Marks (1990) PAB'ın alt bileşenlerinin başlangıç ve bitiş sınırlarının net şekilde belli olmadığını düşünerek bu bileşenler arasındaki ilişki düzeyinin çok kolay belirlenemeyeceğini ifade etmiştir. Marks (1990), geliştirdiği modelde alan bilgisini bir nevi merkeze alarak öğretimde alan bilgisini işe koşarken diğer bileşenlerin araç olarak kullanılabileceğini belirtmiştir. Marks (1990), Shulman ve Grossman'dan farklı olarak PAB bileşenlerine medya bilgisi bileşenini eklemiştir. Bu bileşen daha önce geliştirilen hiçbir öğretmen bilgisi modelinde yer almamaktadır. Buna göre medya bilgisi, öğretimde kullanılan ders araç-gereçlerinin bireysel

farklılıkları da dikkate alarak öğrenci hizmetine sunulmasına yönelik bilgi şeklinde açıklanmıştır. Shulman (1986b, 1987)'ın modellerindeki kategorilerin öğretmen bilgisinin dinamikliğine ve doğasına uygun bulmadığını düşünerek eleştiren Fennema ve Franke (1992), geliştirdiği öğretmen bilgisi modelinde bağlama özel bilgiyi merkeze alarak bu bilginin sürekli okul ortamında farklı değişkenler sayesinde geliştiğini belirtmiştir. Fennema ve Franke (1992)'den uyarlanan öğretmen bilgisi modeli Şekil 5'te gösterilmiştir.

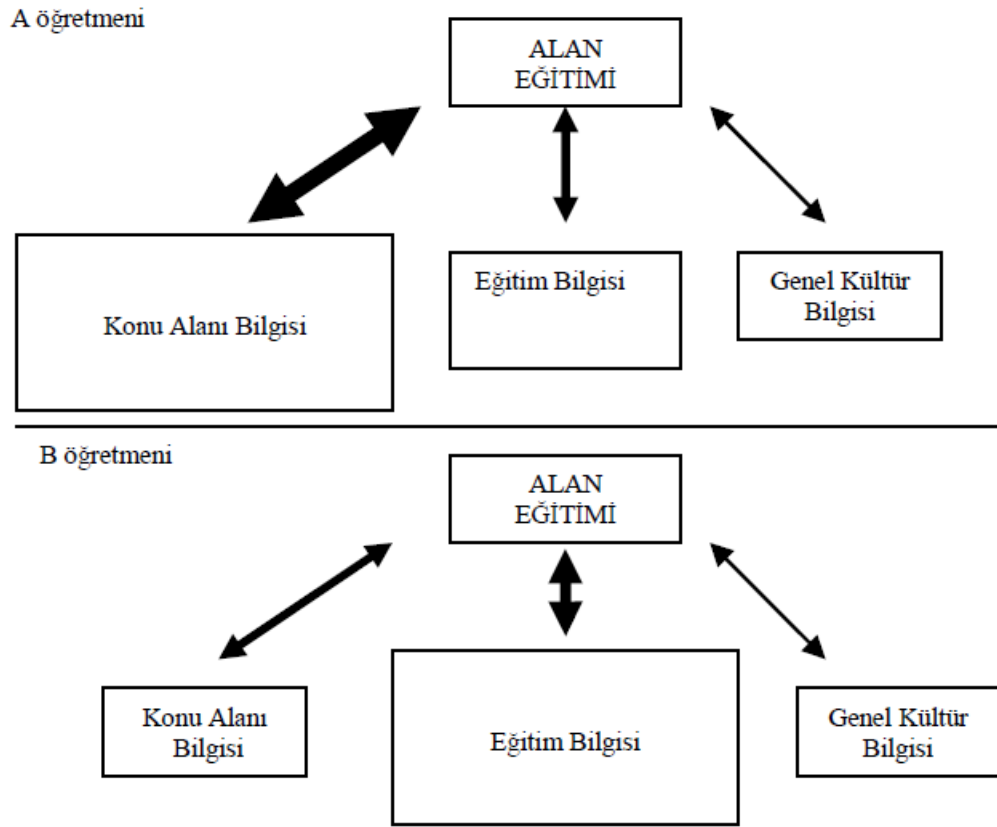


Şekil 5. Fennema ve Franke (1992)'nin öğretmen bilgisi modeli (Akt., Kartal, 2017).

Şekil 5'teki model incelendiğinde öğretmen bilgisinin matematik bilgisi, pedagojik bilgi, öğrencilerin matematikteki bilişselliklerine (anlayışlarına) yönelik bilgi ve bağlam bilgisi olmak üzere dört ana bileşenden oluştuğu görülmektedir. Öğrencilere yönelik inançlar da dışsal olarak diğer bileşenlerle bütünleşip öğretmenin sınıf içindeki öğretim sürecini ve öğrencilerle olan iletişimini şekillendirmektedir. Modelin merkezinde yer alan bağlam bilgisi, öğretim sürecinde yaşanan değişimler sayesinde sürekli gelişmektedir. Fennema ve Franke (1992) tarafından geliştirilen öğretmen bilgisi modeli daha önce geliştirilen öğretmen bilgi modellerinin bir sentezi olarak kabul edilmektedir (Güler, 2014). Bu modelde Grossman (1990)'ın modelindeki benzer olarak sosyal çevrenin öğrenmede etkili olduğuna atıf yapılmıştır. Fennema ve Franke (1992)'nin öğretmen bilgisi modelinde yer alan matematik bilgisi, matematik ve matematikle ilişkili kavramlara dayalı bilgi ve problem çözme sürecinde bu kavramların gösterdikleri değişikliklerin farkındalığına dayanan bilgi olarak ifade

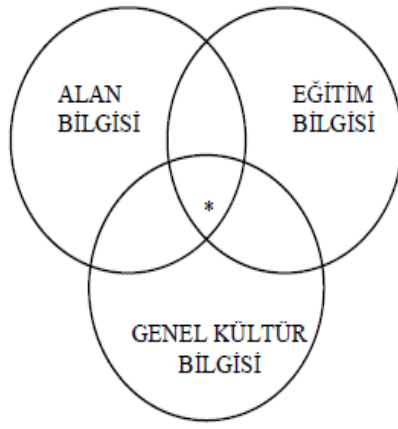
edilebilir. Matematik bilgisinde matematiksel kavramlara yönelik ilişkilerin ne şekilde örgütlendiği önemlidir. Aynı modeldeki pedagojik bilgi, bir öğretmenin öğretim sürecindeki sınıf yönetimi, dersi planlama, davranış mekanizması geliştirme ve motivasyon kavramları için kullandığı öğretim stratejilerine dayanan bilgidir. Modeldeki öğrencilerin matematikteki bilişselliklerine dair bilgi, öğrencilerin matematikteki anlayışlarına yöneldiği için matematiksel bir konunun nasıl düşünüldüğü ve konunun nasıl öğrenildiğine dayanan bilgiden ibarettir. Bağlam bilgisi ise olay ve durumların birbiriyle olan ilişkilerinde beliren inançlara dayalı bilgidir. Buradan hareketle öğretmen bilgisi modelindeki tüm bileşenler ve inançlar birlikte değerlendirilir.

Magnusson vd. (1999) tarafından geliştirilen öğretmen bilgisi modelinde ise pedagojik alan bilgisi kavramı; amaçlar bilgisi, değerlendirme bilgisi, program bilgisi, öğrenci zorlukları bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi olmak üzere beş ana bileşenden oluşmuştur. Magnusson vd. (1999)'nin geliştirdiği bu model daha çok Grossman (1990) tarafından geliştirilen öğretmen bilgisi modelinin revize edilmiş hali olarak düşünülebilir. Bu modelde yer alan amaçlar bilgisi, fen öğretimindeki amaçlara yönelik inançları kapsarken değerlendirme bilgisi öğretimin değerlendirme yöntemlerine yönelik bilgiyi işaret etmektedir. Modeldeki program bilgisi, öğretim programındaki özelliklere yönelik bilgi anlamına gelirken öğrenci zorlukları bilgisi öğrencinin ihtiyaç duyacağı gereksinimlere ve öğrenmede yaşanan zorluklara öğretmenin hâkim olması bilgisidir. Son olarak modeldeki öğretim stratejileri bilgisi ise ders ve konu alanlarındaki etkinliklere yönelik bilgidir. Modelde amaçlar bilgisinin diğer bileşenleri etkilediği görülmektedir. Benzer şekilde diğer dört bileşen de amaçlar bilgisi bileşeniyle ilişkilidir. Buradan hareketle bir öğretmen dersin amaçlarına ve hedeflerine yönelik sahip olduğu bilgiyi kullanarak öğretim amaçlarını ve sonuçlarını değerlendirebilir, öğrencilerin sahip oldukları zorlukları belirleyerek bu zorlukları minimum seviyeye indirebilir ve derste konuya en uygun öğrenme stratejilerini kullanabilir. Magnusson vd. (1999) geliştirdikleri öğretmen bilgisi modeli sayesinde bilgi bileşenlerinin birbirleriyle olan etkileşimlerini de incelemiştir. Buna göre bilgi bileşenlerinin alandaki ağırlıklarıyla orantılı şekilde alan eğitimi üzerinde etkili olabileceği savunulmuştur. Magnusson vd. (1999) tarafından uyarlanan öğretmen bilgisi gelişim modeli Şekil 6'da verilmiştir.



Şekil 6. Magnusson vd. (1999)'nin öğretmen bilgisi modeli (Akt., Pırasa, 2009).

Şekil 6'daki model incelendiğinde konu alanı bilgisi, eğitim bilgisi ve genel kültür bilgisi bileşenlerinin alan eğitimiyle olan etkileşim düzeyi gösterilmiştir. Ayrıca her bir bileşeni çevreleyen dikdörtgenlerin büyüklükleri temsil edilen bileşendeki bilgi ağırlığını, bileşenleri birbirine bağlayan okların kalınlığı ise bileşenlerin birbirleri üzerindeki etki büyüklüğünü göstermektedir. Şekilde verilen örnek incelendiğinde A öğretmenin konu alanı bilgisine yeterli düzeyde sahip olduğu ve alan eğitimi gelişiminin konu alanı bilgisi tarafından diğer bileşenlere oranla daha fazla etkilendiği söylenebilir. Öte yandan B öğretmenin zayıf bir konu alanı bilgisine sahip olduğu ancak güçlü bir eğitim bilgisi sayesinde alan eğitim gelişiminin etkilendiği görülmektedir. Magnusson vd. (1999)'nin geliştirdiği alan eğitimi gelişim modelini inceleyen Gess-Newsome (1999) ise öğretmen bilgisinin gelişimine yönelik birleştirici (bütünleyici) ve dönüştürücü olmak üzere iki ayrı model öne sürmüştür. Gess-Newsome (1999) tarafından uyarlanan öğretmen bilgisi modeli Şekil 7'de gösterilmiştir.



Birleştirici Model

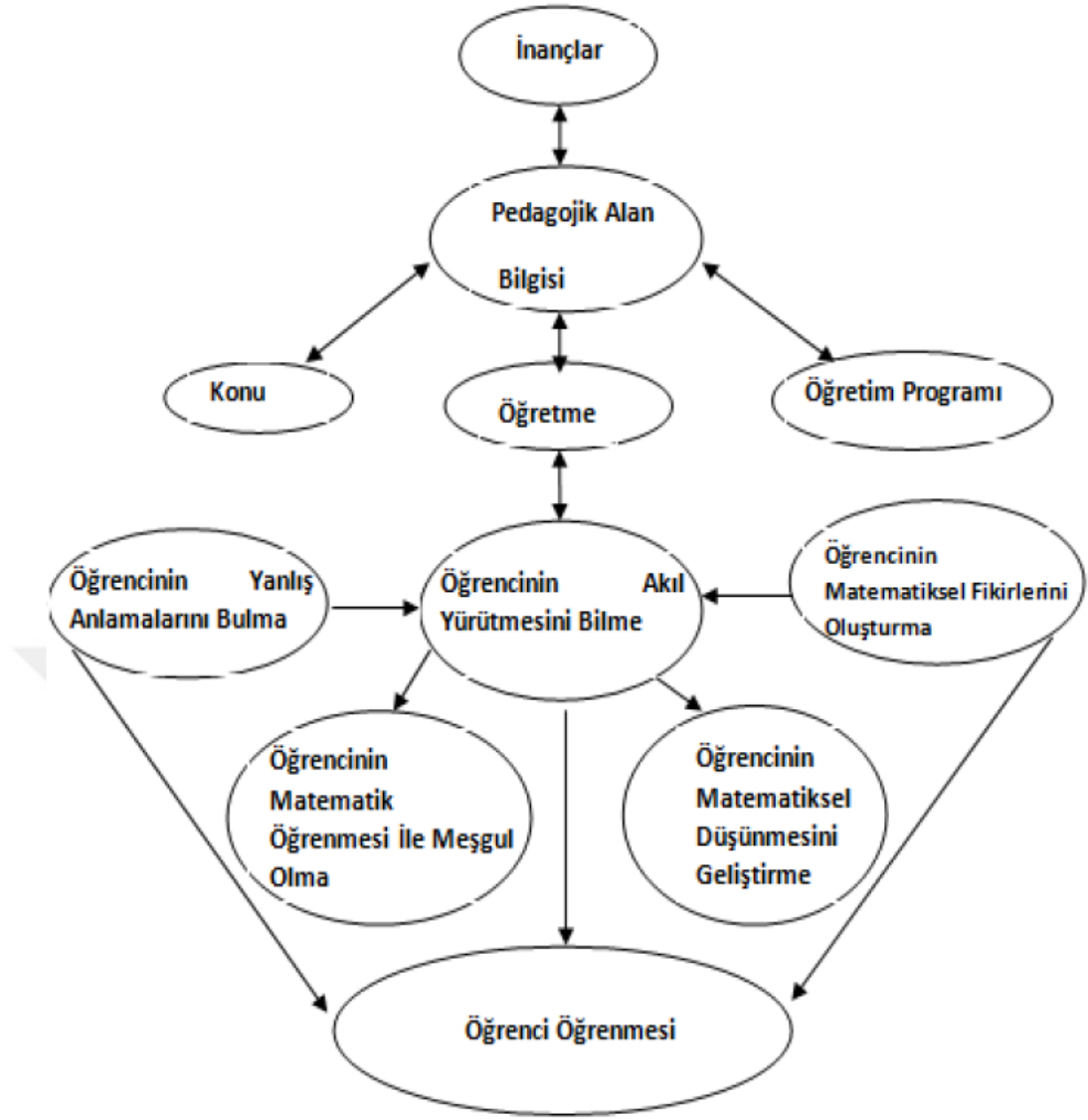
* Alan eğitimi için gerekli olan bilgi



Dönüştürücü Model

Şekil 7. Gess-Newsome (1999)'ın öğretmen bilgisi modeli (Akt., Pırasa, 2009).

Şekil 7'deki modeller incelendiğinde sol taraftaki birleştirici (bütünleyici) modelde PAB olarak bilinen alan eğitimi bilgisi, ayrı bir alanda şematize edilmeyerek alan bilgisinin, eğitim bilgisinin ve genel kültür bilgisi bileşenlerinin birbirine entegre edilmesiyle ortaya çıkmıştır. Bu modelde alan, eğitim ve genel kültür bilgisi bileşenleri ders içi uygulamalarda kullanılmakta ve birbirini etkilemektedir. Ders içi uygulamalarda bu bileşenler öğretmen tarafından bir araya getirilerek kaliteli bir öğretim gerçekleştirilmektedir. Sağ taraftaki dönüştürücü modelde ise PAB (alan eğitimi bilgisi) kendisini ortaya çıkaran alan, eğitim ve genel kültür bileşenlerinden bağımsız olarak ayrı bir alandaki bilgi türü olarak tanımlanmıştır. Genellikle öğretmen eğitimi programlarında kullanılan dönüştürücü modelde alan eğitimi bilgisi, üç bileşenin sentezlenmesiyle daha kuvvetli bir bilgi bütünü olarak ortaya çıkmaktadır. An, Kulm ve Wu (2004) tarafından geliştirilen öğretmen bilgisi modelinde pedagojik alan bilgisi kavramı konu alanı bilgisi, öğretme bilgisi ve öğretim programı bilgisi olmak üzere üç ana bileşen üzerine inşa edilmiştir. An vd. (2004)'nin uyarladığı, bileşenler arasındaki ilişkileri ve kavram ağını gösteren öğretmen bilgisi modeli Şekil 8'de verilmiştir.

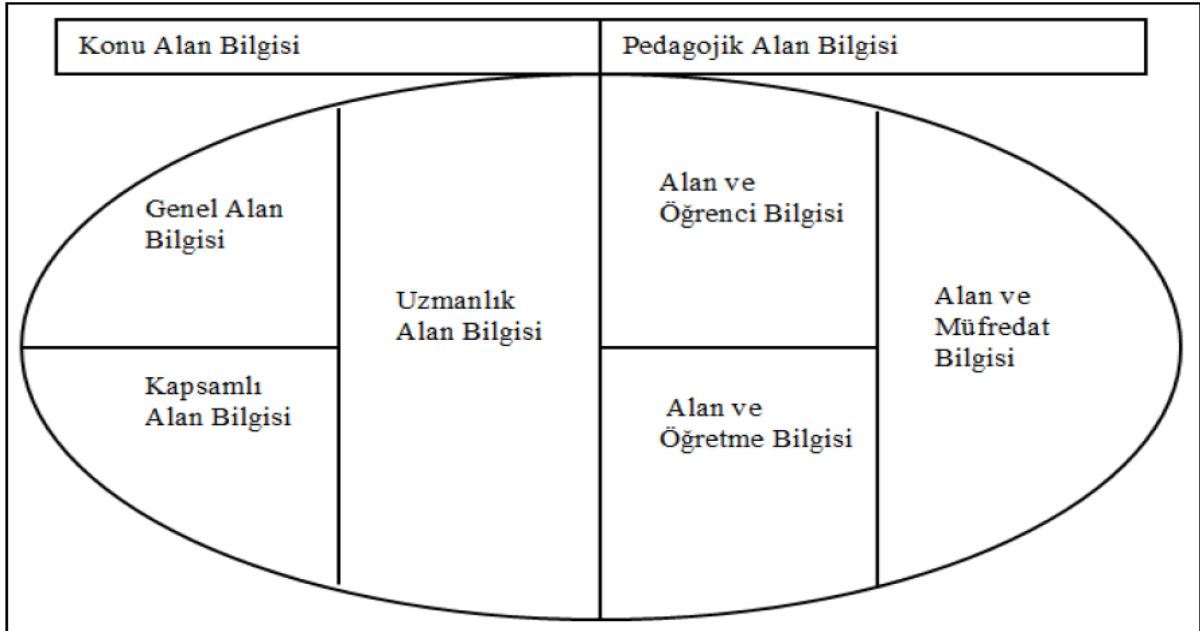


Şekil 8. An vd. (2004)'nin öğretmen bilgisi modeli (Akt., Baki, 2012).

Şekil 8'deki model incelendiğinde pedagojik alan bilgisini etkileyen faktörlerin inançlar, konu alanı bilgisi, öğretme bilgisi ve öğretim programı bilgisi olduğu dikkat çekmektedir. Bununla birlikte öğretme bilgisi bileşeni PAB'ı etkileyen üç bileşen arasında merkezi konumda bulunan ve diğerine göre daha fazla önemli görülen bir bileşendir. Buna göre öğretmenin PAB düzeyinin yüksek olması öğrenci zorluklarını gidermede, akıl yürütme becerisini geliştirmede ve matematiksel düşünceler üretmede dolayısıyla öğrencilerin öğrenmesinde etkilidir. Bu modele göre bir öğretmenin alan bilgisinin iyi olması için gerekli şartlardan birisi hem öğretim yapılacak sınıf düzeyindeki matematiksel bilgiye hem de bu sınıf düzeyinin daha üstündeki düzeylerdeki matematiksel kavramsal bilgilere sahip olmaktır. Öğretim programı bilgisinde ise müfredatta belirtilen kazanımların paralelinde öğretim etkinlikleri uygulamak ve müfredatta işaret edilen ders araç gereçlerini kullanmak esastır. Öğretmen bilgi modelinin çekirdeğinde bulunan öğretme bilgisi ise kendi içerisinde öğrenci zorluğu, akıl yürütme, düşünce üretme, öğrencinin öğrenmesiyle ilgilenme, düşünce

gelişimini teşvik etme ve bireyin öğrenmesi gibi alt bileşenlerden oluşmaktadır. Buna göre öğretme bilgisi daha çok öğrencinin öğrenme davranışını gerçekleştirmesine ve öğrenmesini geliştirmesine yönelik hareket etmektedir. An vd. (2004)'nin geliştirdiği öğretmen bilgisi modeline göre kaliteli bir öğretimin gerçekleşmesi sadece konu alanı bilgisine bağlı olmamakla birlikte öğretmenin iyi bir öğretim bilgisi ile müfredat bilgisine hâkim olmasıyla sağlanabilir. Bu modelde yer alan inanç faktörü bir öğretmenin öğretim yaparken öğrencilere yönelik sahip olduğu inançların da dersin öğretimi üzerinde etkili olduğunu göstermektedir. An vd. (2004) tarafından geliştirilen öğretmen bilgisi modeli incelendiğinde bu modelin daha önce Shulman (1986b, 1987) tarafından geliştirilen modelin içerik bakımından revize edilmiş ve detaylandırılmış bir formu olduğu söylenebilir. Buna ek olarak Shulman'ın modelindeki öğretim stratejisi bilgisinin An vd. (2004)'nin modelindeki öğretme bilgisi bileşeni altında yer aldığı söylenebilir.

Ball ve arkadaşları bir öğretmenin matematik öğretiminde hangi argümanlara ve ne çeşit ders içi uygulamalara ihtiyacı olduğunu cevabını aramak için bazı araştırmalara gerçekleştirmiştir (Ball vd., 2008; Ball & Bass, 2003; Ball, Hill & Bass, 2005; Hill vd., 2004, 2005, 2008; Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007). Bu araştırmaların ortak amacı öğretmenin kendisinden çok öğretim sürecinde gereksinim duyduğu yapılarıdır. Bu araştırmaların sonucunda Ball vd. (2008)'nin “öğretim için matematik bilgisi” başlıklı Şekil 9.'de uyarlanan öğretmen bilgisi modelini geliştirmişlerdir.



Şekil 9. Ball vd. (2008)'nin öğretmen bilgisi modeli (Akt., Bayram, 2016).

Şekil 9'daki model incelendiğinde alan öğretme bilgisi modeli; konu alanı bilgisi ve pedagojik alan bilgisi şeklinde, birbirinden keskin sınırlarla ayrılmış, iki bileşenden

oluşmaktadır. Shulman (1986b) tarafından geliştirilen modeldeki alan bilgisi Ball vd. (2008) tarafından geliştirilen modelde içerik bakımından zenginleştirilerek genel (içerik) alan bilgisi, kapsamlı alan bilgisi (matematiksel anlayış) ve uzmanlık (özelleştirilmiş) alan bilgisi alt bileşenleriyle ilişkilendirilmiştir. Buna göre genel alan bilgisi, öğretim haricindeki yapılacak iş ve işlemlerle ilgilenir. Örneğin öğretmenin tahtayı düzenli kullanması, kitapta yer alan yanlış cevabın fark edilmesi gibi. Kapsamlı alan bilgisi, müfredatta yer alan matematik konularının sunuluş düzeyiyle ilgilenmektedir. Uzmanlık alan bilgisinde ise matematikteki kavramsal bilgiler ve bu bilgilerin nereden geldiğini bilmek ön plandadır. Örneğin, üslü sayılarda sayıların sıfırcı kuvvetlerinin nasıl ve neden bir sayısına eşit olduğunun bilinmesi ve bu durumu anlatırken uygun bir matematiksel dilin kullanılması gibi.

Shulman (1986b)'ın geliştirdiği modelden farklı olarak aynı konu alanı bilgisinde olduğu gibi pedagojik alan bilgisi bileşeni bu modelde üç alt bileşen yardımıyla detaylı şekilde açıklanmıştır. Bu alt bileşenler alan-öğrenci bilgisi, alan-öğretim bilgisi ve alan-müfredat bilgisidir. Buna göre alan-öğrenci bilgisi alt bileşeni, matematiksel beceriler ile öğrenci bilgisinin kaynaşmasından oluşur. Örneğin, bir öğretmen matematikte konuya yönelik bir örnek seçtiğinde bu örneğin öğrencinin ilgisini çekme düzeyini bilmesi, verilen ev ödevinin öğrencinin yapabilmesi veya öğrencide kavram yanlışlığı oluşturmaması düzeyini öngörebilmesi gibi örnekler alan-öğrenci alt bileşenine yöneliktir (Petrou & Goulding, 2011). Alan-öğretim bilgisi alt bileşeni ise bir konunun içeriğine yönelik bilgi ile konunun öğretimindeki pedagojik prensiplerin karışımından oluşmaktadır. Örneğin, matematik dersinin öğretiminde öğretmenin kullanacağı örneklerden hangisinin akılda daha kalıcı olduğunun bilinmesi veya etkili öğretim için seçilecek yöntem, strateji ve teknikleri belirleyebilmek alan-öğretim bilgisi alt bileşenine yöneliktir.

Ball vd. (2008) tarafından geliştirilen öğretmen bilgisi modeli daha önce geliştirilmiş olan modellerden (Grossman, 1990; Magnusson vd., 1990; Marks, 1990; Shulman, 1986b, 1987) farklı şekilde ders içi uygulamalarına ağırlık veren bir yaklaşım olarak sergilemiştir. Bu bağlamda diğer öğretmen bilgisi modellerinden farklı olarak ders içinde gelişen olaylardan, öğrenci ve öğretmenlerden elde edilen ses ve video kayıtlarından, öğretmen günlüklerinden ve öğrencilerin defterlerinden, ödevlerinden elde edilen veriler bu uygulamaların bir parçası olarak düşünülebilir. Öte yandan, Ball vd. (2008)'nin geliştirdiği öğretmen bilgi modelinde pedagojik alan bilgisi bileşeni altında yer alan öğrenci-alan bilgisi ile öğretim-alan bilgisi alt bileşenlerinin Shulman (1986b, 1987)'ın geliştirdiği matematik bilgisi modelindeki pedagojik alan bilgisinin paralelinde olduğu söylenebilir.

Godino (2009), Shulman'ın pedagojik alan bilgisi ve Grossman'ın ğretim için matematik bilgisi modellerinin dikkate alınması gereken bazı bileşenleri yeterince yansıtmadığını düşünerek bu iki ğretmen bilgisi modelinin bütünlüşmesine dayalı “ğretici-matematiksel bilgi” adında yeni bir ğretmen bilgisi modeli ortaya koymuştur (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). Godino'nun öğretici-matematiksel bilgi (didactic-mathematical knowledge) modeli, öğretmenlerin matematiği öğretirken ihtiyaç duydukları bilgileri kategorize etmek için tasarlanmıştır (Pino-Fan & Font, 2015). Model, didaktik (ğretici) bilgi ve matematiksel (konu alanı) bilgi olmak üzere iki ana bileşenden oluşmaktadır. Didaktik bilgi bileşeni, matematiksel bilginin yeterli olmadığı durumlarda öğretmenin yardımına koşarak dersin planlanması ve içeriğin sağlıklı şekilde uygulanması esasına dayanır. Didaktik bilgi bileşeninde epistemik, bilişsel, duyuşsal, arabulucu, etkileşimsel ve ekolojik başlıklı altı alt bileşen vardır (Pino-Fan, Godino & Font, 2015). Epistemik alt bileşeninde ğretim sürecindeki kuramsal anlamın tanımlar, diller ve argumanlar gibi özel parçaları bulunur. Bilişsel alt bileşeninde bireysel anlamaların geliştirilmesine yönelik öğrenme faktörü ön planda olup öğrencilerin bilişsel yönleri hakkındaki bilgiler belirtilmiştir. Duyuşsal alt bileşeninde ğretim sürecinde önemli rol oynayan tutum ve motivasyon faktörleri vardır. Arabulucu alt bileşeninde öğrencilerin öğrenmelerini kolaylaştıran araçlar ve kaynaklar hakkındaki bilgiler bulunur. Etkileşimsel alt bileşeni sınıf ortamındaki ğretmen-ğrenci iletişimine yönelik bilgilerdir. Son olarak ekolojik alt bileşeninde ise öğrencilerin öğrenmelerinin yönetimindeki faktörlerden sosyal, politik, ekonomik ve müfredat gibi bilgiler bulunmaktadır.

Öğretici-matematiksel bilgi modelinin matematiksel boyutu olan konu alanı boyutu, öğretmenin karşılaştığı matematiksel problemlerin veya matematiksel etkinliklerin üstesinden gelinmesi esasına dayanır. Matematiksel bilgi bileşeni öğretmenlerin hem genel hem de uzmanlaştıkları alandaki bilgilerine katkı sağlamak için ortaya çıkmıştır. Matematiksel bilgi bileşeni, ortak içerik bilgisi ile kapsamlı (genişletilmiş) içerik bilgisi alt bileşenlerinden oluşmuştur (Pino-Fan, Godino & Font, 2016). Ortak içerik bilgisi alt bileşeni, belirli bir matematiksel görevi yerine getirmek için ders kitaplarından ve ğretim programlarından yardım alarak ya da ğrenci-ğretmen etkileşimi sağlanayak kolayca elde edilen bir bilgi türüdür. Kapsamlı (genişletilmiş) içerik bilgisi ise bir öğretmenin sadece ğretim yaptığı düzeydeki konu alanı değil bir sonraki düzeyde de bilgi sahibi olmasını hedefleyen bilgi türüdür. Kapsamlı içerik bilgisinde öğretmenin matematiksel kavramlar arasında bağ kurmak, öğrencilerin matematiksel öğrenme güçlükleriyle başa çıkmak ve öğrencileri bilinenin dışındaki başka matematiksel kavramların öğrenilmesine de yönlendirmek gibi görevleri bulunmaktadır. Godino (2009)'nın pedagojik alan bilgisine dönük ğretmen bilgi modeli

incelendiğinde bu modelin didaktik bilgi alt bileşeni; An vd. (2004) ile Fennema ve Franke (1992)'nin PAB'la ilişkili olan inançlar faktörüyle örtüşmektedir. Aynı bileşendeki ekolojik alt bileşen ise Grossman (1990)'ın bağlam bilgisiyle benzerlik göstermiştir. Modeldeki matematiksel bilgi alt bileşeni de Ball vd. (2008)'nin konu alanı bilgisi alt bileşenleriyle uyumlu olup ortak içerik bilgisi Hill vd. (2008)'nin modeliyle, kapsamlı içerik bilgisi ise Ball ve Bass (2009)'ın modeliyle örtüşmektedir. Araştırmacılar tarafından geliştirilen öğretmen bilgisi modelleri incelendiğinde PAB'ın hem kuramsal yapısı üzerinde hem de öğretmen bilgisi modellerindeki konumu üzerinde bir uzlaşının sağlanamadığı görülmektedir (Rowland & Ruthven, 2011). Bununla birlikte araştırmacılar PAB kavramını birbirlerinden farklı şekillerde tanımlamıştır. PAB'ı daha iyi anlayabilmek için PAB bileşenlerinin farklı sınıflandırmaları Tablo 1'de verilmiştir.



Tablo 1. *Pedagojik Alan Bilgisi Bileşenlerinin Farklı Araştırmacılara Göre Kavramsallaştırılması*

BİLEŞENLER	Öğretim Bilgisi	Alan Öğretme İçin Amaçlar Bilgisi	Öğrenci Bilgisi	Program Bilgisi	Öğretim Stratejileri Bilgisi	Medya Bilgisi	Değerlendirme Bilgisi	Alan Bilgisi	İçerik Bilgisi	Pedagojik Bilgi	İnançlar
Şahin (2016)			x		x			x			
Gökkurt (2014)			x	x	x		x	x			
Godino (2009)								x			
Kaya (2009)			x	x	x		x	x			
Ball vd. (2008)			x	x	x			x			
Loughran vd. (2006)		x	x		x			x	x	x	
Hashweh (2005)		x	x	x	x		x	x	x	x	
An vd. (2004)	x			x				x			x
Gess-Newsome (1999)								x			
Carlsen (1999)		x	x	x	x						
Magnusson vd. (1999)		x	x	x	x						
Wood & Geddis (1997)			x	x	x						
Tuan (1996)			x	x	x			x	x		
Fernandez-Balboa & Stiehl (1995)		x	x		x			x	x		
Cochran vd. (1993)			x					x	x	x	
Geddis (1993)			x	x	x						
Fennema & Franke (1992)			x					x	x	x	x
Marks (1990)			x	x	x	x		x			
Grossman (1990)		x	x	x	x						
Smith & Neale (1989)		x	x		x						
Tamir (1988)			x	x	x		x				
Shulman (1987)			x		x						

Tablo 1 incelendiğinde pedagojik alan bilgisi kavramı Shulman (1987)'dan başlayarak günümüze kadar yapılan çalışmalarda farklı formlarda modellenmiştir. Bununla birlikte araştırmacıların oluşturduğu öğretmen bilgisi modellerinin bileşenleri de araştırmacıdan araştırmacıya farklılık göstermiştir. Bazı araştırmacılar PAB'ı modelin ana başlığı veya modelin çıkış noktası olarak alırken bazı araştırmacılar da PAB'ı öğretmen bilgisi modelinin bir boyutu olarak ele almıştır. Araştırmacıların farklı öğretmen bilgisi modelleri ortaya koymaları PAB'ın öğretmen bilgisi modellerindeki konumu ve fonksiyonu üzerinde uzlaşının olmadığı bir göstergesidir (Şahin, 2016). Öğretmen bilgisi modellerindeki farklı alt bileşenler bazen aynı görevlere karşılık geldiği gibi aynı alt bileşenler de öğretmen bilgisi modelinin farklı boyutlarını temsil edebilmektedir. Sonuç olarak öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerini geliştirmek ve öğrencilere faydalı olmalarını sağlamak amacıyla öğretmen bilgisi modelleri araştırılarak geliştirilmiştir.

İlgili alanyazın incelendiğinde Shulman'ın öğretmen bilgisi modelini temel alarak geliştirilen birçok modelde (An vd., 2004; Ball vd., 2008; Cochran vd., 1993; Fennema & Franke, 1992; Marks, 1990) veya PAB'a yönelik araştırmalarda (Ball & McDiarmid, 1990; Bansilal, Brijlall & Mkhwanazi, 2014; Ebert, 1993; Maat, Zakaria & Yusof, 2011; Mapolelo & Akinsola, 2015; Pino-Fan vd., 2015, 2016) konu alanı bilgisine yer verilmiştir. Bu durum konu alanı bilgisi bileşeninin pedagojik alan bilgisi için önemli olduğunu göstermektedir (Choy vd., 2013; Lederman & Gess-Newsome, 1992; Loughran, 1993). Bu önem 1739 sayılı Milli Eğitim Temel Kanununda da iyi bir öğretmenin sahip olması gereken bilgiler arasında alan bilgisinin bulunması gerektiği şeklinde belirtilmiştir (Güler, 2014; Şahin, 2016). Bu açıklamanın paralelinde, NCTM raporu da bir matematik öğretmenin matematiği iyi bir şekilde bilmesini ve derin bir konu alanı bilgisine sahip olması gerektiğini belirtmiştir (NCTM, 2000).

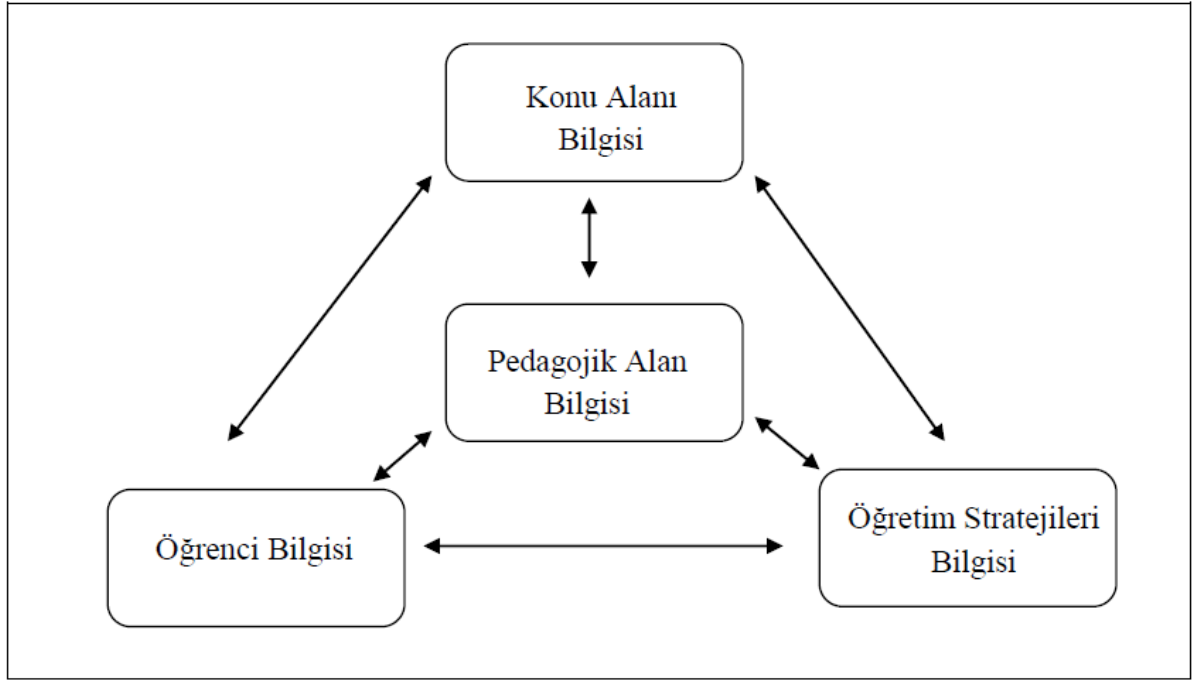
Konu alanı bilgisi yeterli düzeyde olmayan öğretmenler öğrencilere eksik ve kavram yanlışlarına açık bilgiler aktarabilmekte, öğrencilerin sahip oldukları hataları giderememekte ve ders materyallerini verimli şekilde kullanamamaktadır (Bukova Güzel vd., 2010). Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının konu alanı bilgilerinin düşük düzeyde olduğunu gösteren birçok çalışma mevcuttur (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Brown & Borko, 1992; Brown, Cooney & Jones, 1990; Even & Markovitz, 1995; Fuson, 1992; Hacıömeroğlu, 2005; Hawkins, 2012; Käpyla vd., 2009; Ma, 1999; Işıksal, 2006; Lucas, 2006; Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993; Rowland, Huckstep & Thwaites, 2004; Tanışlı & Köse, 2013; Tiros, 1993; Vermette, 2016; Vermette & Gattuso, 2014; Yılmaz, 2016; Yusof & Zakaria, 2010). Öte yandan hem lise hem de üniversite düzeyindeki öğrenciler analizin türev ile ilgili

kavramsal terminolojisine hâkim olamamakta ve türevin çoklu temsilleri arasındaki bağlantılarını kuramamaktadır (Artigue, 1991; Bingölbalı, 2008; Dunham & Osborne, 1991; Orton, 1983; Viholainen, 2008; Viveros & Sacristan, 2002; Zandieh, 1997). Tüm bu sonuçlardan hareketle yapılan bu araştırmada konu alanı bilgisi bileşeninin araştırmaya dâhil edilmesi, lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına dönük konu alanı bilgisi düzeyleri ortaya çıkararak öğretmenlerde varolan kavramsal eksikliklere yönelik önlemler almasını sağlayacaktır. Bu nedenle bu araştırmaya PAB'ın konu alanı bilgisi bileşeni eklenmiştir.

İlgili alanyazın incelendiğinde Shulman'ın öğretmen bilgisi modelini temel alarak geliştirilen birçok modelde (Grossman, 1990; Magnusson vd., 1999; Smith & Neale, 1989; Tamir, 1988) veya PAB'a yönelik araştırmalarda (Akkaş, 2014; Gökbulut, 2010; Jang, Guan & Hsieh, 2009; Koçak, 2015; Nilsson, 2008; Shabanifar, 2014; Şahin, 2016) öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerine yer verildiği görülmüştür. Araştırmacıların öğrenci bilgisini ve öğretim strateji bilgisini çalışmalarında kullanmış olmaları bu bileşenlerin PAB üzerindeki değerini ortaya koymaktadır. Öğrencilerin matematikteki herhangi bir konuya dönük sahip oldukları hataların ve kavram yanılgıların öğretmenler tarafından bilinmesi iyi bir matematik öğretimi için gereklidir (NCTM, 1989, 1991). Öğrencilerin sahip oldukları öğrenme güçlüklerine yönelik bilgi sahibi olunması öğretimin planlanmasında, konunun etkili şekilde öğretiminde ve kazanımların değerlendirilmesinde katkı sağlayacağından öğretmenler öğrencilerin öğrenme zorluklarının farkında olmalıdır (Houssart & Weller, 1999). Öğretmen derste bir konuya başlarken öğrencilerin ön öğrenmelerindeki becerilerin ve zorlukların farkında olduğunda konunun öğretiminin nasıl yapılacağı, hangi öğretim stratejilerinin kullanılacağı ve öğrenci görüşlerine nasıl cevap verileceği noktasında güçlük yaşamamaktadır (Friedrichsen vd., 2007). Ayrıca derste iyi bir öğretim stratejisine sahip öğretmenlerin dersi planını değerlendirebilme ve öğretim performansını yönetebilme gibi becerilere sahip oldukları aynı zamanda öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini de olumlu etkiledikleri bilinmektedir (Medley, 1982; Medley & Coker, 1987). Buna göre iyi bir öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisine sahip öğretmenlerin yapacakları öğretim, öğrencilerin sahip oldukları zorlukların belirmesini engellemekle birlikte bu zorlukların giderilmesinde de katkı sağlayacaktır (Şimşek, 2011). Bu bilgiler ışığında, alanyazında öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisi bileşenlerine yönelik yapılan çalışmalardan elde edilen olumlu sonuçlar, öğretmen bilgisi modeli ve PAB yapısındaki kilit noktalardan olan bu bileşenlerin bu araştırmaya dâhil edilmesini sağlamıştır.

Türev ve uygulamalarına yönelik yapılan PAB çalışmaları incelendiğinde yapılan çalışmaların çoğunlukla Godino (2009)'nun öğretici-matematiksel bilgi modeli üzerinde gerçekleştirildiği gözlenmiştir. Buna göre öğretici-matematiksel modelin didaktik bilgi bileşenini inceleyen çalışmalar ağırlıklı olarak bu bileşenin epistemik alt boyutuyla ilgilenmiştir (Pino-Fan, 2010, 2013; Pino-Fan vd., 2011, 2016; Pino-Fan, Castro, Godino & Font, 2013; Pino-Fan, Font, Godino, 2013; Pino-Fan, Godino, Font & Castro, 2012). Öğretici-matematiksel modelin matematiksel bilgi bileşenini inceleyen çalışmalar ise ağırlıklı olarak bu bileşenin konu alanıyla ilgili kapsamlı içerik bilgisi alt boyutuna yönelmiştir (Pino-Fan vd., 2015, 2016; Pino-Fan, Godino & Font, 2014; Pino-Fan, Godino, Font & Castro, 2013). Bu çalışmalar dışında türeve yönelik PAB'larda sadece konu alanı bilgisine yönelen çalışmalar da bulunmaktadır (Ding, He & Leung, 2014; Maat vd., 2011; Moru, Qhobela, Poka & Nchejane, 2014; Stump, 2001; Thiriat, Pino-Fan, Larios & Font, 2016; Tin Lam, 2009). Öte yandan bazı araştırmalarda ise öğretmen adaylarının türev ve uygulamalarına yönelik teknolojik pedagojik alan bilgileri; konu alanı bilgisi (Akkoc, Bingölbali & Özmantar, 2008; Kendal & Stacey, 2001), öğrenci zorlukları (Akkaya, 2009) ya da çoklu temsiller (Ergene, 2011) bağlamında incelenmiştir.

Alanyazında türev ve uygulamalarına yönelik yapılan PAB araştırmaları incelendiğinde bu araştırmaların büyük bir çoğunluğunun yoğun şekilde konu alanı bilgisine ve öğretimsel bilginin epistemolojik temeline, bir bölümünün ise öğrenci bilgisine yöneldiği söylenebilir. Bunun dışında türev ve uygulamalarına yönelik PAB çalışmalarının bir bölümü ise teknoloji yardımıyla incelenmiştir. Yapılan çalışmalarda türev ve uygulamaları konusunda lise matematik öğretmenlerinin PAB'ın konu alanı bilgisi, öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi bileşenlerini eş zamanlı inceleyen çalışmalara rastlanmadığı söylenebilir. Buradan hareketle bu araştırmada PAB'ın konu alanı, öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisi bileşenlerinin eş zamanlı incelenmesi ihtiyacı hissedilmiştir. Konu alanı, öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisi bileşenlerinin alanyazındaki öneminden hareketle lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik pedagojik alan bilgileri Şekil 10.'da şematize edilen PAB teorik çatısı doğrultusunda değerlendirilmiştir.



Şekil 10. Araştırmanın pedagojik alan bilgisine yönelik teorik çatısı.

Şekil 10'daki PAB çatısı incelendiğinde öğretmenin konuya hâkimiyetini sembolize eden *konu alanı bilgisi*, öğretmenin öğrencilerdeki zorlukların farkındalığını ve bu zorlukların minimum seviyeye indirilmesini yansıtan *öğrenci bilgisi* ile öğretmenin konuyu öğrencilerin bireysel farklılıklarını bilerek öğrencilere göre sunmasını temsil eden *öğretim stratejileri bilgisi* PAB'nin ana bileşenleri olarak teorik çatıda yer almıştır. Bu çatıda pedagojik alan bilgisi kavramı merkezde olup üç bileşenden beslenmektedir. Aynı zamanda hem PAB kavramı hem de bileşenler birbirleriyle ilişkili olduğundan ve birbirilerini etkilediğinden (Hauk, Toney, Jackson, Nair & Tsay, 2014) teorik çatıda gösterilen oklar çift yönlü şekilde belirtilmiştir.

Konu alanı bilgisi.

Pedagojik alan bilgisine yönelik yapılan çalışmalarda oluşturulan öğretmen bilgisi modelleri dikkate alındığında bazı araştırmalarda konu alanı bilgisi kavramı PAB kavramından ayrı bir boyutta (Ball vd., 2008; Grossman, 1990; Shulman, 1986b; 1987, Tamir, 1988) değerlendirilirken bazı araştırmalarda ise PAB'la bağlantılı veya PAB'nin bir boyutu (An vd., 2004; Fennema-Franke, 1992; Gökbulut, 2010; Hashweh, 2005; Marks, 1990; Veal, Tippins & Bell, 1998) olarak gösterilmiştir. Alanyazın incelendiğinde konu alanı bilgisinin PAB'la ilişkili ve etkileşim halinde olduğunu gösteren çok sayıda araştırma bulunmaktadır (Bennett & Turner-Bisset, 1993; Borko & Putnam, 1996; Halim & Meerah, 2002; Türnüklü, 2005).

Konu alanı bilgisi, bir öğretmenin herhangi bir konunun kavramsal yapısına, konuyu daha da belirginleştiren örneklere ve konudaki öğretim yöntemlerine yönelik bilgi sahibi olması durumudur (Davis, 2003; Fennema & Franke, 1992). Konu alanı bilgisi, öğretmenlerin öğretecekleri konuya dönük bilgi düzeylerini, ispatlarını, işlem basamaklarını ve problem çözme becerilerini kapsayan çok boyutlu bir yapıdır (Shulman, 1986b). Öğretmenlerin pedagojik alan bilgileri düşünüldüğünde konu alanı bilgisinin PAB'ın bir iskeleti olduğu söylenebilir (Bayboz, 2015). Konu alanı bilgisine yeterince sahip olan öğretmenler kavramların çoklu temsilleri arasındaki bağlantıları kolay kurabilirken konunun anlatımında da farklı öğretim yöntem ve stratejiler kullanma ihtiyacı hissederler (Cohen vd., 1993; Hashweh, 1985, 1987). Ancak konu alanı bilgisi yüzeysel olan öğretmenler ise pedagojik bilgilerini derste öğretim sırasında yeterince kullanamamaktadır (Dönmez, 2009; Osborne & Simon, 1996). İyi bir konu alanı bilgisinin, öğretimin kalitesini ve öğrencilerin başarısını arttırdığı bilinmektedir (Buckreis, 1999; Konyalıoğlu, Özkaya & Gedik, 2012; Ma, 1999). Öğretmenlerin konuya dönük alan bilgilerinin iyi olması, öğrencilerin problemin çözümüne yönelik uyguladıkları stratejilerin öğretmenler tarafından değerlendirilmesinde etkili olmaktadır (Van Dooren, Verschaffel & Onghena, 2002). Konu alanı bilgisinin PAB'ı etkilemesi PAB üzerindeki fonksiyonunu daha da önemli hale getirmiştir. Konu alanı bilgisinin PAB'ın odak noktasında olduğuna yönelik genel bir kanı olmasına rağmen öğretim sürecinde alanı bilmeye neyin belirtilmek istendiği tam olarak belirgin değildir (Meredith, 1993). PAB'a yönelik yapılan araştırmalarda matematik dersindeki konu alanı bilgisi; matematik bilgisi, matematik hakkında bilgi ve matematiğe yönelik yetenek olmak üzere üç boyutta değerlendirilmiştir (Ball & McDiarmid, 1990).

Matematik bilgisi boyutu, araştırmacılar tarafından sıklıkla tanımlanan alan bilgisine karşılık gelmektedir (Ball, 1990b). Bu boyutta öğretmenin matematik bilgisine sahip olmasının temel kriterleri vardır. Bu kriterler bir öğretmenin matematiksel işlemlere ve kavramlara yönelik bilgisinin geçerli olması, olguların arka planındaki gerekçeleri kolayca açıklaması ve matematiksel kavramlar arasındaki ilişkileri anlatabilmesi şeklindedir. (Ball, 1990a). Matematik hakkında bilgi boyutu ise öğretmenin matematiğin doğasına yönelik epistemolojik anlayışlarını kapsar (Ball, 1990a). Buna göre matematiksel bilgiye nasıl ulaşıldığı, yeni bir matematiksel bilginin nasıl oluşturulduğu ve geçerliği, matematikte mantıksal bilginin ne tür bir özelliğe sahip olduğu gibi cevap aranan sorular bu boyutta değerlendirilir (Bütün, 2005). Matematiğe yönelik yetenek boyutunda ise bireylerin matematik bilme durumlarını değerlendirmeleri, bir problemin çözümüne yaklaşma isteklilikleri veya matematiksel yeteneklerin doğuştan gelmesi-gelmemesi durumuna göre matematiğe yönelik zihinlerde beliren şemanın uygulanması söz konusudur (Ball, 1990a).

Matematiğe yönelik inanç olarak da ifade edilen bu boyut (Bütün, 2005) bireylerin matematiksel deneyimlerini etkilemektedir (Ball, 1990a). Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgileri; türevin formel tanımı, türev-süreklilik ilişkisi, bir noktadaki türevin varlığı, mutlak değer fonksiyonunun türevi, kapalı fonksiyonun türevi, türevin geometrik anlamı, teğetin tanımı ve eğimi, artan-azalan fonksiyonlar, fonksiyon grafiğine göre fonksiyonun birinci türevinin durumu, ekstremum noktaları, konvekslik ve konkavlık, dönüm noktası, maksimum-minimum problemleri, asimptotlar ve grafik çizimi konuları kapsamında incelenmiştir.

Öğrenci bilgisi.

Pedagojik alan bilgisine yönelik yapılan çalışmalarda oluşturulan öğretmen bilgisi modelleri dikkate alındığında az sayıdaki araştırmalarda öğrenci bilgisi kavramı PAB'dan farklı bir boyutta gösterilirken (An vd., 2004; Gess-Newsome, 1999; Godino, 2009) çoğu araştırmada ise PAB'ın bir boyutu (Ball vd., 2008; Cochran vd., 1993; Geddis, 1993; Grossman, 1990; Magnusson vd., 1999; Marks, 1990; Shulman, 1987) olarak verilmiştir. PAB'ın farklı araştırmacılara göre kavramsallaştırılması incelendiğinde öğretmen bilgisi modellerinde üzerinde en sık durulan bileşenlerden birisi öğrenci bilgisi bileşenidir (Borko & Putnam, 1996; Park & Oliver, 2008a). Öğrenci bilgisi bileşeni öğretmenlerin; öğrencilerin bir konuyu kolay veya zor öğrenmesi altında yatan nedenleri bilme durumlarını ve öğrencilerin öğrenme sürecinde ortaya çıkan bireysel farklılıklarını kavrama durumlarını kapsar (Cochran vd., 1993; Magnusson vd., 1999; Shulman, 1986b). Öğrenci bilgisi bileşeni öğretmenlerin; konuyu öğrenmede öğrencilerin sahip olmaları gereken ön bilgileri bimesi ve daha önceden var olan veya öğrenme sürecinde ortaya çıkacak olan öğrenme zorluklarını tahmin etmesiyle ilgilenir (Baki, 2010; Magnusson vd., 1999; Tuan, Chang, Wang & Treagust, 2000; Van Driel vd., 1998). Aynı zamanda öğrencilerin neye ilgi duydukları, derse yönelik sahip oldukları önyargılar ve geçmişte okul içi-okul dışı öğrenme ortamlarında kazandıkları deneyimlerin bilinmesi öğrenci bilgisi boyutunda değerlendirilmektedir (Fennema-Franke, 1992; Park & Oliver, 2008b). Öğrenciler akranlarından ve çevrelerinden öğrenerek geliştirdikleri yanlış öğrenmeleri sınıf ortamına taşıdıklarından öğrencilerin zorluklarını bilmek öğretmenin dersi organize etmesi bakımından önem arz etmektedir (Bransford, Darling-Hammond & LePage, 2005; Leach & Scott, 2003; Sarkim, 2004; Shulman, 1986b). Öğretmenlerin sınıf ortamında öğrencilerin öğrenme zorluklarına yönelik gösterdikleri direnç ve bu zorluklara yönelik inançları öğretim programlarının uygulanabilirliğini de etkilemektedir (Cronin-Jones, 1991; Wallace & Kang, 2004). Öğrencilerin öğrenme sürecindeki hataları ve geliştirdikleri kavram

yanılgıları gibi dezavantajlı durumlar öğretmenin uygun temsilleri kullanarak yaptığı iyi bir öğretim sayesinde avanataja dönüşebilir (Türkdoğan, 2011).

Öğrencilerin matematik dersinde sahip oldukları hataların ve kavram yanılgılarının farkında olmak iyi bir matematik öğretimi için gereklidir (Houssart & Weller, 1999; NCTM, 1989, 1991, 2000). Bir öğretmenin öğrencilerinin konuya dönük zihinlerindeki düşüncelerini iyi süzmesi derste kaliteli bir öğretim sağlayacağı gibi (Özkaya, 2015) öğrencinin de iyi bir şekilde değerlendirilmesine olanak tanıyacaktır (Williams & Ryan, 2000). Öğretmenlerin, öğrencilerin konuya dönük ne düşündüklerini bilmesi ve hangi kavram yanılgılarına sahip olduklarını onlara açıklaması aynı zamanda konu alanı bilgisini geliştirmektedir (Carpenter, Franke & Levi, 2003; Cooney, 1999; Even & Tirosh, 1995). Öğrencilerin düşünme yollarına hâkim olmak geleceğin öğretmenlerinin konu alanı bilgilerinin nasıl etkilendiğini ortaya çıkarmaktadır (Tsamir, 2007). Öğrencilerin öğrenme düzeylerindeki gelişim, öğretmenlerin konu alanı bilgilerini beslemektedir (Ma, 1999). Bir öğretmen öğrencilerinin yaptıkları hataları ve kavram yanılgılarını iyi tespit ettiğinde öğrencilerinin o konuya dönük bilişsel yapılarıyla ilgili kolayca yorum yapabilir (Black & William, 1998; Stigler & Hiebert, 1999). Bu durumun tam tersi olarak öğrencilerin yaptıkları hataların farkında olmada ve bu hataların altındaki nedenleri açıklayabilmede konu alanı bilgisi önemli bir etkindir (Özkaya, 2015). Bununla birlikte öğrencilerin derste yaptıkları hataları belirlemede konu alanı bilgisi etkilidir (Boz, 2004). Buradan hareketle öğrenci bilgisi ile konu alanı bilgisinin birbiriyle etkileşim halinde olduğu söylenebilir. Bu çalışmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusuna yönelik öğrenci bilgileri; fonksiyonun bir noktasında türevin tanımlanması, türev alma kuralları, türev-süreklilik ilişkisi, mutlak değer fonksiyonunun türevi, kapalı fonksiyonun türevi, kırılma noktası ve ekstremum noktaları kapsamında incelenmiştir.

Öğretim stratejileri bilgisi.

Pedagojik alan bilgisine yönelik yapılan çalışmalarda oluşturulan öğretmen bilgisi modelleri dikkate alındığında az sayıdaki çalışmalarda öğretim stratejileri bilgisi kavramı PAB'dan ayrı formatta ve farklı isimlerle değerlendirilirken (An vd. 2004; Cochran vd., 1993; Gess-Newsome, 1999) çoğu çalışmada ise PAB'ın bir bileşeni (Geddis, 1993; Gökbulut, 2010; Gökkurt, 2014; Grossman, 1990; Hashweh, 2005; Marks, 1990; Shulman, 1987; Tuan, 1996) olarak belirtilmiştir. PAB'ın farklı araştırmacılara göre kavramsallaştırılması incelendiğinde öğretmen bilgisi modellerinde üzerinde en sık durulan bileşenlerden birisi öğrenci bilgisi bileşeninin yanı sıra öğretim stratejileri bilgisi bileşenidir (Charalambos, Hill & Ball, 2011; Güler, 2014; Shulman, 1986b). Öğretim stratejileri, bir konunun öğretiminde

kullanılan gösterimler ya da açıklama metodları olarak bilinirken modeller, projeler, örüntüler, etkinlikler ve benzetimler şeklindeki araçlarla öğretim sürecinde kendini göstermektedir (Davis & Petish, 2005). Model, etkinlik ve benzetim şeklindeki özel temsiller konunun daha kolay anlaşılmasında öğretmene yardımcı olmaktadır (Cramer, Post & del Mas, 2002). Bununla birlikte konuyu daha etkili sunmak için kullanılan bu çoklu-özel temsiller sayesinde öğrenciler hem işlemsel olarak problemleri daha iyi çözmekte (Niemi, 1996) hem de kavramsal öğrenme gerçekleştirilmektedir (Niemi, 2002). Bilimsel dünya ile gerçek dünya etkinlikleri arasında bir köprü rolü üstlenen öğretim stratejilerinin ders içindeki sunumuna yönelik bilgi ise öğretmenin öğretim stratejileri bilgisi olarak açıklanmıştır (Magnusson vd., 1999). Öğretim stratejileri bilgisi, bir konunun nasıl öğretileceği sorusuna verilecek cevabın karşılığıdır (Gökbulut, 2010; Koçak, 2015). Bu bilgi, bir öğretmenin derste kullanacağı öğretim stratejilerinden haberdar olması durumudur (Graeber, 1999; Van der Valk & Broekman, 1999). Ball vd. (2008)'ne öğretim stratejileri bilgisi, hedeflenen kazanımlara ulaşmak için dersin nasıl planlanması gerektiği, hangi özel temsillerin ve yöntem-tekniklerin etkili olacağı ve öğretim sürecinin alternatif özel temsiller kullanılarak nasıl yönetileceğine yönelik bilgi şeklinde açıklanmıştır. Ancak yapılan araştırmalarda öğretmenler matematik öğretim sürecini düzenleme noktasında yetersiz bilgiye sahip olup derste istenilen düzeyde temsiller kullanmamakta ve bu sayede kavramsal bilgilerini öğrencilerle etkili şekilde paylaşamamaktadır (Arslan Kılcan, 2006). Bu nedenle derste etkili bir öğretim yapmak için öğretmenin sahip olması gereken yeterlikleri ve bu yeterliklere bağlı öğretim stratejileri bilgileri bilim insanlarında inceleme merakı uyandırmıştır (Askew, Brown, Rhodes, William & Johnson, 1997; Fernandez-Balboa & Stiehl, 1995; Gökkurt, Koçak & Soylu, 2014; Kaya, 2009; Koçak, Gökkurt & Soylu, 2015; Medley, 1987; Tamir, 1988).

Öğretim stratejileri bilgisi, alana ve konuya özgü stratejiler bilgisi olmak üzere ikiye ayrılmaktadır (Üner, 2016). Alana özgü stratejiler bilgisi, öğretimde kullanılabilecek genel yaklaşımları içermekle birlikte öğretmenin dersi öğrencisinin bilgi düzeyine göre organize etmesini gerektiren bilgi türüdür (Friedrichsen vd., 2007; Magnusson vd., 1999). Konuya özgü strateji bilgisi ise bir konunun öğretimi sırasında öğretmenin sunumda kullanacağı simülasyon, analogi ve model gibi özel argümanlara yönelik öğretmen bilgisini ifade eder (Magnusson vd., 1999). Öğretim stratejileri bilgisi, öğrenci bilgisiyle de ilişkili olup derste kavram yanlışlarına sahip öğrencilerin bu durumlarını dikkate alarak kavramlar arası bağlantılardaki en doğru temsili bilmeyi gerekli kılmaktadır (Ball vd., 2001). Öğretim stratejileri bilgisinin gelişimi konu alanı bilgisinin gelişimiyle de doğru orantılıdır (Hollon, Roth & Anderson, 1991). Deneyimli öğretmenler kendilerine göre daha az uzmanlığa ve tecrübeye sahip öğretmenlere nispeten daha farklı öğretim stratejisi bilgisi birikimine sahiptir

(Arends, 2004). İyi bir konu alanı bilgisine sahip öğretmenler ders materyallerindeki benzetimleri bilimsel açıdan öğrencinin anlayabileceği uygunlukta ve ilgili benzetimin kavramsal sınırları dışına çıkmadan doğru bir şekilde sunmaktadır (Davis & Petish, 2005). İyi bir konu alanı bilgisi etkili bir öğretim gerekli ancak tek başına yeterli bir parametre değildir (Ball vd., 2008). Öğretmenler iyi bir konu alanı bilgisinin yanında bu alan bilgisini derste alternatif sunum yollarını öğrencilerin bireysel farklılıklarını da göz önünde bulundurarak kullanmalı ve bu sayede öğrencilerin kalıcı bir şekilde konuyu öğrenmelerini sağlayabilmelidir (Shulman, 1987; Zembal-Saul, Star & Krajcik, 1999). Hatta bu öğretmenler derslerini nasıl yönetecekleri, öğrencilerin bilgi düzeylerine nasıl ineceklerine yönelik bilgi sahibi olmalıdır (Koçak, 2015). Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki öğretim stratejileri bilgileri; fonksiyonun bir noktasında türevin tanımlanması, türev alma kuralları, türev-süreklilik ilişkisi, mutlak değer fonksiyonunun türevi, kapalı fonksiyonun türevi, kırılma noktası ve ekstremum noktaları bağlamında kullandıkları ve kullanmayı düşündükleri yöntem, strateji ve teknikler kapsamında incelenmiştir.

İlgili Araştırmalar

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin türev ve uygulamalarına yönelik anlayışları, öğrenmeleri, kavram imajları ve öğrenme zorluklarıyla ilgili ulusal ve uluslararası düzeyde yapılmış çalışmalara yer verilmiştir. Bu çalışmaların veriliş sırası geçmişten günümüze doğrudur.

Amit ve Vinner (1990) tarafından gerçekleştirilen çalışmada öğrencilerden türevin geometrik yorumunu açıklamaları istenmiştir. Öğrenciler türevin geometrik yorumunu, “fonksiyon grafiğine bir noktada çizilen teğetin eğimi fonksiyonun o noktadaki türevidir” şeklinde açıklamasına rağmen fonksiyonun bir noktadaki türevi için teğet doğrusunun denklemini kullanmıştır. Öğrenciler aynı zamanda belirttikleri bu durumu net bir şekilde grafik üzerinde gösterememiştir. Bu araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğrenciler teğetin eğimi kavramını tam olarak anlayamamış ve türevin geometrik anlamına yönelik güçlük yaşamıştır. Öğrenciler fonksiyonun türevi ile teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi de tam olarak içselleştiremeden bu iki kavram arasındaki ilişkiyi doğrudan ezberleme yoluna gitmiştir. Bu nedenle öğrenciler fonksiyonun türevi, teğetin eğimi ve teğet doğrusunun denklemi arasındaki ilişkilere yönelik kavramsal bilgiye yeterince sahip değildir.

Nemirovsky ve Rubin (1992) tarafından gerçekleştirilen çalışmada analiz dersini almayan lise öğrencilerinin bir fonksiyon ile onun türevi arasındaki ilişkiyi belirleyebilme durumları ve bu ilişkiyi belirlerken yaşadıkları zorluklar üç farklı bilgisayar destekli öğrenme

ortamında incelenmiştir. İlk öğrenme ortamında bir hareketlinin belirli zaman aralığındaki hız ve konum değerlerini gösteren bir sensör, ikinci öğrenme ortamında bir balon içindeki havanın akış hızı ile balonun hacim değerlerini gösteren bir sensör, üçüncü öğrenme ortamında ise bir sayı dizisiyle ifade edilen kısmi toplamlar dizisindeki sayısal ifadeler yer almıştır. Öğrenme ortamları, bilgisayar yazılımlarından manipülatif materyallere kadar çok çeşitli fonksiyon üreten araçların bulunduğu mikro bilgisayar laboratuvarlarıdır. Tüm öğrenme ortamlarındaki ana tema bir niceliğe bağlı olarak başka bir nicelikteki değişimin sezilmesidir. Her bir öğrenme ortamında süreye bağlı olarak gerçekleşen olaylara yönelik öğrenci düşünceleri belirlenmiştir. Benzer problemlerin kullanıldığı tüm öğrenme ortamlarında öğrencilerle mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bu mülakatlarda her üç öğrenme ortamındaki türev davranışına ve bu davranıştaki benzerliklere yönelik eğilimler incelenmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlarda ikinci öğrenme ortamındaki hava akış hızı ile balon hacmi arasındaki ilişkiye yönelik manipülasyonun fonksiyon ile onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada diğer manipülasyonlara oranla daha fazla etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Hauger (1995) tarafından gerçekleştirilen çalışmada hem lise öğrencileri hem de analiz öğrencilerinin değişim oranına yönelik kavramsal ve işlemsel bilgi düzeyleri belirlenmeye çalışılmıştır. Hauger yaptığı bu çalışmada global değişim oranı, belirli bir aralıktaki değişim oranı ve anlık değişim oranını incelemeye çalışmıştır. Bununla birlikte Hauger, öğrencilere bir grafik veya değerlerin olduğu bir tablo sunulduğunda bu verilerden yararlanılarak anlık değişim oranı kavramına nasıl ulaşıldığını ve bu süreçte kullanılan yolları ortaya çıkarmak istemiştir. Araştırmada öğrencilerle mülakatlar gerçekleştirilmiş ve analiz dersini almayan, analize giriş düzeyinde ve analiz dersini almış öğrencilerin verdikleri cevaplar değişim oranı kavramı bağlamında karşılaştırılmıştır. Hauger, çalışmasını beş aşamada değerlendirmiştir. Buna göre birinci aşamada “belirli bir süredeki maya hücrelerinin artma hızları grafik üzerinde kaç parçada ve ne şekilde yorumlanacaktır?” sorusuna cevap aranmıştır. Öğrencilerin bir bölümü grafiği üç parçaya ayırıp yorumlarken bir bölümü ise grafiği iki parçaya ayırıp artma hızlarını değerlendirmiştir. İkinci aşamada maya hücrelerindeki artışların en hızlı ve en yavaş olduğu sürelerin belirlenmesi beklenmiştir. Öğrencilerin bir bölümü bu soruyu çözerken bir aralıktaki değişim oranından yararlanmaya çalışmıştır. Bunun yanı sıra analiz dersini almış öğrencilerin yarısı, analiz dersini almayan öğrencilerin ise dörtte biri bu problemi çözerken eğim kavramından yararlanmıştır. Üçüncü aşamada, maya hücrelerinin belirlenen bir saatteki artış hızı sorulmuştur. Bazı öğrenciler bu soruya belirli bir aralıktaki değişim oranından yola çıkarak iki süre arasındaki ortalama değişimi kullanıp maya hücrelerinin belirlenen saatteki artış hızını bulmuştur. Bu aşamadaki öğrenci cevapları analiz

dersinin alınma durumuna göre daha detaylı incelendiğinde analiz dersini alan öğrencilerin eğri üzerindeki istenilen saate teğet çizip doğrunun eğiminden yararlanarak o süredeki artış hızını bulduklarını ortaya çıkarmıştır. Burada dikkat edilecek nokta analiz dersini alan öğrencilerin türevin geometrik anlamından yararlanarak yani geometrik yorumunu kullanarak sonuca ulaşmalarıdır. Ancak aynı yöntem analiz dersine giriş öğrencileri tarafından kullanılmamıştır. Çalışmanın dördüncü aşamasında, grafik üzerinde bir noktaya karşılık değerler tablo üzerinde öğrencilere gösterildikten sonra bir süredeki değişim oranının belirlenmesine dikkat çekilmiştir. Öğrencilerin büyük çoğunluğu istenilen süreye yakın zaman aralıklarını kullanarak elde ettikleri cevaplara göre istenilen süredeki değişim oranını tahmin etmiştir. Araştırmanın beşinci ve son aşamasında ise belirli bir zamandaki değişim oranına yönelik hangi yöntemin kullanılmasının daha doğru olduğu öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerin büyük bir bölümü istenilen süreye yakın aralıkları referans alarak yakın aralıklardaki ortalama değişim oranlarından hareketle anlık değişim oranının bulunmasını önermiştir. Bunun yanı sıra bazı öğrenciler cebirsel yollarla istenilen süreye yönelik anlık değişim oranını türev kurallarından yararlanarak çözmenin doğru olduğunu savunurken bazı öğrenciler de eğri üzerinde istenilen süre için çizilen teğetin eğimini bilmenin o süredeki anlık değişim oranının sonucuna götüreceğini belirtmiştir.

Cottrill (1999) tarafından gerçekleştirilen çalışmada analiz öğrencilerinin bileşke fonksiyon ile zincir kuralı arasındaki ilişkileri anlayabilme düzeyleri hem nicel hem de nitel araştırma yöntemleriyle incelenmiştir. Öğrencilerin bileşke fonksiyon ve zincir kuralına dönük bilgi düzeylerini ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri belirleyebilmelerine dönük becerilerini ortaya çıkarmak amacıyla anketlerden yararlanılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre bileşke fonksiyona yönelik sahip olunan bilgi türevdeki zincir kuralını anlamada zayıf düzeyde etkili olmuştur. Türevdeki zincir kuralının iyi öğrenilmesi, derste kullanılan farklı öğretim yöntem ve tekniklerle ilişkilidir. Buna göre öğrencilerin bilgisayar destekli yazılımlar yardımıyla türev konusunu öğrenmesi durumunda öğretim daha başarılı olabilir.

Aspinwall ve Miller (2001) tarafından gerçekleştirilen çalışmada analiz dersini alan öğrencilerin analizin temel kavramlarına yönelik hâkim olma durumlarını belirlemek amacıyla nitel bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Araştırmada kullanılan çalışma yapraklarında türev konusundaki kavramlar ile bu kavramlar arasındaki ilişkilere dönük öğrenci görüşlerini ortaya çıkarmayı amaçlayan sorular yer almıştır. Bu sorular öğrencilere sorulmadan önce analiz öğrencileri için fonksiyon grafiğinin eğimi ve bir noktadaki türev konusunda tartışma ortamı oluşturulmuştur. Tartışma sonunda öğrencilerden fonksiyonun bir noktadaki türevi ile

fonksiyonun grafiğinin aynı noktadaki eğimi hakkındaki bilgilerine başvurulmuştur. Araştırma verileri analiz edildiğinde öğrencilerin bir bölümünün bir noktadaki türev ve türevin geometrik yorumuna yönelik sınırlı kavram bilgisine sahip oldukları gözlenmiştir. Buna göre öğrenciler bir noktadaki türev ve eğim kavramlarına yönelik ezber bilgilere sahiptir. Öğrenciler kuralları ve formülleri ezberleyerek sadece işlemsel ve sınırlı bilgilerle hareket edip bir noktadaki türev ve eğim kavramları arasındaki ilişkiyi açıklayamamaktadır. Aspinwall ve Miller (2001)'e göre bu durum, yapılan türev öğretiminin sadece formüllerin ezberlenmesi üzerine dayandığının bir göstergesidir. Öğrencilere yapılan bu öğretim onların türev konusundaki sınırlı kavram bilgilerinden hareketle anlık hız ve anlık değişim oranı gibi kavramları kalıcı öğrenmelerine ket vuracaktır. Çalışmada ayrıca öğrencilere fonksiyonun, fonksiyonun birinci türevinin yer aldığı iki grafik sunularak bu grafiklerden anladıklarını yorumlamaları istenmiştir. Araştırmanın bu bölümünden elde edilen sonuçlarda ise öğrencilerin artan fonksiyon, pozitif değerli fonksiyon, artan eğim ve pozitif eğim kavramları arasındaki farklılıkları gözetemedikleri görülmüştür.

Ubuz (2001, 2007) tarafından gerçekleştirilen çalışmalarda mühendislik bölümü öğrencilerinin analiz dersinde türeve yönelik sahip oldukları hataların ve kavram yanlışlarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Buna göre öğrencilerle yapılan mülakatlardan hareketle bir fonksiyon grafiğinin yorumlanması ve fonksiyonun birinci türevinin grafiğine yönelik hatalar ve kavram yanlışları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Ubuz (2001)'un çalışmasından elde edilen sonuçlarda öğrenciler türev konusunda; fonksiyonun ve türevinin grafiğini yorumlamada, grafiksel bilgilerden yararlanmada, türevin tanımının altında yatan detayları anlamada, sembolik ve grafiksel temsiller arasındaki ilişkileri ortaya koymada kapsamı dar bir bakış açısıyla birlikte öğrenme zorluklarına ve kavram yanlışlarına sahiptir. Öte yandan Ubuz (2007)'un çalışmasından elde edilen sonuçlarda ise öğrenciler fonksiyonun bir noktadaki türevi ile türevin fonksiyon olarak belirttiği anlamlar arasındaki farkı belirleyemedikleri ve eğrinin türevinin grafiği çizilirken eğriyi temsil eden cebirsel yapıyı tercih ettikleri görülmüştür. Ubuz (2007)'un bu çalışmasında dikkat çeken bir diğer nokta ise bilgisayar destekli öğretim sayesinde türevin eğiminin sıfır olduğu noktaları içeren açık aralıklardaki teğet eğimlerine yönelik işaret değişimlerinin kolay anlaşılmasıdır.

Bezuindenhout (2001) tarafından gerçekleştirilen çalışmada üniversite birinci sınıfta öğrenim gören ve analiz dersini alan lisans öğrencilerinin analizin limit, süreklilik ve türev konularını anlamalarına ve bu konular arasındaki ilişkileri belirlemelerine odaklanılmıştır. Nitel araştırma yönteminin işe koşulduğu bu çalışmada öğrencilerle mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Bu mülakatlar sonucunda öğrencilerden elde edilen veriler analiz

edildiğinde öğrencilerin limit, süreklilik ve türev konularında birtakım öğrenme güçlüklerinin ve kavram yanlışlarının olduğu saptanmıştır. Buna göre öğrencilerin; bir fonksiyonun limitinin olduğu noktada türevli olması, fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olması, fonksiyonun hem sürekli hem de limitinin olduğu noktada aynı zamanda türevli olması gibi kavram yanlışlarına sahip oldukları tespit edilmiştir. Buna göre öğrenciler birbiriyle bağlantılı olan limit, süreklilik ve türev gibi kavramların kurallarını ve formüllerini yüzeysel şekilde ezberlerken bu kurallar ve formüller altında yatan topolojik ifadelerin derin anlamlarını göz ardı etmektedir. Öğrenciler limit ve süreklilik konularında kavramsal olarak iyi bir öğrenme gerçekleştirilmediği sadece işlemsel öğrenmeye yöneldiklerinden türevin çoklu temsilleri arasındaki ilişkilerini açıklamada zorlanmaktadır. Bezuindenhout (2001)'a göre analiz öğretimini gerçekleştiren alan uzmanları analizde kullanılan her bir bilgidaki topolojik ifadelerin bir anlamı olduğunu ve cebirsel ifadelere yönelik işlemler yaparak sonuca ulaşmanın formülleri tam olarak bilme anlamına gelmediğini öğrencilere anlatması gerekir.

Viveros ve Sacristan (2002) tarafından gerçekleştirilen çalışmada lisans öğrencilerinin fonksiyonun sürekliliği ile türevlenebilmesi arasındaki ilişkiyi belirleyebilme düzeyleri incelemiştir. Öğrencilerin bir fonksiyonun bir aralıktaki türevliliği hakkında yorum yapmak için aynı fonksiyonun aynı aralıktaki sürekliliğini nasıl kullandıkları araştırılmıştır. Bununla birlikte sürekliliğin grafik üzerindeki gösterimiyle fonksiyonun türevliliğinin grafik üzerindeki gösterimlerinin nasıl değerlendirildiği ve kâğıda dökülen bu görsel yansımalar ile cebirsel analizler arasında ne şekilde bir bağ bulunduğu da çalışmada ayrı bir merak konusu olmuştur. Çalışma bu bağlamda yazılı cevapların alındığı birinci bölüm ile bilgisayar destekli etkinliklerin bulunduğu ikinci bölümden oluşmaktadır. Öğrenci cevaplarından elde edilen veriler analiz edilip değerlendirildiğinde öğrenciler, sadece grafiksel olarak verilen parçalı fonksiyonların cebirsel ifade ile tanımlanmamasından dolayı süreksiz bir fonksiyon grafiği oldukları gibi hatalı değerlendirmelerde bulunmuştur. Öğrencilere yöneltilen bir mutlak değer fonksiyonunun türevi sorusunda öğrencilerin % 70'inin öncelikle fonksiyonun sürekliliğini ya da süreksizliliğini inceledikleri görülmüştür. Ancak öğrencilerin bir bölümü bu soruda fonksiyon grafiğinin başlangıç noktasında kesikli olmasından ya da bu noktanın kırılma noktası olmasından dolayı sürekli olmayacağını bu nedenle de bu noktada türevli olamayacağını ifade ederek ciddi bir kavram yanlışına sahip oldukları tespit edilmiştir. Bununla birlikte bir çok öğrenci türev ile süreklilik arasındaki ilişkiyi açıklarken “fonksiyon sürekliyse türevlidir”, “fonksiyon ancak ve ancak sürekliyse türevlidir” gibi yanlış açıklamalarda bulunmuştur.

Hahkiönniemi (2006) tarafından gerçekleştirilen çalışmada öğrencilerin türevin tanımına yönelik farklı sunuş temsillerini nasıl kullandıklarını belirlemek amaçlanmıştır. Bunun yanı sıra öğrencilerin limit alma sürecindeki farklı sunumları (gösterimleri) farkların oranının limitiyle nasıl ilişkilendirdikleri de incelenmiştir. Araştırmaya Finlandiya'daki bir lisenin 11.sınıflarında öğrenim gören öğrencilere türev konusunda beş saatlik bir öğretim yapılarak başlanmıştır. Bu öğretim sonunda farklı öğrenme düzeylerinden seçilen beş öğrenci ile mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Mülakatlar sonunda öğrencilerden elde edilen veriler analiz edildiğinde öğrencilerin limit alma süreçlerine ve bir fonksiyonun grafiğinden yararlanarak fonksiyonun türevini nasıl düşündüklerine odaklandıkları tespit edilmiştir. Öğrencilere somut olarak yapılan gösterimlerin öğrenmede daha güçlü araçlar olduğunun farkına varılmıştır. Öğrenciler mülakatlar boyunca bir grafikteki artış, eğim ve teğet gibi özellikleri herhangi bir hesap yapmadan sadece üzerinde düşünerek nitel şekilde cevaplamaya çalışmıştır. Bu bağlamda öğrenciler fonksiyonun türevinin hangi aralıklarda pozitif ve hangi aralıklarda negatif veya sıfır olduklarını düşünmüş ve türevin maksimum-minimum noktalarının neler olabileceğini grafik üzerinde belirlemeye çalışmıştır. Öğrenci cevapları incelendiğinde öğrencilerin farkların oranının limitine yönelik iki farklı gösterim kullandıkları belirlenmiştir. Öğrenciler tarafından yapılan bu iki farklı gösterim birleştirici ve yansıtıcı gösterim başlıkları altında değerlendirilmiştir. Yansıtıcı gösterimde bulunan öğrencilerden birkaçı farkların oranının limitini kullanırken zorluklar yaşamıştır. Buna göre bu öğrenciler farkların oranının limitini kullanmadan sadece cebirsel manipülasyonlar kullanarak türevi doğru hesapladığını ve konuyu bildiğini düşünmektedir.

Potari, Zachariades, Christiou, Kyriazis ve Pitta-Pantazi (2006) tarafından gerçekleştirilen çalışmada lise öğretmenlerinin analizde ve türev konusunda önemli bir yer alan teğet kavramına yönelik matematiksel ve pedagojik farkındalıkları belirlenmeye çalışılmıştır. Bunun yanı sıra öğretmenlerin matematiksel ve pedagojik faaliyetleri arasında ne tür bir ilişki olduğu da ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla iki öğretmene düzlem geometrisinde ve türevin geometrik yorumunda sıklıkla yer alan teğet kavramının özelliği hakkında yorum yapmaları istenmiştir. Öğretmenler düzlem geometrisinde yer alan çemberde teğet kavramını ve türevin eğiminde yer alan teğet doğrusunu tartışmıştır. Yorumlardan hareketle öğretmenlerin; çemberde teğet doğrusu ile türevin eğiminde kullanılan teğet doğrusuna yönelik matematiksel bilgilerinin bir bütünlük oluşturmadığı ve parçalanmış olduğu tespit edilmiştir. Buna göre iki öğretmenin; çemberde ve eğrideki teğet kavramları arasındaki epistemolojik farklılıkları-ortak noktaları tam olarak belirleyemedikleri ve teğet kavramının matematik bilimi içindeki önemini bilmedikleri görülmüştür. Sonuç olarak

öğretmenler, düzlem geometrisinde tanımlanan çemberdeki teğet kavramını türevde eğri üzerinde belirtilen teğetin özel bir versiyonu olduğunun farkına varamamıştır.

Duru (2006) tarafından gerçekleştirilen çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenim gören lisans öğrencilerinin bir fonksiyon ve bu fonksiyonun türevi ile fonksiyonun sürekliliği ve türevlenebilmesi arasındaki mevcut ilişkiler ağını belirlerken karşılaştıkları zorlukların ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Çalışmaya analiz dersini alan birinci sınıftaki ilköğretim matematik öğretmen adayları katılmıştır. Durum çalışmasına göre desenlenen çalışmada veri toplama araçları olarak fonksiyon ve türeve yönelik becerileri belirlemede kullanılan işlemsel bilgi testi ile fonksiyon-fonksiyonun birinci ve süreklilik-türev ilişkisini ortaya çıkarmada kullanılan bilgi-anlama testlerinden yararlanılmıştır. Bununla birlikte öğrencilerin yaşadıkları zorlukların gerçekten de tekrarlanıp tekrarlanmadığını belirlemek için mülakatlara başvurulmuştur. Öğrenci cevaplarından elde edilen veriler analiz edildiğinde öğrencilerin fonksiyon ve türevi ile süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkileri belirlemede yetersiz kaldıkları ve bu ilişkilere yönelik öğrenme zorlukları yaşadıkları görülmüştür. Öğrencilerin sahip oldukları bu zorluklar altında yatan nedenler olarak; ön şartlılık ilkesine bağlı fonksiyon ve limit gibi kavramların eksik ya da yanlış öğrenilmesi, türevin çoklu temsilleri arasındaki bağlantıların yeterince kurulamaması, formüller altında yatan kavramların anlamlarının özümselememesi, kavramsal bir öğrenme yolu sergileme yerine ezbere ve cebirsel manipülasyonlara dayalı bir öğrenmenin tercih edilmesi, fonksiyon-süreklilik-türev ekseninde sahip olunan kavramsal bilgi düzeyine yönelik sınırların dar olması gösterilmiştir. Öğrencilerin sahip oldukları zorluklara bağlı olarak Duru (2006) şu önerilerde bulunmuştur: Analiz dersini anlatan öğretim üyelerinin derste mümkün olduğunca farklı öğretim yöntemlerine başvurmalı, çoğu zaman teoremlerin soyut yapılarına yönelmek yerine anlatılan konuyu somutlaştırmalı, fonksiyon ve türevlerine yönelik grafikler bir bütün halinde tek bir durumda verilmeli ve bu grafikler arasındaki farklılıkların öğrenciler tarafından belirlenmesi sağlanmalı, çoklu temsiller arasındaki bağlantıların üzerinde dikkatli şekilde durulmalı, çoklu temsiller arasındaki bağlantılar gösterilirken bu bağlantıları oluşturan topolojik ifadelerin ne anlama geldikleri iyi bir şekilde öğrenciye anlatılmalı, analiz konularından türevin sembolik, cebirsel ve geometrik anlamları lisede en azından yüzeysel şekilde anlatılmalıdır.

Akkaya (2009) tarafından gerçekleştirilen çalışmada analiz dersini almış ilköğretim matematik ikinci sınıf lisans öğrencilerinin türev konusundaki teknolojik pedagojik alan bilgileri öğrenme zorlukları bağlamında incelenmiştir. Çalışmada öğrencilerin literatürde çoğunlukla zorluk yaşadıkları türev-limit, türev-eğim ve türev-değişim oranı ilişkilerine

yönelik etkinlikler uygulanmıştır. Çalışmada lisans öğrencilerinden mikro öğretim yapan beş öğrencinin türev konusundaki gelişimleri detaylı bir şekilde araştırılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlarda lisans öğrencileriyle gerçekleştirilen türev etkinlikleri sayesinde öğrencilerin öğrenme zorlukları bağlamındaki teknolojik pedagojik alan bilgilerinde kayda değer bir gelişme sağlanmıştır. Öğrenciler, uygulama öncesinde türev-eğitim ilişkisine yönelik diğer iki ilişkiye nispeten daha az zorluk yaşarken uygulama sonrası tüm öğrenciler grafiği verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türevini fonksiyonun aynı noktasındaki teğetinin eğimi olduklarını fark etmiş ve bu özelliği kullanarak bir noktadaki türevi aramıştır. Buradan hareketle öğrencilerin türev-eğitim ilişkisine yönelik uygulama sonrası yeterli açıklamalarda bulundukları söylenebilir. Uygulama öncesinde bazı öğrenciler türev-değişim oranı ilişkisini tablodaki verileri kullanarak limit yardımıyla göstermede zorluk yaşamıştır. Ancak uygulama sonrasında öğrencilerin çoğu tablodaki değerleri kullanarak türevin, değişim oranlarının limitine yönelik tanımından yararlanıp sonuca ulaşmıştır. Buna göre öğrenciler uygulama öncesinde türev-değişim oranı ilişkisine yönelik yetersiz bilgilere sahipken uygulama sonrası bu ilişkiyi belirleme ve açıklama noktasında zorluk yaşamamıştır. Çalışmada öğrencilerin türev ve uygulamalarına yönelik öğrenme zorlukları yaşamamaları için teknolojik destekli öğretimden yararlanılması önerilmiştir.

Ergene (2011) tarafından gerçekleştirilen çalışmada ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü son sınıf lisans öğrencilerinin teknolojik pedagojik alan bilgileri çoklu temsiller bağlamında incelenmiştir. Geliştirilen program kapsamında öğrencilerle çalıştay adı altında türevin çoklu temsillerine yönelik uygulamalar yapılmıştır. Çalışmaya katılan 41 öğrencinin türev konusundaki teknolojik PAB'ları anketlere verilen cevaplar, hazırlanan ders planları ve ders notları kapsamında araştırılırken beş öğrenciyle çoklu temsillere yönelik görüşlerin daha derinlemesine ortaya çıkarılması için mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre, türevin çoklu temsillerine yönelik ne olduğuna ve bu temsillerin tanımına dair teknoloji destekli PAB uygulaması sonrasındaki sonuçların daha olumlu olduğu söylenebilir. Çoklu temsillerin matematik öğretimindeki yeri konusunda teknoloji destekli PAB uygulaması sonunda öğrenciler çoklu temsillerin kavramsal öğrenmeye yardımcı olduğu, konunun daha iyi anlaşılmasına katkı sağladığı ve hatalara-yanılgılara engel olduğu şeklinde uygulama öncesine göre daha olumlu cevaplar vermiştir. Öğrencilerin çoklu temsillere yönelik kavramsal bilgi düzeylerindeki olumluluğun çoklu temsillerin kullanımına yansıyor yansımadığını belirlemek için öğrenciler tarafından hazırlanan ders planları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Buna göre uygulama öncesi ve sonrası değerlendirildiğinde çoklu temsillerden nümeriksel (sayısal) ve grafiksel (geometrik) çoklu temsili kullanan öğrencilerin sayısında artış yaşanmış ancak cebirsel çoklu temsili

kullanan öğrenci sayısında ciddi bir artışın olmadığı görülmüştür. Çoklu temsiller arasındaki ilişkilerin kullanımı incelendiğinde uygulama öncesinde sadece bir temsil çiftinin ilişkilendirildiği kullanımlar söz konusuysa uygulama sonunda üç temsil çiftinin de birbiriyle ilişkilendirildiği kullanımların sayısında artış olmuştur. Çalışmada öğrencilerin türevin çoklu temsilleri arasındaki ilişkilerin kullanımındaki artış düşünüldükçe derste bilgisayar destekli türev öğretiminin yapılmasının öğrenci başarısı ve anlamlı öğrenmeler bakımından etkili olacağı belirtilmiştir.

Konyalıoğlu vd. (2012) tarafından gerçekleştirilen çalışmada ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören lisans öğrencilerinin türev konusundaki konu alanı bilgilerinin hataya yaklaşımları belirlenmiştir. Çalışmanın amacına uygun şekilde öğrencilerden hatalı çözülmüş açık uçlu sorulardan oluşan bir testi yanıtlamaları istenmiştir. Testin özelliğinde öğrencilerin türev konusundaki hatalı çözümlere yaklaşımları, hataların tespiti ve hataların kaynağı gibi yeterliklere sahip olup olmadıkları belirlenmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgulara göre öğrenciler türev kavramına yönelik işlemsel soruları başarıyla çözmelerine rağmen yapılan hatalı soruları konu alanı bilgisi bağlamında açıklamada yetersiz kalmıştır. Buna göre öğrencilerin konu alanı bilgisi bağlamında hatayı doğru tespit etme yetisine sahip olmasına rağmen bu hatanın neden kaynaklandığı hususunda yeterli bilgiye sahip olmadıkları söylenebilir. Buradan hareketle öğrencilerin türev konusundaki konu alanı bilgi düzeylerinin tam anlamıyla yeterli olmadığı belirtilmiştir. Çünkü bir konudaki soruları doğru bir şekilde çözmenin yanı sıra o konuda ortaya çıkan hataların da farkına varmak ve bu hataların neden yapıldığını öğrencilere iyi anlatmak gerekir. Araştırmadan elde edilen bulgulara göre araştırmacılar, konu alanı bilgisi hatanın kaynağını belirleme noktasında zorlanan öğrencilerin gelecekte mesleki yaşantılarında pedagojik alan bilgisinin ölçme-değerlendirme boyutunda problem yaşayabilecekleri öngörülmüştür.

Açıkyıldız (2013) tarafından gerçekleştirilen çalışmada ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü lisans öğrencilerinin türev kavramına yönelik anlamaları ve türevi anlamada yaşadıkları öğrenme zorluklarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Özel durum çalışmasına göre desenlenen bu çalışmada yazılı sınavlar ile mülakatlardan yararlanılmıştır. Yazılı sınavların içeriğinde türev-limit, türev-değişim oranı ve türev-teğet/eğim ilişkilerine yönelik sorular yer almıştır. Klinik mülakatlar ise öğrencilerin bu ilişkileri tanımlarken yaptıkları doğru-yanlış açıklamaları belirlemek ve cevapları kategorize etmek için işe koşulmuştur. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğrenciler türev konusunda yüzeysel bir anlamaya sahip olmakla birlikte açıklamalarında işlemsel anlamaya daha fazla önem vermektedir. Öğrencilere yöneltilen sorularda öğrencilerin sadece cebirsel formlardaki türev

sorularının çözümünde daha başarılı oldukları gözlenmiştir. Öğrenciler türevin limit, değişim oranı ve teğet/eğim kavramlarıyla olan ilişkilerini sadece tanımlarla sınırlayarak bu tanımlamalarda kullanılan sözel içerikler ile topolojik notasyonların ne anlama geldiğini doğru bir şekilde açıklayamamıştır. Nümeriksel ve grafiksel sorularla karşılaşan öğrenciler doğru cevap vermek adına soruları cebirsel forma dönüştürerek çözmeye çalışmıştır. Türev, limit, değişim oranı ve teğet/eğim gibi kavramlar arasındaki bağlantıların net kurulamaması öğrencilerin türevi öğrenmeleri önünde engel teşkil etmiştir.

Nagle, Moore-Russo, Viglietti ve Martin (2013) tarafından gerçekleştirilen çalışmada üniversite düzeyindeki lisans öğrencileri ile üniversitede öğretim yapan öğretim üyelerinin eğim kavramını kavramsallaştırma düzeyleri belirlenmiş ve bu kavramsallaştırmalar birbiriyle karşılaştırılmıştır. Nitel araştırma yönteminin kullanıldığı bu çalışmada hem öğrencilere hem de öğretim üyelerine eğimi kavramsallaştırma düzeylerini belirlemek amacıyla beş soru yöneltilmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin eğimi kavramsallaştırmaları kovaryasyonel düşünmeden çok uzakta iken öğretim üyelerinin eğimi kavramsallaştırmaları çok boyutlu bir yapıda olup çeşitlilik göstermiştir. Öğretim üyeleri tarafından yapılan kavramsallaştırmalarda daha çok gündelik hayattan yansımalar, gerçek yaşam durumları, geometrik oran, fonksiyonel özellikler ve analiz kavramlarına yönelik yorumlamalar söz konusu iken öğrencilerin yaptıkları kavramsallaştırmaların gündelik hayat örneklerinin uzağında olduğu söylenebilir. Öğretim üyelerinin verdikleri yanıtların türevin geometrik yorumundaki eğimi sadece prosedürel ve manipülatif işlemlere odaklanmadıklarını göstermiştir. Dikkat çekici bir diğer nokta ise öğretim üyeleri eğimi kavramsallaştırırken öğrencilerin kullandıkları argümanlardan yararlanmış ve bu argümanları inşa ederek eğim hakkında yorumlamalar yapmıştır. Öğrencilerin yaptıkları kavramsallaştırmaların daha çok ortaokul döneminden edindikleri kazanımların çizgisinde şekillendiği düşünülmüştür.

Patel (2013) tarafından gerçekleştirilen çalışmada üniversite düzeyinde analiz dersini alan lisans öğrencilerinin türev ve eğim kavramına yönelik anlayışları belirlenmeye çalışılmıştır. Karma araştırma yönteminin kullanıldığı bu çalışmada altı farklı sınıftan rastgele seçilen 30 öğrenci araştırmanın nicel bölümünde yer almıştır. Araştırmanın nicel veri toplama araçları olarak anketler kullanılmıştır. Araştırmanın nitel veri toplama araçları ise seminer şeklindeki görüşmeler sürecinde elde edilmiştir. Araştırmanın nitel bölümünde, yedisi öğretim deneyimine sahip, üçü ise öğretim deneyimine sahip olmayan 10 öğrenciyle e-mail üzerinden görüşmeler yapılmıştır. Çalışma, üniversite düzeyinde öğretim yapan alan uzmanlarına, öğrencilerin türevin limit tanımını eğimle ilişkilendirme, türev-eğim ilişkisini gündelik yaşama aktarma ve geometrik-cebirsel verilen fonksiyonların türev grafiklerini elde etme

noktasında yaşadıkları zorlukların görülmesi bakımından bir kanıt özelliği taşımaktadır. Çalışmanın bir diğer özelliği ise veri toplama araçlarında kullanılan soruların gerçek yaşam problemi olarak öğrencilere sunulmasıdır. Araştırmada ilk olarak öğrencilerin türev ve eğim kavramlarını etkileyen durumsal faktörlere odaklanılmıştır. Daha sonra seminerler sürecinde öğrencilerin türev ve eğime yönelik hükümlerinde ve bu kavramları yorumlamalarında beliren olumluluk düzeyleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Son olarak öğrencilerin türev ve eğime yönelik anlayışlarını net şekilde belirlemek için nitel çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgulara göre öğrenciler süreç içinde eğim kavramına yönelik olumlu bir anlayış geliştirmelerine rağmen bu anlayışlarını daha üst düzey bilişsel seviyelere taşıyamadan sadece anlama eylemi seviyesinde sınırlı bir davranış sergilemiştir. Buradan anlaşılacağı üzere öğrenciler eğim kavramına yönelik daha iyi bir problem çözücü olmalarına rağmen halen eğimi türevin cebirsel anlamında yer alan topolojik ifadelerle tam olarak ilişkilendirememekte ve türevin geometrik yorumunu net şekilde açıklayamamaktadır. Araştırmadan elde edilen başka bir bulguda ise öğrencilerin matematiğe olan eğilimleri ile eğim kavramına yönelik bilgileri arasında herhangi bir ilişki bulunamamıştır. Araştırma sonunda çalışmadan elde edilen bulgulara bağlı olarak doğrusal ya da eğimli fonksiyonlarda değişkenler arasındaki ilişkilerin daha detaylı şekilde öğrencilere anlatılması önerilmektedir.

Park (2015) tarafından gerçekleştirilen çalışmada analiz derslerini almış ve bu derslerin öğretimini yapan üç uzmanın türev konusunu anlatırken kullandıkları matematiksel dilin konuya uygunluğu ve bu uzmanların bir noktadaki türevin tanımına yönelik anlayışları belirlenmiştir. Nitel araştırma yöntemleri kullanılarak gerçekleştirilen bu çalışmada uzmanlarla mülakatlar gerçekleştirilmiş ve derslerdeki veriler video-ses kayıt cihazıyla kayıt altına alınmıştır. Araştırmadan elde edilen bulgulara göre uzmanlar, çoklu temsiller arasında ilişki kurmadan sadece sembolik gösterimden yararlanarak bir noktadaki türevi elde etmeye çalışmıştır. Ayrıca uzmanlar noktada türevi açıklarken alıştırmalarda olduğu gibi doğrudan işlemsel ve cebirsel formda bir noktadaki türevi elde etmiş ancak türevin değişkenlerdeki değişiminden ve değişen doğasından bahsetmeyerek değişim oranlarının limit tanımını noktada türevde kullanmamıştır. Araştırmadan elde edilen bir diğer bulguda ise uzmanlar sınırlı grafiksel özelliklere sahip fonksiyonlardan yararlanmış ve türevi sürekli bir hesaplama mantığıyla bir sayı olarak nicelleştirmişlerdir. Türevde çoklu temsillerden ve dinamik yazılımlardan faydalanmanın öğrenmedeki kaliteyi arttıracığı düşünülmektedir.

Erdoğan (2017) tarafından gerçekleştirilen çalışmada lise matematik öğretmenlerinin bir noktadaki türev ve türev fonksiyonu kavramlarına yönelik sahip oldukları imajlar belirlenmiştir., &ri toplama araçlarında öğretmenlerin türev kavramına yönelik tanımlarını,

türev kavramı ve türev fonksiyonu hakkında sahip oldukları kavram imajlarını ortaya çıkaracak sorular bulunmaktadır. Araştırmadan elde edilen veriler analiz edildiğinde öğretmenlerin çoğunun türev kavramına yönelik cebirsel tanımı ezber şeklinde belirttikleri ve türev hakkında klişe kelimeler kullandıkları tespit edilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgulara öğretmenlerin türev ve türevin fonksiyonu hakkındaki kavram bilgilerinin yeterli olmadığı söylenebilir. Türeve yönelik yetersiz kavram bilgisine sahip öğretmenler türevi ifade ederken noktada türev formundan yararlanmaya çalışmıştır. Bununla birlikte türevi aramaya çalışan öğretmenler daha çok hesaplama mantığıyla hareket ederek limit alma işlemlerine yönelmiştir. Öğretmenler türev-teğet/eğim ilişkisini açıklarken de bir noktadaki türevin işlemsel yollarla bulunmasını çağrıştıran hesaplamalarla ilgilenmiştir. Öğretmenlerin türev-değişim oranı ilişkisine yönelik açıklamalarında anlık hız ve ivme gibi fiziksel anlama yönelik örnekler verdikleri görülmüştür. Öğretmenlerin çoğu türev alma işlemlerine yönelik yeterli becerilere sahip olmalarına rağmen değişim oranı kavramını doğru bir şekilde açıklayamamıştır. Çoğu öğretmenin yaptığı başka bir açıklama ise türev kavramı limit ve süreklilik kavramlarıyla eşdeğer tutulmuştur. Öğretmenlerin noktada türeve yönelik verdikleri cevapların doğruluğu onların işlemsel bilgi düzeyinde hareket ettiklerini göstermektedir. Yapılan bu çalışmada öğretmenlerin türev kavramına yönelik öğrenme zorluklarını gidermek amacıyla dinamik yazılımların öğretimde kullanılmasının öneminden bahsedilmiştir.

İlgili alanyazın incelendiğinde türev ve uygulamaları üzerine yapılan çalışmaların ağırlıklı olarak türevi kavramsal olarak anlama ve türev-süreklilik, türev-değişim oranı, türev-teğet/eğim ilişkisiyle ilgili çalışmalardan oluştuğu gözlemlenmiştir. Bu çalışmaların çoğunda nitel araştırma yöntemleri benimsenmiş ve araştırmaya katılanlarla mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Çalışmalarda mülakatlara ağırlık verilmesinin nedeni türev konusuyla ilgili bireylerin ne düşündüklerini derinlemesine betimlemektir. Çalışmaların bir bölümünde seminer ve çalıştay gibi etkinliklerin gerçekleştirildiği görülmüştür. Bu etkinliklerde, çoğu zaman dinamik yazılım programları kullanılarak bilgisayar destekli türev öğretimi gerçekleştirilmiştir. Buradaki amaç öğrenilecek içeriğin daha somut ve görsele dayalı olarak bireylerin aklında kalmasıdır. Çalışmaların bir diğer ortak özelliği ise katılımcıların büyük çoğunluğunun üniversite düzeyinde matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören öğrenciler olmasıdır. Öğrencilerin çalışmalarda tercih edilmesinin nedeni ise bu katılımcı grubundan verilerin daha kolay elde edilmesidir. Yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçlarda öğrencilerin ve öğretmenlerin türevin kavramsal yapısını tam olarak anlayamadıkları ve çoklu temsiller arasındaki ilişkileri kurmada zorlandıkları görülmüştür. Bu çalışmalarda öğrenciler çoğunlukla işlemsel manipülasyonlar üzerinden türev bilgilerini göstermeye çalışmıştır. Çalışmaların sonunda araştırmacılar tarafından türev öğretiminde en

çok dinamik yazılımların kullanılması önerisi dile getirilmiştir. Yapılan bu çalışmalarda türev ve uygulamaları konusunda pedagojik alan bilgisi teorik çatısının kullanıldığı çalışmaların sayısının az olduğu söylenebilir. Ancak çalışmalarda öğrencilerin kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi durumu, PAB çatısında konu alanı bilgisi için işe koşulan işlemlere benzetilebilir.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Yöntem

Bu bölümde araştırma tasarımına, araştırma paradigmasının kabullerine, araştırmanın desenine, araştırmanın katılımcılarına, pilot uygulamaya, araştırmanın veri toplama araçlarına, araştırmanın iç ve dış geçerlik-güvenirlik kriterlerine, araştırmacı rolüne ve toplanan verilerin analizine yer verilmiştir.

Araştırmanın Tasarımı

Bu araştırmanın iki aşamada gerçekleştirilmesi planlanmıştır. İlk aşamada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusuna yönelik konu alanı, öğrenci ve öğretim stratejileri bilgileri demografik bilgi formları, konu alanı bilgisi mülakat formları ile öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisi mülakat formları yardımıyla belirlenmeye çalışılmıştır. İkinci aşamada ise öğretmenlerin türev ve uygulamaları konusundaki öğretimleri ders içi gözlem formları kullanılarak incelenmiştir. Bu sayede öğretmenlerin görüşmelerinden elde edilen bilgileriyle öğretimdeki bilgileri ve davranışları arasındaki tutarlılıklar karşılaştırılmıştır.

Araştırma Paradigmasının Kabulleri

Bir bilim anlayışı olarak tanımlanan paradigma kavramı; bilimsel bilginin amacının ne olduğu, bilimin nasıl yapıldığı ve bilimsel bilgiye nasıl ulaşıldığı noktasında bilim dünyası tarafından özümsemiş ön kabullerdir (Demirhan, 2015; Dikeçligil, 2010). Dolayısıyla bir paradigmanın varlığı, o paradigmayı yansıtan bilim insanlarının ortak görüşlerinden hareketle söz konusu bilim dünyasına, bilimin amacı ve fonksiyonu, kullanılacak teori ve uygulanacak yollar, araştırılması istenen konulara yönelik sorulacak sorular, araştırmadan elde edilecek sonuçlar ve araştırmanın bilimselliğini test edecek ölçütler hakkında standartlar sunmaktadır (Dikeçligil, 2010; Kuhn, 1970). Paradigma kavramı, dersteki bir konunun nasıl yorumlanacağını belirleyen, kavramları, sayıltıları, teorileri ve inançları barındıran bir çerçevedir (Bergman, 2010). Paradigma, araştırılacak konu hakkındaki sorulara cevap vermez ancak cevapları nerede arayacağımız noktasında araştırmacılara bilgi verir (Rubin & Babbie, 2008). Paradigma, gerçekliğin doğasına yönelik *ontolojik*, bilimsel bilgiyi elde etmeye yönelik *epistemolojik* ve bilginin ne şekilde elde edileceğine yönelik *metodolojik* varsayımlar olmak üzere birbiri içine geçen üç sayıltıdan oluşur (Dikeçligil, 2006).

Paradigmayı oluşturan sayıtlardan birisinin veya birkaçının olmaması durumunda o araştırmadaki bilimsel anlayışın olmadığı ve paradigmanın oluşmadığı söylenebilir (Dikeçligil, 2006). Bir paradigmaya şekil veren en önemli varsayımın varlığın doğasına yönelik ontolojik kabuller olduğu ifade edilebilir (Dikeçligil, 2002, 2006). Kendisi hakkındaki varlığın doğasının ne olduğu (ontolojisi) bilinmediğinde o varlığın bilgisine ne tür bir bilgi ile ulaşılabileceğini (epistemolojisi) ve nasıl ulaşılabileceğini (metodolojisi) bilmek de zorlaşır (Dikeçligil, 2006, 2009). Dolayısıyla bir paradigmaya yönelik yorumlar elde edebilmek için öncelikle o paradigmanın ontolojisine odaklanılmalıdır.

Bilimsel bir paradigmanın *ontolojik* varsayımında gerçekliğin doğasının ne olduğu, olgular arasındaki ilişkilerin nasıl olduğu, insanın nasıl bir varlık olduğu, toplumun doğasının ne olduğu ve birey-toplum ilişkisinin doğasının ne olduğu sorularına cevaplar aranır (Dikeçligil, 2002, 2006; Kuş, 2009). Pozitivist paradigmaya göre ontolojik varsayımlar değerlendirildiğinde gerçeklik objektif olup kişiden kişiye değişmeyen bir yapıda oluşmakta, olgular arasındaki ilişkilerde kesinlik olmakta, insan hür iradeye sahip olmayan bir birey olarak kabul edilmekte, toplumun doğası bireyler üzerinde bir konumda ve kültürlerin inşası dışında oluşmakta, birey-toplum ilişkisinde ise toplumun belirleyiciliği esas alınmaktadır (Dikeçligil, 1994). Yorumcu paradigmaya göre ontolojik varsayımlar değerlendirildiğinde gerçeklik subjektif olup bireylerin dünyayı anlamalarına göre oluşmakta, olgular arasındaki ilişkiler kendiliğinden ve karşılıklı şekillenmekte, insan kendi dünyasını oluşturan hür bir iradeye sahip bir birey olarak kabul edilmekte, toplumun doğası bireylerin ve kültürlerin inşasıyla oluşmakta, birey-toplum ilişkisinde ise bireylerin kendi sosyal dünyasını kurması ve toplumu etkilemesi esas alınmaktadır (Neuman, 2012). Buna göre pozitivist paradigmada hiyerarşik yapı, nesnellik, geleceğin belirliliği ve önceden kestirimi, nedensel ilişki, formellik, genellenebilirlik, nicelik ve mükemmel bilginin varlığı söz konusuysa yorumcu paradigmada gerçekliğin karmaşık oluşu ve belirsizliği, düzensizlik, durumsallık, bilginin yorumlanması, görecelik, öznellik, gözlemcinin katılımcı özelliği, nitelik ile bireylerin duygu ve düşünceleri söz konusudur (Güngör, 2014).

Ontolojik varsayımdaki pozitivist-yorumcu paradigma karşılaştırması dikkate alındığında benzer karşılaştırmanın sosyal bilimlerde ontolojik varsayım içerisindeki nominalizm ve realizm arasında yapıldığı da söylenebilir. Realist felsefede pozitivist paradigmaya benzer şekilde tek bir doğru ve çözümü olduğu, bilinenin dışındaki durumların olguları etkilemediği ve bilginin bireyden bağımsız olduğu savunulurken, nominalist felsefede yorumcu paradigmaya benzer şekilde tek bir doğru ve çözüm yolunun olmadığı, bireylerin doğru düşündükleri her şeyin gerçek ve var olduğu, durumların olguları etkilleyebileceği ve

bilginin bireyden bağımsız olmadığı savunulmaktadır (Burrell & Morgan, 1979). Tüm bu verilerden hareketle bu doktora tez çalışmasında lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki PAB'lerinin öğretmenlerden bağımsız olmadığı söylenebilir. Nitekim öğretmenlerin PAB'ları öğrencilerin bireysel özelliklerine göre farklılaşabilmektedir. Ayrıca tez çalışmasının durumsallığı düşünüldüğünde öğretmenlerin PAB'larından elde edilecek veriler, mezun olunan fakülte türü, hizmet süresi ve lisansüstü eğitim gibi faktörlere göre yorumlanacağından PAB'ların etkilenmesi söz konusu olabilir. Tüm bu nedenlerden dolayı bu çalışmada yorumcu paradigma ve nominalist felsefe benimsenmiştir.

Bilimsel bir paradigmanın *epistemolojik* varsayımında bilginin kaynağının ne olduğu, bilginin ne kadar bilinebileceği, bilimsel bilginin ne tür bir bilgi olduğu, bilimsel bilginin amacının ne olduğu, bilen-bilinen ilişkisinin ne olduğu ve bilim-sağduyu ilişkisinin nasıl olduğu sorularına cevaplar aranmaktadır (Dikeçligil, 2002, 2006; Kuş, 2009). Epistemolojik varsayım, eğitim yönetimi alanında bilimsel bir araştırma sonucunda elde edilen bilginin kaynağını, niteliğini ve bilen-bilinen ilişkisini ortaya koyan görüş ve sayılılar olarak bilinir (Demirhan, 2015). Ontolojik varsayımların bir yansıması olarak kabul edilen epistemolojik varsayım (Dikeçligil, 1994, 2002, 2006) varlığa yönelik bilginin içeriği ile bu bilginin sınırları belirlenmektedir (Dikeçligil, 2002, 2006, 2010). Ontolojik varsayım olduğu gibi epistemolojik varsayım da özellikler bağlamında ayrışan pozitivist ve yorumcu paradigmalar mevcuttur. Pozitivist paradigmaya göre bilginin kaynağı maddi olmakta, bilme eylemi sonsuza kadar tahmin edilmekte, bilimsel bilgi kesin kurallara dayanmakta, bilimsel bilgi nesnel bir özelliğe sahip olmakta, bilimsel bilginin amacı toplumsal yapıyı kontrol etmekte, bilgi araştırmacıdan bağımsız bulunmakta ve bilimsel bilgi tüm bilgi türlerinden farklı ve üstün olmaktadır (Neuman, 2012). Yorumcu paradigmaya göre ise bilimsel bilginin kaynağı manevi bir özellikte olmakta, bilme eyleminin sınırları bulunmakta, bilimsel bilgi öznel ve yoruma dayalı olmakta, bilen-bilinen etkileşimi ön planda ve araştırmacı araştırmaya dâhil olmakta, bilimsel bilgi diğer bilgi türlerinden farklı olmakta ancak üstün olmamaktadır (Dikeçligil, 1994).

Epistemolojik varsayımdaki pozitivist-yorumcu paradigma karşılaştırması dikkate alındığında benzer karşılaştırmanın sosyal bilimlerde epistemolojik varsayım içerisindeki pozitivist-postpozitivist paradigma arasında yapıldığı da söylenebilir. Buna göre pozitivist paradigmanın epistemolojik kabulünde bilginin doğası olgusal, somut, hissedilebilir ve dokunulabilirken postpozitivist paradigmanın epistemolojik kabulünde bilginin doğası öznel, soyut, deneyime ve iç görüye dayalıdır (Kuş, 2009). Tüm bu verilerden hareketle bu doktora tez çalışmasında farklı öğretim deneyimine sahip lise matematik öğretmenlerinin türev ve

uygulamaları konusundaki PAB'ları incelenmiştir. Araştırmada bilimin doğasının nasıl oluşunun yanı sıra başka bireylere bunun nasıl yansıtıldığı sorusuna cevap aranmıştır. Bu çalışmada öğretmenlerin uzmanlık deneyimlerine göre farklılaşan PAB'ları subjektif ve iç görüsel bir yapıda bulunmaktadır. Çünkü öğretmenler deneyim kazandıkça uzmanlık alanlarını geliştirirler ve edindikleri deneyimlere göre PAB'larını güncellerler. Bununla birlikte öğretmenlerin deneyimle şekillendirdikleri PAB'ları kendi zihinlerinde yapılandırdıkları öznel bilgilerin bir araya gelmesiyle gelişmektedir. Buna göre sosyal deneyimlerle sürekli yenilenen bir pedagojik alan bilgisi olgusunda kesin ve tek bir doğrunun olmadığı söylenebilir. Sosyal bir ortamda hayatlarını sürdüren insan toplulukları da birbirlerinin fikirlerinden etkilenir. Lise matematik öğretmenlerinin fikirleri öğrenme platformlarına, öğrenci yapısına, öğretmen ortamına ve öğretimin yapıldığı zamana bağlı olarak değişeceğinden bu araştırmanın epistemolojik kabulü olarak yorumcu ve postpozitivist paradigma benimsenmiştir.

Bilimsel bir paradigmanın *metodolojik* varsayımında araştırmanın yöntemi, tekniği, süreci, amacı, veri toplama teknikleri, değerlerin rolü, araştırma raporunun dili ve kullanılan sözcüklere odaklanılmıştır (Dikeçligil, 2002; Punch, 2005). Teleolojik kabuller veya aksiyomatik varsayımlar olarak da ifade edilen metodolojik kabuller (Mouton & Marais, 1990) ontolojik ve epistemolojik varsayımların birer aynası kabul edilir (Dikeçligil, 2006). Yani metodolojik varsayımların kendinden oluşmadığı öncelikle ontolojik ve epistemolojik varsayımların ortaya çıktığı ve daha sonra metodolojik varsayıma yön verdiği belirtilebilir. Metodolojik varsayımlar paradigma içindeki tanımlı bilgiye nasıl ulaşılacağını gösteren bir rehber rolündeki yöntem ve teknikleri içermektedir (Dikeçligil, 2002, 2010). Ontolojik ve epistemolojik varsayımda olduğu gibi metodolojik varsayımda da özellikler bağlamında ayrışan pozitivist ve yorumcu paradigmlar mevcuttur. Pozitivist paradigmaya göre araştırma yöntemi deneysel, araştırmanın tekniği survey, araştırma süreci tümdengelimci, araştırma amacı genellemede bulunma, araştırmanın verileri nicel, araştırmanın veri toplama aracı anket, araştırmanın değerleri objektif, araştırma raporu nesnel ve kullanılan sözcükler “etki” bağlamında ifade edilmektedir (Neuman, 2012). Yorumcu paradigmaya göre ise araştırma yöntemi akla ve sezgiye dayalı, araştırmanın tekniği saha çalışması, araştırma süreci tümevarımcı, araştırma amacı anlama ve teori geliştirme, araştırmanın verileri nitel, araştırmanın veri toplama aracı mülakat ve gözlem, araştırmanın değerleri subjektif, araştırma raporu öznel ve kullanılan sözcükler “betimleme” bağlamında ifade edilmiştir (Dikeçligil, 2010).

Metodolojik varsayımdaki pozitivist-yorumcu paradigma karşılaştırması dikkate alındığında benzer karşılaştırmanın sosyal bilimlerde metodolojik varsayım içerisindeki nomotetik-idiografik paradigmlar arasında yapıldığı da söylenebilir. Nomotetik paradigmda evrensel ve yasalarla belirli normlar ile pozitif, nicel ve fonksiyonalist kavramlara dikkat çekilirken idiografik paradigmda kişiden kişiye değişen, tarihsel, göreceli ve yorumlamacı kavramlara dikkat çekilmiştir (Hofstede, 1984'ten Akt., Erkenekli, 2012). Bu araştırmanın ontolojik ve epistemolojik kabulleri dikkate alındığında bu kabullerin nitel araştırmayla örtüştüğü görülecektir. Bu kabullerden hareketle bu araştırmanın metodolojik kabulü ise yorumcu ve idiografik paradigma doğrultusunda hareket etmiştir. Nitekim idiografik yani tikel paradigmaya göre bireylerin sahip oldukları bilgiler öğretim yapılan ortama, öğretimin zamanına ve öğretim yapılan bireylerin ihtiyaçlarına göre değişebilir. Bu araştırmadaki lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusuna yönelik PAB'ları belirtilen öğrenme ortamına, öğrenme süresine ve öğrencilerin bireysel farklılıklarına göre değişebilmektedir. Bu nedenle bu araştırmada yorumcu ve idiografik paradigma benimsenmiştir.

Araştırmanın Deseni

Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki pedagojik alan bilgilerini incelemek amacıyla nitel araştırma metodolojisi desenlerinden biri olan durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Nitel araştırmalarda araştırmacı, söz konusu olguyu, ilişkiyi, etkileşimi, durumu veya topluluğu değiştirme gayretinde olmayıp (Patton, 2014) çalışma yapılan ortamın kendi koşulları içerisinde araştırma bulgularını etkileyen bir unsur olduğunu kabul eder (Ary, Jacobs, Sorensen & Razavieh, 2010). Nitel araştırmalarda araştırma katılımcılarının görüşleri, deneyimleri ve hisleri derinlemesine incelendiğinden (Ekiz, 2009; Gravetter & Forzano, 2003) bu tür araştırmalarda nicelikten ziyade problemin sürecine ve anlamına odaklanılmaktadır (Denzin & Lincoln, 1998). Öte yandan durum çalışmaları ise sınırları belirlenmiş bir araştırma grubunun durumunu öğrenmeye yönelik müdahale fırsatı verdiğinden (Denscombe, 2010) araştırma yapılan durum üzerinde detaylı bilgi edinilmesini sağlar (Creswell, 1994; Yin, 1994). Bu araştırmada sınırlı sayıda örneklem kullanılarak lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki PAB'ları farklı veri toplama araçları (yarı yapılandırılmış görüşme, yarı yapılandırılmış gözlem, döküman analizi) kullanılarak detaylı bir şekilde betimlendiğinden durum çalışması yöntemi tercih edilmiştir. Araştırmada, üzerinde gözlem ve görüşme yapılan bireyler “öğretmenler” olduğundan ve yalnızca “türev-türevin uygulamaları” konusundaki PAB'lar bütüncül bir şekilde incelendiğinden durum çalışması türlerinden “bütüncül çoklu durum” deseni

kullanılmıştır. Bütüncül çoklu durum deseninde, kendi başına bütüncül olarak kabul edilen birden fazla durum söz konusu olup bu durumlar kendi içerisinde bütüncül şekilde incelendikten sonra birbiriyle karşılaştırılmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2008). Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusuna yönelik PAB'ları önce bütüncül olarak ayrı ayrı incelenip daha sonra birbirleriyle karşılaştırıldığından bütüncül çoklu durum deseni tercih edilmiştir.

Araştırma Grubu

2015-2016 öğretim yılı güz döneminin sonu ile bahar döneminin başında gerçekleştirilen bu araştırmanın katılımcılarını Karadeniz Bölgesinin bir ilinde Milli Eğitim Bakanlığına bağlı genel liselerde görev yapan dört lise matematik öğretmeni oluşturmaktadır. Araştırmanın katılımcıları belirlenirken amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme yönteminde çalışmanın amacı doğrultusunda örnekleme dâhil edilecek tipik durumlar araştırmacı tarafından belirlenerek çalışmanın ihtiyaçları ve sınırları doğrultusunda katılımcılar oluşturulur (Cohen & Manion, 1994; Leedy & Ormrod, 2001). Ayrıca bu yöntemde zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen olgular, topluluklar, bireyler veya durumlar derinlemesine çalışmaya imkân tanımaktadır (Patton, 1987). Bu araştırmada katılımcıların farklı görüşlerinden zengin şekilde faydalanmak ve bu görüşleri derinlemesine incelemek amacıyla amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır.

Maksimum çeşitlilik örneklemesinde farklı özelliklere sahip bireylerin konuya özgü düşünceleri genelleme yapılmadan geniş bir açıdan değerlendirilir (Patton, 1990). Bu araştırmada maksimum çeşitlilik örneklemesinin tercih edilmesinin nedeni ise farklı fakültelerden mezun olmuş ve zamana bağlı olarak çeşitli tecrübeler edinmiş öğretmenlerin durumlara bakış açılarından faydalanılarak araştırma probleminin farklı boyutlarını ortaya çıkarmaktır. Öğretmenlerin PAB'larına yönelik çalışmalarda cinsiyet değişkeni araştırma grubunun seçiminde dikkate alındığından ve cinsiyete bağlı karşılaştırmalar yapıldığından dolayı (Danışman & Tanışlı, 2014; Dönmez, 2009; Gökbulut, 2014; Gökçurt, 2014; Jenkins, 2010; Kılıç, 2011; Tükenmez, 2014) bu araştırmada iki erkek ve iki bayan öğretmen tercih edilmiştir. Araştırmaya katılan dört öğretmenden ikisi eğitim fakültesi mezunu iken diğer ikisi fen-edebiyat fakültesi mezunudur. Araştırmaya katılan tüm öğretmenler öğretmenlik deneyimi bakımından en az beş yılını doldurmuş öğretmenlerdir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin en az beş yılını doldurmuş olan öğretmenlerden oluşmasının bazı sebepleri vardır. Öğretmenlerin konuya özgü ve alana yönelik PAB'ları öğretmenliklerinin ilk yıllarında yeterince gelişmemiş olabileceğinden dolayı bu öğretmenler deneyimsiz olarak nitelendirilmektedir (Gatbonton, 2008; Lee & Luft, 2008). Öğretmenlik mesleğinin başında bulunan ya da henüz başlamamış

olan öğretmenlerin PAB'ları iyi olsa da hizmet süresi fazla ve deneyimi yüksek olan öğretmenlerin konuya dönük PAB'ları daha güçlü olmaktadır (Davidowitz & Potgieter, 2016). Martin, Yin ve Mayall (2006) tarafından yapılan bir çalışmada hizmet süresi beş yıla kadarki öğretmenler deneyimsiz olarak görülürken hizmet süresi beş yıldan fazla olan öğretmenler deneyimli öğretmenler olarak belirtilmiştir. Berliner (2001)'e göre bir öğretmenin deneyimli olarak görülebilmesi için öğretmenlikteki deneyiminin en az beş yıl ya da beş yıldan fazla olması gerekir. Tüm bu sebeplerden dolayı bu araştırmada deneyim süresi en az beş yıl olan öğretmenlerin araştırmaya dâhil edilmesine karar verilmiştir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin hizmet süreleri 5-10 yıl, 10-15 yıl ve 15-20 yıl şeklinde kategorilere ayrılmıştır. Buna göre, öğretmenlerin deneyimlerinin türev ve uygulamaları konusundaki PAB'ları üzerinde etkili olup olmadığı belirlenmeye çalışılmıştır.

Araştırmada lise matematik öğretmenleriyle çalışılmasının sebebi katılımcıların lisans öğrenimi sırasında analiz ve matematik öğretimi derslerini almış olmalarından kaynaklıdır. Araştırmanın lise son sınıf öğrenim düzeyinde gerçekleştirilmesinin sebebi ise bu düzeydeki matematik öğretim programında türev ve uygulamaları konusunun yer almış olmasından kaynaklıdır. Katılımcı gizliliğinin korunması varsayımından hareketle (Patton, 2014) araştırmaya katılan öğretmenlerin kimlikleri gizlenerek kendilerine Ö₁, Ö₂, Ö₃ ve Ö₄ şeklinde kod isimler verilmiştir. Öğretmenlerin araştırmaya katılması hususunda kendilerine hiçbir şekilde baskı uygulanmamıştır. Öğretmenlerin tamamı gönüllülük ilkesine bağlı olarak kendileri araştırmaya katılmak istemiştir. Araştırmanın uygulanması için ilgili İl Milli Eğitim Müdürlüğünden gerekli izinler alınmıştır (bk. Ek-8). Araştırmanın katılımcıları olan lise matematik öğretmenlerinin demografik özelliklerine yönelik bilgiler Tablo 2.'de verilmiştir.

Tablo 2. *Öğretmenlerin Demografik Özellikleri*

Öğretmenler	Mezuniyet	Cinsiyet	Hizmet Süresi
Ö ₁	EF	Bayan	9 yıl
Ö ₂	FEF	Erkek	12 yıl
Ö ₃	EF	Bayan	16 yıl
Ö ₄	FEF	Erkek	18 yıl

EF: Eğitim Fakültesi, FEF: Fen Edebiyat Fakültesi

Öğretmenlerle yapılan ön görüşmelerde öğretmenlerin tümü matematik veya eğitim bilimleri alanında tezli yüksek ya da doktora öğrenimi görmediklerini belirtmiştir. Ancak Ö₂ ve Ö₄ fen-edebiyat fakültesi mezunu olduklarından dolayı formasyon eğitimine yönelik tezsiz yüksek lisans yaptıklarını belirtmiştir. Ö₄ ile yapılan ön görüşmelerde, Ö₄ araştırmacıya lisans

not transkriptini göstererek matematik öğretimi dersini aldığını teyit etmiştir. Öğretmenlerden Ö₂ matematik öğretimine ya da eğitim bilimlerine yönelik herhangi bir kursa/seminere katılmadığını belirtmiştir. Ancak diğer öğretmenlerden Ö₁ başarının artırılmasına yönelik bir seminere katıldığını, Ö₃ sadece liselerde matematik programına yönelik bir seminere katıldığını, Ö₄ ise hem etkili ders anlatımı kursuna hem de müfredat tanıtımı-değişikliği seminerine katıldığı dile getirmiştir. Öğretmenlerin tümü türev ve uygulamaları konusunun öğretimi için lisans eğitimi sırasında analiz ve diferansiyel denklemler derslerinin alınması gerektiğini belirtmiştir. Öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ türev ve uygulamaları konusunun öğretimine yönelik kendilerini “yeterli” görmesine rağmen öğretmenlerden Ö₂ bu konuda kendisini “yetersiz” görmektedir. Öğretmenlerden Ö₃ lisans döneminde matematik dersindeki başarısını “çok iyi” şeklinde belirtirken, öğretmenlerden Ö₁ lisans döneminde matematik dersindeki başarısını “iyi” şeklinde ifade etmiş, öğretmenlerden Ö₂ ve Ö₄ ise lisans döneminde matematik dersindeki başarısını “orta” şeklinde belirtmiştir.

Veri Toplama Araçları

Bu araştırmanın veri toplama araçları görüşme, gözlem ve döküman analizidir. Öğretmenlerle konu alanı, öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerine yönelik yapılan görüşmelerin veri toplama sürecindeki en önemli bölüm olduğu düşünülmektedir. Araştırmanın veri toplama araçlarından yarı yapılandırılmış görüşmede soru türleri olarak rutin ve rutin olmayan problemler kullanılırken demografik forma yönelik sorularda özgeçmiş ve deneyim hakkında bilgi elde etmek amaçlanmıştır. Diğer bir veri toplama aracı olan yarı yapılandırılmış gözlemde ise araştırmacı, katılımcı olmayan gözlem gerçekleştirmiştir. Araştırmanın üçüncü ve son veri toplama aracı olan döküman analizinde ise araştırmacı yazılı materyallerden olan lise matematik ders kitabı, öğretmenler tarafından hazırlanan sınavlar, öğrenciler tarafından derste tutulan notlar ve araştırmacının dersi gözlemlerken tuttuğu günlüklerden yararlanılmıştır. Araştırmada birden fazla araçla veri toplama işlemi gerçekleştirildiğinden dolayı veri çeşitlemesi yapıldığı söylenebilir.

Pilot çalışma.

Nihai çalışma öncesi araştırmacının hem görüşme hem de gözlem sürecinde tecrübe edinmesini sağlamak, araştırmada kullanılacak olan veri toplama araçlarının lise matematik öğretmenleri için anlaşılabilirliğini, kullanılabilirliğini test etmek ve bu araçların geçerlikleri ile güvenilirliklerini belirlemek amacıyla pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Buna bağlı olarak pilot çalışmada, araştırmada kullanılacak olan görüşme ve gözlem formlarının eksikliklerini ya da fazlalıklarını tespit etmek, görüşme-gözlem için uygulanacak ortalama süreyi ve formlardaki

soru sayılarının yeterli olup olmadığını belirlemek amaçlanmıştır. Bu araştırmanın pilot çalışması 2015-2016 öğretim yılı birinci döneminin ortasında gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın pilot çalışması nihai çalışmadan sadece bir buçuk ay önce aynı dönemde gerçekleştirilmiştir. Bunun nedeni pilot çalışmanın gerçekleştirildiği okulda görev yapan öğretmenlerin türev ve uygulamaları konusunu diğer okullardaki öğretmenlerden daha önce işlemesinden kaynaklanmaktadır. Pilot çalışmada, nihai çalışmada yürütülmesi düşünülen süreçlerin aynısı uygulanmıştır. Çalışma, aynı lisede matematik öğretmeni olarak görev yapan, farklı hizmet sürelerine sahip, deneyimli iki erkek öğretmenle gerçekleştirilmiştir. Gönüllülük esasına bağlı olarak bu iki öğretmen pilot çalışmaya kendi rızaları dâhilinde katılmak istediklerini belirtmiştir. Öğretmenlerin gerçek isimlerine ve okullarına yönelik bilgiler araştırmanın mahremi bağlamında gizli tutulmuştur. Bu nedenle öğretmenlere Ali ve Can şeklinde kod isimler verilmiştir. Pilot çalışmada tercih edilen lise matematik öğretmenlerinin demografik bilgileri Tablo 3’de verilmiştir.

Tablo 3. *Pilot Çalışmaya Katılan Öğretmenlerin Demografik Özellikleri*

Öğretmenler	Mezuniyet	Cinsiyet	Hizmet Süresi
Ali	EF	Erkek	17 yıl
Can	FEF	Erkek	22 yıl

EF: Eğitim Fakültesi, FEF: Fen Edebiyat Fakültesi

Öğretmenlerle yapılan pilot çalışmada Ali ve Can öğretmenler alanlarında herhangi bir şekilde tezli yüksek lisans veya doktora öğrenimi görmediklerini belirtmiştir. Can öğretmen, fen-edebiyat fakültesi mezunu olduğundan dolayı formasyon eğitime yönelik tezsiz yüksek lisans yaptığını belirtmiştir. Can öğretmen, araştırmacıya lisans not transkriptini göstererek matematik öğretimi dersini aldığını teyit etmiştir. Ali ve Can öğretmenlerin her ikisi de kendi alanlarında müfredat değişimine yönelik matematik eğitimi seminerleri aldıklarını belirtmiştir. İki öğretmen de türev ve uygulamaları konusunun öğretimi için lisans eğitimi sırasında analiz ve diferansiyel denklemler derslerinin alınması gerektiğini belirtmiştir. Öğretmenler, türev ve uygulamaları konusunun öğretime yönelik kendilerini “yeterli” gördüklerini ve lisans düzeyinde matematik alan derslerinde başarılı olduklarını belirtmiştir. Ali öğretmen, türev ve uygulamaları konusunu daha önce 12 kez anlatırken, Can öğretmen türev ve uygulamaları konusunu daha önceden 15 defa anlatmıştır.

Pilot çalışmada türev ve uygulamaları konusundaki yoğunluk nedeniyle, her iki öğretmenle toplamda üç hafta boyunca, altı defa görüşme yapılmış ve bu görüşmelerin her biri ortalama 30 dakika sürmüştür. Buna göre her iki öğretmenle yapılan görüşme toplamda

altı saati bulmuştur. Öğretmenlerin her biriyle bir haftada iki defa görüşme gerçekleştirilmiştir. Görüşmelerin yapıldığı günde görüşmeler sonrası ders gözlemlerine geçilmiştir. Öğretmenlerin türev ve uygulamaları konusunu anlattıkları dersliklerde her bir öğretmenin dersi toplamda on iki saat gözlemlenmiştir. Öğretmenlerin derslerinde yapılan gözlemler her bir derste iki ders saatiyle sınırlıdır. Lise matematik 12.sınıfta haftalık ders saatinin dört saat olduğu düşünüldüğünde her bir öğretmenle üç hafta boyunca gözlem yapılmıştır.

Öğretmenlerin görüşmede verdikleri cevapların sağlıklı bir şekilde değerlendirilmesi ve bu verilerin saklı tutulması için ses kayıt cihazından yararlanılmıştır. Bunun yanı sıra öğretmenlerin görüşmelerde verdikleri cevapların öğretim sürecindeki uyumluluğunu belirleyebilmek için gözlem sürecinde ses kayıt cihazı ile fotoğraf makinası kullanılmıştır. Ders ortamında video çekiminin kullanılmamasının nedeni ise araştırmanın yapıldığı İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nün video kullanımına ve öğretmen-öğrenci özelliklerinin ifşa edilmesine yönelik izin vermemesinden kaynaklıdır. İl Milli Eğitim Müdürlüğü, video çekim uygulamasında öğrencilerin ve ders öğretmenin dikkatlerinin dağıldığını ve derse kendilerini veremediklerini düşünmektedir. Bu nedenle derste ses kayıt cihazı kullanılarak, sadece öğretmenlerin türev ve uygulamalarıyla ilgili tahtaya yazdığı bilgiler fotoğraf makinesi yardımıyla elde edilmiştir. Pilot çalışma öncesi İl Milli Eğitim Müdürlüğünden gerekli izinler alınmış ve ilgili okul idaresi yapılacak uygulama hakkında bilgilendirilmiştir. Öğretmenlerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşme ve gözleme yönelik uygulama süreci Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. Pilot Çalışmadaki Öğretmenlerin Görüşme-Gözlemine Yönelik Uygulama Süreci

Öğretmen	Görüşme-Gözlem Tarihi	Derste Konuya Yönelik Kazanım
Ali	23.10.2015	Türev kavramını örneklerle açıkla
	28.10.2015	Soldan-sağdan türev ile türev arasındaki ilişkiyi açıkla
	06.11.2015	Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği ile türevlenebilirliği arasındaki ilişkiyi açıkla
	13.11.2015	Türev tanımını kullanarak bir fonksiyonun türevine ait uygulamalar yapar
	20.11.2015	Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları türevin işaretine göre belirler
	27.11.2015	Bir fonksiyonun ekstremum noktalarını türev yardımıyla belirler

Tablo 4. (Devamı)

	21.10.2015	Soldan-sağdan türev ile türev arasındaki ilişkiyi açıklar
	28.10.2015	Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği ile türevlenebilirliği arasındaki ilişkiyi açıklar
	04.11.2015	Türev tanımını kullanarak bir fonksiyonun türevine ait formüller oluşturur
Can	11.11.2015	Bir fonksiyonun grafiğinin bir noktasındaki teğetin ve normalinin denklemini yazar.
	18.11.2015	Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları türevin işaretine göre belirler
	27.11.2015	Bir fonksiyonun ekstremum noktalarını türev yardımıyla belirler.

*Gözlem yapılan derslerin her biri 40 dakikadır **Her bir görüşme süresi 30 dakikadır

Öğretmenlerle yapılan pilot çalışma sonucunda öğretmen görüşme formunda bazı değişiklikler yapılmıştır. Görüşme formunun ilk bölümünde demografik bilgide yer alan “Türev ve uygulamaları konusu için kendinizi yeterli buluyor musunuz?” sorusu, öğretmenlerin kendilerini genelde yeterli bulacakları düşüncesiyle esnetilerek “...kendinizi ne düzeyde yeterli buluyorsunuz?” şeklinde değiştirilmiştir. Görüşme formunun ikinci bölümünde konu alanı bilgisi mülakat formunda öğretmenlerden gelen dönütler sonucunda bazı değişiklikler yapılmıştır. Buna göre formun ilk sorusu olan “Türev hakkında bilgi verebilir misiniz? Size göre türev ne demektir?” biçimindeki soruda değişikliğe gidilmiştir. Burada öğretmenler bilinen bir kavramın kişiden kişiye göre değişiklik göstermeyeceğini düşünmektedir. Bununla birlikte iki soru kökünün birbirinden kopuk olmaması ve ikinci soru kökünün öğretmenleri konu dışı cevaplara yönlendirmemesi amaçlandığından formun sadece tek sorudan ve “Türev kavramı hakkında bilgi verebilir misiniz?” şeklinde sorulmasına karar verilmiştir.

Formda başka sorularda da düzenlemeler yapılmıştır. Buna göre formun ikinci sorusu olan “Verdiğiniz bilgiler doğrultusunda türev kavramıyla ilgili zihninizde canlanan şekli çizer misiniz?” biçimindeki soru, yapılacak olan çizimin sınırlanmasına neden olacağından ve türevin geometrik anlamını çağrıştırdığından dolayı sorunun soruluş sırası ve soru kökünde değişikliğe gidilmiştir. Buna göre soru, türevin uygulamalarına yönelik soruların ilk sırasına kaydırılmış ve “Türevi geometrik olarak izah edebilir misiniz? Türevin geometrik gösterimini yapınız” şeklinde düzenlenmiştir. Formdaki başka bir soru olan “Türev kavramı ile süreklilik kavramı arasında herhangi bir ilişki var mıdır? Bu iki kavram arasında bir ilişki varsa bunu matematiksel olarak nasıl açıklarsınız?” biçimindeki soruda öğretmenler türev-süreklilik

kavramları arasındaki ilişkinin olmadığını düşünen öğretmenlerin de olabileceğini ve bu durumun nedenini kendilerine göre ifade edebileceklerinin dikkate alınması gerektiğini belirtmiştir. Buna göre soru kökünde düzenleme yapılmış ve sorunun “Türev kavramı ile süreklilik kavramı arasında herhangi bir ilişki var mıdır? Aralarında bir ilişki varsa bu ilişkiyi matematiksel olarak nasıl gösterirsiniz? Bu iki kavram arasında ilişki yoksa neden yoktur?” biçiminde sorulmasına karar verilmiştir.

İki öğretmen türevin fiziksel anlamına yönelik de dönütlerde bulunmuştur. Öğretmenler türevin fiziksel anlamının ders kitaplarında olmasına rağmen üniversite sınavlarında soru olarak fazla yer almadığından öğrencilere bu konuyu anlatmadıklarını ve öğrencilerin de bu konunun anlatılmasını istemediğini belirtmiştir. Bu nedenle kendilerinin de derste türevin fiziksel anlamını çağrıştıracak bir iki cümlelik örneklerle konu üzerinde durduklarını belirtmiş ve konu alanı bilgisinde türevin fiziksel anlamına yönelik soruların lise matematik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgilerini tam anlamıyla ortaya çıkaramayacağını dile getirmiştir. Öğretmenler türevin fiziksel anlamıyla ilgili kendilerine yöneltilen sorulara da net olarak cevap vermemiştir. Bu nedenle türevin fiziksel anlamına izahına, ortalama hıza ve anlık hıza yönelik soruların mülakat formundan çıkarılmasına karar verilmiştir.

Görüşme formunun üçüncü bölümünde öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisi mülakat formunda öğretmenlerden gelen dönütler sonucunda düzenlemeler yapılmıştır. Buna göre formun dördüncü ve beşinci sorularında belirli aralıkta tanımlı bir fonksiyonun türevine bağlı olarak aralığın uç noktalarında da fonksiyonun türevinin aranıp aranamayacağı sorulmuştur. Öğretmenler belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun aralığın uç noktalarındaki türevinin aranmasına yönelik hem lise matematik ders kitaplarında hem de literatürdeki analiz kitaplarında konuya dönük uzlaşmış ve net bir bilginin olmadığını belirtmiştir. Bununla birlikte öğretmenler derste belirli bir aralıkta tanımlı olan fonksiyonun aralığın sınır ya da uç noktalarındaki türevine yönelik öğrencilere herhangi bir açıklama yapmadıklarını da belirtmiştir. Bu nedenle öğretmenler, bu sorulara verilecek cevapların öğrenci zorlukları bilgisine katkı sağlamayacağını düşünerek sorunun formdan kaldırılması talebinde bulunmuştur. Öğretmenlerin dönütleri olumlu bulunmuş ve belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun aralığın uç noktalarındaki türevinin durumu hakkındaki bu iki soru öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisi mülakat formundan çıkarılmıştır. Pilot uygulamada öğretmenlerle yapılan mülakatların süresine yönelik olumlu dönütler alınmıştır. Buna göre yapılan mülakatların 30 dakika ile sınırlandırılması, öğretmenlerin sıkılmasını önleyerek görüşmenin daha sağlıklı değerlendirmesini sağlamıştır.

Yarı-yapılandırılmış görüşme.

Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik pedagojik alan bilgilerini konu alanı, öğrenci ve öğretim stratejileri bilgileri bağlamında belirlemek için araştırmacı tarafından geliştirilen yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır. Görüşme, belirli bir olgu, konu ya da durum hakkında derinlemesine bilgi sağlayan ilk elden veri toplama yöntemlerinden birisi olarak kabul edilir (Anderson & Arsenault, 1998). Yarı yapılandırılmış görüşmede ise bir dizi soru kitlesi yer almakla birlikte görüşmenin yapıldığı katılımcı, görüşme sorularını öznel bir şekilde cevaplama özgürlüğüne sahiptir (Yıldırım & Şimşek, 2008). Bu araştırmada görüşme türünün görüşme süresince öğretmenlere esneklik kazandırması (Ekiz, 2009) ve öğretmenlerin PAB'lerini derinlemesine incelemek amaçlandığından yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır.

Görüşme formunun hazırlanması sürecinde türev ve uygulamaları konusunu kapsayan çalışmalar (Açıkyıldız, 2013; Aydın & Erbaş, 2014; Duru, 2006; Yıldız, 2006) ile pedagojik alan bilgisini inceleyen çalışmalardan (Alev & Karal, 2013; Dani, 2004; Gökbulut, 2010; Gökurt, 2014; Işıksal, 2006) yararlanılmıştır. Lise matematik ders kitapları, alan öğretim kitapları, araştırmacının pilot uygulamadaki gözlemlerinden elde ettikleri veriler ve öğrencilerin derste yaptıkları hatalar bir araya getirilerek taslak halindeki görüşme formu hazırlanmıştır. Bu görüşme formunda konu alanı bilgisi, öğrenci bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi, ölçme-değerlendirme bilgisi ve öğretim programı bilgisi bölümleri olmak üzere toplam beş bölüm bulunmaktadır. Daha sonra bu görüşme formu türev alanında çalışma yapan üç öğretim üyesi ile matematik eğitimi alanında çalışma yapan dört öğretim üyesi, iki araştırma görevlisi ve iki matematik öğretmeni olmak üzere toplam 11 uzman tarafından değerlendirilmiştir.

Uzmanların uyarıları dikkate alınarak yarı yapılandırılmış görüşme formunda bazı düzeltmelere gidilmiş, bazı bölümler ise formdan çıkarılmıştır. Buna göre görüşme formunun konu alanı bilgisi boyutunda yer alan; belirli bir aralıktaki türevlenebilir bir fonksiyonun bir noktasındaki türevinin gösterimine yönelik bir soru, trigonometrik bir fonksiyonun türevinin elde edilmesine yönelik bir soru, iki eğrinin birinci bölgedeki kesim noktalarının teğet denklemlerine yönelik bir soru ve fonksiyonun birinci-ikinci türevlerine yönelik bir grafik sorusu formdan çıkarılmıştır. Bu soruların formdan çıkarılmasının sebebi olarak bir noktadaki türevin gösterimine yönelik soru öncesi türevin formel tanımına yönelik iki soru öğretmenlere yöneltilmiştir. Bu nedenle bu soru, fazladan ve zaman kaybı olduğu düşünülerek formdan çıkarılmıştır. Trigonometrik bir fonksiyonun türevinin elde edilmesine yönelik sorunun ise ders kitaplarında olmadığı ve ispata yönelik bir beceri olduğu belirtildiğinden bu soru

formdan çıkarılmıştır. Eğrilerin kesim noktalarının teğet denklemi sorusu, ağırlıklı olarak üniversite düzeyinde analiz dersinin uygulamalarında yer alan bölümlerdeki sorulara benzediği ve lise matematik ders kitaplarında çok sık rastlanmadığı gerekçesiyle formdan çıkarılmıştır. Son olarak fonksiyonun birinci-ikinci türevlerine yönelik grafik sorusu, diğer sorulara oranla daha rutin olduğundan görüşme formundan çıkarılmıştır. Görüşme formunda bir fonksiyonun grafiğinden yararlanarak fonksiyonun birinci türevinin grafiğinin elde edilmesi, fonksiyonun ikinci türevinin grafiğinden yararlanarak fonksiyonun birinci türevinin ve fonksiyonun belirli aralıklardaki davranışlarına yönelik rutin olmayan sorular da yer almaktadır.

Uzmanların bir diğer uyarısı ölçme-değerlendirme bilgisi ve öğretim programı bilgisi bölümlerine yönelik olmuştur. Pedagojik alan bilgisine yönelik çalışma yapan uzmanların üzerinde hem fikir olduğu nokta, öğretim programı bilgisi ve ölçme-değerlendirme bilgisi bölümlerinin formdan çıkarılması üzerine olmuştur. Ülkemizde bir öğretim düzeyindeki matematik öğretim programı belirli zamanlarda revize edildiğinden uzmanlar bu bölümde öğretmenlerden elde edilecek verilerin öğretmenlerin PAB'lerini belirlemede çok da etkili olmayacağını düşünmektedir. Ayrıca uzmanlar, öğretim programı bilgisi mülakat formunda yer alan lise matematik dersi öğretim programına göre matematik dersinin genel amaçlarının, lise matematik öğretim programının öğrenme-öğretme yaklaşımının, ders planı ile öğretim programının genel özelliklerinin ve ders planına duyulan ihtiyacın türev ve uygulamaları kavramıyla doğrudan ilişkili olmadığını düşünmektedir. Benzer durum ölçme-değerlendirme bilgisine yöneliktir. Pedagojik alan bilgisi üzerinde çalışma yapan uzmanlar ölçme-değerlendirmenin amacının, ölçme-değerlendirme yöntem ve tekniklerinin, alternatif ölçme-değerlendirme araçlarının, ölçme-değerlendirme araçlarının geçerlik ve güvenilirliklerinin, test sınavlarındaki madde güçlük ve ayırt edicilik indekslerinin türev ve uygulamaları konusuyla doğrudan ilişkili olmadığını düşünmektedir. Uzmanlar, ölçme-değerlendirme bilgisi ve öğretim programı bilgisi bölümlerini araştırmaya dâhil etmenin araştırma problemini genelleştireceğini belirtmiştir. Uzmanlar, özelde lise matematik öğretmenlerinin konu alanı bilgileri ile öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerinin derinlikleri pedagojik alan bilgisinin kalitesine edeceği etkinin ortaya çıkarılmasını tavsiye etmiştir. Bu nedenle bu araştırmada ölçme-değerlendirme bilgisi ve öğretim programı bilgisi görüşme formundan çıkarılmıştır.

Konu alanı bilgisi, öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi olmak üzere üç bölümden oluşan nihai yarı yapılandırılmış görüşme formundaki sorular; türevin formel tanımını ifade etme, türev-süreklilik ilişkisini açıklama, bir noktadaki türevin varlığını belirleme, mutlak değer fonksiyonunun türevini arama, kapalı fonksiyonun türevini arama,

türevin geometrik anlamını açıklama, teğet ve eğim kavramlarını bilme, teğet problem kurma ve türevi kullanarak problem çözme, artan-azalan fonksiyonlar ile bu fonksiyonların birinci türevle ilişkisini ortaya koyma, kritik nokta kavramını belirtme, ekstremum noktalarının tanımını yapma, ekstremum noktaları ile türev arasındaki ilişkiyi belirleme, konvekslik-konkavlık ve dönüm noktası kavramlarını açıklama, maksimum-minimum problemi kurma ve türevi kullanarak problemi çözme, asimptot kavramını tanımlama, asimptot türlerini açıklama, bir fonksiyonun grafiğini çizebilme, türevin günlük hayattaki kullanım alanlarını belirleme gibi birçok beceriyi ölçmektedir.

Öğretmen görüşme formu.

Bu araştırmadaki öğretmen görüşme formu dört bölümden oluşmaktadır. Formun ilk bölümünde (bk. Ek-1) araştırmacının kendisine yönelik bilgilere, araştırmanın genel amacına ve katılımcıların kimlikleri hususundaki gizliliğin korunmasına yönelik açıklamalar bulunmaktadır. Formun ikinci bölümünde (bk. Ek-2) katılımcıların cinsiyet, hizmet süresi, mezun olunan bölüm, lisansüstü eğitim durumu, okutulan sınıf düzeyi, kurs veya seminere katılım durumları, türev ve uygulamaları konusundaki yeterlik düzeyi durumu ve ilköğretim lisans öğrenim dönemlerindeki matematik başarıları düzeyi gibi demografik özellikleri yer almaktadır.

Formun üçüncü bölümünde (bk. Ek-3) lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki pedagojik alan bilgisi düzeylerini konu alanı bilgisi bağlamında belirlemeye yönelik 10 soru bulunmaktadır. Bu bölümdeki sorular hazırlanırken lise matematik dersi öğretim programında (MEB, 2013) türev ve uygulamalarına yönelik kazanımlar referans alınmıştır. Formdaki soruların hazırlanması sürecinde 12.sınıf lise matematik ders kitapları (Aydın & Erbaş, 2014; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015) ile üniversite düzeyindeki alan öğretim kitaplarından (Balcı, 1999; Çetinkaya vd., 2013; Demir, 2014; Thomas, Weir & Hass, 2011) yararlanılmıştır.

Formun dördüncü bölümünde (bk. Ek-5) lise matematik öğretmenlerinin, öğrencilerin hem öğrenci bilgisi düzeylerini hem de öğretim stratejileri bilgisi düzeylerini belirlemek için hatalı çözümlerden oluşan beş açık uçlu soru hazırlanmıştır. Sorular gözlemler sonucunda öğrencilerin derste yaptıkları hatalardan yola çıkılarak bizzat araştırmacı tarafından oluşturulmuştur. Çözümü hatalı sorular oluşturulurken bu soruların öğrencilerin öğretim düzeylerinde olmasına dikkat edilmiştir. Sorularda hem öğrenci bilgisine yönelik hem de öğretim stratejileri bilgisine yönelik alt sorular (yönergeler) bulunmaktadır. Yönergeler hazırlanırken Lenhart (2010)'ın çalışması dikkate alınmıştır. Çözümü hatalı her bir soru kendi içerisinde beş alt sorudan (yönergeden) oluşmaktadır. Bu alt sorularda sırasıyla ilk önce

öğrencinin sorunun çözümünde hata yapıp yapmadığının öğretmen tarafından belirlenmesi istenmiştir. İkinci olarak öğretmenden öğrencinin çözümünde varsa hatanın ne olduğunu açıklaması istenmiştir. Üçüncü olarak öğretmenden öğrencinin çözümde hata yaptıysa bunun sebebinin ya da kaynağının ne olduğunun tespit edilmesi beklenmiştir. Dördüncü olarak öğretmenden öğrencinin hata yapmaması ya da soruyu doğru çözmesi için gerekli olan matematiksel ön bilginin ne olabileceğini belirtmesi beklenmiştir. Son olarak da öğretmenden öğrencinin hatasını düzeltmesi için derste ne tür bir öğretim stratejisi kullanacağını açıklaması beklenmiştir. Çözümü hatalı soruların alt sorularında yer alan bu beş sorudan dördü öğrenci bilgisine yönelik olup sadece en son soru öğretim stratejileri bilgisine yöneliktir. Çözümü hatalı sorular karşısında verilecek cevaplar, öğretmenlerin öğrenci bilgileri ile öğretim stratejileri bilgilerinin yanı sıra konu alanı bilgilerindeki derinliğin de ortaya çıkmasını sağlayacaktır. Sorulardan hareketle ders içi gözlemler yapıldığında öğretmenlerin; öğrenci bilgileri, öğretim stratejileri bilgileri ve konu alanı bilgileri arasındaki ilişkiler de belirlenmiş olacaktır. Öğretmenlere yöneltilen çözümü hatalı soruların içeriği şu şekildedir:

Birinci soruda öğrenci fonksiyonun bir noktasındaki türevin aranmasına yönelik hatalı bir çözüm yapmıştır. Bu hatalı çözümde öğrenci türevi ararken türevin formel tanımını kullanmasına rağmen fonksiyonun özel bir fonksiyon olan mutlak değer fonksiyonunu dikkate almamıştır. Bununla birlikte öğrenci, hem kritik noktayı belirleme hem de fonksiyona sağdan-soldan yaklaşarak fonksiyonun türevini arama davranışı göstermemiştir. Öğrencinin kritik noktayı belirleme ve fonksiyonun sağdan-soldan türevini arama gibi becerileri sergilemediğinin öğretmenlerce tespit edilmesi beklenmiştir. Öğretmenlerden öğrencinin kritik noktayı neden kullanmadığını ve fonksiyonun sağdan-soldan türevini neden elde etmediğini ortaya çıkarması beklenmiştir. İkinci soruda öğrenci üslü ifadelerin türevinin aranmasına yönelik hatalı bir çözüm yapmıştır. Bu hatalı çözümde öğrenci türevi ararken fonksiyonun üssündeki ifadeyi ayrı bir fonksiyon olarak değil de bir katsayı şeklinde düşünüp türev arama işlemi gerçekleştirmiştir. Öğrencinin üs bölümündeki ifadenin de ayrı bir fonksiyon olarak neden değerlendirmediklerinin öğretmenlerce ortaya çıkarılması beklenmiştir.

Üçüncü soruda öğrenci mutlak değer fonksiyonunun grafiğini doğru çizmiştir. Hatta öğrenci fonksiyon grafiğinin konvekslikten konkavlığa veya bunun tam tersi geçişlerdeki noktaların dönüm noktaları olduğunu da doğru söylemiştir. Ancak öğrenci devamındaki cümlede bir fonksiyonun ikinci türevinin olmayışının fonksiyonda o noktanın dönüm noktası olmasını etkilemeyeceğinin farkına varamamıştır. Bu çözümün hatalı bölümünde öğrenci bir nokta dönüm noktasıysa o noktada ikinci türevin sıfır olduğu ifadenin tam tersinin de doğru olabileceğini düşünmüştür. Bu soruda öğretmenlerden öğrencilerin dönüm noktasının

tanımını iyi anlayamadıklarını açıklamaları beklenmiştir. Dördüncü soruda öğrenci mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasını doğru bir şekilde belirlemiştir. Hatta öğrenci kırılma noktasındaki sürekliliğini de doğru bir şekilde elde etmiştir. Ancak öğrenci kırılma noktasında sürekli olan fonksiyonun aynı noktada türevli olacağına yönelik bir iddia ortaya koyarak çözümün devamını getirememiştir. Bu nedenle kırılma noktasındaki türevi aramaya ihtiyaç duymayan öğrenci kırılma noktasında sağdan-soldan türev arama işleminde farklı sonuçların ortaya çıkacağını görememiştir. Bu soruda öğretmenlerden fonksiyonun türevli olduğu noktada sürekli olması kuralının tam tersinin de doğru olmayacağını açıklamaları beklenmiştir. Ayrıca öğretmenlerden fonksiyonun türevliliğini ve sürekliliğini araştırırken fonksiyonun kırılma noktasında sürekli olsa bile kırılma noktasına sağdan-soldan yaklaşarak sağ-sol türev değerlerinin aynı olup olmadığını da açıklamaları beklenmiştir. Beşinci ve son soruda kapalı fonksiyonun türevine yönelik iki farklı öğrenci çözümü gösterilmiştir. İlk öğrencinin çözümü ile ikinci öğrencinin çözümü arasında bazı farklılıklar bulunmaktadır. İki öğrenci kapalı fonksiyonun türevini aramada farklı sonuçlara ulaşmıştır. Sonuca ulaşırken gidilen çözüm yolu her iki öğrenci için doğru gibi görünmektedir. Ancak ikinci öğrencinin yaptığı işlem doğrudur. Bu soruda öğretmenlerden ikinci öğrencinin bulduğu sonucu kapalı fonksiyonun kuralını kullanarak da teyit etmeleri beklenmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerden birinci öğrencinin neden farklı bir çözüm yolundan giderek kapalı fonksiyonun türevini aradığını açıklamaları beklenmiştir.

Yarı yapılandırılmış görüşme formunun nihai uygulaması öncesi uygulamaya katılacak öğretmenlere bu uygulamanın gönüllülük çerçevesinde yürütüleceği belirtilmiştir. Öğretmenlerin istedikleri veya sıkıldıkları bir anda uygulamadan vazgeçebilecekleri kendilerine dile getirilmiştir. Ayrıca uygulamaya katılacak öğretmenlerin kimlikleriyle birlikte okullarının isimlerinin de gizli tutulacağı belirtilmiştir. Tüm bu bilgilendirmeden sonra öğretmenlerin tamamının görüşmeye kendi razılıklarıyla katılma çabası içerisinde oldukları görülmüştür. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde veri kaybını önlemek için ses kayıt cihazı kullanılmıştır. Ses kayıt cihazının kendileri için bir problem teşkil edip etmediği öğretmenlere sorulmuştur. Öğretmenlerin tamamı araştırmacının görüşmede ses kayıt cihazını kullanmasına onay vermiştir. Öğretmenlerle yapılan görüşmelere 2015-2016 öğretim yılı birinci döneminin sonuna doğru başlanmış, ara dönemde görüşmeler devam etmiş ve aynı öğretim yılının ikinci döneminin başlarında sonlarında görüşmeler sonlandırılmıştır. Görüşmelerin zamanıyla türev ve uygulamaları konusunun anlatıldığı dönem paralellik göstermiştir.

Görüşmelerin tamamı ders vakti dışında ve öğretmenler odası gibi kalabalık ortamlar haricindeki boş dersliklerde gerçekleştirilmiştir. Görüşmede yer alan soruların tamamı aynı sırayla öğretmenlere sorulmuştur. Nihai görüşmelere katılan dört öğretmenin her biriyle yapılan her bir görüşme 30 dakika süreyle sınırlandırılmıştır. Bir öğretmenle yapılan görüşmelerin birbirine yakınlığı en az iki gün en fazla dokuz gün sürmüştür. Görüşmelere katılan her bir öğretmenle toplamda 12 defa görüşülmüştür. Buradan hareketle bir öğretmenle yapılan görüşmenin toplam süresi ortalama altı saattir. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerin beşi ilk dönemde, dördü ara dönemde üçü ise ikinci dönemde gerçekleştirilmiştir. Öğretmenlerle yapılan görüşmeler samimi bir havada gerçekleşmiştir. Nihai uygulamaya katılan öğretmenlerle yapılan görüşme takvimi Tablo 5’te verilmiştir.

Tablo 5. *Nihai Çalışmadaki Öğretmenlerle Yapılan Görüşmelerin Takvimi*

Görüşme Sayıları	Öğretmenler			
	Ö ₁	Ö ₂	Ö ₃	Ö ₄
1. Görüşme	24.12.2015	25.12.2015	24.12.2015	25.12.2015
2. Görüşme	29.12.2015	30.12.2015	29.12.2015	30.12.2015
3. Görüşme	07.01.2016	08.01.2016	07.01.2016	08.01.2016
4. Görüşme	16.01.2016	15.01.2016	16.01.2016	15.01.2016
5. Görüşme	21.01.2016	20.01.2016	21.01.2016	20.01.2016
6. Görüşme	27.01.2016	27.01.2016	27.01.2016	27.01.2016
7. Görüşme	02.02.2016	29.01.2016	02.02.2016	29.01.2016
8. Görüşme	04.02.2016	31.01.2016	04.02.2016	31.01.2016
9. Görüşme	06.02.2016	03.02.2016	06.02.2016	03.02.2016
10. Görüşme	09.02.2016	12.02.2016	09.02.2016	12.02.2016
11. Görüşme	16.02.2016	19.02.2016	16.02.2016	19.02.2016
12. Görüşme	23.02.2016	26.02.2016	23.02.2016	26.02.2016

*Her bir görüşmenin süresi 30 dakikadır

Yarı yapılandırılmış gözlem.

Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik PAB’lerinin nasıl olduğunu belirlemek için katılımcı olmayan gözlemci rolünde gözlem kullanılmıştır. Bir topluluğa ya da duruma yönelik ayrıntılı ve kapsamlı bir yorum elde etmek amacıyla yapılan gözlem tekniğinde bireylerin ifade ettikleriyle yaptıkları arasındaki farklılıklar veya benzerlikler ortaya çıkarılmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2008). Ayrıca gözlemde rahatsızlık verilmeden başkalarının çerçevesinden ve bakış açılarından olaylar veya durumlar hakkında bilgi elde edilmektedir (Darlington & Scott, 2002). Katılımcı olmayan gözlemde ise araştırmacı gözlem yapacağı topluluğa kendisini tanıtmakta, toplulukla birlikte aktif bir şekilde uygulama içerisinde yer almamakta ve uygulama ortamına dışarıdan herhangi bir şekilde müdahale yapmadan gözlemi gerçekleştirmektedir (Creswell, 1994; Fraenkel & Wallen, 2006). Bu araştırmada gözlem tekniğinin kullanılmasının nedeni, veri çeşitleme yöntemi uygulanarak araştırmanın geçerliğini ve güvenilirliğini artırma, öğretmenlerin PAB’lerinin çok boyutlu bir şekilde ortaya çıkarılması, öğretmenlerin konu alanı, öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerine yönelik söylemleri ile dersteki uygulamaları arasındaki uyumun ortaya çıkarılması isteğinden kaynaklanmaktadır.

Yarı yapılandırılmış gözlem formunun geliştirilmesi sürecinde PAB’la ilgili literatür taraması yapılarak örnek gözlem formları incelenmiştir (Bütün, 2005; Bütün, 2012; Gökbulut, 2010; Gökkurt 2014). İnceleme sonunda araştırma problemiyle uyumlu olacak şekilde PAB’ın konu alanı bilgisi (bk. Ek-4), öğrenci bilgisi (bk. Ek-6) ve öğretim stratejileri bilgisine (bk. Ek-7) yönelik gözlem formları hazırlanmıştır. Görüşme formundan ölçme-değerlendirme bilgisi ve öğretim programı bilgisine yönelik mülakatlar çıkarıldığı için PAB’ın bu boyutlarına yönelik gözlem formları hazırlanmamıştır. Konu alanı bilgisine yönelik gözlem formunun hazırlanması sürecinde matematik dersi 12.sınıf öğretim programındaki kazanımlar (MEB, 2013) referans alınmıştır. Öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisine yönelik gözlem formunun hazırlanmasında Gökkurt (2014)’un çalışması dikkate alınmıştır. Bunun yanı sıra öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisine yönelik gözlem formundaki maddeler belirlenirken PAB ve bileşenleriyle ilgili literatürden yardım alınmıştır (An vd., 2004; Ball vd., 2008; Grossmann, 1990; Marks, 1990). Hazırlanan gözlem formları, görüşme formlarında olduğu gibi türev alanında çalışma yapan iki öğretim üyesi ile matematik eğitimi alanında çalışma yapan üç öğretim üyesi, bir araştırma görevlisi ve bir matematik öğretmeni olmak üzere toplam yedi uzman tarafından değerlendirilmiştir. Uzmanlar gözlem formlarını araştırmanın amaçlarına uygunluk ve gözlem maddelerinin anlaşılabilirliği kriterlerine göre değerlendirmiştir.

Uzmanlar, konu alanı bilgisine yönelik hazırlanan gözlem formuyla ilgili herhangi bir uyarıda bulunmazken öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerine yönelik hazırlanan gözlem formları üzerinde bazı uyarılar yapmıştır. Buna göre öğrenci bilgisi gözlem formu için bir uzman, formun ders gözlemi sonucunda doldurulacak bir rubrik şeklinde oluşturulduğunu belirtmiştir. Bu gözlem formuna göre sorulara ancak ders bitince cevap verilebilir. Bu nedenle uzman, ilgili gözlem formunun daha sağlıklı şekilde doldurulabilmesi için ders esnasında video kaydının yapılmasını bu yapılamıyorsa en azından ses kayıt cihazıyla derste olan bitenin kaydedilmesini istemiştir. Aynı uzman, derste katılımcı olmayan gözlem yapılırken ders sırasında gözlemlenebilecek bütün dikkat çekici durumların gözlemci tarafından gözlenmesini ve kayda geçirilmesini dile getirmiştir. Bir diğer uzman ise öğretim stratejileri bilgisi gözlem formundaki son madde olan “diğer öğretim yöntem ve tekniklerini (tartışma, problem çözmeye dayalı öğretim, bilgisayar destekli öğretim, elektronik araçlar ve bilgisayar gibi bilişim teknolojileri vb.) kullandı” maddesindeki problem çözmeye dayalı öğretim, tartışma (argümantasyon) temelli öğretim, bilgisayar destekli öğretim gibi davranışların ayrı ayrı maddelerde yazılabileceğini tavsiye etmiştir. Ancak diğer uzmanlar bu maddenin tek bir madde altında açıklanmasında bir mahsur görmediklerini belirttiğinden bu maddenin olduğu gibi bütün halinde bir madde olarak formda tutulmasına karar verilmiştir. Buna göre lise

matematik öğretmenlerinin konu alanı bilgilerine yönelik gözlem formunda 22 madde yer alırken öğrenci bilgilerine yönelik gözlem formunda 9 madde, öğretim stratejileri bilgisi gözlem formunda 21 madde yer almıştır. Her bir gözlem formunda maddelerin gerçekleştirilme durumuna göre dört ölçüt yer almıştır. Bu ölçütlerden “Y” ifadesi davranışın yeterli şekilde gösterildiğini, “KY” ifadesi davranışın kısmen yeterli şekilde gösterildiğini, “YS” ifadesi davranışın yetersiz şekilde olduğunu, “G” ifadesi ise o davranışın gözlem süresince hiç gösterilmediğini belirtmektedir.

Uzman görüşleri doğrultusunda hazırlanan gözlem formlarının kullanışlı olup olmadığını belirlemek amacıyla 2015-2016 öğretim yılı birinci dönemi ortasında iki lise matematik öğretmeniyle pilot gözlem uygulaması yapılmıştır. Bir öğretmenin dersinde yapılan gözlem süresi 40 dakika sürmüştür. Gözlem yapılan öğretmenlerin haftalık dört ders saatlik matematik derslerinin sadece iki saati ortak gün olan cuma gününe denk gelmiştir. Ancak burada öğretmenlerin dersleri çakışmadığı ve okulları birbirine yakın olduğu için gözlemlerde herhangi bir aksaklık yaşanmamıştır. Gözlemci, gözlem yaparken öğretmenlerin dersteki dikkatlerini mümkün olduğunca dağıtmamaya ve kendilerini baskı altında hissetmemelerine gayret göstermiştir. Video kaydı yapılmadığı için hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin dersi daha rahat geçirmeleri sağlanmıştır. Gözlemci, gözlem yapılan dersliklerin orta bölümündeki ilk sırada oturarak gözlemini gerçekleştirmiştir. Gözlemcinin en arka sıraya oturmadan gözlem yapmasının sebebi ise orta ve en ön sıradan tahtadaki yazılanları dikkat çekmeden ve öğrencileri rahatsız etmeden kolayca fotoğraf altına alabilmesinden kaynaklıdır. Gözlemci gözlem yaptığı süre boyunca hem öğretmeni ve öğrencileri gözlemlemiş hem de derste olan bitenle ilgili notlar almıştır. Gözlemci, gözlem sonunda formların kullanışlı olduğuna kanaat getirmiştir.

Nihai gözlem formlarının kullanıldığı gözlem süreci 2015-2016 öğretim yılı birinci dönemi sonuna doğru başlarken ikinci dönemin ortalarına doğru son bulmuştur. Nihai gözleme dört lise matematik öğretmeni gönüllü olarak katılmıştır. Dersleri gözlemlenen her bir öğretmen farklı genel liselerde görev yapmaktadır. Gözlem yapılan öğretmenler haftada dört ders saati türev ve uygulamaları konusunu anlatmıştır. Bu sayede her bir öğretmenle haftada iki defa bir araya gelinmiş ve her bir araya gelmede iki ders saati gözlem yapılmıştır. Her bir ders saatindeki gözlem süresi 40 dakika sürmüştür. Öğretmenlerin her birinin dersi toplamda 20 defa gözlenmiştir. Gözlem yapılan öğretmenlerden Ö₁ ile Ö₃’ün matematik dersi günleri ortak olup salı-perşembe günleridir. Ö₂ ve Ö₄ öğretmenlerinin ise matematik dersi günleri ortak olup çarşamba-cuma günleridir. Ancak dersleri ortak olan öğretmenlerin matematik dersini anlattıkları saatlerde bir çakışma yaşanmamıştır. Ö₁ ve Ö₄ öğretmenlerinin

haftalık matematik ders saatleri öğleden önceyken $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$ öğretmenlerinin haftalık matematik ders saatleri öğleden sonralarına denk gelmiştir. Derslerden sonra randevulaşılan öğretmenlerle de istedikleri ortamda görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Gözlem sürecinde türev ve uygulamalarına yönelik 10 farklı alt konu gözlemlenmiştir. Öğretmenlerin derslerine yapılan gözlemlerin sekizi ilk dönemde geriye kalan 12'si ise ikinci dönemde gerçekleşmiştir. Buna göre konular türev-süreklilik ilişkisi, mutlak değer fonksiyonunun türevi, kapalı fonksiyonun türevi, türevin geometrik anlamı, artan-azalan fonksiyonlarla türev ilişkisi, ekstremum noktaları ve fonksiyonun birinci türevinin grafiği, konvekslik-konkavlık ve dönüm noktası, maksimum-minimum problemleri, asimptot kavramı ve asimptot çeşitleri, grafik çizimi alt konularından oluşmaktadır. Nihai uygulamaya katılan öğretmenlerin derslerine yönelik gözlem takvimi Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6. *Nihai Çalışmadaki Öğretmenlerin Derslerine Yönelik Yapılan Gözlemlerin Takvimi*

Öğretmenler	Kazanımlar	Gözlem Tarihleri
$\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_3$	Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği ile türevlenebilirliği	22.12.2015
	arasındaki ilişkiyi açıklar	24.12.2015
	Türev tanımını kullanarak mutlak değer fonksiyonunun türevine ait uygulamalar yapar	29.12.2015
	Türev tanımını kullanarak kapalı fonksiyonun türevine ait uygulamalar yapar	05.01.2016
		07.01.2016
		12.01.2016
		14.01.2016
	Türevin geometrik anlamını yorumlar	19.01.2016
	Bir fonksiyonun grafiğinin bir noktasındaki teğetin ve normalinin denklemini yazar.	09.02.2016
	Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları türevin işaretine göre belirler	11.02.2016
		16.02.2016
		18.02.2016
	Bir fonksiyonun yerel maksimum-yerel minimum noktalarını açıklar ve bir fonksiyonun ekstremum noktalarını türev yardımıyla belirler.	23.02.2016
		25.02.2016
		01.03.2016
	Maksimum ve minimum problemlerini türev yardımıyla çözer	03.03.2016
	Bir fonksiyonun grafiği üzerinde büyüklük ve dönüm noktası kavramını açıklar	08.03.2016
		10.03.2016
		15.03.2016
	Fonksiyonların grafiğini türev yardımıyla çizer	17.03.2016
Öğretmenler	Kazanımlar	Gözlem Tarihleri
$\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$	Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği ile türevlenebilirliği	23.12.2015
	arasındaki ilişkiyi açıklar	25.12.2015
	Türev tanımını kullanarak mutlak değer fonksiyonunun türevine ait uygulamalar yapar	30.12.2015
	Türev tanımını kullanarak kapalı fonksiyonun türevine ait uygulamalar yapar	06.01.2016
		08.01.2016
		13.01.2016
	Türevin geometrik anlamını yorumlar	15.01.2016
		20.01.2016
	Bir fonksiyonun grafiğinin bir noktasındaki teğetin ve normalinin denklemini yazar.	10.02.2016
		12.02.2016
	Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları türevin işaretine göre belirler	17.02.2016
		19.02.2016
	Bir fonksiyonun yerel maksimum-yerel minimum noktalarını açıklar ve bir fonksiyonun ekstremum noktalarını türev yardımıyla belirler.	24.02.2016
		26.02.2016
	Maksimum ve minimum problemlerini türev yardımıyla çözer	02.03.2016
		04.03.2016
	Bir fonksiyonun grafiği üzerinde büyüklük ve dönüm noktası kavramını açıklar	09.03.2016
		11.03.2016
	Fonksiyonların grafiğini türev yardımıyla çizer	16.03.2016
		18.03.2016

*Gözlem yapılan derslerin her biri 40 dakikadır **Gözlem tarihlerinin her birinde 2 saat ders yapılmıştır

Döküman inceleme.

Döküman incelemesi, araştırılması arzu edilen olgulara yönelik bilgiler içeren yazılı materyalleri ihtiva etmektedir (Yıldırım & Şimşek, 2008). Eğitim alanındaki araştırmalarda kullanılabilecek dökümanlar ders kitapları, öğretim programları, okulun resmi yazışmaları, zümre ve sınıf toplantı tutanakları, öğrencilerin rehberlik ve kimlik dosyaları, yazılı kağıtları ve ders defterleri şeklinde sıralanabilir (Bogdan & Biklen, 1992; Goetz & LeCompte, 1984). Döküman inceleme tek başına bir veri toplama aracı olarak kullanılabildiği gibi görüşme ve gözlem verileriyle ilişki kurmak için de çoklu şekilde kullanılabilmektedir (Cansız-Aktaş, 2014). Bu araştırmanın dökümanları; lise matematik ders kitapları, alan öğretim kitapları, lise matematik 12.sınıf öğretim programı, öğrencilere yapılan yazılı kâğıtları ile konu tarama ve değerlendirme testleri, öğrencilerin ders defterleri ve araştırmacı tarafından tutulan günlükler ile gözlem notlarıdır. Bu araştırmada farklı ve çok sayıda dökümanın kullanılmasının sebebi ise araştırmanın geçerliğini arttırma isteğinden ve görüşme-gözlem verilerinin desteklenmesi isteğinden kaynaklanmaktadır.

Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Nitel araştırmalarda geçerliğe ve güvenirlığe yönelik alınacak tedbirler, nicel araştırmalara göre farklılık gösterir (Yıldırım & Şimşek, 2008). Nitel bir araştırmanın literatürde kabul görebilmesi için araştırma sürecinin nesnel bir şekilde hazırlanması, sonuçlarının ise tutarlı ve başka araştırmacılar tarafından tekrar edilebilir olması gerekmektedir (Maxwell, 2006; Merriam, 1998). Bununla birlikte araştırma verilerinden elde edilen bulgular uzman ve katılımcı teyidi gibi kriterlerle değerlendirilen (Erlandson, Harris, Skipper & Allen, 1993) inandırıcılık özelliğine sahip olmalıdır (Lincoln ve Guba, 1985). Buradan hareketle nitel bir araştırmanın literatürdeki kabulünde inandırıcılık (iç geçerlik), aktarılabilirlik (dış geçerlik), tutarlılık (iç güvenirlilik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlilik) özelliklerinin olması gerektiği söylenebilir (Neuman, 2003; Yin, 1994).

Bir araştırmanın iç geçerliğini arttırmanın yollarından birisi araştırmacının araştırma katılımcılarıyla araştırmanın yapıldığı sahada uzun süre vakit geçirmesidir (Daymon & Holloway, 2003; Leedy & Ormrod, 2001). Araştırmacının katılımcılarla çoğu kez bir araya gelmesi araştırmacı-katılımcı etkileşimini arttırarak çalışmanın iç geçerliğine olumlu etki yapacaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Nitel araştırmalarda iç geçerliği arttırmanın bir diğer yolu ise araştırmada veri çeşitleme yönteminin uygulanmasıdır (Glesne & Peshkin, 1992; Guion, 2002). Bu yöntem kullanıldığında araştırma bulgularının kontrolü ve kanıtlanması daha güçlü bir şekilde sağlanacaktır (Patton, 2014). Araştırmanın iç geçerliğini arttırmanın başka bir yolu da araştırmanın konusuna yönelik bilgi sahibi olan bireylerin araştırmayı farklı

bakış açılarıyla değerlendirmeleridir (Yıldırım & Şimşek, 2008). Bu duruma benzer şekilde araştırmacının bir akranının çalışmayı yöntem ve bulgular bakımından incelemesi de çalışmanın iç geçerliğini arttıracaktır (Merriam, 1998). Bu kriterlere ek olarak araştırmanın iç geçerliğini artırma yollarından bazıları da uzun süreli yapılan gözlem ile katılımcı teyididir. Uzun süreli gözlem sayesinde araştırmacı aynı durumu ya da kitleyi araştırma sahasında tekrarlı bir şekilde gözlemleyerek duruma ya da katılımcı kitlesine yönelik güveni artmış olur (Fraenkel & Wallen, 2006). Katılımcı teyidi yoluyla araştırmadan elde edilen bulguların araştırmaya bizzat iştirak eden bireylere gösterilmesi ve onların veri analizine yönelik teyitleri çalışmanın iç geçerliğini daha da güçlendirir (Yıldırım & Şimşek, 2008).

Bu araştırmanın iç geçerliğini arttırmak için araştırmacı araştırmaya katılan öğretmenlerle hem görüşme sürecinde hem de gözlemlerin yapıldığı ders sürecinde uzun süre vakit geçirmiştir. Görüşme ve gözlem süreleri hesaba katıldığında araştırmacının her bir katılımcıyla ortalama 16 saat vakit geçirdiği söylenebilir. Bunun yanı sıra görüşme ve gözlem zamanları dışında ders aralarında da araştırmacı öğretmenlerle birlikte vakit geçirmeye gayret göstermiştir. Bu araştırmada iç geçerliği arttırmak amacıyla farklı verilerden yararlanarak aynı katılımcıya yönelik sonuçların uyumlu olup olmadığını belirlemek ve verilerin birbirilerine olan desteğini sağlamak amacıyla veri çeşitlemesi (data triangulation) yoluna gidilmiştir. Bu sayede lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik PAB'lerini belirlemek amacıyla gözlem, görüşme ve döküman analizi kullanılmıştır. Araştırmanın tüm boyutlarını bilhassa veri toplama araçlarını ve bulgularını türev ve uygulamaları ile eğitim bilimlerinde uzmanlaşmış beş öğretim üyesi değerlendirmiştir. Ayrıca veri toplama araçlarının hazırlanması ve bulguların elde edilmesi sürecinde araştırmacı gibi matematik öğretmeni olan akran bir öğretmen araştırmanın yöntem ve bulgulara yönelik bölümlerini değerlendirmiştir. Araştırmadan elde edilen nihai veriler analiz edildikten sonra araştırmaya katılan öğretmenlere veri toplama sürecinde kendi ifadeleri gösterilerek katılımcı teyidi alınmıştır.

Bir araştırmanın dış geçerliğini arttırmanın yolları, araştırma verilerinin ayrıntılı bir şekilde betimlenmesi ve amaçlı örnekleme yönteminin tercih edilmesidir (Twycross & Shields, 2005). Ayrıntılı bir betimlemenin yapıldığı nitel bir araştırmada araştırmadan elde edilen verilerin doğrallığı korunduğu gibi araştırma ortamı da zihinde canlandırılmış olur (Patton, 2014). Bu araştırmanın dış geçerliğini arttırmak amacıyla araştırmadan elde edilen veriler tema, kategoriler, alt kategoriler ve kodlar altında düzenlenip doğrudan alıntılarla desteklenmiş ve detaylı bir şekilde betimlenerek okuyucuya sunulmuştur. Araştırmaya katılan

öğretmenlerin kimlikleri saklı tutularak demografik özellikleri hakkında derinlemesine bilgiler verilmiştir. Ayrıca araştırmada amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır.

Bir araştırmanın iç geçerliliğini artırmanın yollarından birisi araştırmacı dışında farklı bir gözün araştırmanın bulgularını kontrol etmesidir (Marvasti, 2004). Bu duruma aynı zamanda tutarlılık incelemesi de denir. Tutarlılık incelemesinde nitel araştırma alanındaki bir uzman, araştırmacının araştırma süreci boyunca tutarlı davranıp davranmadığını araştırmanın verilerini kontrol ederek teyit etmektedir (Yıldırım & Şimşek, 2008). Bu araştırmanın iç geçerliliğini arttırmak amacıyla araştırmacı dışında nitel araştırma alanında uzmanlaşmış iki öğretim üyesi ile türev ve uygulamaları alanında uzmanlaşmış bir öğretim üyesi araştırmada oluşturulan temalar altında tanımlanmış kodların söz konusu temaları temsil edip etmediğini birbirinden bağımsız şekilde değerlendirmiştir. Bağımsız şekilde araştırmada oluşturulan temalar ile kodları birbirlerine eşleyen bu üç uzmanın değerlendirmeleri arasındaki güvenirlik uyumu Miles ve Huberman (1994)'ın formülü kullanılarak tespit edilmiştir. Bu formüle göre uzmanların değerlendirmeleri arasındaki uyum yüzdesi .93 bulunmuştur. İki uzmanın temalar ve kodları eşleştirmeleri arasındaki uyum yüzdesi .70'den büyük olduğu için araştırmanın iç geçerliliğinin sağlandığı söylenebilir.

Bir araştırmanın dış geçerliliğini artırmanın yollarından birisi alan dışından uzmanların araştırmanın sonuçlarını ham veriler ile karşılaştırarak teyit incelemesinde bulunmasıdır (Ary vd., 2010). Araştırmanın dış geçerliliğini artırmanın diğer bir yolu da araştırma verilerinin araştırma sonunda muhafaza edilmesidir. Bu araştırmanın dış geçerliliğini arttırmak amacıyla alan dışından bir uzman, araştırmanın sonuçlarını ham veriler ile karşılaştırarak teyit incelemesinde bulunmuştur. Ayrıca bir alan uzmanı da araştırmanın ham verilerini, yöntemini, verilerin toplanması sürecini ve verilerin analizini ayrıntılı bir şekilde değerlendirmiştir. Bunların dışında araştırma sonunda verilerin tekrardan incelenmesi ihtimaline karşı araştırma verileri yedeklenerek saklanmıştır.

Araştırmacının Rolü

Araştırmacı, lise matematik öğretmenleriyle görüşmelere başlamadan önce onlarla türev ve uygulamaları konusunda bilgi alışverişinde bulunmuş ve onlara araştırma süreci hakkında detaylı bir bilgi vermiştir. Öğretmenlerle yapılan bu informal görüşmeler sayesinde öğretmenler görüşmelerde rahat bir tavır sergilemiştir. Benzer bilgilendirme görüşme ve gözlemlerin yapılacağı okul idarelerine de yapılmıştır. Araştırmacı uygulamalardan bir hafta önce ilgili okul idarelerine giderek kendini tanıtmış, araştırma iznini göstermiş ve araştırma süreci hakkında bilgi vermiştir. Araştırmacı gözlem öncesinde de hem gözlemin yapılacağı sınıfların dersine giren öğretmenlere hem de gözlemin yapılacağı sınıfta öğrenim gören

öğrencilere bilgi vermiştir. Hatta araştırmacı ilk gözlem başlamadan önce, gözlemlerde video kaydının kullanılmayacağını, hiçbir öğretmen ve öğrencinin ifşa edilmedeyeceğini, sadece ses kayıt cihazı kullanılarak tahtada konu ile ilgili yazılan bilgilerden, ders defterlerinden ve öğretmen notlarından yararlanılacağını belirtmiştir. Araştırmacı sınıf ortamının gözleme alışabilmesi amacıyla nihai uygulamanın yapılacağı öğretmenlerin sınıflarında limit konusuna yönelik iki saatlik gözlemler gerçekleştirmiştir. Bu araştırmada öğretmenlerle yapılan görüşmeler ile ders içi gözlemlerinin tamamında araştırmacının bizzat kendisi yer almıştır.

Verilerin Analizi

Nitel araştırmalarda veri analizi süreci, analiz edilecek verilerin hazırlanmasını, verilerin organizasyonunu, verilerin kodlanarak ortak kodların biraraya getirilip temaların elde edilmesini ve verilerin tablo-şekil yardımıyla sunulması işlemlerini içerir (Creswell, 2014; Creswell & Plano-Clark, 2007; Fraenkel, Wallen & Hyun, 2011). Bu araştırmanın verileri betimsel analiz ve içerik analizi teknikleri kullanılarak analiz edilmiştir. Betimsel analizde araştırmacı önceden belirlediği temalara ve alt temalara göre elde ettiği verileri yorumlayarak katılımcıların görüşlerini doğrudan alıntılar yardımıyla okuyucuya sunmaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2008). Betimsel analizin amacı, araştırmadan elde edilen verileri düzenli ve yorumlayıcı bir biçimde okuyucu kitlesine ulaştırmaktır (Creswell, 2012; Strauss & Corbin, 1998). İçerik analizinde ise veri toplama araçları yardımıyla elde edilen veriler benzerliklerine ve farklılıklarına göre sistematik şekilde sınıflandırılarak kategoriler ve kodlar çerçevesinde bütünleştirildikten sonra anlaşılır bir dilde okuyucuya sunulmaktadır (Tavşancıl & Aslan, 2001). İçerik analizinde temel amaç, araştırmadan elde edilen verileri temsil edecek kavramlara ulaşmak (Braun & Clarke, 2006) ve temsil düzeyinde birbiriyle ilişkili olan verileri raporlaştırmaktır (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz & Demirel, 2012).

Bu araştırmadaki betimsel analiz sürecinde sırasıyla lise matematik öğretmenlerinin görüşme formuna verdikleri cevaplardan elde edilen verilerin hangi temalar altında tanımlanacağı tespit edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen veriler detaylı bir şekilde incelenerek araştırmanın amacına uyan temalar ve kodlar araştırmacının bizzat kendisi tarafından belirlenmiştir. Öğretmenlerden elde edilen veriler araştırmacı tarafından hazırlanan bu temalara ve alt temalara yerleştirilmiştir. Sonrasında ise temalara ve alt temalara yerleştirilen bulgular araştırmacı tarafından doğrudan alıntılarla yorumlanmıştır. Araştırmanın içerik analizi sürecinde ise ilk olarak görüşmelerdeki ses kayıtlarından elde edilen veriler yazılı forma aktarılmıştır. Öğretmenlerin ifadelerinden herhangi bir kısıtlama yapılmadan bu yazılı formlar oluşturulmuştur. Daha sonra bu yazılı formlar da kodlanarak bu kodların taslak halindeki temaları oluşturulmuştur. Temaların oluşturulması sürecinde birbirleriyle anlamlı

bir bütün oluşturduğu düşünülen kodlar temalar altında yer almış, bu temaların altında da alt temalar olacak şekilde bir ilişkili bir bütünlük oluşturulmaya çalışılmıştır.

Taslak halindeki temalar ile alt temalar ve bu temaları temsil eden kodlar nitel araştırma alanında uzmanlaşmış iki öğretim üyesi ile türev ve uygulamaları alanında uzmanlaşmış iki öğretim üyesine uzman görüşü doğrultusunda sunulmuştur. Uzmanlar, belirlenen kodlar, kodlar altında bütünleşen temalar ile alt temaları tutarlılıkları bakımından değerlendirilmiştir. Uzman görüşleri sonunda ilgili kodlar, kodlar altındaki temalar ve alt temaların birbirleriyle uyumlu olduğuna karar verilmiştir. Son olarak oluşturulan kodlar, temalar ve alt temalar öğretmenlerin doğrudan alıntılarıyla yorumlanmıştır. Araştırmacı, içerik analizinde hazırladığı kodları ve temaları tez çalışmasında yayınlamadan önce ikinci kez okuyup içerik analizine son şeklini vermiştir. Öte yandan araştırmanın amacına uymayan ve kuramsal çerçeveye ilişkili olmadığı düşünülen ifadeler kodlanmayarak araştırma dışında tutulmuştur.

Konu alanı bilgisine yönelik elde edilen verilerin analizi.

Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgilerini belirlemek amacıyla yapılan görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde hem betimsel analizden hem de içerik analizinden yararlanılmıştır. Bununla birlikte öğretmenlerin derslerinde yapılan gözlemlerden elde edilen verilerle görüşmelerden elde edilen veriler bir bütünlük halinde öğretmenlerin de görüşlerinden doğrudan alıntılar yardımıyla okuyucuya sunulmuştur. Bu şekilde görüşme ve gözlemlerden elde edilen bulgular detaylı ve ilişkili bir şekilde araştırmada betimlenmeye çalışılmıştır. Araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgileri belirlenirken Zazkis ve Leiken (2008) ile Gökçurt (2014) tarafından oluşturulan kategoriler ile kodlar esas alınmıştır. Bu araştırmacıların oluşturduğu kategoriler arasındaki “genelleştirme” kategorisi türev ve uygulamaları konusundaki kavramalara yapılan tanımların sadece tanımın yapıldığı kavrama ait kritik özellikleri barındırmasından dolayı bu araştırmada kullanılmamıştır. Araştırmacıların oluşturduğu kategoriler ile kodlar Tablo 7’de verilmiştir.

Tablo 7. *Konu Alanı Bilgisinde Kullanılan Kategoriler ve Kodlar*

Erişebilirlik	Doğruluk	Zenginlik
Kolay verilmiş cevap	Gerekli ve yeterli	Prototip örnek
Zor verilmiş cevap	Gerekli ve yetersiz	Prototip olmayan örnek
Kısmen zor verilmiş cevap	Ne gerekli ne yeterli	
Cevap yok		

Tablo 7.'da görüldüğü üzere konu alanı bilgisinin belirlenmesinde erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik olmak üzere üç kategori yer almaktadır. *Erişebilirlik* kategorisine göre öğretmenlerin türev ve uygulamaları konusundaki alan bilgilerine yönelik görüşme formuna cevap verirken duraklamaya imkân tanımadan kısa süre içerisinde verdikleri cevaplar kolay verilmiş cevap, belirli bir süre duraksama yaşayarak veya bilgiler arasındaki kopukluklara bağlı düşünceler yaşayarak verilen uzun süreli cevaplar zor verilmiş cevap olarak belirlenmiştir. Sorular zor bir şekilde cevaplanırken biraz düşünüp tekrar cevaplamaya devam edilerek verilen cevaplar kısmen zor verilmiş cevap olarak belirlenirken herhangi bir cevabın verilmediği cevaplar ise cevap yok şeklinde alt kategorilere ayrılmıştır.

Doğruluk kategorisine göre türevin formel tanımı, türev-süreklilik ilişkisi, mutlak değer ve kapalı fonksiyonların türevi, türevin geometrik anlamının izahı ve türev-eğim-teğet ilişkisi, artan-azalan fonksiyonların türevle ilişkisi, ekstremum noktaların tanımlanması, konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasının tanımı ile dönüm noktasının ikinci türevle ilişkisi, maksimum-minimum problemleri kurma ve çözme, asimptot kavramının tanımı ve çeşitleri ile grafik çiziminin yapılması konularında kritik özelliklerin tümünü içeren öğretmen açıklamalarının yer aldığı alt kategori gerekli ve yeterli şeklinde değerlendirilmiştir. Kritik özelliklerin sadece bir bölümünü içeren veya kritik özelliklerle ilgili hem olan hem de olmayan açıklamaların yer aldığı alt kategori gerekli ve yetersiz olarak belirlenmiştir. Kritik özelliklerin hiçbirisini içermeyen alt kategori ise ne gerekli ne yeterli alt kategorisi altında tanımlanmıştır. Örneğin türevin formel tanımına yönelik lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2014; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017; Ünlü & Er, 2013) ve alan öğretim kitaplarında (Balcı, 1999; Demir, 2014; Kadioğlu & Kamali, 2009; Thomas vd., 2011) belirtilen kritik özellikler dikkate alındığında “fonksiyonun tanım-değer kümelerinin açıklanması, türevi aranacak noktaya ait özelliklerin verilmesi ve fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limit durumunu veren formülün cebirsel olarak ifade edilmesi” gibi kritik özelliklerin tamamını içeren açıklamalar gerekli ve yeterli alt kategorisinde, kritik özelliklerden sadece “fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limit durumunu veren formülün cebirsel olarak ifade edilmesi” özelliği ise gerekli ve yetersiz alt kategorisinde, bu sayılan özelliklerden hiçbirisinin olmadığı açıklamaların ise ne gerekli ne yeterli alt kategorisinde değerlendirilmesi söz konusudur.

Zenginlik kategorisine göre öğretmenlerin türev ve uygulamalarına yönelik yaptıkları tanımlar, verdikleri örnekler, kurdukları problemler ve yaptıkları çizimler lise matematik ders kitapları (Aydın & Erbaş, 2014; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017; Ünlü & Er, 2013) ile alan öğretim kitaplarında (Balcı, 1999; Demir, 2014;

Kadioğlu & Kamali, 2009; Thomas vd., 2011) yer alıyorsa yapılan açıklamalar ile verilen örnekler prototip örnek alt kategorisinde yer alırken, bu dökümanlar dışında yer alan açıklamalar ile verilen örnekler prototip olmayan örnek alt kategorisinde yer almıştır. Örneğin bir öğretmen türev-süreklilik arasındaki ilişkiyi çizimler-görseller yoluyla ya da cebirsel ifadelerle lise matematik ders kitaplarında veya alan öğretim kitaplarında bulunan ifadelere benzer şekilde açıklayabiliyorsa öğretmenin bu açıklamaları ile verdikleri örnekler prototip örnek alt kategorisinde yer alır. Ancak öğretmen türev-süreklilik ilişkisine yönelik kümeler konusundaki alt küme kavramını göstererek veya limit-süreklilik-türev kavramlarının olduğu bir merdiven yardımıyla bu ilişkiyi açıklamaya çalışıyorsa öğretmenin bu açıklamaları ile verdikleri örnekler prototip olmayan örnek alt kategorisinde yer alır. Öğretmen açıklamalarının analizinde hangi kriterlerin esas alındığını belirlemek için Zazkis ve Leiken (2008)'in kategorileri dışında Tablo 8.'de türevin tanımına, Tablo 9.'de türev-süreklilik ilişkisine, Tablo 10.'da türevin geometrik anlamının izahına, Tablo 11.'da maksimum-minimum problemlerinin çözüm aşamalarına, Tablo 12.'de ise fonksiyon eğrisinin grafiğinin çizimine yönelik araştırmacı tarafından oluşturulan kategoriler ve kodlar verilmiştir.

Öte yandan lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türevine, türevin geometrik anlamındaki türev-eğim-teğet ilişkisine ve türevin uygulamalarındaki maksimum-minimum problemlerine yönelik kurdukları problemler Yıldız ve Özdemir (2015)'in kurulan problemleri değerlendirme kriterlerine göre analiz edilirken öğretmenlerin kurdukları problemlerin çözümü ise Baki (2008)'nin problem çözümünü değerlendirme kriterlerine göre analiz edilmiştir. Yıldız ve Özdemir (2015)'in problem kurma kriterleri problemdeki ifadelerin matematiksel ifadeler olup olmadığına yönelik “matematiksellik” kriteri, kurulan problemdeki ifadelerin matematiksel ve mantıksal uygunluğuna dönük “veri niteliği” kriteri, metindeki ifadelerin dil bilgisi kurallarının uygunluğuna dönük “dilbilgisi” kriteri, problemin öğretim programındaki kazanımlarla örtüşmesine yönelik “düzeye uygunluk” kriteri, problem çözme sürecinde yol gösteren yönergeler ile kurulan problemdeki ifadelerin miktarına dönük “yönerge ve veri miktarı” kriteri, kurulan problemin istenilen sonuca ulaştırıp ulaştırmadığına dönük “çözülebilirlik” kriteri, ve kurulan problemin öğrenme ortamlarındaki kullanılabilirlik durumuna yönelik “kullanılabilirlik” kriteri olmak üzere toplam yedi kriterde değerlendirilmiştir. Baki (2008)'nin problem çözümüne yönelik değerlendirme kriterleri ise problemin doğru bir şekilde çözülmesi durumuna yönelik “plan uygulama” kriteri ve yapılan çözümün doğrulanmasına yönelik “değerlendirme” kriteri olmak üzere iki kriterden oluşmaktadır. Baki (2008)'nin kriterleri arasında bulunan problemi anlama, planı hazırlama ve problem ortaya atma kriterleri daha önce Yıldız ve Özdemir (2015)'in kriterleri arasında yer aldığından bu çalışmada bu üç kriter dikkate alınmamıştır. Yıldız ve Özdemir (2015) ile

Baki (2008)'nin oluşturduğu bu kriterler tek bir çatı altında problem kurma ve çözme sürecinin değerlendirilmesi başlığı altında Tablo 13'de verilmiştir.

Tablo 8. *Türevin Tanımının Analizinde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri*

Kategori	Türevin Tanımlanması		
Kodlar	Ölçütler		
	Evet	Kısmen	Hayır
Fonksiyonun tanım ve değer kümelerinin belirtilmesi	Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini belirtir	Fonksiyonun tanım kümesini veya değer kümesini belirtir	Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini belirtmez
Türevi aranacak noktaya ait özelliklerin belirtilmesi	Türevi aranacak noktaya ait özellikleri belirtir	Türevi aranacak noktaya ait bazı özellikleri belirtir	Türevi aranacak noktaya ait özellikleri belirtmez
Fonksiyondaki değişimin değişimdeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülün gösterilmesi	Fonksiyondaki değişimin değişimdeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülü doğru bir şekilde ifade eder	Fonksiyondaki değişimin değişimdeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülü kısmen ifade eder	Fonksiyondaki değişimin değişimdeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülü ifade edemez

Tablo 9. *Türev-Süreklilik İlişkisinin Analizinde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri*

Kategori	Türev-Süreklilik İlişkisi		
Kodlar	Ölçütler		
	Evet	Kısmen	Hayır
Fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olması	Fonksiyonun sürekli ve türevli olduğunu gösterir	Fonksiyonun sürekli olduğunu gösterir ama türevli olduğunu tam gösteremez	Fonksiyonun sürekli olduğunu gösterir ama türevli olduğunu hiç gösteremez
Fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olmaması	Fonksiyonun sürekli olduğunu ve türevli olmadığını gösterir	Fonksiyonun sürekli olduğunu gösterir ancak türevli olmadığını tam gösteremez	Fonksiyonun sürekli olduğunu gösterir ancak türevli olmadığını hiç gösteremez
Fonksiyonun sürekli olmadığı noktada türevli olmaması	Fonksiyonun sürekli olmadığını gösterir ve sürekli olmadığı için türevli olmadığını belirtir	Fonksiyonun sürekli olmadığını gösterir ama türevli olmadığını tam ifade edemez., &ya fonksiyonun sürekli olmadığını tam gösteremez	Fonksiyonun sürekli olmadığını hiç göstermez ve türevli olmadığını hiç ifade edemez
Fonksiyonun türevli olduğu noktada sürekli olması	Fonksiyonun bir noktada türevli olduğunu belirterek türev ile süreklilik arasındaki ilişkiyi cebirsel formlarla gösterir	Fonksiyonun bir noktada türevli olduğunu belirtmesine rağmen türev-süreklilik ilişkisini cebirsel formlarla kısmen gösterir	Fonksiyonun bir noktada türevli olduğunu belirtmez. Türev ile süreklilik ilişkisini cebirsel formlarla gösteremez

Tablo 10. *Türevin Geometrik Anlamının Analizinde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri*

Kategori	Türevin Geometrik Anlamının İzahı		
	Ölçütler		
Kodlar	Evet	Kısmen	Hayır
Belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon eğrisinin çizilmesi	Belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon eğrisi çizer	Bir fonksiyon eğrisi çizer ancak eğrinin hangi aralıkta tanımlı olduğunu belirtmez	Belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon eğrisi çizmez
Eğri üzerinde birisi sabit diğeri hareketli iki noktanın belirlenmesi	Eğri üzerinde birisi sabit diğeri hareketle iki nokta gösterir	Eğri üzerinde biri sabit noktayı gösterirken hareketli noktayı göstermez., &ya iki tane sabit nokta gösterir	Eğri üzerinde hem bir sabit noktayı hem de hareketli noktayı göstermez
Hareketli noktanın yavaş yavaş sabit noktaya doğru kaydırılması	Eğri üzerinde hareketli gösterdiği noktayı yavaş yavaş sabit noktaya yaklaştırır	Eğri üzerindeki hareketli gösterdiği noktayı sabit noktaya tam olarak yaklaştırmaz	Eğri üzerindeki hareketli noktayı sabit noktaya kesinlikle yaklaştırmaz
Eğri üzerindeki kirişin eğriye teğet olduğunun açıklanması	Eğri üzerindeki hareketli noktayı sabit nokta üzerine getirerek kirişin teğete dönüştüğünü görür	Eğri üzerindeki hareketli noktayı sabit nokta üzerine tam getirmez ancak kirişin teğete dönüştüğünü açıklar	Eğri üzerindeki hareketli noktayı sabit noktaya yaklaştırmadığı için kirişin teğete dönüştüğünü açıklayamaz
Türev-Eğim ilişkisinin cebirsel formla tanımlanması	Fonksiyondaki değişimin değişimdeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülü kullanarak türev-eğim ilişkisini cebirsel formla gösterir	Fonksiyondaki değişimin değişimdeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülü kullanır ama türev-eğim ilişkisini cebirsel formla göstermez	Fonksiyondaki değişimin değişimdeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülü kullanamaz ve türev-eğim ilişkisini cebirsel formla yazamaz
Türev-Eğim arasındaki ilişkinin sözel bir şekilde belirtilmesi	Cebirsel formla gösterilen Türev-Eğim ilişkisini sözel olarak açıklar	Cebirsel formla gösterilen Türev-Eğim ilişkisini tam açıklayamaz	Türev-Eğim ilişkisini kesinlikle açıklayamaz

Tablo 11. *Maksimum-Minimum Problemlerinin Çözümünde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri*

Kategori	Maksimum-Minimum Problemlerinin Çözüm Aşamaları		
	Ölçütler		
Kodlar	Evet	Kısmen	Hayır
Sorudaki değişkenleri şekil üzerinde gösterme	Sorudaki değişkenleri şekil üzerinde tam gösterir	Sorudaki değişkenleri şekil üzerinde kısmen gösterir	Sorudaki değişkenleri şekil üzerinde göstermez
İstenen ifadeyi tek değişkenli fonksiyona dönüştürme	Problemde istenen ifadeyi tek değişkenli fonksiyona dönüştürür	Problemde istenen ifadeyi tek değişkenli fonksiyona kısmen dönüştürür	Problemde istenen ifadeyi tek değişkenli fonksiyona dönüştürmez
Yerel ekstremum değerleri için türevden yararlanma	Çözümde kullanılacak ekstremum değeri için tek değişkenli fonksiyonun I.türevini alır ve sıfıra eşitler	Çözümde kullanılacak ekstremum değeri için tek değişkenli fonksiyonun I.türevini alır ancak sıfıra eşitlemez	Çözümde kullanılacak ekstremum değeri için tek değişkenli fonksiyonun I.türevini almaz ve sıfıra eşitlemez

Tablo 12. *Grafik Çiziminin Analizinde Kullanılan Kategoriler, Kodlar ve Göstergeleri*

Kategori	Grafik Çizimi		
Ölçütler			
Kodlar	Evet	Kısmen	Hayır
Fonksiyonun tanım kümesinin bulunması	Fonksiyonun en geniş tanım kümesini bulur	Fonksiyonun en geniş tanım kümesini kısmen bulur	Fonksiyonun en geniş tanım kümesini bulamaz
Varsa asimptotların bulunması	Fonksiyonun düşey ve yatay asimptotlarını bulur	Fonksiyonun düşey ve yatay asimptotlarından bazılarını bulur	Fonksiyonun düşey ve yatay asimptotlarının hiçbirisini bulamaz
Fonksiyonun eksenleri kestiği noktaların bulunması	Fonksiyonun eksenleri kestiği noktaları bulur	Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalardan birisini bulur	Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalardan ikisini de bulamaz
Birinci türev incelenerek ekstremum noktaların bulunması	Fonksiyonun 1.türevini inceleyip ekstremum noktalarının tümünü belirler	Fonksiyonun 1.türevini inceleyip ekstremum noktalarının bazılarını belirler	Fonksiyonun 1.türevini inceleyemez ve ekstremum noktalarını belirleyemez
Konvekslik-Konkavlık için ikinci türevin incelenmesi	Fonksiyonun 2.türevini inceleyip konveks-konkav aralıkları belirler	Fonksiyonun 2.türevini inceler ancak konveks ya da konkav aralıkları belirler	Fonksiyonun 2.türevini inceleyemez ve konveks-konkav aralıkları belirleyemez
Değişim tablosunun incelenmesi	Fonksiyonun köklerini değişim tablosunda yerlerine yazarak fonksiyonun ve türevinin değişimini inceler	Fonksiyonun köklerini değişim tablosunda tam olarak yerine yazamayabilir., &ya değişim tablosunda fonksiyonun ve türevinin değişimini tam inceleyemez	Fonksiyonun köklerini değişim tablosunda yerine yazamaz. Değişim tablosunda fonksiyonun ve türevinin değişimini kesinlikle inceleyemez
Eldeki veriler dâhilinde grafiğin çizilmesi	Değişim tablosundaki verileri kullanarak fonksiyonun grafiğini çizer	Değişim tablosundaki verileri kullanarak fonksiyonu grafiğini kısmen çizer	Değişim tablosundaki verileri kullanamaz ve fonksiyonun grafiğini çizemez

Tablo 13. *Problem Kurmaya ve Çözmeye Yönelik Değerlendirme Kriterleri*

Değerlendirme Kriterleri	Alt Kriterler	Ölçütler		
		Evet	Kısmen	Hayır
Matematiksellik	Matematiksel kavramların kullanımı	Matematiksel kavramları kullanır	Matematiksel kavramları kısmen kullanır	Matematiksel kavramları kullanmaz
	Matematiksel sembollerin kullanılması	Matematiksel sembollerini kullanır	Matematiksel sembollerini kısmen kullanır	Matematiksel sembollerini kullanmaz
	Metin-görsel aktarımının sağlanması	Metin-görsel aktarımını doğru yapar	Metin-görsel aktarımını kısmen doğru yapar	Metin-görsel aktarımını doğru yapamaz
Veri Niteliği	Verinin mantıksal uygunluğu	Veriler mantıksal açıdan uygundur	Veriler mantıksal açıdan kısmen uygundur	Veriler mantıksal açıdan uygun değildir
	Verilerle ulaşılabilecek sonucun anlamlılığı	Verilerle ulaşılabilecek sonuçlar anlamlıdır	Verilerle ulaşılabilecek sonuçlar kısmen anlamlıdır	Verilerle ulaşılabilecek sonuçlar anlamsızdır
Dil Bilgisi	Sorunun dil bilgisine uygunluğu	Soru metni dil bilgisine kurallarına uygundur	Soru metni dil bilgisine kurallarına kısmen uygundur	Soru metni dil bilgisine kurallarına uygun değildir
	Soruda anlatım bozukluğunun varlığı	Soruda anlatım bozukluğu yoktur	Soruda anlatım bozukluğu kısmen vardır	Soruda anlatım bozukluğu vardır
	Sorudaki noktalama işaretlerinin kullanımı	Soruda noktalama işaretlerine dikkat edilmiştir	Soruda noktalama işaretlerine kısmen dikkat edilmiştir	Soruda noktalama işaretlerine dikkat edilmemiştir
Düzeye Uygunluk	Sorunun kazanımlara, içeriğe ve zorluk derecesine uygunluğu	Soru, kazanıma içeriğe ve zorluk derecesine uygundur	Soru, kazanıma içeriğe ve zorluk derecesine kısmen uygundur	Soru, kazanıma içeriğe ve zorluk derecesine uygun değildir
Yönerge ve Veri Miktarı	Soruda yönergenin varlığı	Soruda yönerge kullanılmıştır	Soruda yönerge kısmen kullanılmıştır	Soruda yönerge kullanılmamıştır
	Yönergedeki adımların çözüme uygunluğu	Yönergedeki adımlar çözüme uygundur	Yönergedeki adımlar çözüme kısmen uygundur	Yönergedeki adımlar çözüme uygun değildir
	Çözüm için gerekli verinin miktarı	Problemin çözümü için yeterli veri miktarı vardır	Problemin çözümü için yetersiz sayıda veri miktarı vardır	Problemin çözümü için yeterli veri miktarı yoktur
Çözülebilirlik	Kurulan problemin bireyi istenilen sonuca ulaştırması	Kurulan problem bireyi istenilen sonuca ulaştırır	Kurulan problem bireyi istenilen sonuca kısmen ulaştırır	Kurulan problem bireyi istenilen sonuca ulaştıramaz
Kullanılabilirlik	Kurulan problemin öğrenme ortamlarındaki kullanıma durumu	Kurulan problem öğrenme sürecinde kullanılabilir	Kurulan problem öğrenme sürecinde kısmen kullanılır	Kurulan problem öğrenme sürecinde kullanılamaz
Plan Uygulama	Problemin çözümünün yapılması	Kurulan problem doğru bir şekilde çözülmüştür	Kurulan problem kısmen doğru çözülmüştür	Kurulan problem yanlış bir şekilde çözülmüştür
Değerlendirme	Kurulan problemin çözümünün doğrulanması	Kurulan problemin çözümü doğrulanmış ve çözümün sağlanması yapılmıştır	Kurulan problemin çözümü kısmen doğrulanmış ve çözümün sağlanması kısmen yapılmıştır	Kurulan problemin çözümü doğrulanmamış ve çözümün sağlanması yapılmamıştır

Öğrenci ve öğretim stratejileri bilgisine yönelik elde edilen verilerin analizi.

Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerini belirlemek amacıyla yapılan görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde hem betimsel analizden hem de içerik analizinden yararlanılmıştır. Araştırmanın bu bölümündeki verilerin içerik analizinde öğretmenlerin görüşlerinden elde edilen kodlara göre veriler analize tabi tutulmuştur. Betimsel analiz yapılırken ise öğretmenlerin öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerine yönelik cevaplarının analizinde Gökkurt (2014)'un çalışmasındaki kategoriler esas alınmıştır. Buna göre bu kategoriler “öğrencinin yaptığı hatanın belirlenmesi”, “öğrencinin yaptığı hatanın nedeninin/kaynağının belirlenmesi”, “öğrencinin hatasını anlamasına yönelik sorulacak soruların belirlenmesi”, “öğrencinin hatasını gidermesi için kullanacağı matematiksel ön bilginin belirlenmesi” ve “öğrencinin hatasını gidermesi için derste uygulanacak öğretim, yöntem ve stratejilerin belirlenmesi” şeklindedir. Bu kategorilerden en sonuncusu öğretim stratejileri bilgisine yöneliktir. Oluşturulan kategorilerle birlikte bu kategorileri destekleyici şekilde öğretmenlerin görüşlerinden doğrudan alıntılar yapılmıştır.

Öğretmenlerin, öğrenci hatalarının nedenlerine yönelik ortaya attıkları gerekçeler ise Stacey vd. (2001)'nin çalışması esas alınarak oluşturulmuştur. Stacey vd. (2001) öğrencilerin yaptıkları hatalara yönelik gerekçeleri “olmayan gerekçe”, “yalın gerekçe” ve “detaylı gerekçe” olmak üzere üçe ayırmıştır. Olmayan gerekçe, öğrencilerin hatalarıyla ilgili yapılan açıklamaların öğrencilerin hatalarına dair niteliklerin açıklanmasında yeterli olmayan gerekçe olarak bilinir. Yalın gerekçede ise öğrencilerin hatalarıyla ilgili yapılan açıklamaların yüzeysel kaldığı ve öğrencilerin hatalarının kaynağına derinlemesine ulaşılamayan gerekçe olarak bilinir. Son olarak detaylı gerekçe ise öğrencilerin hatalarıyla ilgili yapılan açıklamaların derinlemesine olduğu ve hataların kaynağına doğru bir şekilde ulaşıldığı gerekçe olarak bilinir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Bulgular

Bu bölümde lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik pedagojik alan bilgileri; PAB'ın boyutlarından olan konu alanı bilgisi, öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi bağlamında incelenmiş ve bu boyutlara yönelik bulgulara yer verilmiştir. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen yanıtlardan ve gözlemlerden elde edilen bulgulardan doğrudan alıntılara yer verilerek araştırmadan elde edilen verilerin genel bir görüntüsü ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Öğretmenlerin Türev ve Uygulamalarına Yönelik Konu Alanı Bilgilerine İlişkin Bulgular

Bu bölümde lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgilerine dair bulgulara yer verilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular türevin formel tanımı, örneklendirilmesi ve kullanım alanları, türev-süreklilik ilişkisi, mutlak değer ve kapalı fonksiyonların türevi, türevin geometrik anlamının izahı ve türev-eğim-teğet ilişkisi, artan-azalan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların türevle olan ilişkisi, ekstremum noktalarının tanımlanması ve bu noktaların türevle ilişkisi, konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasının tanımı ile dönüm noktasının ikinci türevle ilişkisi, maksimum-minimum problemleri kurma ve çözme, asimptotun tanımı ve çeşitleri ile grafik çiziminin yapılması ana başlıklarına göre incelenerek bu ana başlıklar altında tanımlanmış alt başlıklara dair bulgular tablolar ve doğrudan alıntılarla özetlenmiştir. Bulgular verilirken görüşmelerden elde edilen verilerle gözlemlerden elde edilen veriler düzenli ve uyumlu bir şekilde analiz edilerek okuyucuya sunulmuştur.

Türevin formel tanımı, örneklendirilmesi ve kullanım alanları.

Tablo 14'de öğretmenlerin türevin formel tanımına yönelik yaptıkları açıklamalar Zazkis ve Leiken (2008)'in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin türevin formel tanımına yönelik açıklamaları erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik kategorileri bakımından incelenmiştir.

Tablo 14. *Türevin Formel Tanımına İlişkin Kategoriler ve Kodlar*

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö _{1, 3, 4}
	Zor verilmiş cevap	
	Kısmen zor verilmiş cevap	Ö ₂
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö ₃
	Gerekli ve yetersiz	Ö _{1, 2, 4}
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Prototip olmayan örnek	

Tablo 14’deki bulgular erişebilirlik kategorisi açısından incelendiğinde üç öğretmenin türevin formel tanımını zorlanmadan ve kolay bir şekilde yaptıkları görülmüştür. Ancak Ö₂ türevin formel tanımını ifade ederken biraz düşünerek cevaplamıştır. Türevin formel tanımına yönelik verilen cevaplar doğruluk kategorisi bakımından ele alındığında öğretmenlerden sadece Ö₃’ün türevin formel tanımına yönelik gerekli ve yeterli tanım yaptığı görülmüştür. Ancak öğretmenlerden Ö₁, Ö₂ ve Ö₄ türevin formel tanımında olması gereken bazı özellikleri eksik söyledikleri belirlenmiştir. Hatta Ö₁’in türevin formel tanımında yer almayan “süreklilik” kavramını da tanımda kullandığı görülmüştür. Türevin formel tanımına yönelik cevaplar zenginlik kategorisine göre incelendiğinde öğretmenlerin tümünün yaptıkları tanımların lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2014; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Keskin, 2017) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Brand, 2006; Demir, 2014; Edwards & Penney, 2001) yer aldığı bu nedenle prototip tanımlar arasında olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin türevin formel tanımına yönelik açıklamalarını daha ayrıntılı incelemek amacıyla, bu tanımda hangi özelliklerin dikkate alındığı Tablo 15.’de araştırmacının oluşturduğu kategori ve kodlara göre incelenmiştir.

Tablo 15. *Türevin Formel Tanımında Olması Gereken Özelliklere Yönelik Kategoriler ve Kodlar*

Kategoriler	Ölçütler			Destekleyici İfadeler
	Evet	Kısmen	Hayır	
Fonksiyonun tanım ve değer kümelerinin belirtilmesi	Ö ₃	Ö ₁	Ö _{2,4}	<i>Bir A kümesi ele alalım. Bu küme reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun ve fonksiyonumuz A kümesinden R kümesine tanımlanmış olsun (Ö₃)</i>
Türevi aranacak noktaya ait özelliklerin belirtilmesi	Ö ₃		Ö _{1,2,4}	<i>Bir noktadaki türev tanımında türevini aradığımız x ve a noktaları tanım kümesinin elemanı olsunlar (Ö₃)</i>
Fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülün gösterilmesi	Ö _{1,2,3,4}			<i>Fonksiyonlardaki değişimi değişkenlerdeki değişime oranlayıp x, a'ya giderken limitini aldığımızda türevi</i> $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ <i>şeklinde ifade ederiz (Ö₄)</i>

Tablo 15'deki bulgulara göre öğretmenlerden sadece Ö₃ türevin formel tanımında bulunması gereken özelliklere yönelik doğru açıklamalarda bulunurken Ö₁, Ö₂ ve Ö₄ öğretmenlerinin tanımda yer alması gereken özelliklerden sadece fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülü eksiksiz bir şekilde cevapladıkları görülmüştür. Öğretmenlerden Ö₁ türevin formel tanımında bulunması gereken özellikleri açıklarken fonksiyonun kapalı bir $[a, b]$ aralığında tanımlı olduğunu belirtmiş ancak bu aralığın fonksiyonun tanım kümesi olup olmadığına yönelik herhangi bir açıklamada bulunmamıştır. Bununla birlikte Ö₁ fonksiyonun tanımlı olduğu $[a, b]$ aralığında sürekli olması gerektiğini de dile getirmiştir. Fonksiyonun tanım kümesini belirtmeyerek sadece değer kümesini ifade eden Ö₁ türevi aranacak nokta olan x_0 noktası hakkında da herhangi bir yorum yapmamıştır. Ö₁ tarafından yapılan türevin formel tanımı incelendiğinde tanımda yer alan kapalı aralık ve süreklilik kavramlarının lise matematik ders kitapları (Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Ünlü & Er, 2013) ile alandaki matematik öğretim kitaplarındaki (Kadıoğlu & Kamali, 2005; Musayev vd., 2007; Tosun, 2010) tanımı yansıtan özelliklerle bağdaşmadığı görülmüştür. Buradan hareketle Ö₁'in formel türev tanımında hem doğru hem de yanlış ifadelerin bir arada olduğu söylenebilir. Öğretmenlerden Ö₂ ve Ö₄ türevin formel tanımına yönelik sadece türev fonksiyonunu belirten tanım ile bir noktadaki türev tanımını cebirsel ifadelerle yazarak göstermiştir. Bu öğretmenler türevin formel tanımında bulunması gereken fonksiyonun tanım-değer kümeleri ile türevi aranacak noktaya ait özellikleri eksiksiz bir şekilde ifade edememiştir. Öğretmenlerin türeve verdikleri örneklerle ve türevin gündelik yaşamdaki kullanım alanlarına yönelik yaptıkları açıklamaları Tablo 16'da gösterilmiştir.

Tablo 16. Türeve Verilen Örnekler ve Türevin Kullanım Alanlarına Yönelik Açıklamalar

Öğretmenler	Türeve Verilen Örnekler	Örnekleri Destekleyen Açıklamalar	Türevin Kullanım Alanları
Ö ₁	Değişim	<i>Bir kayakçı düşünelim. Kayakçı bir tepeden yavaş yavaş kayarak inerken yollar arasındaki değişim türevle hesaplanır</i>	Mühendislik
Ö ₂	Yaklaşma	<i>Türevi bulunacak noktaya ulaşmıyoruz biz sadece o noktaya yaklaşıyoruz</i>	Bankacılık
Ö ₃	Anlık Değişim Oranı	<i>Türevi anlık değişim oranı olarak; x'lerdeki değişim sıfıra yaklaştırıldığında yani limit durumunda y'lerdeki değişimin x'lerdeki değişime oranı şeklinde ifade edebiliriz</i>	Ticaret Endüstri Mühendislik
Ö ₄	Eğim	<i>Türev deyince aklıma eğim geliyor. Fonksiyonun bir noktadaki türevi, fonksiyona o noktada çizilen teğetin eğimidir çünkü</i>	Maliye Mühendislik

Tablo 16'daki bulgulara göre öğretmenlerden Ö₁'in türevi örneklendirirken değişim kavramını kullandığı görülmüştür. Ö₁ bir hareketlinin dikey ve yatay yollar arasında yaklaşık olarak gittiği mesafe hesaplanırken türevin kullanılacağını dile getirmiştir. Ancak türev kavramı sadece değişim kavramı ile sınırlı olmayıp hareketlinin bir andaki değişim oranıyla da ilgilidir. Bu bakımdan Ö₁ tarafından türeve yönelik yapılan örneklendirmenin eksik bir örneklendirme olduğu söylenebilir. Ö₁ ayrıca türevin günlük yaşamda harita mühendisliği ve makine mühendisliği alanlarında sistemler oluşturulurken kullanıldığını belirtmiştir. Öğretmenlerden Ö₂'nin türevi örneklendirirken yaklaşma kavramını kullandığı tespit edilmiştir. Ö₂ türevi aranacak noktanın fonksiyon eğrisi üzerinde tanımlı olmasına ihtiyacın olmadığını, türevi aranacak noktaya ulaşma hedefinin olmadığını ancak sadece o noktaya yaklaşma amacının güdüldüğünü dile getirmiştir. Ö₂ tarafından türevin örneklendirmesinde kullanılan terim, limit kavramının izahında kullanılmaktadır. Limit kavramını ifade ederken x eksenini üzerindeki herhangi bir noktayla bu noktanın y eksenini üzerindeki görüntüsüne mümkün olabildiğince sınırları zorlayacak şekilde bir yaklaşma söz konusudur. Türev konusunda ise yaklaşma kavramı türev-eğim ilişkisini ifade ederken sadece eğri üzerindeki hareketli noktanın sabit noktaya doğru yavaş yavaş hareketini ifade ederken yani eğriye çizilen kirişin teğete dönüşmesi sürecinde kullanılmaktadır. Ancak burada Ö₂ yaklaşma kavramıyla türev-eğim ilişkisindeki hareketli noktanın sabit noktaya yaklaşmasını kastetmemiştir. Bu nedenle Ö₂ tarafından kullanılan türev örneğinin eksik veya içeriği türev

kavramına uygun bir şekilde anlatılmayan bir örnek olduğu söylenebilir. Ö₂ ayrıca türevin günlük yaşamda maksimum-minimum problemleri çözülürken ve bankacılık sektöründe kullanıldığını ifade etmiştir. Ö₂'ye göre türev, bir yerde çıkacak petrol kalitesinin maksimum ne düzeyde kaliteli ve ne kadarlık bir süre için çıkacağı hesaplanırken kullanılmaktadır. Ayrıca türev, borsada sık değişen hisse senetlerinin durumlarıyla ilgili kullanılmaktadır.

Öğretmenlerden Ö₃'ün türevi örneklendirirken anlık değişim oranı kavramını kullandığı belirlenmiştir. Ö₃ türevi örneklendirirken fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limit durumunu dile getirmiştir. Ö₃ tarafından türevin örneklendirmesine yönelik yapılan açıklamaların türevin cebirsel ve fiziksel anlamları düşünüldüğünde doğru ve net açıklamalar olduğu söylenebilir. Ö₃ ayrıca türevin günlük yaşamda endüstri, ticaret ve mühendislik alanlarında kullanıldığını belirtmiştir. Ö₃'e göre türev günlük yaşamda kar-zarar hesaplanırken yani minimum maliyet maksimum kar politikalarında ve plan-program çizilirken kullanılan yazılımlar dâhil inşaat sektöründe kullanıldığını ifade etmiştir. Ö₃'e göre evde kullanılan eşyalar türevin bir ürünüdür. Öğretmenlerden Ö₄'ün türevi örneklendirirken eğim kavramını kullandığı görülmüştür. Buna göre Ö₄ türevin geometrik anlamını açıklarken eğim kavramından yararlanıldığını dile getirmiştir. Ö₄ tarafından türevin örneklendirilmesinde kullanılan kavram ile örneklendirmeye yönelik açıklamaların doğru açıklamalar olduğu söylenebilir. Ö₄ ayrıca türevin günlük yaşamda maksimum-minimum problemlerinin çözümünde, mühendislik ve maliye alanlarında kullanıldığını belirtmiştir. Ö₄'e göre türev bir aracın aerodinamik yapısı oluşturulurken, bir aletin inceliği veya kalınlığı hesaplanırken ve kar-zarar problemleri çözülürken kullanılmaktadır. Buna göre türev, bir bina düşünüldüğünde binadaki kirişlerin taşıyabileceği yük miktarı bir denklem olarak verildiğinde bu kirişlerin kaç ton şiddetindeki bir ağırlıktan sonra kırılacağını hesaplarken kullanılmaktadır. Öğretmenlerin çoğu türevin günlük yaşamda mühendislik alanında kullanıldığını belirtmiştir. Öğretmenlerin tümünün türevin gündelik yaşamdaki kullanım alanlarına yönelik yaptıkları açıklamaların doğru açıklamalar olduğu söylenebilir. Türev günlük hayatta; fizik, mühendislik, astronomi, ekonomi ve istatistik gibi disiplinlerde gerçek yaşam problemlerine yönelik modellere çözüm üretmek için kullanılmaktadır (Sevimli, 2016; Sezer & Daşcıoğlu, 2010). Öte yandan öğretmenlerin türevin formel tanımına yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden edinilen yansımalar Tablo 17'de gösterilmiştir.

Tablo 17. Türeve Formel Tanımına Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları

Öğretmenler	Görüşme Yansımaları	Gözlem Yansımaları
Ö ₁	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
Ö ₂	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0)$
Ö ₃	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ Sağdan Türev: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Solardan Türev: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Ö ₄	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Tablo 17'deki bulgulara göre öğretmenlerin türevin formel tanımına yönelik görüşmelerden ve ders içi gözlemlerinden elde edilen verilerin birbiriyle uyumlu olduğu söylenebilir. Yapılan görüşmelerde Ö₁ bir noktadaki türev tanımından yararlanarak türevin formel tanımını araştırmacıya açıklarken türev konusundaki ilk derste yaptığı bir noktadaki türev tanımını belirten formülden yararlanmıştır. Bununla birlikte Ö₁ bir noktadaki türev tanımını yaparken görüşmede tanım kümesini belirtmemesine rağmen gözlem sürecinde fonksiyonun tanım ve değer kümeleri hakkında bilgi vermiştir. Ö₁ bir noktadaki türev tanımını ilerleyen derslerde sabit bir fonksiyonun bir noktadaki türevini ararken de kullanmıştır. Yapılan görüşmelerde Ö₂ türev fonksiyonundan yararlanarak türevin formel tanımını araştırmacıya açıklarken ders içi gözlemde bir polinom fonksiyonun türevini ararken

aynı formülü kullanmıştır. Ö₂ görüşmede olduğu gibi gözlemlerde de türev fonksiyonun formülünü gösteren ifadeyi yazmasına rağmen formülün içeriği hakkında net bir bilgi verememiştir. Görüşme ve gözlem sonuçları birbirini desteklediğinden Ö₂'nin türevin formel tanımındaki ifadelere yönelik işlemsel bilgisinin kavramsal bilgisinin önüne geçtiği söylenebilir.

Yapılan görüşmelerde Ö₃ hem bir noktadaki türev tanımını, hem değişim oranlarının $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ limit durumunu, hem de türev fonksiyonunu kullanarak türevin formel tanımını açıklarken ders içi gözlemde aynı formülleri türev konusunun ilk dersinde kullanmıştır. Bununla birlikte Ö₃ bir noktadaki türev tanımına yönelik formülü sağdan-soldan türevi tanımlarken, parçalı fonksiyonların ve mutlak değer fonksiyonlarının türevlerini ararken kullanmıştır. Ö₃ türev fonksiyonunu derste trigonometrik bir fonksiyonun türevini ispat ederken kullanmıştır. Ö₃ türevin formel tanımını sadece tahtaya yazmakla kalmamış öğrencilerine bir noktadaki türev tanımı için sadece seçili bir noktanın türevinin arandığını, türev fonksiyonu için ise fonksiyonun herhangi bir noktasındaki türevinin arandığını belirtmiştir. Bu sayede Ö₃ öğrencilerine bir noktadaki türev tanımı ile türev fonksiyonu arasındaki farkı da izah etmiştir. Yapılan görüşmelerde Ö₄ bir noktadaki türev tanımından yararlanarak türevin formel tanımını araştırmacıya açıklarken ders içi gözlemde türev konusunun ilk dersinde bir noktadaki türev tanımına yönelik formülü kullanmıştır. İlerleyen derslerde Ö₄ logaritmik fonksiyonun türevini anlatırken hem bir noktadaki türev tanımını hem de türev fonksiyonunu belirten formülleri öğrencilerine hatırlatmıştır. Dört öğretmenin derste hem bir noktadaki türev tanımına hem de türev fonksiyonuna yönelik formülleri doğru kullandıkları gözlenmiştir. Öte yandan öğretmenlerin bir noktada türevli olan bir fonksiyonla ilişkili başka bir fonksiyonun aynı noktada türevli olup olmadığını nasıl belirledikleri merak edilmiştir. Buna göre öğretmenlerin türevin formel tanımında kullandıkları formülü uygulamada da aynı şekilde kullanıp kullanmadıklarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu sayede öğretmenlerin türevin formel tanımına yönelik formülü uygulamada doğru kullanıp kullanmadıkları da belirlenmiş olacaktır. $f: (a, b) \rightarrow R$ ve $c \in (a, b)$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasında türevli olduğu varsayımından yola çıkarak $-f^2(x)$ fonksiyonunun da $x = c$ noktasında türevli olup olmadığına yönelik öğretmenlere bir soru yöneltilmiştir. Öğretmenlerin verdikleri cevaplar araştırmacının oluşturduğu kategorilere göre Tablo 18'te gösterilmiştir.

Tablo 18. $f(x)$ Fonksiyonunun Türevli Olduğu Noktada $-f^2(x)$ Fonksiyonunun Türevli Olma Durumu

$-f^2(x)$ Fonksiyonunun Türevli Olma Durumu	Ö ₁	Ö ₂	Ö ₃	Ö ₄
$x = c$ noktasında türevlidir	√		√	√
$x = c$ noktasında türevli değildir				
Cevap yok		√		

Tablo 18’den elde edilen bulgulara göre Ö₂ haricindeki tüm öğretmenler “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun $x = c$ noktasında türevli olduğu konusunda görüş belirtmiştir. Ancak öğretmenlerden Ö₂ “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun $x = c$ noktasında türevli olup olmadığına dönük işlemler yapmış olsa da bu noktadaki “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun türevli olmasına ya da olmamasına yönelik net bir görüş belirtmemiştir. Ö₂ haricindeki tüm öğretmenler “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun türevli olma durumunu araştırırken bir noktadaki türev tanımından yararlanmıştır. Ancak öğretmenlerden Ö₂ görüşmelerde ve derste olduğu gibi bu probleme cevap verirken de türev fonksiyonunun formülünden yararlanarak “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun türevli olup olmadığını belirlemeye çalışmıştır. Öğretmenlerden Ö₁’in “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun $x = c$ noktasında türevli olma durumuna yönelik yaptığı işlemler Şekil 11’de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
 f'(c) &= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\
 (-f^2(c)) &= -\frac{f^2(x) - f^2(c)}{x - c} = \frac{(f(c) - f(x)) \cdot (f(x) + f(c))}{(x - c)} \\
 &= (-f'(c)) \cdot (f(c) + f(x)) \\
 &= -f'(c) \cdot 2f(c) //
 \end{aligned}$$

Şekil 11. Ö₁’in $-f^2(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki türevine yönelik işlemler.

Şekil 11.’de görüldüğü üzere Ö₁ $x = c$ noktasındaki türev tanımına yönelik formülü kullanarak “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun $x = c$ noktasında türevli olduğunu göstermiştir. Daha sonra Ö₁ formülde $f(x)$ ifadesi yerine “ $-f^2(x)$ ” ifadesini yazarak $x = c$ noktasında “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun türevli olup olmadığını aramıştır. Çözüm sürecinde yaptığı matematiksel işlemlerin içinde zaten $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki türevini veren matematiksel ifadeye ulaşan Ö₁ işlemini devam ettirmiştir. Bu sayede Ö₁ ilerleyen işlemde $f(c)$ ifadesiyle karşılaşmıştır. $f(c)$ ifadesini yorumlamaya çalışan Ö₁, “ c ” ifadesinin tanım kümesindeki (a,b)

aralığının bir elemanı olduğunu görmüştür. $\ddot{O}_1$, $f(c)$ ifadesinin, “ c ” ifadesinin görüntüsü olmasından hareketle $f(c)$ ’nin de tanımlı olduğu kanısına varmıştır. Ulaşılan sonucun problemde belirlenen aralıkta tanımlı olmasından hareketle $\ddot{O}_1$, “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonun $x = c$ noktasında türevli olduğu görüşünü belirterek soruyu doğru bir şekilde cevaplamıştır. Görüşme ve gözlem sürecinde türevin noktasal tanımını kullanan $\ddot{O}_1$ bu problemde de aynı formülü yerinde kullanarak derste olduğu gibi problemin çözümünü gerçekleştirmiştir. Öğretmenlerden $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ ’ün problemin çözümüne verdikleri cevaplar incelendiğinde bu öğretmenlerin problemin çözümüne verdikleri cevaplar ile çözümün altındaki nedene yönelik açıklamaları $\ddot{O}_1$ ’in problemi çözme sürecinde yaptığı uygulamalarla ve verdiği cevaplarla bire bir örtüşmektedir. $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ öğretmenleri görüşme ve gözlem sürecinde olduğu gibi bu problemin çözümünde de bir noktadaki türev tanımını doğru bir şekilde kullanarak problemi doğru bir şekilde cevaplandırmıştır. Öte yandan öğretmenlerden $\ddot{O}_2$ ’nin “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun $x = c$ noktasında türevli olma durumuna yönelik yaptığı işlemler Şekil 12.’de gösterilmiştir.

$$\begin{array}{l}
 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} = f'(x_0) \\
 \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x+c) - f(x)}{x - c} = f'(c) \quad \text{var.} \\
 \lim_{x \rightarrow c} \frac{-f^2(x+c) + f(x)}{x - c} = ? \\
 \lim_{x \rightarrow c} \frac{-f(\widehat{f(x+c)}) + f(x)}{x - c} = \dots
 \end{array}$$

Şekil 12. $\ddot{O}_2$ ’nin $-f^2(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki türevine yönelik işlemler.

Şekil 12.’de görüldüğü üzere $\ddot{O}_2$ $x = c$ noktasındaki türev tanımına yönelik türev fonksiyonunu belirten formülü kullanarak “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonunun $x = c$ noktasında türevli olma durumunu incelemeye çalışmıştır. İlerleyen işlemlerde $\ddot{O}_2$ “ $-f^2(x+c)$ ” ifadesi yerine bileşke fonksiyon gibi düşünerek “ $-f(f(x+c))$ ” biçiminde yanlış bir ifade kullanmıştır. Bu nedenle $\ddot{O}_2$ problemi doğru bir şekilde cevaplayamamış ve belirtilen noktadaki türev hakkında herhangi bir yorumda bulunamamıştır. $\ddot{O}_2$ ’nin görüşme ve ders gözlemleri incelendiğinde $\ddot{O}_2$ ’nin hem görüşmede hem de derste formel türev tanımına yönelik sürekli türev fonksiyonu tanımına yönelik formülü kullanmaya çalıştığı görülmüştür.

Türev-süreklilik ilişkisi.

Tablo 19’da öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisine yönelik yaptıkları açıklamalar Zazkis ve Leiken (2008)’in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin türev-

süreklilik ilişkisine yönelik açıklamaları erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik kategorileri bakımından incelenmiştir.

Tablo 19. *Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Kategoriler ve Kodlar*

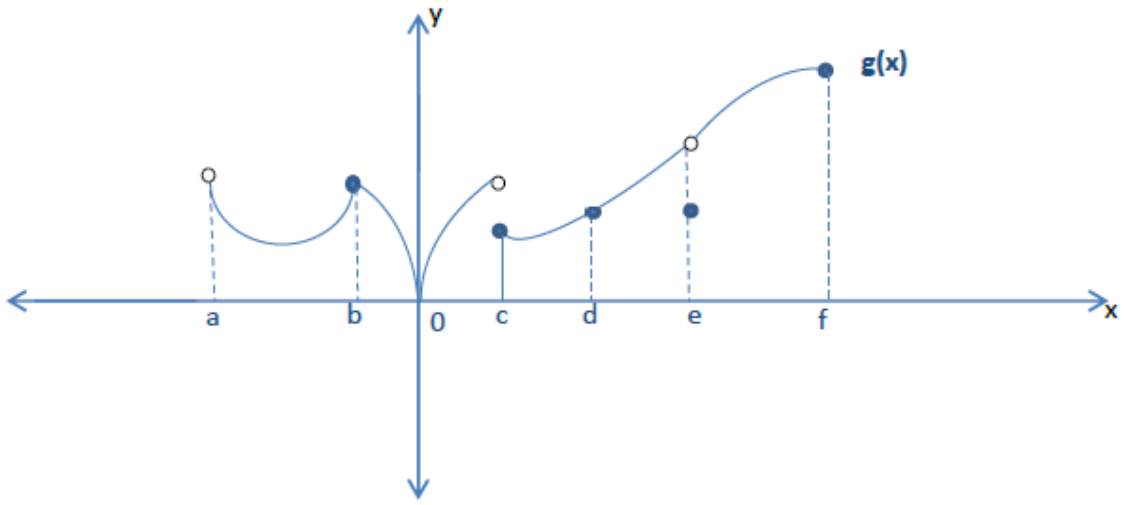
Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö _{1, 3, 4}
	Zor verilmiş cevap	
	Kısmen zor verilmiş cevap	Ö ₂
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö _{3, 4}
	Gerekli ve yetersiz	Ö _{1, 2}
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Prototip olmayan örnek	

Tablo 19'daki bulgular erişebilirlik kategorisi açısından incelendiğinde Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ öğretmenlerinin türev-süreklilik ilişkisine yönelik açıklamalarını zorlanmadan ve rahat bir şekilde yaptıkları görülmüştür. Ancak Ö₂ türev-süreklilik ilişkisini açıklarken biraz duraksayıp düşündükten sonra süreklilik kavramını açıklayarak türev-süreklilik ilişkisine yönelik özellikleri belirtmiştir. Türev-süreklilik ilişkisine yönelik görüşler doğruluk kategorisi bakımından ele alındığında öğretmenlerden Ö₃ ve Ö₄'ün türev-süreklilik ilişkisini yansıtan gerekli özellikleri eksiksiz bir şekilde belirttikleri görülmüştür. Ancak öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₂'nin türev-süreklilik ilişkisini yansıtan bir özellikten bahsetmedikleri görülmüştür. Türev-süreklilik ilişkisine yönelik görüşler zenginlik kategorisine göre değerlendirildiğinde öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisini ortaya koyarken kullandıkları cebirsel ve grafiksel argümanların lise matematik ders kitaplarında (Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017) ve alan öğretim kitaplarında (Ayres, 1978; Caferov, 1999; Halilov, Hasanoğlu & Can, 1999; Karadeniz, 2003; Thomas vd., 2011) yer aldığı bu nedenle prototip argümanlar olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisini ortaya koyarken kullandıkları argümanları daha ayrıntılı incelemek amacıyla, bu ilişkide hangi özelliklerin dikkate alındığı Tablo 20'de araştırmacının oluşturduğu kategori ve kodlara göre incelenmiştir.

Tablo 20. Türev-Süreklilik İlişkisindeki Özelliklere Yönelik Kategoriler ve Kodlar

Kategoriler	Ölçütler			Destekleyici İfadeler
	Evet	Kısmen	Hayır	
Fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olması	Ö _{1, 2, 3, 4}			Fonksiyon x_0 noktasında tanımlı, sağ-sol limitleri ile fonksiyonun bu noktadaki değeri birbirine eşit olduğundan süreklidir. Fonksiyonun aynı noktada sağ-sol türevleri de eşit olduğundan fonksiyon türevlidir (Ö ₂)
Fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olmaması	Ö _{1, 2, 3, 4}			$y = f(x) = x $ fonksiyonu için $x = 0$ noktasında kırılma vardır. $x = 0$ noktasında fonksiyon süreklidir ancak türevi yoktur. Çünkü sıfırın sağından ve solundan türevi incelediğimizde sağ-sol türev değerlerinin birbirinden farklı olduğunu görürüz. Bu nedenle $f'(0)$ yoktur (Ö ₄)
Fonksiyonun sürekli olmadığı noktada türevli olmaması	Ö _{2, 3, 4}		Ö ₁	Örneğin fonksiyon parçalı olarak tanımlanmışsa $x = x_0$ noktasına soldan yaklaştığımızda limit “a” olurken sağdan yaklaştığımızda limit “b” oluyor. $a \neq b$ olduğundan limitler farklı oluyor. Limitler eşit olmadığında fonksiyon o noktada sürekli olmuyor. Sürekli olmadığı noktada ise fonksiyon türevsizdir (Ö ₃)
Fonksiyonun türevli olduğu noktada sürekli olması	Ö _{1, 3, 4}		Ö ₂	Bir “f” fonksiyonu $x = x_0 \in [a, b]$ noktasında türevli olsun. Bu durumda $x = x_0$ noktasındaki limit değerinin $f(x_0)$’a eşit olduğu ve fonksiyonun x_0 noktasında sürekli olduğu şöyle ifade edilebilir (Ö₃): $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x_0) + 0 \times h(x_0)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x_0)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \times h(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$

Tablo 20'deki bulgulara göre öğretmenlerden Ö₃ ve Ö₄ türev-süreklilik ilişkisine yönelik özellikleri eksiksiz bir şekilde açıklarken; Ö₁'in fonksiyonun sürekli olmadığı noktada türevli olmadığı özelliğini, Ö₂'nin ise fonksiyonun türevli olduğu noktada sürekli olması özelliğini açıklamadıkları görülmüştür. Ancak öğretmenlerin tümü yaptıkları açıklamalar bağlamında türev-süreklilik ilişkisini yansıtan özellikler belirtmiştir. Öğretmenlerden Ö₃ türev-süreklilik ilişkisinde fonksiyonun türevli olduğu noktada sürekli olması özelliğini alandaki öğretim kitaplarında (Balcı, 1999; Çetinkaya vd., 2013; Demir, 2014) yer alan ispatı uygulayarak açıklamıştır. Öte yandan öğretmenlerin belirli bir aralıkta fonksiyon üzerindeki bazı noktaların türevli olma durumlarını ve nedenlerini açıklayabilme becerilerini belirlemek amacıyla Şekil 13.'teki problem öğretmenlere sorulmuştur.



Şekil 13. $g(x)$ üzerindeki noktalarda türevin varlığına yönelik problem.

Şekil 13'te öğretmenlere yöneltilen problemde $g(x)$ fonksiyonu üzerindeki a, b, c, d, e ve f noktalarında fonksiyonun türevli olup olmadığının belirlenmesi istenmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerden fonksiyon üzerindeki bu noktaların neden türevli olup olmadığını açıklamaları da beklenmiştir. Fonksiyon üzerindeki noktaların türevli olup olmadığı ve bunun nedenlerini daha ayrıntılı incelemek amacıyla, öğretmenlerin bu probleme verdikleri cevaplar Tablo 21'de araştırmacı tarafından oluşturulan kategoriler ve kodlara göre incelenmiştir.

Tablo 21. *Fonksiyon Üzerindeki Noktalarda Türev Varlığı ve Nedenlerine Yönelik Kategoriler ile Kodlar*

Noktalar	Noktanın Türevli Olması	Noktanın Türevli Olmaması	Noktanın Türevli Olma-Olmama Durumunun Nedeni
“a”		$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$	<i>Fonksiyon a noktasında tanımlı değildir. Tanımlı olmadığı için sürekli değildir. Sürekli olmadığı için de türevli değildir ($\ddot{O}_3$)</i>
“b”		$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$	<i>B noktası sivri uçtur. Bu noktanın solunda ve sağında farklı grafikler vardır. Farklı grafiklere sahip farklı fonksiyonların teğetlerinin eğimleri eşit değildir. Bu durumda sağdan-soldan türev farklı olacağından bu noktada türev yoktur ($\ddot{O}_2$)</i>
“c”		$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$	<i>c noktasında sağdan ve soldan limit değerleri birbirine eşit değildir. Limitler birbirinden farklı olduğundan fonksiyonun limiti yoktur. Fonksiyon limitli olmadığı sürekli değildir. Fonksiyon sürekli olmadığı için türevlenemez o noktada ($\ddot{O}_3$)</i>
“d”	$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$		<i>d noktasında süreklilik bozulmamıştır ve fonksiyon limitlidir. Sağdan soldan türevler birbirine eşittir. Fonksiyona çizilecek teğetin eğimi fonksiyonun o noktadaki türevini verecektir. Fonksiyon d noktasında türevlidir ($\ddot{O}_1$)</i>
“e”		$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$	<i>e noktasının bir sıçrama noktası olduğunu söyleyebiliriz. Fonksiyona e noktasına sağdan-soldan yaklaştığımızda alınan değer o noktadaki fonksiyonun değerinden farklıdır. Bu nedenle fonksiyon e noktasında sürekli değildir. Sürekli olmadığı için fonksiyon e noktasında türevli olmaz ($\ddot{O}_4$)</i>
“f”	$\ddot{O}_{1, 2, 4}$	$\ddot{O}_3$	<i>f noktasına kritik bir durum var. Normal şartlarda f noktasında fonksiyon tanımlıdır. Ancak f noktasının sağında fonksiyon tanımlı olmadığından sadece soldan bakıp türevi var diyebiliriz. Bu nedenle fonksiyonun soldan türevli olduğunu söyleriz ($\ddot{O}_4$)</i> <i>Bazı kaynaklarda böyle tanımlı olan sağdaki uç noktalarda soldan türeve bakmanın yeterli olduğu söyleniyor. Bu durumda fonksiyon türevlidir ve sürekli o noktada. Ancak f noktasında sonsuz teğet çizildiğinden dolayı fonksiyon sürekli gibi gözükse de türevli değildir ($\ddot{O}_3$)</i>

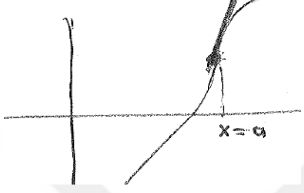
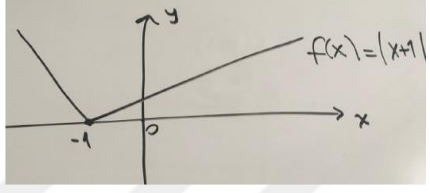
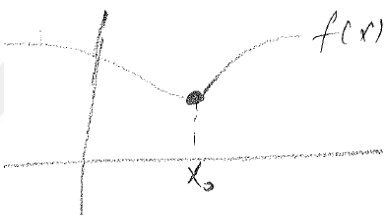
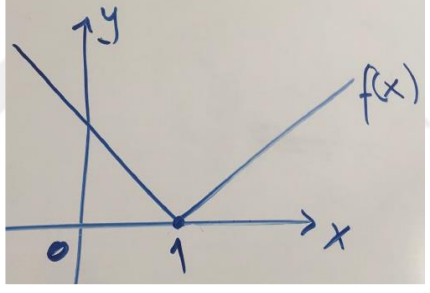
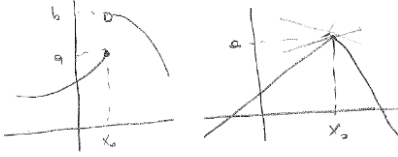
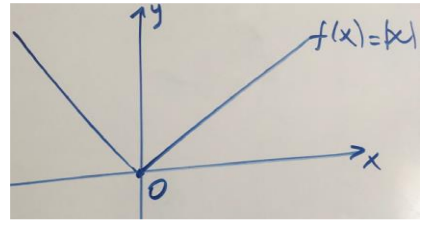
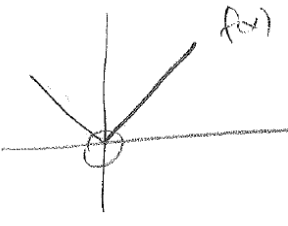
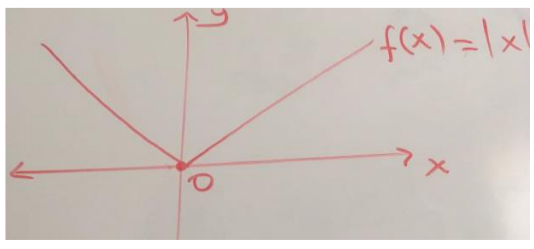
Tablo 21'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı fonksiyon üzerindeki beş noktada türevin varlığını belirlemeye yönelik benzer açıklamalarda bulunarak beş noktadaki türevin varlığı konusunda hem fikir olmuşlardır. Öğretmenlerin tamamı türevin varlığının söz konusu olmadığı noktalarda tanımlılık-süreklilik-türevlilik ilişkisine göre ya da limit-süreklilik-türevlilik ilişkisini dikkate alarak o noktalardaki türevin var olmadığını ifade etmiştir. Öğretmenlerin tümü e noktası dışında türevin varlığının söz konusu olduğu noktaları incelerken ilk planda noktanın sürekli olup olmadığına dikkat etmiştir. Burada öğretmenler süreklilik kavramından hareketle noktadaki türevin varlığından söz etmiştir. Öğretmenlerin tamamı sivri uçların olduğu kırık noktalarda fonksiyonu parçalı bir fonksiyon şeklinde düşünmüş ve bu noktadaki türevin varlığını belirlerken sağdan-soldan türevin olup olmadığına dikkat etmiştir. Öğretmenlerden $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$ b ve d noktalarında türevin var olmadığından söz ederken bu noktalarda sağdan-soldan türev kavramlarını dikkate alarak hareket etmelerine rağmen f noktasındaki türevin varlığından söz ederken bu noktaya çizilecek teğetler hakkında herhangi bir yorumda bulunmamıştır.

$\ddot{O}_2$ ile türev-süreklilik ilişkisine yönelik yapılan görüşmelerde $\ddot{O}_2$ fonksiyonun türevliyse sürekli olmasına yönelik özellik hakkında herhangi bir yorumda bulunmazken f noktasındaki türevin varlığını ifade ederken fonksiyonun o noktada türevli olduğunu, bu nedenle aynı noktada sürekli olduğunu belirtmiştir. Öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ ile türev-süreklilik ilişkisine yönelik yapılan görüşmelerde, $\ddot{O}_1$ fonksiyonun sürekli olmadığı noktada türevli olmaması özelliği hakkında herhangi bir açıklama yapmazken a, c ve e noktalarındaki türevin var olmasının nedeni olarak fonksiyonun bu noktalarda sürekli olmadığı bu nedenle de aynı noktalarda türevli olmayacağı şeklinde bir açıklamada bulunmuştur. Öğretmenlerden $\ddot{O}_3$ bu problemde aralığın alt uç değer noktası olan a noktasında türevin olmadığından söz ederken bu noktada ilk planda noktaya çizilen teğetleri dikkate almayıp noktanın tanımlılığı üzerinden yorumda bulunmuştur. Ancak $\ddot{O}_3$ aralığın üst uç değer noktası olan f noktasında türevin olmadığından söz ederken noktanın tanımlılığını ilk planda dikkate almayıp noktaya çizilen teğetleri düşünmüştür. Bu nedenle $\ddot{O}_3$ 'ün aralığın uç noktalarında aynı prensiplerde hareket etmeyerek türevin varlığı hakkında yorumda bulunduğu söylenebilir.

Öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_2$ 'nin türev-süreklilik ilişkisinde dile getirmediikleri özellikleri bu problemde ifade ettikleri söylenebilir. Öğretmenlere yöneltilen bu problemde en dikkat çekici nokta f noktasındaki türevin varlığıdır. $\ddot{O}_3$ kaynak kitaplarda tanımlı uç noktaların bulundukları tarafın tam tersi yönünde türevin varlığına dair ifadeleri teyit emesine rağmen diğer üç öğretmenden farklı düşünerek f noktasında türevin olmayacağını iddia etmiştir. Diğer üç öğretmen ise f noktasında soldan türevin varlığından bahsetmiştir. Alandaki matematik

öğretim kitaplarından Thomas vd. (2011)'ne göre bir aralıkta tanımlı olan fonksiyonun tanımlı olduğu uç noktalarında tek taraflı türevlerden söz edilebileceği dile getirilmiştir. Bu nedenle aralıkta tanımlı alt uç nokta için sağdan türev, aralıkta tanımlı üst uç nokta için soldan türevin olduğu belirtilmiştir. Öte yandan öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden edinilen yansımalar Tablo 22'de gösterilmiştir.

Tablo 22. *Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları*

Öğretmenler	Görüşme Yansımaları	Gözlem Yansımaları
Ö ₁		
Ö ₂		
Ö ₃		
Ö ₄		

Tablo 22'deki bulgulara göre öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisine yönelik görüşmelerden ve ders içi gözlemlerden elde edilen verilerin birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Yapılan görüşmelerde $\ddot{O}_1$ türev-süreklilik ilişkisine yönelik özellikleri açıklarken fonksiyonun sürekli olduğu noktada her zaman türevli olamayacağını ifade etmiştir. $\ddot{O}_1$ 'in ders içi gözleminde ise $\ddot{O}_1$ türev-süreklilik konusunu anlatırken bir mutlak değer fonksiyonu örneğinden yola çıkarak sürekli bir fonksiyonun türevli olamayacağını öğrencilere göstermiştir. $\ddot{O}_1$ öğrencilerine fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğinin fonksiyonun aynı noktada türevli olmasını garanti etmediğini belirtmiştir. $\ddot{O}_1$ türev-süreklilik ilişkisine yönelik derste kullandığı örneği ilerleyen derslerde yerel ekstremum konusunu anlatırken yerel maksimum ve yerel minimum noktalarında da kullanmıştır.

$\ddot{O}_2$ öğretmeniyle yapılan görüşmelerde $\ddot{O}_2$ türev-süreklilik ilişkisine yönelik sürekli bir fonksiyonun bir noktada türevli olabildiği gibi aynı noktada türevli olamayacağını araştırmacıya açıklamıştır. Hatta $\ddot{O}_2$ bu durumu grafiksel ve cebirsel yollarla da göstermiştir. $\ddot{O}_2$ ders içi gözleminde türev-süreklilik ilişkisine yönelik mutlak değer fonksiyonundan örnek vererek sürekli bir fonksiyonun sürekli olduğu kırılma noktasında sağ ve sol türevlerinin birbirinden farklı olduğunu öğrencilere göstermiştir. $\ddot{O}_2$ fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olamayabileceğine yönelik örneklerini parçalı fonksiyonlar üzerinde öğrencilerine göstermiştir.

Yapılan görüşmelerde $\ddot{O}_3$ türev-süreklilik ilişkisine yönelik özellikleri açıklarken bu ilişkideki söz konusu özelliklerin hepsine değinmiştir. Hatta $\ddot{O}_3$ görüşme protokolünde türev-süreklilik ilişkisinde fonksiyonun sürekli olmadığı noktada türevli olmadığı ve sürekli olduğu noktada türevli olmadığı özelliklerini grafiksel yollarla araştırmacıya açıklamıştır. $\ddot{O}_3$ ders içi gözlemlerinde de mutlak değer fonksiyonunu kullanarak çoğunlukla fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olmayacağına dikkat çekmiştir. Bununla ilgili olarak öğrencilerini türev-süreklilik ilişkisinde dikkatli olma konusunda uyaran $\ddot{O}_3$ bir noktadaki sürekliliğin fonksiyonun o noktadaki türevliliği için her zaman bir ön koşul oluşturmadığını öğrencilerine anlatmıştır.

Yapılan görüşmelerde $\ddot{O}_4$ türev-süreklilik ilişkisine yönelik özellikleri açıklarken bu ilişkideki söz konusu özelliklerin hepsinden bahsetmiştir. Hatta $\ddot{O}_4$ görüşmede türev-süreklilik ilişkisinde fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olmaması özelliğini grafiksel yolla araştırmacıya sunmuştur. $\ddot{O}_4$ ders içi gözlemlerinde $\ddot{O}_3$ 'te olduğu gibi mutlak değer fonksiyonunu kullanarak türev-süreklilik ilişkisini öğrencilere anlatmıştır. Mutlak değer fonksiyonunda sürekli bir fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olamayacağını öğrencilerine göstermiştir. Grafiksel gösterimden yararlanan $\ddot{O}_4$ aynı zamanda fonksiyonun

sürekli olduğu noktada türevinin var olup olmadığını sürekli olduğu noktanın sağından ve solunda türevi inceleyerek öğrencilerine göstermeye çalışmıştır. Bütün öğretmenlerin ders içinde türev-süreklilik ilişkisine yönelik kullandıkları gösterimlerin doğru ve konuya uygun gösterimler olduğu söylenebilir.

Mutlak değer fonksiyonunun türevi.

Tablo 23’de öğretmenlerin mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevine yönelik görüşleri Zazkis ve Leiken (2008)’in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevine yönelik görüşleri erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik kategorileri bakımından incelenmiştir.

Tablo 23. *Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevine Yönelik Kategoriler ve Kodlar*

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Zor verilmiş cevap	
	Kısmen zor verilmiş cevap	
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö _{1, 3, 4}
	Gerekli ve yetersiz	Ö ₂
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Prototip olmayan örnek	

Tablo 23’deki bulgular erişebilirlik kategorisi açısından incelendiğinde öğretmenlerin mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevine yönelik açıklamalarını kolayca yaptıkları görülmüştür. Öğretmenlerin görüşleri doğruluk kategorisi bakımından ele alındığında Ö₁, Ö₃ ve Ö₄’ün mutlak değer fonksiyonundaki türevi aranan noktanın sürekliliğini ve türevliliğini eksiksiz bir şekilde belirledikleri görülmüştür. Öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₄ türevi aranan noktanın önce kırılma noktası olduğunu belirleyip noktadaki sürekliliği inceledikten sonra fonksiyonu parçalı hale getirerek sağdan ve soldan türevi aramıştır. Ancak öğretmenlerden Ö₂ mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevini ararken türevi aranan noktanın kırılma noktası olup olmadığını ve aynı noktadaki sürekliliği incelemeyen doğrudan türev fonksiyonunu kullanıp o noktadaki sağdan ve soldan türevleri bulmaya çalışmıştır. Mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevini ararken bir noktadaki türev tanımına yönelik

formülü kullanmayan Ö₂ türev fonksiyonuna yönelik formülü kullanmıştır. Ö₂ sağdan ve soldan türev ararken türev fonksiyonunun formülünü yanlış kullanarak mutlak değer fonksiyonunun türevine dair yanlış görüş belirtmiştir. Mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevine yönelik görüşler zenginlik kategorisine göre değerlendirildiğinde öğretmenlerin, noktanın sürekliliğine ve türevliliğine yönelik kullandıkları cebirsel ve görsel argümanların lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2014; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Ünlü & Er, 2013;) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Kadioğlu & Kamali, 2005; Karadeniz, 2003; Thomas vd., 2011; Tosun, 2010) yer alan prototip argümanlar oldukları söylenebilir. Öte yandan öğretmenlerden Ö₃'ün $y = f(x) = |x - a|$ mutlak değer fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevini ararken yaptığı işlemler Şekil 14.'te gösterilmiştir.

Süreklilik

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x-a| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+a) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x-a| = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-a) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(a) = 0. \text{ Sürekli.}$$

Türev

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-a-0}{x-a} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x+a}{x-a} = -1.$$

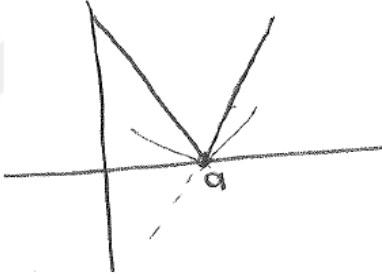
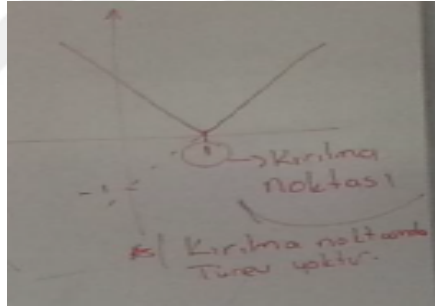
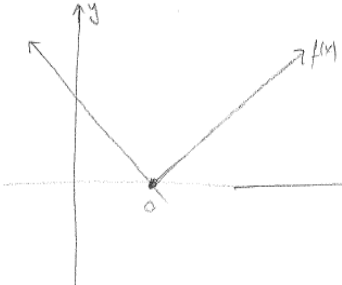
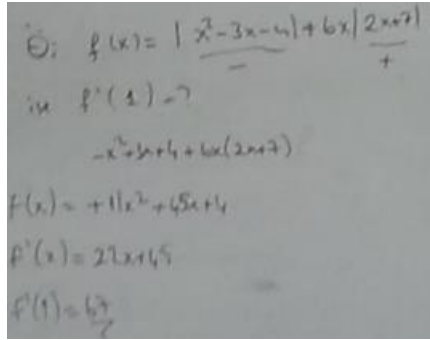
$f'(0^+) \neq f'(0^-)$ olduğundan $x=0$ noktasında türev yok.

Şekil 14. Ö₃'ün mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik işlemleri.

Yapılan görüşmelerde Ö₃ mutlak değer fonksiyonunda türevi aranacak noktanın önce kırılma noktası olup olmadığını tespit ettiğini dile getirmiştir. Ö₃ türevi aranacak nokta kırılma noktası değilse sürekliliğe bakmadan doğrudan bir noktadaki türev tanımına yönelik formülü kullanarak o noktadaki türevi aradığını belirtmiştir. Türevi aranacak nokta kırılma noktasıysa Ö₃ bu durumda kırılma noktasının sürekli olup olmadığını belirlediğini izah etmiştir. Ö₃'e göre fonksiyon kırılma noktasında sürekli değilse fonksiyonun aynı noktada türevli olmayacağı bu nedenle herhangi bir türev arama işlemine devam etmeye gerek olmadığı dile getirilmiştir. Tam tersi fonksiyon kırılma noktasında sürekliyse fonksiyonun o noktada sağdan ve soldan türevinin incelenmesi gerektiği Ö₃ tarafından ifade edilmiştir. Bu görüşmeden sonra Ö₃ mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik bir problem yöneltilmiştir.

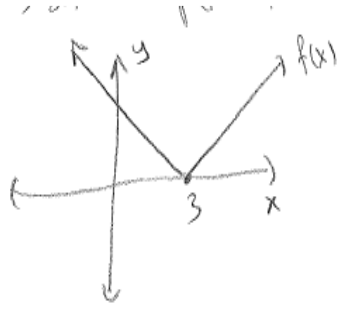
$y = f(x) = |x - a|$ mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasındaki ($x = a$) türevini ararken $\ddot{O}_3$ önce mutlak değer için 0 yapan değer türevi aranan değerle aynı olduğunu belirlemiştir. Bu sayede $\ddot{O}_3$ fonksiyonun kırılma noktasındaki sürekliliğini incelemeye devam etmiştir. $\ddot{O}_3$ kırılma noktasının sağından ve solundan bu noktaya yaklaştığında mutlak değer fonksiyonunun limit değerlerinin birbirine eşit olduğunu görmüştür. $\ddot{O}_3$ fonksiyonun kırılma noktasındaki değerinin de fonksiyonun sağdan ve soldan limit değerlerine eşit olduğunu belirlemiş ve fonksiyonun kırılma noktasında sürekli olduğunu göstermiştir. Daha sonra $\ddot{O}_3$ mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasındaki sağdan ve soldan türevlerinin birbirine eşit olmadığını tespit etmiştir. Buna göre $\ddot{O}_3$ fonksiyonun kırılma noktasında türevli olmadığını açıklamıştır. $\ddot{O}_3$ görüşmede dile getirdiği özellikleri problemde aynen uygulamıştır. Öte yandan öğretmenlerin mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden edinilen yansımalar Tablo 24’de gösterilmiştir.

Tablo 24. Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları

Öğretmenler	Görüşme Yansımaları	Gözlem Yansımaları
Ö ₁		
Ö ₂		

Tablo 24. (Devamı)

Ö₃



$$f(x) = |x^2 - 6x + 9| = |(x-3)^2| = (x-3)^2 \geq 0$$

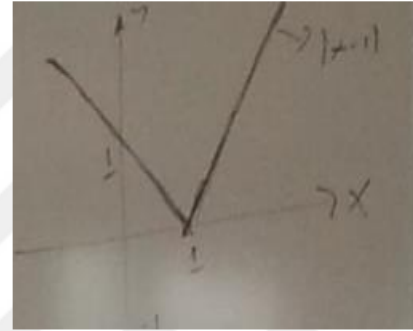
$$f(x) = x^2 - 6x + 9 \quad f'(3) = ?$$

$$f'(x) = 2x - 6 \quad f'(3) = 0$$

$$f(x) = |(x-a)^{2n}|, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$f'(a) = 0$$

Ö₄



Tablo 24'deki bulgulara göre öğretmenlerin mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik görüşmelerden ve ders içi gözlemlerden elde edilen verilerin birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Yapılan görüşmelerde Ö₁ mutlak değer fonksiyonunun türevi aranacak noktada kırılma noktası olduğunu dile getirerek kırılma noktasında birden fazla teğet çizileceğinden ve bu teğetlerin eğimleri birbirinden farklı olacağından bu noktada türevin olmadığını araştırmacıya açıklamıştır. Hatta Ö₁ mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktası olan $x=a$ noktasının grafiğini çizerek kırılma noktasına çizilen farklı teğetleri göstermiştir. Ö₁'in ders içi gözleminde ise Ö₁ araştırmacının kendisine yönelttiği problemin bir benzerini öğrencilerine sormuş ve kırılma noktasındaki türevin varlığı hakkında ne düşündüklerini öğrenmeye çalışmıştır. Bununla birlikte Ö₁ mutlak değer fonksiyonunun türevi konusuna giriş yaparken fonksiyonların parçalı hallerine dikkat çekerek mutlak değer fonksiyonunun türevini ararken fonksiyonun parçalı halde incelenmesini öğrencilerine önermiştir. Grafiks gösterimlerin yanı sıra Ö₁ cebirsel olarak da öğrencilerinin pratiklik kazanması bakımından mutlak değer fonksiyonunda mutlak değerini içini sıfır yapan değer türevi sorulduğunda mutlak değer içindeki ifadeye ait kuvvetin çok önemli olduğunu belirtmiştir. Ö₁ öğrencilerine mutlak değer içindeki ifadenin kuvvetinin çift olması durumunda türevin kırılma noktasında sıfıra eşit olacağını ifade etmiştir.

Ö₂ öğretmeniyle yapılan görüşmelerde Ö₂'nin türev-süreklilik ilişkisini anlatırken kullandığı grafiksel argümanları mutlak değer fonksiyonunun türevinde kullanmadığı görülmüştür. Ö₂ mutlak değer fonksiyonunun türevinin aranması sürecinde kırılma noktasındaki sürekliliği göz önünde bulundurmayarak doğrudan türev fonksiyonunu kullanıp kırılma noktasındaki türevi aramaya çalışmıştır. Ö₂ görüşme sürecinde mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik cebirsel pratik bilgileri araştırmacıya izah etmiştir. Buna göre Ö₂ mutlak değer fonksiyonu olarak verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin varlığı sorulduğunda türevi aranan noktanın mutlak değerli ifadenin içini sıfır yapıp yapmadığına dikkat etmiştir. Mutlak değer için sıfır yapan noktanın türevinin varlığının sorulması durumunda Ö₂ mutlak değerli ifadenin kuvvetinin çift olmasının fonksiyonun o noktadaki türevini sıfır yapacağını araştırmacıya belirtmiştir. Ö₂'nin ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₂'nin derste de mutlak değer fonksiyonunun türevinde grafiksel gösterimlerden yararlanmadığı söylenebilir. Ö₂ derste mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevinin daha pratik bir şekilde belirlenmesine yönelik ipuçlarını öğrencilerine sunarak konuyu anlatmaya çalışmıştır. Ö₂ mutlak değerli fonksiyonların mutlak değer içlerinde bulunan ifadelerin kuvvetlerinin çift ya da tek olmasına göre türevin varlığı hakkında öğrencilere görüş bildirmiştir.

Ö₃ öğretmeniyle yapılan görüşmelerde Ö₃ mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevine yönelik sırasıyla süreklilik ve türevlilik kriterlerini dikkate aldığını araştırmacıya açıklamıştır. Ö₃ her iki kriterde de türevi aranan noktanın kırılma noktası olması durumunda kırılma noktasının sağından ve solundan önce süreklilik sonra da türev arama işlemlerini gerçekleştirdiğini belirtmiştir. Ö₃ daha önce yapılan görüşmelerde türev-süreklilik ilişkisini anlatırken kullandığı mutlak değer fonksiyonuna yönelik grafiği mutlak değer fonksiyonu konusu görüşülürken de kullanmıştır. Ö₃ bu grafiksel gösterimlerden yararlanırken kırılma noktasının ne kadar önemli olduğunu araştırmacıya açıklamıştır. Ayrıca Ö₃ mutlak değer fonksiyonu olarak verilen bir fonksiyonun mutlak değerinin içindeki ifadeye dair kuvvetin de fonksiyonun türevinin varlığı hakkındaki yorumlarda önemli olduğunu dile getirmiştir. Ö₃ araştırmacıya mutlak değer şeklinde verilen bir fonksiyonda türevi aranan noktanın kırılma noktası olması durumunda bu kırılma noktasının tek katlı kök veya çift katlı kök olma durumuna göre fonksiyonun türevi hakkında yorum yapıldığını araştırmacıya açıklamıştır. Ö₃'ün ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₃ tarafından görüşmelerde mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik belirtilen görüşlerin derste de aynı şekilde ifade edildiği görülmüştür. Buna göre Ö₃ mutlak değer fonksiyonunda kritik nokta, sağdan-soldan süreklilik ve sağdan-soldan türev arama işlemleri üzerinde uygulamalar yaparak bu kavramların önemi hakkında öğrencilerine bilgi vermiştir. Ayrıca Ö₃ mutlak değer fonksiyonunun grafiğini de

çizerek grafik üzerinde süreklilik ve türevlenebilme kriterlerini öğrencilerine anlatmıştır. Bu sayede Ö₃'ün görüşmelerde ve ders içi gözlemlerde sergilediği davranışların birbiriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

Ö₄ öğretmeniyle yapılan görüşmelerde Ö₄'ün daha önce türev-süreklilik ilişkisinde kullandığı grafiksel gösterimleri, mutlak değer fonksiyonunun türevini ifade ederken de kullandığı görülmüştür. Ö₄ mutlak değer fonksiyonunda türevi aranan noktanın kırılma noktası olması halinde o noktada türev incelenirken fonksiyonun parçalı hale getirilerek türevin aranması işleminin daha kolay olacağını araştırmacıya ifade etmiştir. Ö₄ mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevinin belirlenmesi sürecinde sırasıyla süreklilik ve türevlenebilme kavramlarının önemli olduğundan bahsetmiştir. Ö₄'ün ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₄ görüşmelerde olduğu gibi derste de mutlak değer fonksiyonunu parçalı hale getirerek türev arama işleminde bulunmuştur. Ö₄ mutlak değer fonksiyonunun bir noktasındaki türevini araştırırken öğrencilerine önce süreklilik sonra ise türevlenebilme kriterlerini dikkate almaları gerektiğini ifade etmiştir.

Kapalı fonksiyonun türevi.

Tablo 25'de öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşleri Zazkis ve Leiken (2008)'in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşleri erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik kategorileri bakımından incelenmiştir.

Tablo 25. *Kapalı Fonksiyonunun Türevine Yönelik Kategoriler ve Kodlar*

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Zor verilmiş cevap	
	Kısmen zor verilmiş cevap	
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Gerekli ve yetersiz	
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Prototip olmayan örnek	

Tablo 25'deki bulgular erişebilirlik kategorisi açısından incelendiğinde öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşlerini zorlanmadan ve kolayca açıkladıkları söylenebilir. Görüşler doğruluk kategorisi bakımından incelendiğinde öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevinin tanımında bulunan kavramları yeterli ancak formülünde bulunan notasyonları kısmen doğru şekilde belirttikleri görülmüştür. Görüşler zenginlik kategorisi bakımından incelendiğinde öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşlerinin lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2014; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Ünlü & Er, 2013) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Aydın, 1974; Çoker, Özer & Taş, 1982; Demir, 2014; Hacısalihoğlu, Balcı & Gökdal, 1988; Kadioğlu & Kamali, 2005; Karadeniz, 2003) yer alan açıklamalarla benzerlik gösterdiği bu nedenle prototip açıklamalar olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşlerini daha ayrıntılı incelemek amacıyla, kapalı fonksiyonun türevini nasıl açıkladıkları ve bu fonksiyonun türevini ifade ederken hangi notasyonlardan yararlandıkları Tablo 26'da araştırmacının oluşturduğu kategori ve kodlara göre incelenmiştir.

Tablo 26. *Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Açıklamalar ile Kullanılan Notasyonlar*

Öğretmenler	Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Görüşler	Kullanılan Notasyonlar
Ö ₁	<i>x değişkeni bağımsız, y fonksiyonu da x'e bağlı bir değişken olduğu durumlarda kullanılır. x ve y'nin kısmi türevlerinin toplamı 0 olmalıdır.</i>	$F(x,y)=0$ $F'(x,y)=\frac{-F_x}{F_y}$
Ö ₂	<i>Hem x'e hem de y'ye bağlı değişkeni bulunan fonksiyonların türevini almada yararlanılır. Kapalı fonksiyonlarda x ve y değişkenlerinin birbirinden ayrılması zordur.</i>	$F(x,y)=0$ $F'(x,y)=\frac{-F_x}{F_y}$
Ö ₃	<i>x ve y'nin iç içe girdiği fonksiyonda y ifadesinin kolayca yalnız bırakılamadığı durumlarda kullanılır. Bu tür durumlarda x ve y'nin kısmi türevleri toplamı 0'a eşitlenir.</i>	$F(x,y)=0$ $F'(x,y)=\frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$
Ö ₄	<i>y'nin x cinsinden açıkça çözüme kavuşturulamadığı eşitlikler kapalı fonksiyondur. x'e göre kısmi türevin y'ye göre kısmi türeve oranının (-) ile çarpımı kapalı fonksiyonun türevidir</i>	$F(x,y)=0$ $F'(x,y)=\frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

Tablo 26'daki bulgulara göre öğretmenlerden Ö₁'in kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşleri incelendiğinde Ö₁ hem x değişkenine hem de y fonksiyonuna bağlı kısmi türevlerden yararlanarak kapalı fonksiyonun türevinin arandığını belirtmiştir. Ö₁ kapalı fonksiyonun türevini ararken işlemi kolay gerçekleştirebilmek adına x ve y 'ye bağlı tüm ifadeleri eşitliğin bir tarafında toplayıp ifadeyi sıfıra eşitledikten sonra kapalı fonksiyonun türevine yönelik formülün uygulanabileceğinden bahsetmiştir. Ö₁'in kapalı fonksiyonun türevine yönelik notasyonları doğru kullanmadığı söylenebilir. Öğretmenlerden Ö₂'nin kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşleri incelendiğinde Ö₂ x değişkeni ile y fonksiyonunun birbirinden ayrılmasının güç olduğu durumlarda kapalı fonksiyonun türevinden yararlanıldığından bahsetmiştir. Ö₂ kapalı fonksiyonun türevini ararken önce fonksiyondaki tüm ifadeleri eşitliğin bir tarafına alıp tüm ifadeyi sıfıra eşitlemekten bahsetmiştir. Bu işlemden sonra kapalı fonksiyonun türevi için x 'e göre türev alıp (y sabit) daha sonra da y 'ye göre türev alıp (x sabit) bu türevlerin oranını ve oranın negatifle çarpılması gerektiğini belirtmiştir. Ö₂'nin kapalı fonksiyonun türevini açıklarken de notasyonları yanlış kullandığı söylenebilir. Öğretmenlerden Ö₃'ün kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşleri incelendiğinde Ö₃ fonksiyonda y 'nin eşitliğin bir tarafında yalnız başına bırakılmasının güç olduğu yani fonksiyonun açık bir şekilde yazılamadığı durumlarda kapalı şekilde türev arama işleminin yapıldığından bahsetmiştir. Ö₃ kapalı fonksiyonun türevi aranırken x 'e göre ve y 'ye göre kısmi türevlerin birbirine oranından ve bu oranın $(-)$ ile çarpımından bahsetmiştir. Ö₃ hatta kapalı fonksiyonun türevinin formülünde bulunan eksi işaretinin nereden geldiğini de araştırmacıya şu şekilde ispatlamıştır:

$c \in R$ ve $f(x,y) = c$ olmak üzere $f(x,y)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsunlar. Bu durumda $f(x,y) = c$ ifadesinin her iki tarafın diferansiyelini alalım. Eşitliğin sağındaki c 'nin türevi sıfır olduğundan diferansiyeli de 0'a eşit olur. Eşitliğin sol tarafındaki iki değişkene bağlı diferansiyel alınmalıdır. Bu durumda x ve y 'ye bağlı diferansiyeller:

$$d[(f(x,y))] = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx = -\frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \rightarrow y' = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$$

Ö₃ kapalı fonksiyonun türevini ararken formülde yer alan notasyonları yanlış bir şekilde yazmıştır. Öğretmenlerden Ö₄'ün kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşleri

incelendiğinde $\ddot{O}_4$ kapalı fonksiyonun türevine yönelik üç farklı türev arama yönteminden bahsetmiştir. Buna göre birinci yöntemde $\ddot{O}_4$ x ve y 'ye bağlı fonksiyonun kapalı formdan açık forma geçirilip yani $y = f(x)$ şekline dönüştürülüp türev arama işleminin gerçekleştirilebileceğini belirtmiştir. Eğer y ifadesini fonksiyonda eşitliğin bir tarafında yalnız başına bırakmak zor ise ikinci yöntemden yararlanılır. İkinci yöntemde $\ddot{O}_4$, türevi aranacak ifade verildiğinde y fonksiyonunun türevi aranırken “ y' “ ifadesinin kullanılması gerektiğini ve sonra “ y' “ ifadesinin türevi aranacak genel ifadede yalnız bırakılarak sonuca ulaşılabileceğinden bahsetmiştir. Üçüncü ve son çözüm yönteminde ise $\ddot{O}_4$ ifadede x 'e ve y 'ye göre kısmi türevlerin alınıp bu türevlerin birbirine oranlanmasından ve bu oranın da eksi ile çarpılmasından bahsetmiştir. $\ddot{O}_4$ üçüncü çözüm yöntemine göre türevin aranmasında x 'e göre türev alınırken y fonksiyonunun bir sabit olduğunu, y 'ye göre türev alınırken de x değişkeninin sabit olduğunu dile getirmiştir. $\ddot{O}_4$ kapalı fonksiyonun türevini ararken de formülde yer alan notasyonları yanlış yazmıştır. Buna göre öğretmenlerin tümünün kapalı fonksiyonun türevine yönelik açıklamalarının eksiksiz ve yerinde olduğu ancak notasyon kullanımının yanlış olduğu söylenebilir. Öte yandan öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik problem kurma ve çözme becerilerini derinlemesine incelemek amacıyla onlara kapalı fonksiyonun türevine yönelik bir problem kurup bu problemi çözmeleri istenmiştir. Tablo 27'de öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik kurdukları ve çözümünü yaptıkları problemler Yıldız ve Özdemir (2015) ile Baki (2008)'nin kategorilerine göre değerlendirilmiştir.

Tablo 27. *Kapalı Fonksiyonun Türevine İlişkin Kurulan ve Çözülen Problemlere Yönelik Kategoriler*

Değerlendirme Kriterleri	Alt Kriterler	Ölçütler		
		Evet	Kısmen	Hayır
Matematiksellik	Matematiksel kavramların kullanımı	$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$		
	Matematiksel sembollerin kullanılması	$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$		
	Metin-görsel aktarımının sağlanması			$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$
Veri Niteliği	Verinin mantıksal uygunluğu	$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$		
	Verilerle ulaşabilecek sonucun anlamlılığı	$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$		
Dil Bilgisi	Sorunun dil bilgisine uygunluğu		$\ddot{O}_2$	$\ddot{O}_{1, 3, 4}$
	Soruda anlatım bozukluğunun varlığı			$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$
	Sorudaki noktalama işaretlerinin kullanımı		$\ddot{O}_2$	$\ddot{O}_{1, 3, 4}$
Düzeye Uygunluk	Sorunun kazanımlara, içeriğe ve zorluk derecesine uygunluğu	$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$		

Tablo 27. (Devamı)

Yönerge ve Veri Miktarı	Soruda yönergenin varlığı		Ö _{1, 2, 3, 4}
	Yönergedeki adımların çözüme uygunluğu		Ö _{1, 2, 3, 4}
	Çözüm için gerekli verinin miktarı	Ö _{1, 2, 3, 4}	
Çözülebilirlik	Kurulan problemin bireyi istenilen sonuca ulaştırması	Ö _{1, 2, 3, 4}	
	Kurulan problemin öğrenme ortamlarındaki kullanılma durumu	Ö _{1, 2, 3, 4}	
Kullanılabilirlik			
Plan Uygulama	Problemin çözümünün yapılması	Ö _{1, 2, 3, 4}	
Değerlendirme	Kurulan problemin çözümünün doğrulanması	Ö ₄	Ö _{1, 2, 3}

Tablo 27'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı kapalı fonksiyonun türevine yönelik kurdukları problemlerde matematiksel ifadeler ile gösterimlerden yararlanmıştır. Ancak öğretmenlerin kurdukları problemler daha çok sözel ve sembolik tarzda olduğundan metinsel ve görsel veriler arasındaki aktarıma herhangi bir şekilde ihtiyaç duyulmadığı söylenebilir. Öğretmenlerin tümünün hazırladığı problemlerde veriler matematiksel ve mantıksal bakımdan öğrencilerin öğrenme düzeylerine uygundur. Öğretmenlerden Ö₂ dışında hiçbir öğretmen kapalı fonksiyonun türevine yönelik dil bilgisi kurallarına uygun bir problem kuramamıştır. Ö₂ öğretmenin de kurduğu problemin dil bilgisi kuralları bakımından kısmen uygun bir problem olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin kurdukları problemlerde dikkat çeken bir diğer nokta problemlerin tamamında yönergelerin olmamasıdır. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde neden yönerge kullanmadıkları öğretmenlere sorulduğunda öğretmenlerin verdikleri cevaplar en çok müfredatta da yönergeli problemlerin fazla olmadığı ve üniversite sınavlarında bu tarz soruların yer almadığı şeklinde olmuştur. Öğretmenler ayrıca yönergeli soruların daha çok proje görevlerinde öğrencilere verilen sorular olduğunu dile getirmiştir. Öğretmenlerin tamamının kurdukları problemler istenilen sonuca ulaştırması bakımından ideal ve derste kullanılabilir problemlerdir. Öğretmenlerin tamamı kurdukları problemleri doğru çözmüş olup sadece Ö₄ problem çözümünde doğrulama yapmıştır. Ö₄ kurduğu problemde $F(x, y) = x \cdot y + x - 1$ ifadesini kullanarak önce y' 'yi $y = \frac{1-x}{x}$ şekline dönüştürüp bu ifadenin türevini bulmuştur. Sonra aynı ifadedeki türevi $1 \cdot y + y' \cdot x + 1 = 0$ şeklinde işlem yaparak y' ifadesini yalnız bırakıp aynı sonucu bulmuş ve çözümün sağlamasını yaparak sonucu doğrulamıştır. Öte yandan öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden edinilen yansımalar Tablo 28'de sunulmuştur.

Tablo 28. Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları

Öğretmenler	Görüşme Yansımaları	Gözlem Yansımaları
Ö ₁	$f(x,y) = 3x^2 + 5yx + 6y^2 + 3 = 0$ $f'(x,y) = - \frac{6x+5y}{5x+12y}$	$f(x,y) = 5xy + y^2 - 7x^2 = 0$ $f'(x,y) = - \frac{5y-14x}{5x+2y}$
Ö ₂	$xy^2 - 3xy + 5 = 0 \quad f'(x,y) = ?$ $-\frac{f_x}{f_y} = - \frac{y^2 - 3y}{2yx - 3x}$	$3xy - 5x^2y^2 + 7 = 0$ $-\frac{f_x}{f_y} = - \frac{3y - 10xy^2}{3x - 10xy^2}$
Ö ₃	$f(x,y) = 2x^2 - 3xy + xy^2 + 5$ $f'(x,y) = \frac{-(4x - 3y + y^2)}{-3x + 2xy}$	$x^2y - y^2x + 2xy = 0$ $f'(x,y) = - \frac{2xy - y^2 + 2y}{x^2 - 2xy + 2x}$
Ö ₄	$f(x,y) = x^2 + y^2$ $-\frac{f_x}{f_y} = - \frac{2x}{2y}$	$x^2 + x^2 - y^2 = 0 \quad (0,1)$ $-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = - \frac{y + \frac{y}{xy}}{x + \frac{x}{xy}} = - \frac{y(1 + \frac{1}{xy})}{x(1 + \frac{1}{xy})}$

Tablo 28'deki bulgulara göre öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşmelerden ve ders içi gözlemlerden elde edilen verilerin birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Öğretmenler görüşmede yanlış kullandıkları notasyonları derste de kullanmıştır. Yapılan görüşmelerde Ö₁ kapalı fonksiyonların türevini ararken $F'(x,y) = \frac{-F_x}{F_y}$ formülünden yararlandığını dile getirmiştir. Ö₁ bu fonksiyonda x 'e ve y 'ye göre türev olarak oranlama

yapmanın daha kolay olduğunu dile getirmiştir. Ö₁ kapalı fonksiyonun türevini alırken y' ifadesinden yararlanıp y' ifadesini yalnız bırakarak türevi elde etmeye yönelik işlemlerde öğrencilerin hatalar yaptığını belirtmiştir. Ö₁'in ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₁ derste de görüşmelerde olduğu gibi kapalı fonksiyonun türevini ararken $F'(x,y)=\frac{-F_x}{F_y}$ formülünden yararlanmıştır. Ö₁ derste kapalı fonksiyonun türevini anlatırken x 'e göre türev alındığı sırada y ifadesinin bir sabit gibi düşünülmesi gerektiğinden, y 'ye göre türev alındığı sırada ise x 'in bir sabit gibi düşünülmesi gerektiğinden bahsetmiştir. Yapılan görüşmelerde Ö₂ kapalı fonksiyonun türevini ararken $F'(x,y)=\frac{-F_x}{F_y}$ formülünden yararlandığını dile getirmiştir. Ö₂ kapalı fonksiyonun türevini x ve y 'li ifadelerin birbirinden ayrılmasının zor olduğu zamanlarda kullanıldığından bahsetmiştir. Ö₂'ye göre fonksiyon kapalı halden açık hale getirilemiyorsa $F'(x,y)=\frac{-F_x}{F_y}$ formülü çözüm için en uygun formüldür. Ö₂'nin ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₂ görüşmede olduğu gibi derste de kapalı fonksiyonun türevini ararken $F'(x,y)=\frac{-F_x}{F_y}$ formülünden yararlanmıştır. Ö₂ öğrencilerine örnekler çözerken de sadece bu formülden yararlanarak soruları çözmüştür.

Yapılan görüşmelerde Ö₃ kapalı fonksiyonun türevini ararken $F'(x,y)=\frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ formülünden yararlandığını araştırmacıya belirtmiştir. Ö₃ x değişkeni ile y fonksiyonunun iç içe geçtiği durumlarda türevi ararken hem x 'e bağlı hem de y 'ye bağlı kısmi türevlerden hareketle türevin aranabileceğinden bahsetmiştir. Ö₃ kapalı fonksiyonun türevini ararken kullandığı formülde x 'e göre türev alındığında y ifadesinin bir sabit, y 'ye göre türev alındığında ise x ifadesinin bir sabit olduğunu araştırmacıya açıklamıştır. Ö₃'ün ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₃ görüşmelerde kapalı fonksiyonun türevini ararken kullandığı formülü derste konu anlatımında ve soru çözümünde kullanmıştır. Ö₃ kapalı fonksiyonun türevinin en çok hataların yapıldığı türevler arasında yer aldığını öğrencilerine hatırlatarak kapalı fonksiyonun türevini ararken çok dikkatli olmaları gerektiğini ifade etmiştir. Yapılan görüşmelerde Ö₄ kapalı fonksiyonun türevini ararken $F'(x,y)=\frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ formülünden yararlandığını araştırmacıya açıklamıştır. Ö₄ kapalı fonksiyonun türevini aramada farklı çözüm yollarından yararlanılabileceğinden bahsetmiştir. Buna göre Ö₄ ilk planda fonksiyonda y ifadesini yalnız bıraktıktan sonra türevin alınabileceğinden bahsetmiştir. Eğer bu mümkün değilse x 'e ve y 'ye göre kısmi türevlerin alınıp oranlama yapılarak türev arama işleminin gerçekleştirilebileceğini araştırmacıya belirtmiştir. Ö₄'ün ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₄ görüşme sürecinde ifade ettiği gibi derste soru çözerken görüşmede kullandığı formülü

kullanmıştır. Ö₄ ayrıca kapalı fonksiyonun türevine yönelik soru çözerken farklı çözüm yollarını da öğrencilerine göstermiştir.

Türevin geometrik anlamının izahı ve türev-eğim-teğet ilişkisi.

Tablo 29’da öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahına yönelik görüşleri Zazkis ve Leiken (2008)’in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahına yönelik görüşleri erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik kategorileri bakımından incelenmiştir.

Tablo 29. *Türevin Geometrik Anlamının İzahına Yönelik Kategoriler ve Kodlar*

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö _{1, 3}
	Zor verilmiş cevap	
	Kısmen zor verilmiş cevap	Ö _{2, 4}
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö ₃
	Gerekli ve yetersiz	Ö _{1, 2, 4}
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Prototip olmayan örnek	

Tablo 29’daki bulgular erişebilirlik kategorisi açısından incelendiğinde Ö₁ ve Ö₃ öğretmenlerinin türevin geometrik anlamının izahına yönelik görüşlerini zorlanmadan ve rahat bir şekilde yaptıkları görülmüştür. Ancak öğretmenlerden Ö₂ ve Ö₄ türevin geometrik anlamını izah ederken biraz duraksayıp düşündükten sonra görüşlerini belirtmeye devam etmiştir. Ö₂ ve Ö₄ öğretmenleri türevin geometrik anlamını izah ederken bir noktadaki türev tanımına yönelik formülün nasıl elde edildiği hususunda ciddi bir şekilde zorlanmıştır. Öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahına yönelik görüşleri doğruluk kategorisi bakımından ele alındığında öğretmenlerden sadece Ö₃’ün türevin geometrik anlamına yönelik görüşlerinin eksiksiz olduğu söylenebilir. Ancak diğer öğretmenlerin türevin geometrik anlamını izah ederken bazı özelliklerden bahsetmediklerini dolayısıyla türevin geometrik anlamını kopuk bir şekilde araştırmacıya açıkladıkları söylenebilir. Öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahına yönelik görüşleri zenginlik kategorisi bakımından ele alındığında öğretmenlerin türevin geometrik anlamını izah ederken kullandıkları cebirsel ve grafiksel

gösterimlerin lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2014; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Keskin, 2017) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Balcı, 1999; Edwards & Penney, 2001; Hacısalihoğlu vd., 1988; Kadakal, 2010; Lindelöf & Ullrich, 1961; San, 1975; Thomas vd., 2011) yer alan prototip gösterimler oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahına yönelik görüşlerini belirtirken kullandıkları gösterimleri daha ayrıntılı incelemek amacıyla, türevin geometrik anlamının izahında da hangi özellikleri dikkate aldıkları Tablo 30'da araştırmacının oluşturduğu kategori ve kodlara göre incelenmiştir.

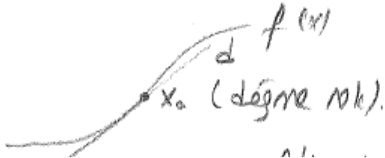
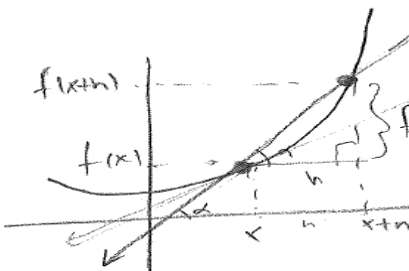
Tablo 30. *Türevin Geometrik Anlamının İzahındaki Özelliklere Yönelik Kategoriler ve Kodlar*

Kategoriler	Ölçütler			Destekleyici İfadeler
	Evet	Kısmen	Hayır	
Belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon eğrisinin çizilmesi	Ö _{1, 2, 3, 4}			<i>Belirli bir aralıkta tanımlı bir $g(x)$ eğrisi düşünelim. Bu eğri (a, b) aralığında tanımlı. Bu eğriyi koordinat sistemi üzerinde gösterelim (Ö₁)</i>
Eğri üzerinde birisi sabit diğeri hareketli iki noktanın belirlenmesi	Ö ₃		Ö _{1, 2, 4}	<i>Eğri üzerinde bir x noktası ele alalım. Bu noktanın değeri de $f(x)$ olur. Onu da gösterelim eğri üzerinde. x noktasından h kadar uzaklaştığımızı düşünelim. Yani h kadar bir artım verelim. Bu durumda yeni nokta $(x + h)$ olur. Bu yeni noktanın görüntüsü de $f(x + h)$ bulunur. Bu nokta hareket edecek, x noktası sabit duracak (Ö₃)</i>
Hareketli noktanın yavaş yavaş sabit noktaya doğru kaydırılması	Ö ₃		Ö _{1, 2, 4}	<i>Hareketli nokta olan $(x + h, f(x + h))$ noktasını $(x, f(x))$ noktasına doğru yavaşça yaklaşıtırim. Bu şekilde eğri üzerinde nasıl bir yer değiştirme var onu görebiliriz (Ö₃)</i>
Eğri üzerindeki kirişin eğriye teğet olduğunun açıklanması	Ö ₃		Ö _{1, 2, 4}	<i>İlk önce kiriş olarak gösterdiğimiz doğruları görebiliyor musun? Gittikçe değişiyorlar. Eğimler de değişiyor. "dt" kiriş doğrusu en sonunda dt teğet doğrusuna dönüşüyor (Ö₃)</i>
Türev-Eğim ilişkisinin cebirsel formulla tanımlanması	Ö _{1, 2, 3, 4}			<i>Eğri üzerinde görüntü kümesindeki değerler arasındaki farkın, tanım kümesindeki değerlerin farkına oranlayalım. Çünkü burada eğim söz konusudur. Bu durumda türev-eğim ilişkisi şu şekilde ifade edilebilir (Ö₃):</i> $\tan \alpha = m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
Türev-Eğim arasındaki ilişkinin sözel bir şekilde belirtilmesi	Ö ₃	Ö ₁	Ö _{2, 4}	<i>Eğri üzerindeki bir noktanın türevi, eğriye o noktada çizilen teğetin eğimini verecektir yani x_0 noktasındaki türev, eğriye bu noktada çizilen teğetin eğimini yani m_T yi verir (Ö₃)</i>

Tablo 30'daki bulgulara göre öğretmenlerden sadece Ö₃'ün türevin geometrik anlamını eksiksiz bir şekilde izah ettiği görülmüştür. Ö₃ türevin geometrik anlamında kullanılan cebirsel gösterimler ile bu gösterimlerdeki kavramlar arasındaki ilişkiyi doğru bir şekilde açıklamıştır. Ö₃'ün türevin çoklu temsilleri arasındaki ilişkileri doğru bir şekilde ifade edebildiği söylenebilir. Ö₃ türevin geometrik anlamını izah ederken daha öncesinde türevin formel tanımında kullanmadığı türev fonksiyonundan yararlanarak türevin geometrik anlamı

hakkında görüşte bulunmuştur. Ö₃ dışındaki öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahına yönelik görüşleri incelendiğinde bu görüşlerde eksiklikler olduğu göze çarpmıştır. Ö₁, Ö₂ ve Ö₄ öğretmenleri türevin geometrik anlamının izahına yönelik belirli bir aralıkta tanımlı olan bir $f(x)$ eğrisini çizmelerine rağmen bu eğri üzerinde birisi sabit diğeri hareketli iki nokta belirleyememiştir. Bu öğretmenler doğrudan sabit noktadaki teğet doğrusunu çizerek türev-eğim arasındaki ilişkiyi cebirsel gösterimler yardımıyla belirtmiştir. Ancak öğretmenler cebirsel argümanlarla belirttikleri türev-eğim ilişkisini sözel olarak açıklamakta zorluk yaşamıştır. Buradan hareketle Ö₁, Ö₂ ve Ö₄'ün türevin geometrik anlamındaki çoklu gösterimlere yönelik bilgilerinde eksiklikler olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahına yönelik yaptıkları gösterimler Tablo 31'de verilmiştir.

Tablo 31. Türevin Geometrik Anlamının İzahındaki Gösterimlere Yönelik Kategoriler ve Kodlar

Öğretmenler	Türev-Teğet İlişisine Yönelik Grafiksel Gösterim	Türev-Eğim İlişisine Yönelik Cebirsel Gösterim
Ö ₁		$m_T = f'(x_0)_{//} = \tan \alpha$
Ö ₂		$m_d = f'(x_0)$
Ö ₃		$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m_t$ $\tan \alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
Ö ₄		$m = \tan \alpha \text{ o.s.c}$ $m = f'(x_0) \text{ dır}$

Öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahında kullandıkları gösterimler incelendiğinde bu gösterimlerin grafiksel ve cebirsel gösterimlerden oluştuğu söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı türev-teğet ilişkisini göstermek için grafiksel argümanlardan yararlanırken türev-eğim ilişkisini ifade ederken ise cebirsel argümanlar kullanmıştır. $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün türev-teğet ilişkisinde yararlandıkları grafiksel argümanlar birbirine benzer iken $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün türev-eğim ilişkisinde kullandıkları cebirsel argümanların birbirine benzer olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı teğet doğrusunun eğimini cebirsel şekilde ifade ederken “m” ve “tan α ” sembollerini kullanmıştır. Öte yandan öğretmenlerin teğet kavramına yönelik görüşlerini derinlemesine belirlemek amacıyla öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen veriler Tablo 32’de verilmiştir.

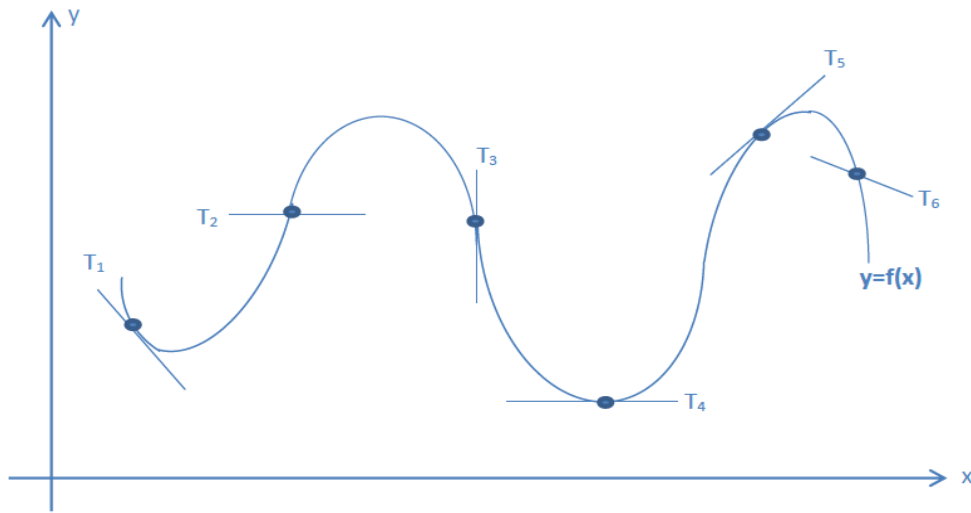
Tablo 32. *Teğet Kavramına Yönelik Öğretmen Görüşleri*

Öğretmenler	Teğet Kavramına Yönelik Görüşler
$\ddot{O}_1$	<i>Teğet; eğriye bir noktada değen doğrudur. Eğriyle teğet doğrusunun teğet noktasında sadece bir tane ortak noktası vardır</i>
$\ddot{O}_2$	<i>Bir doğrunun teğet doğrusu olması için doğrunun eğriyi tek bir noktada kesmesi gerekir</i>
$\ddot{O}_3$	<i>Eğriyi sadece bir noktada kesen doğru teğet doğrusudur. Yani teğet doğrusu eğriyi tek bir noktada kesip geçecektir</i>
$\ddot{O}_4$	<i>Teğet, fonksiyona değme noktasıdır. Teğet, fonksiyon grafiği üzerindeki herhangi bir noktada bir ortak noktası olan doğrudur</i>

Tablo 32’deki bulgulara göre öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ tarafından teğet kavramına yönelik belirtilen görüşlerin teğetin tanımına uyan ancak eksik açıklamalar olduğu söylenebilir. $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_3$ tarafından teğet kavramına yönelik yapılan açıklamaların da aynı diğer öğretmenlerde olduğu gibi teğetin tanımına uyan ancak eksik açıklamalar oldukları ifade edilebilir. $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ teğet kavramına yönelik açıklamalarında “değme” kavramını kullanırken $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_3$ teğet kavramına yönelik açıklamalarında “kesme” kavramını kullanmıştır. Teğet doğrusu, fonksiyon eğrisini bir noktada kesen değil de o noktada fonksiyon eğrisine değen bir doğru olarak tanımlanır (Açıkyıldız, 2013). Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere teğet doğrusu ile fonksiyon eğrisi arasındaki temas değme hareketiyle ilişkilendirilmiştir. Ancak teğet doğrusunun eğriyi kestiği durumlar da söz konusudur. Örneğin $y = \tan x$ eğrisine (0,0) noktasında çizilen teğet, eğriyi birden fazla noktada kesmektedir. Bu nedenle teğet

doğrusunun eğriye değmesi, eğriyi sadece bir noktada kesmesi ya da eğriyi birden fazla noktada kesmesi söz konusu olabilir.

Öğretmenlerin teğet kavramına yönelik eksik görüşleri incelendiğinde $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_3$ öğretmenleri tarafından açıklamaların dikkat çektiği görülmektedir. $\ddot{O}_2$ 'nin teğet kavramına yönelik yaptığı açıklamada $\ddot{O}_2$ bir doğrunun teğet doğrusu olabilmesi için bu doğrunun fonksiyon eğrisini sadece bir noktada kesmesi gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca $\ddot{O}_2$ teğet doğrusunun, kestiği fonksiyon eğrisiyle başka bir ortak noktasının bulunmayacağına dair bir açıklamada bulunmuştur. $\ddot{O}_2$ tarafından yapılan ilk açıklamaya benzer bir açıklama da $\ddot{O}_3$ tarafından yapılmıştır. $\ddot{O}_3$ teğet doğrusunu, fonksiyon eğrisini sadece tek bir noktada keserek devam eden bir doğru şeklinde tanımlamıştır. Hâlbuki fonksiyon eğrisine bir noktada değen ancak başka noktada ya da noktalarda fonksiyon eğrisini kesen doğrular da teğet doğrusu şeklinde ifade edilmektedir (Thomas vd., 2005). $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_3$ 'ün teğet kavramına yönelik görüşlerinden hareketle bir fonksiyon eğrisini sadece tek bir noktada kesen her doğrunun teğet doğrusu olabileceği şeklinde bir genel yargıda bulunduğu söylenebilir. $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_3$ 'ün yaptıkları bu açıklamaların teğet kavramı özelinde değerlendirilecek ancak eksik bulunan açıklamalar oldukları söylenebilir. Öte yandan bir $f(x)$ eğrisine çizilen doğrulardan hangilerinin teğet doğrusu olduklarını belirlemek amacıyla Şekil 15.'teki problem öğretmenlere sorulmuştur.



Şekil 15. Eğri üzerindeki doğruların teğet doğrusu olma durumlarına yönelik problem.

Şekil 15'te öğretmenlere yöneltilen problemde $f(x)$ eğrisi üzerindeki bazı noktalardan eğriye çizilen doğruların neden teğet doğruları olup olmadıklarının öğretmenler tarafından açıklanması beklenmiştir. Öğretmenlerin probleme verdikleri cevaplar araştırmacının oluşturduğu kategorilere göre Tablo 33'de gösterilmiştir.

Tablo 33. Eğri Üzerindeki Doğruların Teğet Olmasına Yönelik Kategoriler ve Kodlar

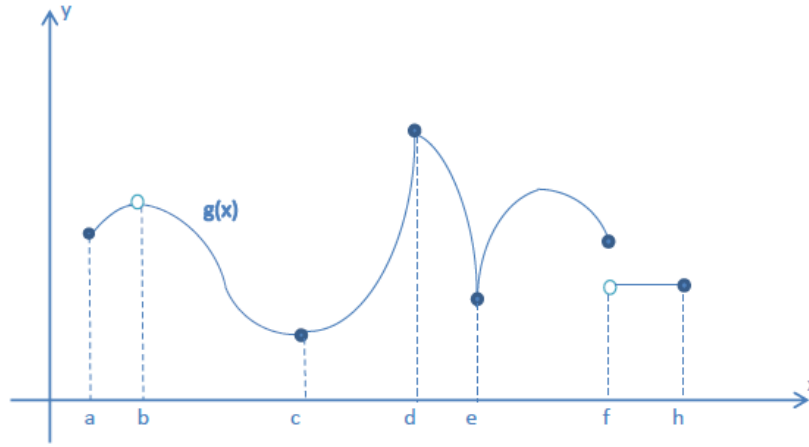
Doğrular	Doğru Eğriye Teğettir	Doğru Eğriye Teğet Değildir	Doğrunun Teğetliğine Yönelik Kesinlik Yoktur	Destekleyici İfadeler
“T ₁ ”	Ö _{1, 2, 3, 4}			<i>T₁ doğrusu bu noktada eğriye teğettir. Doğrunun teğet olması için eğriye değip geçmesi gerekir. Ayrıca bir noktadaki teğet başka bir noktada eğriyi kesebilir (Ö₃)</i>
“T ₂ ”		Ö _{1, 2, 3, 4}		<i>T₂ doğrusu burada eğriyi birden fazla noktada kestiği için teğet doğrusu olmaz (Ö₂)</i> <i>T₃ doğrusu eğriyi sadece bir noktada kestiği için görünürde teğet doğrusu olabilir (Ö₂)</i> <i>T₃ doğrusu eğriyi kestiğinden eğriye değmediğinden dolayı bu noktada teğet doğrusu olmaz (Ö₃)</i>
“T ₃ ”	Ö ₂	Ö ₃	Ö _{1, 4}	<i>Eğimler bir yandan o noktadaki değeri vermiyorlar. Bu nedenle teğet olamazlar. Ancak diğer yandan o nokta büküm noktasıysa büküm noktasından eğriye teğet çizilebilir. Kararsız kaldım (Ö₁)</i> <i>Bu nokta dönüm noktası değilse teğet olmaz. Ancak dönüm noktasıysa teğettir denilir. Bu nokta için kesin bir şey söylenemez (Ö₄)</i>
“T ₄ ”	Ö _{1, 2, 3, 4}			<i>Bu noktadan çizilen doğru eğriye bir noktada değdiği için T₄ teğettir (Ö₁)</i>
“T ₅ ”	Ö _{1, 2, 3, 4}			<i>Doğruyla eğrinin o noktada sadece bir ortak noktası olduğundan teğettir (Ö₄)</i>
“T ₆ ”		Ö _{1, 2, 3, 4}		<i>Çizilen doğru eğriye değmediğinden yani eğriyi kestiğinden dolayı bu noktada teğet doğrusu olamaz (Ö₁)</i>

Tablo 33’deki bulgulara göre öğretmenler T₁, T₂, T₄, T₅ ve T₆ doğrularının eğriye teğet olup olmamalarına yönelik aynı yönde karar vermiştir. Öğretmenlerin sadece T₃ doğrusunun eğriye teğet olması noktasında farklı yönde karar verdikleri söylenebilir. Ancak öğretmenlerin bir doğrunun eğriye teğet olması ya da olmaması yönünde verdikleri ortak kararlar altındaki nedenlerin farklılıklar arz ettiği söylenebilir. T₁ doğrusu için bütün öğretmenler doğrunun eğriye o noktada teğet olduğunu belirtmiştir. Ancak Ö₂ diğer öğretmenlerden farklı olarak doğrunun eğriyi o noktada kesmesinden dolayı teğet doğrusu olduğunu dile getirmiştir. Diğer öğretmenler ise doğrunun eğriyi o noktada kesmesinden değil de eğriye o noktada değmesinden dolayı teğet doğrusu olduğunu belirtmiştir. Burada dikkat çeken bir başka durum ise Ö₃ ile yapılan görüşmelerde Ö₃’ün teğet kavramına yönelik bir doğrunun eğriyi bir noktada kesmesi şeklindeki açıklamasıdır. Ö₃ teğet kavramına yönelik değme ifadesini kullanmamış ama kesme ifadesi üzerinde durmuştur. Ancak bu problemde Ö₃ teğet kavramına yönelik görüşünde değişiklikte bulunmuştur. Hatta bu probleme yönelik Ö₃ ile yapılan görüşmede Ö₃ teğet doğrusunun eğriye değdiği nokta dışında başka noktalarda doğruyu kesebileceğinden bahsetmiştir. Ö₃ ilk planda teğet kavramına yönelik düşüncelerini yeterince ifade edememiş olabilir. Diğer yandan Ö₃ teğet kavramına özelinde kullanması gereken matematiksel dile yeterince hâkim olmamış da olabilir.

T₂ doğrusu için bütün öğretmenler doğrunun eğriye teğet olmadığını belirtmiştir. Ancak Ö₂ diğer öğretmenlerden farklı olarak doğrunun eğriyi birden fazla noktada keseceğinden dolayı teğet olmayacağını dile getirmiştir. Diğer üç öğretmen ise doğrunun eğriye değmediğinden yani eğriyi kestiğinden dolayı teğet doğrusu olmayacağı görüşündedir. T₃ doğrusu için öğretmenlerden Ö₂ doğrunun eğriyi kestiğinden dolayı teğet olduğunu belirtirken tam aksine Ö₃ doğrunun eğriye değmediğinden dolayı teğet olmadığını ifade etmiştir. Öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₄ ise doğrunun eğriye değme durumunu dikkate almayarak duruma farklı bir açıdan yaklaşmıştır. Bu öğretmenler belirtilen noktada ikinci türevin sıfır olabileceğini ve bu nedenle belirtilen noktanın dönüm noktası olmasından dolayı T₃ doğrusunun eğriye teğet olabileceğini ifade etmiştir. Ancak aynı öğretmenler belirtilen aynı noktada eğrisel açıklıklara çizilen teğetlere bağlı olarak o noktadaki eğimlerin de birbirinden farklı olabileceğini belirtmiştir. Farklı eğimlerden dolayı belirtilen noktada türevin olmayabileceğini bu nedenle de T₃ doğrusunun belirtilen noktada teğet doğrusu olamayabileceğini dile getirmiştir. Sonuç olarak Ö₁ ve Ö₄ belirtilen noktada T₄ doğrusunun kesin teğet doğrusu olması ya da olmaması konusunda kararsız kalmıştır.

T₄ ve T₅ doğruları için öğretmenler doğruların eğriye teğet olduklarını belirtmiştir. Öğretmenlerden Ö₂ diğer öğretmenlerden farklı bir sebeple doğruların o noktada eğriye teğet olduğundan bahsetmiştir. Ö₂ doğrularla ilgili olarak T₄ ve T₅'in eğriyi sadece bir noktada kestikleri için teğet doğrusu olduklarını belirtmiştir. Ö₂ problemde teğet doğrusu olabilecek doğruların tümünde aynı yargıda bulunmuştur. Ö₂ ile teğet kavramına yönelik yapılan görüşmelerde olduğu gibi Ö₂ değme kavramı yerine kesme kavramını kullanarak doğruların teğet olma ya da olmama durumlarının altında yatan nedenler hakkında yanlış görüşlerde bulunmuştur. T₄ ve T₅ doğrularıyla ilgili olarak öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ doğruların belirtilen noktalarda eğriye değmesinden dolayı teğet doğrusu olduklarını belirtmiştir. T₆ doğrusu için öğretmenlerin tamamı belirtilen noktada doğrunun eğriye teğet olmadığı görüşündedir. Öğretmenlerden Ö₂ diğer öğretmenlerden farklı olarak doğrunun eğriyi birden fazla noktada kesmesinden dolayı teğet doğrusu olmayacağını belirtmiştir. Ancak diğer öğretmenler T₂ doğrusunu değerlendirdikleri gibi bu doğru için de doğrunun eğriye değmemesinden dolayı teğet olmadığını belirtmiştir. Öğretmenlerin bu problemde teğet doğrusuna yönelik verdikleri cevaplar incelendiğinde Ö₁, Ö₂ ve Ö₄'ün daha önce teğet kavramına yönelik yapılan görüşmelerde dile getirdikleri açıklamalara benzer şekilde hareket ettikleri söylenebilir. Ancak öğretmenlerden Ö₃'ün daha önceden teğet kavramına yönelik görüşmelerden farklı olarak bir doğrunun teğet olması durumuna yönelik önceki açıklamalarının tam tersi yönünde açıklamalar yaptığı görülmüştür. Buna göre Ö₃ bir doğrunun bir eğriye teğet olması için değmesine kanaat getirmiş ve teğet doğrusunun değme

noktası dışında başka noktalarda eğriyi kesebileceği yargısında bulunmuştur. Öte yandan bir aralıkta tanımlı $g(x)$ eğrisi üzerindeki bazı noktalarda eğriye tek bir teğet doğrusunun çizilip çizilemeyeceğinin belirlenmesi amacıyla Şekil 16.'daki problem öğretmenlere sorulmuştur.



Şekil 16. Eğri üzerindeki noktalarda çizilen teğet doğrularına yönelik problem.

Şekil 16'da öğretmenlere yöneltilen problemde $g(x)$ eğrisi üzerindeki bazı noktalardan eğriye çizilen tek teğet doğrularının neden teğet doğruları olduğunun veya eğriye o noktada birden fazla çizilen teğet doğrularının neden birden fazla çizildiğinin öğretmenler tarafından açıklanması beklenmiştir. Ayrıca bu problemde eğriye belirtilen noktalarda çizilen teğet doğrularına bağlı olarak o noktadaki eğim ve türev hakkında da öğretmenlerin yorumda bulunması beklenmiştir. Öğretmenlere yöneltilen bu problem sayesinde öğretmenlerin türev-eğim-teğet arasındaki ilişkileri belirleyip belirleyemedikleri de görülmüş olacaktır. Öğretmenlerin probleme verdikleri cevaplar araştırmacının oluşturduğu kategorilere göre Tablo 34'de gösterilmiştir.

Tablo 34. Eğri Üzerindeki Noktalarda Çizilen Teğet Doğrularına Yönelik Kategoriler ve Kodlar

Noktalar	Tek Teğet Çizilir	Birden Fazla Teğet Çizilir	Teğet Çizilemez	Destekleyici İfadeler
"a"	Ö ₂	Ö _{1, 3, 4}		"a" noktası tanımlı bir uç noktadır. "a" noktasında birden fazla teğet çizilir. Çizilen teğetlerin eğimleri de birbirinden farklı olur. Türev yoktur bu noktada (Ö₁) "a" noktasında fonksiyona tek bir teğet çizilir. Bu noktadaki eğim tektir ve pozitifdir, bu nokta türevlidir (Ö₂)
"b"	Ö ₂		Ö _{1, 3, 4}	"b" noktasından teğet çizilemez. Çünkü "b" noktası tanımlı değildir. Ancak bu açık noktanın her iki ucunda sonsuz teğet çizilebilir. Ama dediğim gibi "b" noktasında çizilemez (Ö₃) "b" noktasında eğriye tek teğet çizilir. "b" noktası tanımlı değil bu nedenle türev yok. Türev yoksa eğimden de bahsedilemez (Ö₂)

Tablo 34. (Devamı)

“c”	$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$	“c” noktasında fonksiyon eğrisine bir tek teğet çizilir. Fonksiyon “c” noktasında tanımlı olduğu için türevi vardır ve eğiminden de bahsedebiliriz. Bu nokta aynı zamanda çukur ve minimum noktadır ($\ddot{O}_4$)
“d”	$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$	“d” noktası sivri yani köşe nokta olduğu için bu noktadan sağ ve sol iki teğet çizilir. Çizilen teğetler iki farklı fonksiyona yönelik olduğundan eğimler farklıdır. Dolayısıyla “d” noktası türevli değil ($\ddot{O}_2$)
“e”	$\ddot{O}_2$ $\ddot{O}_{1, 3, 4}$	“e” noktasının sağında ve solunda farklı fonksiyonlar olduğu için farklı teğetler çizilir. Bu nedenle eğimler birbirinden farklıdır. Türev yoktur bu noktada ($\ddot{O}_1$) Bu nokta tanımlıdır. Noktada bir tane teğet çizildiğinden eğim vardır. Türev yok aslında. Tam bilemiyorum... ($\ddot{O}_2$)
“f”	$\ddot{O}_2$ $\ddot{O}_{1, 3, 4}$	“f” noktasında tanımlı olduğu noktada eğriye bir tek teğet çizilir. “f” noktasında fonksiyon türevlidir, eğim negatiftir ($\ddot{O}_2$) “f” noktasında sıçrama noktası vardır. “f” noktasının tanımlı olduğu noktasında eğriye birden fazla teğet çizilir. “f” noktasının tanımlı olmadığı noktasında teğet çizilmez ancak bu noktanın uçlarından teğetler çizilir. Hem tanımlı hem de tanımsız noktadaki teğetler birbirinden farklıdır. Teğetler birbirinden farklı olduğu için bu noktadaki eğim de birbirinden farklıdır. Bu nedenle bu nokta türevli değildir ($\ddot{O}_1$)
“h”	$\ddot{O}_2$ $\ddot{O}_{1, 3, 4}$	“h” noktası bir uç noktadır. Bu noktada eğriye teğeti dikey bir şekilde çizebiliriz. Teğetin eğimi $\tan 90^\circ$ olduğundan tanımsız olur. Ayrıca bu noktadaki türev sıfırdır. Çünkü fonksiyon sabit fonksiyon olduğundan ($\ddot{O}_2$) “h” noktasında eğriye birden fazla teğet çizilebilir. Çünkü bu nokta uç noktadır. Bu noktadan çizilen teğetlerin eğimleri birbirinden farklıdır. Dolayısıyla bu noktada türev yoktur ($\ddot{O}_4$)

Tablo 34’deki bulgulara göre $\ddot{O}_2$ ile diğer öğretmenler $g(x)$ eğrisi üzerindeki c ve d noktalarında eğriye çizilecek teğet doğrularının durumlarına yönelik aynı yönde karar vermiştir. Ancak $\ddot{O}_2$ ile diğer öğretmenler $g(x)$ eğrisi üzerindeki a, b, e, f ve h noktalarında ise eğriye çizilecek teğet doğrularının durumlarına yönelik farklı yönde karar vermiştir. Öğretmenlerin eğri üzerindeki c ve d noktalarında eğriye çizilecek teğetlerin durumlarına yönelik görüşlerinin altında yatan nedenlerin birbirine benzerlik gösterdiği söylenebilir. Buna göre eğri üzerindeki “a” ve “h” noktalarında eğriye çizilecek teğetlerle ilgili olarak $\ddot{O}_2$ “a” ve “h” noktalarında eğriye tek bir teğetin çizilebileceğini belirtirken diğer öğretmenler birden fazla teğetin çizileceğini dile getirmiştir. $\ddot{O}_2$ dışındaki öğretmenler bu noktalarda eğriye birden

fazla teğet doğrusunun çizilmesinin sebebi olarak noktaların uç noktalar olmasını gerekçe göstermişlerdir. Bu noktalarda eğriye çizilecek birden fazla teğet doğrusunun eğimlerinin de farklı olacağını ifade eden $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ $x = a$ ve $x = h$ noktalarında fonksiyon eğrisinin türevinin olmayacağını belirtmiştir.

$\ddot{O}_2$ öğretmeni ise “a” ve “h” noktalarının uç nokta olmasını ve tanımlı olmasını gerekçe göstererek tam tersine noktalar üzerinde eğriye tek bir teğetin çizilebileceğini belirtmiştir. $\ddot{O}_2$ bu noktalarda eğriye çizilecek teğete bağlı olarak teğetin eğiminin de tek olduğunu ve $x = a$ ve $x = h$ noktalarında fonksiyon eğrisinin türevinin olduğunu iddia etmiştir. Şekil 13.’te bir fonksiyon eğrisi üzerinde tanımlı bir uç noktadaki türevin varlığına yönelik öğretmen görüşleri hatırlandığında öğretmenlerden sadece $\ddot{O}_3$ tarafından bir noktadaki türeve ve türevin gerekçesine yönelik önceki açıklamalar ile eğri üzerindeki noktada çizilen teğet doğrusunun sayısına ve teğet durumunun gerekçesine yönelik sonraki açıklamaların birbiriyle örtüşen açıklamalar olduğu söylenebilir. Buna göre $\ddot{O}_3$ herhangi bir aralıkta tanımlanmış bir fonksiyon eğrisinin tanımlı bir uç noktasında birden fazla sayıda teğet çizileceğinden eğrinin o noktadaki türevin olmadığından söz etmiştir. $\ddot{O}_3$ teğet sorusunda benzer gerekçeyi dikkate alarak bir fonksiyon eğrisi üzerindeki tanımlı bir uç noktaya çizilecek teğet doğrularının birden fazla sayıda olduğunu, uç noktadaki eğimlerin bu sayede birbirinden farklı olduğunu ve uç noktada eğrinin türevinin olmadığını dile getirmiştir. $\ddot{O}_3$ ’ün bir noktadaki türevi belirlerken noktaya çizilecek teğet doğrusunu ya da doğrularını referans olarak fonksiyonun o noktada türevli olup olmadığına karar verdiği söylenebilir.

Öğretmenlerden $\ddot{O}_2$ tarafından bir noktadaki türeve ve türevin gerekçesine yönelik önceki açıklamalarıyla eğri üzerindeki noktada çizilen teğet doğrusunun sayısına ve teğet durumunun gerekçesine yönelik sonraki açıklamalarında gerekçe bağlamında bir farklılaşma söz konusudur. Buna göre $\ddot{O}_2$ önceki açıklamalarında bir fonksiyon eğrisi üzerinde tanımlı olan bir uç noktanın tanımlı olmasından dolayı tanımlandığı ucun tam tersi yönünde fonksiyonun türevlenebilir olduğunu belirtmiştir. Yani $\ddot{O}_2$ ’ye göre eğri üzerindeki uç nokta tanımlı bir sağ uç noktaysa bu noktada soldan türevin varlığından söz edilebilir. $\ddot{O}_2$ ’nin teğet problemine yönelik yaptığı sonraki açıklamalarında ise bir fonksiyon eğrisi üzerindeki tanımlı bir uç noktada tek bir teğet çizilebileceğinden dolayı bu uç noktada eğrinin türevlenebilir olduğu belirtilmiştir. $\ddot{O}_2$ ’nin açıklamaları dikkatli bir şekilde incelendiğinde $\ddot{O}_2$ bir aralıkta tanımlı bir uç noktanın tanımlı olmasından dolayı türevli olduğunu ifade ederken daha sonra bu uç noktaya çizilecek teğetin tek olmasından ve eğimin tek olmasından dolayı eğrinin noktada türevinin olduğunu dile getirmiştir. $\ddot{O}_2$ ’nin tanımlı uç noktaların türevlenebilmesine yönelik görüşü teğet kavramından önce noktanın tanımlılığı bağlamında gerekçelendirilirken

teğet kavramından sonra tanımlı uç noktalarda fonksiyonun türevlenebilmesine yönelik gerekçe, noktaya çizilen teğet sayısı referans alınarak dile getirilmiştir.

Öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün teğet kavramından önce bir aralıkta tanımlanmış fonksiyon eğrisinin tanımlı bir uç noktasında türevlenebilmesine ve nedenlerine yönelik önceki görüşleri ile teğet kavramından sonra aynı fonksiyon eğrisi üzerinde tanımlı uç noktanın türevlenebilmesine ve nedenlerine yönelik görüşlerinin birbirleriyle çeliştiği söylenebilir. Buna göre $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ bir aralıkta tanımlı fonksiyon eğrisinin tanımlı bir uç noktasında türevlenebilmesine gerekçe olarak o noktanın tanımlı olmasını ve tanımlandığı ucun tam tersi yönünde fonksiyon eğrisinin türevlenebilir olduğunu dile getirmiştir. Ancak $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ teğet kavramını gördükten sonra bir aralıkta tanımlı fonksiyon eğrisinin tanımlı bir uç noktasının türevlenebilir olması için uç noktaya çizilecek teğet sayılarına dikkat çekerek tanımlı uç noktada birden fazla teğet doğrusu çizileceğinden uç noktadaki eğimlerin farklı olduğunu bu nedenle uç noktada fonksiyonun türevlenebilir olmadığını dile getirmiştir. $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün teğet kavramından önce tanımlı uç noktalarda fonksiyonun türevlenebilir olmasına yönelik gerekçeleri tanımlılık bağlamında açıklanmıştır. Ancak teğet kavramından sonra tanımlı uç noktalarda fonksiyonun türevlenebilmesine yönelik gerekçe uç noktaya çizilen birden fazla teğet doğrusunun olması ve bu teğet doğrularının eğimlerinin birbirinden farklı olmasına bağlı olarak uç noktada türevin olmaması şeklinde açıklanmıştır. Buna göre teğet konusu $\ddot{O}_3$ haricindeki öğretmenlerin tanımlı uç noktalarda fonksiyon eğrilerinin türevlenebilmesine yönelik görüşlerinin şekillenmesinde önemli bir rol oynamıştır.

Eğri üzerindeki “b” noktasında eğriye çizilecek teğetlerle ilgili olarak öğretmenlerden $\ddot{O}_2$ “b” noktasının eğri üzerinde tanımlı olmadığını bilmesine rağmen “b” noktasında eğriye tek bir teğetin çizilebileceğini dile getirmiştir. Bununla birlikte $\ddot{O}_2$ eğri üzerindeki “b” noktasının tanımlı olmamasından dolayı eğrinin o noktada türevinin olmadığını, türevinin olmadığı için de o noktada teğetin eğiminin olmadığını dile getirmiştir. $\ddot{O}_2$ 'nin yaptığı bu açıklamalar dikkatli bir şekilde incelendiğinde $\ddot{O}_2$ “b” noktasında eğrinin hem türevinin olmadığını hem de eğriye o noktada tek bir teğetin çizilebildiği şeklinde birbirini desteklemeyen yanlış bir açıklamada bulunmuştur. $\ddot{O}_2$ 'nin “b” noktasında eğriye tek bir teğet çizmesine rağmen bu noktadaki teğetin eğiminin olmadığına yönelik açıklamalarının çelişkili olduğu söylenebilir. Hâlbuki $\ddot{O}_2$ eğrinin “a” noktasındaki teğet doğrusuna yönelik bir önceki açıklamasında fonksiyon eğrisi üzerinde tanımlı olan bir noktada eğriye tek bir teğet çizilebileceğini ve bu teğet doğrusunun eğiminin de tek bir tane olduğunu dile getirmiştir. Öğretmenlerden $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ ise “b” noktasının eğri üzerinde tanımlı olmamasından dolayı eğriye “b” noktasında teğet çizilemeyeceğine yönelik doğru açıklamalar yapmışlardır. Hatta

bu öğretmenler eğriye “b” noktasında teğet çizilememesine rağmen noktanın sol ve sağ ucunda birden fazla teğet çizilebileceğine yönelik doğru açıklamalarda bulunmuşlardır.

Eğri üzerindeki “c” noktasında eğriye çizilecek teğetlerle ilgili olarak öğretmenlerin tamamı “c” noktasının eğri üzerinde tanımlı olduğunu, bir çukur nokta veya yerel minimum noktası olduğunu, noktanın sağ ve sol türevlerinin birbirine eşit olduğunu belirterek bu noktada sadece bir tane teğet doğrusunun eğiminin olduğunu dile getirmişlerdir. Şekil 13.’te bir fonksiyon eğrisi üzerinde tanımlı bir noktadaki türevin varlığına yönelik öğretmen görüşleriyle öğretmenlerin teğet kavramı sonrasında aynı eğri üzerinde tanımlı noktada eğrinin türevlenebilmesine yönelik görüşlerinin benzerlik gösterdiği söylenebilir. Öğretmenler, eğri üzerinde tanımlı olan noktadaki türevin varlığına yönelik noktanın sağında ve solunda türevlerin birbirine eşit olduğunu, bu sebeple fonksiyon eğrisine o noktada çizilecek teğet doğrusunun fonksiyonun o noktadaki türevini vereceğini belirtmiştir. Öğretmenler teğet kavramına yönelik soruda da eğri üzerinde aynı tanımlı noktanın sağ ve sol türevlerinin birbirine eşit olmasından dolayı noktada tek bir teğet doğrusunun eğimini dile getirerek önceki görüşleriyle örtüşen açıklamalarda bulunmuşlardır.

Eğri üzerindeki “d” ve “e” noktalarında eğriye çizilecek teğetlerle ilgili olarak öğretmenlerin tamamı “d” noktasının eğri üzerinde sivri nokta olduğunu belirterek bu noktanın sağından ve solundan iki farklı teğet doğrularının çizileceğini ve çizilen bu teğet doğrularının eğimlerinin birbirinden farklı olmasından dolayı “d” noktasındaki türevin olmayacağını dile getirmişlerdir. Şekil 13.’te bir fonksiyon eğrisi üzerinde tanımlı bir sivri noktadaki türevin varlığına yönelik öğretmen görüşleriyle öğretmenlerin teğet kavramı sonrasında aynı eğri üzerinde tanımlı bir sivri noktada eğrinin türevlenebilmesine yönelik görüşlerinin birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Öğretmenler, eğri üzerinde tanımlı bir sivri noktadaki türevin varlığına yönelik sivri noktanın sağında ve solunda farklı fonksiyon grafikleri olduğunu bu nedenle farklı fonksiyonlara çizilen teğet doğrularının eğimlerinin birbirine eşit olmadığını belirtmiştir. Öğretmenler teğet kavramına yönelik soruda da eğri üzerinde aynı tanımlı sivri noktaya sağdan ve soldan iki farklı teğet doğruları çizileceğini ve bu teğet doğruların eğimlerinin farklı olmasından dolayı o noktada türevin olmayacağı şeklinde önceki açıklamalarıyla benzerlik gösteren görüşler belirtmiştir. Öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ fonksiyon eğrisi üzerindeki diğer bir sivri nokta olan “e” noktasında eğriye çizilen teğet doğrularına yönelik benzer görüşler dile getirmiştir. Buna göre bu öğretmenler aynı “d” noktasında olduğu gibi “e” noktasında da soldan ve sağdan iki farklı teğet doğrularının çizileceğini, teğet doğrularının eğimlerinin birbirinden farklı olacağını, bu sebeple eğrinin “e” noktasında türevlenebilir olmayacağını belirtmiştir. Ancak öğretmenlerden Ö₂ “e” noktasının

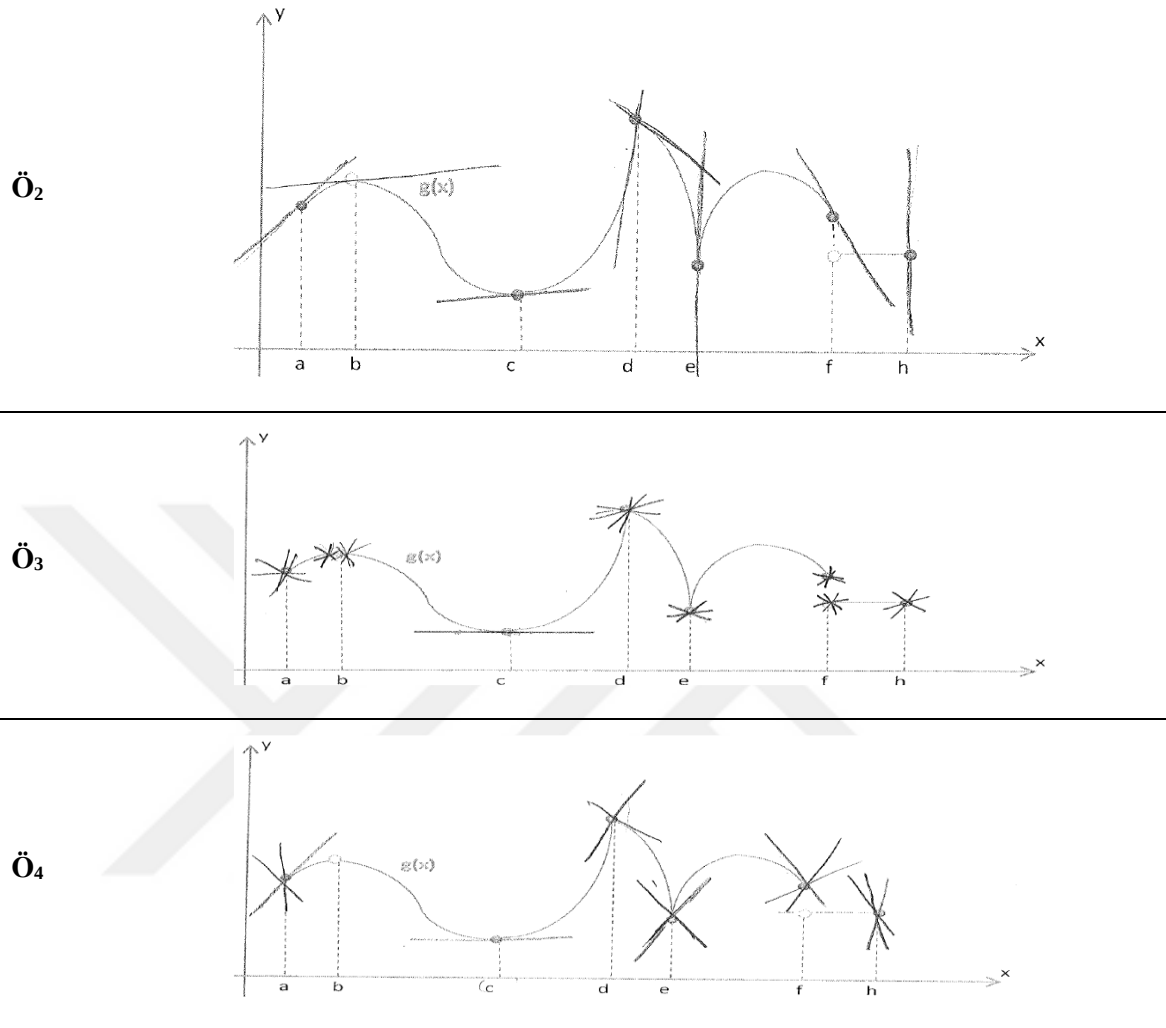
sivri nokta olduğuna dikkat etmeyerek sadece noktanın eğri üzerinde tanımlı olduğunu veya “c” noktasında olduğu gibi teğetin eğiminin x eksenine paralel çizilebileceğini düşünerek “e” noktasında eğriye tek bir teğet doğrusunun çizileceğini ifade etmiş ancak bu noktanın türevlenebilir olmadığını belirtmiştir. Ö₂ “e” noktasında eğriye tek bir tek bir teğet doğrusunun çizilebilmesine rağmen türevli olmadığını belirten yanlış ve birbiriyle çelişen açıklamalarda bulunmuştur.

Eğri üzerindeki “f” noktasında eğriye çizilen teğetlerle ilgili olarak öğretmenlerden Ö₂ ilgili noktanın sivri nokta veya sıçrama noktası olmasına dikkat etmeden “a”, “c” ve “e” noktalarında olduğu gibi “f” noktasının eğri üzerinde tanımlı olduğunu bu nedenle eğriye bu noktada tek bir teğetin çizileceğini belirtmiştir. Ö₂’nin “f” noktasında eğriye çizilecek teğet doğrularına yönelik yaptığı açıklamaların eksik ve yanlış açıklamalar olduğu söylenebilir. Bir noktada eğriye çizilen teğet doğrular belirlenirken noktanın tanımlı olmasına dikkat edilir ancak noktanın tanımlı olması o noktaya çizilecek tek bir teğet doğrusunun çizilmesinde tek başına yeterli bir kriter değildir. Ö₂ “a”, “c”, “e” ve “f” noktalarında eğriye çizilecek teğet doğruları hakkında görüş belirtirken noktanın tanımlı olması özelliğini tek başına teğet doğrusunun çizilmesinde gerekli ve yeterli bir kriter gibi görerek yanlış görüşte bulunmuştur. Öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ ise “f” noktasının eğri üzerinde sıçrama noktası olduğunu görerek sıçrama noktasında eğriye birden fazla teğet doğrularının çizildiğini bu sebeple bu doğruların eğimlerinin birbirinden farklı olduğunu ve o noktada türevin olmadığını belirtmiştir. Öte yandan öğretmenlerin $g(x)$ eğrisi üzerindeki noktalarda teğet doğrularına yönelik çizimleri Tablo 35’de gösterilmiştir.

Tablo 35. Öğretmenlerin Eğri Üzerindeki Bazı Noktalarda Teğet Doğrularına Yönelik Çizimleri

Öğretmenler	Teğet Doğrularına Yönelik Çizimler
Ö ₁	

Tablo 35. (Devamı)



Öte yandan Tablo 36’da öğretmenlerin türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurdukları ve çözümünü yaptıkları problemler Yıldız ve Özdemir (2015) ile Baki (2008)’nin kategorilerine göre değerlendirilmiştir.

Tablo 36. *Türev-Eğim-Teğet İlişkisine Yönelik Kurulan ve Çözülen Problemlere Yönelik Kategoriler*

Değerlendirme Kriterleri	Alt Kriterler	Ölçütler		
		Evet	Kısmen	Hayır
Matematiksellik	Matematiksel kavramların kullanımı	Ö _{1, 2, 3, 4}		
	Matematiksel sembollerin kullanılması	Ö _{1, 2, 3, 4}		
	Metin-görsel aktarımının sağlanması	Ö _{1, 2}		Ö _{3, 4}
Veri Niteliği	Verinin mantıksal uygunluğu	Ö _{1, 2, 3, 4}		
	Verilerle ulaşabilecek sonucun anlamlılığı	Ö _{1, 2, 3, 4}		

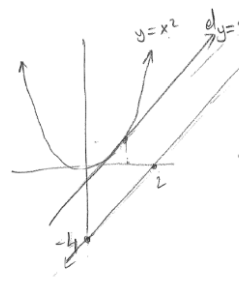
Tablo 36. (Devamı)

Dil Bilgisi	Sorunun dil bilgisine uygunluğu	Ö _{2,3}	Ö _{1,4}	
	Soruda anlatım bozukluğunun varlığı		Ö ₄	Ö _{1,2,3}
	Sorudaki noktalama işaretlerinin kullanımı	Ö _{2,3}	Ö _{1,4}	
Düzeye Uygunluk	Sorunun kazanımlara, içeriğe ve zorluk derecesine uygunluğu	Ö _{1,2,3,4}		
Yönerge ve Veri Miktarı	Soruda yönergenin varlığı			Ö _{1,2,3,4}
	Yönergedeki adımların çözüme uygunluğu			Ö _{1,2,3,4}
	Çözüm için gerekli verinin miktarı	Ö _{1,2,3,4}		
Çözülebilirlik	Kurulan problemin bireyi istenilen sonuca ulaştırması	Ö _{1,2,3,4}		
Kullanılabilirlik	Kurulan problemin öğrenme ortamlarındaki kullanılma durumu	Ö _{1,2,3,4}		
Plan Uygulama	Problemin çözümünün yapılması	Ö _{1,2,3,4}		
Değerlendirme	Kurulan problemin çözümünün doğrulanması			Ö _{1,2,3,4}

Tablo 36'daki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurdukları problemlerde matematiksel ifadeler ile sembollerden yararlanmıştır. Ancak öğretmenlerin kurdukları problemlerde fonksiyon eğrisi ve doğru şeklinde görseller kullanıldığından soru kökünde yer alan matematiksel veriler Ö₁ ve Ö₂ öğretmenleri tarafından sorudaki görsele doğru bir şekilde aktarılmasına rağmen Ö₃ ve Ö₄ öğretmenleri tarafından soru kökündeki görsel üzerine herhangi bir şekilde aktarım yapılmamıştır. Öğretmenlerin tümünün hazırladığı problemlerde veriler matematiksel ve mantıksal bakımdan öğrencilerin öğrenme düzeylerine uygundur. Öğretmenlerden Ö₂ ve Ö₃ soru kökünün oluşturulması sürecinde dil bilgisi kurallarına tam uyarken Ö₁ ve Ö₄ bu kurallara kısmen uymuştur. Ö₄ tarafından hazırlanan soruda kısmen anlatım bozukluğu varken diğer öğretmenler tarafından hazırlanan sorularda anlatım bozukluğu bulunmamaktadır. Öğretmenlerden Ö₂ ve Ö₃ soru kökündeki noktalama işaretlerine dikkat ederken Ö₁ ve Ö₄ bazı kelimeleri kısa yazarak ya da cümle sonunda soru işaretini unutarak soru kökündeki noktalama işaretlerine kısmen uymuştur. Öğretmenlerin tümünün hazırladığı soruların öğrenciye ve içeriğe uygun sorular oldukları görülmüştür. Öğretmenler kapalı fonksiyonun türevine yönelik kurdukları problemlerde olduğu gibi bu konuda kurdukları problemlerde de yönerge kullanmamıştır. Öğretmenlerin tümünün türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurdukları problemlerin çözümde

kullanılacak veri miktarı, çözülebilirlik ve öğrenme ortamında kullanılabilirlik kriterleri bakımından uygun problemler olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin tamamı kurdukları problemleri doğru çözmelerine rağmen çözümün sağlamasını yapmayarak herhangi bir doğrulamada bulunmamıştır. Öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₂ parabol üzerindeki bir noktadan geçen teğetin denklemiyle ilgili bir problem kurarken Ö₃ parabolün herhangi bir doğruya en yakın noktasının koordinatları toplamına yönelik bir problem kurmuştur. Öğretmenlerden Ö₄ ise parabol üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimine yönelik bir problem kurmuştur. Öğretmenlerin türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurdukları problemler ve yaptıkları çözümler Tablo 37’de gösterilmiştir.

Tablo 37. Türev-Eğim-Teğet İlişkisine Yönelik Kurulan Problemler ve Problemlerin Çözümleri

Öğretmenler	Kurulan Problem	Problemın Çözümü
Ö ₁	$y = 3x^2 + 5x$ parabolüne (118) noktasından çizilen teğetin denk. yazınız.	$y - y_0 = m(x - x_0)$ $y - 8 = m(x - 1)$ $y - 8 = 11(x - 1)$ $y = 11x - 3$ $m = f'(1)$ $m = 6 + 5 = 11$
Ö ₂	$y = 3x^2 + 5$ parabolüne (112) noktasından teğetin denklemini nedir?	$f(x) = 3x^2 + 5$ $d - y = ax + b$ olsun. (12) nok. geçiyişi $2 = a + b \rightarrow ①$ $f'(1) = a$ olduğundan $f'(x) = 6x$ $f'(1) = 6 = a$ ② $①$ ve $②$ ’den $2 = 6 + b$ $b = -4$ O halde $y = 6x - 4$ olur
Ö ₃	Soru: $y = x^2$ parabolünün $y = 2x - 4$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatları toplamı nedir?	 $y = x^2$ $y = 2x - 4$ $y' = 2x$ $m = 2$ $2x = 2$ $x = 1$ $(1, 1)$ $1 + 1 = 2$
Ö ₄	$y = x^2$ eğrisinde $(2, 4)$ noktasından teğetin eğimi?	$m = f'(x_0)$ idi $f'(x) = 2x$ $m = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

Tablo 37’deki bulgulara göre Ö₁, Ö₂ ve Ö₄’ün teğetin eğimine yönelik kurdukları problemlerin benzer problemler oldukları söylenebilir. Ancak Ö₁ problemi çözerken Ö₂’den

farklı olarak bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemine yönelik formülden yararlanmıştır. Ö₃ ise diğer öğretmenlerden daha farklı bir problem kurmuştur. Ö₃ bir doğru ile bir eğri arasındaki uzaklığa yönelik kurduğu problemi ekstremum noktaları ile çözmek yerine teğetin eğiminden yararlanarak çözmüştür. Öte yandan öğretmenlerin türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden edinilen yansımalar Tablo 38’de gösterilmiştir.

Tablo 38. Türev-Eğim-Teğet İlişkisine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları

Öğretmenler	Görüşme Yansımaları	Gözlem Yansımaları
Ö ₁		
Ö ₂		
Ö ₃		
Ö ₄		

Tablo 38’deki bulgulara göre öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahına ve türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik görüşmelerden ve ders içi gözlemlerden elde edilen verilerin birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Yapılan görüşmelerde Ö₁ ve Ö₄’ün türevin

geometrik anlamının izahına yönelik açıklamaları eksik olmasına rağmen $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ fonksiyon eğrisinin bir noktasındaki türevi ile eğriye o noktada teğet olan doğrunun eğiminin birbirine eşit olduğunu ifade etmişler ve bu durumu grafiksel bir formla araştırmacıya göstermişlerdir. $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ teğet kavramına yönelik tanıma uygun açıklamalarda bulunarak fonksiyon eğrisi üzerindeki bazı noktalardan geçen doğruların teğet doğruları olup olmadığı konusunda çoğunlukla isabetli kararlar vermiştir. Teğetin eğimine yönelik öğrencilerin öğrenme düzeylerine göre problemler kuran $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ bu problemleri de doğru bir şekilde araştırmacıya çözmüşlerdir. $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün ders içi gözlemleri incelendiğinde $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ görüşmelerde olduğu gibi gözlemde de türev-eğim arasındaki ilişkiyi sadece cebirsel formüllerle değil aynı zamanda grafiksel olarak da öğrencilerine göstermeye çalışmıştır. $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ teğet konusunda görüşmede olduğu gibi derste de teğet doğrusunun eğriye değdiği noktanın teğet noktası olduğunu vurgulamıştır. $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün öğrencilerine çözdükleri problemler, görüşme sürecinde türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurdukları ve çözümünü yaptıkları problemlerle benzerlik göstermiştir. $\ddot{O}_1$ derste teğetin eğimi, teğet ve normal denklemi, bir eksene paralel olan teğet doğruları, eğim açısı, dışarıdan atılan teğet, eğriye teğet olan doğruya paralel teğetler çizme ve teğetler arasındaki açı alt konularında öğrencilerine problemler çözmüştür. $\ddot{O}_4$ ise derste teğetin eğimi, teğet ve normal denklemi ve eğim açısı alt konularında öğrencilerine problemler çözmüştür.

Yapılan görüşmelerde $\ddot{O}_2$ türevin geometrik anlamının izahında ifade edilmesi gereken özellikler bakımından eksik açıklamalarda bulunmuştur. $\ddot{O}_2$ türev-eğim ilişkisini cebirsel bir formla araştırmacıya açıklamasına rağmen fonksiyon eğrisinin bir noktadaki türevinin aynı noktada eğriye teğet olan doğrunun eğimine nasıl eşit olduğunu anlatmakta zorluk yaşamıştır. $\ddot{O}_2$ türevin geometrik anlamının izahında sahip olduğu kavramsal eksikliği teğet kavramını açıklarken de göstermiştir. $\ddot{O}_2$ teğet kavramına yönelik açıklamasında eğriyi bir noktada kesen doğruların teğet doğrusu olduğunu, eğriyi birden fazla noktada kesen doğruların ise teğet doğrusu olmayacağına yönelik yanlış bir yargıda bulunmuştur. $\ddot{O}_2$ 'nin teğet kavramına yönelik sahip olduğu kavramsal hatayı fonksiyon eğrisine çizilen doğruların teğet doğruları olup olmadığına yönelik sorulan probleme cevap verirken de sürdürdüğü görülmüştür. Teğetin eğimine yönelik öğrencilerin öğrenme düzeylerine göre bir problem kuran $\ddot{O}_2$ bu problemi de doğru bir şekilde araştırmacıya çözmüştür. $\ddot{O}_2$ 'nin ders içi gözlemleri incelendiğinde $\ddot{O}_2$ görüşmelerde olduğu gibi gözlemlerde de türev-eğim ilişkisini doğrudan bir noktadaki türev tanımına yönelik formüller yardımıyla öğrencilerine anlatmaya çalışmıştır. $\ddot{O}_2$ eğri üzerindeki kiriş doğrusunun zamanla teğet doğrusuna dönüşümünden bahsetmeyerek sadece türev-eğim ilişkisine dönük formül üzerinde durmuştur. $\ddot{O}_2$ teğet kavramı konusunda da öğrencilerine teğet doğrusunun eğriyi sadece bir noktada kesmesi gerektiğine yönelik

uyarılarda bulunmuştur. Ö₂ türev-eğim-teğet konusunu anlatırken de değme noktası kavramından hiçbir suretle bahsetmemiştir. Ö₂'nin öğrencilerine çözdüğü problemler, görüşme sürecinde türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurduğu ve çözümünü yaptığı problemlerle benzerlik göstermiştir. Ö₂ derste öğrencilerine teğetin eğimi, teğet ve normal denklemi, bir eksene paralel olan teğet doğruları ve teğetler arasındaki açı alt konularında problemler çözmüştür.

Yapılan görüşmelerde Ö₃'ün türevin geometrik anlamının izahına yönelik araştırmacıya yaptığı açıklamaların eksiksiz olduğu görülmüştür. Ö₃ fonksiyon eğrisinin bir noktadaki türevinin aynı noktada eğriye teğet olan doğrunun eğimine nasıl eşit olduğunu araştırmacıya anlatmıştır. Ö₃ bu sayede eğri üzerindeki kiriş doğrusunun zamanla teğet doğrusuna dönüşümünü de araştırmacıya göstermiştir. Ö₃ teğet kavramına yönelik ilk planda teğetin tanımına uygun olmayan açıklamalarda bulunmuş olsa da daha sonrasında kendisine yöneltilen bir teğet probleminde teğetin tanımına uygun olan açıklamalar yapmıştır. Ö₃ araştırmacıya ilk önce teğetin eğriyi kestiğine yönelik yaptığı açıklamalarını teğetin eğriye değmesine yönelik açıklamalarla revize etmiş ve düzeltmiştir. Ö₃ fonksiyon eğrisi üzerindeki bazı noktalardan geçen doğruların teğet doğruları olup olmadığı konusunda çoğunlukla isabetli kararlar vermiştir. Teğetin eğimine yönelik öğrencilerin öğrenme düzeylerine göre bir problem kuran Ö₃ bu problemi de doğru bir şekilde araştırmacıya çözmüştür.

Ö₃'ün ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₃ görüşmelerde olduğu gibi gözlemde de türev-eğim arasındaki ilişkiyi sadece cebirsel formüllerle değil aynı zamanda grafiksel olarak da öğrencilerine göstermeye çalışmıştır. Ö₃ tahtada eğri üzerindeki kiriş doğrusunun zamanla nasıl teğet doğrusuna dönüştüğünü öğrencilerine göstermiştir. Ö₃ teğet konusunda görüşmede olduğu gibi derste de teğet doğrusunun eğriye değdiği noktanın teğet noktası olduğunu vurgulamıştır. Ö₃'ün öğrencilerine çözdüğü problemler, görüşme sürecinde türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurduğu ve çözümünü yaptığı problemlerle benzerlik göstermiştir. Ö₃ derste öğrencilerine teğetin eğimi, teğet ve normal denklemi, bir eksene paralel olan teğet doğruları, eğim açısı, dışarıdan atılan teğet ve eğriye teğet olan doğruya paralel teğetler çizme alt konularında problemler çözmüştür. Sonuç olarak öğretmenlerle türevin geometrik anlamının izahına ve türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik yapılan görüşmeler ve gözlemler değerlendirildiğinde, öğretmenlerin tamamının görüşme sürecinde belirttikleri görüşleri gözlem sürecinde öğrencilere yansıttıkları söylenebilir. Sadece öğretmenlerden Ö₃ görüşme sürecinde teğet kavramının tanımına yönelik görüşünü yine kendisine görüşme sürecinde sunulan bir teğet probleminde değiştirmiştir. Ö₃ görüşme sürecinde teğet kavramına yönelik değiştirdiği görüşe göre derste öğretim yapmıştır.

Artan-azalan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların türevle ilişkisi.

Tablo 39’da öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonların temel özelliklerine yönelik yaptıkları açıklamalar Zazkis ve Leiken (2008)’in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlara yönelik açıklamaları erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik kategorileri dikkate alınarak incelenmiştir.

Tablo 39. *Artan-Azalan Fonksiyonlara Yönelik Kategoriler ve Kodlar*

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Zor verilmiş cevap	
	Kısmen zor verilmiş cevap	
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö _{3, 4}
	Gerekli ve yetersiz	Ö _{1, 2}
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Prototip olmayan örnek	

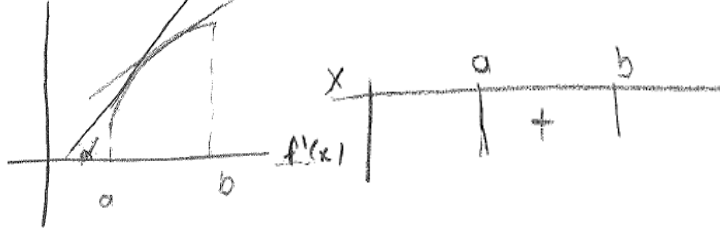
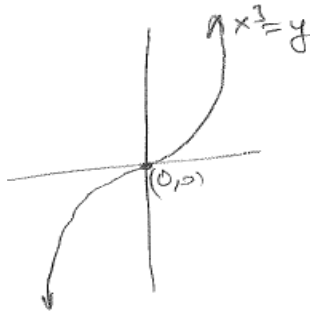
Tablo 39’daki bulgular erişebilirlik kategorisi açısından incelendiğinde bütün öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlara yönelik görüşlerini zorlanmadan ve rahat bir şekilde yaptıkları görülmüştür. Öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlara yönelik görüşleri doğruluk kategorisi bakımından ele alındığında öğretmenlerden Ö₃ ve Ö₄’ün artan-azalan fonksiyonlara yönelik açıklamalarının eksiksiz olduğu söylenebilir. Ancak öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₂’nin artan-azalan fonksiyonlara yönelik açıklamalarında fonksiyonun tanım ve değer kümeleri ile x değişkenine ait özelliklerin belirtilmediği görüldüğünden bu öğretmenlerin artan-azalan fonksiyona yönelik açıklamalarının eksik olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlara yönelik görüşleri zenginlik kategorisi bakımından ele alındığında öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlara yönelik yaptıkları açıklamalar ve kullandıkları grafiksel gösterimlerin lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2014; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Demir, 2014; Edwards & Penney, 2001; Hacısalihoğlu vd., 1988; Kadakal, 2010) yer alan prototip açıklamalar ve gösterimler oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlara yönelik görüşlerini daha ayrıntılı incelemek amacıyla, artan-azalan fonksiyonları nasıl tanımladıkları Tablo 40’da gösterilmiştir.

Tablo 40. Artan-Azalan Fonksiyonlara Yönelik Öğretmen Görüşleri

Öğretmenler	Artan-Azalan Fonksiyonlara Yönelik Görüşler
Ö ₁	$X_1 < X_2$ olmak şartıyla $f(X_1) < f(X_2)$ oluyorsa fonksiyon artandır. Eğer $X_1 > X_2$ olmak şartıyla $f(X_1) < f(X_2)$ oluyorsa fonksiyon azalandır. Fonksiyonun herhangi bir aralıkta artan ya da azalan olduğunu anlayabilmek için teğetler çizilir. Çizilen teğetlerin eğimleri dar açıysa fonksiyon artan, geniş açıysa fonksiyon azalan olur
Ö ₂	Eğer $X_1 < X_2$ iken $f(X_1) < f(X_2)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu artandır. Eğer $X_1 > X_2$ iken $f(X_1) < f(X_2)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu azalandır
Ö ₃	Herhangi bir A aralığında $A \subset R$ ve $f: A \rightarrow R$ bir fonksiyon olmak üzere $X_1, X_2 \in A$ için $X_1 < X_2$ iken $f(X_1) < f(X_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta artandır. Eğer ki $X_1 > X_2$ iken $f(X_1) < f(X_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta azalandır
Ö ₄	Bir fonksiyonun grafiği belirli bir aralıkta daima artıyorsa bu tip fonksiyonlara artan fonksiyon denir. Tam aksine bir fonksiyonun grafiği belirli bir aralıkta azalıyorsa da bu tip fonksiyonlara azalan fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonlara örnek verecek olursak $y = x^3$ eğrisinin daima artan bir fonksiyon olduğunu veya $y = -x$ fonksiyonunun daima azalan bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz. Eğer artan-azalan fonksiyonların kitaplardaki tanımını yapacak olursak o da şu şekildedir: Herhangi bir A aralığında $A \subset R$ ve $f: A \rightarrow R$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta artandır. $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 > x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta azalandır.

Tablo 40'daki bulgulara göre öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₂'nin artan-azalan fonksiyona yönelik açıklamalarında; fonksiyonun hangi aralıkta tanımlandığı, tanım-değer kümeleri ve fonksiyon üzerindeki x değişkenlerinin özelliklerine yönelik eksikliklerin olduğu görülmüştür. Ancak öğretmenlerden Ö₃ ve Ö₄'ün artan-azalan fonksiyonlara yönelik açıklamaları incelendiğinde bu açıklamalarda fonksiyonun hangi aralıkta tanımlandığına, tanım-değer kümelerine ve x değişkenine yönelik özelliklere dair herhangi bir eksikliğin olmadığı söylenebilir. Öğretmenlerin tamamının artan-azalan fonksiyonların tanımında x_1 ve x_2 değişkenleri arasındaki eşitsizliğe bağlı olarak fonksiyonun bu noktadaki görüntüleri olan $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ değerleri arasındaki eşitsizlikleri doğru bir şekilde kullandıkları görülmüştür. Öte yandan öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlarla bu fonksiyonların türevleri arasındaki ilişkiyi belirleyebilme becerileri araştırılmıştır. Buna göre öğretmenlerden bir fonksiyonun tanımlandığı aralığın her noktasında artan olması durumunda bu fonksiyonun türevinin de aynı aralıkta daima pozitif olup olmadığını belirlemeleri ve bu bahsedilen durumun tam tersinin de doğru olup olmadığına yönelik görüşlerini belirtmeleri beklenmiştir. Öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlarla bu fonksiyonların türevine yönelik görüşleri Tablo 41'de gösterilmiştir.

Tablo 41. Artan-Azalan Fonksiyonların Türevle İlişkisine Yönelik Öğretmen Görüşleri

Öğretmenler	Artan-Azalan Fonksiyonların Türevle İlişkisine Yönelik Görüşler
Ö ₁	Bir $f(x)$ fonksiyonu belirli bir aralıkta artarsa fonksiyonun birinci türevi daima pozitifdir. Aynı şekilde bu fonksiyon belirli bir aralıkta azalansa fonksiyonun birinci türevi daima negatiftir. Artan-azalan fonksiyonlar ile türevleri arasındaki ilişkiyi eğimi kullanarak da gösterdik. Şöyle bir örnek vereyim istersen:  Yukarıdaki gibi bir $f(x)$ fonksiyon eğrisinin (a, b) arasında tanımlı, teğetleri sağa yatık yani eğim açısı dar açıdır. Bu $f(x)$ eğrisinin (a, b) aralığının hangi noktasında teğetin eğimini alırsam alıyım teğetin eğimi daima pozitif olacaktır. Yani $\tan \alpha > 0$ olacaktır. Dolayısıyla (a, b) aralığında fonksiyonun türevi sıfırdan büyük olduğunu ifade ederiz. Birinci türevin işaret tablosundan da bu durumu görebiliriz. Sorduğunuz bu sorunun tam tersi de doğrudur. Bir aralıktaki türevi pozitif olan bir $f(x)$ fonksiyonunun aynı aralıktaki her noktada artan olduğunu söyleyebiliriz
Ö ₂	Diyelim ki bir $f(x)$ artan fonksiyonu $f(x) = 3x^3 + 5$ şeklinde verilsin. Bu fonksiyonun birinci türevini aldığımızda $f'(x) = 9x^2$ olduğundan fonksiyonun türevinin de artan olduğu görülür. Aynı şekilde azalan bir fonksiyon örneği de versek birinci türevinin de azalan olduğunu ifade edebiliriz. Bu bahsedilen durumun tam tersine yönelik bir cevabım yok
Ö ₃	Artan bir fonksiyonla bu fonksiyonun türevi arasındaki ilişkiyi bir fonksiyon eğrisi üzerinde gösterebiliriz. Aşağıdaki fonksiyon eğrisi için;  şu şekilde düşünelim. $y = f(x) = x^3$ eğrisinde bu fonksiyonun birinci türevini aldığımız zaman türevinin $y' = f'(x) = 3x^2$ olduğunu görürüz. Türev fonksiyonunda $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ olduğundan dolayı fonksiyonun türevinin aynı aralıkta daima pozitif olmasının gerekmediği görülür. Şimdi bu durumun tam tersini düşünelim. Belirli bir aralıkta türevi daima pozitif olan bir fonksiyon o aralığın her noktasında artandır. Yani ifadenin tam tersinin doğru olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü normal bir grafikte incelendiği zaman grafikten türevin geometrik yorumuna bakılıyorsa zaten burada türevin pozitif olması demek teğet eğiminin açısının dar açı olması demektir. İlgili noktada dar açı çizebilmek için $(\alpha < 90^\circ)$ fonksiyonun aynı aralıkta artan olmasını gerekir

Tablo 41. (Devamı)

Ö₄

Grafiği az önce eğimle bağdaştırmıştık. Artan fonksiyonların eğimleri pozitiftir. Dolayısıyla fonksiyonların birinci türevleri de pozitif olur. Ancak istisnai durumlar söz konusudur. Birinci türevlerin daima pozitif olduğu söylenemeyebilir. $y = f(x) = x^3$ eğrisi daima artandır. Ancak bu eğrinin $x = 0$ noktasında $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ olur. Yani fonksiyonun aralığın her noktasında artan olması türevinin de aynı aralıkta daima pozitif olmasını gerektirmez. Belirtilen bu durumun tam tersi ise doğrudur. Fonksiyonun bir aralıktaki türevi daima pozitifse fonksiyon aynı aralıkta artan bir fonksiyon olarak değerlendirilir

Tablo 41'deki bulgulara öğretmenlerden Ö₁'in belirli bir aralıkta artan bir fonksiyonla bu fonksiyonun türevinin ilişkisine yönelik açıklamalarının eksik olduğu görülmüştür. Öğretmenlerden Ö₁ belirli bir aralıkta artan bir fonksiyonun türevinin işaret tablosundan yararlanarak aynı aralıkta türevin daima pozitif olduğunu gösterse de fonksiyonun türevinin, aralığın her noktasında pozitif olamayacağına yani türevin bir noktada sıfır olabileceğine yönelik istisnai durumu göz önünde bulundurmamıştır. Ö₁ bir aralıkta türevi pozitif olan bir fonksiyonun aralığın her noktasında artan olduğunu belirtse de bu durumun sebebi hakkında herhangi bir görüş belirtmemiştir.

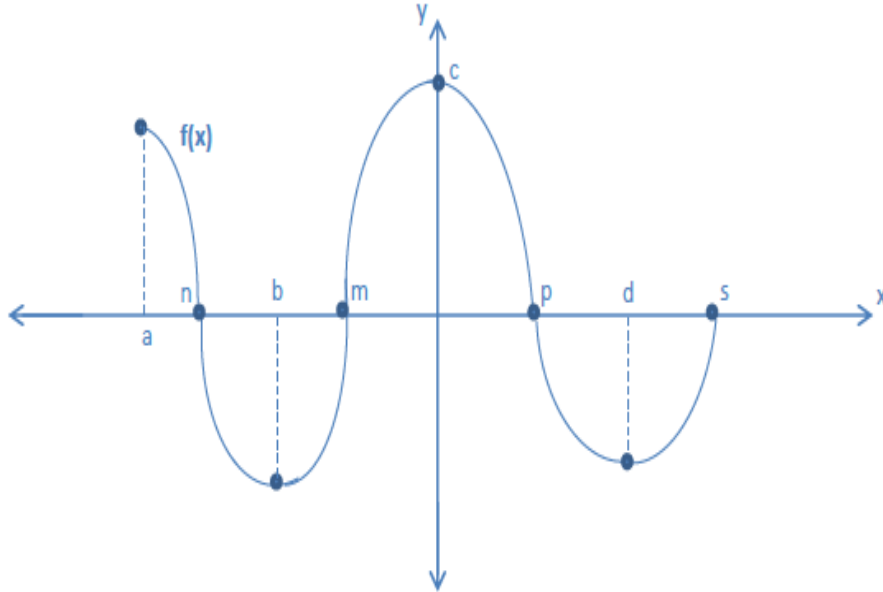
Öğretmenlerden Ö₂ artan fonksiyon ile birinci türevi arasındaki ilişkiyi cebirsel örnekler kullanarak açıklamaya çalışmıştır. Ancak Ö₂ de Ö₁ gibi fonksiyonun türevinin, aralığın her noktasında pozitif olamayacağına yani türevin bir noktada sıfır olabileceğine yönelik istisnai durumlara dikkat etmemiştir. Ö₂ artan fonksiyon ile birinci türevi arasındaki ilişkiyi teğetlerin eğim açılarını dikkate almadan sadece doğrudan işlemsel yollarla göstermeye çalışmıştır. Ö₂ bir aralıkta türevi pozitif olan bir fonksiyonun aralığın her noktasında artan olmasına ya da olmamasına yönelik herhangi bir görüş belirtmemiştir.

Öğretmenlerden Ö₃ ve Ö₄ belirli aralıkta artan bir fonksiyon ile bu fonksiyonun birinci türevi arasındaki ilişkiyi ve bu ilişkinin tam tersine yönelik ilişkiyi eksiksiz bir şekilde ifade etmiştir. Bu öğretmenler artan fonksiyonlar ile bu fonksiyonların türevleri arasındaki ilişkide dikkat edilmesi gereken istisnai durumları da göz önünde bulundurarak değerlendirmeler yapmıştır. Ö₃ ve Ö₄ artan fonksiyonlar ile bu fonksiyonların türevleri arasındaki ilişkiyi belirtirlerken Ö₁'in düşündüğü gibi eğriye çizilen teğet doğrularının eğim açılarının dar ya da geniş olma durumlarını da dikkate almışlardır. Öğretmenlerden Ö₃ eğim açısına yönelik kullandığı bu argümanı, “fonksiyonun türevinin pozitif olduğu aralıkta fonksiyonun da bu aralıktaki her noktada artan olduğuna” yönelik açıklamasında da kullanmıştır. Öte yandan bir aralıkta tanımlı olan $f(x)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında negatif terimli ve artan bir fonksiyon olduğu belirtilerek $f^2(x)$, $-f^3(x)$, $f(x^4)$ fonksiyonlarının da aynı aralıkta artan mı yoksa azalan mı oldukları öğretmenlere sorulmuştur. Öğretmenlerin bu probleme verdikleri cevaplar Tablo 42'de gösterilmiştir.

Tablo 42. $f(x)$ Fonksiyonunun Özelliklerine Bağlı Olarak Başka Fonksiyonların Aynı Aralıkta Artan-Azalan Olmasına Yönelik Öğretmen Görüşleri

Fonksiyonlar	Fonksiyon Aynı Aralıkta Artandır	Fonksiyon Aynı Aralıkta Azalandır	Çözümü Destekleyici İfadeler
$f^2(x)$	Ö ₁	Ö _{2, 3, 4}	$f(x)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında negatif terimli ise $x > 0$ iken $f(x) < 0$ olur. Fonksiyon zaten artanmış bu durumda fonksiyonun türevi $f'(x) > 0$ olur (Ö₂) $f^2(x) \rightarrow 2 \cdot \underbrace{f(x)}_{-} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} = -$ olur
$-f^3(x)$		Ö _{1, 2, 3, 4}	$f(x)$'in $(0, \infty)$ aralığında olması $x > 0$ olduğunu gösterir. Fonksiyonun negatif terimli olması $f(x) < 0$ olması durumunu gerektirir. Fonksiyonun artan olması da $f'(x) > 0$ demektir (Ö₁) $(-f^3(x))' = -3 \cdot \underbrace{f^2(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} = -$ olur
$f(x^4)$	Ö _{1, 2, 3, 4}		Bir aralıkta tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında negatif terimli ise $x > 0$ ve $f(x) < 0$ şeklinde belirtilir. $f(x)$ artan olduğu için fonksiyonun türevi olan $f'(x)$ ifadesi için $f'(x) > 0$ yazılır (Ö₃) $f(x^4) \rightarrow \underbrace{f^4(x^4)}_{+} \cdot \underbrace{4x^3}_{+} > 0$ artan

Tablo 42'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı soru kökündeki verilere göre fonksiyonun tanım kümesinden alınan x değişkeninin ve $f'(x)$ 'in davranışını doğru bir şekilde göstermiştir. Ancak Ö₁ $f(x)$ fonksiyonunun negatif terimli olmasından dolayı, bu fonksiyonun sembolik ifadesini $f(x) < 0$ şeklinde göstermesi gerekirken $f(x) > 0$ şeklinde göstermiş ve $f(x)$ 'in davranışı hakkında yanlış bir görüşte bulunmuştur. Ö₁ “ $-f^3(x)$, $f(x^4)$ ” fonksiyonlarının aynı aralıkta artan-azalan olduğunu belirlerken de fonksiyonu $f(x) > 0$ şeklinde düşünerek işlemine devam etmiştir. Öğretmenlerin tamamı $f(x)$ dışındaki fonksiyonların $f(x)$ 'in tanımlı aralığında artan ya da azalan olup olmadıklarını belirlerken fonksiyonların türevlerini alıp türevin işaretlerine göre o fonksiyonların aynı aralıkta artan-azalan olduklarına karar vermiştir. Öğretmenlerden Ö₂, Ö₃ ve Ö₄ problemde yer alan bütün fonksiyonların tanımlandığı aralıkta artan mı yoksa azalan mı olduğuna yönelik doğru cevaplar vermiştir. Ancak Ö₁ sadece ilk fonksiyonun tanımlandığı aralıkta artan mı yoksa azalan mı olduğuna yönelik yanlış bir cevap vermiştir. Aslında Ö₁ ikinci fonksiyonla ilgili problemdeki çözümünde de aynı verileri kullanarak yanlış sonuca ulaşabilirdi. Ancak ikinci fonksiyonun olduğu problemde $-f^3(x)$ ifadesinin türevi alındığında türevden gelen $f^2(x)$ ifadesi $f(x) < 0$ olma durumunu $f^2(x) > 0$ durumuna dönüştürdüğünden Ö₂, Ö₃ ve Ö₄ öğretmenlerinin $-f^3(x)$ fonksiyonun artan-azalanlığına yönelik buldukları sonuçlar Ö₁'in bulduğu sonuçla aynı olmuştur. Öte yandan bir aralıkta tanımlı olan bir $f(x)$ fonksiyonunun aralığın belirli alt aralıklarındaki türevlerinin pozitif mi, negatif mi yoksa sıfır mı olduklarının ve bu alt aralıklardaki türevlerin neden pozitif, negatif ya da sıfır olduğunun tespit edilmesi için öğretmenlere Şekil 17'deki problem sorulmuştur.



Şekil 17. $f(x)$ 'in alt aralıklarında türevin pozitif, negatif ya da sıfır olmasına dair problem.

Şekil 17'deki problemde elde edilen verilere göre $f(x)$ fonksiyonunun türevli olduğu aralıklar pozitif, negatif ya da sıfır şeklinde sınıflandırılmıştır. Öğretmenlerin Şekil 17.'deki probleme verdikleri cevaplar Tablo 43'de gösterilmiştir.

Tablo 43. $f(x)$ 'in Alt Aralıklarında Türevin Pozitif, Negatif ve Sıfır Olmasına Yönelik Öğretmen Görüşleri

Türevin Durumu	Ö ₁	Ö ₂	Ö ₃	Ö ₄
$f'(x) > 0$	(b, 0)	[b, m]	(b, 0)	(b, 0)
	(d, s)	[m, c] [d, s]	(d, s)	(d, s)
$f'(x) < 0$	(a, b)	[a, n]	(a, b)	(a, b)
	(0, d)	[c, p] [p, d]	(0, d)	(0, d)
$f'(x) = 0$	$x = b$	$x = b$	$x = b$	$x = b$
	$x = 0$	$x = c$	$x = 0$	$x = 0$
	$x = d$	$x = d$	$x = d$	$x = d$

Tablo 43'deki bulgulara göre Ö₂ haricindeki tüm öğretmenler $f(x)$ 'in alt aralıklarında fonksiyonun türevinin pozitif, negatif ve sıfır olmasına yönelik eksiksiz ve doğru görüşler belirtmiştir. Ö₂ haricindeki öğretmenler fonksiyonun türevinin pozitif ve negatif olduğu aralıkları gösterirken bu gösterimleri açık aralık kullanarak belirtmişlerdir. Ö₁, Ö₃ ve Ö₄'ün belirli aralıkta tanımlı bir fonksiyonun uç noktalarında fonksiyon eğrisine çizilecek teğetlerin sayısına yönelik yorumları hatırlanacak olursa bu öğretmenler tanımlı uç noktalarda birden fazla teğet çizilebileceğinden bahsetmişlerdi. Öğretmenler fonksiyonun türevinin pozitif, negatif ve sıfır olmasına yönelik bu problemde aralıkları açık olarak belirtmelerinin sebebi olarak açık aralıklarda yer alan tanımlı uç noktalarda türevin olmadığını bu nedenle türevin aralıkta aranması gerektiğini ve aralığın kapalı şekilde gösterilmemesi gerektiğini belirtmişlerdir. Aynı zamanda öğretmenler, bazı aralıklarda yer alan ekstremum noktalarından dolayı yani o noktadaki türevin sıfır olması durumundan dolayı ekstremum noktası özelliğine sahip tanımlı noktaların da açık aralıkta gösterilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Öğretmenler bir aralıkta tanımlı fonksiyon eğrisi üzerindeki bir ekstremum noktasının türevinin hem pozitif ya da negatif hem de sıfır olmasının aynı anda söz konusu olmayacağını

belirterek ekstremum özelliğine sahip uç noktaların bir aralıktaki gösterimlerinde açık aralığın kullanılması gerektiğine ve bu noktaların aralığa dâhil edilmemesi gerektiğine vurgu yapmışlardır.

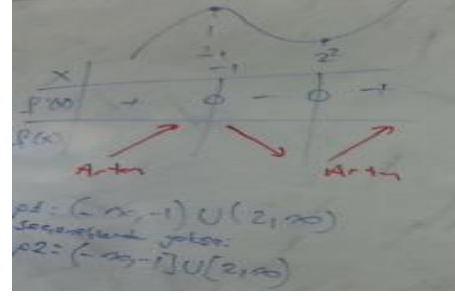
Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ ayrıca fonksiyonda çukurluk ya da tepe noktası özelliğine sahip olan noktalarda teğet eğimlerinin x eksenine paralel ve tek olduğunu, bu noktalardaki teğet eğimlerine yönelik açı ölçüsünün sayısal değerinin $\tan 0^\circ = 0$ olduğunu belirterek fonksiyonun bu noktalardaki türevinin sıfır olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmenlerden Ö₂ ise bu üç öğretmenin ifade ettiği açıklamaların tam aksine fonksiyonun birinci türevinin pozitif ve negatif olduğu aralıklara yönelik eksik ve yanlış yorumlarda bulunmuştur. Ö₂ ayrıca fonksiyonun birinci türevinin sıfır olduğu noktalardan $x = 0$ noktasını da yanlış bir şekilde göstermiştir. Ö₂ öğretmeni y ekseninde birinci türevi sıfır olan “c” noktasını x eksenindeymiş gibi düşünerek $x = c$ noktasında fonksiyonun birinci türevinin sıfır olduğunu ifade etmiştir. Ö₂ öğretmeni $f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinde pozitif ya da negatif olan kapalı aralıklarla ilgili olarak belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun uç noktalarının tanımlı olmasından dolayı bu noktalarda tek teğet çizileceğini dolayısıyla bu şekildeki uç noktalarda türevin olduğunu dile getirmiştir. Ö₂ bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun tanımlı olduğu uç noktalarının türevli olmasından dolayı bu noktaların kapalı aralıkta gösterilmesi gerektiğini düşünmüştür. Ö₂’nin tanımlı uç noktalara yönelik görüşleri daha önce bir aralıkta tanımlanmış bir fonksiyonun tanımlı olduğu uç aralıklarındaki türevinin varlığına ve bu noktalara çizilecek teğetlere yönelik yorumlarla örtüşmektedir. Öte yandan öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlar ile bu fonksiyonların türevle ilişkisine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden edinilen yansımalar Tablo 44’de gösterilmiştir.

Tablo 44. Artan-Azalan Fonksiyonlar ve Bu Fonksiyonların Türevle İlişkisine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları

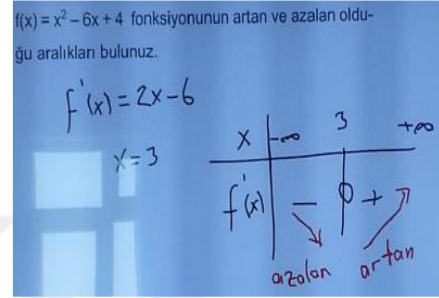
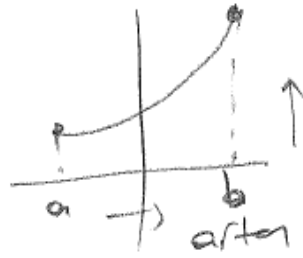
Öğretmenler	Görüşme Yansımaları	Gözlem Yansımaları
Ö ₁		

Tablo 44. (Devamı)

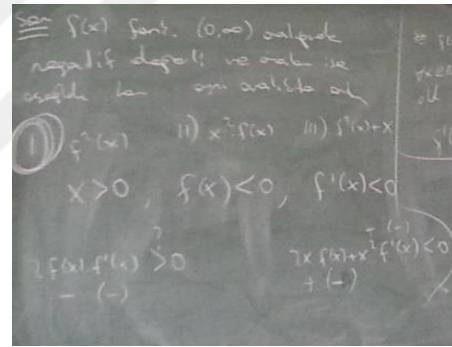
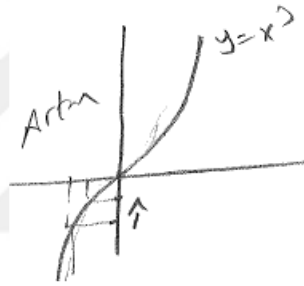
Ö₂



Ö₃



Ö₄



Tablo 44'deki bulgulara göre Ö₁ ve Ö₂ öğretmenleri haricindeki öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların türevle ilişkisine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden elde edilen verilerin birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Yapılan görüşmelerde Ö₁ ve Ö₂'nin artan-azalan fonksiyonlara ve bu fonksiyonların türevle ilişkisine yönelik açıklamalarının eksik olduğu görülmüştür. Ö₁ ve Ö₂ görüşmelerde artan-azalan fonksiyonların tanımında yer alması gereken bazı özellikleri belirtmemişlerdir. Bununla birlikte bu öğretmenler bir aralıkta tanımlı fonksiyonun türevinin de aynı aralıkta daima pozitif olacağını belirterek istisnai durumları dikkate almamışlardır. Öğretmenlerden Ö₂ bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun türevinin işaretine yönelik alt aralıkları da eksiksiz şekilde belirleyememiştir. Ö₁ ve Ö₂'nin ders içi gözlemleri incelendiğinde bu öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonların tanımındaki tanım-değer kümeleri ve tanım kümesinden seçilen değişkenin özelliklerine yönelik görüşmede yapmadıkları açıklamaları derste öğrencilerine anlattıkları görülmüştür. Öğretmenlerden Ö₂ görüşme sürecinde belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun aynı

aralıktaki türevinin işaretlerine yönelik alt aralıkları doğru bir şekilde belirleyemezken ders ortamında bu alt aralıkları doğru bir şekilde belirlemiştir. Hatta $\ddot{O}_2$ bu konuyla ilgili öğrencilerine yaptığı çözümlerde alt aralıkların tümünü eksiksiz bir şekilde öğrencilerine göstermiştir. Öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ görüşmede artan-azalan fonksiyona yönelik grafiksel gösterimlerden yararlanmıştır. Ders içi gözlemlerde de $\ddot{O}_1$ benzer grafiklerden yararlanarak artan-azalan fonksiyonlar hakkında öğrencilerine bilgi vermiştir. Bununla birlikte $\ddot{O}_1$ fonksiyonun artanlığı-azalanlığı ile birinci türevi arasındaki ilişkiyi araştırmacıya açıklarken türevin işaret tablosundan yararlanmıştır. $\ddot{O}_1$ ders anlatım sırasında da benzer işaret tablosundan yararlanarak artan-azalan fonksiyonların türevle ilişkilerini öğrencilerine anlatmış ve konuya dönük işaret tablosundan yararlanacağı işlemsel sorularla dersi işlemiştir.

Yapılan görüşmelerde öğretmenlerden $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün artan-azalan fonksiyonların tanımına ve bu fonksiyonların türevle ilişkisine yönelik görüşlerinin eksiksiz olduğu söylenebilir. Bu öğretmenler görüşme sürecinde hem artan-azalan fonksiyonların tanımında bulunması gereken özellikleri doğru bir şekilde açıklamışlar, hem de artan-azalan fonksiyonlarla bu fonksiyonların türevleri arasındaki ilişkilere yönelik eksiksiz görüşler ortaya koymuşlardır. Bununla birlikte bu öğretmenler fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta türevinin işaretlerine yönelik aralıkları doğru bir şekilde araştırmacıya göstermişlerdir. Bu öğretmenlerin ders iç gözlemleri incelendiğinde her iki öğretmenin de görüşmelerde konuya yönelik belirttikleri görüşler doğrultusunda ders işledikleri görülmüştür. Öğretmenlerin artan-azalan fonksiyonların tanımında araştırmacıya açıkladıkları özellikleri derste de belirttikleri, fonksiyonun artanlığı ya da azalanlığı durumunda türevin de pozitif ya da negatif olma durumunu görüşmede olduğu gibi derste öğrencilerine açıkladıkları ve buna yönelik işlemsel sorular çözdükleri görülmüştür. Öğretmenlerin derste fonksiyonun tanımlandığı aralıkta türevinin işaretlerini incelerken çoğunlukla işaret tablosundan yararlandıkları görülmüştür. Öğretmenler bu işaret tablolarını kullanarak fonksiyonun türevinin işaretine yönelik alt aralıkları da daha kolay belirleyebilmişlerdir.

Ekstreum noktaları ve bu noktaların türevle ilişkisi.

Tablo 45'de öğretmenlerin kritik nokta ve ekstreum noktalarına yönelik yaptıkları açıklamalar Zazkis ve Leiken (2008)'in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin kritik nokta ve ekstreum noktalarına yönelik açıklamaları erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik kategorileri dikkate alınarak incelenmiştir.

Tablo 45. Kritik Nokta ve Ekstremum Noktalarına Yönelik Kategoriler ve Kodlar

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö _{2, 3, 4}
	Zor verilmiş cevap	Ö ₁
	Kısmen zor verilmiş cevap	
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Gerekli ve yetersiz	
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Prototip olmayan örnek	

Tablo 45’deki bulgular erişebilirlik kategorisi açısından incelendiğinde Ö₁ haricindeki tüm öğretmenlerin kritik nokta ve ekstremum noktalarına yönelik görüşlerini kolayca ve zorlanmadan dile getirdikleri görülmüştür. Öğretmenlerden Ö₁ ise kritik nokta kavramı hakkındaki görüşlerini ifade ederken biraz düşünmüş, duraksamış ve daha sonra görüş belirtmiştir. Öğretmenlerin kritik nokta ve ekstremum noktalarına yönelik görüşleri doğruluk kategorisi bakımından ele alındığında öğretmenlerin tamamının kritik noktaya ve ekstremum noktalarına yönelik açıklamalarının eksiksiz olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı hem kritik nokta kavramında bu noktanın türevle olan ilişkisinden bahsetmişler hem de ekstremum noktaları içerisinde yer alan yerel ve mutlak ekstremum noktalarını grafik üzerinde örneklerle de destekleyerek doğru bir şekilde açıklamışlardır. Öğretmenlerin kritik nokta ve ekstremum noktalarına yönelik görüşleri zenginlik kategorisi bakımından değerlendirildiğinde öğretmenlerin kritik nokta ve yerel maksimum, yerel minimum, mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarına yönelik açıklamaları ile bu kavramları açıklarken kullandıkları gösterimlerin lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2014; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017; Ünlü & Er, 2013) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Ayres, 1978; Balcı, 1999; Caferov, 1999; Çoker vd., 1982; Demir, 2014; Edwards & Penney, 2001; Hacısalihoğlu vd., 1988; Kadakal, 2010; Şan, 1976; Thomas vd., 2011) yer alan prototip açıklamalar ve gösterimler oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin kritik

nokta ve ekstremum noktalarına yönelik görüşlerini daha ayrıntılı incelemek amacıyla, bu noktaların nasıl açıklandığı Tablo 46’da araştırmacının oluşturduğu kategori ve kodlara göre incelenmiştir.

Tablo 46. Kritik Nokta ve Ekstremum Noktalarına Yönelik Öğretmen Görüşleri

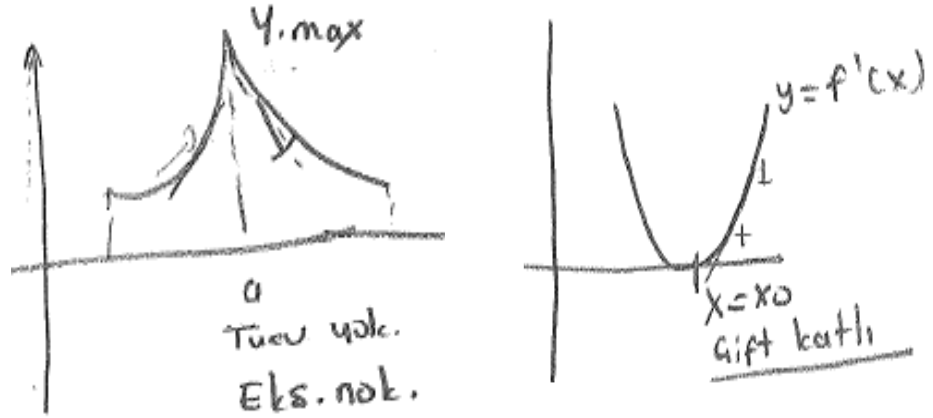
Öğretmenler	Kritik Nokta Kavramına Yönelik Görüşler	Ekstremum Noktalarına Yönelik Görüşler
Ö ₁	<i>Fonksiyonun karakterinin değiştiği noktadır. Bu nokta sivri nokta olduğunda sağdan-soldan türevler birbirinden farklı olur. Bu noktada keskin değil de yumuşak bir eğrisel geçiş varsa bu noktada türev sıfır oluyor</i>	<i>Bu noktalar bir nevi kritik noktalar. Fonksiyonun bir aralıkta alabileceği değerlerinden en uçtaki büyük ya da küçük değer ekstremum oluyor. Fonksiyonun bir aralıkta artanlıktan azalanlığa geçtiği nokta yerel maksimum, tam tersine aynı aralıkta azalanlıktan artanlığa geçtiği nokta ise yerel minimum noktasıdır. Fonksiyonun yerel maksimum noktaları arasındaki en büyük noktaya mutlak maksimum, yerel minimum noktaları arasındaki en küçük noktaya mutlak minimum noktası denir. Bir aralıkta bir tane yerel maksimum ve bir tane yerel minimum noktası varsa bu maksimum ve minimum noktaları aynı aralıkta mutlak maksimum ve mutlak minimum noktaları olarak kabul edilir</i>
Ö ₂	<i>Fonksiyonun davranışını değiştirdiği noktadır. Bu noktanın diğer adı da duraklama noktasıdır. Kritik noktalarda $f'(x) = 0$ olmaktadır</i>	<i>Ekstremum kelime anlamı olarak uç nokta demektir. Yapılan hareketlerin en ucu anlamına geliyor. Fonksiyonun alabileceği büyük ya da küçük değerlerdir. Fonksiyon bir aralıkta artanlıktan azalanlığa geçiyorsa bu tip noktaya yerel maksimum, tam tersine aynı aralıkta azalanlıktan artanlığa geçiyorsa bu tip noktaya ise yerel minimum noktası denir. Fonksiyonun yerel maksimum değerleri arasındaki en büyük değer mutlak maksimum, yerel minimum değerleri arasındaki en küçük değer ise mutlak minimum noktasıdır. Her mutlak minimum noktası bir yerel minimum noktasıdır. Aynen her mutlak maksimum noktası ise aynı zamanda bir yerel maksimum noktasıdır. Ama bunların tersi her zaman doğru değildir</i>
Ö ₃	<i>Birinci türevin işaret değiştirdiği noktalar kritik noktalar. Yani $f'(x) = 0$ olduğu x değerlerine kritik nokta denir. Kritik noktalar kararlı noktalar olarak da adlandırılır</i>	<i>Fonksiyonun en az ya da en fazla olacak şekilde aldığı değerler yani uç değerler ekstremum noktalarıdır. Yerel maksimum noktası, fonksiyonun bir aralıkta büyük değer aldığı noktalar iken yerel minimum noktası fonksiyonun bir aralıkta küçük değer aldığı noktalar. Fonksiyonun bir aralıkta alabildiği büyük değerlerden en büyüğüne mutlak maksimum değeri, fonksiyonun bir aralıkta alabildiği küçük değerlerden en küçüğüne ise mutlak minimum değeri denir</i>
Ö ₄	<i>Bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon üzerindeki $x = x_0$ noktası için fonksiyon bu x_0 noktasında işaret değiştiriyorsa bu $x = x_0$ noktasına kritik nokta denir. Bu kritik nokta $f'(x_0) = 0$ şeklinde de gösterilir</i>	<i>Ekstremum noktalarının da kritik noktalar oldukları söylenebilir. Fonksiyonun davranış değiştirdiği noktalar ekstremum noktalarıdır. Ekstremum noktaları yerel maksimum ve yerel minimum ile mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarıdır. Bazı kaynaklarda yerel kelimesi yerine bağıl kelimesi de kullanılabilmektedir. Yerel maksimum değeri bir bölgede alınan en büyük değer iken yerel minimum değeri bir bölgede alınan en küçük değer olarak bilinir. Mutlak maksimum noktası ise bir aralıkta birden fazla yerel maksimum noktası varsa bu maksimum noktalarından en büyüğüne denir. Mutlak minimum noktası ise bir aralıkta birden fazla yerel minimum noktası varsa bu minimum noktalarından en küçüğüne denir. Eğer ki bir bölgede ya da aralıkta tek bir yerel maksimum veya tek bir yerel minimum noktası varsa bu aralıkta aynı noktalar mutlak maksimum ve mutlak minimum noktaları olarak kabul edilir</i>

Tablo 46'daki bulgulara göre öğretmenlerden $\ddot{O}_2$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ kritik noktayı tanımlarken alandaki matematik öğretim kitaplarında (Ayres, 1974; Balcı, 1999) yer alan kritik nokta tanımıyla uyumlu açıklamalar yaparak kritik noktayı fonksiyonun türevini sıfır yapan noktalar şeklinde tanımlamış ve tanımlarında $f'(x) = 0$ cebirsel notasyonunu kullanmıştır. $\ddot{O}_1$ ise kritik noktayı cebirsel argümanlar kullanmak yerine sözel olarak açıklamıştır. Öğretmenlerin tamamı kritik nokta kavramına yönelik eksiksiz ve doğru açıklamalar yapmıştır. Öğretmenlerin ekstremum noktalarına yönelik görüşleri incelendiğinde tüm öğretmenler ekstremum noktaları arasında yerel maksimum, yerel minimum, mutlak maksimum ve mutlak minimum olmak üzere dört farklı ekstremum noktasına yönelik görüş belirtmiştir. Öğretmenler ekstremum kavramını ifade ederken kritik nokta, uç nokta, büyük-küçük uç değer şeklinde kelimelerden yararlanmıştır. Tüm öğretmenlerin ekstremum kavramına ve ekstremum noktalarına yönelik görüşlerinin eksiksiz ve doğru olduğu söylenebilir. Tüm öğretmenler yerel ekstremum noktalarıyla mutlak ekstremum noktaları arasındaki ilişkiyi net bir şekilde açıklamıştır. Öğretmenler mutlak ekstremum noktalarına yönelik görüş belirtirken yerel ekstremum noktası kavramından yararlanmıştır. Öğretmenlerin bir aralıkta tanımlanmış $f(x)$ fonksiyon eğrisindeki ekstremum noktalarıyla bu fonksiyonun türevi arasındaki ilişkisine yönelik görüşlerini ayrıntılı incelemek amacıyla öğretmenlere bir problem sorulmuştur. Öğretmenlere sorulan problemde bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun ekstremumunun olduğunu noktada fonksiyonun türevli olmasının zorunlu olup olmadığı ve bu durumun tam tersinin de doğru olup olmadığı sorulmuştur. Öğretmenlerin ekstremum noktaları ile bu noktalardaki türevin ilişkisine yönelik ayrıntılı görüşleri araştırmacı tarafından oluşturulan kategorilere göre Tablo 47'de verilmiştir.

Tablo 47. *Ekstremum Noktaları İle Türevin İlişkisi ve Bu ilişkinin Nedenlerine Dair Öğretmen Görüşleri*

Öğretmenler	Ekstremum Noktaları ile Türev İlişkisi
$\ddot{O}_1$	<i>Bir fonksiyonun bir aralıkta ekstremumunun olduğu noktada fonksiyon türevli olmak zorunda değildir. Çünkü ekstremum noktası sivri ya da köşe nokta olabilir. Öte yandan bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun bu aralıktaki bir noktada türevli olması fonksiyonun aynı noktada ekstremum değerine sahip olacağı anlamına gelmez. Çünkü fonksiyonun bir aralıkta tanımlı olduğu herhangi bir noktasında çift katlı kök varsa bu noktada türev sıfır olmasına rağmen nokta ekstremum noktası olarak değerlendirilmez. Bu iki duruma yönelik örnek çizimler şu şekilde olabilir:</i>

Tablo 47. (Devamı)

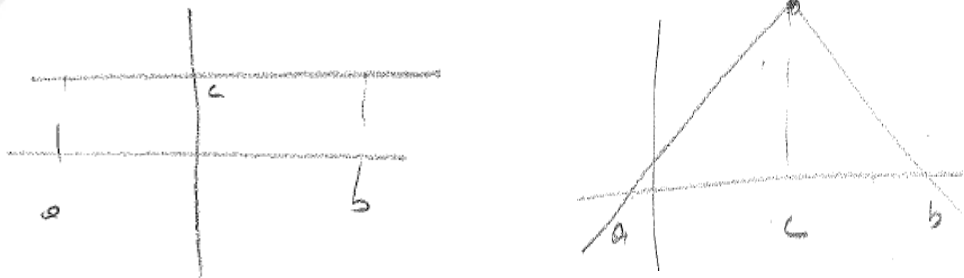


Öğretmenler

Ekstreum Noktaları İle Türev İlişkisi

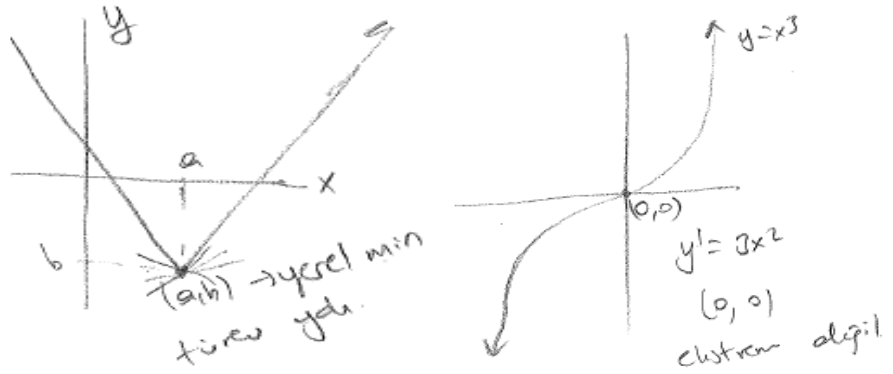
Ö₂

Fonksiyon tanımlandığı aralıktaki bir noktada ekstreum noktasına sahipse o noktada türevli olması gerekmez fonksiyonun. Çünkü o noktada kırık ya da sivri nokta olma özelliği varsa o noktada türev olmaz. Bu durumda da ekstreumun olması türevinin olmasını gerektirmez. Tam tersine fonksiyonun birinci türevinin sıfır olduğu noktanın da ekstreum noktası olması gerekmez. Türeviyle birlikte ekstreum noktası olması için tek katlı kök gibi işaret değiştirilen bir durum söz konusu olurdu. Bir de artışı azalışa ya da azalışı artışıya yönelik bir eğilim veya salınım olurdu. Örneğin; sabit fonksiyonu düşünelim bir aralıkta tanımlı. Bu fonksiyonun aralıktaki herhangi bir noktasında türev sıfırdır ama bu nokta ekstreum değil. Bu iki duruma yönelik örnekler şöyle gösterilebilir:

Ö₃

Bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun aralığın bir noktasında ekstreumunun olması fonksiyonu o noktada her zaman türevli kılmaz. Mutlak değer fonksiyonu bu duruma örnektir. Örneğin minimum noktası köşe noktası olduğundan bu noktada türev yoktur. Bunun tam tersi olan durum değerlendirildiğinde I. türevi sıfır olan nokta da ekstreum noktası olmak zorunda değildir. Ekstreum noktasında bazen çift katlı kökler olabiliyor. $y' = 3x^2$ örneğinde olduğu gibi. Bu fonksiyonun birinci türevinde türev sıfırdır ancak çift katlı kök olduğundan sürekli artanlık söz konusudur. Bu durumda da işaret değişimi olmuyor ve ekstreum noktası olmuyor. Bir noktada ekstreum noktası olması için o noktada türev varsa türevin işaret değiştirmesi gerekiyor. Örnekler şu şekildedir:

Tablo 47 (Devamı)



Öğretmenler

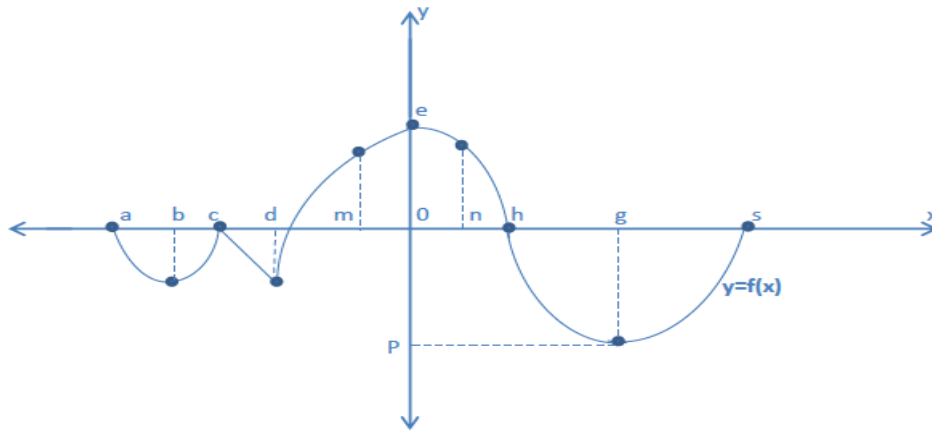
Ekstremler Noktaları İle Türev İlişkisi

Ö₄

Fonksiyonun tanımlandığı aralıktaki bir noktada türevi olmadığında aynı nokta yerel ekstremum noktası olabiliyor. Bu nedenle ekstremum olunan noktada fonksiyon türevli olmak zorunda değil. $y = |x|$ fonksiyonunda türev yok ancak $x = 0$ noktası bir ekstremum noktası yani bir yerel minimum noktasıdır. Diğer taraftan birinci türevin sıfır olduğu nokta ekstremum noktası olmak zorunda değildir. Örneğin türev artandan azalmaya veya tam tersi yönelime geçmediyse, türev işaret değiştirmiyorsa, türev çift katlı kök ise o noktada ekstremum noktasından söz edilemez. Örneklerimi aşağıda şöyle göstereyim:



Tablo 47'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı ekstremum noktası ile türev arasındaki ilişkilere yönelik eksiksiz ve doğru tespitlerde bulunmuşlardır. Bununla birlikte öğretmenler ekstremum noktası ile türev ilişkisini grafiksel argümanlar yardımıyla desteklemişlerdir. Öğretmenlerin tamamı bir aralıktaki tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum olduğu noktada türevin olmasını gerektirmeyen duruma yönelik köşe ya da sivri nokta örneğini vermiştir. Öğretmenler bunun tam tersi durumuna yönelik ise çift katlı kökten dolayı işaretin değişmediği örneği ya da fonksiyonun artıştan-azalışa veya azalıştan-artışa yönelik davranış değişikliğinde bulunmadığı örneği vermiştir. Öte yandan bir aralıktaki tanımlı $f(x)$ fonksiyon eğrisi üzerindeki yerel ekstremum noktalarının varlığını ve bu noktaların ekstremum noktaları olması nedenlerinin belirlenmesi amacıyla öğretmenlere Şekil 18'deki problem sorulmuştur.



Şekil 18. $f(x)$ üzerindeki yerel ekstremum noktalarının belirlenmesine yönelik problem.

Şekil 18’deki problemde elde edilen verilere göre belirli bir aralıkta tanımlanmış bir $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarının olduğu noktalar; yerel maksimum noktasının apsisi, yerel minimum noktasının apsisi, mutlak maksimum noktasının apsisi ve mutlak minimum noktasının apsisi olmak üzere dört kategoriye ayrılmıştır. Öğretmenlerin Şekil 18’deki probleme verdikleri cevaplar Tablo 48.’te gösterilmiştir.

Tablo 48. $f(x)$ ’in Yerel Ekstremum Noktalarına Yönelik Öğretmen Görüşleri

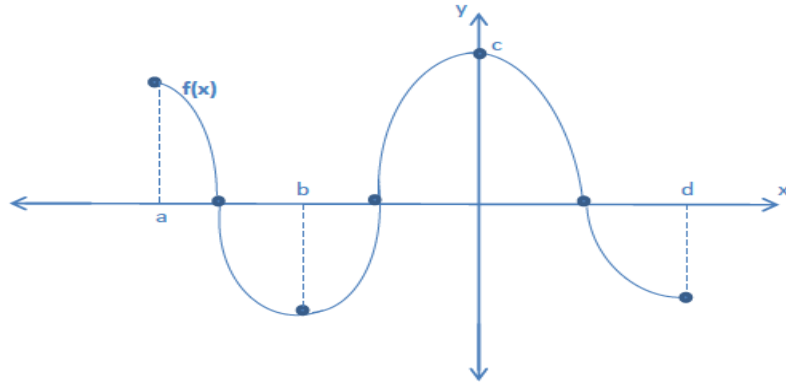
Ekstremum Noktaları	Ö ₁	Ö ₂	Ö ₃	Ö ₄
Yerel minimum noktasının apsisi	$x = b$	$x = b$	$x = b$	$x = b$
	$x = d$	$x = d$	$x = d$	$x = d$
	$x = g$	$x = g$	$x = g$	$x = g$
Yerel maksimum noktasının apsisi	$x = a$		$x = a$	
	$x = c$	$x = c$	$x = c$	$x = c$
	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$
	$x = s$		$x = s$	
Mutlak minimum noktasının apsisi	$x = g$	$x = g$	$x = g$	$x = g$
Mutlak maksimum noktasının apsisi	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$

Tablo 48’deki bulgulara göre öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₃ bir aralıkta tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarına yönelik eksiksiz ve doğru açıklamalarda

bulunmuşlardır. Ancak öğretmenlerden Ö₂ ve Ö₄'ün fonksiyonun yerel ekstremum noktalarına yönelik doğru ancak eksik açıklamalarda bulundukları söylenebilir. Ö₂ ve Ö₄'ün eksik açıklamalarının olduğu bölüm fonksiyonun yerel maksimum noktalarının apsislerinin belirlendiği bölümdür. Bu öğretmenler yerel maksimum noktaları arasında fonksiyonun tanımlı olduğu uç noktaları göz ardı etmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ ve $x = s$ noktalarının yerel ekstremum noktası olamayacağına yönelik Ö₂ “a” noktasından önce ve “s” noktasından sonra fonksiyonun nasıl bir harekette bulunduğu bilinmediği için bu noktaların ekstremum noktalar olmasına yönelik herhangi bir şey söylenemeyeceğini belirtmiştir. Öğretmenlerden Ö₄ ise $x = a$ ve $x = s$ gibi sınır noktalarının ekstremum noktaları olup olmamalarına yönelik net bir yargıya varmanın doğru olmadığını belirterek bu noktalar hakkında kesin bir şeyin söylenemeyeceğini ifade etmiştir. Bu öğretmenlerin görüşlerinin aksine Ö₃ öğretmeni $f(x)$ fonksiyonun tanımlı uç noktalarındaki $x = a$ ve $x = s$ noktalarına yönelik bu uç noktaların $f(x)$ 'in yerel maksimum noktaları olduklarını belirtmiştir. Bu noktaların yerel maksimum noktası olmasının sebebi olarak da yerel maksimum noktasının tanımını referans göstermiştir. Ö₃ yerel maksimum noktasının tanımını düşünerek bu uç noktaların çok yakın komşuluklarında bu uç noktalardan daha büyük bir nokta olmadığını, noktaların yakın komşuluklarında en büyük apsis noktasının yine bu uç noktalar olduğunu dile getirmiştir. Ö₃ tarafından yerel maksimum noktasına yönelik açıklamalar Kadakal (2010) ile Thomas vd. (2009, 2011)'nin yerel maksimum noktasının tanımına yönelik açıklamalarıyla uyumludur. Bu kaynaklarda tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonunun tanımlandığı aralığın uç noktalarında bulunan sınır noktalarının yerel ekstremum noktaları olup olmadıklarının belirlenmesinde bu noktaların yakın komşuluklarının dikkate alınması gerektiğinden bahsedilmiştir.

Öğretmenlerin tümü yerel minimum noktalarının apsislerine yönelik fonksiyonun ilgili noktalarda azalıştan artanlığa geçtiğini gerekçe göstererek $x = b$, $x = d$ ve $x = g$ noktalarının yerel minimum noktaları olduklarını belirtmiştir. Bütün öğretmenler yerel maksimum noktalarının apsislerine yönelik olarak da fonksiyonun ilgili noktalarda artanlıktan azalanlığa geçtiğini gerekçe göstererek $x = a$, $x = c$, $x = 0$ ve $x = s$ noktalarının yerel minimum noktaları olduklarını belirtmiştir. Tüm öğretmenler fonksiyonun mutlak minimum noktasına yönelik fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki minimum noktalarından en küçüğünü gerekçe göstererek $x = g$ noktasının mutlak minimum noktası olduğunu belirtmiştir. Yine öğretmenlerin tamamı fonksiyonun mutlak maksimum noktasına yönelik olarak da fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki maksimum noktalarından en büyüğünü gerekçe göstererek $x = 0$ noktasının mutlak maksimum noktası olduğunu belirtmiştir. Buradan hareketle öğretmenlerin yerel ekstremum kavramlarına yönelik görüşme sürecindeki

açıklamalarıyla bu problemdeki yerel ekstremum kavramlarına yönelik açıklamalarının birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Öte yandan öğretmenlerin bir aralıkta tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $f'(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizibilme becerilerini belirleyebilmek amacıyla öğretmenlere Şekil 19.'daki problem sorulmuştur.



Şekil 19. $f'(x)$ 'in grafiğinin çiziminde yararlanılacak $f(x)$ fonksiyonunun grafiği.

Şekil 19'daki problemde elde edilen verilere göre belirli bir aralıkta tanımlanmış bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak $f'(x)$ fonksiyonunun grafiğinin çiziminde katedilecek aşamalar; (a, b) aralığında fonksiyonun azalan olmasından dolayı $f'(x) < 0$ olması, $(b, 0)$ aralığında fonksiyonun artan olmasından dolayı $f'(x) > 0$ olması ve $(0, d)$ aralığında fonksiyonun azalan olmasından dolayı $f'(x) < 0$ olması şeklinde üç kategoriye ayrılmıştır. Öğretmenlerin Şekil 19'daki probleme verdikleri cevaplardan elde edilen veriler Tablo 49'da gösterilmiştir.

Tablo 49. $f'(x)$ 'in Grafiğinin Çizimine Yönelik Öğretmen Görüşleri

$f'(x)$ 'in Durumu	Ö ₁	Ö ₂	Ö ₃	Ö ₄	Destekleyici İfadeler
(a, b) aralığında $f(x)$ azalan olduğundan $f'(x) < 0$	✓	✓	✓	✓	"a" noktasında fonksiyonun yerel maksimum noktası olduğunu düşünelim. Fonksiyon (a, b) aralığında azalandır. "a" noktası ile "b" noktası arasında fonksiyona teğet olan doğruların eğimleri negatif olduğundan $f'(x)$ grafiği (a, b) aralığında x eksenine altında çizilir (Ö ₃)
$(b, 0)$ aralığında $f(x)$ artan olduğundan $f'(x) > 0$	✓	✓	✓	✓	"b" noktasında birinci türev sıfır olacaktır. Çünkü "b" noktasında yerel minimum var. Bu nedenle türev fonksiyonunun eğrisi "b" noktasında x eksenini kesecek yani. Sonra "b" noktasından orijine kadar fonksiyonumuz artan çünkü teğetin eğimleri dar açılı. O zaman birinci türevin grafiğini çizerken pozitif değerler olacak $(b, 0)$ aralığında (Ö ₄)
$(0, d)$ aralığında $f(x)$ azalan olduğundan $f'(x) < 0$	✓	✓	✓	✓	$(0, d)$ aralığında fonksiyon azalan olduğu için $f'(x)$ grafiği negatif değerli olacak ve x ekseninin altında çizilecek (Ö ₁)

Tablo 49'daki bulgulara göre tüm öğretmenler fonksiyonun grafiğinden yararlanarak $f'(x)$ 'in grafiğini doğru çizmiştir. Öğretmenlerden Ö_1 $f'(x)$ 'in grafiğinin çiziminde işaret tablosundan yararlanmıştır. Öğretmenler $f'(x)$ 'in grafiğini çizerken fonksiyonun ilgili aralıkta artan-azalan olup olmadığına dikkat etmiştir. Öğretmenler $f(x)$ 'in ilgili aralıkta artanlığını ya da azalanlığını belirlerken teğet eğimlerinin açılarını incelemiştir. Öğretmenlerin $f'(x)$ 'in grafiğine yönelik yaptıkları çizimler Tablo 50'de gösterilmiştir.

Tablo 50. Öğretmenlerin $f'(x)$ 'in Grafiğine Yönelik Çizimleri

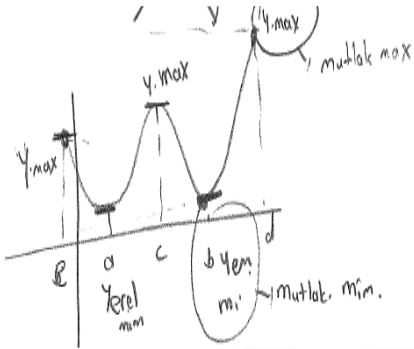
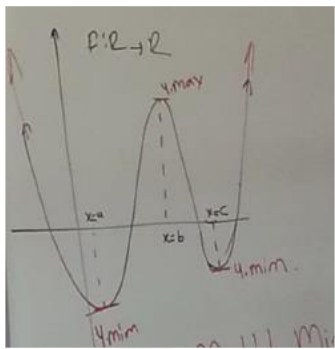
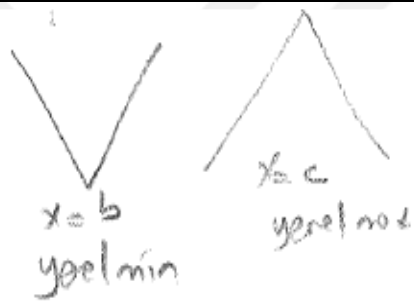
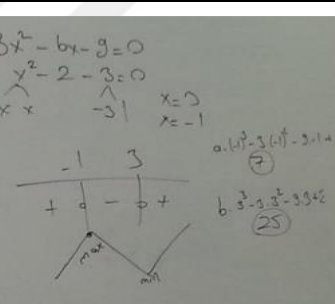
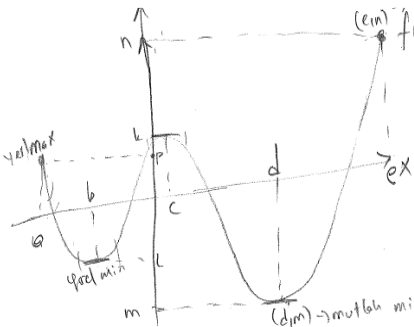
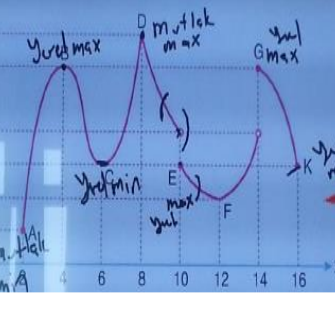
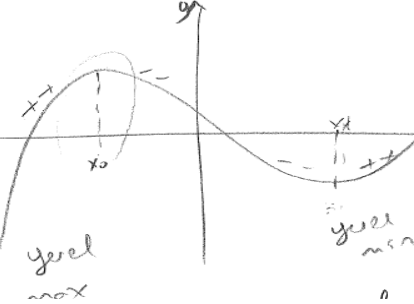
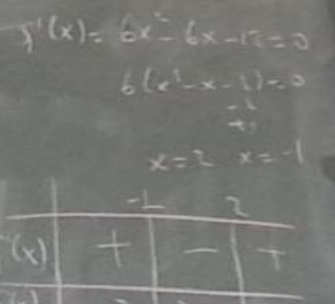
Öğretmenler	$f'(x)$ 'in Grafiğine Yönelik Çizim Örneği
Ö_1	
Ö_2	
Ö_3	
Ö_4	

Tablo 50'deki bulgulara göre öğretmenlerin $f'(x)$ 'in grafiğine yönelik yaptıkları çizimler incelendiğinde $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_3$ 'ün grafik çiziminin başlangıcında “a” noktasını bir yerel ekstremum noktası kabul ederek türev fonksiyonunun grafiğinin çizimine başlamıştır. $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_3$ 'ün türev fonksiyonunun grafiğinin çizimine yönelik bu davranışları onların daha önceden bir aralıkta tanımlı fonksiyonun uç noktalarını da ekstremum noktası olarak kabul etmeleri durumuyla örtüşmektedir. Ancak $\ddot{O}_2$ 'nin bu problemdeki türev grafiğinin çiziminde fonksiyonun tanımlandığı aralıktaki uç noktaları bir ekstremum noktası gibi düşünerek türev fonksiyonunun grafiğini çizmesi daha önce aralığın uç noktalarının ekstremum noktası olma ya da olmama durumuna yönelik görüşleriyle bağdaşmamıştır. Çünkü $\ddot{O}_2$ bir aralıkta tanımlanmış bir fonksiyonun sınırında tanımlı olan uç noktaların ekstremum noktaları olmasına yönelik herhangi olumlu bir görüş belirtmemiştir. Ancak bu problemde $\ddot{O}_2$ fonksiyonun tanımlı uç noktalarının ekstremum noktaları olduklarını düşünerek bu noktalardaki birinci türevi sıfır olarak düşünmüştür. $\ddot{O}_2$ 'nin bir aralıkta tanımlı uç noktalardaki türeve ve bu noktalarda çizilen teğete yönelik görüşleri düşünüldüğünde $\ddot{O}_2$ 'nin başlangıçta tanımlı uç noktaların türevlenebilmesine ve uç noktalarda tek bir teğet doğrusunun çizilmesine yönelik görüşleri uç noktaların ekstremum noktası olma durumuna yönelik görüşleriyle çelişmesine rağmen bu problemdeki görüşüyle örtüşmüştür.

Öte yandan öğretmenlerden $\ddot{O}_4$ ise grafik çizimine başlarken “a” noktasını bir yerel ekstremum noktası gibi düşünmemiştir. $\ddot{O}_4$ benzer şekilde türev fonksiyonunun grafiğinin çizimini bitirirken de “d” noktasını türev grafiği üzerinde tanımlı göstermeyerek açık uçlu şekilde belirtmiştir. $\ddot{O}_4$ bu gösterim tarzında da “d” uç noktasının bir ekstremum noktası olmadığına vurgu yapmış ve “d” noktasında türevin sıfır olmadığına dikkat çekmeye çalışmıştır. $\ddot{O}_4$ ile yapılan görüşmede $\ddot{O}_4$ “a” noktasına çizilen teğetlerin eğim açılarının başlangıçta sıfır dereceye yakın olduğunu daha sonra ise eğim açılarının büyüdüğünü ifade etmiştir. Fonksiyon grafiğinde “a” noktasına tek teğetin çizilemeyeceğini belirten $\ddot{O}_4$ problemin çözümünde önemli olanın işaret tablosu ile fonksiyonun aralıklardaki artanlığı-azalanlığı olduğuna vurgu yapmıştır. Nitekim $\ddot{O}_4$ ile ekstremum noktalarına yönelik yapılan önceki görüşmelerde $\ddot{O}_4$ bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun tanımlı uç aralıklarının ekstremum noktası olma durumuna yönelik herhangi bir olumlu görüş belirtmemiştir. Bu nedenle $\ddot{O}_4$ 'ün ekstremum noktalarına yönelik görüşleriyle türev fonksiyonunun grafiğinin çizimindeki davranışlarının birbiriyle örtüştüğü söylenebilir. Ancak $\ddot{O}_4$ 'ün daha önceden yapılan görüşmelerde bir aralıkta tanımlı uç noktalardaki türevin varlığına yönelik görüşleriyle hem bir aralıkta tanımlı uç noktalarda birden fazla teğetin çizilmesine yönelik görüşlerinin hem de uç noktaların ekstremum noktası olmayacağına yönelik görüşlerinin birbiriyle çeliştiği söylenebilir. Öte yandan öğretmenlerin ekstremum noktaları ve bu

noktaların türevle ilişkisine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden edinilen yansımalar Tablo 51’de gösterilmiştir.

Tablo 51. *Ekstremum Noktaları ve Bu Noktaların Türevle İlişkisine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları*

Öğretmenler	Görüşme Yansımaları	Gözlem Yansımaları
Ö ₁		
Ö ₂		
Ö ₃		
Ö ₄		

Tablo 51'deki bulgulara göre tüm öğretmenlerin ekstremum noktaları ve bu noktaların türevle ilişkisine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden elde edilen verilerin birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Yapılan görüşmelerde $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_3$ bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun artanlıktan azalanlığa geçtiği ya da tam tersi yönde hareket ettiği noktalarda fonksiyonun ekstremum noktalarına sahip olduklarını dile getirmişlerdir. Bu öğretmenler aynı zamanda ekstremum noktalarıyla türev arasındaki ilişkiyi de araştırmacıya doğru bir şekilde açıklamışlardır. Öğretmenler ekstremum kavramı içerisinde yer alan krtik nokta kavramına yönelik de sırasıyla sözel ve cebirsel gösterimler kullanarak kritik noktanın tanımına uygun görüşler belirtmişlerdir. Bu öğretmenlerin ders içi gözlemleri incelendiğinde $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_3$ 'ün derslerinde ekstremum noktalarını gösterirken grafiksel argümanlar kullandıkları ve bu argümanlar üzerinde ekstremum noktalarını öğrencilerine doğru bir şekilde ifade ettikleri görülmüştür. Bu öğretmenler görüşmelerde olduğu gibi derslerinde de bir aralıkta tanımlı uç noktalardaki ekstremum noktalarının varlıklarına yönelik çizimlerde bulunmuşlardır. Hatta öğretmenler polinom fonksiyonların türevinde ve ekstremum noktalarının belirlenmesinde öğrencilerine işaret tablosu kullanmalarını tavsiye etmişlerdir.

Yapılan görüşmelerde $\ddot{O}_2$ bir aralıkta tanımlanmış bir fonksiyonun artanlıktan azalanlığa geçtiği ya da azalanlıktan artanlığa geçtiği noktalarında ekstremum noktalarının varlığını kabul ederken tanımlı aralığın tanımlı uç noktalarının ekstremum noktaları olmasına dair araştırmacıya herhangi bir şekilde olumlu bir görüş belirtmemiştir. Ancak $\ddot{O}_2$ fonksiyonun grafiğinden yararlanarak türev fonksiyonunun grafiğini çizerken bir aralıkta tanımlı uç noktaların ekstremum noktaları olduğuna dönük bir grafik çizimini araştırmacıya yapmıştır. $\ddot{O}_2$ ekstremum noktalarıyla türev ilişkisini eksiksiz bir şekilde araştırmacıya ifade ederken bu ilişkiyi grafiksel argümanlar yardımıyla desteklemiştir. $\ddot{O}_2$ ayrıca kritik nokta kavramına dönük de araştırmacıya kritik noktanın tanımına uyan açıklamalar yapmıştır. $\ddot{O}_2$ 'nin ders içi gözlemleri incelendiğinde $\ddot{O}_2$ grafik üzerinde ekstremum noktalarının varlığını göstermenin yanı sıra daha çok işaret tablosundan yararlanarak ekstremum noktalarını cebirsel formlar yardımıyla belirlemeye çalışmıştır. Ekstremum noktalarına yönelik sözel problemlere ve cebirsel çözümlere odaklanan $\ddot{O}_2$ fonksiyonun işaret değiştirdiği noktalara öğrencilerinin odaklanmasını istemiştir. $\ddot{O}_2$ derste bir aralıkta tanımlı uç noktalardaki ekstremumun varlığına yönelik herhangi bir uygulamada bulunmamıştır.

Yapılan görüşmelerde $\ddot{O}_4$ görüşme sürecinde kritik nokta kavramını, yerel ekstremum noktalarını ve ekstremum ile türevin ilişkisini araştırmacıya doğru bir şekilde açıklamıştır. Ancak $\ddot{O}_4$ bir aralıkta tanımlanmış bir fonksiyonun tanımlı uç noktalarının ekstremum noktası olmasına yönelik herhangi olumlu bir açıklama yapmamıştır. $\ddot{O}_4$ 'ün ders içi gözlemleri

incelendiğinde Ö₄ hem grafik üzerinde bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun uç noktaları dışındaki ekstremum noktalarının gösterimi hem de polinom fonksiyonlardaki ekstremum noktalarının işaret tablosuyla gösterimi hakkında öğrencilerine açıklamalarda bulunmuş ve çok sayıda soru çözmüştür. Buradan hareketle Ö₄'ün görüşme sürecinde araştırmacıya ekstremum kavramına yönelik açıklamalarıyla ders içinde yapılan öğretimin içeriğinin birbiriyle örtüştüğü ifade edilebilir.

Konvekslik-konkavlık tanımı ile dönüm noktasının II. türevle ilişkisi

Tablo 52'de öğretmenlerin konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasına yönelik yaptıkları açıklamalar Zazkis ve Leiken (2008)'in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasına yönelik açıklamaları erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik kategorileri dikkate alınarak incelenmiştir.

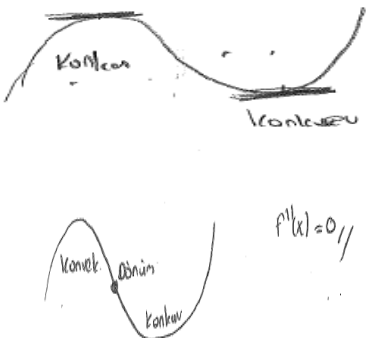
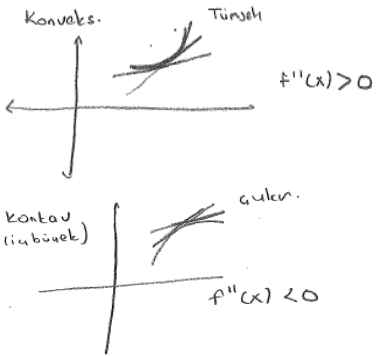
Tablo 52. Konvekslik-Konkavlık ve Dönüm Noktasına Yönelik Kategoriler ve Kodlar

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö _{2, 3, 4}
	Zor verilmiş cevap	Ö ₁
	Kısmen zor verilmiş cevap	
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Gerekli ve yetersiz	
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Prototip olmayan örnek	

Tablo 52'deki bulgular erişebilirlik kategorisi açısından incelendiğinde Ö₁ haricindeki tüm öğretmenlerin konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasına yönelik görüşlerini kolayca ve zorlanmadan dile getirdikleri görülmüştür. Öğretmenlerden Ö₁ ise dönüm noktası kavramına yönelik görüşlerini ifade ederken biraz düşünmüş, duraksamış ve daha sonra görüş belirtmiştir. Öğretmenlerin konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasına yönelik görüşleri doğruluk kategorisi bakımından ele alındığında öğretmenlerin tamamının konvekslik-

konkavlık ve dönüm noktasına yönelik açıklamalarının eksiksiz olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı hem konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasının tanımına yönelik doğru açıklamalarda bulunmuşlar hem de bu kavramların ikinci türevle olan ilişkisini eksiksiz bir şekilde dile getirmişlerdir. Öğretmenler hem konveks ve konkav eğrilere hem de konvekslik-konkavlık ile dönüm noktası arasındaki ilişkiyi yönelik görsel argümanlardan yararlanarak göstermişlerdir. Öğretmenlerin konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasına yönelik görüşleri zenginlik kategorisi bakımından değerlendirildiğinde öğretmenlerin konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasına yönelik açıklamaları ile bu kavramları açıklarken kullandıkları gösterimlerin lise matematik ders kitaplarında (Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Aydın, 1974; Caferov, 1999; Demir, 2014; Hacısalihoğlu vd., 1988; Kadakal, 2010; Kadioğlu & Kamali, 2005; Thomas vd., 2011) yer alan prototip açıklamalar ve gösterimler oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin konveks, konkav, dönüm noktası kavramlarına ve bu kavramların ikinci türevle ilişkisine yönelik görüşleri Tablo 53’de araştırmacının oluşturduğu kategori ve kodlara göre incelenmiştir.

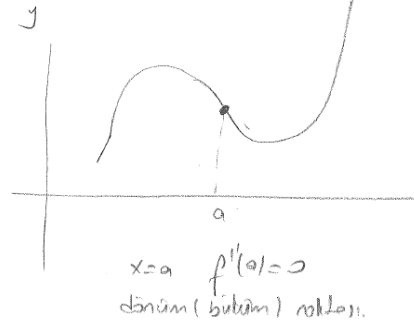
Tablo 53. *Konveks, Konkav, Dönüm Noktası Kavramı ile Bu Kavramların II. Türevle İlişkisine Yönelik Öğretmen Görüşleri*

Öğretmenler	Konveks, Konkav ve Dönüm Noktasına Yönelik Görüşler	Konveks, Konkav ve Dönüm Noktasının II. Türevle İlişkisi
Ö ₁	Eğri üzerindeki noktalara çizilen teğetler eğrinin altında kalıyorsa bu tür eğrilere konveks (dış bükey) eğriler denir. Tam tersi olarak eğri üzerindeki noktalara çizilen teğetler eğrinin üzerinde kalıyorsa bu tür eğrilere ise konkav (iç bükey) eğriler denir. Dönüm noktası ise eğrinin konvekslikten konkavlığa ya da konkavlıktan konveksliğe geçtiği nokta olarak bilinir 	$f(x)$ fonksiyonun bir aralıkta ikinci türevi sıfırdan büyükse $f(x)$ bu aralıkta konvektir. Tam tersi olarak $f(x)$ fonksiyonunun tanımlandığı aralıkta ikinci türevi sıfırdan küçükse $f(x)$ aynı aralıkta konkavdır. Tanımlı bir aralığın elemanı olan bir x noktasında ikinci türev sıfıra eşitse ve bu x noktasının sağında-solunda II. türev birbirinden farklı değerler alıyorsa bu durumda x noktası dönüm yani büküm noktasıdır. Bir nokta dönüm noktasıysa o noktada ikinci türev sıfırdır yani $f''(x) = 0$ 

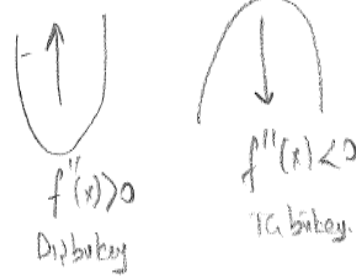
Tablo 53 (Devamı)

Ö₂

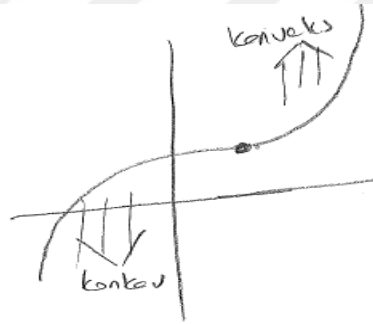
Bir eğri çukur şeklindeyse ve eğriye çizilen teğetler eğrinin altında kalıyorsa bu eğrilere konveks, bir eğri tümsek şeklindeyse ve eğriye çizilen teğetler eğrinin üzerinde kalıyorsa bu eğrilere konkav denir. Dönüm noktası, fonksiyonun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktadır



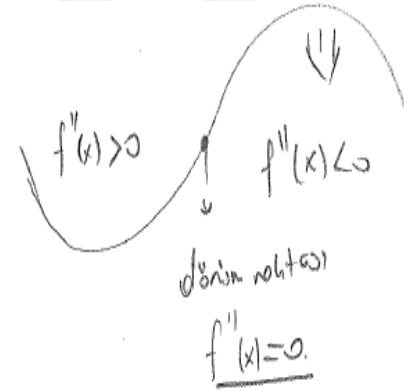
Bir aralıkta tanımlı fonksiyonun ikinci türevi sıfırdan büyükse ($f''(x) > 0$) fonksiyon bu aralıkta konvekstir. Bir aralıkta tanımlı fonksiyonun ikinci türevi sıfırdan küçükse ($f''(x) < 0$) fonksiyon bu aralıkta konkavdır. Fonksiyon eğrisinde çukurluktan tümseklığe ya da tümseklikten çukurluğa geçilen dönüm noktasında ikinci türev sıfıra eşittir yani $f''(x) = 0$ ile gösterilir

Ö₃

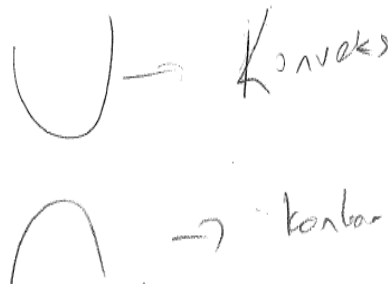
Konvekslik-konkavlıkta eğrilik yönü önemlidir. Herhangi bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon için eğrinin yönü yukarı doğru bakıyorsa konveks eğri, eğriliğin yönü aşağı doğru bakıyorsa bu tür eğriler konkav eğri olur. Ayrıca çizilen teğetler eğrinin altında kalıyorsa konveks, eğrinin üstünde kalıyorsa konkav şekil oluşur. Fonksiyonun konvekslikten konkavlığa ya da konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktalar dönüm noktalarıdır



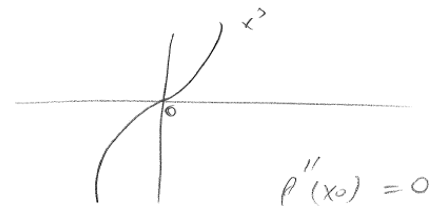
Eğer ki bir fonksiyonun tanımlandığı aralıkta ikinci türevi pozitif ise yani $f''(x) > 0$ ise fonksiyon aynı aralıkta konvekstir. Eğer ki bir fonksiyonun tanımlandığı aralıkta ikinci türevi negatif ise yani $f''(x) < 0$ ise fonksiyon aynı aralıkta konkavdır. Fonksiyonun dönüm noktalarında ise ikinci türev sıfırdır ki bunu da $f''(x) = 0$ şeklinde gösteririz

Ö₄

Bir eğriye bir noktada çizilen teğetler bu eğrinin altında kalıyorsa bu eğriye konveks eğri, üstünde kalıyorsa bu eğriye konkav eğri denir. Fonksiyonun konvekslikten konkavlığa ya da konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktalar dönüm noktalarıdır. Dönüm noktaları birinci türevin maksimum-minimum noktaları olmak zorundadır.



Konvekslik-konkavlık bulunurken ikinci türevden yararlanılır. İkinci türev sıfırdan büyükse fonksiyon orada konveks, ikinci türev sıfırdan küçükse fonksiyon orada konkavdır. Fonksiyonun artanlığını azalanlığını bulurken nasıl ki birinci türevi kullanıyorsak fonksiyonun konveksliğini-konkavlığını bulurken de ikinci türevi kullanırız. Fonksiyonun ikinci türevinin sıfır olduğu nokta dönüm noktasıdır. $f''(x) = 0$ iken kök çift kalırsa dönüm noktası yoktur



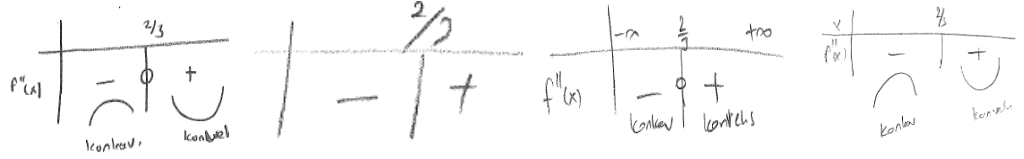
Tablo 53'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı konveks eğri, konkav eğri ve dönüm noktası kavramlarını tanımlarken lise matematik ders kitaplarında (Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Caferov, 1999; Kadioğlu & Kamali, 2005; Karadeniz, 2003; Thomas vd., 2009) yer alan tanımlar doğrultusunda açıklamalar yaparak konveks eğri, konkav eğri ve dönüm noktası kavramlarını tanımlamışlardır. Öğretmenler konveks eğri, konkav eğri ve dönüm noktalarına yönelik eksiksiz ve doğru görüşlerini görsel argümanlarla desteklemişlerdir. Öğretmenler konvekslik, konkavlık ve dönüm noktasının ikinci türevle ilişkilerini alan öğretim kitaplarındaki tanımlara (Çoker vd., 1982; Demir, 2014; Kadakal, 2010; Thomas vd., 2011) uygun bir şekilde belirtmiştir. Öğretmenlerin tamamı ikinci türevin sıfıra eşit olduğu noktayı dönüm noktası olarak ifade ederek $f''(x) = 0$ cebirsel notasyonunu kullanmışlardır. Öğretmenlerin tamamının hem konvekslik-konkavlık ve dönüm noktası kavramlarına yönelik tanımlarının hem de bu kavramların ikinci türevle ilişkilerine yönelik açıklamalarının birbirleriyle benzer olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı eğriye çizilen teğetlerin eğriye göre konumları üzerinden konveksliği ve konkavlığı değerlendirmişlerdir. Yine öğretmenlerin tamamı konvekslik-konkavlık arasındaki eğri hareketleri üzerinden dönüm noktası kavramını değerlendirmişlerdir. Öğretmenlerden Ö₄ diğer öğretmenlerden farklı olarak dönüm noktası kavramıyla çift katlı kök arasındaki ilişkiye yönelik bir görüş belirtmiştir. Ö₄ tek katlı köklerde ekstremum noktalarındaki hareketlilikten dolayı dönüm noktasının oluşacağını belirtirken çift katlı köklerde ikinci türev sıfır iken işaret değişimi olmayacağından dönüm noktasının oluşmayacağını belirtmiştir. Öte yandan bir aralıkta tanımlanmış polinom şeklindeki bir $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ fonksiyonunun konveks-konkav olduğu aralıkların ve dönüm noktasının belirlenmesi amacıyla öğretmenlere problem sorulmuştur. Öğretmenlerin bu probleme verdikleri cevapları araştırmacı tarafından oluşturulan kategorilere göre Tablo 54'de verilmiştir.

Tablo 54. Öğretmenlerin Konvekslik-Konkavlık ve Dönüm Noktası Problemine Yönelik Görüşleri

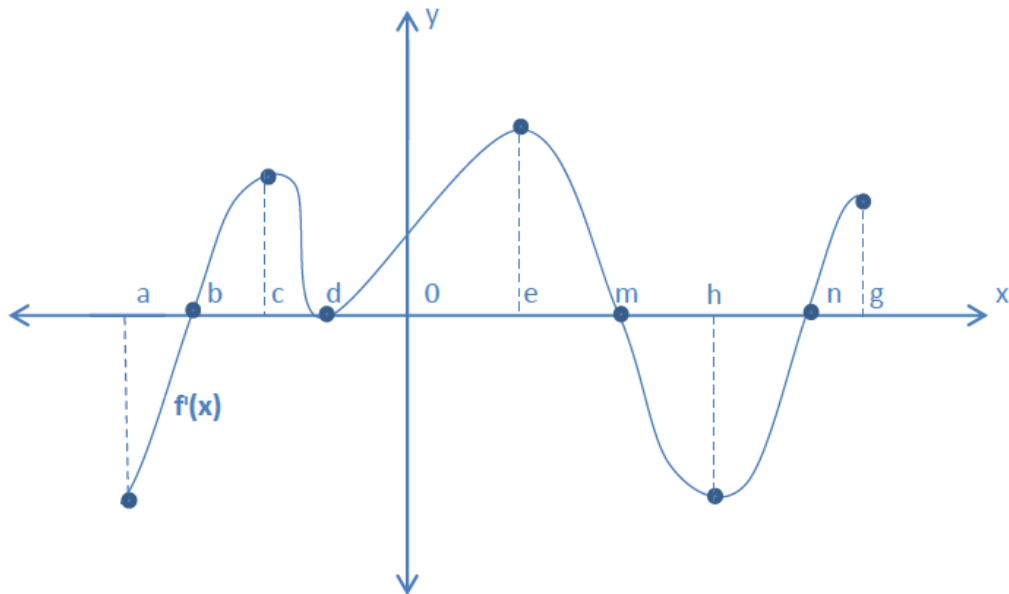
Kategoriler	Ö ₁	Ö ₂	Ö ₃	Ö ₄
Fonksiyonun konveks olduğu aralık	$(\frac{2}{3}, \infty)$	$(\frac{2}{3}, \infty)$	$(\frac{2}{3}, \infty)$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
Fonksiyonun konkav olduğu aralık	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$(-\infty, \frac{2}{3})$
Fonksiyonun dönüm noktasının koordinatı	$(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$	$(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$	$(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$	$(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$

Tablo 54 (Devamı)

Çözüme yönelik
kullanılan
gösterimler



Tablo 54'deki bulgulara göre fonksiyonun konveks-konkav olduğu aralıklar ile dönüm noktasının koordinatına yönelik öğretmen görüşleri incelendiğinde bütün öğretmenlerin probleme verdikleri cevapların doğru olduğu söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı problemin çözümü sürecinde önce fonksiyonun birinci türevini aramış daha sonra da fonksiyonun ikinci türevindeki ifadesine ulaşmışlardır. Öğretmenler fonksiyonda konveks-konkav olduğu aralıkları bulmak amacıyla fonksiyonun ikinci türevini sıfıra eşitleyerek dönüm noktasının apsisini bulmuşlardır. Dönüm noktasının apsisini işaret tablosunda kullanan öğretmenler işaret tablosundan yararlanarak fonksiyonun konveks-konkav olduğu aralıkları doğru bir şekilde bulmuşlardır. Öğretmenler fonksiyonun konveks olduğu aralığı belirlerken ikinci türevin sıfırdan büyük olduğu aralığa, konkav olduğu aralığı belirlerken de ikinci türevin sıfırdan küçük olduğu aralığa dikkat etmişlerdir. Öte yandan öğretmenlerin bir aralıkta tanımlı bir $f'(x)$ 'in grafiğinden yararlanarak fonksiyonun konveks-konkav olduğu aralıkları ve dönüm noktalarını belirleyebilme becerilerini ortaya çıkarmak amacıyla öğretmenlere Şekil 20.'daki problem sorulmuştur.



Şekil 20. $f(x)$ 'in konveks-konkav aralıkları ile dönüm noktalarına yönelik problem.

Şekil 20'deki problemten elde edilen verilere göre bir aralıkta tanımlanmış bir $f'(x)$ fonksiyonunun grafiğinden hareketle $f(x)$ fonksiyonunun özellikleri konveks aralıkları,

konkav aralıkları ve dönüm noktaları şeklinde üç kategoride değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin Şekil 20'deki probleme verdikleri cevaplar Tablo 55.'de gösterilmiştir.

Tablo 55. $f(x)$ 'in Konveks-Konkav Aralıkları İle Dönüm Noktalarına Yönelik Öğretmenlerin Görüşleri

$f(x)$ 'in Özellikleri	$\ddot{O}_1$	$\ddot{O}_2$	$\ddot{O}_3$	$\ddot{O}_4$
$f(x)$'in Konveks Olduğu Aralıklar	(a, c) (d, e) (h, g)	(a, c) (d, e) (h, g)	(a, c) (d, e) (h, g)	(a, b) (m, n)
$f(x)$'in Konkav Olduğu Aralıklar	(c, d) (e, h)	(c, d) (e, h)	(c, d) (e, h)	(b, m) (n, g)
$f(x)$'in Dönüm Noktaları	$(c, f(c))$ $(d, 0)$ $(e, f(e))$ $(h, f(h))$	$(c, f(c))$ $(d, 0)$ $(e, f(e))$ $(h, f(h))$	$(c, f(c))$ $(d, 0)$ $(e, f(e))$ $(h, f(h))$	$(c, f(c))$ $(d, 0)$ $(e, f(e))$ $(h, f(h))$

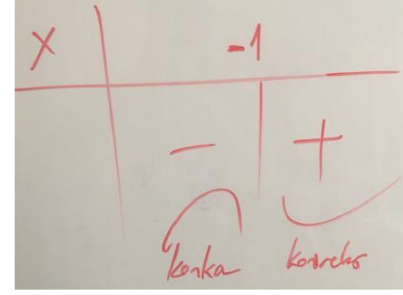
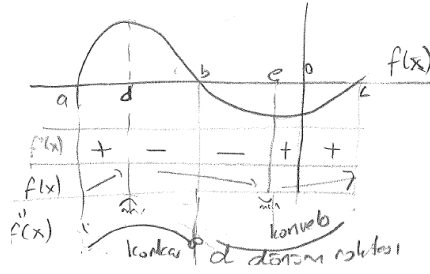
Tablo 55'deki bulgulara göre bütün öğretmenler $f(x)$ 'in dönüm noktalarını eksiksiz ve doğru bir şekilde belirlemelerine rağmen $\ddot{O}_4$ fonksiyonun konveks ve konkav olduğu aralıkları yanlış belirlemiştir. $\ddot{O}_4$ dışındaki tüm öğretmenler fonksiyonun konveks olduğu aralıkları eksiksiz ve doğru bir şekilde açıklamıştır. Tüm öğretmenler fonksiyonun konveks oldukları aralıkları belirlerken $f(x)$ 'in ikinci türevinin pozitif olduğu aralıklardan yararlanmışlardır. Ancak $\ddot{O}_4$ fonksiyonun konveks olduğu aralıklar yerine $f(x)$ 'in x ekseninde kalan yani $f'(x) < 0$ olduğu aralıklardan yararlanarak yanlış bir çözüm yapmıştır. Fonksiyonun konkav olduğu aralıklara yönelik öğretmenlerin verdikleri cevaplar incelendiğinde $\ddot{O}_4$ dışındaki tüm öğretmenlerin fonksiyonun konkav olduğu aralıkları eksiksiz ve doğru bir şekilde tespit ettikleri söylenebilir. Tüm öğretmenler fonksiyonun konkav oldukları aralıkları belirlerken $f(x)$ 'in ikinci türevinin negatif olduğu aralıklardan yararlanmışlardır. Ancak öğretmenlerden $\ddot{O}_4$ konveks aralıklarda olduğu gibi konkav aralıklara yönelik doğru bir yargıda bulunmasına rağmen bu konkav aralıkları yanlış belirlemiştir. $\ddot{O}_4$ fonksiyonun konkav olduğu aralıklar yerine $f(x)$ 'in x ekseninde kalan yani $f'(x) > 0$ olduğu aralıklardan yararlanarak yanlış bir çözüm yapmıştır. Öğretmenlerin

tamamı fonksiyonun dönüm nokatalarını belirlerken $f'(x)$ 'in artandan azalanlığa ya da azalandan artanlığa geçtikleri noktaları bulmaya çalışmışlardır. Ö₃ dönüm nokatalarına yönelik ikinci türevin sıfıra eşit olduğu noktaların yani birinci türevin maksimum-minimum noktalarının belirlenmesi gerektiğine vurgu yapmıştır. Öğretmenlerin tamamı $(d,0)$ noktasının fonksiyonun dönüm noktası olmasına yönelik x eksenindeki d noktasının birinci türevinin sıfıra eşit olduğunu ve birinci türevin grafiğinde bu noktanın çift katlı kök olduğunu ancak bir defa daha türev alındığında ise ikinci türevin grafiğinde kökün tek katlı olacağını ve işaret değiştireceğini belirtmişlerdir. Öte yandan öğretmenlerin konvekslik-konkavlık ve dönüm noktası kavramları ile bu kavramların ikinci türevle ilişkisine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden edinilen yansımalar Tablo 56'da gösterilmiştir.

Tablo 56. Konveks, Konkav ve Dönüm Noktası Kavramlarına Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları

Öğretmenler	Görüşme Yansımaları	Gözlem Yansımaları
Ö ₁		
Ö ₂		
Ö ₃		

Tablo 56 (Devamı)

Ö₄

Tablo 56'daki bulgulara göre tüm öğretmenlerin konveks, konkav ve dönüm noktası kavramları ile bu kavramların ikinci türevle ilişkisine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden elde edilen verilerin birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Yapılan görüşmelerde Ö₁, Ö₂ ve Ö₃'ün konveks eğri, konkav eğri ve dönüm noktası kavramları ile bu kavramların ikinci türevle ilişkisine yönelik eksiksiz ve doğru görüşler belirttikleri görülmüştür. Bu öğretmenler ayrıca bir aralıkta tanımlı bir polinom fonksiyonun ikinci türevinden yararlanarak fonksiyonun konveks-konkav olduğu aralıklar ile dönüm noktalarını doğru bir şekilde bulmuşlardır. Öğretmenler kendilerine yöneltilen, bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun türevinin grafiğindeki soruda da konveks-konkav aralıklar ile dönüm noktasına yönelik doğru açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu öğretmenlerin ders içi gözlemleri incelendiğinde bu üç öğretmenin derste öğrencilerine konveks-konkav aralıkları ve dönüm noktalarını gösterirken görüşmelerde olduğu gibi grafiksel ve görsel argümanlardan yararlandıkları tespit edilmiştir. Ö₁ ve Ö₂ derste öğrencilerine fonksiyonun konveks-konkav oldukları aralıkları ve dönüm noktalarını anlatırken çoğunlukla polinom fonksiyonların örneklerinden yararlanmışlardır. Öğretmenlerden Ö₂ polinom fonksiyonların dönüm noktalarına yönelik örneklerinde öğrencilerine tek ve çift katlı köklere dikkat etmeleri gerektiğini, çift katlı köklerde işaret değişimi olmayacağından dönüm noktasının olmayacağını açıklamıştır. Öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₃ ise polinom fonksiyonların dönüm noktalarına yönelik örneklerinin yanı sıra $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonlarının grafikleri üzerinden de konveks-konkav aralıkları ve dönüm noktalarına örnekler vermişlerdir. Öğretmenlerden Ö₃ derste grafiksel örneklerde fonksiyonun dönüm noktalarıyla ilgili çift katlı köklerine dikkat çekmiştir.

Yapılan görüşmelerde Ö₄'ün konveks eğri, konkav eğri ve dönüm noktası kavramları ile bu kavramların ikinci türevle ilişkisine yönelik çoğunlukla doğru görüşler belirttiği görülmüştür. Ö₄ bir aralıkta tanımlı bir polinom fonksiyonun ikinci türevinden yararlanarak fonksiyonun konveks-konkav olduğu aralıklar ile dönüm noktalarını doğru bir şekilde bulmuştur. Ö₄ görüşmelerde sadece bir fonksiyonun türevinin grafiğinden yararlanarak

fonksiyonun konveks ve konkav olduğu aralıkları doğru cevaplayamamıştır. Ö₄ o soruda cevabın gerekçesini doğru bir şekilde araştırmacıya açıklamasına rağmen cevap için fonksiyonun artan-azalan olduğu aralıklarını dikkate almıştır. Ö₄'ün ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₄ görüşmelerde olduğu gibi derste de konveks-konkav eğri ve dönüm noktasını öğrencilerine sözel, cebirsel ve görsel argümanlar yardımıyla açıklamıştır. Ö₄ derste konveks-konkav eğriler ile dönüm noktalarının ikinci türevle ilişkisine yönelik sözel ve grafiksel açıklamalarda bulunmuştur. Ö₄'ün konvekslik-konkavlık ve dönüm noktalarının ikinci türevle ilişkisine yönelik derste açıklamaları ile kullandıkları gösterimlerin doğru açıklamalar ve gösterimler oldukları söylenebilir. Ö₄ görüşme sürecinde her ne kadar $f'(x)$ 'in grafiğinden yararlanarak fonksiyonun konveks-konkav olduğu aralıkları bulamamış olsa da derste grafik üzerinde $f(x), f'(x)$ fonksiyonlarından yararlanarak fonksiyonun konveks-konkav oldukları aralıkları doğru bir şekilde öğrencilerine göstermiştir. Ö₄'ün görüşme sürecinde grafiksel soruda fonksiyonun konveks-konkav olduğu aralıkları dalgınlıkla belirleyemediği düşünülmüştür. Bu düşünceyle Ö₄ kendisine sorulan soruyu neden yapamadığına dönük dikkatinin o andaki dağınıklığından bahsetmiştir.

Maksimum-minimum problemi kurma ve çözme.

Öğretmenlerin maksimum-minimum kavramına yönelik problem kurma ve çözme becerilerini derinlemesine incelemek amacıyla öğretmenlere bir küre ve silindir verilerek çözümünde türevden yararlanacakları bir maksimum-minimum problemi kurup bu problemi çözmeleri istenmiştir. Tablo 57'de öğretmenlerin maksimum-minimum kavramına yönelik kurdukları ve çözümünü yaptıkları problemler Yıldız ve Özdemir (2015) ile Baki (2008)'nin kategorilerine göre değerlendirilmiştir.

Tablo 57. *Maksimum-Minimum Kavramına Yönelik Kurulan ve Çözülen Problemlere İlişkin Kategoriler*

Değerlendirme Kriterleri	Alt Kriterler	Ölçütler		
		Evet	Kısmen	Hayır
Matematiksellik	Matematiksel kavramların kullanımı	Ö ₁ , 2, 3, 4		
	Matematiksel sembollerin kullanılması	Ö ₁ , 2, 3, 4		
	Metin-görsel aktarımının sağlanması	Ö ₁ , 2, 3, 4		
Veri Niteliği	Verinin mantıksal uygunluğu	Ö ₁ , 2, 3, 4		
	Verilerle ulaşabilecek sonucun anlamlılığı	Ö ₁ , 2, 3, 4		

Tablo 57 (Devamı)

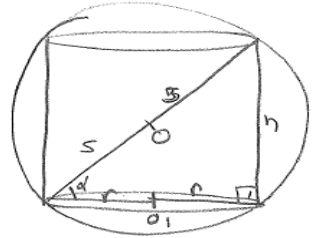
Dil Bilgisi	Sorunun dil bilgisine uygunluğu	Ö _{1, 3, 4}	Ö ₂
	Soruda anlatım bozukluğunun varlığı		Ö _{1, 2, 3, 4}
	Sorudaki noktalama işaretlerinin kullanımı	Ö _{1, 2, 3, 4}	
Düzeye Uygunluk	Sorunun kazanımlara, içeriğe ve zorluk derecesine uygunluğu	Ö _{1, 2, 3, 4}	
Yönerge ve Veri Miktarı	Soruda yönergenin varlığı		Ö _{1, 2, 3, 4}
	Yönergedeki adımların çözüme uygunluğu		Ö _{1, 2, 3, 4}
	Çözüm için gerekli verinin miktarı	Ö _{1, 2, 3, 4}	
Çözülebilirlik	Kurulan problemin bireyi istenilen sonuca ulaştırması	Ö _{1, 2, 3, 4}	
Kullanılabilirlik	Kurulan problemin öğrenme ortamlarındaki kullanılma durumu	Ö _{1, 2, 3, 4}	
Plan Uygulama	Problemin çözümünün yapılması	Ö _{2, 3, 4}	Ö ₁
Değerlendirme	Kurulan problemin çözümünün doğrulanması		Ö _{1, 2, 3, 4}

Tablo 57'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı maksimum-minimum kavramına yönelik kurdukları problemlerde matematiksel ifadeler ile sembollerden yararlanmışlardır. Öğretmenler problemi kurduktan sonra çözüme yönelik görsel argümanlarla matematiksel ifadeler arasındaki ilişkiyi net bir şekilde göstermişlerdir. Öğretmenlerin tümünün maksimum-minimum kavramına yönelik hazırladığı problemlerdeki verilerin matematiksel ve mantıksal bakımdan öğrencilerin öğrenme düzeylerine uygun oldukları söylenebilir. Öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ soru kökünün oluşturulması sürecinde dil bilgisi kurallarına tam uyarken Ö₂ bu kurallara kısmen uymuştur. Öğretmenlerin hazırladıkları sorular noktalama işaretlerine uygun olup anlatım bozukluğu taşımamaktadır. Öğretmenlerin tümünün hazırladığı soruların lise ders kitaplarında (Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Balcı, 1999; Demir, 2014; Edwards & Penney, 2001; Hacısalihoğlu vd., 1988; Thomas vd., 2011) yer alan sorulara benzer olmalarından dolayı içeriğe uygun sorular oldukları söylenebilir.

Öğretmenler kapalı fonksiyonun türevi ve türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurdukları problemlerde olduğu gibi maksimum-minimum kavramlarına yönelik problemlerde de yönerge kullanmamışlardır. Öğretmenlerin tümünün maksimum-minimum kavramına yönelik kurdukları problemlerin çözümde kullanılacak veri miktarı, çözülebilirlik ve öğrenme ortamında kullanılabilirlik kriterleri bakımından uygun problemler oldukları görülmüştür. Öğretmenlerden Ö₂, Ö₃ ve Ö₄ maksimum-minimum kavramına yönelik

kurdukları problemleri doğru çözmelerine rağmen çözümün sağlamasını yapmayarak herhangi bir doğrulamada bulunmamıştır. Öğretmenlerden $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün maksimum-minimum kavramına yönelik kurdukları problemler ile yaptıkları çözümler aynıdır. İki öğretmen de problemlerinde bir küre içerisine çizilebilecek maksimum hacimli bir silindirin yüksekliğini sormuşlardır. Öğretmenlerden $\ddot{O}_2$ 'nin maksimum-minimum kavramına yönelik kurduğu problemde küre içerisine yerleştirilen r yarıçaplı bir dik silindirin en küçük hacminin değeri sorulurken $\ddot{O}_1$ 'in kurduğu problemde küre içerisine yerleştirilen r yarıçaplı bir dik silindirin en büyük hacminin değeri sorulmuştur. Öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ tarafından kurulan problemin çözümünde işaret tablosundaki yerel maksimum ve yerel minimum noktalarının belirlenmesi sürecinde hata yapılmıştır. Öğretmenlerin tamamı kurdukları problemlerin sağlamasını tekrardan yapmayarak problemde buldukları sonucu doğrulamamışlardır. Öğretmenlerin kurdukları problemlere yönelik yaptıkları çözümleri daha ayrıntılı incelemek amacıyla araştırmacı tarafından maksimum-minimum problemlerinin çözüm sürecine yönelik aşamalar belirlenmiştir. Araştırmacı, maksimum-minimum problemlerinin çözüm sürecine yönelik aşamaları belirlerken ilgili literatürden (Balcı, 1999; Demir, 2014; Kadakal, 2010; Kadioğlu & Kamali, 2005; Keskin, 2017) yararlanmıştır. Buna göre araştırmacı, öğretmenlerin maksimum-minimum problemlerinin çözüm sürecine yönelik aşamaları; sorudaki değişkenlerin şekil üzerinde gösterilmesi, istenen ifadenin tek değişkenli bir fonksiyona dönüştürülmesi ve fonksiyonun yerel ekstremum değerlerinin bulunması için türevin kullanılması şeklinde üç bölümden oluşmaktadır. Öğretmenlerin maksimum-minimum problemlerinin çözüm sürecine yönelik aşamaları araştırmacı tarafından oluşturulan kategorilere göre Tablo 58'de verilmiştir.

Tablo 58. Maksimum-Minimum Problemlerinin Çözüm Aşamalarına İlişkin Kategoriler

Kategoriler	Ölçütler			Destekleyici İfadeler ve Görseller
	Evet	Kısmen	Hayır	
$\ddot{O}_{1, 2, 3, 4}$ Sorudaki değişkenleri şekil üzerinde gösterme				Önce küre içerisine çizilecek silindrin yarıçapını r ile gösterelim şekilde, silindirin yüksekliğini h ve kürenin en büyük dairesinin yarıçapını da 5 olarak yazalım ($\ddot{O}_1$) 

Tablo 58 (Devamı)

İstenen ifadeyi tek değişkenli fonksiyona dönüştürme	Ö _{1, 2, 3, 4}	Burada pisagordan yararlanalım önce $h^2 + r^2 = 36$ olduğundan r^2 ifadesini yalnız bırakalım ve h^2 cinsinde $r^2 = 36 - h^2$ şeklinde yazalım. Daha sonra silindirin hacim formülünde r ifadesindeki yere h cinsinden eşitini yazalım (Ö ₃)
		$Hacim = \pi r^2 \cdot 2h$ $= \pi \cdot (36 - h^2) \cdot 2h$ $Hacim = 72\pi h - 2\pi h^3$
Yerel ekstremum değeri için türevden yararlanma	Ö _{1, 2, 3, 4}	Silindirin hacim formülünde r cinsinden ifadenin türevini alıp sıfıra eşitleyelim ki silindirin yarıçapı maksimum kaç alınıyormuş o çıksın ortaya (Ö ₂)
		$V = 2\pi \cdot \sqrt{r^4 - r^6}$ $V'(r) = \cancel{2\pi} \frac{4r^3 - 6r^5}{\cancel{2} \sqrt{r^4 - r^6}} = 0$

Tablo 58'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı maksimum-minimum problemlerinin çözüm aşamalarına yönelik tüm aşamaları kurdukları problemlerin çözümünde gerçekleştirmişlerdir. Öğretmenlerin çözümleri incelendiğinde öğretmenlerden sadece Ö₁'in çözümünde yerel ekstremum noktalarını belirlemeye dönük işaret tablosunun kullanıldığı görülmüştür. Öğretmenlerin görüşme sürecinde maksimum-minimum problemlerine yönelik kurdukları ve çözdükleri problemlerle ders içinde aynı konuya yönelik kullandıkları ve çözdükleri problemlerin birbirleriyle örtüştüğü söylenebilir. Öğretmenlerin derste maksimum-minimum kavramlarına yönelik kurdukları problemler kullanılan içeriğe göre incelenmiştir. Buna göre Ö₁ derste toplam-çarpım-fark ifadelerine, kenar-çevre-alan geçişlerine, dik üçgendeki hipotenüsten yararlanarak üçgenin alanının bulunmasına ve üçgen, küre, çember içine dikkörtgen çizilerek alanın bulunmasına ilişkin maksimum-minimum problemlerine yönelik etkinlikler yapmıştır. Öğretmenlerden Ö₂ bir aralıkta tanımlı polinom fonksiyonun aralıkta alabileceği en büyük-en küçük değere, koni içindeki silindirin hacmine, küre içine yerleştirilen koninin hacmine ve toplam-çarpım-fark ifadelerine ilişkin maksimum-minimum problemlerine yönelik etkinlikler yapmıştır. Öğretmenlerden Ö₃ bir aralıkta tanımlı polinom fonksiyonun aralıkta alabileceği en büyük-en küçük değere, trigonometrik fonksiyonların tanım aralığında alabileceği en büyük değere, kenar-çevre-alan geçişlerine ve küre ile çember içerisine yerleştirilen dikkörtgenin alanının bulunmasına ilişkin maksimum-minimum problemlerine yönelik etkinlikler yapmıştır. Öğretmenlerden Ö₄ ise toplam-çarpım-fark

ifadelerine, koni içerisinde yerleştirilen silindirin hacmine ve kenar-çevre-alan geçişlerine ilişkin maksimum-minimum problemlerine yönelik etkinlikler yapmıştır. Öğretmenlerden Ö₁'in toplam-çarpım-fark ifadelerine yönelik derste çözdüğü problem Şekil 21.'de gösterilirken kenar-çevre-alan geçişlerine ilişkin maksimum-minimum problemlerine yönelik çözdüğü problemler Şekil 22'de gösterilmiştir.

3. $A = 6 - 2x$ ve $B = 2x + 8$ olduğuna göre $A \cdot B$ çarpımının en büyük değeri kaçtır?

$A \cdot B = (6 - 2x)(2x + 8)$

$f'(x) = -2(2x + 8) + 2(6 - 2x) = 0$

$-4x - 16 + 12 - 4x = 0$

$-8x - 4 = 0 \quad x = -\frac{1}{2}$

1) 64 2) -4 3) 40 4) 18 5) 2

Şekil 21. Toplam-çarpım-fark ifadesine yönelik maksimum-minimum problemi.

1. Çevresi 20 cm olan dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 dir?

$x = 5$, $S = x(10 - x)$

$S = 10x - x^2$

$S' = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$

2. Çevresi 24 cm olan altıgenin alanı en çok kaç cm^2 dir?

$S = 5.5$

$S = 25$

4. Dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 dir?

5. Tarlanın geri kalan kısmı göre tarlanın alanı en çok kaç cm^2 dir?

Şekil 22. Kenar-çevre-alan ifadesine yönelik maksimum-minimum problemi.

Asimptotlar ve grafik çizimi.

Tablo 59’da öğretmenlerin asimptot kavramına ve asimptotun çeşitlerine yönelik açıklamaları Zazkis ve Leiken (2008)’in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin asimptot kavramına ve asimptotun çeşitlerine yönelik açıklamaları erişebilirlik, doğruluk ve zenginlik kategorileri dikkate alınarak incelenmiştir.

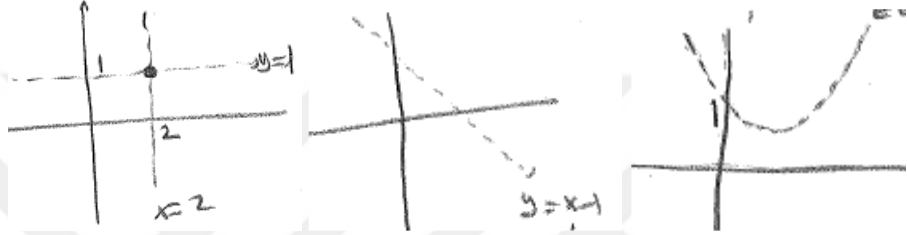
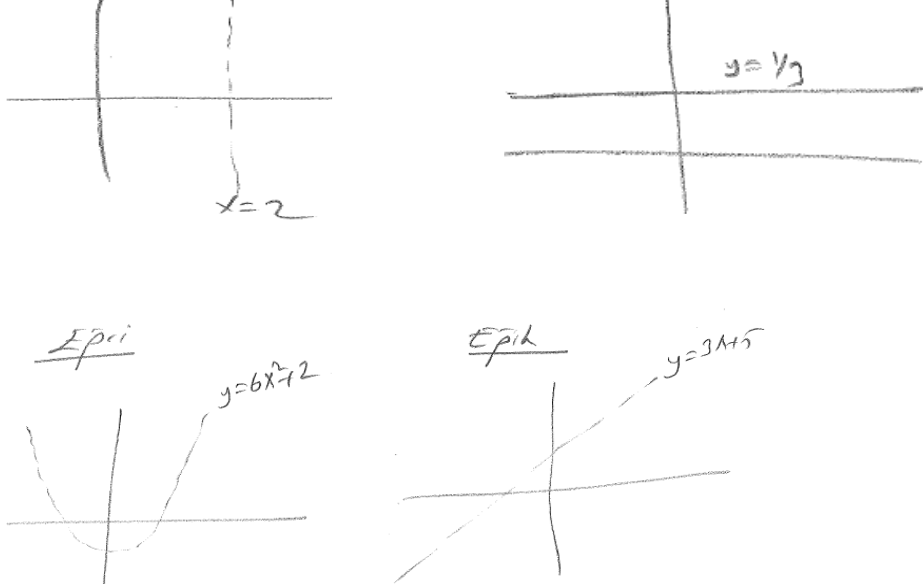
Tablo 59. *Asimptot Kavramına ve Çeşitlerine Yönelik Kategoriler ve Kodlar*

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Zor verilmiş cevap	
	Kısmen zor verilmiş cevap	
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Gerekli ve yetersiz	
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek	Ö _{1, 2, 3, 4}
	Prototip olmayan örnek	

Tablo 59’daki bulgular erişebilirlik kategorisi bakımından incelendiğinde bütün öğretmenlerin asimptot kavramına ve asimptotun çeşitlerine yönelik görüşlerini kolayca ve zorlanmadan dile getirdikleri görülmüştür. Öğretmenlerin asimptot kavramına ve asimptotun çeşitlerine yönelik görüşleri doğruluk kategorisi bakımından ele alındığında öğretmenlerin tamamının asimptot kavramına ve asimptotun çeşitlerine yönelik açıklamalarının eksiksiz ve doğru açıklamalar oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı asimptot kavramını tanımlarken sonsuzda eğriye teğet olma durumunu belirterek asimptotun tanımını ifade etmiş ve asimptotların çeşitlerine yönelik düşey asimptot, yatay asimptot, eğik asimptot ve eğri asimptot örneklerini vermiştir. Bununla birlikte öğretmenler asimptot türlerinin nasıl bulunduğunu cebirsel işlemler ve grafiksel gösterimler yardımıyla doğru ifade etmişlerdir. Öğretmenlerin asimptot kavramına ve asimptotun çeşitlerine yönelik görüşleri zenginlik kategorisi bakımından değerlendirildiğinde öğretmenlerin asimptot kavramına ve asimptotun çeşitlerine yönelik yaptıkları açıklamalar ile kullandıkları gösterimlerin lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2014; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017; Ünlü & Er, 2013) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Caferov, 1999; Demir, 2014; Edwards & Penney, 2001; Kadakal, 2010; Kadioğlu & Kamali, 2005; Musayev vd., 2007; Thomas vd., 2011) yer alan prototip açıklamalar ve gösterimler oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin asimptot kavramına, asimptotun çeşitlerine ve asimptot

çeşitlerinin nasıl bulunduğuna yönelik görüşlerini daha ayrıntılı incelemek amacıyla, bu kavramların nasıl açıklandığı Tablo 60'da araştırmacının oluşturduğu kategori ve kodlara göre incelenmiştir.

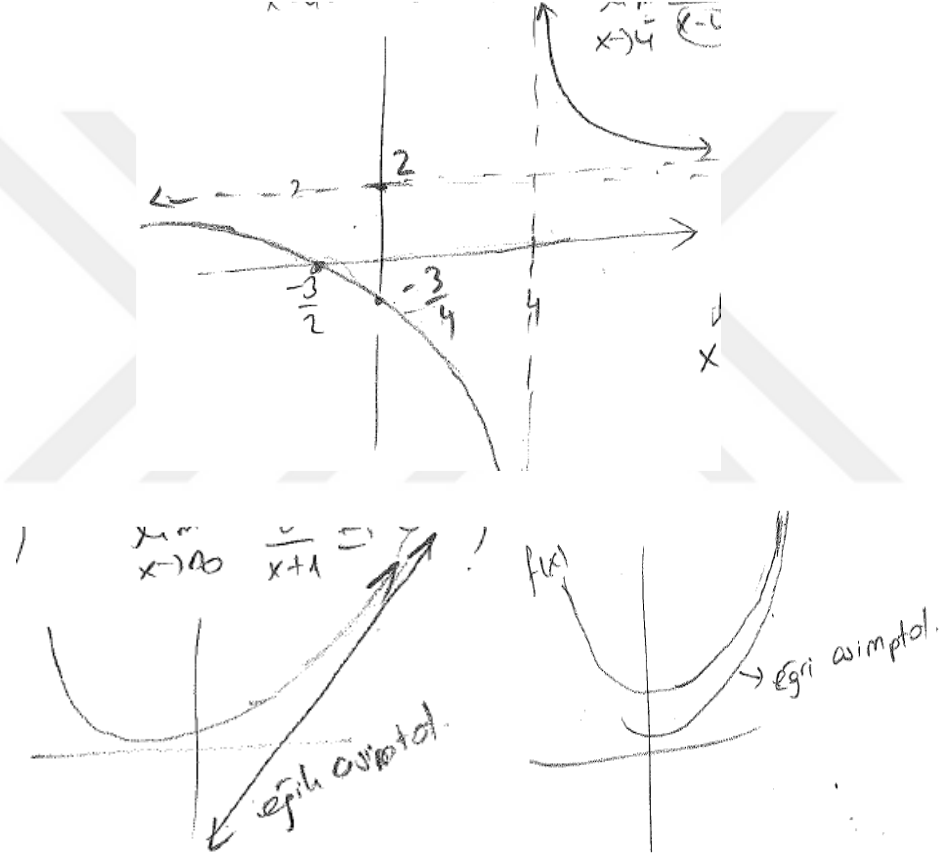
Tablo 60. *Asimptot Kavramına ve Çeşitlerine İlişkin Öğretmenlerin Görüşlerine Yönelik Kategoriler ve Kodlar*

Öğretmenler	Asimptot Kavramı ve Çeşitlerine Yönelik Görüşler
	<i>Asimptot, fonksiyonun bir doğruya ya da bir eğriye sonsuzda yaklaşması demektir. Asimptotlar yatay, dikey, eğik ve eğri olmak üzere dörde ayrılır. Yatay asimptot, bir eğrinin sonsuza giderkenki limiti alınarak bulunur. Dikey asimptot, fonksiyonu tanımsız yapan değerlerdir. Kesirli bir fonksiyonda paydayı sıfır yapan değerlerde fonksiyon tanımsız olduğundan bu noktalarda dikey asimptot vardır. Grafik asla dikey asimptotu kesmez ama yatay asimptotu kesebilir. Kesirli fonksiyonlarda pay ifadesinin en büyük derecesi paydadaki ifadenin en büyük derecesinden sadece bir fazlaysa eğik asimptot, bu derece farkı en az iki veya ikiden büyük ise eğri asimptot oluşur</i>
Ö ₁	 <i>Fonksiyonun sonsuzda parbole, grafiğe teğet olduğu doğruya asimptot denir. Asimptotların dört farklı çeşidi vardır. Bunlar; dikey asimptot, yatay asimptot, eğik asimptot ve eğri asimptotlardır. Dikey asimptot; paydayı sıfır yapan değerlerdir yani $f(x)$ fonksiyonunu tanımsız yapan değerlerdir. Yatay asimptot; fonksiyonun sonsuzda limiti alındığında ortaya çıkan asimptottur. Eğik ya da eğri asimptot, payın paydaya bölünmesi durumunda bölümde ortaya çıkan asimptotlardır. Bir asimptot eğik asimptotsa kesirli fonksiyonlarda payın en büyük derecesi ile paydanın en büyük derecesi arasındaki farkın "1" olması gerekir. Bir asimptot eğri asimptotsa kesirli fonksiyonlarda payın en büyük derecesi ile paydanın en büyük derecesi arasındaki farkın en az "2" veya "2'den büyük" olması gerekir</i>
Ö ₂	

Tablo 60. (Devamı)

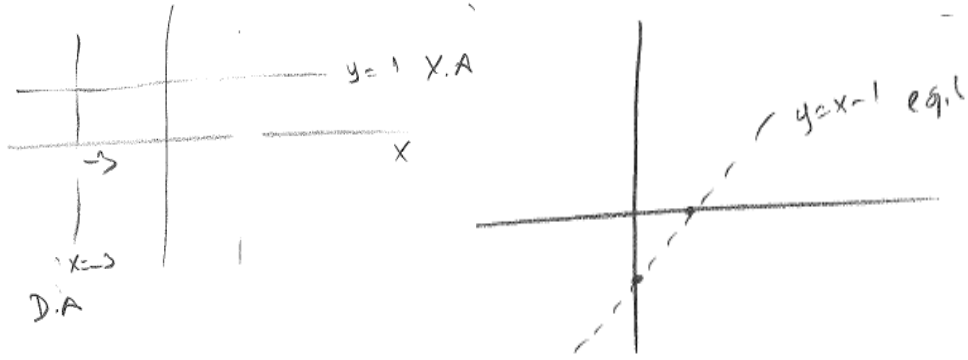
Ö₃

Sonsuzda eğriye teğet olan doğruya asimptot denir. Asimptot, sonsuza kadar eğriye yaklaşan doğrudur. Sonsuzdaki limitin sıfır olduğu yani iki doğru arasındaki uzaklığın sonsuzda sıfır olduğu doğruya ya da eğriye asimptot denir. Bir doğruyla bir eğrinin limitinin farkı sonsuzda sıfıra yaklaşıyorsa bu doğru bu eğrinin asimptotudur. Asimptotlar; yatay asimptot, düşey asimptot, eğik asimptot ve eğri asimptot olmak üzere dört kategoriye ayrılır. Yatay asimptot bulunurken fonksiyonun sonsuzdaki limitinden yararlanılır. Düşey asimptot ise kesirli fonksiyonlarda paydayı sıfır yapan değerler olarak bilinir. Yani paydayı tanımsız yapan değerler düşey asimptottur. Fonksiyon yatay asimptotu kesebilirken düşey asimptotu kesemez. Eğik asimptotta, kesirli bir fonksiyonda pay bölümündeki ifadenin en büyük derecesi ile payda bölümündeki ifadenin en büyük derecesi arasındaki fark bir olur. Bu nedenle eğik asimptotta birinci dereceden bir doğru ortaya çıkar. Eğri asimptotta ise kesirli bir fonksiyonda pay bölümündeki ifadenin en büyük derecesi ile payda bölümündeki ifadenin en büyük derecesi arasındaki fark en az iki veya ikiden büyük olur. Bu nedenle eğri asimptotta ikinci veya daha fazla bir dereceden bir eğri ya da parabol ortaya çıkar. Eğik asimptotta bir doğru sonsuzda eğriye teğet olabilirken eğri asimptotta bir parabol bir eğriye teğet olabilmektedir. Eğri asimptot ile eğik asimptotun bulunuşları birbirine benzerdir. Genel olarak asimptotlar kesik kesik gösterilmektedir. Asimptotların doğrudan olarak grafiğe ait bir parça olmadıkları söylenebilir.

Ö₄

Fonksiyon grafiğinin herhangi bir yerde bir eğriye ya da bir doğruya sonsuza kadar yaklaştığı durumlar varsa, sonsuza kadar gidiyorsa asimptot denir. Asimptotlar genel olarak yatay, düşey, eğik ve eğri asimptotlar olmak üzere dörde ayrılır. Yatay asimptot fonksiyonun sonsuzdaki limitine bakılarak bulunur. Eğer fonksiyonun sonsuzdaki limiti bir reel sayıya yaklaşıyorsa yatay asimptot vardır. Fonksiyonu tanımsız yapan değerler varsa bu değerler düşey asimptottur. Genelde logaritmik ve rasyonel fonksiyonlara yönelik sorularda düşey asimptotlarla karşılaşmaktayız. Fonksiyon grafiği düşey asimptotu hiçbir zaman kesmezken yatay asimptotları kestiği durumlar olabilir. Eğer fonksiyonun limiti sonsuzda bir reel sayıya yaklaşıyorsa eğik-eğri asimptotlar vardır. Eğik asimptotlarda rasyonel fonksiyonlardaki pay ifadesinin en büyük derecesi ile payda ifadesinin en büyük derecesi arasındaki fark 1 olmaktadır. Eğri asimptotlarda ise rasyonel fonksiyonlardaki pay ifadesinin en büyük derecesi ile payda ifadesinin en büyük derecesi arasındaki fark en az 2 olmaktadır.

Tablo 60. (Devamı)



Tablo 60'daki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı asimptot kavramının tanımına, asimptotun çeşitlerine ve bu çeşitlerin hangi durumlarda ortaya çıktıklarına yönelik eksiksiz ve doğru görüşler belirtmişlerdir. Öğretmenlerin tamamı asimptot kavramını tanımlarken sonsuzda yaklaşılacak eğri ya da doğru şeklinde açıklamalar yapmışlardır. Tüm öğretmenler dört farklı asimptot türünün olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmenlerin tamamı asimptot çeşitlerinin hangi durumlarda kullanılacağına yönelik eksiksiz ve doğru açıklamalar yapmışlardır. Buna göre öğretmenlerin tamamı yatay asimptotun; fonksiyonun sonsuzdaki limitinin alınması durumunda, düşey asimptotun; fonksiyonu tanımsız yaptığı noktalarda, eğri ve eğik asimptotların da rasyonel fonksiyonlarda pay ile payda derecelerinin oranlanmasında ortaya çıktığından bahsetmişlerdir. Öğretmenlerden $\bar{O}_1$, $\bar{O}_3$ ve $\bar{O}_4$ fonksiyon grafiğinin yatay asimptotu kesebilirken düşey asimptotu kesemeyeceğine yönelik açıklamalarda da bulunmuşlardır. Öğretmenlerden sadece $\bar{O}_3$ eğri ve eğik asimptotların niteliklerine yönelik eğik asimptotun doğru şeklinde, eğri asimptotun da parabol şeklinde olduğundan bahsetmiştir. Bir aralıkta tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin çiziminde uygulanması gereken aşamaların neler olduğunun belirlenmesi amacıyla öğretmenlere sözel bir soru sorulmuştur. Öğretmenlere bir aralıkta tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin çiziminde hangi özelliklere dikkat ettikleri sorulmuştur. Grafik çiziminde dikkat edilmesi gereken özellikler lise matematik ders kitapları (Aydın & Erbaş, 2014; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Keskin, 2017; Ünlü & Er, 2013) ve alandaki matematik öğretim kitaplarından (Balcı, 1999; Caferov, 1999; Demir, 2014; Edwards & Penney, 2001; Hacısalihioğlu vd., 1988; Kadakal, 2010; Kadioğlu & Kamali, 2005; Thomas vd., 2011) yararlanılarak araştırmacı tarafından belirlenmiştir. Buna göre bir fonksiyonun çiziminde dikkat edilmesi gereken özellikler; fonksiyonun tanım kümesinin bulunması, fonksiyonun varsa asimptotlarının bulunması, fonksiyonun eksenleri kestiği noktalarının bulunması, fonksiyonun birinci türevi incelenerek ekstremum noktalarının bulunması, konvekslik-konkavlık için ikinci türevin incelenmesi, değişim tablosunun incelenmesi ve eldeki veriler dâhilinde fonksiyonun

grafiğinin çizilmesi şeklinde yedi aşamadan oluşur. Öğretmenlerin bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizerken dikkat edilmesi gereken aşamalara yönelik hangi özellikleri dikkate aldıkları Tablo 61’de araştırmacı tarafından oluşturulan kategorilere göre incelenmiştir.

Tablo 61. Öğretmenlerin Grafik Çiziminde Dikkate Alınması Gerektiğini Düşündükleri Özellikler

Kategoriler	Ö ₁	Ö ₂	Ö ₃	Ö ₄
Fonksiyonun tanım kümesinin bulunması	√	√	√	√
Fonksiyonun varsa asimptotlarının bulunması	√	√	√	√
Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalarının bulunması	√	√	√	√
Birinci türev incelenerek ekstremum noktaların bulunması	√	√	√	√
Konvekslik-konkavlık için ikinci türevin incelenmesi	√		√	√
Değişim tablosunun incelenmesi				√
Eldeki veriler dâhilinde fonksiyonun grafiğinin çizilmesi	√	√	√	√

Tablo 61’deki bulgulara göre Ö₄ haricindeki öğretmenlerin bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin çiziminde dikkat edilmesi gereken özelliklere yönelik görüşlerinin eksik olduğu söylenebilir. Öğretmenlerden sadece Ö₂’nin bir fonksiyonun grafiğinin çiziminde “konvekslik-konkavlık için ikinci türevin incelenmesi” özelliğini dikkate almadığı görülmüştür. Ö₄ haricindeki tüm öğretmenler bir fonksiyonun grafiğinin çiziminde “değişim tablosunun incelenmesi” özelliğini dikkate almamıştır. Öte yandan bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin çiziminde dikkat edilmesi gereken özellikleri kullanarak grafiği çizebilme becerilerini belirlemek amacıyla öğretmenlere $f(x) = \frac{(x-3).(x+3)}{x^2-4}$ şeklinde rasyonel bir fonksiyon problemi verilerek bu fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Öğretmenlerin grafik çizimine yönelik açıklamaları ile kullandıkları gösterimler Tablo 62’de araştırmacı tarafından oluşturulan kategorilere ve kodlara göre incelenmiştir.

Tablo 62. Grafik Çizimine Yönelik Kategoriler ve Kodlar

Kategoriler	Ölçütler			Destekleyici İfadeler
	Evet	Kısmen	Hayır	
Fonksiyonun tanım kümesinin bulunması	Ö _{1, 2, 3, 4}			En geniş tanım kümesini bulurken paydayı sıfır yapan değerlere bakarız. $x = 2$ ve $x = -2$ değerleri tanım kümesine dahil değil. Tanım kümesi şöyle olur (Ö₄) $D - \{2, -2\}$

Tablo 62. (Devamı)

Asimptotların bulunması	Ö _{1, 2, 3, 4}	Düşey asimptotu bulurken fonksiyonu zaten daha önce tanımsız yapan değerleri bulmuştuk. Bu değerler aynı zamanda düşey asimptottur. Dolayısıyla $x = 2$ ve $x = -2$ olmak üzere iki düşey asimptot vardır. Yatay asimptot için fonksiyonun sonsuzdaki limitinden $y = 1$ yatay asimptot bulunur (Ö₃) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1$
Fonksiyonun eksenleri kestiği noktaların bulunması	Ö _{1, 2, 3, 4}	Eksenleri kestiği noktaları bulmak için x'e sıfır vererek y eksenini kestiği noktayı, daha sonra y'ye sıfır vererek x eksenini kestiği noktayı buluruz (Ö₂) $x = 0 \quad y = +\frac{9}{4}$ $y = 0 \quad x = 3, \quad x = -3$
Ekstremum noktalarının bulunması	Ö _{1, 2, 3, 4}	Şimdi fonksiyonun artan-azalan olduğu aralıkları bulmak için fonksiyonun birinci türevini sıfır sıfıra eşitleriz (Ö₁) $f'(x) = 0$ $\frac{2x(x^2 - 4) - (2x) \cdot (x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = 0$ yerel min. nok.
Konveks-Konkav aralıklarının bulunması	Ö _{1, 2, 3, 4}	
Değişim tablosunun incelenmesi	Ö ₄	Fonksiyonun köklerini bulup değişim tablosunu yapalım. Hem işaretlerin de nasıl değiştiğini görmüş oluruz. Bizim $x = 0$ noktamız ekstremum noktasıydı. 0 noktada fonksiyon davranış değiştirecek. $y = 0$ verdiğimizde bulduğumuz $x = 3$ ve $x = -3$ değerlerini de tabloya koyalım. Düşey asimptotların olduğu $x = 2$ ve $x = -2$ noktalarını da tabloya ekleyelim. 0 noktasının sağında pozitif bu noktanın solunda negatif olacak işaretler (Ö₄)

Tablo 62 (Devamı)

Eldeki veriler dâhilinde
grafiğin çizilmesi

Ö₁, 2, 3, 4

x	$-\infty$	-2	0	2	∞	
$f'(x)$		-	-	+	+	+
$f''(x)$		↘	↘	↘	↗	↗

$-\infty$ 'dan $x = 0$ noktasına kadar azalarak gelecek. Ancak bu arada $x = -2$ düşey asimptotu var. Bu noktada asimptotu kesmeyecek. Düşey asimptotun sağından azalarak ekstremum noktasının ordinatına gelecek. $x = 2$ düşey asimptotuna kadar artacak bu şekilde. Bu düşey asimptotun sağından da artarak ∞ 'a kadar devam edecek (Ö₄)

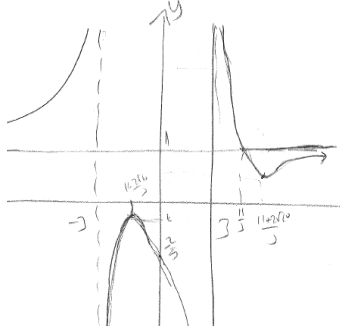
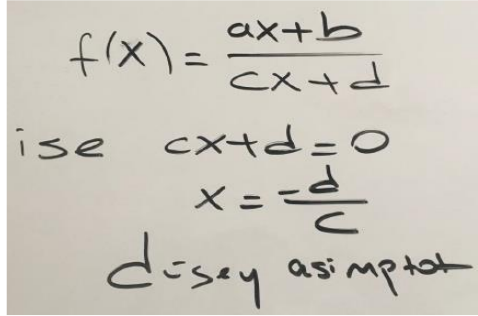
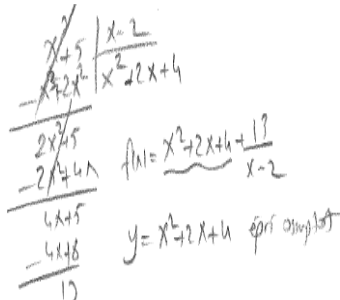
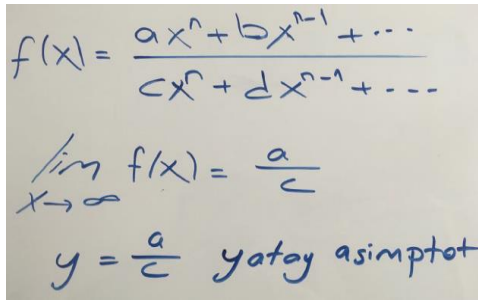
Tablo 62'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin çiziminde dikkat edilecek özellikler arasından “fonksiyonun tanım kümesinin bulunması, fonksiyonun asimptotlarının bulunması, fonksiyonun eksenleri kestiği noktaların bulunması, birinci türevden yararlanılarak ekstremum noktalarının bulunması ve eldeki veriler dâhilinde grafiğin çizilmesi” özelliklerini eksiksiz ve doğru bir şekilde uygulamıştır. Öğretmenlerin tamamı yukarıda grafik çiziminde uyguladıkları özellikleri grafiği çizmeden de gerekli olan özellikler arasında belirtmişlerdir. Buna göre öğretmenlerin uygulamadan önce grafik çizimine yönelik ifade ettikleri özelliklerle uyguladıkları bu özelliklerin birbirleriyle örtüştüğü düşünülmektedir. Ancak öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ fonksiyon grafiğini çizmeden önce dikkat edilmesi gereken özellikler arasında “konveks-konkav aralıklarının bulunması” özelliğini dile getirmelerine rağmen grafik çiziminde bu özelliği uygulamamışlardır. Öğretmenler fonksiyonun grafiğini çizerken ekstremum noktalarının bulunmasından sonra bu özelliği ifade etmelerine rağmen işlemin uzun zaman alacak olmasından dolayı konveks-konkav aralıkların bulunması özelliğini uygulamamışlardır.

Öğretmenlerden Ö₂ grafik çiziminde gerekli olan özellikler arasında “konveks-konkav aralıkların bulunması” özelliğini belirtmediği gibi grafik çiziminde de bu özelliği uygulamamıştır. Öğretmenlerin çoğunun grafik çizimi yaparken uyguladıkları özelliklerden birisi de “değişim tablosunun incelenmesi” özelliğidir. Öğretmenlerden Ö₁, Ö₂

ve Ö₃ grafik çizimi öncesinde “değişim tablosunun incelenmesi” özelliğini belirtmedikleri gibi grafik çizimi yaparken de aynı özelliği dikkate almamışlardır. Buna göre bu öğretmenlerin uygulama öncesi belirtmedikleri “değişim tablosunun incelenmesi” özelliğini grafik çiziminde de uygulamayarak tutarlı bir davranışta bulundukları görülmüştür. Ö₁, Ö₂ ve Ö₃ değişim tablosu yapmadan zihinlerinde grafiğin hangi aralıklarda nasıl olacağına yönelik düşüncelerini ifade ederek görsel üzerinde grafiğin köklerine ve asimptotlarına göre davranışını göstermişlerdir.

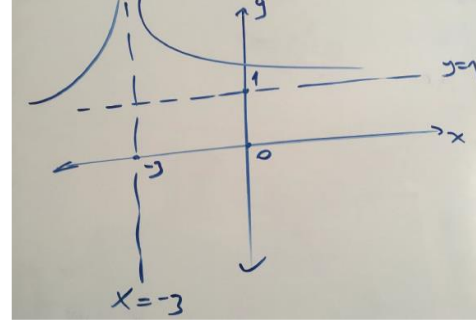
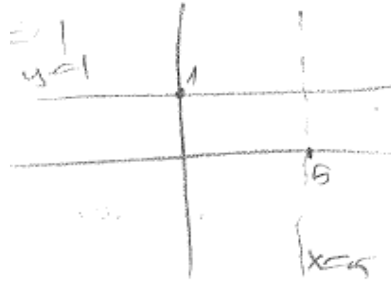
Öğretmenlerden Ö₄ ise grafik çizimi öncesinde “değişim tablosunun incelenmesi” özelliğini belirttiği gibi grafiği çizerken de aynı özelliği eksiksiz ve doğru bir şekilde uygulamıştır. Öğretmenlerin tamamı grafik çizimi yaparken grafiğin asimptotları kesmemesine dikkat etmişlerdir. Öğretmenlerin tamamı asimptotları kesik çizgilerle ifade ederken grafiği kesik olmayan çizgilerle göstermişlerdir. Öğretmenler görüşme sürecinde asimptotlara verdikleri örneklerin benzerlerini grafik çiziminde göstermişlerdir. Öğretmenlerin tamamı ekstremum noktalarını bulurken işaret tablosundan yararlanmışlardır. Tüm öğretmenler fonksiyonun paydasında çift katlı kök bulunmadığından grafiğin baca şeklinde değil de kelebek şeklinde olduğunu açıklamışlardır. Öğretmenlerin asimptotlar ve grafik çizimine yönelik görüşmelerden ve gözlemlerden edinilen yansımalar Tablo 63’de gösterilmiştir.

Tablo 63. Asimptotlar ve Grafik Çizimine Yönelik Görüşme-Gözlem Yansımaları

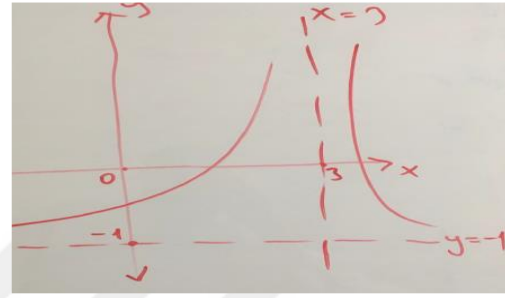
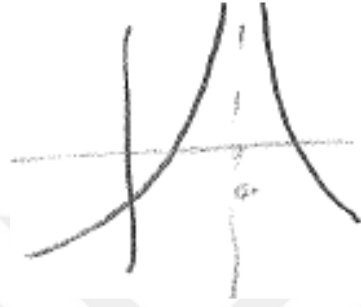
Öğretmenler	Görüşme Yansımaları	Gözlem Yansımaları
Ö ₁		
Ö ₂		

Tablo 63 (Devamı)

Ö₃



Ö₄



Tablo 63'deki bulgulara göre öğretmenlerin asimptotlar ve grafik çizimine yönelik görüşmelerden ve ders içi gözlemlerden elde edilen verilerin birbiriyle tutarlı olduğu söylenebilir. Yapılan görüşmelerde Ö₁ asimptot kavramına yönelik fonksiyonun sonsuzda bir eğriye ya da doğruya yaklaşması şeklinde görüş belirtirken asimptot çeşitlerini de araştırmacıya doğru bir şekilde açıklamış ve bunları görsel argümanlarla desteklemiştir. Ö₁ ayrıca araştırmacıya grafiğin hangi durumlarda asimptotları keseceğine yönelik de açıklamalarda bulunmuştur. Ö₁ grafik çizimine yönelik değişim tablosunun incelenmesi dışındaki özellikler hakkında araştırmacıya bilgi vermiştir. Ö₁ görüşme sürecinde bir fonksiyonun grafiğini de doğru bir şekilde çizmiştir. Ö₁'in ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₁ öğrencilerine asimptot kavramı hakkında görüşmede yaptığı açıklamaların benzerini yapmıştır. Asimptot türlerinin tanımlarını öğrencilerine hem sözel bir şekilde hem de cebirsel gösterimlerle açıklayan Ö₁ asimptot türlerine yönelik görsel örneklerden de yararlanmıştır. Grafik çiziminde dikkat edilecek özellikler arasında değişim tablosunu göstermeyen Ö₁ görüşmede belirttiği özellikleri dikkate alarak fonksiyonun grafiğini çizmiştir.

Yapılan görüşmelerde Ö₂ ve Ö₃ asimptot kavramına yönelik fonksiyonun sonsuzda eğriye teğet olduğu doğru şeklinde açıklamalarda bulunmuşlardır. Ö₂ ve Ö₃ araştırmacıya asimptot türlerine yönelik düşey, yatay, eğri ve eğik olmak üzere dört farklı çeşidinden bahsetmişler ve asimptotların çeşitlerini grafik üzerinde göstermişlerdir. Öğretmenlerden Ö₃ grafiğin asimptotu hangi durumlarda kesip kesemeyeceğine yönelik araştırmacıya açıklamalarda bulunmuştur. Ö₃ bununla birlikte eğik ve eğri asimptotların nitelikleri hakkında da araştırmacıya bilgi vererek eğik asimptotla eğri asimptot arasındaki farkı hem grafiksel

gösterimle hem de cebirsel işlemlerle göstermiştir. Ö₂ grafik çiziminde dikkat edilecek özelliklere yönelik “konveks-konkav aralıkların belirlenmesi” ve “değişim tablosunun incelenmesi” özellikleri hakkında araştırmacıya herhangi bir açıklama yapmazken Ö₃ sadece “değişim tablosunun incelenmesi” özelliği hakkında araştırmacıya herhangi bir açıklamada bulunmamıştır. Ö₂ ve Ö₃ görüşme sürecinde kendilerine yöneltilen grafik çizimi problemini doğru bir şekilde çözmüşlerdir. Bu öğretmenlerin ders içi gözlemleri incelendiğinde her iki öğretmenin de derslerinde asimptot türlerine yönelik grafik üzerinde örnekler verdiklerine, asimptotların hangi durumlarda nasıl belirlendiklerine ve asimptotların farklılıklarının nasıl anlaşıldığına yönelik öğrencilerine bilgi verdikleri görülmüştür. Ö₂ ve Ö₃ görüşmelerde olduğu gibi derste de grafik çiziminde dikkate aldıkları özellikleri fonksiyonun grafiğini çizerken kullanmışlardır.

Yapılan görüşmelerde Ö₄ asimptot kavramına, asimptot türlerine, hangi durumlarda hangi asimptotun kullanılacağına ve grafik çizimine yönelik araştırmacıya eksiksiz ve doğru açıklamalarda bulunmuştur. Ö₄ araştırmacıya hem yatay asimptotla eğik ve eğri asimptotlar arasındaki farkı hem de eğri asimptotla eğik asimptotun birbiri arasındaki farka yönelik açıklamalarda bulunmuştur. Ö₄ fonksiyonun grafiğinin çizimine yönelik araştırmacıya eksiksiz açıklamalarda bulunmuştur. Ö₄’ün ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₄ görüşme sürecinde asimptotlara ve grafik çizimine yönelik araştırmacıya ifade ettiği bilgileri derste de kullanmıştır.

4.2. Öğretmenlerin Türev ve Uygulamalarına Yönelik Öğrenci ve Öğretim Stratejileri Bilgilerine İlişkin Bulgular

Bu bölümde lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerine ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular mutlak değer fonksiyonunun sağdan-soldan türevinin aranması, köklü sayılarda türev arama kurallarının uygulanması, kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisinin belirlenmesi, kapalı fonksiyonun türevinin aranması, yerel ekstremum noktası ana başlıklarına göre incelenmiştir. Bu ana başlıklar altında tanımlanmış alt başlıklara dair bulgular tablolar ve doğrudan alıntılarla özetlenmiştir. Bulgular verilirken görüşmelerden elde edilen verilerle gözlemlerden elde edilen veriler düzenli ve uyumlu bir şekilde analiz edilerek okuyucuya sunulmuştur.

Mutlak değer fonksiyonunun sağdan-soldan türevinin aranması.

Öğrencilerin mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik derste yaptıkları hatalardan hareketle araştırmacı tarafından hazırlanan mutlak değer fonksiyonunun türevine ilişkin soru ve çözümü Şekil 23’de gösterilmiştir.

1.SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere
 $f(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre bu fonksiyonun
 $x=1$ noktasındaki türevini inceleyiniz.

ÖĞRENCİ CEVABI

$$\begin{aligned}
 f(x) &= |x^2 - 1| \text{ ise } f(1) = |1^2 - 1| = 0 \text{ bulunur.} \\
 f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ bulunulmaz.} \\
 f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} \text{ yazılır.} \\
 f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} \\
 f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2 \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

Şekil 23. Mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik soru ve çözümü.

Şekil 23.'teki mutlak değer fonksiyonunun türevinin çözümüne ilişkin öğretmenlerin yaptıkları açıklamalar Gökkurt (2014)'ün kategorilerine göre Tablo 64'de değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin öğrenci hatalarının nedenlerine yönelik ortaya attıkları gerekçeler ise Stacey vd. (2001)'nin kategorilerine göre incelenmiştir. Öğretmenlerin mutlak değer fonksiyonunun türevinin aranmasına yönelik açıklamaları öğrencinin yaptığı hatanın belirlenmesi, öğrencinin yaptığı hatanın kaynağının belirlenmesi, öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanılacak matematiksel ön bilginin belirlenmesi ve öğrencinin yaptığı hatayı anlamasına yönelik sorulacak soruların belirlenmesi şeklinde dört kategoride incelenmiştir.

Tablo 64. Mutlak Değer Fonksiyonunun Türeviyle İlgili Öğrenci Bilgisine Yönelik Kategoriler ve Kodlar

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Öğrencinin yaptığı hata	Kırılma noktasına bağlı türev yaklaşımının bilinmemesi	Ö ₁
	Sağdan-soldan türev aramadan bir noktadaki türev tanımını kullanma	Ö _{2, 3, 4}
Öğrencinin yaptığı hatanın kaynağı	Türevi sağdan-soldan aramaya dikkat etmeme	Ö _{1, 3}
	Mutlak değer fonksiyonunun özelliğini bilememe	Ö _{1, 4}
	Kırılma noktası kavramının iyi bilinmemesi	Ö ₂
Öğrencinin doğru cevap vermesi için kullanılacak ön bilgi	Sağdan-soldan türevi arama	Ö _{1, 2, 3}
	Kırılma noktalarının özellikleri	Ö ₂
	Mutlak değer fonksiyonunun parçalı olarak yazılması	Ö ₄
Öğrencinin hatasını anlamasına yönelik sorulacak sorular	Fonksiyonun sağdan-soldan türevini bulabilir misin?	Ö _{1, 3}
	Fonksiyonun grafiğini çizseydin nasıl çizerdin?	Ö ₂
	Kırılma noktası nedir? Her kırılma noktasında türev var mıdır?	Ö _{2, 3}
	Her fonksiyon her noktada türevli olmak zorunda mıdır?	Ö ₃
	$y = f(x) = x $ fonksiyonunun türevini inceleyebilir misin?	Ö ₄

Tablo 64'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı öğrencinin mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik yaptığı hatayı doğru tespit etmiştir. Öğretmenlerden Ö₂, Ö₃ ve Ö₄ öğrencinin yaptığı hatayı; mutlak değer fonksiyonu gibi özel tanımlı fonksiyonlarda sağdan-soldan türev aramadan işlem yapma olarak açıklarken Ö₁ bu hatayı kırılma noktalarında türev arama yaklaşımının bilinmemesi olarak ifade etmiştir. Öğretmenlerin çoğu özel tanımlı bir fonksiyon olan mutlak değer fonksiyonunun bir kırılma noktasında türev arama işleminin bilinmemesinden dolayı hatanın yapıldığını dile getirmiştir. Öğretmenlerden Ö₂ ise öğrencinin yaptığı bu hatanın nedeninin kırılma noktalarında nasıl hareket edileceğinin bilinmemesi şeklinde açıklamıştır. Öğretmenlerin hatanın kaynağına yönelik açıklamaları dikkate alındığında gerçekten de mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasında sağdan ve soldan işlem yaparak sağ ve sol türevlerin birbirinden farklı olduğu görülebilir ve böylece kırılma noktasında türevin olmadığı görülebilir. Mutlak değer fonksiyonunda ilgili noktadaki değer mutlak değerli ifadede yerine yazılsaydı mutlak değerinin içinin sıfır olacağı görülebilirdi. Bu sayede ilgili noktada sağdan ve soldan türev alınarak türev arama işlemi gerçekleştirilebilirdi. Öğretmenlerin tamamının mutlak değer fonksiyonunun türevi aranırken yapılan hatanın kaynağına yönelik belirttikleri gerekçelerin hatanın kaynağıyla ilgili ve hatanın kaynağını yansıtan detaylı gerekçeler oldukları söylenebilir.

Hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgiye yönelik öğretmenlerin tamamı hatanın kaynağıyla ilişkili açıklamalarda bulunmuştur. Buna göre öğretmenlerin çoğu hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgi için sağdan-soldan türev arama işlemini önermiştir. Öğretmenlerden Ö₄'ün hatanın ortadan kaldırılmasında önerdiği mutlak değer fonksiyonunun parçalı şekilde yazılması fikri de sorunun doğru çözülmesinde önemli bir ipucudur. Nitekim mutlak değer fonksiyonu kırılma noktasında parçalı şekilde yazılsaydı kırılma noktasının solunda ve sağında farklı fonksiyonların olacağı görülebilirdi. Dolayısıyla bir noktadaki türev tanımından yararlanarak farklı fonksiyonların türevlerinin de birbirinden farklı olacağı ortaya çıkarılabilirdi.

Öğrencinin hatasını fark etmesine ve hatayı anlamasına yönelik öğretmen soruları değerlendirildiğinde bu soruların doğru cevaba yönlendiren ve hatayı fark ettiren sorular olduğu söylenebilir. Öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₃ tarafından sağdan-soldan türevi aramaya yönelik soru ile Ö₂ ve Ö₃ tarafından her kırılma noktasında türevin olma durumuna yönelik sorunun öğrenciyi düşündürecek sorular olduğu görülmüştür. Öğrenci bu sayede mutlak değer fonksiyonunun türevini sadece sağdan aramayarak soldan da türevi inceleme imkânı bulabilir. Bu inceleme sonunda sağdan ve soldan türev değerlerini farklı bularak kırılma noktasında türevin olmayacağına kanaat getirebilir. Öğretmenlerden Ö₄'ün hatanın anlaşılmasına yönelik

önerdiği $y = f(x) = |x|$ şeklindeki mutlak değer sorusu ise öğretmenlerin çok sık kullandıkları ve öğrenciler tarafından yaygın bilinen örnekler arasındadır., & rilen bu örnekle en basit anlamda mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasındaki sağ ve sol türevlerin birbirinden farklı oldukları görülerek ilgili noktada türevin olmadığı görülebilir.

Öğretmenlerin mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik öğrenci bilgileriyle görüşmelerden elde edilen konu alanı bilgileri karşılaştırıldığında öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄'ün mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik öğrenci bilgileriyle konu alanı bilgilerinin birbirleriyle örtüştüğü söylenebilir. Ancak öğretmenlerden Ö₂'nin mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik öğrenci bilgileriyle konu alanı bilgilerinin birbirleriyle uyumlu olmadığı düşünülmektedir. Ö₂ dışındaki öğretmenler konu alanı bilgisine yönelik görüşmelerde mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasındaki türevine yönelik eksiksiz ve doğru açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu öğretmenler kırılma noktasında sağdan ve soldan türev olarak mutlak değer fonksiyonunun türevini incelemişlerdir. Aynı öğretmenler mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik hatalı çözüm içeren soruda da kırılma noktalarında sağdan-soldan türev aranması gerektiğinden bahsetmiştir. Ancak öğretmenlerden Ö₂ konu alanı bilgisindeki görüşmelerde mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik ilgili noktanın kırılma noktası olup olmadığını dikkate almadan sağdan ve soldan türev arama işlemi bulunmuştur. Ö₂ bu işlemde bir noktadaki türev tanımından yararlanmamış ve mutlak değer fonksiyonunun türevini yanlış bulmuştur. Ö₂'nin mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik hatalı çözüm içeren soruda ise hatayı bulduğu, hatanın kaynağını doğru tespit ettiği, hatayı gidermede kullanılacak ön bilgi ile sorulacak sorulara yönelik uygun cevaplar verdiği görülmüştür. Ö₂'nin görüşme sürecinde mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik işlemi yanlış yapmasına rağmen öğrenci bilgisindeki doğru tespitleri oldukça şaşırtıcıdır.

Öğretmenlerin öğrenci bilgilerine yönelik açıklamalarının öğrenme ortamında da ne derece karşılık bulduğunu belirleyebilmek amacıyla mutlak değer fonksiyonunun türevinin anlatıldığı konuya dönük ders içi gözlemler yapılmıştır. Yapılan bu gözlemlerde öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄'ün mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik bazı öğrencilerin kırılma noktalarını dikkate almamaları ve sağdan-soldan türevi aramayarak sadece sağdan türevi incelemeleri gibi zorluklara sahip olduklarını belirlemiştir. Bu öğretmenler öğrencilerin mutlak değer fonksiyonunun türevinde sahip oldukları zorluklara ve hatalara yönelik fonksiyonun parçalı bir şekilde belirtilmesi ve kırılma noktalarının dikkate alınarak sağdan-soldan türevin incelenmesi gibi çözüm önerileri sundukları ve hataları gidermeye yönelik örnekler çözdükleri görülmüştür. Buradan hareketle Ö₁, Ö₃ ve Ö₄'ün mutlak değer fonksiyonunun türevi konusunda öğrenci bilgisine yönelik araştırmacıya

belirttiği görüşlerle ders ortamındaki öğrenci bilgileri arasında bir uyumun olduğu ifade edilebilir. Ancak aynı durumun Ö₂ için geçerli olmadığını söylemek mümkündür. Ö₂'nin öğrenci bilgisine yönelik görüşmelerde mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik açıklamalarıyla ders ortamındaki davranışlarının birbirinden farklılık gösterdiği söylenebilir. Nitekim Ö₂ derste mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik ön bilgileri dikkate almadan kırılma noktası kavramını göz ardı ederek türevi aradığı, öğrencilerin bu konudaki öğrenme zorluklarını belirlemeden ve bu zorluklara yönelik çözüm önerileri üretmeden sadece soru çözdüğü gözlenmiştir. Öte yandan mutlak değer fonksiyonunun türevi aranırken yapılan hatanın giderilmesine yönelik kullanılabilecek öğretim yöntem, strateji ve tekniklere ilişkin öğretmenlerin açıklamaları Tablo 65'de gösterilmiştir.

Tablo 65. *Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevine İlişkin Öğretim Stratejileri Bilgilerine Yönelik Öğretmen Görüşleri*

Öğretmenler	Kullanılması Düşünülen Öğretim Yöntem, Strateji ve Teknik	Destekleyici Açıklamalar
Ö ₁	Düz Anlatım Yöntemi Gösteri Tekniği Soru-Cevap Tekniği	<i>Öğrencilere mutlak değer fonksiyonunun grafiğini çizdim. Mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasındaki değişimini anlatırdım. Bu tür özel tanımlı fonksiyonların türevleri aranırken fonksiyona sağdan-soldan nasıl yaklaşılması gerektiğini gösterirdim. Sağdan-soldan türev değerlerinin birbirine eşit olması gerektiğini söylerdim. Örnek üzerinde anlatır, onlara soru sorar cevap verirdim. Ayrıca onları da tahtaya kaldırır, gösterdiğim şeyleri yapmalarını isterdim. Öğrencilerin takıldıkları noktalarda sorularını cevaplardım</i>
Ö ₂	Düz Anlatım Yöntemi Soru-Cevap Tekniği	<i>Önce öğrencilere kırılma noktasının tanımını yapardım. Daha sonra bu kritik noktayı pekiştirecek soruları çözerdim. Öğrenciler de çözerdi. Onlara soru sorar onlardan dönüt beklerdim</i>
Ö ₃	Düz Anlatım Yöntemi Soru-Cevap Tekniği Gösteri Tekniği	<i>Önce sağdan-soldan türev kavramını anlatırdım. Soruda da öğrenciye sağdan-soldan türevi buldurup tekrardan çözdürürdüm. Sağdan-soldan türevlerin birbirine eşit olup olmadığını fark etmelerini sağlardım. Sonra öğrencinin yanlış yaptığı cevaba bağlı olarak sorunun doğru çözümüne gidecek çözüm yollarını fark ettirirdim</i>
Ö ₄	Düz Anlatım Yöntemi Soru Sorma Tekniği	<i>Mutlak değer fonksiyonunu parçalı fonksiyon şeklinde incelemeye çalışırdım. Türevde de aynısını yapardım. Mutlak değerın kırılma noktalarında sağdan-soldan türeve bakılması gerektiği üzerinde dururdum. Öğrencileri tahtaya kaldırır ve onlara soru sorardım</i>

Tablo 65'deki bulgulara göre öğretmenlerin derste çoğunlukla mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik düz anlatım yöntemi ile soru-cevap tekniğini kullanacakları anlaşılmaktadır. Öğretmenlerin açıklamaları dikkate alındığında öğretmenler mutlak değer fonksiyonunun türevini anlatırken yapılandırmacı yaklaşımla örtüşmeyen, kendilerinin öğretimin merkezinde yer aldıkları öğretim rolünü sergileyeceklerini belirtmişlerdir. Öğretmenlerin mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik öğretim stratejileri bilgilerini daha derinlemesine incelemek amacıyla ders içi gözlemler yapılmıştır. Ders içi gözlemlerde öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄'ün kullanmayı düşündüğü öğretim yöntem, strateji ve tekniklerle derste kullandığı öğretim yöntem, strateji ve tekniklerin birbiriyle örtüştüğü görülmüştür. Bu öğretmenler mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik öğretim yaparken geleneksel öğretim yöntemleri kullanmalarına rağmen öğrencileri derste aktif bir şekilde tutmaya da gayret göstermişlerdir.

Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ mutlak değer fonksiyonunun türevini anlatmadan önce öğretmenler odasında derse hazırlık yapmışlardır. Bu öğretmenler ders henüz başlarken bir önceki konu olan türev-süreklilik ilişkisinden bahsetmiş ve kırılma noktalarındaki türeve dikkat çekmiştir. Bu öğretmenler özel tanımlı fonksiyonların parçalı şekilde düşünülerek türevlerinin alınmasını bir noktadaki türev tanımına yönelik formülün doğru bir şekilde uygulanması bakımından önemli görmüşlerdir. Bu öğretmenlerin derste en çok düz anlatım yöntemini ve daha sonra sunuş yoluyla öğretim stratejisini kullandıkları görülmüştür. Öğretmenler öğrencilerin derse olan katılımını arttırmak amacıyla ara ara onlara sorular sormuş ve onları tahtaya kaldırarak etkinlikler yaptırmıştır. Öğrencilerin soruları doğru cevapladıklarını gören bu öğretmenler öğrencilerine pekiştireçler vermiştir. Öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₃ derste soru çözerken etkileşimli tahtadan sık sık yararlanmışlardır.

Öte yandan öğretmenlerden Ö₂'nin derste kullanmayı düşündüğü öğretim yöntem, strateji ve tekniklerle derste kullandığı öğretim yöntem, teknik ve stratejiler karşılaştırıldığında Ö₂ tarafından yapılan açıklamaların ve derste ki davranışların birbiriyle örtüşmediği görülmüştür. Ö₂ kullanmayı düşündüğü soru-cevap tekniğini derste kullanmamıştır. Ders öncesi herhangi bir şekilde hazırlık yapmayan Ö₂ dersin başında da öğrencilerin hazırbulunuşluklarına ve ön bilgilerine yönelik kritik nokta kavramı veya türev-süreklilik ilişkisiyle ilgili hatırlatmada bulunmamıştır. Ö₂ kullanmayı düşündüğü öğretim stratejilerine yönelik açıklamalarında kritik noktayı pekiştirecek soruların çözümünü yapacağını söylemesine rağmen derste kritik noktadan bahsetmeden sadece mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik örnekler çözmüştür. Ö₂ derste en çok düz anlatım yöntemini kullanmış ve ara sıra etkileşimli tahtadan da öğrencilerine sorular çözmüştür.

Köklü sayılarda türev arama kurallarının uygulanması.

Öğrencilerin köklü sayılarda türev arama kurallarının uygulanmasına yönelik derste yaptıkları hatalardan hareketle araştırmacı tarafından hazırlanan köklü sayıların türevine ilişkin soru ve çözümü Şekil 24'te gösterilmiştir.

2.SORU

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $2x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere

$y = f(x) = \sqrt[2x]{x}$ şeklinde verilen $f(x)$ fonksiyonunun birinci türevini bulunuz?

ÖĞRENCİ CEVABI

$$y = \sqrt[2x]{x} \text{ olduğuna göre}$$
$$y' = \left(x^{\frac{1}{2x}} \right)'$$
$$y' = \frac{1}{2x} \cdot x^{\left(\frac{1}{2x} - 1\right)}$$
$$y' = \frac{1}{2x} \cdot x^{\frac{1-2x}{2x}} \text{ bulunur}$$

Şekil 24. Köklü sayıların türevine yönelik soru ve çözümü.

Şekil 24'teki köklü sayıların türevinin çözümüne ilişkin öğretmenlerin yaptıkları açıklamalar Gökkurt (2014)'un kategorilerine göre Tablo 66'da değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin öğrenci hatalarının nedenlerine yönelik ortaya attıkları gerekçeler ise Stacey vd. (2001)'nin kategorilerine göre incelenmiştir. Öğretmenlerin köklü sayıların türevinin aranmasına yönelik açıklamaları öğrencinin yaptığı hatanın belirlenmesi, öğrencinin yaptığı hatanın kaynağının belirlenmesi, öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanılacak

matematiksel ön bilginin belirlenmesi ve öğrencinin yaptığı hatayı anlamasına yönelik sorulacak soruların belirlenmesi şeklinde dört kategoride incelenmiştir.

Tablo 66. Köklü Sayıların Türeviyle İlgili Öğrenci Bilgisine Yönelik Kategoriler ve Kodlar

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Öğrencinin yaptığı hata	Kökün derecesinin üstel değil de reel sayı gibi düşünülmesi	Ö _{1, 2, 3, 4}
	3^x ile $f(x)^{g(x)}$ 'in türevleri arasındaki farkın gösterilmemesi	Ö ₁
Öğrencinin yaptığı hatanın kaynağı	Üslü sayılarda üssün bir değişken olacağını düşünmemek	Ö ₂
	Öğrencinin fonksiyon bilgisinde eksiklik olması	Ö ₃
	Öğrencinin türeve yönelik farklı sorular çözmemesi	Ö ₄
Öğrencinin doğru cevap vermesi için kullanılacak ön bilgi	$f(x)^{g(x)}$ ile 3^x ifadelerinin türevlerine örnekler verilmesi	Ö ₁
	x^3 ile x^{3x^2} ifadelerine yönelik karşılaştırmalı örneklerin verilmesi	Ö ₂
	Üstel fonksiyonun türevine yönelik örneklerin sunulması	Ö _{3, 4}
Öğrencinin hatasını anlamasına yönelik sorulacak sorular	$f(x)^{g(x)}$ ile 3^x ifadelerinin türevleri aynı şekilde mi aranır?	Ö ₁
	Üslü ifadedeki kuvvet bir reel sayı mıdır?	Ö ₂
	Sence tabandaki x ifadesi bir sayı mı yoksa değişken mi?	Ö ₃
	$\sqrt{x}$, 3^x ve x^x ifadelerinin türevleri aynı mıdır?	Ö ₄

Tablo 66'daki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı öğrencinin köklü sayıların türevine yönelik yaptığı hatayı doğru tespit etmişlerdir. Öğretmenlerin tamamı öğrencilerin yaptığı hataya yönelik ortak bir görüş belirtmişlerdir. Öğretmenlere göre öğrenci köklü sayıların türevi aranırken kökün derecesini yani tabanın üssünü bir değişken olarak değil de bir reel sayı gibi düşünmüştür. Öğretmenlere göre tabanın üssünü bir reel sayı şeklinde düşünen öğrenci bu görüşe göre köklü sayıların türevini aramıştır. Öğretmenlerin, öğrencinin yaptığı hatanın kaynağına yönelik gerekçeleri incelendiğinde Ö₁ ve Ö₂ tarafından dile getirilen gerekçelerin birbirine yakın gerekçeler oldukları söylenebilir. Öğretmenlerden Ö₃ ve Ö₄ ise diğer öğretmenlere nazaran hatanın kaynağına yönelik daha genel gerekçeler belirtmişlerdir. Öğretmenlerin, öğrencilerin yaptıkları hatanın kaynağına yönelik gerekçeleri derinlemesine incelendiğinde bu gerekçelerden Ö₁ ve Ö₂'nin köklü ifadedeki üssün bir değişken olarak değil de bir reel sayı olarak düşünülmesi gerekçesi hatanın kaynağıyla ilgili

ve hatayı yansıtan bir gerekçe olduğundan bu gerekçelerin detaylı gerekçeler oldukları söylenebilir. Ancak Ö₃ ve Ö₄'ün öğrencinin hatasına yönelik fonksiyon bilgisindeki eksiklik ve farklı soruların çözülmemesi şeklindeki gerekçeler öğrencilerin hatalarının kaynağını yansıtmada yetersiz kaldıklarından bu gerekçelerin yalın gerekçeler oldukları söylenebilir. Hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgiye yönelik öğretmenlerin tamamı hatanın kaynağıyla ilişkili açıklamalarda bulunmuştur. Buna göre öğretmenlerin çoğu hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgi için polinom fonksiyonların, üstel fonksiyonların, tabanı ve üssü değişken olan fonksiyonların türevlerine yönelik karşılaştırmalı örneklerin verilmesi gerektiğine dikkat çekmiştir.

Öğrencinin hatasını fark etmesine ve hatayı anlamasına yönelik öğretmen soruları değerlendirildiğinde bu soruların doğru cevaba yönlendiren ve hatayı fark ettiren sorular oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı öğrencinin hatasını gidermesinde kullanacağı matematiksel ön bilgiler doğrultusunda soru örnekleri hazırlamışlardır. Öğretmenlerden Ö₁ Ö₂ ve Ö₄'ün benzer tarzda sorulan sorular oldukları dikkat çekmiştir. Gerçekten de öğrenci polinom fonksiyonların türevlerinin yanı sıra $f(x)^{g(x)}$ ile 3^x şeklindeki tabanı ve üssü değişken olan ya da üstel bir fonksiyon olan ifadelerin türevlerinin de aynı anda nasıl arandığını görebilse köklü ifadedeki üssün bir reel sayı değil de bir değişken olduğunu daha iyi anlayabilir. Tabanı ve üssü değişken şeklinde olan fonksiyonların türevleri aranırken 7her iki tarafın da logaritması alındığından öğrencinin bu logaritma alma işlemini görmesi durumunda türev arama işlemini polinom fonksiyonlardaki gibi değil de logaritma kullanılarak yapılmasının daha doğru olduğuna kanaat getireceği aşîkârdır. Öğretmenlerden Ö₃'ün ifade ettiği gibi tabandaki ifadede bulunan x ifadesinin de bir değişken olduğunun anlaşılması durumunda türev arama işleminin polinom fonksiyonlardaki gibi yapılmayacağı öğrencilerin dikkatlerini çekebilir.

Öğretmenlerin öğrenci bilgilerine yönelik açıklamalarının öğrenme ortamında da ne derece karşılık bulduğunu belirleyebilmek amacıyla köklü, üstel ve $f(x)^{g(x)}$ şeklindeki fonksiyonların türevlerinin anlatıldığı konulara dönük ders içi gözlemler yapılmıştır. Yapılan bu gözlemlerde öğretmenlerin tamamı bazı öğrencilerin $f(x)^{g(x)}$ şeklindeki fonksiyonlarda polinom fonksiyonların türevlerini ararken yaptıkları işlemleri tespit ederek bu şekildeki türev arama işlemlerinin yanlış olduğundan bahsetmişlerdir. Öğretmenler bu şekildeki fonksiyonlarda hem y ifadesinin hem de fonksiyonun aynı anda logaritmasını almak suretiyle doğru işlem sürecini öğrencilerine göstererek ilgili sorulara benzer soruları karşılaştırmalı örneklerle pekiştirmeye çalışmışlardır. Öğretmenlerin tamamı görüşme sürecinde öğrencilerin hatalarını anlamalarına yönelik ürettikleri sorular doğrultusunda sorular sormuş ve

öğrencilerin yaptıkları hataları fark etmelerini sağlamışlardır. Öte yandan köklü sayıların türevi aranırken yapılan hatanın giderilmesine yönelik kullanılabilecek öğretim yöntem, strateji ve tekniklere ilişkin öğretmenlerin açıklamaları Tablo 67’de gösterilmiştir.

Tablo 67. Köklü Sayıların Türevine İlişkin Öğretim Stratejileri Bilgilerine Yönelik Öğretmen Görüşleri

Öğretmenler	Kullanılması Düşünülen Öğretim Yöntem, Strateji ve Teknik	Destekleyici Açıklamalar
Ö ₁	Düz Anlatım Yöntemi Gösteri Tekniği Soru-Cevap Tekniği	Öğrencilere $f(x)^{g(x)}$ şeklindeki fonksiyonların türevlerinin nasıl arandığını anlatırdım. Onlara bu tip fonksiyonların türevlerinin nasıl elde edildiğini önce ben detaylı gösterirdim daha sonra da onları tahtaya kaldırır ve onlara benzer örneklerle ilgili sorular sorardım. Yine de anlamadırlarsa bu fonksiyonların polinom fonksiyonlardan farklı şekilde türevlerinin arandığını iki farklı ifadeye karşılaştırmalı şekilde örnekler sunarak gösterirdim
Ö ₂	Düz Anlatım Yöntemi Soru-Cevap Tekniği	Konuya üslü ifadelerdeki her üssün bir reel sayı olmadığını anlatarak başlardım. Üs ifadesi reel sayı ihtiva etmeyen örnekler verirdim öğrencilere. $f(x)^{g(x)}$ biçimindeki örneklerde kuvvetin reel sayı olmadığını, x ifadesine bağlı bir değişken olduğunu öğrencilere izah ederdim. Buna yönelik de farklı sorular çözerdim. Sadece kendim çözmekle kalmazdım öğrencilere de sorular sorardım, anlamadıkları noktaları cevaplamaya çalışırdım
Ö ₃	Düz Anlatım Yöntemi	Düz şekilde anlatım yöntemini kullanırdım. Öğrencilere üstel fonksiyonların tanımını hatırlatırdım. $f(x)^{g(x)}$ biçimindeki örneklerde $g(x)$ ifadesinin de türevinin alınması gerektiğini belirtirdim. Bunun için $f(x)^{g(x)}$ ifadesinde her iki tarafın logaritmasını alırdım. Bunu gösterirdim, daha sonra da çarpımın türeviyle sonuca ulaşırdım
Ö ₄	Düz Anlatım Yöntemi Gösteri Tekniği Soru-Cevap Tekniği	Öğrencinin yaptığı hatada neden öyle bir çözüm yapıldığının yanlış olduğunu onlara gösterirdim. $\sqrt{x}$ ile $\sqrt[2x]{x}$ ifadelerindeki kök dereceleri arasındaki farka dikkat çekerdim. İkinci ifadede üssün farklılaşmasından dolayı türev alma kurallarının da farklılaştığını gösterirdim. Gösterdiğim bu farklı çözüm yollarını öğrencileri de tahtaya kaldırarak uygulayıp uygulayamadıklarını görmek isterdim. Onlarla soru-cevap şeklinde diyaloglar kurardım

Tablo 67'deki bulgulara göre öğretmenlerin derste çoğunlukla köklü sayıların türevine yönelik düz anlatım yöntemi ile soru-cevap tekniğini kullanacakları anlaşılmaktadır. Öğretmenlerin açıklamaları dikkate alındığında öğretmenler köklü sayıların türevini anlatırken yapılandırmacı yaklaşımla bağdaşmayan, kendilerinin öğretimin merkezinde yer aldıkları öğretim rolünü sergileyeceklerini belirtmişlerdir. Öğretmenlerin köklü sayıların türevine yönelik öğretim stratejileri bilgilerini daha derinlemesine incelemek amacıyla ders içi gözlemler yapılmıştır. Ders içi gözlemlerde öğretmenlerin tamamının kullanmayı düşündükleri öğretim yöntem, strateji ve tekniklerle derste kullandıkları öğretim yöntem, strateji ve tekniklerin birbiriyle örtüştüğü görülmüştür. Bu öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₄ düz anlatım yöntemi ve soru-cevap tekniği dışında gösteri tekniğini de kullanarak öğretimin merkezindeki öğretmen rolüne yönelik farklı davranışlar sergilemişlerdir. Öğretmenlerin tamamının ders öncesinde ya okul kantininde dinlenirken ya da öğretmenler odasında dersin başlamasını beklerken konuya dönük hazırlıklar yaptıkları görülmüştür. Öğretmenler köklü sayıların türevinin daha iyi anlaşılması için hem polinom fonksiyonlara yönelik soru örnekleri hazırlamış hem de öğrencilerin ileride öğrenecekleri üstel fonksiyonlara yönelik basit soru örnekleri hazırlamışlardır. Üstel fonksiyonlara yönelik basit hatırlatmaların yer aldığı soruların neden öğrencilere sorulacağı öğretmenlere sorulduğunda öğretmenler üslü polinom fonksiyonlarla tabanı ve üssü değişken olan fonksiyonların türevlerinin birbirinden farklı olduğunun ayırt edilmesini gerekçe göstermişlerdir. Öğretmenlerin dersleri incelendiğinde en fazla kullanılan öğretim yönteminin düz anlatım yöntemi, en fazla kullanılan öğretim tekniğinin soru-cevap tekniği ve en fazla kullanılan öğretim stratejisinin ise sunuş yoluyla öğretim stratejisi olduğu görülmüştür. Öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄ derste soru çözerken etkileşimli tahtadan bazen yararlanmışlardır. Öğretmenlerden Ö₂ ise etkileşimli tahtayı derste nadiren kullanmıştır. Öğretmenlerin tamamı öğrencilerin soruları doğru cevapladıklarını görünce onlara olumlu pekiştireçler vermişlerdir.

Kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisi.

Öğrencilerin kırılma noktasına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik derste yaptıkları hatalardan hareketle araştırmacı tarafından hazırlanan kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik soru ve çözümü Şekil 25'de gösterilmiştir.

3.SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = f(x) = |x-2|$ fonksiyonunun kırılma noktasının sürekliliğini ve türevliliğini araştırınız.

ÖĞRENCİ CEVABI

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = |x-2| = -x+2 = -2+2 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = |x-2| = x-2 = 2-2 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

$$f(2) = |2-2| = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(2) = f(2) = 0 \text{ olduğundan fonksiyon}$$

$x=2$ noktasında süreklidir. Sürekli olduğundan dolayı türevidir.

Şekil 25. Kırılma noktasına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik soru ve çözümü.

Şekil 25'teki kırılma noktasına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik öğretmenlerin yaptıkları açıklamalar Gökkurt (2014)'un kategorilerine göre Tablo 68.'te değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin öğrenci hatalarının nedenlerine yönelik ortaya attıkları gerekçeler ise Stacey vd. (2001)'nin kategorilerine göre incelenmiştir. Öğretmenlerin kırılma noktasına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik açıklamaları; öğrencinin yaptığı hatanın belirlenmesi, öğrencinin yaptığı hatanın kaynağının belirlenmesi, öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanılacak

matematiksel ön bilginin belirlenmesi ve öğrencinin yaptığı hatayı anlamasına yönelik sorulacak soruların belirlenmesi şeklinde dört kategoride incelenmiştir.

Tablo 68. *Kırılma Noktası ve Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Öğrenci Bilgisine İlişkin Kategoriler-Kodlar*

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Öğrencinin yaptığı hata	Aralıktaki bir noktada sürekli olan her fonksiyonun aynı noktada türevli de olacağına yönelik şartlanma	Ö _{1, 2, 3, 4}
Öğrencinin yaptığı hatanın kaynağı	Kırılma noktasında sağdan-soldan türev aramayı uygulamama	Ö _{1, 3, 4}
	Türev-süreklilik ilişkisini net ortaya koyamama	Ö _{2, 3, 4}
Öğrencinin doğru cevap vermesi için kullanılacak ön bilgi	Sağdan-soldan türevi aramaya yönelik örneklerin verilmesi	Ö _{1, 3, 4}
	Kırılma noktalarında türev aramaya yönelik örneklerin verilmesi	Ö _{2, 4}
	Bilgisayar desteğiyle grafik üzerinde sağdan-soldan türev arama	Ö ₂
Öğrencinin hatasını anlamasına yönelik sorulacak sorular	Sağdan-soldan yaklaşarak o noktadaki türevi bulabilir misin?	Ö _{1, 4}
	Fonksiyon kırılma noktasında sürekli olduğu halde türevli midir?	Ö _{1, 2, 3}
	$y = x - 2 $ fonksiyonunun grafiğini çizebilir misin?	Ö ₄

Tablo 68’deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamı öğrencinin kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik yaptığı hatayı doğru tespit etmiştir. Öğretmenlerin tamamı öğrencinin yaptığı hatanın “sürekliliğin olduğu her noktada fonksiyonun türevli de olması gerektiğine yönelik şartlanma” olduğu konusunda hem fikir olmuşlardır. Öğretmenler, öğrenci hatasının altında yatan sebepleri kırılma noktalarında türev arama işlemlerinin uygulanmaması ve türev-süreklilik ilişkisinin sağlıklı bir şekilde ortaya konamaması şeklinde izah etmişlerdir. Öğretmenlerin öğrencinin yaptığı hataya yönelik sundukları gerekçeler hatanın kaynağıyla ilgili ve hatanın kaynağını yansıtan detaylı gerekçeler oldukları söylenebilir. Hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgiye yönelik öğretmenlerin tamamı hatanın kaynağıyla örtüşen açıklamalarda bulunmuşlardır. Buna göre öğretmenler hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgi için en çok sağdan-soldan türevi aramaya yönelik örneklerin verilmesi ve daha sonra kırılma noktalarında türevin aranmasına yönelik örneklerin verilmesi üzerinde durmuşlardır. Öğretmenlerden Ö₂ ise teknoloji destekli öğretim yapılarak grafik üzerinde sağdan-soldan türev arama işleminin öğrencilere gösterilmesine yönelik matematiksel bir ön bilgi sunmuştur. Öğretmenlerin hatayı gidermek için kullanılacak ön bilgiye yönelik en çok öne sürdükleri sağdan-soldan türevi

arama ve kırılma noktalarındaki türevi arama görüşlerinin aslında birbirine benzer görüşler oldukları düşünülmektedir. Çünkü öğrenci kırılma noktasında fonksiyonun türevini ararken kırılma noktasına sağdan ve soldan yaklaşarak farklı kollardaki türevin aynı olup olmadığını göreceklerdir. Öğrencinin hatasını fark etmesine ve hatayı anlamasına yönelik öğretmen soruları değerlendirildiğinde bu soruların doğru cevaba yönlendiren ve hatayı fark ettiren sorular oldukları söylenebilir. Öğretmenler hatanın fark edilmesine ve giderilmesine yönelik matematiksel ön bilgi bölümünde olduğu gibi en çok kırılma noktalarında fonksiyonun türevinin aranmasına ve daha sonra da ilgili noktada sağdan-soldan türevin aranmasına yönelik sorular önermişlerdir. Gerçekten de öğrenciler kırılma noktalarında sağdan-soldan türevi arayarak sağ ve sol türevlerin birbirinden farklı olduğunu görecektir ve dolayısıyla kırılma noktalarında sürekli olan her fonksiyonun aynı noktalarda türevli olmayabileceğine yönelik bir davranış oluşturabileceklerdir.

Öğretmenlerin kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik öğrenci bilgileriyle konu alanı bilgileri karşılaştırıldığında öğretmenlerin tamamının bu iki bilgi türlerindeki görüşlerinin birbiriyle örtüştüğü düşünülmektedir. Buna göre öğretmenlerin tamamı konu alanı bilgisine yönelik görüşme sürecinde fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olabileceği gibi türevli olmayabileceğini de belirtmiştir. Ayrıca öğretmenler mutlak değer fonksiyonuna yönelik bir kırılma noktasında türev ararken sağdan-soldan türev arama işlemini gerçekleştirmişlerdir. Öğretmenlerin konu alanı bilgisine yönelik görüşmelerde uyguladıklarıyla öğrenci bilgisinde hatanın giderilmesine yönelik öne sürülen gerekçeler ve sorulacak sorulara bağlı görüşlerinin birbirleriyle uyumlu oldukları görülmüştür.

Öğretmenlerin öğrenci bilgilerine yönelik açıklamalarının öğrenme ortamında da ne derece karşılıklı bulduğunu belirleyebilmek amacıyla kırılma noktasının ve türev-süreklilik ilişkisinin anlatıldığı konulara yönelik ders içi gözlemler yapılmıştır. Yapılan bu gözlemlerde öğretmenlerin tamamı öğrencilerin kırılma noktasının niteliğine, kırılma noktalarındaki türevin sadece sağdan aranmasına ve türev-süreklilik ilişkisindeki kabullenmelerine yönelik söz konusu öğrenme zorluklarına sahip olduklarını tespit etmişlerdir. Bu öğretmenler hangi durumlarda ilgili noktanın kırılma noktası olduğuna ve kırılma noktalarında sadece sağdan değil soldan da türevin aranmasına ve sürekli olmanın türevli olmayı her zaman gerektirmediğine yönelik öğrencilerine hatayı gidermeye yönelik örnekler sunmuşlardır. Buradan hareketle öğretmenlerin tamamının kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisi konularında öğrenci bilgisine yönelik araştırmacıya belirttikleri görüşlerle ders ortamındaki öğrenci bilgileri arasında bir uyumun olduğu ifade edilebilir. Öte yandan kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik yapılan hatanın giderilmesine yönelik kullanılabilecek

öğretim yöntem, strateji ve tekniklere ilişkin öğretmenlerin açıklamaları Tablo 69’da gösterilmiştir.

Tablo 69. *Kırılma Noktası ve Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Öğretim Stratejileri Bilgilerine İlişkin Öğretmen Görüşleri*

Öğretmenler	Kullanılması Düşünülen Öğretim Yöntem, Strateji ve Teknik	Destekleyici Açıklamalar
Ö ₁	Düz Anlatım Yöntemi	<i>Önce sürekliliğin tanımını öğrencilere hatırlattırdım. Daha sonra da süreklilik ile türev arasındaki ilişkilere yönelik açıklamalarda bulunurdum. Bu konuyu da anlattıktan sonra sağdan-soldan türevi mutlaka değer fonksiyonlarındaki kırılma noktalarında kullanılmasının çok önemli olduğunu öğrencilere ifade ederdim</i>
Ö ₂	Düz Anlatım Yöntemi	<i>Önce kırılma noktası kavramını anlatırdım. Kırılma noktalarında türevin nasıl aranacağını, bu noktadaki türevde sadece sağdan türevin aranmayacağını örnekler vererek öğrencilere ifade ederdim. Ayrıca türev-süreklilik ilişkisine yönelik fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevli olmayacağını belirtirdim</i>
Ö ₃	Düz Anlatım Yöntemi	<i>Öğrencilere önce süreklilik kavramını anlatırdım. Bu kavramı verdikten sonra fonksiyonun sağdan-soldan türevinin incelenmesine yönelik açıklamalarda bulunur ve örnekler verirdim. Fonksiyonun sürekli olduğu her noktada her zaman türevli olmayacağını belirtirdim</i>
Ö ₄	Düz Anlatım Yöntemi Soru-Cevap Tekniği	<i>Öğrencilere ilgili noktada fonksiyonun türevli olup olmadığını sorardım. Öğrencilerden soruma yönelik cevaplar beklerdim. Öğrenciler fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olmadıklarını bulamadıkları halde “türevlidir herhalde” şeklinde açıklamalarda bulunurlarsa bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevli olmayabileceğini açıklardım. Bunu desteklemek adına mutlak değer fonksiyonlarındaki kırılma noktalarını gösterirdim</i>

Tablo 69’daki bulgulara göre öğretmenlerin tamamının derste kırılma noktasına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik düz anlatım yöntemini kullanacakları anlaşılmaktadır. Öğretmenlerin kırılma noktasına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik öğretim stratejilerine ilişkin görüşleri incelendiğinde öğretmenler derste daha çok kendilerinin hakim olduğu bir

öğretim sergileyeceklerinden bahsetmişlerdir. Öğretmenlerden sadece Ö₄ derste düz anlatım yöntemi dışında soru-cevap tekniğini uygulayacağını belirtmiştir. Öğretmenlerin kırılma noktasına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik öğretim stratejileri bilgilerini daha derinlemesine incelemek amacıyla ders içi gözlemler yapılmıştır. Ders içi gözlemlerde öğretmenlerin tamamının kullanmayı düşündükleri öğretim yöntem, strateji ve tekniklerle derste kullandıkları öğretim yöntem, strateji ve tekniklerin birbiriyle örtüştüğü görülmüştür. Buna göre öğretmenlerin tamamı kırılma noktası ve türev-süreklilik konusu öncesinde derse hazırlık yapmışlardır. Bu öğretmenler ders yeni başlamışken öğrencilerin önceki konuları hatırlamaları için türevin sağdan-soldan tanımına yönelik açıklamalarda bulunmuşlardır. Öğretmenler özellikle türev-süreklilik ilişkisinde fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevli olmayabileceğine yönelik kırılma noktalarıyla ilgili örnekler göstermişlerdir. Öğretmenlerden Ö₄ türev-süreklilik ilişkisine yönelik örnekleri cevaplamaları için öğrencileri tahtaya kaldırmıştır. Onlara sorular soran Ö₄ öğrencilerin de sorularını cevaplayarak ders işlemeye çalışmıştır. Ö₄ soruları doğru cevaplayan öğrencilere “aferrin, çok başarılı, iyi bir çözüm” şeklinde olumlu pekiştirreçler vermiştir. Öğretmenlerden Ö₂ ve Ö₄ derste bazen soru çözerken etkileşimli tahtayı kullanmışlardır. Öğretmenlerden Ö₁ ise etkileşimli tahtayı derste nadiren kullanmıştır. Öğretmenlerden Ö₃ ise etkileşimli tahtayı ilgili konuda hiç kullanmamıştır. Öğretmenlerin dersleri incelendiğinde en fazla kullanılan anlatım yönteminin düz anlatım yöntemi, en fazla kullanılan öğretim tekniğinin soru-cevap tekniği ve en fazla kullanılan öğretim stratejisinin ise sunuş yoluyla öğretim stratejisi olduğu görülmüştür.

Kapalı fonksiyonlarda türevin aranması.

Öğrencilerin kapalı fonksiyonlarda türevin aranmasına yönelik derste yaptıkları hatalardan hareketle araştırmacı tarafından hazırlanan kapalı fonksiyonların türevine yönelik soru ve çözümü Şekil 26’da gösterilmiştir.

4.SORU

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3 \text{ ise } y' = ?$$

sorusuna yönelik iki öğrencinin yaptığı işlemler aşağıda gösterilmiştir.

1. ÖĞRENCİ CEVABI

$$\left(\frac{x}{y}\right)' + \left(\frac{y}{x}\right)' = 0$$

$$\frac{1 \cdot y - y' \cdot x}{y^2} + \frac{y' \cdot x - 1 \cdot y}{x^2} = 0$$

$$\frac{y - y' \cdot x}{y^2} + \frac{y' \cdot x - y}{x^2} = 0$$

$(x^2) \quad (y^2)$

$$\frac{x^2 y - x^3 y' + x y^2 y' - y^3}{x^2 y^2} = 0$$

$$x^2 y - y^3 = x^3 y' - x y^2 y'$$

$$x^2 y - y^3 = y' (x^3 - x y^2)$$

$$y' = \frac{x^2 y - y^3}{x^3 - x y^2} = \frac{y \cdot (x^2 - y^2)}{x \cdot (x^2 - y^2)}$$

$$y' = \frac{y}{x} \text{ bulunur.}$$

2. ÖĞRENCİ CEVABI

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3$$

$(x) \quad (y)$

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = 3$$

$$x^2 + y^2 = 3xy$$

$$x^2 - 3xy + y^2 = 0$$

$$2x - 3 \cdot (1 \cdot y + y' \cdot x) + 2y y' = 0$$

$$2x - 3y - 3x y' + 2y y' = 0$$

$$2x - 3y = 3x y' - 2y y'$$

$$2x - 3y = y' (3x - 2y)$$

$$y' = \frac{2x - 3y}{3x - 2y} \text{ bulunur.}$$

Şekil 26. Kapalı fonksiyonların türevine yönelik soru ve çözümü.

Şekil 26'daki kapalı fonksiyonların türevine yönelik öğretmenlerin yaptıkları açıklamalar Gökçurt (2014)'un kategorilerine göre Tablo 70'de değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin öğrenci hatalarının nedenlerine yönelik ortaya attıkları gerekçeler ise Stacey vd. (2001)'nin kategorilerine göre incelenmiştir. Öğretmenlerin kapalı fonksiyonların türevine yönelik açıklamaları; öğrencinin yaptığı hatanın belirlenmesi, öğrencinin yaptığı hatanın

kaynağının belirlenmesi, öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanılacak matematiksel ön bilginin belirlenmesi, öğrencinin yaptığı hatayı anlamasına yönelik sorulacak soruların belirlenmesi ve soru hatasız olduğundan yapılan işlemlerin aynı olması şeklinde beş kategoride incelenmiştir.

Tablo 70. *Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Öğrenci Bilgisine İlişkin Kategoriler-Kodlar*

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
1. Öğrencinin yaptığı hata	$\frac{x}{y}$ ve $\frac{y}{x}$ 'nin ayrı fonksiyonlar gibi düşünülerek türevin aranması	Ö _{1, 2, 4}
	Dalgınlık ya da dikkat eksikliği	Ö ₁
1. Öğrencinin yaptığı hatanın kaynağı	İfadenin polinom fonksiyon gibi düşünülmesi	Ö ₂
	$y = f(x)$ biçimindeki fonksiyonlardaki türev arama işlemlerinin $f(x, y) = 0$ biçimindeki fonksiyonlarda uygulanması	Ö ₄
1. Öğrencinin doğru cevap vermesi için kullanılacak ön bilgi	$f(x, y) = 0$ biçimindeki fonksiyonlarda genel türevin aranması	Ö ₁
	Polinom fonksiyonlarla kapalı fonksiyonların türevlerinin karşılaştırmalı aranmasına yönelik örnekler	Ö ₂
	Kapalı fonksiyonun türevinin nasıl arandığını göstermek	Ö ₄
1. Öğrencinin hatasını anlamasına yönelik sorulacak sorular	İfadelerin ayrı ayrı türevlerinin aranması sence doğru mu?	Ö ₁
	Polinom olmayan fonksiyonların türevini ararken ifadeleri böyle ayrı ayrı ayırarak türevini arayabilir misin?	Ö ₂
	Eşitliğin her iki tarafındaki türevi bu şekilde ayrı ayrı niçin arıyorsun?	Ö ₄
Soru hatasız olduğu için bulunan cevapların aynı olması	Genel türevi aramaya yönelik bir zorunluluğun olmaması	Ö ₃

Tablo 70'deki bulgulara göre Ö₃ dışındaki öğretmenlerin kapalı fonksiyonların türevine yönelik ilk öğrencinin hatalı cevap verdiğini ifade etmiştir. Ö₃ dışındaki öğretmenler ilk öğrencinin yaptığı hatanın “polinom fonksiyonlardaki türev arama işlemlerinin kapalı fonksiyonlardaki ifadelerde uygulanması” olduğu konusunda hem fikir olmuşlardır. Öğretmenlerden Ö₃ ise ilk öğrencinin kapalı fonksiyonun türevine yönelik çözümünün doğru olduğunu ancak ikinci öğrencinin ise yaptığı çözüme bağlı olarak bulduğu sonucun hatalı olduğunu iddia etmiştir. Öğretmenlerden Ö₁ ilk öğrencinin hatasına yönelik gerekçeyi öğrencinin konuya akademik olarak hâkim olduğunu ancak dalgın ya da dikkatsiz olabileceği şeklinde açıklamıştır. Öğretmenlerden Ö₂ ve Ö₄ ise ilk öğrencinin hatasının gerekçesine

yönelik birbirine benzer gerekçeler belirtmişlerdir. Buna göre bu öğretmenler ilk öğrencinin hatasına yönelik gerekçeyi ifadenin türevi aranırken polinom fonksiyonlardaki türev arama işlemlerinin işe koşulması şeklinde açıklamıştır. Öğretmenlerden Ö₁'in ilk öğrencinin yaptığı hataya yönelik sunduğu gerekçeler öğrencinin hatasının kaynağını yansıtmada yetersiz olduğundan yalın gerekçeler olarak kabul edilmiştir. Ancak öğretmenlerden Ö₂ ve Ö₄'ün ilk öğrencinin yaptığı hataya yönelik sundukları gerekçelerin hatanın kaynağıyla ilgili ve hatanın kaynağını yansıtan detaylı gerekçeler oldukları söylenebilir. Hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgiye yönelik Ö₃ dışındaki öğretmenlerin tamamı hatanın kaynağıyla örtüşen açıklamalarda bulunmuşlardır. Buna göre öğretmenler hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgileri; kapalı fonksiyonlarda ifadenin bir bütün olarak düşünülüp değişkenlere göre genel türevin aranması ve kapalı fonksiyonlar ile polinom fonksiyonlardaki türev arama işlemlerindeki farklılıkların eş zamanlı gösterilmesi şeklinde açıklamışlardır. Öğretmenlerden Ö₁, Ö₂ ve Ö₄ ilk öğrencinin hatasını fark etmesine ve bu hatayı gidermesine yönelik birbirine benzer soru cümleleri oluşturmuşlardır. Buna göre öğretmenler oluşturdukları soru cümlelerinde özellikle ifadelerin ayrı ayrı türevlerinin neden arandığına dikkat çekmeye çalışmışlardır. Gerçekten de ilk öğrenci öğretmenlerinin sordukları soruları dikkate alırsa fonksiyonun türevini ararken fonksiyonu $y = f(x)$ şeklinde değil de $f(x, y) = 0$ şeklinde düşünerek kapalı fonksiyonların türevleri aranırken uygulanan işlemlere göre problemi çözebilecektir. Öğrencinin hatasını fark etmesine ve hatayı anlamasına yönelik öğretmen soruları değerlendirildiğinde bu soruların doğru cevaba yönlendiren ve hatayı fark ettiren sorular oldukları söylenebilir. Öğretmenlerden Ö₃ ise diğer öğretmenlerin verdiği cevapların aksine ikinci öğrencinin hatalı cevap verdiğini birinci öğrencinin soruyu doğru cevapladığını belirtmiştir. Ö₃'e göre kapalı fonksiyonun türevinin alınması için ifadeler önce eşitliğin bir tarafında bir araya getirildikten sonra matematiksel işlem yapılarak kapalı fonksiyonun türevi belirlenmelidir. Ayrıca Ö₃'e göre ilk öğrencinin yaptığı çözümde ifade $(0,0)$ noktası dışında diğer tüm noktalarda çözümü sağladığı gibi kapalı fonksiyona yönelik bir denklemin çözüm kümesini oluşturmaktadır. Ancak ikinci öğrencinin bulduğu çözümde paydadaki ifadede $F_y \neq 0$ olmamaktadır. Ayrıca aynı çözümde kökün durumu incelendiğinde tanım kümesine karşılık görüntü kümesinde iki değer olmaktadır ki bu durumda çözümün kapalı fonksiyon için sağlandığı söylenemez.

Öğretmenlerin kapalı fonksiyonların türevine yönelik öğrenci bilgileriyle konu alanı bilgileri karşılaştırıldığında Ö₃ dışındaki öğretmenlerin tamamının bu iki bilgi türlerindeki görüşlerinin birbiriyle örtüştüğü ifade edilebilir. Buna göre öğretmenlerin tamamı konu alanı bilgisine yönelik görüşme sürecinde kapalı fonksiyonun türevinin x ve y değişkenlerinin iç içe geçtiği durumlarda arandığını belirtmişlerdir. Ö₃ dışındaki öğretmenlerin konu alanı

bilgisine yönelik görüşmelerde uyguladıklarıyla öğrenci bilgisinde problemin hatalı olmasına yönelik görüşlerinin birbirleriyle uyumlu oldukları görülmüştür. Öğretmenlerin öğrenci bilgilerine yönelik açıklamalarının öğrenme ortamında da ne derece karşılık bulduğunu belirleyebilmek amacıyla kapalı fonksiyonların türevinin anlatıldığı konulara yönelik ders içi gözlemler yapılmıştır. Yapılan bu gözlemlerde öğretmenlerin tamamı öğrencilerin $y = f(x)$ şeklindeki fonksiyonların türevlerini kapalı fonksiyonlardaki türev arama işlemlerinde uygulamalarına yönelik öğrenme güçlüklerini doğru bir şekilde tespit etmişlerdir. Öğretmenlerin tamamı öğrencilerin y ifadesinin x ifadesine bağlı bir değişken olmadığını düşünerek hatalı şekilde türev arama işlemlerini gidermeye yönelik uygulamalar da yapmışlardır. Buradan hareketle Ö₃ dışındaki öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevi konusunda öğrenci bilgisine yönelik araştırmacıya belirttikleri görüşlerle ders ortamındaki öğrenci bilgileri arasında bir uyumun olduğu ifade edilebilir.

Tablo 71. *Kapalı Fonksiyonun Türevine Yönelik Öğretim Stratejileri Bilgilerine İlişkin Öğretmen Görüşleri*

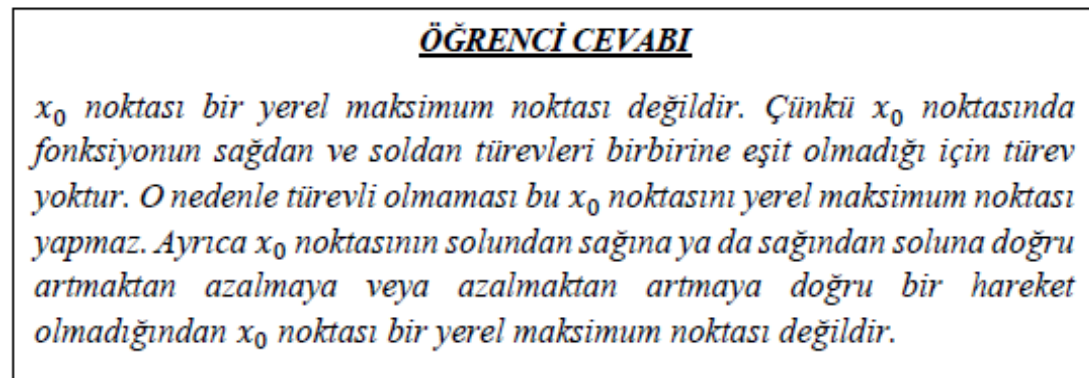
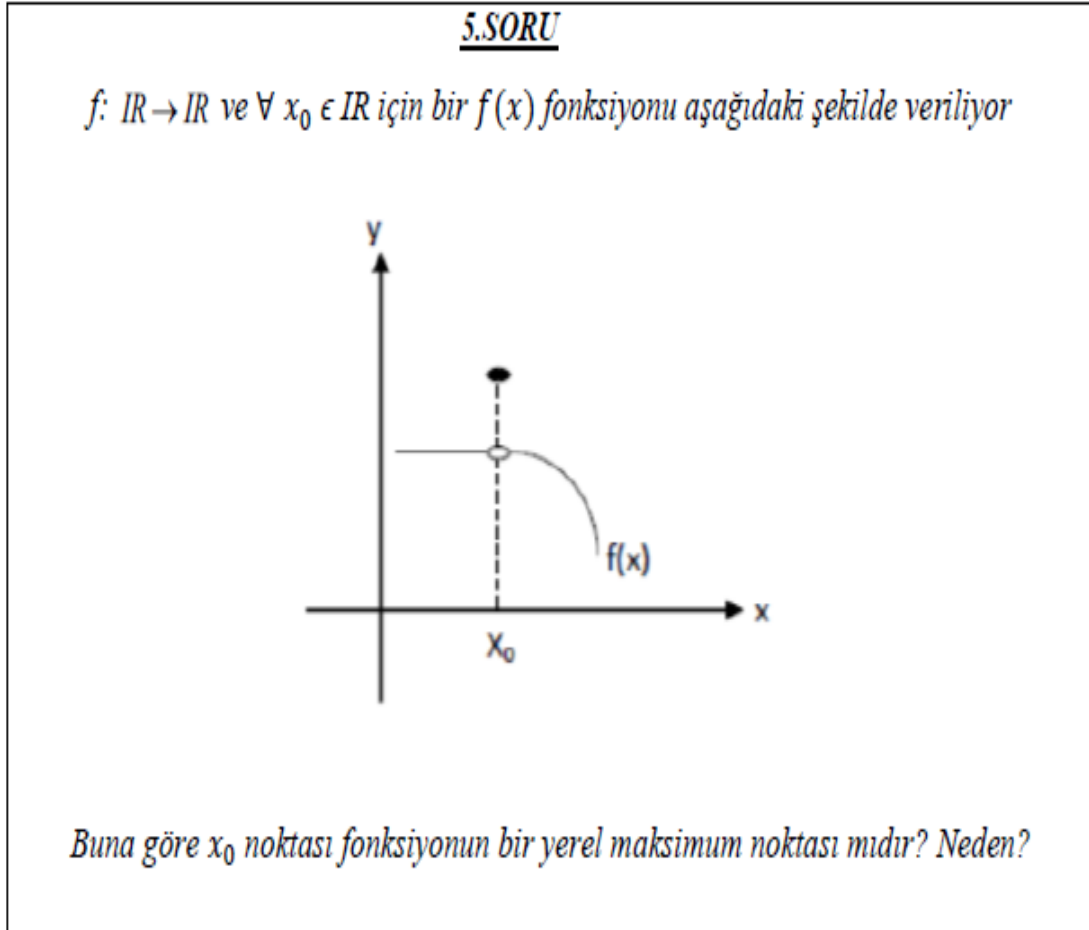
Öğretmenler	Kullanılması Düşünülen Öğretim Yöntem, Strateji ve Teknik	Destekleyici Açıklamalar
Ö ₁	Soru-Cevap Tekniği	<i>İlk önce öğrencinin soruya bir daha dikkatli bakmasını söyledim. Bunu söyledim ki soruda acaba farklı düşünmesine yönelik bir farkındalık oluşuyor mu bunun için uğraşırdım. Türev değil de rasyonel şekilde bir denklem karşısına çıksaydı o durumda ne yapacağını sorardım</i>
Ö ₂	Düz Anlatım Yöntemi	<i>Bu şekildeki kapalı hale dönüştürme ihtiyacı hissettiğim fonksiyonları polinom fonksiyonlardaki gibi değil de fonksiyonu genel hale dönüştürerek kapalı fonksiyonlardaki gibi öğrencilere çözerdim. Polinom fonksiyonlarla kapalı fonksiyonlara dikkat etmeleri gerektiğini açıklardım</i>
Ö ₄	Düz Anlatım Yöntemi Soru-Cevap Tekniği	<i>Öğrenciye kapalı fonksiyonların türeviyle polinom fonksiyonların türevlerinin farklı arandığını anlatır bunlarla ilgili soru çözerdim. Öğrenci konuyu anlatmama rağmen halen polinom fonksiyonlardaki türev arama işlemlerini kapalı fonksiyonlarda uyguluyorsa ona bir örnekle ifadeyi önce türev almadan kapalı, genel ve bütün bir hale dönüştürüp bundan sonra türev almasını isterdim. Bir de öğrenciye aynı soruyla ilgili türevi doğrudan almasını ve sonucu bulmasını isterdim. Bu iki sonucu karşılaştırmasını beklerdim.</i>

Öğretmenlerden Ö₃ ile konu alanı bilgisi görüşmeleri, öğrenci bilgisi görüşmeleri ve ders içi gözlemleri tamamlandıktan sonra kapalı fonksiyonun türevine yönelik verdiği cevap hatırlatılmıştır. Ö₃'e konu alanı bilgisi görüşmelerinde ve ders içi gözlemlerde kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşlerinin öğrenci bilgisindeki görüşleriyle neden örtüşmediğine yönelik bir soru sorulmuş ve öğrenci bilgisindeki problemi tekrar incelemesi sağlanmıştır. Öte yandan kapalı fonksiyonun türevine yönelik yapılan hatanın giderilmesine yönelik kullanılabilecek öğretim yöntem, strateji ve tekniklere ilişkin öğretmenlerin açıklamaları Tablo 71'de gösterilmiştir.

Tablo 71'deki bulgulara göre Ö₃ dışındaki öğretmenlerin derste kapalı fonksiyonun türevine yönelik düz anlatım yöntemini ve soru-cevap tekniğini kullanacakları anlaşılmaktadır. Ö₃ dışındaki öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik öğretim stratejilerine ilişkin görüşleri incelendiğinde bu öğretmenlerin derste daha çok kendilerinin egemen olduklarından ancak bazen de öğrencilerin hatalarını kendilerinin fark etmesine yönelik uygulamalar yapacaklarından bahsetmişlerdir. Öğretmenlerden Ö₃ öğrencilerin ikisinin de probleme doğru cevap verdiklerini belirttiğinden öğrenci hatasını gidermeye yönelik uygulanacak öğretim yöntem, teknik ve stratejiye ilişkin herhangi bir yorumda bulunmamıştır. Ö₃ dâhil bütün öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine yönelik öğretim stratejileri bilgilerini daha derinlemesine incelemek amacıyla ders içi gözlemler yapılmıştır. Ders içi gözlemlerde Ö₃ dışındaki öğretmenlerin tamamının kullanmayı düşündükleri öğretim yöntem, strateji ve tekniklerle derste kullandıkları öğretim yöntem, strateji ve tekniklerin birbiriyle örtüştüğü görülmüştür. Ö₃'ün kapalı fonksiyonların türevi konusunda öğrenci bilgisindeki görüşleri alınamadığı için öğrenci bilgisiyle ders içi gözlemi arasında herhangi bir karşılaştırma yapılamamıştır. Ders içindeki gözlemlerden elde edilen verilere göre öğretmenlerin tamamının kapalı fonksiyonların türevi konusu öncesinde derse hazırlık yaptıkları görülmüştür. Bu öğretmenler ders yeni başlamışken öğrencilerin önceki konuları hatırlamaları ve bu konudaki karışıklıkların önlenmesi amacıyla polinom fonksiyonların türevinin aranmasına ve kapalı fonksiyonların türevlerinin polinom fonksiyonların türevlerinden farklı şekilde değerlendirileceğinden bahsetmişlerdir. Öğretmenlerin tamamı kapalı fonksiyonun türevine yönelik örnekleri cevaplamaları için öğrencileri tahtaya kaldırmışlardır. Öğrencilere sorular soran öğretmenler öğrencilerin de sorularını cevaplayarak dersi işlemişlerdir. Öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₄ kapalı fonksiyonun türeviyle polinom fonksiyonun türevi arasındaki farkı gören öğrencilere olumlu pekiştireçler vermişlerdir. Öğretmenlerin dersleri incelendiğinde en fazla kullanılan anlatım yönteminin düz anlatım yöntemi, en fazla kullanılan öğretim tekniğinin soru-cevap tekniği ve en fazla kullanılan öğretim stratejisinin ise sunuş yoluyla öğretim stratejisi olduğu görülmüştür.

Ekstreumum noktaları ve bu noktaların türevle ilişkisi.

Öğrencilerin ekstreum noktalarına ve bu noktaların türevle ilişkisine yönelik derste yaptıkları hatalardan hareketle araştırmacı tarafından hazırlanan ekstreum noktasına yönelik soru ve çözümü Şekil 27’de gösterilmiştir.



Şekil 27. Ekstreum noktasına yönelik soru ve çözümü.

Şekil 27’deki ekstreum noktasına ve bu noktanın türevle ilişkisine yönelik öğretmenlerin yaptıkları açıklamalar Gökkurt (2014)’un kategorilerine göre Tablo 72.’da değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin öğrenci hatalarının nedenlerine yönelik ortaya attıkları

gerekçeler ise Stacey vd. (2001)'nin kategorilerine göre incelenmiştir. Öğretmenlerin kapalı fonksiyonların türevine yönelik açıklamaları; öğrencinin yaptığı hatanın belirlenmesi, öğrencinin yaptığı hatanın kaynağının belirlenmesi, öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanılacak matematiksel ön bilginin belirlenmesi ve öğrencinin yaptığı hatayı anlamasına yönelik sorulacak soruların belirlenmesi şeklinde dört kategoride incelenmiştir.

Tablo 72. *Ekstremum Noktasına ve Bu Noktanın Türevle İlişkisine Yönelik Öğrenci Bilgisine İlişkin Kategoriler-Kodlar*

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
Öğrencinin yaptığı hata	x_0 noktasında türev olmazsa x_0 noktasının ekstremum noktası olmayacağının belirtilmesi	Ö _{1, 2, 4}
	Ekstremum noktalarında türevin olmasının zorunluluğu	Ö _{3, 4}
Öğrencinin yaptığı hatanın kaynağı	Ekstremum noktasının tanımını türev kullanmadan açıklamama	Ö _{1, 3}
	$f'(x_0) = 0$ olmasına bağlı olarak ekstremum noktalarında her zaman türevin olması gerektiği algısı	Ö _{1, 3}
	Yerel ekstremum noktası kavramını iyi öğrenememe	Ö ₂
	Yerel ekstremum noktasında türevle ilgili istisnai durumlara (uç nokta, sivri nokta, kırılma noktası vs.) yönelik örnek verilmemesi	Ö ₄
Öğrencinin doğru cevap vermesi için kullanılacak ön bilgi	Ekstremum noktası-türev ilişkisinde istisnai durumlara (uç nokta, sivri nokta, kırılma noktası vs.) yönelik örneklerin verilmesi	Ö ₁
	Bir noktada türevin olmamasının o noktanın ekstremum noktası olmamasını gerektirmeyeceği	Ö _{1, 2, 3}
	Ekstremum noktasının türevsiz tanımının yapılması	Ö _{1, 3, 4}
Öğrencinin hatasını anlamasına yönelik sorulacak sorular	x_0 'ın ekstremum noktası olması için türevli olması şart mıdır?	Ö _{1, 2, 3}
	$f'(x) = 0$ olduğu nokta ekstremum noktası mıdır?	Ö ₃
	Kırılma noktalarında ve sivri uçlarda türev var mıdır? Bu noktalar aynı zamanda birer ekstremum noktaları mıdır?	Ö ₄

Tablo 72'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamının ekstremum noktasına ve bu noktanın türevle ilişkisine yönelik öğrencinin yaptığı hatayı doğru belirledikleri söylenebilir. Öğretmenlerin tamamı öğrencinin yaptığı hatanın “türevin olmadığı noktalarda ekstremum noktalarının da olmayacağına yönelik kabullenme veya şartlanma” olduğu konusunda hem fikir olmuşlardır. Öğretmenlerden Ö₁, Ö₃ ve Ö₄'ün öğrencinin yaptığı hataya yönelik

sundukları gerekçelerin hatanın kaynağıyla ilgili ve hatanın kaynağını yansıtan detaylı gerekçeler oldukları söylenebilir. Ancak öğretmenlerden Ö₂'nin öğrenci hatasına yönelik “yerel ekstremum noktası kavramını iyi öğrenememesi” şeklinde ifade ettiği gerekçenin öğrenci hatasının kaynağını yansıtmada yetersiz kalmasından dolayı yalın gerekçe olduğu söylenebilir.

Hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgiye yönelik öğretmenlerin tamamı hatanın kaynağıyla örtüşen açıklamalarda bulunmuşlardır. Buna göre öğretmenler hatanın giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgi için en çok “bir noktada türevin olmamasının ekstremum noktasının olmamasını gerektirmeyeceğinin açıklanması” ve “ekstremum noktalarının tanımının türev kullanılmadan açıklanması” şeklindeki ön bilgiler üzerinde durmuşlardır. Bir öğretmen ise “ekstremum noktası ile türev ilişkisinde kilit özelliğine sahip uç nokta, kırılma noktası ve sivri noktalarda ilişkinin belirtilmesi” şeklindeki ön bilgiye dikkat çekmiştir. Öğrencinin probleme doğru cevap verebilmesi için kullanılacak ön bilgiler arasındaki ekstremum noktasının türevsiz tanımının yapılması şeklindeki ön bilgi dikkat çekmektedir. Gerçekten de ekstremum noktalarının türevsiz de değerlendirilebileceğine yönelik bir öğretimin yapılması öğrencinin bu konudaki öğrenme güçlüklerini de ortadan kaldırabilir. Çünkü bir yerel maksimum noktası olarak adlandırılan bir ekstremum noktasının türevle ilişkili olmayan tanımında yakın komşuluktaki en büyük noktanın hangi nokta olduğu çok önem arz etmektedir. Eğer ki öğrenci bir yerel maksimum noktasının yakın komşuluğunda en büyük noktanın bu yerel maksimum noktası olduğunu görebiliyorsa problemi doğru bir şekilde çözebilecek ve ekstremum noktası belirlenirken türev kullanmadan da yorum yapabilecektir.

Öğrencinin hatasını fark etmesine ve hatayı anlamasına yönelik öğretmen soruları değerlendirildiğinde bu soruların doğru cevaba yönlendiren ve hatayı fark ettiren sorular oldukları söylenebilir. Öğretmenler hatanın fark edilmesine ve giderilmesinde kullanılacak matematiksel ön bilgi bölümünde olduğu gibi en çok “bir noktanın ekstremum noktası olması için o noktada türevin olmasının gerekli olup olmadığına” yönelik hatayı fark ettiren ve hatayı gidermeye yönelik sorular önermişlerdir. Gerçekten de öğrenciye sorulan sorularda öğrenci mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktalarının ya da eğrideki sivri uçların türevli olmadığı halde yerel ekstremum noktası olduklarını görebilecek, bazı parabollerde türevin olmasına rağmen çift katlı kökten dolayı işaret değişimi olmayacağından yerel ekstremum noktalarının olmayacağını da görme fırsatına sahip olacaktır. Bu sayede öğrenci ekstremum noktası ile türev ilişkisine yönelik daha önceden davranış haline getirdiği hatanın veya kavram yanlışlığının yanlış olduğunu görecektir.

Öğretmenlerin ekstremum noktasına ve bu noktanın türevle ilişkisine yönelik öğrenci bilgileriyle konu alanı bilgileri karşılaştırıldığında bu iki bilgi türlerindeki görüşlerinin birbiriyle örtüştüğü düşünülmektedir. Buna göre öğretmenlerin tamamı konu alanı bilgisine yönelik görüşme sürecinde bir noktanın ekstremum noktası olması durumunda türevinin olmayabileceğine yönelik açıklamalarda bulundukları görülmüştür. Öğretmenlerin konu alanı bilgisine yönelik görüşmelerde uyguladıklarıyla öğrenci bilgisinde hatanın giderilmesine yönelik öne sürülen gerekçeler ve sorulacak sorulara bağlı görüşlerinin birbirleriyle uyumlu oldukları söylenebilir. Öğretmenlerin öğrenci bilgilerine yönelik açıklamalarının öğrenme ortamında da ne derece karşılık bulduğunu belirleyebilmek amacıyla ekstremum noktalarına ve bu noktaların türevle ilişkisinin anlatıldığı konulara yönelik ders içi gözlemler yapılmıştır. Yapılan bu gözlemlerde öğretmenlerin tamamı öğrencilerin kırılma noktalarında türevin olduğuna, sivri uçlarda türev olmadığı için ekstremum noktasının olmayacağına, çift katlı kökte türevin olmasından dolayı kökün bir ekstremum noktasın olduğuna yönelik öğrenme zorluklarını tespit etmişlerdir. Ö₂ dışındaki öğretmenler ekstremum noktasının türevle ilişkisinin karıştırılmaması için öğrencilerine türevin kullanılmadığı yakın komşuluk kavramının dikkate alındığı bir ekstremum noktası tanımı yapmışlardır. Aynı zamanda öğretmenlerin tamamı bir ekstremum noktası belirlenirken fonksiyonun birinci türevinin aranıp sıfıra eşitlendiğini ancak bu durumun ekstremum noktasını belirlemede tek önemli aşama olmadığını ve türevin olmadığı durumlarda da (köşe nokta, sivri nokta vs.) ekstremum noktalarının olabileceğine yönelik uyarılarda bulunmuşlar ve konuyla ilgili örnekler çözmüşlerdir. Buradan hareketle öğretmenlerin tamamının ekstremum noktası ve bu noktanın türevle ilişkisi konularında öğrenci bilgisine yönelik araştırmacıya ifade ettikleri görüşlerle ders ortamındaki öğrenci bilgileri arasında bir uyumun olduğu ifade edilebilir. Öte yandan ekstremum noktası ve bu noktanın türevle ilişkisine yönelik yapılan hatanın giderilmesinde kullanılabilecek öğretim yöntem, strateji ve tekniklere ilişkin öğretmenlerin açıklamaları Tablo 73’de gösterilmiştir.

Tablo 73. *Ekstremum Noktası ve Bu Noktanın Türevle İlişkisine Yönelik Öğretim Stratejileri Bilgilerine İlişkin Öğretmen Görüşleri*

Öğretmenler	Kullanılması Düşünülen Öğretim Yöntem, Strateji ve Teknik	Destekleyici Açıklamalar
Ö ₁	Düz Anlatım Yöntemi	Öğrencilere önce ekstremum noktasının tanımını türev kullanmadan anlatmaya çalışırdım. Daha sonra da türev kullanarak noktaların hangi durumda ekstremum özelliğine sahip olabileceğinden bahsederdim. Türevin sıfıra eşit olduğu her durumda ekstremum noktasının olmayabileceğine dikkat çekerdim
Ö ₂	Düz Anlatım Yöntemi	Yanlış anlamaları giderebilmek adına öğrencilere grafik üzerinde mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasına odaklanmalarını sağlardım. Kırılma noktasında türevin olmadığını ancak ilgili noktanın bir ekstremum noktası olduğundan bahsederdim.
Ö ₃	Düz Anlatım Yöntemi	Ekstremum noktalarının varlığını ve türevsiz tanımına yönelik açıklamalar yapardım. Daha sonra da ekstremum noktalarının türevle ilişkisine yönelik örnekler çözerdim ki bu iki kavram arasındaki ilişkiyi iyi bir şekilde öğrenebilsinler
Ö ₄	Düz Anlatım Yöntemi	Ekstremum noktalarına yönelik önce türev kullanmadan yani yakın komşuluğa yönelik tanımdan yararlanarak bu noktaları tanımlardım. Daha sonra mutlak değer fonksiyonlarından iki tane örnek verirdim. Bir tanesinde tek katlı kök olan diğerinde ise çift katlı kök olan örnekler. Bunlar örneğin $y = x $ ile $y = x^2 $ fonksiyonları olurdu. Bunları anlatırken ilk örnekte ekstremum noktasının varlığından ancak türevin varolmadığından bahsederdim. İkinci örnekte ise türevin sıfıra eşit olduğundan ancak kökün çift katlı olmasından dolayı işaret değişimi olmayacağından ekstremum noktasının olmayacağından bahsederdim. Öğrencilere örneklerdeki fonksiyonların grafiklerini çizerek durumu somut şekilde görmelerini sağlardım

Tablo 73'deki bulgulara göre öğretmenlerin tamamının derste ekstremum noktası ve bu noktanın türevle ilişkisine yönelik düz anlatım yöntemini kullanacakları anlaşılmaktadır. Öğretmenlerin ekstremum noktası ve bu noktanın türevle ilişkisine yönelik öğretim stratejilerine ilişkin görüşleri incelendiğinde öğretmenler derste daha çok kendilerinin hakim olduğu bir öğretim sergileyeceklerinden bahsetmişlerdir. Öğretmenlerin ekstremum noktası ve bu noktanın türevle ilişkisine yönelik öğretim stratejileri bilgilerini daha derinlemesine incelemek amacıyla ders içi gözlemler yapılmıştır. Ders içi gözlemlerde öğretmenlerin tamamının kullanmayı düşündükleri öğretim yöntem, strateji ve tekniklerle derste kullandıkları öğretim yöntem, strateji ve tekniklerin birbiriyle örtüştüğü görülmüştür. Buna göre öğretmenlerin tamamı ekstremum noktası ve bu noktanın türevle ilişkisi konusu

öncesinde derse hazırlık yapmışlardır. Öğretmenler ders henüz başlamışken öğrencilerin önceki konuları hatırlamaları için mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktalarındaki türevinin durumuna yönelik açıklamalarda bulunmuşlardır. Öğretmenler özellikle $y = x^2$ eğrisi, $y = f(x) = |x|$ fonksiyonu ve $y = f(x) = |(x + 1)^2|$ fonksiyonlarının türevleri ve ekstremum noktalarına yönelik örnekler çözmüşlerdir. Öğretmenlerin dersleri incelendiğinde en fazla kullanılan anlatım yönteminin düz anlatım yöntemi olduğu görülmüştür.



BEŞİNCİ BÖLÜM

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu bölümde lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki pedagojik alan bilgileri incelenmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular dikkate alınarak araştırmanın alt problemleri doğrultusunda sonuçlar özet halinde sunularak literatürdeki araştırmaların sonuçlarıyla tartışmalar yapılmıştır. Ayrıca hem araştırma sonuçlarına dayalı hem de gelecekte yapılacak çalışmalara yönelik öneriler ortaya konmuştur.

Öğretmenlerin Türev ve Uygulamalarına Yönelik Konu Alanı Bilgilerine İlişkin Sonuç ve Tartışma

Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki konu alanı bilgileri; türevin formel tanımı, örneklendirilmesi ve kullanım alanları, türev-süreklilik ilişkisi, mutlak değer ve kapalı fonksiyonların türevi, türevin geometrik anlamının izahı ve türev-eğim-teget ilişkisi, artan-azalan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların türevle olan ilişkisi, ekstremum noktalarının tanımlanması ve bu noktaların türevle ilişkisi, konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasının tanımı ile dönüm noktasının ikinci türevle ilişkisi, maksimum-minimum problemleri kurma ve çözme, asimptotun tanımı ve çeşitleri ile grafik çiziminin yapılması alt konularında incelenmiştir.

Lise matematik öğretmenlerinin türevin formel tanımına, örneklendirilmesine ve kullanım alanlarına yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limit durumunu gösteren formülü göstermelerine rağmen türevin formel tanımında bulunan tanım-değer kümeleri ile türevi aranacak noktaya ait özellikleri net bir şekilde belirtmedikleri görülmüştür. Bu öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_2$ türevin örneklendirmesine yönelik türevle ilgili olan ancak türevi tam olarak yansıtmayan örneklendirmelerde bulunmuşlardır. Türevin formel tanımında bulunan özellikleri açık bir şekilde belirtmeyen öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_4$ bir noktadaki türev tanımını işlemsel bir soru üzerinde göstererek soruyu doğru cevaplamıştır. Öğretmenlerden $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün derslerinde türevin formel tanımını öğrencilerine doğru bir şekilde aktarmalarına ve formülü işlemsel anlamda doğru bir şekilde kullanmalarına rağmen formül içerisindeki özelliklere yönelik öğrencilerini aydınlatmadıkları görülmüştür. Buradan hareketle öğretmenlerin çoğunun türevin formel tanımında işlemsel bilgilerini kavramsal bilgilerine nispeten daha fazla kullandıkları ve derste de işlemsel bilgileri doğrultusunda hareket ettikleri söylenebilir.

Öğretmenlerin türevin formel tanımındaki özelliklere yönelik eksik görüşleri Orton (1983) ile Zandieh (1997)'in öğretmenlerin türevin formel tanımını açıklamada güçlük yaşadıkları şeklindeki görüşleriyle örtüşmektedir. Nitekim matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları türevi cebirsel olarak ifade edebilmelerine ve işlemsel sorularda türev aramayı başarılı şekilde gerçekleştirmelerine rağmen türevin formel tanımındaki türevi aranacak noktaya yönelik özelliklere yönelik kavramsal yapıyı açıklamada ve türev-limit ilişkisini ortaya koymada problemler yaşamaktadırlar (Açıkyıldız, 2013).

Lise matematik öğretmenlerinin türev-süreklilik ilişkisine yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde öğretmenlerin çoğunlukla türev-süreklilik ilişkisinde belirtilebilecek özellikleri net ve doğru bir şekilde açıkladıkları söylenebilir. Öğretmenlerden $\bar{O}_1$ fonksiyonun sürekli olmadığı noktada türevli olmadığına değinmezken $\bar{O}_2$ fonksiyonun türevli olduğu noktada sürekli olduğuna değinmemiştir. Öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisinde sadece bazı özellikleri ifade etmelerine yönelik görüşleri Duru (2006) ile Viholainen (2006)'in matematik öğretmen adaylarının türev kavramı ile süreklilik kavramı arasındaki ilişkileri eksik ifade ettikleri bulgusuyla paralellik göstermektedir. Öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisinde belirttikleri çoğu özellikleri aynı zamanda bir fonksiyon eğrisi üzerindeki bazı noktalardaki türevin varlığını ifade ederken de eksiksiz ve doğru dile getirdikleri görülmüştür. Ayrıca $\bar{O}_1$ 'in türev-süreklilik ilişkisinde dile getirmediği özelliği, hem fonksiyon eğrisi üzerinde bir noktadaki türevin olmadığına nedenini açıklarken belirttiği hem de derste öğrencilerine doğru anlatıp örneklerle desteklediği görülmüştür. $\bar{O}_1$ ile görüşmelerden ve gözlemlerden sonra yapılan bir görüşmede türev-süreklilik ilişkisinde bahsetmediği özelliği gerçekte bildiğini ancak görüşmede aklına gelmediğini belirtmiştir.

Lise matematik öğretmenlerinin mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde $\bar{O}_1$, $\bar{O}_3$ ve $\bar{O}_4$ 'ün mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasındaki türevini ararlarken önce fonksiyonun ilgili noktada sürekliliğine baktıkları daha sonra da sağdan-soldan türevi aradıkları görülmüştür. Bu öğretmenlerin mutlak değer fonksiyonunun kırılma noktasındaki türevini doğru bir şekilde aradıkları söylenebilir. Ancak öğretmenlerden $\bar{O}_2$ mutlak değer fonksiyonunun türevini ararken türevi aranan noktanın kırılma noktası olduğunu göz ardı ederek sadece sağdan-soldan türevi aramaya çalışmıştır. $\bar{O}_2$ 'nin mutlak değer fonksiyonunun türevini ararken kırılma noktasına dikkat etmemesi Açıkyıldız (2013)'in öğretmen adaylarının sürekli her fonksiyonun türevli olacağını düşünerek kırılma noktalarını ihmal ettikleri bulgusuyla benzeşmektedir. Lise matematik öğretmenlerinin kapalı fonksiyonun türevine yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde öğretmenlerin tamamının kapalı fonksiyonun türevinin nasıl kullanıldığı ve açıklandığı

noktasında eksiksiz ve doğru görüşler belirttikleri tespit edilmiştir. Ancak öğretmenlerin tamamının kapalı fonksiyonun türevine yönelik eşitliğin sol tarafında kullandıkları $F'(x, y)$ notasyonunun kapalı fonksiyonun türevini temsil etmede uygun notasyon olmadığı söylenebilir. Bu notasyon yerine y' veya $\frac{dy}{dx}$ notasyonlarının kapalı fonksiyonun türevini göstermede kullanılabilecek notasyonlar oldukları söylenebilir. Öğretmenler kapalı fonksiyonun türevine yönelik görüşme sürecinde yaptıkları açıklamalarla ve verdikleri örneklerle uyumlu bir şekilde dersi işleyerek problemler kurmuşlardır.

Lise matematik öğretmenlerinin türevin geometrik anlamının izahına ve türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde öğretmenlerden $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün türevin geometrik anlamının izahını eksik yaptıkları görülmüştür. Ayrıca öğretmenlerden özellikle $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün türev-eğim ilişkisini cebirsel formla gösterebilmesine rağmen bu ilişkiyi sözel olarak tam açıklayamadıkları tespit edilmiştir. Öğretmenlerin tamamının fonksiyon eğrisine çizilen teğet doğrusunu tanımlamada eksik görüşe ya da bilgiye sahip oldukları söylenebilir. Bazı öğretmenler bir doğrunun bir eğriye teğet olması için doğrunun eğriye sadece değmesinden bahsederken bazı öğretmenler doğrunun eğriyi tek bir noktada kesmesinden bahsetmiştir. Öğretmenlerin teğet kavramına yönelik görüşleri kısmen doğru olup teğetin farklı uygulamalarda eğriye bazen değdiği, bazen eğriyi tek bir noktada kestiği, bazen eğriye bir noktada değip başka bir noktada aynı eğriyi kestiği bazen de eğriyi iki veya daha fazla noktada kestiği durumlar da söz konusu olabilmektedir. Öğretmenlerden $\ddot{O}_2$ 'nin ise fonksiyona çizilen teğet doğrusunu tanımlamada ve fonksiyon eğrisi üzerindeki noktalardan çizilen teğet sayılarını belirlemede eksiklikleri olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurdukları problemlerin ise grafiksel ya da sözel çözümlere nispeten daha çok cebirsel çözümleri yansıtan çözümler oldukları görülmüştür. Öğretmenlerin türevin geometrik anlamının izahını eksik dile getirmelerine yönelik bulgu literatürde Açıkyıldız (2013) ve Erdoğan (2017)'in çalışmalarındaki öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının türev-eğim-teğet ilişkisini net ortaya koyamamalarına yönelik ulaşılan bulgularla benzerlik göstermektedir. Buna göre Açıkyıldız (2013)'in çalışmasında matematik öğretmen adayları türevin geometrik anlamını izah ederken bir noktadan fonksiyona çizilen teğetin eğimine karşılık fonksiyonun eğimi ifadelerini kullanmışlardır. Ayrıca matematik öğretmen adaylarına türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik sorulan işlemsel ve kavramsal sorularda öğrencilerin büyük çoğunluğunun işlemsel sorulara doğru cevap verirken kavramsal sorulara doğru cevap verenlerin sayısının oldukça az olduğu tespit edilmiştir. Erdoğan (2017)'in çalışmasında ise lise matematik öğretmenleri türevin geometrik anlamını izah ederken bir noktadaki türevi o noktadaki teğetin eğimini vermesi şeklinde açıklamışlardır. Buna göre

öğretmenler türev-eğim arasındaki ilişkisini noktada türevi hesaplama şeklinde düşünmektedirler. Bu araştırmada $\ddot{O}_2$ 'nin fonksiyona çizilen teğet doğrusunun özelliklerini yanlış belirtmesine yönelik bulgusu Açıkyıldız ve Gökçek (2015) ile Biza vd. (2006)'nin matematik öğretmen adaylarının eğriye çizilen teğeti eğriyi sadece tek bir noktada kesen doğru şeklinde tanımlamalarıyla benzerlik göstermektedir.

Açıkyıldız ve Gökçek (2015) ile Biza vd. (2006)'nin çalışmalarında bazı öğretmen adaylarının teğet doğrusu için eğriyi birden fazla noktada kesmeyecek şeklindeki açıklamaları da bu araştırmada $\ddot{O}_2$ 'nin teğet doğrusuna yönelik belirttiği görüşlerle uyumludur. Bu araştırmada öğretmenlerin türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik kurdukları problemleri daha çok cebirsel çözümlerle sonuca ulaştırmaları Özturan-Sağırlı vd. (2016) ile Sağlam ve Bülbül (2012)'ün matematik öğretmen adaylarının türeve yönelik matematiksel problemlerin çözümünde en fazla analitik yani cebirsel çözümleri tercih ettikleri şeklindeki bulgusuyla ve Baştürk (2010)'ün matematik öğretmen adaylarının grafiksel ya da sözel temsillere nispeten cebirsel temsilleri kullanmada daha başarılı oldukları bulgusuyla örtüşmektedir. Ayrıca bu araştırmadaki türev-eğim-teğet ilişkisine yönelik öğretmenlerin kurdukları problemlerde kullandıkları çözüm türünün Park (2011)'in matematik öğretmen adaylarının fonksiyonun türevini bulurken cebirsel gösterimleri kullanmaya özen gösterdikleri şeklindeki bulgusuyla paralellik göstermiştir.

Lise matematik öğretmenlerinin artan-azalan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların türevle ilişkisine yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_2$ 'nin artan-azalan fonksiyonların tanımını eksiksiz bir şekilde ifade etmelerine rağmen artan-azalan fonksiyonların türevle ilişkisini net ortaya koyamadıkları görülmüştür. Ayrıca öğretmenlerden $\ddot{O}_2$ bir fonksiyonun grafiğinden yararlanarak fonksiyonun türevinin işaretinin pozitif, negatif ve sıfır olduğu aralıkları da yanlış belirlemiştir. Lise matematik öğretmenlerinin ekstremum noktaları ve bu noktaların türevle ilişkilerine yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde öğretmenlerin tamamının kritik nokta ve ekstremum noktaları kavramlarını eksiksiz ve doğru bir şekilde tanımladıkları, ekstremum noktaları ile türev arasındaki ilişkiyi doğru bir şekilde belirledikleri, bu ilişkide istisnai durumları da örnekler vererek ve grafiksel argümanlar yardımıyla doğru bir şekilde ortaya koydukları, bir fonksiyon eğrisi üzerindeki ekstremum noktalarını doğru tespit ettikleri ve fonksiyonun grafiğinden yararlanarak fonksiyonun birinci türevinin grafiğini doğru çizdikleri görülmüştür.

Lise matematik öğretmenlerinin konvekslik-konkavlık, dönüm noktası kavramları ile bu kavramların ikinci türevle ilişkisine yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde bütün öğretmenlerin konveks-konkav ve dönüm noktası kavramlarını eksiksiz ve doğru bir şekilde

ifade ettikleri, konvekslik-konkavlık ve dönüm noktasının ikinci türevle ilişkisini doğru bir şekilde açıkladıkları, polinom bir fonksiyonun konveks-konkav olduğu aralıklarını ve dönüm noktalarını doğru belirledikleri ve birinci türevin grafiğinden yararlanarak fonksiyonun konveks, konkav oldukları aralıklar ile dönüm noktalarını doğru belirledikleri görülmüştür. Lise matematik öğretmenlerinin maksimum-minimum problemlerini kurma ve çözmeye yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde bütün öğretmenlerin öğrencilerin seviyesine uygun, mantıksal ve matematiksel açıdan geçerli ve kullanılabilir problemler kurdukları ve problemleri doğru çözdükleri görülmüştür. Ayrıca öğretmenler kurdukları ve çözümünü yaptıkları problemlere benzer problemleri de derslerinde kullanmışlardır. Öğretmenlerin derslerinde kullandıkları ve çözümünü yaptıkları problemlere yönelik öğretimi gayet iyi bir şekilde gerçekleştirdikleri gözlenmiştir. Öğretmenlerin asimptotlar ve grafik çizimine yönelik konu alanı bilgileri incelendiğinde öğretmenlerin tamamının asimptot kavramına ve çeşitlerine yönelik eksiksiz ve doğru açıklamalarda bulundukları görülmüştür. Öğretmenlerin genellikle grafik çiziminde belirttikleri özellikleri grafiği çizerken uyguladıkları görülmüştür. Bazı öğretmenlerin sadece konvekslik-konkavlık ve ikinci türevin belirlenmesine yönelik özelliği graik çizimi öncesinde belirttiği ancak grafiği çizerken bu özelliği kullanmadığı görülmüştür. Grafik çiziminde dikkat çeken bir diğer nokta ise öğretmenlerin çoğunun değişim tablosunun kullanmamış olmasıdır. Duru (2006)'nın çalışmasında da matematik öğretmen adaylarının yarısına yakınının fonksiyonun grafiğini çizerken konveks-konkav olduğu aralıkları dikkate almadıkları ve dönüm noktalarını incelemedikleri görülmüştür.

Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgileri yapılan tanımlar, tanımlara yönelik kullanılan gösterimler ve kavramlar arasındaki ilişkilere yönelik açıklamalar bağlamında incelendiğinde öğretmenlerin belirtilen bu bağlamlarda sürekli prototip tanımlardan, ilişkilerden, kullanılan gösterimlerden ve örneklerden yararlandıkları söylenebilir. Öğretmenlerin türev ve uygulamaları konusundaki konu alanı bilgilerinde prototipliğe göre hareket etmiş olmaları öğretmenlerin zihinlerindeki kavram imajlarının sınırlandırılmasına neden olabilir (Gökkurt, 2014). Öğretmenlerin kapalı fonksiyonun türevine, türev-eğim-teğet ilişkisine ve maksimum-minimum problemlerine yönelik kurdukları problemler incelendiğinde bu problemlerin genellikle işlemsel düzeyde formül kullanmayı gerektiren, gündelik yaşamla ilişkili ancak alıştırma tarzında oldukları söylenebilir.

Türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgiler genel olarak değerlendirildiğinde öğretmenlerden $\bar{O}_1$ ve $\bar{O}_2$ 'nin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgileri bakımından on bölüm içerisinde beş bölümde eksiksiz cevaplamalarda bulundukları, $\bar{O}_3$ ve $\bar{O}_4$ 'ün ise

türev ve uygulamaların on bölümü içerisinde sekiz bölümünde eksiksiz ve doğru cevapta bulundukları görülmüştür. Öğretmenlerin en çok zorlandıkları, eksik görüşlerde bulundukları ya da yanlış cevapladıkları bölümlerin kapalı fonksiyonun türevi ve kullanılan notasyonlar, türevin geometrik anlamının izahı ve teğet kavramı olduğu göze çarpmaktadır. Öğretmenlerden Ö₁ ile yapılan ön görüşmelerde Ö₁'in lisans dönemindeki matematik dersi başarısının yüksek olduğunu ve türev konusunda kendisini yeterli bulduğunu belirttiği görülmüştür. Ö₁'in türev konusunda kendisini yeterli bulmasına rağmen konu alanı bilgisindeki eksikliklere yönelik farkında olmadığı söylenebilir. Öğretmenlerden Ö₂ ile yapılan ön görüşmelerde Ö₂'nin lisans dönemindeki matematik dersi başarısının orta olduğunu ve türev konusunda kendisini yetersiz bulduğunu belirttiği görülmüştür. Ö₂'nin türev konusunda kendisini yetersiz bulmasına bağlı olarak konu alanı bilgisindeki eksikliklerinin farkında olduğu söylenebilir. Öğretmenlerden Ö₃ ve Ö₄ ile yapılan ön görüşmelerde Ö₃'ün lisans dönemindeki matematik dersi başarısının çok iyi olduğunu ve türev konusunda kendisini yeterli bulduğunu, Ö₄'ün ise lisans dönemindeki matematik dersi başarısının orta olduğunu ve türev konusunda kendisini yeterli bulduğunu belirttikleri görülmüştür. Bu öğretmenlerin türev konusundaki konu alanı bilgileri bağlamında verdikleri eksiksiz ve doğru cevapların nedeni üniversitede öğrenim görürken kazandıkları deneyimleri öğretmenlik yaşantılarına yansıtılmalarından kaynaklı olabilir.

Konu alanı bilgisi bakımından on bölümden beş bölümde eksiksiz ve doğru cevaplar veren öğretmenlerin demografik özellikleri incelendiğinde bu öğretmenlerden Ö₁'in bayan ve eğitim fakültesi mezunu olduğu, öğretmenlikteki tecrübesinin ise 9 yıl olduğu görülmektedir. Öğretmenlerden Ö₂'nin ise erkek ve fen edebiyat fakültesi mezunu olduğu, öğretmenlikteki tecrübesinin ise 12 yıl olduğu görülmüştür. Konu alanı bilgisi bakımından on bölümden sekiz bölümde eksiksiz ve doğru cevaplar veren öğretmenlerin demografik özellikleri incelendiğinde ise bu öğretmenlerden Ö₃'ün bayan ve eğitim fakültesi mezunu olduğu, öğretmenlikteki tecrübesinin ise 16 yıl olduğu görülmektedir. Öğretmenlerden Ö₄'ün ise erkek ve fen edebiyat fakültesi mezunu olduğu, öğretmenlikteki tecrübesinin ise 18 yıl olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin demografik özelliklerine göre türev ve uygulamaları konusundaki pedagojik alan bilgilerinin cinsiyet ve mezun olunan fakülteye göre farklılaşmadığı ancak mesleki tecrübeye göre farklılaştığı söylenebilir. Buna göre mesleki tecrübesi daha fazla olan öğretmenlerin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgisi bağlamında sorulara daha fazla sayıda doğru cevap verdikleri söylenebilir.

Öğretmenlerin Türev ve Uygulamalarına Yönelik Öğrenci ve Öğretim Stratejileri Bilgilerine İlişkin Sonuç ve Tartışma

Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki öğrenci ve öğretim stratejileri bilgileri; mutlak değer fonksiyonunun sağdan-soldan türevinin aranması, köklü sayılarda türev arama kurallarının uygulanması, kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisinin belirlenmesi, kapalı fonksiyonun türevinin aranması, yerel ekstremum noktası alt konularında değerlendirilmiştir. Lise matematik öğretmenlerinin bu alt konulara yönelik öğrenci bilgileri incelendiğinde öğretmenlerin tamamının öğrencinin yaptığı hataları eksiksiz ve doğru belirledikleri söylenebilir. Literatürde de matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının matematiğin farklı konularında öğrenciler tarafından yapılan hataları doğru tespit ettikleri görülmüştür (Gökkurt, 2014; Gökkurt vd., 2013). Öğretmenlerin öğrencinin yaptığı hatanın kaynağını çoğunlukla derin gerekçelerle açıkladıkları görülmüştür. Bu durum öğretmenlerin ilgili alt konulardaki öğrenci bilgilerinin konu alanı bilgilerinden beslendiğini gösterebilir. Öğretmenlerin öğrencinin hatasına yönelik kullanmayı düşündükleri matematiksel ön bilgiler ile hatasını gidermeye yönelik sorulacak soruların hatanın kaynağıyla ilgili ve hatanın kaynağını yansıtan görüşler oldukları söylenebilir. Elde edilen bu bulgu Gökkurt (2014)'un çalışmasındaki ortaokul öğretmenlerinin, öğrencilerin geometrik cisimler konusundaki hatalarını gidermede kullanacakları ön bilgileri ve sorulacak soruları doğru ve hatanın kaynağına uygun belirledikleri şeklindeki bulgusuyla benzerlik göstermiştir. Öğretmenlerin genel olarak türev ve uygulamalarına yönelik ilgili alt konularındaki sorulara verdikleri cevapların eksiksiz ve doğru olduğu söylenebilir.

Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusundaki öğretim stratejileri bilgileri; mutlak değer fonksiyonunun sağdan-soldan türevinin aranması, köklü sayılarda türev arama kurallarının uygulanması, kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisinin belirlenmesi, kapalı fonksiyonun türevinin aranması, yerel ekstremum noktası alt konularında değerlendirilmiştir. Lise matematik öğretmenlerinin bu alt konulara yönelik öğretim stratejileri bilgileri incelendiğinde öğretmenlerin en fazla düz anlatım yöntemini, soru-cevap tekniğini ve sunuş yoluyla öğretim stratejilerini kullandıkları görülmüştür. Öğretmenlerin derslerinde en fazla düz anlatım yöntemini kullandıklarına yönelik bulgu Temizöz ve Özgünkoca (2008)'nın matematik öğretmenlerinin derslerinde en çok soru-cevap tekniğinden yararlandıkları bulgusuyla örtüşmektedir. Ayrıca bu çalışmada öğretmenlerin yöntem olarak en çok düz anlatım yöntemini tercih etmeleri Gökkurt (2014)'un çalışmasındaki ortaokul öğretmenlerinin derslerinde geometrik cisimleri anlatırken düz anlatım yönteminden yararlandıkları şeklindeki bulgusuyla benzeşmiştir. Öğretmenler bu çalışmada öğretim stratejisi olarak da en çok sunuş yoluyla öğretim stratejisinden yararlanmışlardır.

Öğretmenlerin derse girdikleri sınıflardaki başarı düzeyleri incelendiğinde genelde düşük başarı düzeyindeki öğrencilerin sınıflarında öğretimde bulundukları görülmüştür. Öğrenci başarının düşük olmasından hareketle öğretmenlerin sunuş yoluyla öğretim stratejilerinden yararlanmış olmalarının öğretim stratejileri bakımından uygun olduğu düşünülebilir.

Pedagojik Alan Bilgisi Bileşenlerinin Birbirleriyle İlişkilerine Yönelik Sonuçlar ve Tartışma

Bu araştırmada, lise matematik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgileri konu alanı bilgisi, öğrenci bilgisi ve öğretim stratejileri bilgisi bağlamında değerlendirilmiştir. Lise matematik öğretmenlerinin konu alanı bilgisine yönelik görüşme sürecinde belirttikleri görüşleri derste de uyguladıkları görülmüştür. Yani konu alanı bilgisi bakımından görüşme sürecinde eksik açıklamalarda bulunan öğretmenlerin derslerinde de konuya dönük yeterli olmayan açıklamalarda bulundukları ve öğrencilerin konuya dönük sorularını cevaplamada bazen zorlandıkları görülmüştür. Aksine görüşme sürecinde konu alanı bilgisi bakımından eksiksiz ve doğru açıklamalarda bulunan öğretmenlerin de derste konularını daha iyi işledikleri, kavramsal anlamda öğrencilerine daha fazla açıklamalarda bulundukları ve öğrencilerinin konuya dönük sorularını net ve hızlı şekilde doğru cevapladıkları görülmüştür. Benzer durum lise matematik öğretmenlerinin öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerinde de yaşanmıştır. Öğrenci bilgisine yönelik yapılan görüşmelerde öğrenci bilgileri yüksek olan lise matematik öğretmenlerinin derslerinde de öğrencilerin hatalarını tespit edebildikleri ve hataların giderilmesine yönelik uygun ipuçları verdikleri görülmüştür. Ayrıca bu öğretmenlerin öğrencinin hatasını fark ettiren sorulardan yararlandıkları da görülmüştür. Öğretmenlerin öğretim stratejilerine yönelik görüşme sürecinde uygulamayı düşündükleri öğretim yöntem, strateji ve teknikleri çoğunlukla derslerinde uyguladıkları görülmüştür. Bu sayede lise matematik öğretmenlerinin uygulamayı düşündükleri öğretim yöntem, strateji ve tekniklerle bizzat uyguladıkları öğretim yöntem, strateji ve teknikler arasında uyumun olduğu ifade edilebilir. Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik konu alanı bilgileriyle, öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerinin birbirleriyle ilişkili olduğu görülmüştür. Konu alanı bilgisi ile öğrenci ve öğretim stratejileri bilgileri arasındaki ilişkiler sadece mutlak değer fonksiyonunun sağdan-soldan türevinin aranması, köklü sayılarda türev arama kurallarının uygulanması, kırılma noktası ve türev-süreklilik ilişkisinin belirlenmesi, kapalı fonksiyonun türevinin aranması, yerel ekstremum noktası alt konularında incelenmiştir.

Konu alanı bilgisi bağlamında sorulara daha fazla sayıda doğru cevap veren Ö₃ ve Ö₄ PAB'ın bileşenleri arasındaki ilişkilerin incelendiği alt konulara hakim olduklarından bu bilgilerini öğrencinin yaptığı hatayı belirlerken, hatanın kaynağını açıklarken, hatanın giderilmesine yönelik kullanılacak ön bilgiler ile sorulacak soruları belirlerken doğru bir şekilde kullanmışlardır. Örneğin öğretmenlerden Ö₃ mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevini ararken kırılma noktasında önce sürekliliğin sonra da türevin sağdan-soldan incelenmesi gerektiğini belirtmiştir. Ö₃ öğrenci bilgisinde ise öğrenci hatasını doğru belirlemiştir. Ö₃ ilgili soruda öğrencinin sağdan-soldan türeve yaklaşmadığını belirterek hatanın fark edilmesine yönelik sağdan-soldan türev ile kırılma noktasına ilişkin sorular oluşturmuştur. Ö₃'ün ders içi gözlemleri incelendiğinde Ö₃ derste mutlak değer fonksiyonunun türevine yönelik kavramsal açıklamalarda bulunmuş, öğrencilerin konudaki öğrenme zorluklarını belirlemiş ve bu zorlukları gidermeye yönelik öğrenci bilgisinde kullanmayı düşündüğü soruları öğrencilerine yöneltmiş ve öğrencilerin öğrenme zorluklarını dikkate alarak uygun öğretim yöntem, strateji ve tekniklerinden yararlanmıştır. Bu araştırmada öğretmenlerin hem konu alanı bilgilerinin, hem de öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerinin ortak incelenebildiği alt konularda birbirleriyle ilişkili olduğuna yönelik sonuçlar literatürde Gökbulut (2010) ile Gökkurt (2014)'un yaptığı çalışmalardan elde edilen sonuçlarla örtüşmektedir. Gökbulut (2010)'un çalışmasında sınıf öğretmeni adaylarının geometrik cisimler konusunda konu alanı bilgileriyle öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerinin birbirleriyle ilişkili oldukları görülmüştür. Benzer şekilde Gökkurt (2014)'un çalışmasında ortaokul öğretmenlerinin geometrik cisimlere yönelik konu alanı bilgileriyle öğrenci bilgileri arasında, öğrenci bilgileriyle de öğretim stratejileri bilgileri arasında ilişkiler belirlenmiştir. Bu araştırmada PAB'ın bileşenleri arasındaki ilişkilere yönelik bulgular Hauk vd. (2014)'nin PAB bileşenlerinin birbirleriyle ilişkili oldukları ve birbirlerini etkiledikleri şeklindeki bulgularla örtüşmüştür.

Öneriler

Bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusuna yönelik konu alanı bilgilerinden elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde öğretmenlerin türevin formel tanımına ve örneklendirilmesine, türev-süreklilik ilişkisindeki özelliklere, mutlak değer fonksiyonunun türevine, türevin geometrik anlamının izahına, türev-eğim-teğet ilişkisine ve artan-azalan fonksiyonların türevle ilişkisine yönelik konu alanı bilgilerinde eksiklikler bulunduğu tespit edilmiştir. Konu alanı bilgisindeki eksikliklere bağlı olarak öğretmenlerin türevin formel tanımında yer alan özellikleri, türev süreklilik ilişkisindeki bağlantıları, kırılma noktalarını, türevin çoklu temsilleri arasındaki ilişkileri çok fazla

muhakeme etmedikleri söylenebilir. Dikkat edilecek olunursa türevin formel tanımındaki özellikleri ve türevin geometrik anlamını ortaya koyarken türevden önceki konular olan fonksiyon ve limit konularının iyi anlaşılması gerekir. Benzer şekilde türev-teğet ilişkisini açıklarken bir fonksiyon eğrisine çizilecek teğetlerin sayısında süreklilik kavramının iyi bilinmesi gerekir. Yine aynı şekilde türevin geometrik anlamının izahında ve türev-eğim ilişkisini ortaya koyarken ortalama değişim oranı ve anlık değişim oranı kavramlarının iyi öğrenilmesi gerekir. Türevdeki konulara iyi hâkim olabilmek için türevle ilişkili olduğu düşünülen fonksiyon, limit ve süreklilik kavramlarının hem lisans öğrenimi sırasında hem de mesleki yaşantıda pekiştirilmesinin öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerini daha da iyileştireceği düşünülmektedir. Öğretmenlerin çoklu temsiller sayesinde konulardaki ön şartlılık ilkesini de dikkate alarak hem kavramları daha doğru öğrenecekleri hem de kavramlar arasındaki ilişkileri daha kolay açıklayabilecekleri düşünülmektedir. Bu nedenle öğretmenlerin türev kavramını daha iyi öğrenebilmeleri için türevin geometrik, fiziksel, cebirsel ve sembolik temsillerini daha fazla kullanmaları önerilmektedir. Ayrıca öğretmenlerin türevi daha iyi öğrenebilmeleri adına lisans öğretimindeki analiz derslerinde bilgisayar destekli öğretim yapılabilir. Bu sayede anlık değişim oranı, eğriye çizilen teğetlerin sayısı ve özellikleri ile türevin geometrik anlamı bağlamında daha iyi bir öğretim sergilenebilir. Öğretmenlerin öğrencilerin hatalarını ve kavram yanılgılarını fark edebilmeleri için öncelikle kendilerinin ilgili konuya hâkim olmaları gerekir. Bu nedenle lise matematik öğretmenleri belirli aralıklarla bir araya gelerek öğrenme zorluğuna neden olabilecek konularda en uygun kavramsal bilgilerin ne olduğu ve en uygun öğretim yönteminin nasıl uygulanabileceği konusunda fikir alışverişinde bulunabilirler. Bu araştırma lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına yönelik PAB'larını incelediğinden gelecekte fonksiyon, limit, süreklilik ve integral konularına yönelik de öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerini inceleyen hem nicel hem de nitel çalışmalar yapılabilir. Bu çalışmada PAB'ın sadece konu alanı bilgileri ile öğrenci ve öğretim stratejileri bilgileri incelendiğinden türev ve uygulamalarına yönelik lise matematik öğretmenlerinin ölçme-değerlendirme bilgileri ile öğretim programı bilgileri araştırılabilir. PAB'ın tüm bileşenleri arasındaki ilişkiler ve bu bileşenlerin birbirlerini etkileme durumları incelenebilir. Lise matematik öğretmenlerinin türeve yönelik hem konu alanı bilgilerini hem de öğrenci ve öğretim stratejileri bilgilerini daha da arttırmak adına düzey belirlendikten sonra mikro öğretim yardımıyla daha farklı öğrenme etkinlikleri gerçekleştirilebilir.

KAYNAKLAR

- Abell, S. K. (2008). Twenty years later: Does pedagogical content knowledge remain a useful idea?. *International Journal of Science Education*, 30(10), 1405-1416.
- Acar, D. (2012). *Sınıf öğretmenlerinin fen ve teknoloji derslerinde öğrenme öğretme süreci yönüyle pedagojik alan bilgisi ihtiyaçlarının belirlenmesi* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 319830)
- Açıkyıldız, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının türev kavramını anlamaları ve yaptıkları hatalar* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 344475)
- Açıkyıldız, G., & Gökçek, T. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının türev teget ilişkisi ile ilgili yaptıkları hatalar. *Journal of Instructional Technologies & Teacher Education*, 4(2), 29-42.
- Adams, P. E., & Krockover, G. H. (1997). Concerns and perceptions of beginning secondary science and mathematics teachers. *Science Education*, 81(1), 29-50.
- Akkaş, E. N. (2014). *Ortaokul 5., & 7. sınıf öğretmenlerinin geometri öğretim süreçlerinin ve geometrik-pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 381138)
- Akkaya, E. (2009) *Matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları bağlamında incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 250859)
- Akkoç, H., Bingolbali, E., & Özmantar, M. F. (2008, July). *Investigating the technological pedagogical content knowledge: a case of derivative at a point*. Paper presented at the 32nd International Conference on the Psychology of Mathematics Education (PME32), (pp. 17-24). Morelia, Mexico.
- Aktürk, A. O. (2012). Öğretmen adaylarının öğrenmeye ilişkin tutumlarının öğretmenlik mesleğini tercih etme nedenlerine ve akademik başarılarına göre incelenmesi. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(3), 283-297.
- Aldemir, R. (2017). *Mikro öğretim ders imecesi yöntemiyle matematik öğretmeni adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgilerinin gelişimlerinin incelenmesi: geometrik cisimler örneği* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 463094)
- Alev, N., & Karal, I. S. (2013). Fizik öğretmenlerinin elektrik ve manyetizma konularına ilişkin pedagojik alan bilgilerinin belirlenmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(2), 88-108.
- Amit, M., & Vinner, S. (1990). *Some misconception in calculus: anecdotes or the tip of an iceberg?*. In G. Booker & T.N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-10). Cinvestav, Mexico.
- An, S. (2009). Chinese teachers' knowledge of teaching multi-digit division. *Journal of Mathematics Education*, 2(1), 27-54.
- An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education* 7, 145-172.

- Anderson, G., & Arsenault, N. (1998). *Fundamentals of educational research*. (2nd Edition). London: Falmer.
- Appleton, K. (2006). Science pedagogical content knowledge and elementary school teachers. In K. Appleton (Ed.), *Elementary science teacher education: International perspectives on contemporary issues and practice* (pp. 31–54). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Arends, R. (2004). *Learning to teach* (6th Edition). New York: McGraw-Hill Companies.
- Arslan-Kılcan, S. (2006). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin kesirlerde bölmeye ilişkin kavramsal bilgi düzeyleri* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 188598)
- Artigue, M. (1991). Analysis. In I.D. Tall & S. Vinner (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer Academics.
- Ary, D., Jacobs, L. C., Sorensen, C., & Razavieh, A. (2010). *Introduction to research in education* (8th Ed.). Belmont: Wadsworth.
- Arzi, H. J., & White, R. T. (2008). Change in teachers' knowledge of subject matter: A 17-year longitudinal study. *Science Education*, 92, 221-251.
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 399-431.
- Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Wiliam, D., & Johnson, D. (1997). *Effective teachers of numeracy: report of a study carried out for the teacher training agency*. London: King's College, University of London.
- Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33(3), 301-317.
- Aydın, S. (1974). *Analize giriş*. Ankara: Başarı Yayınları.
- Aydın, N., & Erbaş, A. K. (2014). *Ortaöğretim matematik 12 ders kitabı*. Ankara: Aydın Yayıncılık ve Eğitim Hizmetleri.
- Ayres, F. (1978). *Teori ve problemlerle diferansiyel ve integral hesap: calculus*. (Çev: Güzin Gökmen). Ankara: Güven Kitabevi Yayınları.
- Aytaçlı, B. (2012). *İlköğretim matematik öğretmenliği lisans programında yer alan okul deneyimi ve öğretmenlik uygulaması derslerinin değerlendirilmesi* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 314137)
- Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 557-578.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Yayınları.
- Baki, A. (2010). Öğretmen eğitiminin lisans ve lisansüstü boyutlardan değerlendirilmesi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(3), 15-31.
- Baki, M. (2012). *Sınıf öğretmeni adaylarının matematiği öğretme bilgilerinin gelişiminin incelenmesi: bir ders imcesi (lesson study) çalışması* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 344460)
- Baki, M. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının bölme işlemi ile ilgili matematiksel bilgileri ve öğretimsel açıklamaları. *Eğitim ve Bilim*, 38(167), 300-311.
- Balcı, M. (1999). *Matematik analiz*. Ankara: Balcı Yayınları.

- Ball, D. L. (1990a). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90, 449-466.
- Ball, D. L. (1990b). *Halves, pieces, and twos: constructing representational contexts in teaching fractions*. East Lansing: Michigan State University, National Center for Research on Teacher Learning.
- Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching: teachers' knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice* (pp. 1-48). Greenwich, CT: JAI Press.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). *Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching*. Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, Edmonton, AB, Canada.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2009, March). *With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Paper prepared based on keynote address at the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik. Oldenburg, Germany.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?. *American Educator*, 29(3), 14-46.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of Research on Teaching*, 4, 433-456.
- Ball, D. L., & McDiarmid, G. W. (1990). The subject matter preparation of teachers. In W.R. Houston & M.H.J. Sikula (Eds.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 437-449). New York: Macmillan Publishing Company.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bansilal, S., Brijlall, D., & Mkhwanazi, T. (2014). An exploration of the common content knowledge of high mathematics teachers. *Perspectives in Education*, 32(1), 34-50.
- Baştürk, S. (2009a). Öğretmenlik uygulaması dersinin öğretmen adaylarının görüşlerine göre incelenmesi. *İlköğretim Online*, 8(2), 439-456.
- Baştürk, S. (2009b). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına göre fen edebiyat fakültelerindeki alan eğitimi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(3), 137-160.
- Baştürk, S. (2010). Öğrencilerinin fonksiyon kavramının farklı temsillerindeki matematik dersi performansları. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(2), 465-482.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., & Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133-180.
- Baxter, J. A., & Lederman, N. G. (1999). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. In J. Gess-Newsome & N.G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 147-163). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

- Bayboz, Ö. (2015). *Biyoloji öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin karşılaştırılması*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 421369)
- Bayram, E. (2016). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin ölçme öğrenme alanı bağlamında uzmanlık alan bilgilerini mahiyeti*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Mevlana Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye.
- Bergman, M. M. (2010). On concepts and paradigms in mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research*, 4(3), 171-175.
- Bennett, S. N., & Turner-Bisset, R. A. (1993). Case studies in learning to teach. In S.N. Bennett & C.G. Carre (Eds.), *Learning to teach* (pp. 165-190). London and New York: Routledge.
- Berliner, D. C. (2001). Learning about and learning from expert teachers. *International Journal of Educational Research*, 35(5), 463-482.
- Bezuindenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 487-500.
- Bilik, A. (2016). *Pre-service middle school mathematics teachers' pedagogical content knowledge regarding the area of triangles*. (Master thesis). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 439082)
- Bingölbali, E. (2008). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M.F. Özmentar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yarılgıları ve çözüm önerileri* (ss. 223-255). Ankara: Pegem Akademi.
- Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 38(6), 763-777.
- Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2006). *Students' thinking about the tangent line. Prodeedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Prague, Czechia.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). *Inside the black box: raising standards through classroom assessment*. London: Department of Education and Professional Studies, King's College.
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1992). *Qualitative research for education: an introduction to theory and methods*. Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.
- Borko, H., & Putnam, R. (1996). Learning to teach. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 673-708). New York: Macmillan.
- Boz, N. (2004). *Öğrencilerin hatasını tespit etme ve nedenlerini irdeleme*. XIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı, İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Malatya, Türkiye.
- Brand, L. (2006). *Advanced calculus: an introduction to classical analysis*. Mineola, NY: Dover Publication.
- Bransford, J., Darling-Hammond, L., & LePage, P. (2005). Introduction. In L. Darling-Hammond & J.D. Bransford (Eds.), *Preparing teachers for a changing world: what teachers should learn and be able to do* (pp. 1-39). San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101.

- Bromme, R. (1995). What exactly is pedagogical content knowledge? Critical remarks regarding a fruitful research program. In S. Hopmann & K. Riquarts (Eds.), *Didaktik and/or curriculum* (pp. 205-216). Kiel: Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN).
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professionals knowledge. In R. Bieler, R.W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline: The state of the art* (pp. 73-88). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Brown, C., & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York: Macmillan Publishing Company.
- Brown, S. I., Cooney, T. J., & Jones, D. (1990). Mathematics teacher education. In W.R. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 639-656). New York: Macmillan.
- Bucat, R. (2004). Pedagogical content knowledge as a way forward: Applied research in chemistry education. *Chemistry Education Research and Practice*, 5(3), 215-228.
- Buckreis, W. F. (1999). *Elementary mathematics teacher subject matter knowledge and its relationship to teaching and learning* (Doctoral dissertation). Retrieved from https://ir.library.oregonstate.edu/concern/graduate_thesis_or_dissertations/2801pk07n
- Bukova Güzel, E., Uğurel, I., Özgür, Z., & Kula, S. (2010). The review of undergraduate courses aimed at developing subject matter knowledge by mathematics student teachers. *Procedia Social and Behavioral Science* 2, 2233-2238.
- Burrell, G., & Morgan, G. (1979). *Sociological paradigms and organizational analysis*. Portsmouth, NH: Heinemann Educational Books Inc.
- Burton, M. (1989). The effect of prior calculus experience in "introductory" college calculus. *American Mathematical Monthly*, 96, 350-354.
- Bütün, M. (2005). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin alan eğitimi bilgilerinin nitelikleri üzerine bir araştırma*. (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 170976)
- Bütün, M. (2012). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının uygulanan zenginleştirilmiş program sürecinde matematiği öğretme bilgilerinin gelişimi*. (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 321920)
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (13. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- Caferov, V. (1999). *Analiz*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayınları.
- Cansız-Aktaş, M. (2014). Nitel veri toplama araçları. M. Metin (Ed.), *Kuramdan uygulamaya eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* (ss. 337-371). Ankara: Pegem Akademi.
- Carlsen, W. S. (1999). Domains of teacher knowledge. In N.G. Lederman & J. Gess-Newsome (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 133-144). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (pp. 114-162). Washington, DC: American Mathematical Society.

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P., Chiang, C., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Journal*, 26, 499-531.
- Charalambos, Y. C., Hill, H. C., & Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: how does it look and what might it take?. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(6), 441-463.
- Cheang, W. K., Yeo, J. K. K., Chan, E. C. M., & Lim-Teo, S. K. (2007). Development of mathematics pedagogical content knowledge in student teachers. *The Mathematics Educator*, 10(2), 27-54.
- Choy, D., Wong, A. F. L., Lim, K. M., & Chong, S. (2013). Beginning teachers' perceptions of their pedagogical knowledge and skills in teaching: A three year study. *Australian Journal of Teacher Education*, 38(5), 68-79.
- Clermont, C. P., Borko, H., & Krajcik, J. S. (1994). Comparative study of the pedagogical content knowledge of experienced and novice chemical demonstrators. *Journal of Research in Science Teaching*, 31, 419-441.
- Cochran, K. F. (1997). *Pedagogical content knowledge: Teachers' integration of subject matter, pedagogy, students, and learning environments*. National Association of Research in Science Teaching: Research Matters-to the Science Teacher, Retrieved from <https://www.narst.org/publications/research/pck.cfm>.
- Cochran, K. F., De Ruiter, J. A., & King, R. A. (1993). Pedagogical content knowledge: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education*, 44, 263-272.
- Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research methods in education*. (4th Edition). London: Routledge.
- Cohen, D. K., McLaughlin, M. W., & Talbert, J. E. (1993). *Teaching for understanding: Challenges for policy and practice*. San Francisco: Jossey-Boss.
- Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2/3), 134-165.
- Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 163-187.
- Cottrill, J. F. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://docs.lib.purdue.edu/dissertations/AAI9951936/>
- Cramer, K., Post, T. R., & del Mas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifthgrade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 111-144.
- Creswell, J. W. (1994). *Research design: qualitative & quantitative approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage Publication.
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Boston: Pearson Education.

- Creswell, J. W. (2014). *Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları* (Çev. Ed: S.B. Demir). Ankara: Eğiten Kitap.
- Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publication.
- Cronin-Jones, L. L. (1991). Science teacher beliefs and their influence on curriculum implementation: two case studies. *Journal of Research in Science Teaching*, 28, 235-250.
- Çakımcı, T., & Kabasakal, V. (2016). *Ortaöğretim ileri düzey matematik 12*. Ankara: Nova Yayıncılık.
- Çarhoğlu, M. A., & Gezmiş, A. T. (2015). *Ortaöğretim matematik 12 ders kitabı*. Ankara: Ada Matbaacılık.
- Çelikten, M., Şanal, M., & Yeni, Y. (2005). Öğretmenlik mesleği ve özellikleri. *Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 19(2), 207-237.
- Çetinkaya, B., Erbaş, A. K., & Alacacı, C. (2013). Değişim oranı olarak türev ve tarihsel gelişimi. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (ss. 529-555). Ankara: Pegem Akademi.
- Çıkrıkçı, F. H. (2015). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının cebir öğrenme alanına ilişkin alan ve pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi*. (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 395286)
- Çiltaş, A., & Akıllı, M. (2011). Öğretmenlerin pedagojik yeterlilikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 3(4), 64-72.
- Çoker, D., Özer, O., & Taş, K. (1982). *Genel matematik*. İstanbul: Araştırma, Eğitim, Ekin Yayınları.
- Daehler, K. R., Heller, J. I., & Wong, N. (2015). Supporting growth of pedagogical content knowledge in science. In A. Berry, P. Friedrichsen & J. Loughran (Eds.), *Re-examining pedagogical content knowledge in science education* (pp. 45-59). New York: Routledge.
- Danışman, Ş., & Tanışlı, D. (2014, Eylül). *Matematik öğretmenlerinin olasılık konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi*. 11. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulan sözlü bildiri, Çukurova Üniversitesi, Adana, Türkiye.
- Dani, D. E. (2004). *The impact of content and pedagogy courses on science teachers' pedagogical content knowledge* (Doctoral dissertation). Retrieved from https://etd.ohiolink.edu/pg_10?0::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:ucin1086191691
- Darling-Hammond, L. (2000). Teacher quality and student achievement: A review of state policy evidence. *Education Policy Analysis Archives*, 8(1).
- Darlington, Y., & Scott, D. (2002). *Qualitative research in practice: stories from the field*. Crows Nest NSW: Allen & Unwin.
- Davidowitz, B., & Potgieter, B. (2016). Use of the rasch measurement model to explore the relationship between content knowledge and topic-specific pedagogical content knowledge for organic chemistry. *International Journal of Science Education*, 38(9), 1483-1503.
- Davis, C. E. (2003). *Prospective teachers' subject matter knowledge of similarity* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://repository.lib.ncsu.edu/handle/1840.16/3149>

- Davis, E. A., & Petish, D. (2005). Real-word applications and Instructional representations among prospective elementary science teachers. *Journal of Science Teacher Education*, 16, 263-286.
- Daymon, C., & Holloway, I. (2003). *Qualitative research methods in public relations and marketing communications*. London: Routledge.
- Demir, H. (2014). *Teori ve problemleriyle Analiz-1*. Ankara: Pegem Akademi.
- Demirhan, G. (2015). *Türkiyede eğitim yönetimi alanında araştırma geleneği ve paradigmaların gömülü teori bağlamında değerlendirilmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 414497)
- Denscombe, M. (2010). *The good research guide: for small-scale social research projects* (4th Edition). Open University Press, Berkshire, UK: McGraw Hill.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1998). *The landscape of qualitative research: theories and issues*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Desfitri, R. (2016). In-service teachers' understanding on the concept of limits and derivatives and the way they deliver the concepts to their high school students. *Journal of Physics: Conference Series*, 693, 1-9.
- Dikeçligil, B. (1994). *Kültür kavramının analizi ve sosyo kültürel gerçekliğin yapısı üzerine bir inceleme*. Dünyada ve Türkiyede Güncel Sosyolojik Gelişmeler: I.Ulusal Sosyoloji Kongresi (ss. 37-47), Ankara: Sosyoloji Derneği Yayınları.
- Dikeçligil, B. (2002). *Sosyolojide metodolojik farklılaşma ve metotlar arası işbirliği*. III. Ulusal Sosyoloji Kongresi Dünyada ve Türkiye'de Farklılaşma Çatışma ve Bütünleşme-II (ss. 97-127), Ankara: Sosyoloji Derneği Yayınları.
- Dikeçligil, B. (2006). *Sosyal bilimler epistemolojisinde sorunların kaynağı: ontolojiyi unutmak*. Muğla Üniversitesi Felsefe ve Sosyal Bilimler Sempozyumu Bildirileri (ss. 31-51), Ankara: Vadi Yayınları.
- Dikeçligil, B. (2009). Sosyal bilimler epistemolojisinde sorunları kaynağı: ontolojiyi unutmak. *Toplum Bilimleri*, 1-3, 47-67.
- Dikeçligil, B. (2010). Bilimsel paradigmaların oluşumunda ve dönüşümünde sosyolojik bağlam. *Toplum Bilimleri*, 4(7), 53-61.
- Diñer, M. (2003). Eğitimin toplumsal değişme sürecindeki gücü. *Ege Eğitim Dergisi*, 3, 102-112.
- Ding, L., He, J., & Leung, F. K. S. (2014). Relations between subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: a study of chinese pre-service teachers on the topic of three-term ratio. *The Mathematics Teacher*, 15(2), 50-76.
- Dönmez, G. (2009). *Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin pedagojik alan bilgilerinin değerlendirilmesi* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 250827)
- Dunham, P. H., & Osborne, A. (1991). Learning how to see: students' graphing difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13, 35-49.
- Duran, M., & Kaplan, A. (2016). Lise matematik öğretmenlerinin türevin tanımına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik pedagojik alan bilgileri. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(2), 795-831.
- Duran, N. B. (2017). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgileri çerçevesinde kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretimine ilişkin*

- kullandıkları modeller* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 469524)
- Duru, A. (2006) *Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 181514)
- Duru, A., Köklü, Ö., & Jakubowski, E. (2010). Pre-service mathematics teachers' conceptions about the relationship between continuity and differentiability of a function. *Scientific Research and Essays*, 5(12), 1519-1529.
- Ebert, C. L. (1993). *An assessment of prospective secondary teachers' pedagogical content knowledge about functions and graphs*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, USA.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2001). *Matematik analiz ve analitik geometri* (5.baskı). (Çev: Ömer Akın). Ankara: Palme Yayıncılık.
- Ekiz, D. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (2. Baskı). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Elbaz, F. (1981). The teacher's "practical knowledge": report of a case study. *Curriculum Inquiry*, 11(1), 43-71.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: a study of practical knowledge*. London: Croom Helm.
- Erdoğan, G. (2017). *Lise matematik öğretmenlerinin noktada türev ve türev fonksiyonu hakkındaki kavram imajları* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 471816)
- Ergene, B. (2011). *Matematik öğretmen adaylarının türev konusundaki teknolojik pedagojik alan bilgilerinin çoklu temsiller bileşeninde incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 298582)
- Erkenekli, M. (2012). Kültürel değer çalışmalarında yöntem ve sosyolojik araştırmalar için bir model önerisi. *Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 33, 221-230.
- Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L., & Allen, S. T. (1993). *Doing naturalistic inquiry: a guide to methods*. California: Sage Publication.
- Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal of Research in Mathematics Education*, 24(2), 94-116.
- Even, R., & Markovitz, Z. (1995). Some aspects of teachers' and students' views on student reasoning and knowledge construction. *International Journal of Mathematics Education in Science Technology*, 26, 531-544.
- Even, R., & Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 1-20.
- Even, R., & Tirosh, D. (2008). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical learning and thinking. In L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd Edition, pp. 202-222). New York: Routledge.
- Evens, M., Elen, J., & Depaepe, F. (2015). Developing pedagogical content knowledge: Lessons learned from intervention studies. *Education Research International*, 8, 1-23.
- Fennema E., & Franke M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York: Macmillan Publishing Company.

- Fernandez-Balboa, J., & Stiehl, J. (1995). The generic nature of pedagogical content knowledge among college professors. *Teaching & Teacher Education*, 11(3), 293-306.
- Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. G. (1991). An overview of the calculus curriculum reform effort: issues for learning, teaching, and curriculum development. *The American Mathematical Monthly*, 98(7), 627-635.
- Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. G. (1994). Research in calculus learning: understanding of limits, derivatives and integrals. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 31-45). Washington: MAA Notes.
- Ferrini-Mundy, J., & Lauten, D. (1994). Learning about calculus learning. *The Mathematics Teacher*, 87, 115-121.
- Fraenkel, J. R., & Wallen, N. E. (2006). *How to design and evaluate research in education*. (6th Edition). New York: McGraw-Hill.
- Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (2011). *Validity and reliability, how to design and evaluate research in science education* (8th Ed.). New York: McGraw-Hill Companies.
- Frid, S. (1992). *Undergraduate calculus students' language use and sources of conviction* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://elibrary.ru/item.asp?id=5787759>
- Frid, S. (1994). Three approaches to undergraduate calculus instruction: their nature and potential impact on students' language use and source of conviction. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 4, 69-100.
- Friedrichsen, P., Lankford, D., Brown, P., Pareja, E., Volkmann, M., & Abell, S. (2007, April). *The PCK of future science teachers in an alternative certification program*. Paper presented at the National Association for Research in Science Teaching Annual Conference, New Orleans, LA, USA.
- Furinghetti, F., & Paola, D. (1991). The construction of a didactic itinerary of calculus starting from students' concept images (ages 16–19). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 22, 719-729.
- Fuson, K. (1992). Mathematics education, elementary. In M. Alkin (Ed.), *Encyclopedia of Educational Research* (6th Ed.). New York: Macmillan.
- García, M., Llinares, S., & Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 1023-1045.
- Gatbonton, E. (2008). Looking beyond teachers' classroom behaviour: novice and experienced ESL teachers' pedagogical knowledge. *Language Teaching Research* 12(2), 161-182.
- Geddis, A. N. (1993). Transforming subject matter knowledge: The role of pedagogical content knowledge in learning to reflect on teaching. *International Journal of Science Education*, 15, 673-683.
- Gess-Newsome, J. (1999). Pedagogical content knowledge: an introduction and orientation. In J. Gess-Newsome & N.G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 51-93). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Gess-Newsome, J., & Lederman, N. G. (1999). *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Girard, N. R. (2002). *Students' representational approaches to solving calculus problems: Examining the role of graphing calculators* (Doctoral dissertation). Dissertation Abstracts international, 61(10A), 3502.
- Glesne, C., & Peshkin, A. (1992). *Becoming qualitative researchers: an introduction*. New York: Longman.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories for analysing the knowledge of mathematics teachers]. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Goetz, J.P., & LeCompte, M.D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. New York: Academic Press.
- Goodnough, K. (2006). Enhancing pedagogical content knowledge through self-study: An exploration of problem-based learning. *Teaching in Higher Education*, 11(3), 301-318.
- Goulding, M., Rowland, T., & Barber, P. (2002). Does it matter? Primary teacher trainees' subject knowledge in mathematics. *British Educational Research Journal*, 28(5), 689-704.
- Gökbulut, Y. (2010). *Sınıf öğretmeni adaylarının geometrik cisimler konusundaki pedagojik alan bilgileri* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 279684)
- Gökkurt, B. (2014). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometrik cisimler konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 381641)
- Gökkurt, B., Koçak, M., & Soylu, Y. (2014, Eylül). *Öğretmen adaylarının kesirler konusuna yönelik konu alan bilgileri ve öğretim stratejileri bilgilerinin incelenmesi*. 11. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan sözlü bildiri, Çukurova Üniversitesi, Adana, Türkiye.
- Gökkurt, B., Şahin, Ö., & Soylu, Y. (2012). Matematik öğretmenlerinin matematiksel alan bilgileri ile pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkinin incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 5(8), 997-1012.
- Gökkurt, B., Şahin, Ö., Soylu, Y., & Soylu, C. (2013). Öğretmen adaylarının kesirlerle ilgili pedagojik alan bilgilerinin öğrenci hataları açısından incelenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 5(3), 719-735.
- Gözel, E. (2016). *Ders imcesi çalışmalarıyla sınıf öğretmenlerinin problem çözmeye dayalı matematiği öğretme bilgilerinin gelişiminin incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 445691)
- Grabiner, J. W. (1983b). The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56, 195-206.
- Graeber, A. O. (1999). Forms of knowing mathematics: what preservice teachers should learn. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 189-208.
- Gravetter, F. J., & Forzano, L. B. (2003). *Research methods for the behavioral sciences*. Belmont, CA: Wadsworth.
- Griffin, L., Dodds, P., & Rovegno, I. (1996). Pedagogical content knowledge for teachers: Integrative everything you know to help students learn. *Journal of Physical Education, Recreation & Dance*, 67(9), 58-61.
- Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: teacher knowledge and teacher education*. Columbia University: Teachers College Press.

- Grossman, P. L. (1995). Teachers' knowledge. In L.W., &erson (Ed.), *International encyclopedia of teaching and teacher education* (2nd Edition). Oxford: Permagon.
- Gudmundsdottir, S. (1987). *Pedagogical content knowledge: teachers' ways of knowing*. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Learning. (ERIC Document Reproduction Service No. ED290701).
- Guion, A. L. (2002). *Triangulation: establishing the validity of qualitative studies*. Gainesville: Institute of Food and Agricultural Sciences, University of Florida.
- Güler, M. (2014). *Öğretmen adaylarının matematik öğretme bilgilerinin incelenmesi: cebir örneği* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 380249)
- Güngör, S. (2014). Eğitim ve eğitim yönetiminde paradigmalar. *E-Kafkas Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 1(3), 26-40.
- Gür, H., & Barak, B. (2007). Ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin türev konusundaki hata örnekleri. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 7(1), 453-480.
- Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 57-72.
- Hacıömeroğlu, E. S., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 152-176.
- Hacıömeroğlu, G. (2005). *Prospective secondary teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of the concept of function* (Doctoral dissertation). Retrieved from <http://diginole.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu%3A182484/>
- Hacıömeroğlu, G. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının öğretim için matematiksel bilgisi: Öğrencilerin toplama ve çıkarma işlemlerine ilişkin çözümlerinin analizi. *Eğitim ve Bilim*, 38(168), 332-346.
- Hacıömeroğlu, G., & Şahin Taşkın, Ç. (2009). *Öğretmen adaylarının öğretmenlik mesleğini tercih sebepleri*, 1.Uluslararası Türkiye Eğitim Araştırmaları Kongresi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, 01-03 Mayıs, Çanakkale, Türkiye.
- Hacısalıhoğlu, H. H., Balcı, M., & Gökdağ, F. (1988). *Temel ve genel matematik* (3. Baskı). Ankara: Ertem Matbaacılık.
- Hacısalıhoğlu, H. H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown, L. M., İbikli, E., & Brown, S., (2000). *Türk dil kurumu matematik terimleri sözlüğü*. Ankara: Bizim Büro Basımevi Yayın Dağıtım.
- Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/22530/rep104.pdf?sequence=1>
- Halilov, H., Hasanoğlu, A., & Can, M. (1999). *Yüksek matematik: tek değişkenli fonksiyonlar analizi*. İstanbul: Literatür Yayıncılık.
- Halim, L., & Meerah, S. M. (2002). Science trainee teachers' pedagogical content knowledge and its influence on physics teaching. *Research in Science and Technological Education*, 20(2), 215-226.
- Hashweh, M. Z. (1985). *An exploratory study of teacher knowledge and teaching: the effects of science teachers' knowledge of subject matter and their conceptions of learning on*

their teaching (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://elibrary.ru/item.asp?id=7469777>

- Hashweh, M. Z. (1987). Effects of subject matter knowledge in the teaching of biology and physics. *Teaching and Teacher Education*, 3(2), 109-120.
- Hashweh, M. Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: a reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching*, 11(3), 273-292.
- Hauger, G. S. (1995, April). *Rate of change knowledge in high school and college students*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, USA.
- Hauger, G. S. (2000). Instantaneous rate of change: a numerical approach. *International Journal of Mathematical Education of Science and Technology*, 31(6), 891-897.
- Hauk, S., Toney, A., Jackson, B., Nair, R., & Tsay, J. J. (2014). Developing a model of pedagogical content knowledge for secondary and post-secondary mathematics instruction. *Dialogic Pedagogy: An International Online*, 2, 16-40.
- Hausknecht, A. O., & Kowalczyk, R. E. (2008). *Exploring calculus using innovative technology*. Proceedings of the 19th Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics (pp. 75-79), Boston, USA.
- Hawkins, W. J. (2012). *An investigation of primary teachers' pedagogical content knowledge when teaching measurement to years three and four*. Paper Presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, South Korea.
- Hedges, L. E., & Valija, M. A. (1995). *Assessing learning*. Columbus, OH: The Ohio State University Vocational Instructional Materials Lab.
- Heid, K. M. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 3-25.
- Herbert, S., & Pierce, R. (2012). Revealing educationally critical aspects of rate. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 85-101.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-100). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Teacher Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105(1), 11-30.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: what knowledge matters and what evidence counts? In Lester, J.R.K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Charlotte, NC: Information Age.
- Hollon, R. E., Roth, K. J., & Anderson, C. W. (1991). Science teachers' conceptions of teaching and learning. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching* (pp. 145-186). Greenwich, CT: JAI.

- Houssart, J., & Weller, B. (1999). Identifying and dealing with misconceptions and errors in primary mathematics: student teachers record their experiences, *Mathematics Education Review*, 11, 46-58.
- Hughes-Hallett, D., Gleason, A., Flath, D., Gordon, S., Lomen, D., Lovelock, D., ... & Thrash, K. (1994). *Calculus*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Işık, A., & Bekdemir, M. (1998). Matematiğin doğası ve eğitimdeki yeri. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 245, 19-22.
- Işıksal, M. (2006). *A study on pre-service elementary mathematics' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplication and division of fractions* (Doctoral dissertation). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 181012)
- İbrahimoglu, B. A., & Bayram, M. (2008). Türev değerlerini içeren rasyonel interpolasyon yöntemleri ve uygulamaları. *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 16, 39-48.
- Jang, S. J., Guan, S. Y., & Hsieh, H. F. (2009). Developing an Instrument for assessing college students' perceptions of teachers' pedagogical content knowledge. *Procedia Social and Behavioral Science*, 1, 596-606.
- James, M. D. (1995). *Should calculus be taught in high school and if so how should it be taught?*. Retrieved from <http://jwilson.coe.uga.edu/EMT705/EMT705.James.html>.
- Jenkins, O. F. (2010). Developing teachers' knowledge of students as learners of mathematics through structured interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 141-154.
- Jones, S. R., & Watson, K. L. (2017). Recommendations for a “target understanding” of the derivative concept for first-semester calculus teaching and learning. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-29. doi: <https://doi.org/10.1007/s40753-017-0057-2>
- Jüttner, M., & Neuhaus, B. J. (2012). Development of items for a pedagogical content knowledge-test based on empirical analysis of pupils' errors. *International Journal of Science Education*, 34(7), 1125-1143.
- Kadalkal, M. (2010). Türevin uygulamaları ve grafik çizimi. In M.K. Sağıl & M. Aktaş (Ed.). *Genel matematik 1* (ss. 223-318). Ankara: Pegem Akademi.
- Kadioğlu, E., & Kamali, M. (2009). *Genel matematik*. Erzurum: Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi.
- Kandemir, M. (2015). *Diferensiyel denklemler*. Ankara: Pegem Akademi.
- Kaplan, A., Öztürk, M., & Öcal M. F. (2015). Relieving of misconceptions of derivative concept with derive. *International Journal of Research in Education and Science*, 1(1), 64-74.
- Käpyla, M., Heikkinen, J. P., & Asunta, T. (2009). Influence of content knowledge on pedagogical content knowledge: the case of teaching photosynthesis and plant growth. *International Journal of Science Education*, 31(10), 1395-1415.
- Karadeniz, A. A. (2003). *Yüksek matematik: Diferansiyel ve integral hesabı*. İstanbul: Çağlayan Kitabevi.
- Karahan, N. (2008). *Öğretmen yetiştirme düzeni ve Türkiye örneği* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 235398)

- Karal Eyüboğlu, I. S. (2011). *Fizik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgi (pab) gelişimi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 300386)
- Kartal, B. (2017). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgisi gelişimlerinin incelenmesi: çokgenler örneği* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 461577)
- Katz, V. J. (2009). *History of mathematics: an introduction*. New Jersey: Pearson Education.
- Kaya, O. N. (2009). The nature of relationships among the components of pedagogical content knowledge of pre-service science teachers: ozone layer depletion' as an example. *International Journal of Science Education*, 31(7), 961-988.
- Kendal, M. (2001). *Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://minerva-access.unimelb.edu.au/handle/11343/39021>
- Kendal, M., & Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(2), 143-165.
- Kertil, M. (2014). *Pre-service elementary mathematics teachers' understanding of derivative through a model development unit* (Doctoral dissertation). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 355255)
- Keskin, C. (2017). *Ortaöğretim matematik ders kitabı: 12 ileri düzey*. Ankara: Dikey Yayıncılık.
- Kılıç, H. (2011). Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of students. *Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry*, 2(2), 17-35.
- Kılıç, A., & Saruhan, H. (2006). Teknik eğitim fakültesi öğretmen adaylarının öğretmenlik becerileri. *Selçuk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 16, 407-417.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.
- Kind, V. (2009). Pedagogical content knowledge in science education: Perspectives and potential for progress. *Studies in Science Education*, 45(2), 169-204.
- Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 137-174.
- Koçak, M. (2015). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel formülleri anlamlandırabilme ve matematiksel formüller ile ilgili öğretim strateji bilgilerinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 394795)
- Koçak, M., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2015, Nisan). *Matematik öğretmeni adaylarının tam sayılar konusuna ilişkin öğretim strateji bilgileri ve alan bilgilerinin incelenmesi*. 24. Eğitim Bilimleri Kongresinde sunulan sözlü bildiri, Ömer Halisdemir Üniversitesi, Niğde, Türkiye.
- Konyalıoğlu, A. C., Özkaya, M., & Gedik, S. D. (2012). Matematik öğretmen adaylarının konu alan bilgilerinin hataya yaklaşımları açısından incelenmesi. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 2, 27-32.

- Krauss, S., Baumert, J., & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: Validation of the COACTIV construct. *ZDM Mathematics Education*, 40, 873-892.
- Kuhn, T. S. (1970). Logic of discovery or psychology of research. In I. Lakatos & A. Musgrave. *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- Kuş, E. (2009). *Nicel-nitel araştırma teknikleri: sosyal bilimlerde araştırma teknikleri nicel mi? nitel mi?* (3. Baskı). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Kutluk, B. (2011). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin örüntü kavramına ilişkin öğrenci güçlükleri bilgilerinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 313076)
- Kuzgun, Y. (1991). *Öğrencilerin öğretmenlerden bekledikleri ve gözledikleri davranışlar*. Eğitimde Arayışlar I. Sempozyumu, Kültür Koleji Genel Müdürlüğü, 1-4 Ekim, İstanbul, Türkiye.
- Küçükahmet, L. (1976). *Öğretmen yetiştiren öğretmenlerin tutumları*. Ankara: Ankara Üniversitesi Eğitim Fakültesi Yayınları.
- Leach, J., & Scott, P. (2003). Individual and sociocultural views of learning in science education. *Science and Education*, 12, 91-113.
- Lederman, N. G., & Gess-Newsome, J. (1992). Do subject matter knowledge, pedagogical knowledge and pedagogical content knowledge constitute the ideal gaslaw of science teaching?. *Journal of Science Teacher Education*, 3(1), 16-20.
- Lee, E., Brown, M., Luft, J. A., & Roehrig, G. (2007). Assessing beginning secondary science teachers' PCK: Pilot year results. *School Science and Mathematics*, 107(2), 418-426.
- Lee, E., & Luft, J. A. (2008). Experienced secondary science teachers' representation of pedagogical content knowledge. *International Journal of Science Education*, 30(10), 1343-1363.
- Leedy, P. D., & Ormrod, J. E. (2001). *Practical research: planning and design*. (7th Edition). New Jersey: Upper Saddle River.
- Leinhardt, G., & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 77(3), 247-271.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Lenhart, S. T. (2010). *The effect of teacher pedagogical content knowledge and the instruction of middle school geometry* (Doctoral dissertation). Retrieved from ProQuest Dissertations & Theses Global (UMI No. 3423901)
- Lesniak, K. M. (2003). *From expert learner to novice teacher: Growth in knowledge in learning to teach science* (Doctoral dissertation). Retrieved from <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003PhDT.....68L>
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. California: Sage Publication.
- Lindelöf, E., & Ullrich, E. (1961). *Analize giriş*. (ÇEv: Namık Oğuztörel). Erzurum: Atatürk Üniversitesi Yayınları.
- Lloyd, G. M., & Wilson, M. (1998). Supporting innovation: the impact of a teacher's conception of function on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 248-274.

- Loughran, J. (2013). Pedagogy: making sense of the complex relationship between teaching and learning. *Curriculum Inquiry*, 43(1), 118-141.
- Loughran, J., Berry, A., & Mulhall, P. (2006). *Understanding and developing science teachers' pedagogical content knowledge*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publications.
- Loughran, J., Mulhall, P., & Berry A. (2004). In search of pedagogical content knowledge in science: Developing ways of articulating and documenting professional practice. *Journal of Research in Science Teaching*, 41(4), 370-391.
- Lucus, C. A. (2006). *Is subject matter knowledge affected by experience?: the case of composition of functions*. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 97-104), Prague, Czechia.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Maat, S. M., Zakaria, E., & Yusof, Y. M. (2011). Exploring mathematics teachers' pedagogical content knowledge of calculus in a technical institute. *International Journal of Learning*, 18(1), 25-34.
- Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In J. Gess-Newsome & N.G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 95-132). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Maharaj, A. (2013). An analysis of natural science students' understanding of derivatives. *South African Journal of Education*, 33(1), 1-19.
- Makonye, J. P. (2011). *Learner mathematical errors in introductory differential calculus tasks: a study of misconceptions in the senior school certificate examinations* (Doctoral dissertation). Retrieved from ujcontent.uj.ac.za
- Mapolelo, D. C., & Akinsola, M. K. (2015). Preparation of mathematics teachers: lessons from review of literature on teachers' knowledge, beliefs, and teacher education. *American Journal of Educational Research*, 3(4), 505-513.
- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: from a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41, 3-11.
- Martin, N. K., Yin, Z., & Mayall, H. (2006, February). *Classroom management training, teaching experience and gender: Do these variables impact teachers' attitudes and beliefs toward classroom management style?*. Paper presented at the Annual Meeting of the Southwest Educational Research Association, Austin, Texas, USA.
- Marvasti, A. B. (2004). *Qualitative research in sociology*. London: Sage Publication.
- Maxwell, J. A. (2006). *Qualitative research design: an interactive approach* (2nd edition). California: Sage Publication.
- McDiarmid, G. W., Ball, D. L., & Anderson, C. (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject specific pedagogy. In M.C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 193-205). Oxford, UK: Pergamon.
- Medley, D. M. (1982) Teacher effectiveness. In H. Mitzel (Ed.), *Encyclopedia of educational research* (5th edn, pp. 1841-51). New York: Free Press.

- Medley, D. M., & Coker, H. (1987) The accuracy of principals judgments of teacher performance. *Journal of Educational Research*, 80(4), 242-247.
- Meredith, A. (1995). Terry's learning: some limitations of Shulman's pedagogical content knowledge. *Cambridge Journal of Education*, 25(2), 175-187.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Metaxas, N. (2007). *Difficulties on understanding the indefinite integral*. In Woo, J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park & D.Y. Seo (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 265-272), Seoul, South Korea: PME.
- Miles, M. B., & Huberman, M. A. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis*. London: Sage Publication.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaöğretim matematik dersi 9-12. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *International Journal of Science Education*, 108(6), 1017-1054.
- Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given with a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes (pp. 175-193). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Monk, G., & Nemirovsky, R. (1995). The case of dan: construction of a functional situation through visual attributes. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education-I* (pp. 139-168). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Morgan, A. T. (1990). A study of the difficulties experienced with mathematics by engineering students in higher education. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 21(6), 957-988.
- Moru, E. K., Qhobela, M., Poka, W., & Nchejane, J. (2014). Teacher knowledge of error analysis in differential calculus. *Pythagoras*, 35(2), 1-10.
- Mouton, J., & Marais, H. C. (1990). *Basic concepts in the methodology of the social sciences*. (K.F. Mauer, Çev.) Pretoria, South Africa: Human Sciences Research Council Publishers.
- Muflihın, M. (2015). *Pre-service mathematics teachers' pedagogical content knowledge in algebra* (Master thesis). Marmara University, Graduate School of Educational Sciences, İstanbul, Turkey.
- Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., & Ekincioğlu, İ. (2007). *Teori ve çözümlü problemlerle analiz 1*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1491-1515.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). *Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative*. Cambridge, MA: TERC Communications.
- Neuman, W. L. (2003). *Social research methods: qualitative and quantitative approaches* (5th edition). Boston: Allyn and Bacon.
- Neuman, W. L. (2012). *Toplumsal araştırma yöntemleri: nicel ve nitel yaklaşımlar III. cilt* (5. Basım). İstanbul: Yayın Odası.
- Niemi, D. (1996). Assessing conceptual understanding in mathematics. *Journal of Educational Research*, 89(6), 351-363.
- Niemi, H. (2002). Active learning-a cultural change needed in teacher education and schools. *Teaching and Teacher Education*, 18(8), 763-780.
- Nuangchaler, P. (2011). In-service science teachers' pedagogical content knowledge. *Studies in Sociology of Science*, 2(2), 33-37.
- Oktay, A. (1991). Öğretmenlik mesleği ve öğretmenin nitelikleri. *Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 3, 187-193.
- Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. (Unpublished doctoral dissertation). University of Leeds, Leeds, England.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 235-250.
- Osborne, J., & Simon, S. (1996). Primary science: past and future directions. *Studies in Science Education*, 26, 99-147.
- Özkan, R. (2005, Bahar). Birey ve toplum gelişiminde öğretmenlik mesleğinin önemi. *Milli Eğitim Dergisi*, 33(166).
- Özkan, E. M., & Ünal, H. (2009). Misconception in calculus-I: engineering students' misconceptions in the process of finding domain of functions. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 1(1), 1792-1796.
- Özkaya, M. (2015). *Hata temelli aktivitelerin matematik öğretmenlerinin mesleki gelişimlerine etkisinin incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 418259)
- Özmantar, M. F., & Bingölbali, E. (2009). Sınıf öğretmenleri ve matematiksel zorlukları. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 8(2), 401-427.
- Özturan-Sağırlı, M., Baş, F., Çetin, Ö.F., Çakmak, Z., Bekdemir, M., Okur, M., & Dane, A. (2016). Türevin sembolik ve sözel temsillerinin kullanılabilirlik düzeyine ilişkin bir inceleme. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 5(1), 1-18.
- Padilla, K., Ponce de Leon, A. M., Rembado F. M., & Garritz, A. (2008). Undergraduate professors' pedagogical content knowledge: The case of 'amount of substance'. *International Journal of Science Education*, 30(10), 1389-1404.
- Parameswaran, R. (2007). On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 193-216.

- Park, J. (2011) *Calculus instructors' and students' discourses on the derivative* (Doctoral dissertation). Retrieved from <http://www.dbpia.co.kr/Journal/ArticleDetail/NODE01601032>
- Park, J. (2012). Students' understanding of the derivative: literature review of english and korean publications. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 15(2), 331-348.
- Park, J. (2013). Is the derivative a function?: if so, how do students talk about it?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44, 624-640.
- Park, J. (2015). Is the derivative a function?: if so, how do we teach it?. *Educational Studies in Mathematics*, 89(1), 1-16.
- Park, S., & Oliver, J. S. (2008a). Revisiting the conceptualisation of pedagogical content knowledge (pck): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38, 261-284.
- Park, S., & Oliver, J. S. (2008b). National board certification (NBC) as a catalyst for teachers' learning about teaching: The effects of the NBC process on candidate teachers' PCK development. *Journal of Research in Science Teaching*, 45, 812-834.
- Patel, R. M. (2013). *A mixed methods analysis of students' understanding of slope and derivative concepts and students' mathematical dispositions* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://eric.ed.gov/?id=ED565980>
- Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Beverly Hills, CA: Sage Publications.
- Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. Beverly Hills, CA: Sage Publications.
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (M. Bütün & S.B. Demir, Çev.). Ankara: Pegem Akademi.
- Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualizing teachers' mathematical knowledge in teaching. In Rowland T. & Ruthven K. (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 9-25). London: Springer.
- Pirasa, N. (2009). *Sınıf öğretmeni adaylarının matematik öğretimiyle ilgili bilgilerinin değişim sürecinin incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 244530)
- Pinkza, M.K. (1999) *The relation between college calculus students' understanding of function and their understanding of derivative* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://elibrary.ru/item.asp?id=5474662>
- Pino-Fan, L. (2010). *Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada* [Epistemic facet of the didactic-mathematics knowledge on the derivative]. (Tesis de Maestría-Unpublished master thesis). Universidad de Granada, Granada, España.
- Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* [Evaluation of epistemic facet of the didactic-mathematics knowledge of future teachers of bachillerato about the derivative]. (Tesis Doctoral-Unpublished doctoral dissertation). Universidad de Granada, Granada, España.

- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato [Epistemic suitability of the derivative meaning in the high school curriculum]. *Paradigma*, 34(2), 123-150.
- Pino-Fan, L., & Font, V. (2015). *A methodology for the design of questionnaires to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers*. In K. Beswick, T. Muir & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 25-32). Hobart, Australia.
- Pino-Fan, L., Font, V., & Godino, J. D. (2013). *Exploring the epistemic facet of the didactic-mathematical knowledge required to teach the derivative*. In A.M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 146). Kiel, Germany.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada [Epistemic facet of the didactic-mathematics knowledge about the derivative]. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2014). *Explorando aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial [Exploring relevant aspects of prospective teachers' didactic-mathematical knowledge on the derivative]*. In M. T. González, M. Codes, D. Arnau & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 513-522). Salamanca: SEIEM.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas [A proposal for the analysis of prospective teachers' mathematical practices on derivatives]. *Bolema*, 29(51), 60-89.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-32.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F (2012). *Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivative*. In T.Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 297-304). Taipei, Taiwan.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F (2013). *Prospective teacher's specialized content knowledge on derivative*. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3195 – 3205). Antalya, Turkey.
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 225-263). New York: Routledge.
- Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Potari, D., Zachariades, T., Christou, C., Kyriazis, G., & Pitta-Pantazi D. (2006). *Teachers' mathematical and pedagogical awareness in calculus teaching*. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Saiz & A. Mendez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 846-848). Merida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

- Punch, K. F. (2005). *Sosyal araştırmalara giriş-nitel ve nitel yaklaşımlar* (D. Bayrak, H.B. Arslan & Z. Akyüz, Çev.). Ankara: Siyasal Kitabevi.
- Pustejovsky S. F. (1999) *Beginning calculus students' understanding of the derivative: three case of studies* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://epublications.marquette.edu/dissertations/AAI9953496/>
- Roorda, G., Vos, P., & Goedhart, M.J. (2009). *Derivatives and applications, development of one student's understanding*. In R. Leikin & J. Mamona-Downs (Eds.), *Proceedings of the Working Group on Advanced Mathematical Thinking at the 6th Conference on European Research in Mathematics Education* (pp. 2296-2305). Lyon, France: University of Lyon.
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2004). *Reflecting on prospective elementary teachers' mathematics content knowledge: the case of Laura*. In M.J. Høines & A.B. Fugelstad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121-128). Bergen University College, Bergen, Norway.
- Rowland, D. R., & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretation of the terms in first-order ordinary differential equations in modeling contexts. *International Journal of Matheamtical Education in Science and Technology*, 35(4), 505-516.
- Rowland, T., & Ruthven, K. (2011). Mathematical knowledge in teaching, In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematics education library 50* (pp. 1-5). London: Springer.
- Rubin, A., & Babbie, E. (2008). *Research methods for social work* (6th ed.). Belmont, CA: Thomson Learning Inc.
- Sağlam, Y., & Bülbül, A. (2012). Üniversite öğrencilerinin görsel ve analitik stratejileri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 43, 398–409.
- San, N. (1975). *Analiz dersleri*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Yayınları.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13, 1305-1329.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada [The development of derivative schema]. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática [The understanding of derivative as an research topic in mathematics education]. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11, 267-296.
- Sanders, W. L. (2000). Value-added assessment from student achievement data: Opportunities and hurdles. *Journal of Personnel Evaluation in Education*, 14(4), 329-339.
- Sanders, S., & Morris, H. (2000). Exposing student teachers' content knowledge: Empowerment or debilitation?. *Educational Sciences*, 26(4), 397-408.
- Sanders, W. L., & Rivers, J. C. (1996). *Cumulative and residual effects of teachers on future student academic achievement*. Knoxville, TN: University of Tennessee Value-Added Research and Assessment Center.
- Santos, A. G. D., & Thomas, M. O. J. (2001). *Representational fluency and symbolisation of derivative*. *Proceedings of the Sixth Asian Technology Conference in Mathematics*, (pp. 282–291). Melbourne, Australia.

- Santos, A. G. D., & Thomas, M. O. J. (2003). *Representational ability and understanding of derivative*. In N.A. Pateman, J.B. Dougherty & J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (pp. 325-332), University of Hawaii, Honolulu, USA.
- Sarkim, T. (2004). Investigating secondary school physics teachers' pedagogical content knowledge: A case study. *Post-Script*, 5(1), 82-96.
- Schempp, P., Manrooss, D., & Tan, S. (1998). Subject expertise and teachers' knowledge. *Journal of Teaching in Physical Education*, 17, 1- 15.
- Seferoğlu, S. S. (2004). Öğretmen adaylarının öğretmen yeterlilikleri açısından kendilerini değerlendirmeleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 26, 131-140.
- Selden, J., Mason, A., & Selden, A. (1989). Can average calculus students solve nonroutine problems?. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 45-50.
- Selden, J., Mason, A., & Selden, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and results* (pp. 19-26). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Selden, J., Selden, A. Hauk, S., & Mason, A. (2000). Why can't calculus students access their knowledge to solve nonroutine problems? *CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, 128-153.
- Sevimli, E. (2016). Diferansiyel denklemlerin öğreniminde yaşanan zorluklar ve alternatif öğretim yaklaşımları. *Sakarya Üniversitesi Journal of Education*, 6(2), 154-171.
- Sezer, E. (2012). *Matematik öğretimi dersi kapsamında kullanılan yazma etkinliklerinin sınıf öğretmeni adaylarının kesirler konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerine etkisinin incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 314968)
- Sezer, M., & Daşcıoğlu, A. (2010). *Diferansiyel denklemler I*. Bursa: Dora Yayınları.
- Shabanifar, S. (2014). *Matematik öğretmenlerinin köklü sayılar konusundaki pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları bağlamında incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 356829)
- Shulman, L. S. (1986a). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillian Publishing Company.
- Shulman, L. S. (1986b). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundation of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-21.
- Shulman, L. S. (2004). *The wisdom of practice: essays on teaching, learning, and learning to teach*. In S. Wilson (Ed.) San Francisco: Jossey-Bass, Inc.
- Silverman, J. (2005). *An investigation of content knowledge for teaching: Understanding its development and its influence on pedagogy* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://etd.library.vanderbilt.edu/ETD-db/available/etd-06272005-212328/>
- Siyepu, S. W. (2013). An exploration of students' errors in derivatives in a university of technology. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 577-592.
- Siyepu, S. W. (2013). *Students' interpretations in learning derivatives in a university mathematics classroom*. In Z. Davis & S. Jaffer (Eds.), *Proceedings of the 19th*

- Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (pp. 183-193). Cape Town: AMESA.
- Smith, D. C., & Neale, D. C. (1989). The construction of subject matter knowledge in primary science teaching. *Teaching and Teacher Education*, 5, 1-20.
- Sönmez, V. (1990). *Sevgi eğitimi*. Ankara: Adım Yayınları.
- Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important?*. Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K., & Bana, J. (2001). Pre-service teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 205-225.
- Staley, K. N. (2004). *Tracing the development of understanding rate of change: A case study of changes in a pre-service teacher's pedagogical content knowledge* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://repository.lib.ncsu.edu/handle/1840.16/3872>
- Stein, M. K., Baxter, J. A., & Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: a case from functions and graphing. *American Educational Research Journal*, 27(4), 639-663.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press (Simon & Schuster Inc.).
- Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd Edition). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Stroup, W. (2002). Understanding qualitative calculus: a structural synthesis of learning research. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 167-215.
- Stump, S. L. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 207-227.
- Suh, Y. (2005). *Pedagogical content knowledge development in teaching science: A case study of elementary school teacher in an urban classroom* (Doctoral dissertation). Retrieved from <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005PhDT.....120S>
- Swanagan, B. S. (2008). *The impact of students' understanding of derivatives on their performance while solving optimization problems* (Doctoral dissertation). Retrieved from https://getd.libs.uga.edu/pdfs/swanagan_brian_s_201205_phd.pdf
- Şahin, Ö. (2016). *İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının cebir konusundaki pedagojik alan bilgilerinin gelişiminin incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 429614)
- Şahin, Ö., Gökkurt, B., Başbüyük, K., Erdem, E., Nergiz, T., & Soylu, Y. (2013). Matematik ve sınıf öğretmenleri adaylarının pedagojik alan bilgilerinin karşılaştırılması. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 6(4), 693-713.
- Şara, P., & Kocabaş, A. (2012). Sınıf öğretmenleri adaylarının sınıf öğretmenliğini tercih nedenleri ve aldıkları eğitimle ilgili görüşleri. *Turkish International Journal of Special Education and Guidance & Counselling*, 1(2), 8-17.
- Şimşek, N. (2011). *Matematik öğretmen adaylarının çevre ve alan konularına ilişkin alan eğitimi bilgilerinin öğrenci zorlukları bağlamında incelenmesi* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 290556)

- Tall, D. (1992). Current difficulties in the teaching of mathematical analysis at university: an essay review of Victor Bryant yet another introduction to analysis. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 92(2), 37-42.
- Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. *Paper presented at the Proceedings of Working Group 3, ICME-7*, (pp. 13-28). Quebec, Canada.
- Tall, D. (1997) Functions and calculus. In A.J. Bishop et al (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer.
- Tall, D. (2010). *A sensible approach to the calculus*. Plenary at the National and International Meeting on the Teaching of Calculus. 23-25th September, Puebla, Mexico.
- Tall, D. (2012). *Making sense of mathematical reasoning and proof*. Plenary at Mathematics and Mathematics Education: Searching for Common Ground: A Symposium in Honor of Ted Eisenberg. April 29-May 3, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tamir, P. (1988). Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 4(2), 99-110.
- Tanişlı, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının pedagojik alan bilgisi bağlamında sorgulama becerileri ve öğrenci bilgileri. *Eğitim ve Bilim*, 38(169), 80-95.
- Tanişlı, D., & Köse, N. Y. (2013). Pre-service mathematic teachers' knowledge of students about the algebraic concepts. *Australian Journal of Teacher Education*, 38(2), 1-18.
- Tavşancıl, E., & Aslan, E. (2001). *İçerik analizi ve uygulama örnekleri*. İstanbul: Epsilon Yayıncılık.
- Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 141-164.
- Teuscher, D., & Reys, R. E. (2012). Rate of change: AP calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics*, 112, 359-376.
- Thiriat, W. G., Pino-Fan, L., Larios, V., & Font, V. (2016). *Cognitive configuration solving antiderivatives*. In C. Csíkos, A. Rausch & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 166), Szeged, Hungary.
- Thomas G. B., Weir M. D., & Hass J. (2011). *Thomas kalkülüs* (12.Baskı). (Çev: Mustafa Bayram). Boston: Pearson Education.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. (2005). *Thomas' calculus* (11th Edition). Boston, Addison-Wedsey: Pearson Education.
- Thompson, P.W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1, 21-44.
- Tichá, M., & Hošpesová, A. (2010). *Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training*. Paper presented at the CERME 6, (pp. 1941-1950), January 28th-February 1st, Lyon, France.
- Tin Lam, T. (2009). On in-service mathematics teachers' content knowledge of calculus and related concepts. *The Mathematics Educator*, 12(1), 69-86.

- Tiresh, D. (1993). Comocomprendenlos profesoreslasexpresiones matematica indefinidas [Teachers understanding of undefined mathematical expressions]. *Substratum Temas Fundamentales en Psicologia Education*, 1, 61-86.
- Tiresh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 51-64.
- Tosun, M. (2010). Türev. In M.K. Sağıl & M. Aktaş (Ed.). *Genel matematik 1* (s. 185-222). Ankara: Pegem Akademi.
- Tsamir, P. (2007). When intuition beats logic: prospective teachers' awareness of their same sides-same angles solutions. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 255-279.
- Tuan, H. L. (1996). *Investigating the nature and development of preservice chemistry teachers' content knowledge, pedagogical knowledge, pedagogical content knowledge*. Proceeding of the National Science Council Part D: Mathematics, Science and Technology education, (pp. 101-112).
- Tuan, H. L., Chang, H. P., Wang, K. H., & Treagust, D. F. (2000). The development of an instrument for assesing students' perceptions of teachers' knowledge. *International Journal of Science Education*, 22(4), 385-398.
- Tükenmez, S. (2014). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin farklı hizmet sürelerine sahip olma durumlarına göre pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 372289)
- Türkdoğan, A. (2011). *Yanlışın anatomisi: ilköğretim matematik sınıflarında karşılaşılan yanlışlara ve yanlışlara verilen dönütlerin analitik incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 300390)
- Türnüklü, E. (2005). Matematik öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgileri ile matematiksel alan bilgileri arasındaki ilişki. *Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 5(21), 234-247.
- Twycross, A., & Shields, L. (2005). Validity and reliability-what's it all about?: part 3 issues relating to qualitative studies. *Pediatric Nursing*, 17, 36.
- Tyne, J.G. (2016). *Calculus students' reasoning about slope and derivative as rates of change* (Master thesis). Retrieved from <https://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/2510/>
- Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20(1), 113-137.
- Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(5), 609-637.
- Uşak, M. (2005). *Fen bilgisi öğretmen adaylarının çiçekli bitkiler konusundaki pedagojik alan bilgileri* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 206154)
- Üner, S. (2016). *Kimya öğretmenlerinin pedagojik alan bilgisinin konuya özgü doğasının incelenmesi ve öğrencilerin öğretmenlerinin pedagojik alan bilgisine ilişkin algıları* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir (Tez No. 450190)
- Ünlü, A. A., & Er, H. (2013). *Ortaöğretim matematik 12*. Ankara: Nova Yayıncılık.

- Van Der Valk, T. A. E., & Broekman, H. H. G. B. (1999). The lesson preparation method: a way of investigating pre-service teachers' pedagogical content knowledge. *European Journal of Teacher Education*, 22(1), 11-22.
- Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 319-351.
- Van Driel, J. H., Verloop, N., & de Vos, W. (1998). Developing science teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, 35(6), 673-695.
- Veal, W. R., Tippins, D. J., & Bell, J. (1998). *The evolution of pedagogical content knowledge in prospective secondary physics teachers*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching, San Diego CA, USA.
- Vermette, S. (2016). Teachers' professional knowledge: the case of variability. *International Journal of Learning, Teaching & Educational Research*, 15(6), 48-60.
- Vermette, S., & Gattuso, L. (2014). High school teachers' pedagogical content knowledge of variability. In K. Makar, B. de Sousa & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education*. Voorburg, the Netherlands: International Statistical Institute.
- Viholainen, A. (2006). *Why is a discontinuous function differentiable?*. Paper presented at the 30th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, (pp. 329-336). Prague, Czechia.
- Viholainen, A. (2008). *Prospective mathematics teachers' informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability* (Doctoral dissertation). Retrieved from <https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/21443/rep115.pdf?sequence=1>
- Viveros, K., & Sacristan, A. (2002). *College students' conceptual links between the continuity and the differentiability of a function*. Paper Presented at the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (24th Athens, Georgia, October 26-29). (pp. 350-360), 1-4.
- Wallace, C. S., & Kang, N. H. (2004). An investigation of experienced secondary science teachers beliefs about inquiry: an examination of competing belief sets. *Journal of Research in Science Teaching*, 41, 936-960.
- Weber, E., Tallman, M., Byerley, C., & Thompson, P. W. (2012). Introducing derivative via the calculus triangle. *Mathematics Teacher*, 104(4), 274-278.
- White, P., & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 79-95.
- Willcox, K., & Bounova, G. (2004). *Mathematics in engineering: identifying, enhancing and linking the implicit mathematics curriculum*. Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education Annual Conference and Exposition. Salt Lake City, Utah, USA.
- Williams, J., & Ryan, J. (2000). National testing and the improvement of classroom teaching: can they coexist?. *British Educational Research Journal*, 26(1), 49-73.
- Wood, E., & Geddis, A. N. (1997). Transforming subject matter and managing dilemmas: a case study in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 13(6), 611-626.
- Wright, S. P., Horn, S. P., & Sanders, W. L. (1997). Teacher and classroom context effects on student achievement: Implications for teacher evaluation. *Journal of Personnel Evaluation in Education*, 11, 57-67.

- Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2010). Matematik öğretmen adaylarının sayı örüntülerine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin konuya özel stratejiler bağlamında incelenmesi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 29(1), 125-149.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (6.Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, İ., & Vural, Ö. F. (2014). Türkiye’de öğretmen yetiştirme ve pedagojik formasyon sorunu. *Journal of Teacher Education and Educators*, 3(1), 73-90.
- Yıldız, H. (2017). *Matematik öğretmenlerinin geometri alanına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin gelişiminin incelenmesi* (Doktora tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi’nden edinilmiştir (Tez No. 472014)
- Yıldız, N. (2006). *Matematik eğitiminde türev öğrenimi ve öğretimi ile ilgili sorulmuş bazı etkin sorular ve cevapları hakkında öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri üzerine bir fenomenografik çalışma* (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi’nden edinilmiştir (Tez No. 191052)
- Yıldız, Z., & Özdemir, A. Ş. (2015). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının problem kurma becerilerinin analizi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 7(2), 130-141.
- Yılmaz, D., & Güler, N. F. (2006). Kaotik zaman serisinin analizi üzerine bir araştırma. *Gazi Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 21(4), 759-779.
- Yılmaz, N. P. (2016). ICT student teachers’ pedagogical content knowledge: a case study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(1), 133-152.
- Yin, R. K. (1994). *Case study research: design and methods* (2nd Edition). Beverly Hills, CA: Sage Publication.
- Yusof, Y. M., & Zakaria, E. (2010). Investigating secondary mathematics teachers’ pedagogical content knowledge: a case study. *Journal of Education and Sociology*, 32-39.
- Zandieh, M. J. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative*. (Unpublished doctoral dissertation). Oregon State University, Corvallis, USA.
- Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education: IV. Issues in mathematics education* (pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Zandieh, M.J., & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: the concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 1-17.
- Zazkis, R., & Leiken, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 131-148.
- Zemal-Saul, C., Star, M., & Krajcik, J. (1999). Constructing a framework for elementary science teaching using pedagogical content knowledge. In J. Gess-Newsome & N.G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge*, London: Kluwer Academics Publishers.
- Zhang, B. (2003). Using student-centered teaching strategies in calculus. *The China Papers*, 2, 100-103.

EKLER

EK-1. ÖĞRETMEN GÖRÜŞME FORMU

Görüşme Tarihi:

Başlama Zamanı:

Bitiş Zamanı:

Merhaba değerli hocam, benim adım Murat DURAN. Erzurum Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda doktora öğrencisiyim. Öncelikle bu görüşmeyi kabul ettiğiniz için çok teşekkür ederim. Bu görüşmede amacım lise matematik öğretmenlerinin “Türev ve Uygulamaları” konusuna yönelik pedagojik alan bilgilerini ortaya çıkarmaktır. Bu görüşmede ortaya çıkan sonuçların, öğretmenlerin Türev ve Uygulamaları konusuna ilişkin sahip oldukları pedagojik alan bilgilerini inceleyerek, öğretim sürecinin verimli hale getirilmesi, nitelikli öğretmen yetiştirilmesi için, öğretmen yetiştiren eğitim kurumlarında matematik dersi öğretim programını geliştirme ve değerlendirme çalışmalarına katkı sağlayacağını düşünüyorum. Görüşme sürecinde vereceğiniz bilgilerin tamamı gizli kalacaktır ve araştırma raporumu yazarken kesinlikle isimlerinizi ve çalıştığınız kurumu yansıtmayacağım. Görüşmeyi izin vererseniz ses kaydına almak istiyorum. Katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Murat DURAN
Doktora Öğrencisi

EK-2. DEMOGRAFİK BİLGİ FORMU

Kişisel Bilgiler	
Cinsiyetiniz	☐ Bay ☐ Bayan
Hizmet süreniz	yıldır çalışmaktayım
Mezun olduğunuz bölüm	
Lisansüstü eğitim aldınız mı?	☐ Evet: Yüksek Lisans (Alanınızı yazınız): Doktora : (Alanınızı yazınız): ☐ Hayır
Kaçıncı sınıfı/sınıfları okutuyorsunuz?	☐ 9. sınıf ☐ 10. Sınıf ☐ 11. Sınıf ☐ 12. Sınıf
Matematik öğretme bilginize katkı sağlayacak herhangi bir hizmet içi kursa/vb. seminere katıldınız mı?	☐ Katıldım (Hizmet içi kurs veya seminerin konusunu yazınız): ☐ Katılmadım
Türev ve uygulamaları konusunu öğretmeye yönelik lisans eğitiminiz sırasında hangi alan derslerini aldınız? Sizce bu dersler türev konusunu öğretmek için yeterli midir?	☐ Evet : ☐ Hayır (Nedenini yazınız):
Türev ve uygulamaları konusunun öğretimi için kendinizi yeterli buluyor musunuz?	☐ Evet (Türev ve uygulamalarının öğretimini yaparken hangi bölümde kendinizi yeterli bulduğunuzu belirtiniz): ☐ Hayır (Türev ve uygulamalarının öğretiminde kendinizi yeterli bulmadığınızı gerekçeyle birlikte yazınız):
Türev ve uygulamaları konusunu daha önce anlattınız mı?	☐ Evet (Yaklaşık olarak kaç kez anlattığınızı yazınız): ☐ Hayır :
İlkokul, ortaokul, ortaöğretim ve lisans döneminde matematik derslerindeki başarınız genel olarak nasıldı?	<u>İlkokul</u> ☐ çok iyi ☐ iyi ☐ orta ☐ kötü ☐ çok kötü <u>Ortaokul</u> ☐ çok iyi ☐ iyi ☐ orta ☐ kötü ☐ çok kötü <u>Ortaöğretim</u> ☐ çok iyi ☐ iyi ☐ orta ☐ kötü ☐ çok kötü <u>Lisans</u> ☐ çok iyi ☐ iyi ☐ orta ☐ kötü ☐ çok kötü

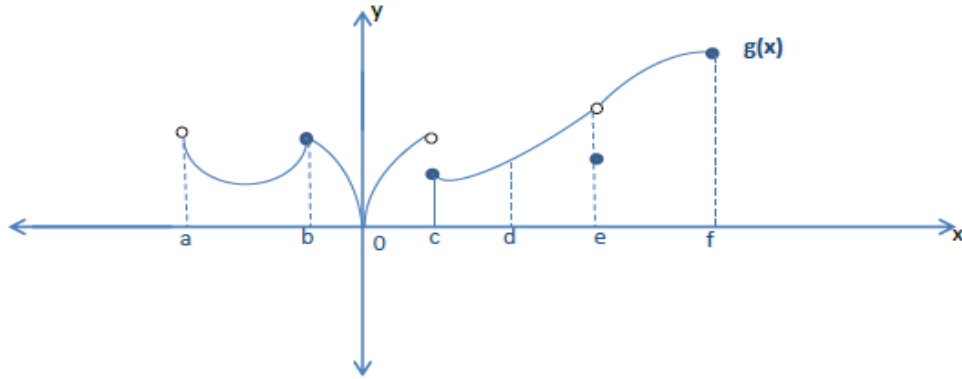
EK-3. KONU ALANI BİLGİSİ MÜLAKAT FORMU

Aşağıdaki soruları dikkatlice okuyup soruların altında bırakılan boşluklara cevaplandırınız.

a) Türev kavramı hakkında bilgi verebilir misiniz?

b) Türev kavramı ile süreklilik kavramı arasında herhangi bir ilişki var mıdır? Aralarında bir ilişki varsa bu ilişkiyi matematiksel olarak nasıl gösterirsiniz? Bu iki kavram arasında ilişki yoksa neden yoktur?

c) $g: (a, f] \rightarrow \mathbb{R}$ veriliyor. Buna göre aşağıda gösterilen $g(x)$ fonksiyonunun a, b, c, d, e ve f noktalarında türevinin varlığını araştırınız. Bu noktalardaki türevlerin neden olduğunu/olmadığını açıklayınız.



d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f(x) = |x - a|$ fonksiyonunun $x=a$ ($a \in \mathbb{R}$) noktasındaki sürekliliğini ve türevlenebilirliğini inceleyiniz. Türevlenebiliyor/türevlenemiyor ise sebebini açıklayınız?

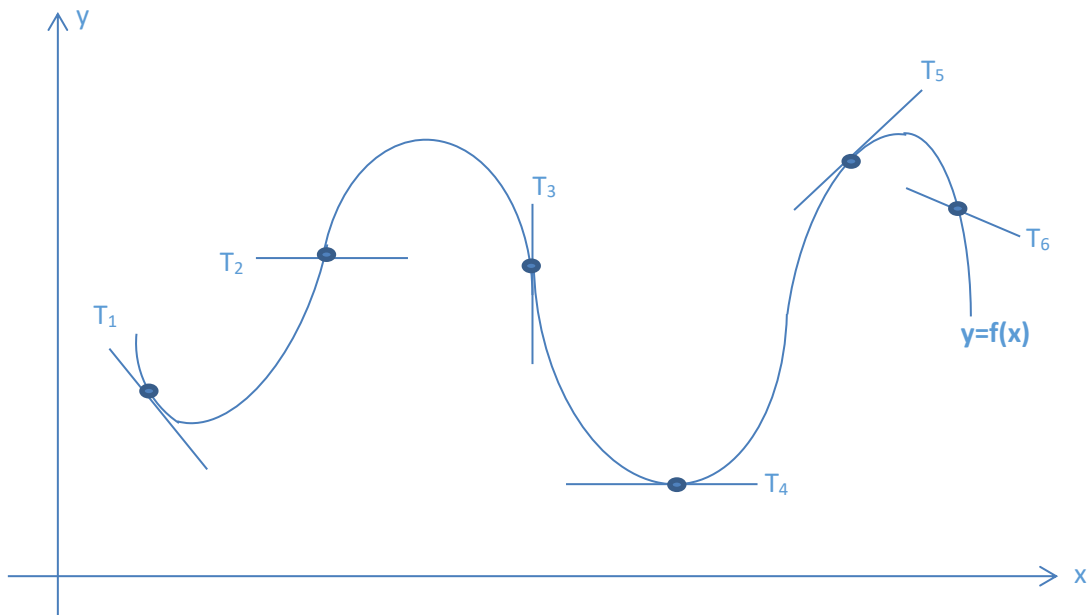
e) $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. $x=c \in (a, b)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu “c” noktasında türevli ise “ $-f^2(x)$ ” fonksiyonu da aynı noktada türevli midir? Türevliyse ya da türevli değilse sebebini açıklayınız.

f) Kapalı fonksiyonların türevi hakkında bilgi verebilir misiniz? Kapalı fonksiyonun türevine yönelik bir soru hazırlayınız ve soruyu çözünüz.

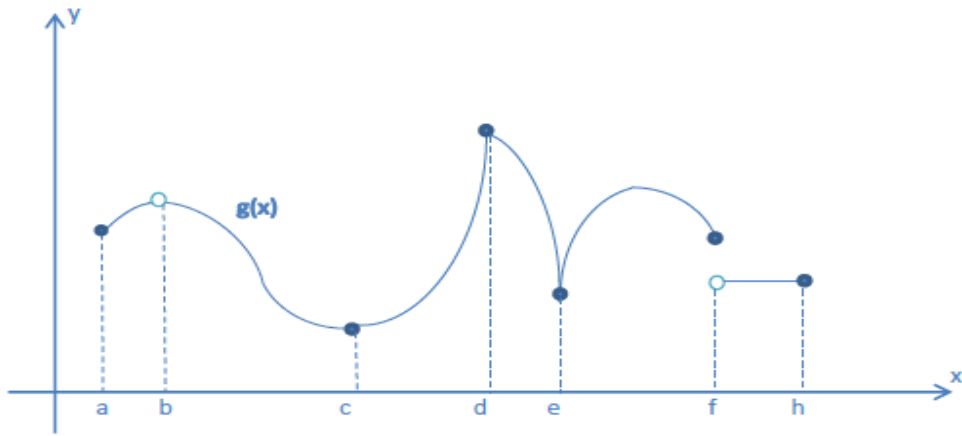
g) Türevi geometrik olarak izah edebilir misiniz? Türevin geometrik gösterimini yapınız.

h) Teğet kavramı hakkında bilgi verebilir misiniz?

i) $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre aşağıdaki grafikte çizilen doğrulardan hangisi/hangileri $y=f(x)$ eğrisine o noktada teğettir? Nedenini açıklayınız?



- j) $g: [a,h] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıda grafiği çizilen $g(x)$ fonksiyonunun $[a,h]$ aralığında belirtilen noktaların hangisinde/hangilerinde fonksiyona tek bir teğet çizilir? Çizilebilenler üzerinde teğetleri çizip bu teğetlerin eğimleri hakkında ne söyleyebilirsiniz?

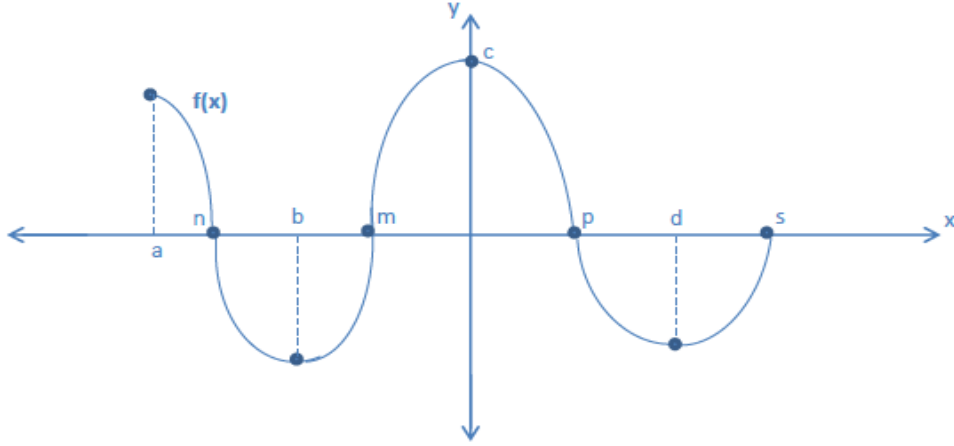


- k) Artan ve azalan fonksiyonlar hakkında bilgi verebilir misiniz?

- l) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonu belirli bir aralıktaki her noktada artarsa bu fonksiyonun birinci türevi aynı aralıkta daima pozitif midir? Pozitifse ya da değilse sebebini belirtiniz. Bu durumun tam tersi doğru mudur?

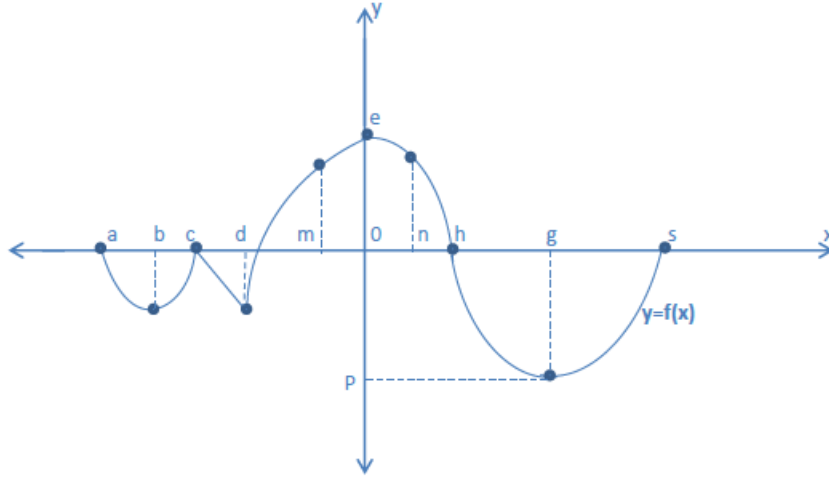
- m) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında negatif terimli, artan bir fonksiyon olduğuna göre $f^2(x)$, $-f^3(x)$ ve $f(x^4)$ ifadelerinin aynı aralıkta artan mı yoksa azalan mı olduğunu gösteriniz?

- n) $f: [a,s] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun $[a,s]$ aralığındaki görüntüsü aşağıda çizilmiştir. Buna göre fonksiyonun türevinin pozitif, negatif ve sıfır olduğu aralıkları belirleyiniz? Neden aralıklarda bu değerlere sahip olduğunu açıklayınız?



- o) Kritik nokta kavramı hakkında bilgi verebilir misiniz?
- p) Extremum, yerel maksimum, yerel minimum, mutlak maksimum ve mutlak minimum kavramları hakkında bilgi verebilir misiniz? Bu kavramları örnek bir şekil üzerinde gösterebilir misiniz?
- q) $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında ekstremumu olduğu noktada fonksiyon türevlenebilir olmak zorunda mıdır? Aynı fonksiyonun birinci türevinin sıfır olduğu nokta aynı zamanda ekstremum noktası olmak zorunda mıdır? Bu iki duruma yönelik örnekler verebilir misiniz?

- r) $f: [a,s] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir. Buna göre bu fonksiyonun $[a,s]$ aralığındaki yerel minimum, yerel maksimum, mutlak minimum ve mutlak maksimum değerlerini yazınız? Yazdığınız değerlerin neden ekstremum değerleri olduklarını açıklayınız?



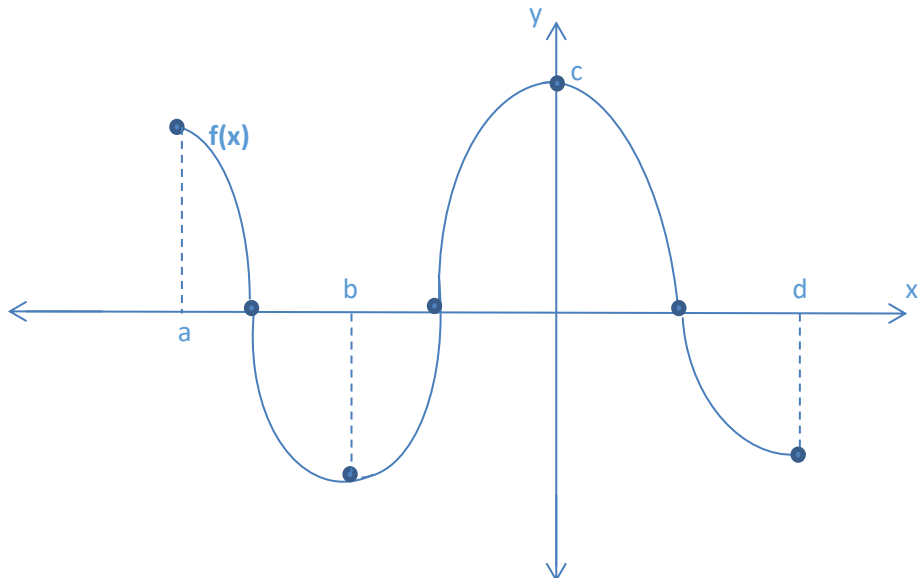
Yerel minimum değerleri:

Yerel maksimum değerleri:

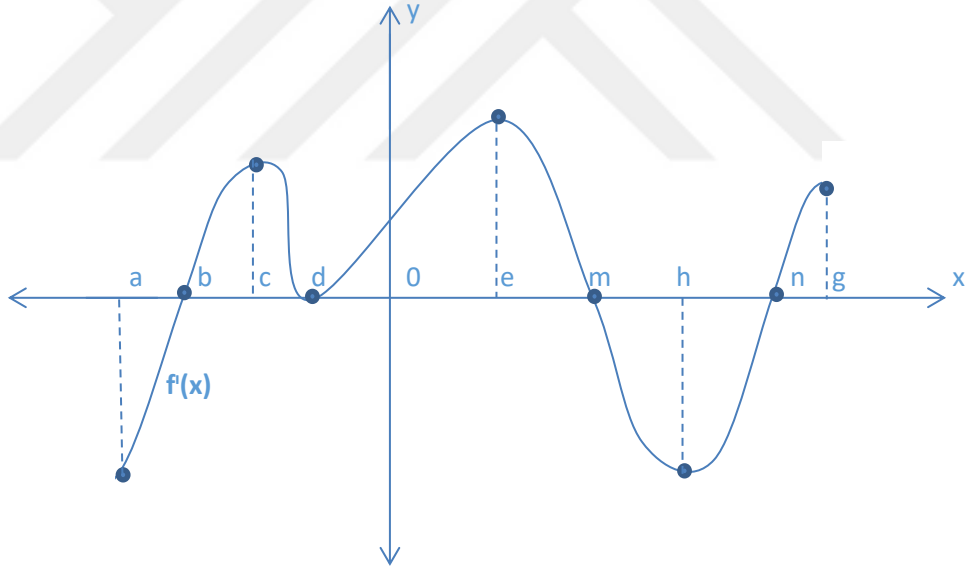
Mutlak minimum değeri:

Mutlak maksimum değeri:

- s) $f: [a,d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre bu grafikteki verilerden yararlanarak $f'(x)$ fonksiyonunun grafiğini alt tarafa nasıl çizersiniz?



- t) $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olarak veriliyor. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun konveksliğini (dış bükey) ve konkavlığını (iç bükey) nasıl tanımlıyorsunuz? Bir fonksiyonun belirli bir aralıkta konveks/konkav olması aynı aralıktaki ekstremum noktalarının belirlenmesine yardımcı olur mu? Bu durumlara örnek gösterebilir misiniz?
- u) $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olarak veriliyor. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun dönüm (büküm) noktasını nasıl tanımlıyorsunuz? Dönüm noktası kavramı ile ikinci türev arasında bir ilişki var mıdır? Varsa açıklayınız.
- v) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ şeklinde verilen bir fonksiyonun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulup dönüm noktasının koordinatını belirleyiniz.
- w) $f: [a, g] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre fonksiyonun artan/azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremum noktalarını, konveks/konkav olduğu aralıkları ve dönüm noktalarını bulunuz.



Artan olduğu aralıklar:

Azalan olduğu aralıklar:

Yerel minimum değerleri:

Yerel maksimum değerleri:

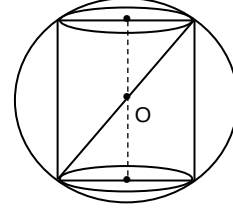
Konveks olduğu aralıklar:

Konkav olduğu aralıklar:

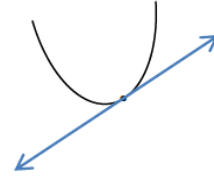
Dönüm noktaları:

x) Bir fonksiyonun maksimum/minimum noktaları ile teğet kavramı sadece matematikte değil günlük hayatın birçok noktasında karşılaştığımız problemlerin çözümünde kullanılır.

- Yanda verilen küre ile silindiri kullanarak bir maksimum problemi oluşturunuz. Türevden yararlanarak problemi çözünüz.



- Yanda verilen parabol ve teğet doğrusunu kullanarak bir eğim problemi oluşturunuz. Türevden yararlanarak problemi çözünüz.



y) Asimptot kavramı hakkında bilgi verebilir misiniz? Yatay ve düşey asimptotları nasıl bulursunuz? Eğik ve eğri asimptotlar hangi durumlarda ortaya çıkar ve nasıl bulunur? Tüm asimptotlara birer örnek verebilir misiniz?

z) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilirken hangi adımlar izlenir?

aa) Türevin günlük hayattaki ve farklı disiplinlerdeki kullanımları hakkında bilgi verebilir misiniz?

bb) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $y = f(x) = \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{x^2 - 4}$ şeklinde verilen fonksiyonun grafiğini çizebilir misiniz?

EK-4. KONU ALANI BİLGİSİ GÖZLEM FORMU

Bu ölçme aracının amacı, lise matematik öğretmenlerinin 12. sınıf öğretim programında yer alan türev ve uygulamaları konusuna ilişkin konu alan bilgilerinin düzeyini belirlemektir.

Gözlem Okulu:

Gözlemin başlama zamanı:.....

Bitiş zamanı:.....

Gözlenen Öğretmen:

Gözlem yapılan sınıf:

Gözlemci:.....

Öğrenci Sayısı:

İşlenen Konu:

Gözlem Tarihi:.....

Alt Bileşen	No	DAVRANIŞLAR	Y	KY	YS	G	Açıklamalar ve Yorumlar
KONU ALAN BİLGİSİ	1	Türev kavramını örneklerle açıklayabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	2	Türevin fiziksel anlamını açıklayabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	3	Bir fonksiyonun bir noktadaki sağdan ve soldan türevlerini bulabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	4	Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği ile türevlenebilirliği arasındaki ilişkiyi açıklayabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	5	Bir fonksiyonun belirli bir aralıkta türevli olmasını ifade edebilecek alan bilgisine sahiptir.					
	6	Türevin tanımını kullanarak bir fonksiyonun türevine ait formüller oluşturabilecek ve uygulamalar yapabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	7	Türevlenebilen iki fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı ve bölümüyle ilgili kuralları oluşturabilecek ve uygulamalar yapabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	8	Türevin geometrik anlamı hakkında bilgi verebilecek alan bilgisine sahiptir.					
	9	Bir fonksiyonun grafiğinin bir noktasındaki teğetin ve normalinin denklemini yazabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	10	Bir fonksiyonun ardışık türevlerini bulabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	11	Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları türevin işaretine göre belirleyebilecek alan bilgisine sahiptir.					
	12	Bir fonksiyonun yerel ekstremum noktalarını açıklayabilecek alan bilgisine sahiptir.					
KONU ALAN BİLGİSİ	13	Bir fonksiyonun ekstremum noktalarını türev yardımıyla belirleyebilecek alan bilgisine sahiptir.					
	14	Maksimum ve minimum problemlerini türev yardımıyla çözebilecek alan bilgisine sahiptir.					
	15	Bir fonksiyonun grafiği üzerinde büyüklük ve dönüm noktası kavramını açıklayabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	16	Asimptot kavramı ve türleri hakkında bilgi verebilecek alan bilgisine sahiptir.					
	17	Fonksiyonların grafiğini türev yardımıyla çizebilecek alan bilgisine sahiptir.					
	18	L'Hospital kuralı yardımıyla fonksiyonların limitlerini hesaplayabilecek alan bilgisine sahiptir.					
	19	Türevin günlük hayattaki ve farklı disiplinlerdeki gösterimleri hakkında bilgi verebilecek alan bilgisine sahiptir.					

20	Türev ve uygulamalarına yönelik kavramsal öğeleri etkili bir şekilde öğrencilere aktarabilecek alan bilgisine sahiptir.					
21	Türev ve uygulamalarına yönelik işlemsel öğeleri etkili bir şekilde öğrencilere aktarabilecek alan bilgisine sahiptir.					
22	Türeve yönelik matematik dilini etkili bir şekilde kullanabilecek alan bilgisine sahiptir.					

Bu değerlendirme formundaki maddelerin karşısında bulunan

kısaltmaların anlamı:

(Y): Yeterli,

(KY): Kısmen yeterli,

(YS): Yetersiz,

(G): Gözlenmedi



EK-5. ÖĞRENCİ VE ÖĞRETİM STRATEJİLERİ BİLGİSİ MÜLAKAT FORMU

Aşağıda verilen öğrenci cevaplarını inceleyiniz ve bu cevaba göre aşağıda verilen yönergeleri yapınız.

1.SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre bu fonksiyonun $x=1$ noktasındaki türevini inceleyiniz.

ÖĞRENCİ CEVABI

$$f(x) = |x^2 - 1| \text{ ise } f(1) = |1^2 - 1| = 0 \text{ bulunur.}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ bulunmalıdır.}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} \text{ yazılır.}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2 \text{ bulunur.}$$

- Bu soruda verilen cevaptan hareketle öğrencinin hata yapıp yapmadığı hakkında ne düşünüyorsunuz?
- Varsa öğrencinin yaptığı hata nedir?
- Öğrencinin bu hatayı yapmasının sebebi/sebepleri neler olabilir?
- Bu soruya öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanabileceğiniz önemli matematiksel kavram ya da ön bilgi nedir?
- Öğrencinin yaptığı bu hatayı düzeltmeye yönelik nasıl bir öğretim gerçekleştirirsiniz?

2.SORU

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $2x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere

$y = f(x) = \sqrt[2x]{x}$ şeklinde verilen $f(x)$ fonksiyonunun birinci türevini bulunuz?

ÖĞRENCİ CEVABI

$$y = \sqrt[2x]{x} \text{ olduğuna göre}$$

$$y' = \left(x^{\frac{1}{2x}} \right)'$$

$$y' = \frac{1}{2x} \cdot x^{\left(\frac{1}{2x} - 1\right)}$$

$$y' = \frac{1}{2x} \cdot x^{\frac{1-2x}{2x}} \text{ bulunur.}$$

- Bu soruda verilen cevaptan hareketle öğrencinin hata yapıp yapmadığı hakkında ne düşünüyorsunuz?
- Varsa öğrencinin yaptığı hata nedir?
- Öğrencinin bu hatayı yapmasının sebebi/sebepleri neler olabilir?
- Bu soruya öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanabileceğiniz önemli matematiksel kavram ya da ön bilgi nedir?
- Öğrencinin yaptığı bu hatayı düzeltmeye yönelik nasıl bir öğretim gerçekleştirirsiniz?

3.SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = f(x) = |x-2|$ fonksiyonunun kırılma noktasının sürekliliğini ve türevliliğini araştırınız.

ÖĞRENCİ CEVABI

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = |x-2| = -x+2 = -2+2 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = |x-2| = x-2 = 2-2 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

$$f(2) = |2-2| = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(2) = f(2) = 0 \text{ olduğundan fonksiyon}$$

$x=2$ noktasında süreklidir. Sürekli olduğundan dolayı türevlidir.

- Bu soruda verilen cevaptan hareketle öğrencinin hata yapıp yapmadığı hakkında ne düşünüyorsunuz?
- Varsa öğrencinin yaptığı hata nedir?
- Öğrencinin bu hatayı yapmasının sebebi/sebepleri neler olabilir?
- Bu soruya öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanabileceğiniz önemli matematiksel kavram ya da ön bilgi nedir?
- Öğrencinin yaptığı bu hatayı düzeltmeye yönelik nasıl bir öğretim gerçekleştirirsiniz?

4.SORU

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3 \text{ ise } y' = ?$$

sorusuna yönelik iki öğrencinin yaptığı işlemler aşağıda gösterilmiştir.

1. ÖĞRENCİ CEVABI

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y}\right)' + \left(\frac{y}{x}\right)' &= 0 \\ \frac{1 \cdot y - y' \cdot x}{y^2} + \frac{y' \cdot x - 1 \cdot y}{x^2} &= 0 \\ \frac{y - y' \cdot x}{y^2} + \frac{y' \cdot x - y}{x^2} &= 0 \\ \frac{x^2 y - x^3 y' + x y^2 y' - y^3}{x^2 y^2} &= 0 \\ x^2 y - y^3 &= x^3 y' - x y^2 y' \\ x^2 y - y^3 &= y' (x^3 - x y^2) \\ y' &= \frac{x^2 y - y^3}{x^3 - x y^2} = \frac{y \cdot (x^2 - y^2)}{x \cdot (x^2 - y^2)} \\ y' &= \frac{y}{x} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

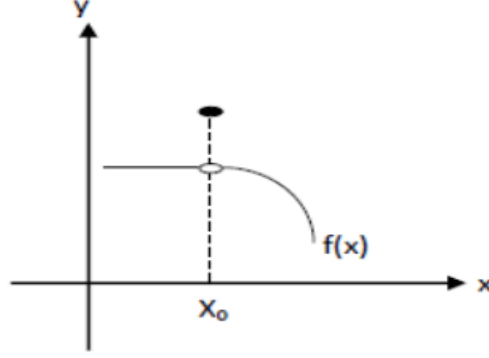
2. ÖĞRENCİ CEVABI

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= 3 \\ (x) \quad (y) \\ \frac{x^2 + y^2}{xy} &= 3 \\ x^2 + y^2 &= 3xy \\ x^2 - 3xy + y^2 &= 0 \\ 2x - 3 \cdot (1 \cdot y + y' \cdot x) + 2yy' &= 0 \\ 2x - 3y - 3xy' + 2yy' &= 0 \\ 2x - 3y &= 3xy' - 2yy' \\ 2x - 3y &= y' (3x - 2y) \\ y' &= \frac{2x - 3y}{3x - 2y} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

- Verilen cevaplardan hareketle öğrencilerin hata yapıp yapmadıkları hakkında ne düşünüyorsunuz?
- Varsa öğrencinin/öğrencilerin yaptığı hata/hatalar nedir?
- Öğrencilerin bu hatayı/hataları yapmasının sebebi/sebepleri neler olabilir?
- Bu soruya öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanabileceğiniz önemli matematiksel kavram ya da ön bilgi nedir?
- Öğrencinin yaptığı bu hatayı/hataları düzeltmeye yönelik nasıl bir öğretim gerçekleştirirsiniz?
- Öğrencilerin hata/hatalar yapmadığını düşünüyorsanız iki öğrenci tarafından farklı işlemsel yollarla bulunan sonuçlar hakkında ne düşünüyorsunuz? İki sonucun da aslında aynı sonuç olduğu söylenebilir mi? Söylenebilirse bu durumun sebebi nedir?

5.SORU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde veriliyor



Buna göre x_0 noktası fonksiyonun bir yerel maksimum noktası mıdır?
Neden?

ÖĞRENCİ CEVABI

x_0 noktası bir yerel maksimum noktası değildir. Çünkü x_0 noktasında fonksiyonun sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit olmadığı için türev yoktur. O nedenle türevli olmaması bu x_0 noktasını yerel maksimum noktası yapmaz. Ayrıca x_0 noktasının solundan sağına ya da sağından soluna doğru artmaktan azalmaya veya azalmaktan artmaya doğru bir hareket olmadığından x_0 noktası bir yerel maksimum noktası değildir.

- Bu soruda verilen cevaptan hareketle öğrencinin hata yapıp yapmadığı hakkında ne düşünüyorsunuz?
- Varsa öğrencinin yaptığı hata nedir?
- Öğrencinin bu hatayı yapmasının sebebi/sebepleri neler olabilir?
- Bu soruya öğrencinin doğru cevap verebilmesi için kullanabileceğiniz önemli matematiksel kavram ya da ön bilgi nedir?
- Öğrencinin yaptığı bu hatayı düzeltmeye yönelik nasıl bir öğretim gerçekleştirirsiniz?

EK-6. ÖĞRENCİ BİLGİSİ GÖZLEM FORMU

Bu ölçme aracı, lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusuna ilişkin öğrenci bilgilerini ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır.

Gözlem Okulu:

Gözlemin başlama zamanı: **Bitiş zamanı:**

Gözlenen Öğretmen:

Gözlem yapılan sınıf:

Gözlemci:

Öğrenci Sayısı:

İşlenen Konu:

Gözlem Tarihi:

Alt Bileşen	No	Hedef Davranışlar	Y	KY	YS	H	Açıklamalar ve Yorumlar
ÖĞRENCİ BİLGİSİ	1	Öğrencilerin sahip olduğu öğrenme zorluklarını, hata veya kavram yanlışlarını belirleyebildi.					
	2	Öğrencilerin sahip olduğu öğrenme zorluklarının, kavram yanlışlarının veya hatalarının altında yatan nedenleri tespit etti.					
	3	İşlenecek konunun özelliğine göre öğrenciler arasındaki bireysel ve kültürel farklılıkları dikkate aldı.					
	4	Kazanımlarda olmadığı halde hatırlatma amacıyla ön bilgilere yer verdi.					
	5	Öğrencilerin konuyla ilgili ön bilgilerini ve hazır bulunuşluk düzeylerini dikkate aldı.					
	6	Öğrencilerin sorularını onların anlayabileceği şekilde cevapladı.					
	7	Öğrencilere konuyu öğretirken onların anlayabileceği şekilde uygun kavram ve örneklere yer verdi.					
	8	Öğrenme etkinliklerini öğrenci seviyelerini dikkate alarak gerçekleştirdi.					
	9	Öğrencilerin seviyesine uygun problemler çözdü.					

Bu değerlendirme formundaki maddelerin karşısında bulunan kısaltmaların anlamı: (Y): Yeterli, (KY): Kısmen yeterli, (YS): Yetersiz, (G): Gözlenmedi

EK-7. ÖĞRETİM STRATEJİLERİ BİLGİSİ GÖZLEM FORMU

Bu ölçme aracının amacı, lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamaları konusuna ilişkin hangi öğretim yöntem, teknik ve stratejileri kullandıklarını ve ders işleniş esnasında sergilemiş oldukları davranışları tespit etmektir.

Gözlem Okulu:

Gözlemin başlama zamanı:.....Bitiş zamanı:.....

Gözlenen Öğretmen:

Gözlem yapılan sınıf:

Gözlemci:.....

Öğrenci Sayısı:

İşlenen Konu:

Gözlem Tarihi:.....

Alt Bileşen	No	HEDEF DAVRANIŞLAR	Y	KY	YS	H	Açıklamalar ve Yorumlar
ÖĞRETİM STRATEJİLERİ BİLGİSİ	1	Derse hazırlıklı geldi.					
	2	Öğrencilerin ön bilgilerini hatırlattı.					
	3	Anlattığı konunun öneminden ve gerekçesinden bahsetti.					
	4	Ders anlatırken kavramlar ile günlük yaşam durumları arasında ilişki kurdu.					
	5	Kullandığı öğretim yöntemi dersin hedeflerine, öğrenci seviyesine, öğrenci sayısına ve sınıfın fiziki şartlarına uygundu.					
	6	Konuyu anlatırken çeşitli ders araç/gereçlerden faydalandı.					
	7	Konuyu anlatırken somut materyallerden veya modellerden faydalandı.					
	8	Dersi işlerken öğrencinin sürekli derse katılımını sağladı.					
	9	Matematik öğretim ilkelerini dikkate aldı.					
	10	Öğrencilere konuyu anlatırken çeşitli etkinliklerden faydalandı.					
	11	Kavramların farklı gösterimlerine/temsillerine yer verdi.					
	12	Pekiştireç kullandı.					
	13	Kavramlarla diğer disiplinler (fen,sosyal,...vb.) arasında ilişki kurdu.					
	14	Sunuş yoluyla öğretim stratejisini kullandı.					
	15	Buluş yoluyla öğretim stratejisini kullandı.					
	16	Araştırma-inceleme yoluyla öğretim stratejisini kullandı.					
	17	Anlatım yöntemini kullandı.					
	18	Gösteri tekniğini kullandı.					
	19	Gösterip yaptırma yöntemini kullandı.					
	20	Soru-cevap tekniğini kullandı.					
	21	Diğer öğretim yöntem ve tekniklerini (tartışma, problem çözmeye dayalı öğretim, bilgisayar destekli öğretim, elektronik araçlar ve bilgisayar gibi bilişim teknolojileri vb.) kullandı.					

Bu değerlendirme formundaki maddelerin karşısında bulunan kısaltmaların anlamı: (Y): Yeterli, (KY): Kısmen yeterli, (YS): Yetersiz, (G): Gözlenmedi

EK-8. AMASYA İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ İZİN YAZISI



T.C.
AMASYA VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 47613789-44-E.12303016
Konu: Uygulama İzni Murat DURAN

30.11.2015

VALİLİK MAKAMINA

İlgi: Atatürk Üniversitesi Rektörlüğü'nün 19/11/2015 tarih ve 302.08.01-E.1500107810 sayılı yazısı.

İlgi yazıda, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Doktora Programı Öğrencisi Murat DURAN'nın hazırlamış olduğu "**Lise Matematik Öğretmenlerinin Türev ve Uygulamalarına İlişkin Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi**" başlıklı doktora tez çalışmasının uygulanmasını 2015-2016 eğitim öğretim yılı güz ve bahar yarıyıllarında Müdürlüğümüze bağlı ortaöğretim okullarında uygulama yapabilmek için izin talep edilmektedir.

Müdürlüğümüzce yapılan inceleme sonucunda ilgi yazıda belirtilen, Müdürlüğümüze bağlı **Lisesi,** **Lisesi,** **Lisesi,** **Lisesi olmak üzere 5 (BEŞ)** ortaöğretim okulunda; Okul Yönetiminin bilgisi ve yönetiminde, Ders / Sınıf Öğretmenlerinin gözetiminde ve eğitim - öğretimi aksatmadan uygulanması Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde Olur'larınızı arz ederim.

Hakkı DEĞERLİ

Müdür a.

İl Millî Eğitim Şube Müdürü

OLUR

30.11.2015

Dr. Hüseyin GÜNEŞ

Vali a.

İl Millî Eğitim Müdürü

EKLER:

- 1- Yazı (2 Sayfa)
- 2- Dilekçe (1 Sayfa)
- 3- Tez Çalışması (53 Sayfa)

Nergiz Mah. Elmasiye Cad. 05100 Merkez/AMASYA
Elektronik Ağ: amasya.meb.gov.tr
e-posta: istatistik05@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Strateji Geliştirme Birimi
Tel: (0 358) 212 29 92 / 220
Faks: (0 358) 218 50 31

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı-Soyadı	Murat DURAN
Doğum Tarihi-Doğum Yeri	25/05/1984 – Merzifon (AMASYA)
EĞİTİM DURUMU	
İlkokul Öğrenimi	Amasya Atatürk İlkokulu (1990-1995)
Ortaokul Öğrenimi	Amasya Zübeyde Hanım Üçler Ortaokulu (1995-1998)
Lise Öğrenimi	Amasya Süper Lisesi (1998-2002)
Lisans Öğrenimi	Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Amasya Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği (2002-2006)
Yüksek Lisans Öğrenimi	Erzincan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Bilim Dalı (2009-2011)
Yabancı Dil	İyi
İŞ DENEYİMİ	
Çalıştığı Kurumlar	Çorum Sungurlu Yörüklü İlköğretim Okulu, Matematik Öğretmeni (2007-2008)
	Erzurum Uzundere Kirazlı İlköğretim Okulu, Matematik Öğretmeni (2008-2011)
	Kars Merkez Ziya Gökalp Ortaokulu, Matematik Öğretmeni (2011-2014)
	Amasya Suluova Atatürk Ortaokulu, Matematik Öğretmeni (2014-2017)
	Amasya Merkez Plevne Ortaokulu, Matematik Öğretmeni (2017-201..)
İLETİŞİM	
E-Posta	drmurat05@gmail.com
Academia.edu	https://atauni.academia.edu/DrMuratDuran
Researchgate	https://www.researchgate.net/profile/Murat_Duran3
Linkedin	https://www.linkedin.com/in/murat-duran-05805572/
Orcid	https://orcid.org/0000-0002-4612-7117

AKADEMİK ÇALIŞMALAR VE YAYINLAR

A- Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1. Argümantasyon tabanlı olasılık öğretiminin ortaokul öğrencilerinin başarılarına ve kaygılarına etkililiğinin incelenmesi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, 13(1), 55-87. Dil: Türkçe, Yazarlar: **DURAN, M.**, DORUK, M., KAPLAN, A. 2017.
2. Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme süreçleri: Kaplumbağa paradoksu örneği. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 5(4), 55-71. Dil: Türkçe, Yazarlar: **DURAN, M.**, DORUK, M., KAPLAN, A., 2016.
3. Matematik ve matematik eğitimi öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşleri arasında fark var mıdır?., *Journal of Human Sciences*, 13(3), 6020-6037. Dil: Türkçe, Yazarlar: KAPLAN, A., DORUK, M., ÖZTÜRK, M., **DURAN, M.**, 2016.
4. Ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları ile problem çözme beceri algılarının incelenmesi, *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi*, 9(4), 532-554. Dil: Türkçe, Yazarlar: ÖZDEMİR, F., **DURAN, M.**, KAPLAN, A., 2016.
5. Probleme dayalı öğrenme yaklaşımının kullanımına yönelik bir araştırma: Olasılık konularının öğretimi örneği, *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(2), 250-284. Dil: Türkçe, Yazarlar: **DURAN, M.**, ÖZDEMİR, F., KAPLAN, A., 2015.
6. Gerçekçi matematik eğitimine dayalı öğretimin matematik başarısına etkisi: Bir meta-analiz çalışması, *International Journal of Human Science*, 12(2), 187-206. Dil: Türkçe, Yazarlar: KAPLAN, A., **DURAN, M.**, DORUK, M., ÖZTÜRK, M., 2015.

B- Ulusal hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1. Lisans öğrencilerinin limit tanımını yorumlama becerileri. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 8(1), 177-194. Dil: Türkçe, Yazarlar: DORUK, M., **DURAN, M.**, KAPLAN, A. 2018.
2. Ortaokul öğrencilerinin zihinden hesaplama yaparken kullandıkları stratejiler. *İlköğretim Online*, 15(3), 742-760. Dil: Türkçe. Yazarlar: **DURAN, M.**, DORUK, M., KAPLAN, A., 2016.
3. Lise matematik öğretmenlerinin türevin tanımına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik pedagojik alan bilgileri. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(2), 795-831. Dil: Türkçe, Yazarlar: **DURAN, M.**, KAPLAN, A., 2016.

4. Matematik dersinde bilgisayar kullanımına yönelik zihin engelliler öğretmenlerinin görüşleri, *İstanbul Üniversitesi Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(2), 73-87. Dil: Türkçe, Yazarlar: KAPLAN, A., ÖZTÜRK, M., DORUK, M., **DURAN, M.**, 2016.
5. Ortaokul öğrencilerinin matematiksel üstbilgi farkındalıkları ile problem çözme beceri algıları arasındaki ilişkinin yapısal eşitlik modeliyle incelenmesi, *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(1), 1-16. Dil: Türkçe, Yazarlar: KAPLAN, A., **DURAN, M.**, BAŞ, G., 2016.
6. Ortaokul öğrencilerine yönelik matematiksel üstbilgi farkındalık ölçeği: Geçerlik ve güvenirlik çalışması, *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 32(1), 1-17. Dil: Türkçe, Yazarlar: KAPLAN, A., **DURAN, M.**, 2016.
7. Matematik dersinde çoklu zekâ kuramına dayalı öğretimin öğrencilerin akademik başarılarına etkisi: Bir meta-analiz çalışması, *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(3), 814-831. Dil: Türkçe, Yazarlar: KAPLAN, A., **DURAN, M.**, BAŞ, G., 2015.
8. Ortaokul öğrencilerinin matematik dersine çalışma sürecinde üstbilgi farkındalık düzeylerinin karşılaştırılması, *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2), 417-445. Dil: Türkçe, Yazarlar: KAPLAN, A., **DURAN, M.**, 2015.
9. Matematiksel kavramlarla geliştirilen “Kelimedenden Kavrama” oyununa dair öğrenci-öğretmen görüşleri, *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15(2), 155-173. Dil: Türkçe, Yazarlar: **DURAN, M.**, KAPLAN, A., 2014.
10. Görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısıyla görsel matematik başarısının değerlendirilmesi, *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 3(3), 27-40. Dil: Türkçe, Yazarlar: **DURAN, M.**, BEKDEMİR, M., 2013.
11. İlköğretim 7.sınıf öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı hakkındaki görüşleri, *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 2(2), 38-51. Dil: Türkçe, Yazarlar: **DURAN, M.**, 2013.
12. İlköğretim öğrencileri için görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algı ölçeği (GMOYÖYAÖ)’nin geliştirilmesi, *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31(1), 89-115. Dil: Türkçe, Yazarlar: BEKDEMİR, M., **DURAN, M.**, 2012.

C- Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri özet kitapçığına da basılan bildiriler

1. Lise matematik öğretmenlerinin bir fonksiyon ile bu fonksiyonun birinci türevi arasındaki ilişkisine yönelik konu alanı bilgileri, *IX. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi*, 11-14 Mayıs, Ordu, Türkiye. Yazarlar: **DURAN, M.**, DORUK, M., KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2017.
2. Lise matematik öğretmenlerinin asimptotlara ve grafik çizimlerine yönelik konu alanı bilgileri, *IX. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi*, 11-14 Mayıs, Ordu, Türkiye. Yazarlar: **DURAN, M.**, DORUK, M., KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2017.
3. Argümantasyon tabanlı olasılık öğretiminin ortaokul öğrencilerinin matematiksel üstbilgi farkındalıklarına ve olasılıksal muhakeme becerilerine etkililiğinin incelenmesi, *IX. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi*, 11-14 Mayıs, Ordu, Türkiye. Yazarlar: DORUK, M., **DURAN, M.**, KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2017.
4. Lise matematik öğretmenlerinin türevin fiziksel anlamına yönelik konu alanı bilgilerinin incelenmesi, *IX. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi*, 11-14 Mayıs, Ordu, Türkiye. Yazarlar: DORUK, M., **DURAN, M.**, KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2017.
5. The understanding of the undergraduate students in the department of primary mathematics teacher training related to the definition of limit, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, 12-14 May, Elazığ, Turkey. Yazarlar: DORUK, M., **DURAN, M.**, KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2016.
6. The image and understanding of undergraduate students in the department of primary mathematics teacher training related to the definition of derivative, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, 12-14 May, Elazığ, Turkey. Yazarlar: DORUK, M., **DURAN, M.**, KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2016.
7. Argümantasyon tabanlı olasılık öğretiminin ortaokul öğrencilerinin akademik başarılarına ve kaygılarına etkisi. *3rd International Eurasian Educational Research Congress*, 31 May-3 June, Muğla, Türkiye. Yazarlar: **DURAN, M.**, DORUK, M., KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2016.

8. Matematik öğretmen adaylarının ürettikleri matematiksel modeller: Geometrik seri örneği. *3rd International Eurasian Educational Research Congress*, 31 May-3 June, Muğla, Türkiye. Yazarlar: **DURAN, M.**, DORUK, M., KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2016.
9. Matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşleri, *VII. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi*, 28-31 Mayıs, Muğla, Türkiye. Yazarlar: KAPLAN, A., DORUK, M., ÖZTÜRK, M., **DURAN, M.**, Sözlü Bildiri, 2015.
10. Ortaokul öğrencilerinin matematiksel kalibrasyon becerilerinin incelenmesi, *VII. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi*, 28-31 Mayıs, Muğla, Türkiye. Yazarlar: KAPLAN, A., **DURAN, M.**, UYAR, Z.E., Sözlü Bildiri, 2015.
11. Lise öğrencilerinin özgüvenleri ve bilişsel farkındalıkları üzerine bir çalışma, *IX. Uluslararası Balkan Eğitim ve Bilim Kongresi*, 16-18 Ekim, Edirne, Türkiye. Yazarlar: **DURAN, M.**, DORUK, M., KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2014.
12. Ortaokul öğrencilerinin ders çalışma sürecinde bilişsel farkındalık becerilerini kullanma düzeylerinin karşılaştırılması, *IX. Uluslararası Balkan Eğitim ve Bilim Kongresi*, 16-18 Ekim, Edirne, Türkiye. Yazarlar: **DURAN, M.**, UYAR, Z.E., KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2014.
13. A qualitative study about conviction of geometry for primary 7th grade students, *World Conference on Educational and Instructional Studies*, 7-9 November, Antalya, Turkey. Yazar: **DURAN, M.**, Sözlü Bildiri, 2012.

D- Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri özet kitapçığına da basılan bildiriler

1. Gerçekçi matematik eğitimi destekli öğretimin öğrencilerin matematik başarılarına etkisi: Bir meta-analiz çalışması, *24.Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi*, 16-19 Nisan, Niğde, Türkiye. Yazarlar: KAPLAN, A., **DURAN, M.**, DORUK, M., ÖZTÜRK, M., Sözlü Bildiri, 2015.
2. Ortaokul öğrencilerinin matematiksel bilişsel farkındalıkları ile problem çözme beceri algıları arasındaki ilişkinin yapısal eşitlik modeliyle incelenmesi, *24.Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi*, 16-19 Nisan, Niğde, Türkiye. Yazarlar: KAPLAN, A., BAŞ, G., **DURAN, M.**, Sözlü Bildiri, 2015.

3. Bilişim çağında birleştirilmiş sınıflı okul öğrencilerinin bilgisayar okuryazarlığı, *14. Matematik Sempozyumu*, 14-16 Mayıs, Niğde, Türkiye. Yazarlar: KAPLAN, A., ÖZTÜRK, M., DORUK, M., **DURAN, M.**, Sözlü Bildiri, 2015.
4. Matematik dersinde çoklu zekâ kuramına dayalı öğretimin öğrencilerin akademik başarılarına etkisi: Bir meta-analiz çalışması, *II. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu*, 16-18 Mayıs, Adıyaman, Türkiye. Yazarlar: KAPLAN, A., BAş, G., **DURAN, M.**, Sözlü Bildiri, 2015.
5. Zihin engelliler öğretmenlerinin matematik dersinde teknoloji kullanımına yönelik görüşlerinin incelenmesi, *II. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu*, 16-18 Mayıs, Adıyaman, Türkiye. Yazarlar: KAPLAN, A., ÖZTÜRK, M., DORUK, M., **DURAN, M.**, Sözlü Bildiri, 2015.
6. Ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları ile problem çözme becerisi algıları arasındaki ilişkinin incelenmesi, *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 11-14 Eylül, Adana, Türkiye. Yazarlar: ÖZDEMİR, F., **DURAN, M.**, KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2014.
7. Faktöriyel, permutasyon-kombinasyon ve olasılık konularının probleme dayalı öğrenme yaklaşımı ile öğretimi üzerine bir uygulama, *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 11-14 Eylül, Adana, Türkiye. Yazarlar: **DURAN, M.**, ÖZDEMİR, F., KAPLAN, A., Sözlü Bildiri, 2014.
8. “Kelimedenden Kavrama” oyununun ilköğretim 8.sınıf öğrencileri açısından değerlendirilmesi, *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 27-30 Haziran, Niğde, Türkiye. Yazar: **DURAN, M.**, Sözlü Bildiri, 2012.
9. Görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısı görsel matematik başarısının anlamlı bir yordayıcısı mıdır?, *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 27-30 Haziran, Niğde, Türkiye. Yazarlar: **DURAN, M.**, BEKDEMİR, M., Sözlü Bildiri, 2012.