



**FİBER METAL TABAKALI KOMPOZİT PLAKALARIN
DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE TİTREŞİM
ANALİZİ**

Sinan MARAŞ

Doktora Tezi

**Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Makine Teorisi ve Dinamiği Bilim Dalı
Prof. Dr. Mustafa YAMAN**

2020

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**FİBER METAL TABAKALI KOMPOZİT PLAKALARIN
DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE TİTREŞİM
ANALİZİ**

Sinan MARAŞ

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
Makine Teorisi ve Dinamiği Bilim Dalı**

**ERZURUM
2020**

Her hakkı saklıdır



TEZ ONAY FORMU

**FİBER METAL TABAKALI KOMPOZİT PLAKALARIN DİFERANSİYEL
QUADRATURE METODU İLE TİTREŞİM ANALİZİ**

Prof. Dr. Mustafa YAMAN danışmanlığında, Sinan MARAŞ tarafından hazırlanan bu çalışma, 03/02/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Makine Teorisi ve Dinamiği Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (S./S)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Olkan ÇUVALCI

İmza :

Üye : Prof. Dr. Mustafa YAMAN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ömer GÜNDOĞDU

İmza :

Üye : Prof. Dr. Habib UYSAL

İmza :

Üye : Doç. Dr. Salih AKPINAR

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun **13.02/2020** tarih ve **07...../...24.....** nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Bu çalışma Atatürk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) kapsamında desteklenmiştir.
Proje No: FDK-2017-6118

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

FİBER METAL TABAKALI KOMPOZİT PLAKALARIN DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE TİTREŞİM ANALİZİ

Sinan MARAŞ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Makine Teorisi ve Dinamiği Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa YAMAN

Fiber metal tabakalı kompozitler (FMT), farklı metal levhalar (genellikle alüminyum) ile karbon, cam veya aramid gibi fiber takviyeli polimer matrisli kompozitlerden meydana gelen hibrid yapılardır. Metal levhalar kompozitin dış yüzeyde bulunurlar ve takviye edilmiş polimerik iç kısmı dış etkilerden korurlar. Metal malzemeler genellikle süneklik, darbe direnci, yorulma çatlağı büyümesine karşı hasar toleransı gibi iyi özelliklere sahiptir. Fiber takviyeli kompozit malzemelerin ise yüksek özgül mukavemet, yüksek özgül rijitlik, iyi korozyon ve yorulma direnci gibi avantajları bulunmaktadır. Fiber metal tabakalı kompozitlerin üretimi sayesinde bu iki malzemenin sahip olduğu avantajlar bir araya getirilmektedir. Bu avantajlarından dolayı fiber metal tabakalı kompozitler günümüzde otomobil, uçak ve uzay endüstrilerinde yaygın olarak kullanılmaktadırlar. Bundan dolayı, bu hibrit kompozit malzemelerin titreşim davranışlarının incelenmesi büyük bir öneme sahiptir. Bu çalışmada, fiber metal tabakalı kompozit plakaların titreşim karakteristikleri nümerik ve deneysel olarak incelenmiştir. Tabaka malzeme özelliklerinin (alüminyum levha, cam-fiber, karbon-fiber tabakalar), geometrisinin (tabaka sayısı, tabaka kalınlıkları, fiber yönlenmeleri) ve farklı sınır şartlarının kompozit yapının titreşim ve sönüm karakteristiklerine etkisi, deneysel olarak araştırılmıştır. Daha sonra fiber metal tabakalı kompozit plakanın diferansiyel denklemleri klasik plaka teorisine göre türetilmiştir. Diferansiyel quadrature, genelleştirilmiş diferansiyel quadrature ve harmonik diferansiyel quadrature metotlarının kullanılması ile nümerik analizler gerçekleştirilmiştir. Nümerik modelin doğruluğunu kanıtlamak için elde edilen doğal frekanslar literatürde verilen sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Ayrıca, bu çalışmada elde edilen sayısal sonuçlar deneysel olarak doğrulanmıştır. Böylelikle, çeşitli parametrelerin hibrit yapının titreşim karakteristikleri üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

2020, 155 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fiber metal tabakalı kompozit malzemeler, Serbest titreşim analizi, Diferansiyel quadrature metodu, Nümerik ve deneysel çalışma, Hibrit kompozit plakalar

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

FREE VIBRATION ANALYSIS OF FIBER METAL LAMINATED COMPOSITE PLATES USING DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD

Sinan MARAŞ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering
Department of Machine Theory and Dynamics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa YAMAN

Fiber metal laminated composites are hybrid structures consisting of fiber-reinforced polymer matrix composites such as carbon, glass or aramid and different metal sheets (usually aluminum). The metal plates are located on the outer surface of the composite and protect the reinforced polymeric inner structure from external influences. Metal materials generally have good properties such as ductility, impact resistance, damage tolerance to fatigue crack propagation. Fiber reinforced composite materials have advantages such as fatigue resistance, high specific stiffness, good corrosion behaviors and high specific strength. The advantages of these two materials are combined due to the production of fiber-laminated composites. Because of these advantages, fiber metal layer composites are widely used in automobile, aircraft and aerospace industries. Therefore, it is of great importance to investigate the vibration behavior of these hybrid composite materials. In this study, the vibration characteristics of composite fiber-laminated composites were numerically and experimentally investigated. First, effects of material properties (aluminum plates, glass-fiber, carbon-fiber layers), its geometry (number of layers, layer thickness and fiber orientation angle), and also different boundary conditions on the vibrations characteristics of these materials were experimentally investigated. Then, the differential equations of the fiber metal sheet composite plate are derived according to classical plate theory. Numerical analysis was performed by using differential quadrature, harmonic differential quadrature and generalized differential quadrature methods. To prove the accuracy of the numerical model developed in this thesis, the natural frequencies determined were compared with the results given in the literature. Moreover, the numerical results obtained in this study were experimentally validated. Thus, the effects of various parameters on the vibration characteristics of the hybrid structure were investigated.

2020, 155 pages

Keywords: Fiber metal laminated composite materials, Free vibrations analysis, Differential quadrature methods, Numerical and experimental study, Hybrid composite plates.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında benden yardımını, anlayışını, desteğini ve zamanını esirgemeyen tez danışmanım çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa YAMAN'a teşekkür ederim.

Tez çalışması kapsamında bilgi ve destekleriyle katkıları bulunan, Tez İzleme Komitesi üyesi hocalarım Sayın Prof. Dr. Ömer GÜNDOĞDU'ya ve Sayın Prof. Dr. Habib UYSAL'a teşekkür ederim.

Deneysel çalışmalarım ve esnasında katkı ve yardımları nedeniyle Sayın Doç. Dr. Salih AKPINAR'a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Engin ERBAYRAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan Sayın Dr. Öğr. Üyesi Recep ÇATAR'a, Sayın Arş. Gör. M. Fatih ŞANSVEREN'e, Sayın Arş. Gör. Dr. M. Raci AYDIN'a, mesai arkadaşlarımdan Sayın Arş. Gör. Ziya ÇAKICI'ya, Sayın Dr. Öğr. Üyesi A. Tahir ŞENSOY'a, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Emin MERCAN'a, Sayın Arş. Gör. Emin USLU'ya ve bu tezin hazırlanmasında emeği geçen ismini sayamadığım bütün arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışmasına FDK-2017-6118 numaralı bilimsel araştırma projesi ile destek sağlayan Atatürk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sinan MARAŞ

Şubat, 2020

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xiv
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Literatür Özeti	2
1.2. Tezin Amacı ve Kapsamı	22
2. KURAMSAL TEMELLER.....	24
2.1. Kompozit Malzemeler.....	24
2.2. Kompozit Malzemelerin Sınıflandırılması.....	24
2.2.1. Takviye elemanı geometrisine göre kompozitler.....	24
2.2.1.a. Fiber çeşitleri	25
2.2.2. Matris malzemesine göre kompozitler.....	27
2.2.2.a. Polimer matris kompozitler	27
2.2.2.b. Metal matris kompozitler	28
2.2.2.c. Seramik matris kompozitler.....	29
2.2.2.d. Karbon - karbon matris kompozitler	29
2.3. Kompozit Malzemelerin Üretim Yöntemleri	29
2.3.1. El yatırma yöntemi.....	29
2.3.2. Vakum torbası yöntemi.....	30
2.3.3. Elyaf sarma yöntemi	31
2.3.4. Püskürtme yöntemi	32
2.3.5. Sıcak presleme yöntemi	33
2.4. Fiber Metal Tabakalı Kompozitler	34
2.5. Tabakalı Kompozit Plakanın Titreşim Denklemleri	41
2.5.1. Tabakalı kompozit plakanın rijitlik matrisi.....	42
2.5.2. Tabakalı kompozit plakaların Newton' un hareket kanununa göre enine titreşimleri	50

3. MATERYAL ve YÖNTEM	55
3.1. Diferansiyel <i>Quadrature</i> Metodu.....	56
3.1.1. Bellman'ın önerdiği ilk yaklaşım.....	56
3.1.2. Bellman'ın önerdiği ikinci yaklaşım.....	63
3.2. Genelleştirilmiş Diferansiyel <i>Quadrature</i> Metodu	65
3.3. Harmonik Diferansiyel <i>Quadrature</i> Metodu.....	71
3.4. Sınır Şartlarının Uygulanması.....	76
3.4.1. δ tekniği.....	76
3.4.2. Ağırlık katsayıları matrisinin modifikasyonu metodu	77
3.4.3. Ağırlık katsayılarının modifikasyonu – 2 metodu	81
3.4.4. Ağırlık katsayılarının modifikasyonu – 3 metodu	82
3.4.5. Düğüm noktası seçimi.....	83
3.5. Tabakalı Kompozit Dikdörtgen Plakanın DQ Metotları İle Serbest Titreşim Analizi.....	84
3.6. FMT Kompozit Plakanın Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Titreşim Analizi	92
3.7. Fiber Metal Tabakalı Kompozit Numunelerin Üretimi.....	94
3.8. Serbest Titreşim Deneyleri.....	101
3.8.1. Plakalara sınır şartlarının uygulanması	103
3.9. Çekme Testi.....	104
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	107
4.1. Literatür Sonuçları ile Modelin Kıyaslanması: Çalışma 1	107
4.2. Literatür Sonuçları ile Modelin Kıyaslanması: Çalışma 2	110
4.3. Literatür Sonuçları ile Modelin Kıyaslanması: Çalışma 3	112
4.4. Literatür Sonuçları ile Modelin Kıyaslanması: Çalışma 4	114
4.5. Karbon, Cam Prepreglerin ve Alüminyum Levhanın Mekanik Özellikleri	116
4.6. FMT Plakaların Nümerik ve Deneysel Olarak Serbest Titreşim Analizi.....	119
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	143
5.1. Sonuçlar.....	143
5.2. Öneriler.....	146
KAYNAKLAR	147
ÖZGEÇMİŞ	156

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$[A]$	Eksenel rijitlik matrisi
$[B]$	Tabaka – kaplin rijitlik matrisi
$[D]$	Tabaka – eğilme rijitlik matrisi
A_i	Alüminyum tabaka sayısındaki artışı ifade eden i nci tabaka dizilişi
B_i	Alüminyum tabakanın, iç katmanlara gömülmesini ifade eden i nci tabaka
C_i	Fiber yönelme açılarındaki değişimi ifade eden i nci tabaka dizilişi
D_i	Açılı dizilişte Alüminyumun iç katmanlara gömüldüğü i nci tabaka
E_x	45° fiber yönelme açısına sahip numunenin çekme doğrultusundaki elastisite modülü
$\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Plak düzlemine dik şekilde olan normal ve kayma gerilmeleri
$\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$	Referans düzlemindeki gerinimler
χ_{xz}	Plağın küçük bir yer değiştirmesi durumundaki dönme miktarı
u, v, w	x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeler
u^0, v^0, w^0	Referans düzlemine göre x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeler
u_1, u_2, u_3	x_1, x_2, x_3 yönlerindeki yer değiştirmeler
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x, y, z koordinat sistemindeki normal gerilmeler
$\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$	x, y, z koordinat sistemindeki kayma gerilmeleri
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki normal gerilmeler
$\tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$	x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki kayma gerilmeler
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	x, y, z koordinat sistemindeki normal gerinimleri
$\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$	x, y, z koordinat sistemindeki kayma gerinimleri
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	Referans düzleminin eğriligi
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki normal gerinimler
$\gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$	x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki kayma gerinimleri
E_x, E_y, E_{xy}	x, y, z koordinat sistemindeki elastisite modülleri

G_x, G_y, G_{xy}	x, y, z koordinat sistemindeki kayma modülleri
N_x, N_y, N_{xy}	Tabakanın birim boyuna etkiyen düzlem içi kuvvetler
M_x, M_y, M_{xy}	Tabakanın birim boyuna etkiyen düzlem içi momentler
V_x, V_y	Enine kesme kuvvetleri
h_t, h_b	Plağın referans düzleminden yüzeylere olan mesafeleri
z_k	k. katmanın referans düzlemine olan mesafesi
$[\bar{C}], \bar{C}_{ij}$	x, y, z koordinat sistemindeki üç boyutlu katılık matrisi
$[C], C_{ij}$	x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki üç boyutlu katılık matrisi
$[\bar{Q}], \bar{Q}_{ij}$	x, y koordinat sistemindeki iki boyutlu katılık matrisi
$[Q], Q_{ij}$	x_1, x_2 koordinat sistemindeki iki boyutlu katılık matrisi
$(Q_{ij})_k$	k ıncı tabakanın rijitlik matrisi
$[\hat{T}_\sigma]$	Üç boyutlu gerilme dönüşüm matrisi
$[T_\sigma]$	İki boyutlu gerilme dönüşüm matrisi
$[\hat{T}_\varepsilon]$	Üç boyutlu gerinim dönüşüm matrisi
$[T_\varepsilon]$	İki boyutlu gerinim dönüşüm matrisi
Θ, θ	Elyaf yönlenme açısı
ρ_0	Tabakanın birim alanı başına kütlesi
ρ	Tabakanın yoğunluğu
h	Tabakanın kalınlığı
x_j	Değişken bölgesindeki ayrık (düğüm) noktalar
$f_x(x_i)$	Ayrık nokta fonksiyon değeri
$a_{ij}^{(p)}$	p'inci dereceden türev ifadesi için x_i ayrık noktalarının ağırlık katsayıları
x_k	Ötelenmiş legendre polinomunun kökleri
$L_{N(x)}$	N. dereceden legendre polinomu
$L_N^{(1)}$	N. dereceden legendre polinomunun birinci türevi
$a_{ij}^{(r)}$	r'inci dereceden türevler için x_i ayrık noktalarının ağırlık katsayıları

$b_{ij}^{(s)}$	s'inci dereceden türevler için y_j ayrık noktalarının ağırlık katsayıları
$r_i(x)$	x yönündeki lagrange interpolasyon polinomu
$s_j(y)$	y yönündeki lagrange interpolasyon polinomu
δ_{ij}	Kronecker operatörü
$\tilde{a}^{(s)}$	s'inci dereceden türev ifadesi için modifiye edilmiş ağırlık katsayıları
n_x	x koordinat yönündeki düğüm nokta sayısı
n_y	y koordinat yönündeki düğüm nokta sayısı
x_i	x koordinat yönündeki i'inci düğüm noktası
y_j	y koordinat yönündeki j'inci düğüm noktası
λ	Boyutsuz frekans parametresi
ω	Doğal frekans
I	Atalet momenti
$[K]$	rijitlik matrisi
e	Sınır noktalarındaki düğüm noktaları
i	İç düğüm noktaları
$\{F_e\}$	Genelleştirilmiş kuvvet vektörü
$\{\Delta_e\}$	Sınır noktalarındaki deplasmanların vektörü
ν	Poisson oranı
$X(\omega)$	Tepki fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$F(\omega)$	Etki fonksiyonunun Fourier dönüşümü

Kısaltmalar

AAAA	Dörtkenarı ankastre sınır şartı
Al	Alüminyum
ARALL	Aramid fiber takviyeli alüminyum tabakalı hibrid kompozit
ASAA	Üç kenarı ankastre, bir kenarı serbest sınır şartı
ASSA	İki kenarı ankastre, iki kenarı serbest sınır şartı

BBBB	Dört kenarı basit mesnet sınır şartı
CARALL	Karbon fiber takviyeli alüminyum tabakalı hibrid kompozit
CLPT	Klasik tabakalı plaka teorisi
CNT	Karbon nanotüp takviyeli malzeme
DQ	Diferansiyel <i>Quadrature</i>
DQM	Diferansiyel <i>Quadrature</i> Metodu
DSC	Ayrık tekil konvolüsyon yöntemi
E/E	E-cam/epoksi
B/E	Boron/epoksi
G/E	Grafit/epoksi
FGM	Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme
FMT	Fiber Metal Tabakalı kompozit
FRF	Frekans cevap fonksiyonu
FSDT	Birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi
GDQ	Genelleştirilmiş Diferansiyel <i>Quadrature</i>
GLARE	Cam fiber takviyeli alüminyum tabakalı hibrid kompozit
HDQ	Harmonik Diferansiyel <i>Quadrature</i>
SSSS	Dört kenarı serbest sınır şartı
PSO	Parçacık sürü algoritması

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. El yatırma yöntemi	30
Şekil 2.2. Vakum torbalama yöntemi	31
Şekil 2.3. Elyaf sarma yöntemi	32
Şekil 2.4. Püskürtme yöntemi	32
Şekil 2.5. Sıcak presleme yöntemi	33
Şekil 2.6. Fiber metal tabakalı kompozit plakanın şematik gösterimi	35
Şekil 2.7. Tabakalı Kompozit plakanın koordinat sistemi ve referans düzlemi	42
Şekil 2.8. Plağın (a) x - z , (b) y - z düzlemindeki deformasyonu	43
Şekil 2.9. Referans düzlemine tesir eden düzlem içi kuvvetler, momentler ve enine kesme kuvvetleri	45
Şekil 2.10. Tabakaların referans düzlemine göre yapılan ölçülendirmeleri	46
Şekil 2.11. Düzlem- gerilme durumu için asal eksen takımının r ekseninde döndürülmesi	46
Şekil 2.12. Gerilme bileşenleri ve dış yüklerin tabakaya etkisi. (a) düzlemsel gerilme bileşenleri, (b) moment bileşenleri, (c) enine yükler ve kesme kuvveti bileşenleri	51
Şekil 3.1. İki boyutlu dikdörtgensel bölge için düğüm noktaları	64
Şekil 3.2. Kiriş problemi için delta noktalarının uygulanması	76
Şekil 3.3. 5x5 düğüm noktası dağılımına sahip dikdörtgen plaka ($n = n_x = n_y = 5$)	86
Şekil 3.4. SHELL 281 elemanın geometrisi	92
Şekil 3.5. FMT kompozit plakanın ANSYS modeli	93
Şekil 3.6. Tabakalı elemanların istifleme açısı ve sırası	93
Şekil 3.7. Vakum altına alınmış numune	94
Şekil 3.8. Vakum destekli reçine infüzyonu yöntemiyle üretilen FMT kompozit plakalar	95
Şekil 3.9. Numune boyutlarında kesilen Plain dokuma karbon ve cam prepregler	95
Şekil 3.10. Sıcak pres ile tabakalı kompozit üretiminde kullanılan kalıplar	96

Şekil 3.11. FMT kompozitin sıcak presleme öncesi hazırlanması; (a) CARAL (Karbon prepreg ile Alüminyum tabakalı); (b) GLARE (Cam prepreg ile Alüminyum tabakalı).....	96
Şekil 3.12. Sıcak preste deney numunelerinin hazırlanışı	97
Şekil 3.13. Alüminyum levhaların yapıştırılması ve levhaların üzerine ağırlık konularak kürlenmesi	97
Şekil 3.14. Üretilen CARAL FMT Kompozit Plakalar	98
Şekil 3.15. Üretilen GLARE FMT Kompozit Plakalar.....	98
Şekil 3.16. Üretilen 10 tabakalı FMT kompozitlerden konfigürasyonunun şematik gösterimi.....	101
Şekil 3.17. Titreşim ölçüm sistemi	102
Şekil 3.18. Ölçüm sistemi: (a) deneysel donanım; (b) FRF blok diyagramı	103
Şekil 3.19. Sınır şartlarının uygulanmasını sağlayan düzenek	104
Şekil 3.20. Deney düzeneği	104
Şekil 3.21. Çekme testi: (a) Karbon prepreg; (b) Cam prepreg; (c) Alüminyum levha	105
Şekil 3.22. Çekme testi numunelerinin kırılma şekli.....	106
Şekil 4.1. Tabakalı kompozit plakanın yön doğrultuları.....	107
Şekil 4.2. Tabakalı kompozit plaka	107
Şekil 4.3. $0^{\circ} / 90^{\circ}$ Yönlenme açılı karbon prepregin gerilme – şekil değiştirme grafiği.....	116
Şekil 4.4. $45^{\circ} / 45^{\circ}$ Yönlenme açılı karbon prepregin gerilme – şekil değiştirme grafiği.....	117
Şekil 4.5. $0^{\circ} / 90^{\circ}$ Yönlenme açılı cam prepregin gerilme – şekil değiştirme grafiği	117
Şekil 4.6. $45^{\circ} / 45^{\circ}$ Yönlenme açılı cam prepregin gerilme – şekil değiştirme grafiği	118
Şekil 4.7. Alüminyum 1050 levhanın gerilme – şekil değiştirme grafiği.....	118
Şekil 4.8. GLARE kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (AAAA)	123
Şekil 4.9. GLARE kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (ASAA)	123
Şekil 4.10. GLARE kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (ASSA).....	124

Şekil 4.11. GDQ metoduna göre GLARE kompozit plakanın farklı sınır şartları durumlarındaki alüminyum tabaka sayısı değişiminin birinci doğal frekanslara etkisi	125
Şekil 4.12. Dörtkenarı ankastre GLARE A ₂ plakanın mod şekilleri	125
Şekil 4.13. GDQ metoduna göre çapraz dizilişli GLARE kompozit plakada alüminyum tabakaların dış tabakadan içeri doğru yerleştirilmesinin birinci doğal frekanslara etkisi	126
Şekil 4.14. GLARE kompozitlerde fiber yönelmelerinin birinci doğal frekanslara etkisi	127
Şekil 4.15. GDQ metoduna göre açılı dizilişli GLARE kompozit plakada alüminyum tabakaların dış tabakadan içeri doğru yerleştirilmesinin birinci doğal frekanslara etkisi	127
Şekil 4.16. A grubu dizilişleri için GLARE kompozit plakalara ait deneysel sönüm oranları	128
Şekil 4.17. B grubu dizilişleri için GLARE kompozit plakalara ait deneysel sönüm oranları	129
Şekil 4.18. CARALL kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (AAAA)	133
Şekil 4.19. CARALL kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (ASAA).....	133
Şekil 4.20. CARALL kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (ASSA).....	134
Şekil 4.21. GDQ metoduna göre CARALL kompozit plakanın farklı sınır şartları durumlarındaki alüminyum tabaka sayısı değişiminin birinci doğal frekanslara etkisi	135
Şekil 4.22. GDQ metoduna göre çapraz dizilişli CARALL kompozit plakada alüminyum tabakaların merkeze doğru yerleştirilmesinin birinci doğal frekanslara etkisi	136
Şekil 4.23. Üç kenarı ankastre, bir kenarı serbest CARALL B ₃ plakanın mod şekilleri	136
Şekil 4.24. CARALL kompozitlerde fiber yönelme açılarının birinci doğal frekanslara etkisi	137

Şekil 4.25. GDQ metoduna göre açılı dizilişli CARALL kompozit plakada alüminyum tabakaların dış tabakadan içeri doğru yerleştirilmesinin birinci doğal frekanslara etkisi	137
Şekil 4.26. İki kenarı ankastre, iki kenarı serbest CARALL D ₃ plakanın mod şekilleri	138
Şekil 4.27. A grubu dizilişleri için CARALL kompozit plakalara ait deneysel sönüm oranları	139
Şekil 4.28. B grubu dizilişleri için CARALL kompozit plakalara ait deneysel sönüm oranları	140
Şekil 4.29. GDQ metoduna göre GLARE ve CARALL kompozit plakaların A grubu dizilişlerindeki birinci doğal frekanslar (AAAA sınır şartı)	140
Şekil 4.30. GDQ metoduna göre GLARE ve CARALL kompozit plakaların B grubu dizilişlerindeki birinci doğal frekanslar (AAAA sınır şartı)	141
Şekil 4.31. GDQ metoduna göre GLARE ve CARALL kompozit plakaların C grubu dizilişlerindeki birinci doğal frekanslar (AAAA sınır şartı)	141
Şekil 4.32. GDQ metoduna göre GLARE ve CARALL kompozit plakaların D grubu dizilişlerindeki birinci doğal frekanslar (AAAA sınır şartı)	142

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Fiber metal tabakalı kompozitlerin avantajları	37
Çizelge 2.2. FMT kompozitlerde kullanılan çeşitli fiberlerin avantaj ve dezavantajları	41
Çizelge 3.1. GLARE tabaka diziliş durumları	99
Çizelge 3.2. CARALL tabaka diziliş durumları	100
Çizelge 4.1. Kullanılan kompozit plakanın malzeme özellikleri	108
Çizelge 4.2. Çeşitli açısall takviyeli $(\theta, -\theta, -\theta, \theta)$ kare plakanın $(a / b = 1)$ boyutsuz doğal frekans değerleri	108
Çizelge 4.3. Açısall takviyeli $(\theta, -\theta, \theta)$ dikdörtgen plakanın $(a / b = 2)$ boyutsuz doğal frekans değerleri	109
Çizelge 4.4. Çapraz takviyeli $(0^0, 90^0, 90^0, \dots)$ kare plakanın $(a / b = 1)$ boyutsuz doğal frekans değerleri	110
Çizelge 4.5. E-glass/epoksi (E/E) simetrik üç tabakalı $(\theta, -\theta, \theta)$ kompozit kare plakanın boyutsuz doğal frekans değerleri (BBBB – dört kenarı basit mesnet plaka)	111
Çizelge 4.6. E-glass/epoksi (E/E) simetrik üç tabakalı $(\theta, -\theta, \theta)$ kompozit kare plakanın boyutsuz doğal frekans değerleri (SSSS – dört kenarı serbest plaka)	112
Çizelge 4.7. FMT plakanın geometrik ve malzeme özellikleri	113
Çizelge 4.8. $[0^0 / 90^0 / 0^0 / 90^0 / 0^0]_s$ dizilişine sahip FMT plakanın farklı diziliş sırasının, a/b oranının ve çözüm yöntemlerinin birinci doğal frekans değerine etkisi (BBBB)	113
Çizelge 4.9. $[0^0 / \theta / 0^0 / \theta / 0^0]_s$ tabaka dizilişine sahip basit mesnetli kompozit plakanın farklı açılardaki diziliş durumunda ve çözüm yöntemlerinde elde edilen birinci doğal frekans değerleri $(a/b=1, BBBB)$	114
Çizelge 4.10. Glare 3 plakanın ve malzeme özellikleri	115
Çizelge 4.11. Glare 3 plakanın doğal frekanslarının DQM ve ANSYS sonuçları ile çeşitli metotlardan elde edilen sonuçlarının kıyaslanması	115

Çizelge 4.12. FMT kompozit üretiminde kullanılan malzemelerin mekanik özellikleri.....	119
Çizelge 4.13. GLARE kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (AAAA).....	120
Çizelge 4.14. GLARE kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (ASAA).....	121
Çizelge 4.15. GLARE kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (ASSA)	122
Çizelge 4.16. CARALL kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (AAAA).....	130
Çizelge 4.17. CARALL kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (ASAA).....	131
Çizelge 4.18. CARALL kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (ASSA)	132

1. GİRİŞ

Kompozit malzemeler faydalı bir üçüncü materyal oluşturmak için makroskopi ölçeğinde farklı özelliklere sahip iki veya daha fazla materyalin bir araya getirilmesiyle oluşmaktadır. Kompozit malzemelerin avantajı, iyi tasarlanmışlarsa genellikle bileşenlerinin sahip olduğu farklı iyi özelliklerinin birleştirilerek benzersiz özellikler sunmalarıdır. (Jones 2014). Kompozit malzemelerin yüksek dayanım/ağırlık oranı, korozyona karşı direnç, elektromanyetik saydamlık, darbe tokluğu, erozyon ve aşınma direnci, akustik ve titreşim sönümlemesi, daha fazla yorulma ömrü, ısı / akustik yalıtım, düşük ısı genleşme, düşük veya yüksek ısı iletkenlik, kendi kendini onarma, düşük veya yüksek geçirgenlik, yangın geciktiricilik gibi avantajları mevcuttur (Barbero 2017). Bu özellikleri sebebiyle günümüzde mühendislik malzemesi olarak havacılık, rüzgâr enerjisi, otomotiv, denizcilik endüstrilerinde yaygın olarak kullanılmaktadırlar (Amir *et al.* 2019).

Son otuz yılda, havacılık alanında kullanılan geleneksel alüminyum alaşımlarının yerini alabilecek hafif ve daha üstün özelliklere sahip malzemeler araştırılmaktadır (Remmers and De Borst 2001). Optimum bir yapı elemanının üretimi için, yüksek mukavemet, tokluk, korozyon direnci, yorulma direnci ve ayrıca düşük yoğunluk gibi özellikleri bir araya getiren yeni bir malzemeye ihtiyaç duyulmaktadır. Fiber takviyeli kompozitler düşük kırılma tokluğu haricinde istenilen bütün özelliklere sahipken, alüminyum alaşımları düşük yorulma dayanımına sahiptir (Sinmazçelik *et al.* 2011). Her iki malzemenin dezavantajlarının üstesinden gelebilmek için araştırmacılar, iki malzemeyi bir araya getirerek tabakalı hibrid kompozit bir yapıyı oluşturmuşlardır (Vogelingsang and Vlot 2000). Fiber Metal Tabakalı (FMT) kompozitler, farklı metal levhalar (genellikle alüminyum) ile karbon (CARALL), cam (GLARE) veya aramid (ARALL) gibi fiber takviyeli polimer matrisli kompozitlerden meydana gelen hibrid yapılardır (Vlot and Gunnink 2011). Metal levhalar kompozitin dış yüzeyinde bulunurlar ve takviye edilmiş polimerik iç kısmı dış etkilere korurlar (Shooshtari and Razavi 2010). Metal malzemeler genellikle süneklik, darbe direnci, yorulma çatlak büyümesine karşı hasar toleransı gibi iyi özelliklere sahiptir. Fiber takviyeli kompozit malzemelerin ise yüksek özgül mukavemet, yüksek özgül rijitlik, iyi korozyon ve yorulma direnci gibi avantajları

bulunmaktadır (Krishnakumar 1994; Alderliesten and Benedictus 2008; Chang *et al.* 2008). Fiber Metal Tabakalı kompozitlerin üretimi sayesinde bu iki malzemenin sahip olduğu avantajlar bir araya getirilmektedir. Bu avantajlarına ek olarak ayrıca kullanılan metallerin fiber takviyeli plastik tabakalardan daha hafif olmasından dolayı FMT kompozit plakalar otomobil, uçak ve uzay endüstrilerinde yaygın olarak kullanılmaktadırlar (Botelho *et al.* 2006).

Günümüzde birçok mühendislik uygulamalarında kullanılan bu önemli malzemelerin dinamik analizi yapısal araştırmanın önemli bir parçasını oluşturmaktadır ve serbest titreşim analizinin sonuçları bu bağlamda oldukça faydalıdır. Doğal frekans ve mod şekilleri hakkındaki bilgiler, titreşim yalıtımı problemlerinde ve genel olarak ön görülen dinamik tepkinin göstergesi olarak büyük bir önem arz etmektedir. Bu nedenle, bu tür yapıların tasarım süreci için serbest titreşim analizinin yapılması gerekmektedir (Thambiratnam and Zhuge 1996). Bu konuda daha önceden yapılmış çalışmalardan bazıları ‘‘Literatür özeti’’ başlığında anlatılmıştır.

Bu tez kapsamında, ‘‘I. Giriş’’ bölümünde konu ile ilgili literatür özeti ve çalışmanın amacı ve kapsamı ortaya konulmuştur. ‘‘ II. Kuramsal Temeller’’ kısmında kompozit malzemeler ve üretim yöntemleri, Fiber Metal Tabakalı kompozitler ve kullanım alanları, titreşim analizi ve çözüm yöntemleri konularında bilgiler verilmiştir. ‘‘ III. Materyal ve Yöntem’’ başlığında tez kapsamında kullanılan malzemelerin özellikleri, deneysel üretim aşamaları, yapılan mekanik testler ve titreşim deneyleri, titreşim ifade denkleminin elde edilişi ve nümerik çözüm yöntemi olarak Diferansiyel *Quadrature* (DQ) metodu ortaya konulmuştur. ‘‘ IV. Araştırma Bulguları ve Tartışma’’ bölümünde deneysel ve nümerik yöntemlerle elde edilen bilgiler sunulularak tartışılmış ve bu bağlamda öne sürülen görüşler ve neticeler ‘‘ V. Öneriler ve Sonuçlar’’ kısmında verilmiştir.

1.1. Literatür Özeti

İzotropik veya kompozit plakaların serbest titreşim analizinde öncelikle titreşim ifade denklemleri plaka teorileri yardımıyla elde edilmektedir. Klasik plaka teorisi ve birinci

dereceden kayma deformasyon teorileri tabakalı kompozit plakaların analizinde yaygın olarak kullanılan teorilerdir. Klasik plaka teorisinde enine kayma deformasyonu ihmal edildiği için sadece ince plakalarda iyi sonuçlar vermektedir. Birinci mertebe kayma deformasyon teorisi ise plakaların alt ve üst yüzeylerinin serbest durumlarındaki kayma deformasyonunu sağlamamaktadır ve ankastre sınır şartı durumu için bütün yer değiştirmeleri uygun şekilde kısıtlayamamaktadır. Bu nedenlerle, klasik plaka teorisinin ve birinci dereceden kayma deformasyon teorilerinin bu sınırlamalarının üstesinden gelmek ve tabakalı kompozit ve sandviç plakaların eğilme, burkulma ve titreşim davranışlarının daha iyi ifade edilebilmesi için daha yüksek dereceli kayma deformasyon teorileri geliştirilmiştir (Sayyad and Ghugal 2015). Plaka teorileri kullanılarak elde edilen titreşim ifade denklemleri analitik veya nümerik metotlarla çözülerek titreşim analizi yapılmaktadır. Kompozit malzemelerin titreşim karakteristikleri üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde; kompozit yapıyı oluşturan malzemelerin mekanik ve geometrik özellikleri, fiber yönelme açıları ve farklı sınır şartları gibi birçok parametrenin titreşim davranışına etkilerinin araştırıldığı görülmektedir.

Tabakalı kompozitlerin daha iyi performans sergilemelerinden ötürü titreşim davranışları hususunda literatürde pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalarda genellikle hem deneysel olarak hemde nümerik (Ritz yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, Galerkin yöntemi, Hamilton prensibi, kayma deformasyon teorileri vb.) analizler yapılarak, doğal frekans ve mod şekilleri, enerji yutma kapasiteleri ve mekanik davranışları üzerinde tabaka dizilişlerinin, geometrik ve malzeme parametrelerinin etkileri incelenmiştir.

Zhen and Wanji (2006), tabakalı kompozit ve sandviç plakaların serbest titreşimler analizi için global lokal yüksek mertebe teorisini kullanmışlardır. Bu yöntemin, ara yüzeylerdeki serbest yüzey durumu, geometrik ve gerilme süreklilik durumlarının tabaka sayısından bağımsız olması avantajını tespit etmişlerdir. Bu teorinin sadece doğal frekansların hesaplanmasında değil, aynı zamanda kalınlık yönündeki modal gerilme dağılımlarının doğru bir şekilde tahmininde kullanılabildiğini göstermişlerdir.

Ganapathi *et al.* (2009) yaptıkları çalışmada, basit mesnetli anizotropik tabakalı kompozit plakaların serbest titreşim karakteristiklerini analitik olarak incelemişlerdir. Denklemleri birinci mertebe kayma deformasyon teorisi ve kayma düzeltme faktörüne bağlı olarak elde etmişlerdir. Tabakalı kompozit plakaların farklı eğrilik, kalınlık oranı, ve diziliş biçimi gibi değerleri için titreşim biçimlerini incelemişlerdir.

Civalek (2009), izotropik ve ortotropik konik dikdörtgen plakaların serbest titreşimini ayırık tekil konvolüsyon (DSC) metodu ile gerçekleştirmiştir. Frekans değerlerini farklı sınır şartları, farklı plaka en boy oranı, çeşitli koniklik oranı için elde edilmiştir.

Thai and Kim (2010), tabakalı kompozit plakaların basit mesnetli sınır şartları için serbest titreşimlerinde iki değişkenli ince plaka teorisini kullanmışlardır. (*two variable refined plate theory*) Hamilton prensibi ile beraber simetrik olmayan çapraz dizilişli ve açısız dizilişli tabakaların yaklaşık çözümleri için Navier tekniğini kullanmışlardır.

Mishra and Sahu (2012), fiber cam/epoksi kompozit plakaların serbest-serbest sınır şartlarında, deneysel ve sonlu elemanlar yöntemleriyle serbest titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. Tabaka sayısı, en boy oranı, fiber kompozit plakaların fiber yönelmesi gibi parametrelerinin etkisini incelemişlerdir. Tabaka sayısı ve en boy oranı arttığında doğal frekanslarında arttığı, fiber açısı arttığında doğal frekansların azaldığını belirtmişlerdir.

Srinivasa *et al.* (2014), izotropik ve tabakalı kompozit eğri plakaların serbest titreşimini deneysel ve sonlu elemanlar yöntemiyle incelemişlerdir. Doğal frekansları 8 düğümlü izoparametrik eğri kabuk sonlu eleman kullanarak elde etmişler ve deneysel verilerle kıyaslamışlardır. Verilen herhangi bir en boy oranında, genellikle eğrilik yarıçapındaki artış ile doğal frekansların arttığı sonucunu tespit etmişlerdir. Bütün tabakaların diziliş sırası için en boy oranındaki artış ile birinci doğal frekans değerlerinin azaldığı, ikinci doğal frekans değerlerinin ise arttığı sonucuna varmışlardır.

DQ metodu, daha az düğüm noktası sayısı kullanılarak gerçek çözüme yeterli yaklaşıktaki sonuçlar veren nümerik bir yöntemdir. Daha az düğüm nokta sayısı kullanılması suretiyle daha az hesaplayıcı kapasitesine ve hesaplama süresine imkân vermesi gibi avantajlardan ötürü kompozit kiriş, plaka ve kabuk elemanların titreşim analizinde bu metotların kullanılmasına yönelik ilgi son yıllarda giderek artmaktadır. Bu metotların kullanılması ile ilgili yapılan çalışmalardan Civalek (2004), ince izotropik plaka ve elastik kolonların burulma, eğilme ve serbest titreşim analizleri için diferansiyel kuadratür yöntemi ile harmonik diferansiyel kuadratür yöntemlerini kıyaslamıştır. Dikdörtgen, kare, dairesel, eğrisel şeklindeki plakaların farklı sınır şartlarındaki durumlarının etkisini incelemiştir.

Lanhe *et al.* (2005), birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı hareketli en küçük kareler DQ metodunu kullanarak genel tabakalı kompozit plakaların farklı sınır şartlarındaki serbest titreşimlerini incelemişlerdir. Kullanılan metot ile plakaların hareketini ifade eden kısmi diferansiyel denklemleri, lineer homojen cebirsel denklem takımları haline getirilmişlerdir ve elde edilen denklemleri özdeğer problemi olarak çözmüşlerdir. Çeşitli grid nokta sayısı, sınır şartlarına göre mod şekillerinin ve frekans parametrelerinin değişimini incelemişlerdir.

Chen and Lü (2005), durum uzay yaklaşımı ile DQ metodunun kombinasyonu olan, üç boyutlu elastisite teorisine dayalı bir yarı analitik metodu, çapraz takviyeli tabakalı kompozit plakaların serbest titreşimi için geliştirmişlerdir. DQ metodunu kullanarak, ortotropik tabakalı plakanın genel çözümünü elde etmişlerdir. Doğal frekans üzerinde tabaka dizilişi, kalınlık oranı gibi parametrelerin etkilerini incelemişlerdir.

Karami *et al.* (2006), kenarları esnek şekilde öteleme ve dönmeye karşı tutulmuş olan kompozit tabakalı plakanın serbest titreşim analizi için DQ metodunu kullanmışlardır. İfade denklemlerini, dönme ataletinin etkilerini içeren birinci mertebe kayma deformasyon teorisi ile elde etmişlerdir. Sundukları yaklaşım ile ince plakaların sonlu elemanlar analizinde karşılaşılan kesme kilitlenmesi durumu gibi herhangi bir sayısal zorluk olmadan son derece hassas çözümler elde edildiğini belirtmişlerdir. Açısız takviyeli, çapraz takviyeli izotropik, anizotropik tabakalı plakaların farklı en/boy oranı,

kalınlık/uzunluk oranı ve farklı sınır şartları durumlarının doğal frekanslar üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Civalek (2007), kalın dikdörtgen plakaların ankastre ve basit mesnetli sınır şartlarında, üç boyutlu serbest titreşim, eğilme ve burkulma analizlerini DSC metodunu kullanarak gerçekleştirmiştir. Metodun etkinliğini sonlu elemanlar, Ritz ve DQ metotlarıyla karşılaştırmıştır ve elde edilen sonuçların oldukça uyumlu olduğunu tespit etmiştir.

Alibeigloo and Shakeri (2007), çapraz dizilişli tabakalı silindirik panellerin serbest titreşim analizi için üç boyutlu elastisite teorisine dayalı durum uzayı metodu ve DQ metodunun kombinasyonlarından oluşan yeni bir yaklaşım ortaya koymuşlardır.

Malekzadeh (2007), eğri tabakalı kompozit plakaların lineer olmayan serbest titreşim analizini DQ metodunu kullanarak farklı sınır koşulları için gerçekleştirmiştir. İfade denklemini ince plaka teorisine bağlı olarak elde etmiş ve geometrik doğrusalsızlık von karman yaklaşımı ile modellemiştir. Eğrilik açısı, en boy oranı, fiber yönelmesi gibi çeşitli parametrelerdeki değişimin lineer olmayan frekans oranı üzerindeki etkisini araştırmıştır.

Haftchenari *et al.* (2007), DQ metodunu kullanarak farklı sınır şartlarındaki tabakalı ortotropik kompozit silindirik kabukların serbest titreşim analizi üzerinde çalışmışlardır. Hareket denklemlerini birinci mertebe kayma deformasyon teorisi ile türetmişlerdir. DQM'nin kompozit kabuk yapıların stabilite problemlerinin çözülmesinde mükemmel, etkin ve hızla çözümlere yakınsayan bir yöntem olduğu sonucuna varmışlardır.

Malekzadeh (2008), tabakalı kompozit eğri plakaların lineer olmayan serbest titreşim analizini, birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı olan DQ metodunu kullanarak gerçekleştirmiştir. Eğrilik açısı, kalınlık/uzunluk oranı, en/boy oranı, tabakaların istifleme durumu ve farklı sınır şartları gibi parametrelerindeki değişimin frekans oranı ve genlik oranı üzerindeki etkilerini göstermiştir. Az sayıda düğüm noktası

kullanıldığında bile, nümerik sonuçların literatürdeki çalışmalarda kullanılan diğer sayısal yöntemlerle iyi bir uyum içinde olduğu sonucuna varmıştır.

Lü *et al.* (2008), tabakalı kompozit plakaların eğilme ve serbest titreşim analizi için üç boyutlu elastisite teorisine dayalı yarı analitik bir çözümü türetmişlerdir. Durum uzay yaklaşımı ile DQ metodunu birleştiren yeni bir hibrid analizi kullanılmışlardır. Tabakaların kalınlık yönünü durum uzayında transfer yönü olarak seçip ve DQ tekniğini düzlem içi alanların ayrıklaştırılması için kullanmışlardır. Tabakalı plakanın simetrik, simetrik olmama, farklı açılarda diziliş ile istifleme sırası ve farklı sınır şartları şeklindeki durumlarının doğal frekans değerleri üzerindeki etkilerini, sunulan yöntem ve sonlu elemanlar yöntemiyle kıyaslayıp incelemişlerdir.

Yas and Aragh (2011), dört parametrelili fonksiyon olarak derecelendirilmiş (FGM) fiber yönelmeli silindirik panellerin üç boyutlu serbest titreşim analizini yapmışlardır. Panelleri kenarlarda basit mesnetli sınır şartlarında ve radyal yönde, simetrik ve simetrik olmayacak şekilde herhangi bir fiber yönelmesine sahip olarak değerlendirmişlerdir. Sınır şartlarına uygun yer değiştirme fonksiyonu seçerek, ifade edilen denklemleri adi diferansiyel denklem takımlarına indirgemişler ve bu denklemleri DQ metodu ile çözerek doğal frekansları elde etmişlerdir.

Aragh and Yas (2011), sürekli dereceli fiber yönelmesine sahip olan, fonksiyonel derecelendirmiş çekirdekli sandviç plakanın serbest titreşimini, geliştirilmiş güç yasası dağılımını kullanarak incelemişlerdir. Silikon karbür fiber ile titanyum matristen oluşan ve radyal olarak değişen hacim oranına ve fiber oryantasyonuna sahip fiber takviyeli kompozit malzemeyi kullanmışlardır. İki boyutlu kayma deformasyon teorisine bağlı olarak, sandviç plakanın doğal frekans değerlerini, geliştirilmiş diferansiyel *quadrature* (GDQ) metodunu kullanarak elde etmişlerdir.

Jodaei *et al.* (2012), fonksiyonel derecelendirilmiş dairesel plakaların titreşim analizi için DQ metoduna dayalı durum uzayı yöntemini kullanmışlardır. Bununla birlikte farklı sınır koşulları için yapay sinir ağları ile plakayı modellemişlerdir. Dairesel plakanın

kalınlığının, malzeme özellik derece indeksinin, dairesel dalga sayısının ve farklı sınır şartlarının boyutsuz doğal frekanslar üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Yas and Samadi (2012), elastik zemin üzerindeki karbon nanotüp takviyeli kompozit Timoshenko kirişinin serbest titreşim ve burkulma analizini gerçekleştirmişlerdir. Hamilton prensibi ile kirişi ifade eden denklemleri elde etmişler ve GDQ metodunu kullanarak bu denklemleri çözmüşlerdir. Nanokompozit kirişler için doğal frekans ve kritik burkulma yüklerini, farklı sınır şartları için elde etmişlerdir.

Viola *et al.* (2013), çeşitli düzensiz şekillerdeki, çatlaklı kompozit plakaların serbest titreşim analizini genelleştirilmiş DQ sonlu eleman metodunu kullanarak incelemişlerdir. Rastgele şekildeki izotropik, ortotropik kompozit plakaların ilk 9 mod şeklini, çeşitli sınır şartları için elde etmişlerdir.

Civalek (2013), lineer olmayan Pasternak tip elastik temel üzerindeki dikdörtgen tabakalı kompozit plakanın lineer olmayan dinamik cevabını araştırmıştır. Plakanın modeli olarak birinci mertebe kayma deformasyon teorisini kullanmıştır. Plakanın formülasyonu Von Karman lineer olmayan denklemine dayalıdır. Plakanın lineer olmayan hareket denklemlerini, DSC ve DQ metotlarıyla, uzay ve zaman domaininde ayırtmıştır. Metodun geçerliliği, literatürdeki çalışmalarla kıyaslanarak ispat etmiştir. Temel parametrelerinin, sınır şartlarının, plakanın geometrik parametrelerinin, tabakalı plakanın lineer olmayan dinamik cevabı üzerindeki etkilerini incelemiştir.

Daneshmehr *et al.* (2013), eğilme ve burkulma yüklemesine maruz çatlak kompozit kirişin serbest titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. İfade denklemleri ve sınır şartları, birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı olarak Hamilton prensibiyle türetmişlerdir. Çatlak bölgesinde kirişin sınır şartlarının ilave edilmesinde lokal esneklik matrisini kullanmışlardır. Denklemler ve sınır şartları elde edildikten sonra GDQ metodunu özdeğer problemini çözmek için uygulamışlardır.

Fantuzzi *et al.* (2014), membranların titreşim analizini GDQ sonlu eleman metodunu kullanarak gerçekleştirmişlerdir.

Malekzadeh and Zarei (2014), karbon nanotüp takviyeli, dikdörtgen tabakalı kompozit plakaların serbest titreşim davranışını DQM kullanarak incelemişlerdir. Karbon nanotüpün hacim oranının, geometrik şekil parametrelerinin, kalınlık/uzunluk ve en/boy oranlarının, tabaka kalınlığı boyunca farklı çeşitte karbon nanotüp dağılımlarının ve farklı sınır şartları durumlarının tabakalı plakaların doğal frekansları üzerindeki etkisini araştırmışlardır.

Tornabene *et al.* (2014), eğri tabakalı kompozit kabuk ve plakaların iki boyutlu serbest titreşim analizini, yüksek mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı olarak, GDQ metodunun geliştirilmiş hali olan lokal GDQ metodunu kullanarak çözmüşlerdir. Bu metodun avantajı olarak, daha çok sayıda grid nokta sayısının sonuçların hassasiyetini kaybetmeden uygulanabilmesi olduğunu literatürdeki çalışmalarla kıyaslayarak ispat etmişlerdir.

Asadi and Aghdam (2014), lineer olmayan elastik zemin üzerindeki, simetrik ve asimetrik dizilişe sahip olan çeşitli kesitlerdeki tabakalı izotropik kompozit kirişin büyük genlikli titreşim ve burkulma analizini GDQ metodunu kullanarak araştırmışlardır.

Ansari *et al.* (2015), karbon nanotüp takviyeli kompozit plakaların zorlanmış titreşim davranışını nümerik yaklaşımla incelemişlerdir. Mikromekanik modele göre, kalınlık yönünde fonksiyonel olarak derecelendirilmiş şeklinde takviye düşünmüşlerdir. Birinci mertebe kayma deformasyon teorisi ve Von Karman tip kinematik ilişkileri kullanılmışlardır. Sınır şartları ve ifade denklemleri Hamilton prensibi ile türetilmiştir. Lineer olmayan denklemlerin ayrıştırılmasında GDQ metodunu kullanmışlardır. Karbon nanotüp hacim oranındaki artış ile beraber plakanın eğilme rijitliğinin de arttığını ve bunun sonucunda doğal frekansların arttığı sonucuna varmışlardır.

Mohammad-Abadi and Daneshmehr (2015), değiştirilmiş gerilme çifti teorisini kullanarak tabakalı kompozit kirişlerin titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. Kirişin ifade denklemlerini Hamilton prensibi ile elde etmişlerdir. Euler–Bernoulli, Timoshenko ve Reddy tipindeki üç kiriş modelini incelemişlerdir. Çeşitli sınır şartları ve tabaka diziliş durumlarının etkilerini araştırmışlardır. GDQ metodunu kullanarak, denklemleri nümerik olarak çözmüşler ve doğal frekansları elde etmişlerdir. Aynı zamanda kirişin ifade denklemlerini, fourier serileriyle sınır şartlarını göz önüne alarak analitik olarak çözmüşlerdir. Analitik çözüm ile GDQ metodundan elde edilen sonuçları kıyaslamışlar ve yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini tespit etmişlerdir.

Alibeigloo and Emtemani (2015), üç boyutlu elastisite teorisini kullanarak karbon nanotüp takviyeli kompozit plakaların eğilme ve serbest titreşim davranışlarını incelemişlerdir. Çalışmalarında yarı analitik teknik olarak, düzlemsel koordinatlar boyunca DQ metodunu ve kalınlık yönü boyunca durum uzayı tekniğini kullanmışlardır. Plakanın eğilme ve serbest titreşim davranışları üzerinde polimer matristeki karbon nanotüp dağılım çeşidinin, hacim oranının, kenarların sınır şartları durumunun ve genişlik/kalınlık oranının etkilerini incelemişlerdir.

Baccocchi *et al.* (2016), sürekli bir kalınlık değişimi ile karakterize edilen tek taraflı ve çift taraflı eğimli kabuk elemanın ve plakanın serbest titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. İfade denklemlerinin çözümünde GDQ metodunu kullanmışlardır. Sonuçları literatürde bulunan analitik ve yarı-analitik sonuçlarla ve üç boyutlu sonlu elemanlar modeliyle elde edilen çözümlerle kıyaslamışlardır. GDQ yönteminin sonlu elemanlar yöntemine kıyasla sınırlı bir serbestlik derecesine sahip değişken kalınlıktaki tabakalı kompozit kabukların serbest titreşim analizi için etkili bir sayısal yöntem olduğu sonucuna varmışlardır.

Tornabene *et al.* (2016a), çeşitli çift eğriliğe sahip tabakalı kompozit kabukların değişken kalınlıktaki doğal frekanslarını sayısal olarak değerlendirmek için GDQ yöntemini kullanmışlardır. Hareket denklemlerini Zig-Zag teorisini kullanarak elde etmişlerdir.

Tornabene *et al.* (2016b), karbon nanotüp (CNT) topaklanmasının, tabakalı kompozit çift taraflı eğriliğe sahip kabukların ve karbon nanotüplerle güçlendirilmiş plakaların serbest titreşimleri üzerindeki etkisini araştırmışlardır. GDQ metodunu kullanarak ifade denklemlerini çözmüşlerdir. Takviye fazının özelliklerinden kaynaklanan, topaklanma ve kalınlık boyunca hacim kesir dağılımı gibi etkilerin bu yapıların dinamik tepkisi üzerindeki etkisini incelemek için çeşitli parametrik araştırmalar yapmışlardır.

Tornabene *et al.* (2017), ince ve kalın tabakalı kompozit kabukların doğal frekanslarını analiz etmek için yeni bir yüksek mertebeden yapısal teori sunmuşlardır. Mekanik ve geometrik özellikleri doğrudan kabuk orta yüzeyinde değerlendirmek için eşdeğer tabaka duyarlı yaklaşımını kullanmışlardır. İfade denklemlerini GDQ metodu ile çözerek, sundukları yaklaşımın doğruluğunu mevcut çalışmaların sonuçlarıyla ve sonlu elamanlar paket programları sonuçlarıyla kıyaslayarak ispatlamışlardır.

Nasihatgozar and Khalili (2017), sandviç plakanın serbest titreşim analizini yüksek mertebeden kayma deformasyon teorisini kullanarak incelemişlerdir. Hareket denklemlerini, enerji yöntemine ve Hamilton ilkesine dayanan katmanlar arasındaki süreklilik sınır koşullarını göz önüne alarak türetmişlerdir. Yapının doğal frekans ve mod şekillerini DQM kullanılarak elde etmişlerdir. Yüzeyden merkeze doğru rijitlik oranı değişimi, sınır şartları ve merkezden yüzeye tabaka kalınlığı oranı değişimi gibi parametrelerin sandviç plakanın doğal frekansı üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Civalek (2017), fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden oluşan (FGM) kesik konik panellerin ve halka plakaların serbest titreşim analizini gerçekleştirmiştir. Hareket denklemlerini, Love'ın kabuk teorisi ve birinci mertebeden katma deformasyon teorisi (FSDT) gibi iki farklı kabuk teorisine dayanarak elde etmiştir. Elde edilen ifade denklemlerini DQ ve DSC yöntemlerini kullanarak çözmüştür. Farklı sınır şartları, malzeme ve geometrik parametreler için düğüm noktası sayılarının her bir yöntemin sonuçları üzerindeki etkilerini incelenmiştir.

Ersoy *et al.* (2018), yaptıkları çalışmada kesik konik, dairesel silindirik kabuklar ile halka şeklindeki plakalar gibi eğimli yapı bileşenlerinin serbest titreşim analizi üzerinde çalışmışlardır. Nümerik analizleri DSC ve DQ metotları ile gerçekleştirmişlerdir. Yüksek mertebeden kayma deformasyon teorisi ile ilgili kısmi diferansiyel denklemleri elde etmişlerdir. İzotropik, tabakalı kompozit ve FGM gibi farklı malzeme özelliklerini dikkate almışlardır. Çeşitli geometrik, malzeme özelliklerinin ve düğüm nokta sayısı ile düğüm dağılım tipinin serbest titreşim sonuçlarına etkilerini irdelemişlerdir.

Demir *et al.* (2018), DQM kullanılarak viskoelastik çekirdekli eğri kompozit sandviç kirişlerin titreşim analizi üzerinde çalışmışlardır. Eğri kirişlerin sınır şartları ile beraber titreşim ifade denklemlerinin türetilmesinde virtüel iş prensibini kullanmışlardır. Denklemleri, dönme ataletini ve hem elastik hem de viskoelastik özellikteki tüm tabakaların enine kaymalarını içerecek şekilde türetilmişlerdir. Bu denklemleri nümerik olarak GDQ yöntemi ile çözmüşlerdir. Modelin doğrulanmasını mevcut çalışmalarla ve ANSYS paket programı sonuçlarıyla kıyaslayarak göstermişlerdir. Tabaka kalınlığının, tabaka yönlenme açılarının, çekirdek konumunun, eğrilik derecesi miktarının sandviç eğri kirişin titreşim ve sönümleme karakteristikleri üzerine etkilerini araştırmışlardır.

Fu *et al.* (2019), FSDT'ye dayanan, elastik zemin üzerine oturan tabakalı FGM karbon nanotüp takviyeli kompozit dikdörtgen plakaların statik ve serbest titreşim analizi üzerine çalışmışlardır. Karbon nanotüp dağılımını, plaka kalınlığı boyunca eşit ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş olacak şekilde ele almışlardır. Hamilton prensibi ile hareket denklemleri türetmişlerdir. DQ yöntemi vasıtasıyla denklemleri çözmüşlerdir. Karbon nanotüp hacim oranının, plaka en boy oranının, tabaka sayısının, sınır şartlarının, yönlenme açılarının, karbon nanotüp dağılım çeşidinin doğal frekanslar üzerine etkilerini araştırmışlardır.

Tornabene *et al.* (2019), FSDT ve GDQ yöntemini kullanılarak karbon nanotüp/fiber/polimer tabakalı nano kompozit halka plakaların, konik ve silindirik kabukların serbest titreşim analizini yapmışlardır. Matris malzemesi içinde nano parçacıkların topaklanmasını hesaba katan Eshelby-Mori-Tanaka yaklaşımı vasıtasıyla

hibrit malzemenin mühendislik sabitlerini elde etmişlerdir. Hem karbon nanotüplerin topaklanmasının hem de bu parçacıkların kütle kesiminin yapısal tepki üzerindeki etkilerini, çeşitli homojenleştirme teknikleriyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırarak incelemişlerdir.

Arani *et al.* (2019) yaptıkları çalışmada, çok katmanlı, FGM karbon nanotüp takviyeli kompozit silindirik levhaların serbest ve zorlanmış titreşim analizini incelemişlerdir. Kalın levhalar için geçerli doğrulukta olan Reddy' nin üçüncü dereceden kayma deformasyon teorisine göre modeli oluşturmuşlardır. İfade denklemleri ve sınır koşulları, Hamilton ilkesi kullanılarak türetilmiş ve GDQ ve Newmark beta yöntemlerini kullanılarak sayısal olarak çözmüşlerdir. Hacim oranının, karbon nanotüplerin ve geometrik parametrelerin dağılımının ve yönlenmesinin levhanın doğal frekansları üzerindeki etkisini farklı sınır şartları için araştırmışlardır.

Civalek and Baltacıoglu (2019), tabakalı ve FGM halka sektör plakaların serbest titreşim analizi üzerine çalışmışlardır. FSDT ile Love'ın konik kabuk teorisini kullanarak hareket denklemlerini elde etmişlerdir. Harmonik diferansiyel *quadrature* (HDQ) ve DSC yöntemleri vasıtasıyla bu denklemleri çözmüşlerdir. Yaptıkları bu çalışmada, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler için bileşenlerinin hacim oranları bakımından güç yasası dağılımlarını kullanmışlardır. Halka sektör plakaları için doğal frekans değerlerini, farklı malzeme ve geometrik parametreler, sınır koşulları ve sektör açıları için elde etmişlerdir.

FMT kompozitler, yorulma direnci, yorulma dayanımı, kırılma tokluğu, korozyon direnci ve yoğunluk gibi özelliklerinin klasik malzemelere göre daha üstün olması sebebiyle özellikle otomobil, uçak ve uzay endüstrilerinde yaygın olarak kullanılmaktadırlar (Ghasemi *et al.* 2013b). Bu kompozitlerin çeşitli endüstrilerde talep görmesi nedeniyle, dinamik ve mekanik özelliklerinin belirlenmesi gerekmektedir. FMT kompozit kiriş ve plakaların, Kirchhoff teorisinden farklı olarak enine doğrultudaki normallerin deformasyondan sonra orta düzleme göre dik olarak kaldığı FSDT'yi kullanılarak hareket denklemi elde edilebilmektedir.

Kolar (2002) yaptığı çalışmada, fiber metal tabakalı kompozit kirişlerin enine kayma deformasyonunun titreşim karakteristikleri üzerindeki etkilerini incelemiştir. Rayleigh-Ritz metodu ile kirişin ifade denklemlerini elde etmiştir. Çeşitli sınır şartları durumlarının etkilerini ele almıştır. Tabaka kalınlığının, fiber yönelmesinin ve plaka en/boy oranının titreşim karakteristikleri üzerindeki etkilerini metodolojide belirtildiği şekilde ortaya koymuştur.

Harras *et al.* (2002), yaptıkları çalışmada, glare (cam fiber/epoksi – alüminyum) hibrid kompozit dikdörtgen plakaların doğrusal ve doğrusal olmayan doğal frekans ve mod şekli gibi dinamik özelliklerini hem deneysel hem de sayısal olarak incelemiştir. Ankastre plakanın nonlinear mod şekli ve eğilme davranışını incelemek için Hamilton prensibi ve spektral analizine dayanan bir model kullanmışlardır. Sonlu elemanlar yöntemi ile kıyaslamalar yapmışlar ve cevapları ESDU metodu ile tahmin etmişlerdir. Deneysel ve nümerik sonuçların birbiriyle oldukça uyumlu olduğunu gözlemlemişlerdir.

Secgin *et al.* (2009), kompozit plakaların tasarım parametrelerinin lineer titreşimler üzerindeki etkilerini DSC metodu ile incelemiştir. Öncelikle, simetrik tabakalı kompozit plakaların tabaka sayısı, sınır şartları ve yönelme açısı gibi parametrelerin etkilerini araştırmışlardır. İkinci analiz olarak, E-glass/epoksi, kevlar/epoksi ve karbon/epoksi tabakalı kompozit plakaların karakteristik özellikleri üzerinde malzeme tipinin, sınır şartlarının ve tabaka diziliş şeklinin etkilerini araştırmışlardır. Sonrasında, FMT kompozit plakaların lineer modal karakteristik özelliklerini incelemişler ve DSC metodunun uygulanabilirliğini göstermişlerdir.

Ghasemi *et al.* (2013b), FMT kompozit plakaların basit mesnetli durum için hareket denklemlerini FSDT ve fourier serileri metotlarını kullanarak serbest titreşimlerini analitik olarak çözmüşlerdir. Kullanılan bu yöntemlerin doğruluğu Rayleigh-Ritz yöntemi ve sonlu elamanlar yöntemi ile kıyaslayarak ortaya koymuşlardır. Metal katmanlarının dizilişi, plakanın en boy oranı, fiberlerin yönelme durumu gibi bazı önemli parametrelerin serbest titreşim üzerinde önemli bir etkisi olduğu sonucuna varmışlardır.

Ravishankar *et al.* (2016), dönen ve dönmeyen FMT kirişlerin, hibrit kompozit kirişlerin ve FGM kirişlerin serbest titreşim analizini ANSYS sonlu elemanlar paket programı vasıtasıyla incelemişlerdir. Modelin doğruluğunu mevcut çalışmalarla kıyaslayıp teyit ettikten sonra farklı metal alaşımlarının, fiber çeşitlerinin, farklı en boy oranlarının ve açılal hızların kirişin serbest titreşim analizine etkilerini araştırmışlardır. Karbon/epoksi bazlı FMT kompozitlerin, herhangi bir en boy oranı için diğler fiber bazlı FMT kompozitlere göre daha yüksek bir frekansa sahip olduğu sonucuna varmışlardır. FMT kompozitlerden, en boy oranı azaldıkça birinci doğal frekansın da arttığını göstermişlerdir. FGM kirişlerde güç yasası gradyanı arttıkça doğal frekansın azaldığını belirtmişlerdir. Ayrıca açılal hız arttığında doğal frekansın arttığını da tespit etmişlerdir.

Tao *et al.* (2017), hareketli yüke maruz bırakılan bir sönümleyiciye sahip, çatlak FMT kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimleri ile sürekli dalgacık dönüşümü kullanılarak çatlakların tespit edilmesi üzerine çalışmışlardır. Kirişi, Euler-Bernoulli teoremine dayalı olarak ele almışlar ve çatlağı, kesitsel esnekliğe sahip dönel yay olarak modellemişlerdir. Sayısal sonuçları bulmak için Newmark metodunu kullanmışlardır. Çatlak derinliğinin, çatlak yerinin, fiber açısının, sönümleyici rijitlik katsayısının ve hareketli yükün hızının serbest ve zorlanmış titreşim üzerindeki etkilerini incelenmişlerdir.

Prasad and Sahu (2017), yaptıkları çalışmada, FMT kompozit plakaların serbest titreşim analizini hem deneysel hem de nümerik olarak incelenmişlerdir. Birinci dereceden Reissner/Mindlin plaka teorisi kullanılarak sonlu elemanlara dayalı bir model oluşturmuşlardır. Her düğümde 5 serbestlik derecesine sahip, dört nodlu izoparametrik kuadratik elemanı kullanmışlardır. FMT plakanın en boy oranının artmasıyla birlikte doğal frekansın da arttığını sonucuna varmışlardır. En yüksek doğal frekanslar, plakanın dörtkenarının ankastre sınır şartına sahip olduğu durumda elde edilmiştir.

Prasad and Sahu (2018), farklı fiber ve metal katmanlara sahip tabakalı hibrit kompozit plakaların, birinci dereceden Reissner-Mindlin teorisine dayalı olarak sonlu elemanlar yöntemi ve deneysel çalışma ile serbest titreşim analizi üzerine çalışmışlardır. Sonlu elemanlar analizi için MATLAB ortamında bir bilgisayar kodu geliştirmişlerdir. Çekme

testi ile malzemelerin elastik özelliklerini belirlemişlerdir. En boy oranı, fiber yönlenme açısı ve sınır şartları gibi farklı parametrelerin FMT kompozit plakaların dinamik davranışı üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. En/boy oranının ve tabaka oryantasyon açılarının artmasıyla birlikte doğal frekansın da arttığı sonucuna varmışlardır.

Han *et al.* (2018), eksenel olarak mekanik yüklemeye maruz kalan FMT kompozit kirişlerin serbest titreşimini, burkulma davranışlarını araştırmak için yarı-3D zik-zag kiriş teorisini geliştirmişlerdir. Çeşitli sınır koşulları için ilgili özdeğer problemleri Ritz metodu kullanılarak türetilmiştir. Teorik tahminlerin doğruluğu literatürdeki sonuçlarla ve sunulan sonlu elemanlar simülasyonu ile kıyaslanarak ispat etmeye çalışmışlardır. Farklı sınır koşullarının, geometrik parametreler ve malzeme özelliklerinin ve sıcaklık değişiminin etkilerini incelemişlerdir.

Hanten *et al.* (2018), Carrera'nın birleşik formülasyonunu kullanarak FMT kompozit kirişlerin hareket denklemlerini elde etmişlerdir. Navier tipi, kapalı formda bir çözüm kullanmışlardır. Eğilme, burkulma, eksenel ve kayma modlarıyla ilgili doğal frekansları araştırılmışlardır.

Merzuki *et al.* (2019), FMT kirişlerin titreşim davranışını, ankastre-serbest sınır şartı için deneysel olarak incelemişlerdir. Numuneleri presleme ve vakum torbalama yöntemleri ile üretmişlerdir. Kompozit malzemelerin kür işlemi sırasında uygulanan farklı basınçtan dolayı farklı kalınlıklar meydana geldiğini belirtmişlerdir. Kirişlerin kalınlığındaki artış ile beraber doğal frekansın daha yüksek olduğunu gözlemlemişlerdir.

Yapılan bu lineer titreşim analizlerinin yanısıra bu yapıların lineer olmayan serbest ve zorlanmış titreşim davranışlarının da incelenmesi gerekmektedir. Shooshtari and Razavi (2010) yaptıkları çalışmada, tabakalı kompozit dikdörtgen plakalar için nonlinear hareket denklemlerini kayma deformasyon teorisine bağlı olarak türetmişlerdir. Bu denklemleri başlangıç bir zorlama kuvveti yoluyla birbirine bağlı olan bir takım nonlinear kısmi diferansiyel denklemler haline ve Galerkin metodu ile nonlinear adi diferansiyel denklemler haline indirgemişlerdir. Çoklu zaman ölçekleri metodunu kullanarak

nonlinear frekans ve enine deplasman için analitik ilişkiyi elde etmişlerdir. FMT plakaların lineer ve nonlinear serbest titreşimini incelemişlerdir.

Shooshtari and Razavi (2014), simetrik olmayan açılı takviyeli dikdörtgen kompozit plakaların nonlinear hareket denklemlerini birinci mertebe kayma deformasyon teorisini kullanarak elde etmişlerdir. Galerkin metodunu kullanarak 5 adet birbirine bağlı nonlinear diferansiyel denklemleri, nonlinear adi diferansiyel denklemler haline getirmişlerdir. Nonlinear frekans için analitik bağıntıyı ve elde edilen denklemleri çözmek için çoklu zaman skala metodunu kullanmışlardır. Sonuçların literatürdeki çalışmalarla uyumlu olduğunu göstermişlerdir. Çalışmanın uygulanabilirliğini tespit ettikten sonra FMT dikdörtgen plakaların nonlinear serbest ve zorlanmış titreşimlerini incelemişler ve bazı sistem parametrelerinin bu malzemelerin nonlinear davranışı üzerindeki etkilerini araştırmışlardır.

Tao *et al.* (2016), ısı ortamlarda hareketli yüklere maruz kalan FMT kirişlerin doğrusal olmayan dinamik davranışlarını üzerine çalışmışlardır. Von Karman geometrik doğrusal olmayan teori baz alınarak, Hamiltom prensibi ile hareket denklemini türetmişlerdir. Denklemleri sayısal olarak çözmek için Galerkin ve Newmark metodunu kullanılmışlardır. Çeşitli yükleme hızı, sıcaklık artışı ve malzeme parametreleri durumlarındaki dinamik cevabı elde edip, bunları lineer analiz sonuçlarıyla kıyaslamışlardır.

FMT yapıların titreşim karakteristikleri ile beraber Young modülü ve sönüm oranının belirlenmesi de büyük önem arz etmektedir. Liu and Liaw (2002), fiber metal tabakalı kompozit kirişlerin, zorlanmış titreşim durumu için Young modülü ile sönüm oranının belirlenmesi üzerinde çalışmışlardır. Malzeme olarak alüminyum katmanlı, cam fiber takviyeli Glare ve aramid elyaf takviyeli kompozit kirişleri incelemişlerdir. Alüminyum alaşımı ile karşılaştırıldığında FMT kompozitlerin Young modülünün daha düşük olduğunu belirlemişlerdir. Deneysel olarak elde edilen doğal frekans değerlerinin, modal analiz ile elde edilen değerlerden biraz daha düşük olduğunu tespit etmişlerdir.

Yapılan bu dinamik analizlerin öncesinde malzemenin mekanik özelliklerinin tespiti gerekmektedir. FMT kompozitlerin elastik ve viskoelastik özelliklerinin belirlenmesi hususunda kompozit mikro mekanik yaklaşımı ile hesaplanan elastisite modülü deneysel sonuçlarla karşılaştırılabilmektedir. Alüminyum 2024 alaşımı ve fiber metal kompozitlerde storage modülü ve kayıp faktörü gibi parametreler, FMT kompozitlerin viskoelastik davranışlarını tahmin etmek için kullanılabilmektedir (Botelho *et al.* 2005).

Cicco and Taheri (2018) yaptıkları çalışmada, 3D-FMT malzemelerin etkin elastik ve titreşim özelliklerini (sönüm katsayılarını) değerlendirmek için basit, tahribatsız bir sonik tekniğin (GrindoSonic) doğruluğunu göstermişlerdir. GrindoSonic tarafından görüntülenen frekansı, sonlu elemanlar analizinden elde edilen frekans ile karşılaştırmışlardır. Bu teknik vasıtasıyla ölçülen eşdeğer malzeme özelliklerinin, bir malzeme sisteminin eğilme rijitliğini doğru bir şekilde belirlemek için kullanılabileceğini göstermişlerdir.

Dinamik ve mekanik karakteristiklerin belirlenmesi ile beraber FMT kompozit yapıların geometrik parametrelerinin optimizasyonu da büyük bir önem arz etmektedir. Sadr *et al.* (2011) yaptıkları çalışmada, FMT kompozit plakaların doğal frekanslarını elde etmek için istifleme durumu tasarımında parçacık sürü optimizasyonu (PSO) algoritmasını uygulamışlardır. Katman sayısı, fiber yönelme açısı, kenar durumları, plaka uzunluk/genişlik oranı gibi parametrelerin etkilerini incelemişlerdir. Klasik tabakalı plaka teorisini doğal frekansları elde etmek için kullanmışlardır.

Ghashochi-Bargh and Sadr (2017), yaptıkları çalışmada, FMT kompozit kabul panellerin tabaka dizilimi optimizasyonunda, doğal frekanslarını maksimize etmek için parçacık sürü algoritması (PSO) ile sonlu şerit yöntemlerinin kombinasyonundan oluşan bir metodu kullanmışlardır. Doğal frekansları hesaplamak için klasik kabuk teorisini baz alarak, MAPLE yazılımında program geliştirmişlerdir. Nümerik sonuçlar incelendiğinde, PSO algoritmasının diğer algoritmalara göre daha iyi bir yakınsamaya sahip olduğu sonucuna varmışlardır.

Kiriş ve plakalardan farklı olarak titreşim karakteristiklerinin analizi daha kompleks olan ve uzay araçlarında, tanklarda, robotlarda vb. alanlarda kullanılan eksenel yüklemeli ve iç basınçlı konik veya silindirik kabuk şeklindeki FMT yapıların da dinamik ve mekanik davranışlarının incelenmesi gerekmektedir. Khalili *et al.* (2010) yaptıkları araştırmada, eksenel yüklemeli ve iç basınçlı FMT silindirik kabukların dinamik cevaplarını incelemişlerdir. Kabuk elemanın denge denklemlerini FSDT ile elde etmişlerdir. Galerkin metodu ile ifade edilen denklemleri çözmüşlerdir. İstifleme durumu, fiber yönelmesi, dinamik cevap üzerindeki başlangıç gerilmeleri gibi fiber metal tabaka parametrelerinin etkilerini incelemişlerdir. İstiflemenin doğal frekanslar üzerinde oldukça etkili olduğu sonucuna varmışlardır.

Malekzadeh *et al.* (2010), hibrit kompozit malzemeden oluşan tabakalı silindirik kabukların dinamik cevabı üzerinde çalışmışlardır. Ankastre-serbest sınır şartı durumunu göz önüne almışlardır. Kabuğun ifade denklemlerini FSDT kullanarak elde etmişlerdir. Serbest ve zorlanmış titreşim problemleri için denklemleri Galerkin metodunu kullanarak çözmüşlerdir. FMT silindirik kabukların yer değiştirme-zaman cevabını için mod süperpozisyon metodunu kullanmışlardır. İstifleme durumu, malzeme özellikleri, fiber yönelmesi ve metal katmanının hacim oranı gibi parametrelerin kabuğun dinamik cevap üzerindeki etkilerini araştırmışlardır.

Ghasemi *et al.* (2013a), konik FMT kabukların serbest titreşim analizi için analitik bir çözüm geliştirmişlerdir. Galerkin metodunu kullanarak kabuğun ifade denklemlerini çözmüşlerdir. Kiriş fonksiyonlarını kullanarak, kabuğun frekans cevabı üzerinde farklı sınır şartlarının, geometrik parametrelerin ve alüminyum katman sayısının etkisini araştırmışlardır. Kullanılan alüminyum katman sayısı arttıkça doğal frekans değerlerinin de arttığı sonucuna varmışlardır. Ankastre-serbest sınır şartında alüminyum katmanı, tabakanın en alt ve en üstünde yer alması durumunda doğal frekansların maksimum değerlerini aldığını ifade etmişlerdir.

Mohandes *et al.* (2018), tabaka yerleşiminin, metallerin hacim oranının, fiberlerin oryantasyon açılarının ve eksenel ve çevresel dalga sayılarının FMT ince dairesel

silindirik kabukların titreşimine etkilerini araştırmışlardır. Analitik bir çözüm kullanarak kabuğun serbest titreşimini, farklı sınır koşullarında analiz etmişlerdir.

Ghasemi and Mohandes (2018), değiştirilmiş gerilme çifti teorisini kullanarak mikro ve nano FMT silindirik kabukların doğal frekanslarını elde etmişlerdir. Hareket denklemi ve sınır şartlarını Love' ın kabuk teorisi yaklaşımı vasıtasıyla türetmişlerdir. Serbest titreşim analizinde kiriş modal fonksiyon modelini kullanmışlardır. Kabukların doğal frekanslarını farklı hacim oranları, malzeme parametreleri, uzunluk/yarıçap oranı, eksenel ve çevresel dalga sayıları için hesaplamışlardır.

Ghasemi and Mohandes (2019), FMT dönel ince dairesel silindirik kabukların serbest titreşimi analizini yapmışlardır. Birim şekil değiştirme- yer değiştirme ilişkisini, Love' ın kabuk teorisini baz alarak tanımlamışlardır. Farklı dönme hızları, çevresel dalga sayıları, malzeme kalınlığı, hacim oranları gibi durumlarda, titreşim değerlerindeki değişimi ifade etmişlerdir.

Mohandes and Ghasemi (2019), farklı sınır şartı durumları için tek cidarlı karbon nanotüp takviyeli FMT ince dairesel silindirik kabuğunun serbest titreşim analizini yapmışlardır. Birim şekil değiştirme- yer değiştirme ilişkisini elde etmek için Love' ın kabuk teorisini kullanmışlar ve hareket denklemlerini kiriş modal fonksiyon modelini kullanarak elde etmişlerdir. Karbon nanotüplerin kütle oranının, fiber ve metalin hacim oranının, eksenel ve çevresel mod sayılarının ve farklı karbon nanotüp dağılımlarının kabuğun titreşimi üzerindeki etkilerini araştırmışlardır.

FMT silindirik kabukların, düşük hızlı darbe davranışlarını analiz etmek için yüksek dereceden kabuk teorileri kullanılabilmektedir. Kabuğun hareket denklemlerini fourier serilerini kullanarak çözülebilmektedir. Metal hacim oranı, tabakanın istifleme durumu gibi parametrelerin, darbe cevabı üzerindeki etkileri incelenebilmektedir (Davar *et al.* 2014).

Fiber metal katmanlı kompozit kiriş ve plakaların DQ metodlarının kullanılarak serbest titreşim analizi ile ilgili literatürde çok az sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalarda, halka şeklindeki plaka ve Timoshenko kiriş şeklindeki yapılar analitik ve nümerik olarak analiz edilmiştir. Yapılan çalışmalar aşağıda verildiği gibi özetlenmiştir.

Rahimi *et al.* (2014), FMT halka şeklindeki plakanın serbest titreşim analizini durum uzay esaslı DQ metodunu kullanarak gerçekleştirmişlerdir. Genel denklemler elastisite teorisi ile elde etmişlerdir. Bu denklemler DQ metodu, durum uzayı ve fourier serileri yöntemlerinin kombinasyonu kullanılarak plakanın boyutsuz doğal frekanslarını belirlemek için çözmüşlerdir. Kompozit malzemenin türü ve metal katmanının türü olarak sırasıyla S2 cam ve alüminyum olarak ele alınmış, en alt ve en üst tabakada alüminyum ve iç katmanlarda kompozit malzeme olacak şekilde dört katmanlı bir malzeme kullanmışlardır. Sonuçlar ABAQUS yazılımı sonuçlarıyla da karşılaştırılmış ve birbiriyle oldukça uyumlu olduğunu belirtmişlerdir. Sınır şartlarının, plaka kalınlığının, delik yarıçapının ve elle yatırma yönünün doğal frekanslar üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Delik çapının artması ile beraber plakanın efektif yarıçapının azaldığını ve bu da plakanın rijitliğini arttırdığını belirtmişlerdir. Böylelikle doğal frekansların da arttığını belirtmişlerdir. Plakanın ankastre-ankastre sınır şartında serbestlik derecesinin daha az olması ve bunun da plakanın rijitliğini arttırması dolayısıyla basit mesnetli duruma göre doğal frekans değerlerinin büyük olduğu sonucuna varmışlardır.

Fu *et al.* (2014), FMT kompozit kirişlerin lineer olmayan dinamik cevabı üzerinde çalışmışlardır. Timoshenko kiriş teorisine dayalı ve geometrik olarak lineer olmayan kirişin enine kayma deformasyonu, sıcaklık etkisi, temas etkisi gibi etkileri incelemişler ve kirişin ifade denklemini DQM ile çözmüşlerdir. Nümerik uygulamalarda cam elyaf takviyeli alüminyum tabakalı kirişin lineer olmayan dinamik cevabı üzerinde, katmanların uzunluğu, derinliği, sıcaklık alanı, geometrik nonlineerite ve enine kayma deformasyonunun etkisini araştırmışlardır.

Shao *et al.* (2015), FMT plakaların değişken sıcaklıklardaki nonlineer dinamik cevabını ve piezoelektrik aktüatörler ve sensörler ile aktif kontrolünü gerçekleştirmişlerdir.

Hareket denklemlerinin elde edilmesinde Hamilton prensibini kullanmışlardır. Lineer olmayan diferansiyel denklemleri DQ ve Galerkin yöntemleri ile çözmüşlerdir. Uygulanan voltajın, sıcaklık durumunun ve geometrik parametrelerin etkisini araştırmışlardır.

Fu and Tao (2016), termal şoka maruz kalan viskoelastik FMT kirişler için lineer olmayan dinamik cevabını incelemişlerdir. Von Karman geometrik lineer olmayan teoriye ve Timoshenko kiriş hipotezine dayanarak ve Hamilton ilkesini kullanarak, hareket denklemlerini türetmişlerdir. DQ ve Newton iterasyon yöntemlerini kullanarak denklem setini çözmüşlerdir. Sıcaklığın, geometrik doğrusalsızlığın ve malzeme özelliklerinin dinamik cevaba olan etkilerini irdilemişlerdir.

Moraveji Tabasi *et al.* (2020), GDQ metodunu kullanarak, bütün ve kısmi elastik zemin üzerindeki FMT plakaların serbest titreşim analizi üzerine çalışmışlardır. Plakanın oturduğu elastik zemini, Winkler ve Pasternak tipinde ele almışlardır. FSDT'yi göz önüne alarak FMT plakayı modellemişler, hareket ve sınır şartları denklemlerini Hamilton ilkesini kullanılarak türetmişlerdir. Nümerik çözümleri GDQ metodu ile elde etmişlerdir. Yay sabitinin, elastik zemin parametresinin, malzeme kalınlık oranının, mod numarasının ve sınır şartlarının kritik burkulma yükünün düzlem içi kuvvet altındaki kısmi temel üzerine oturan FMT plakanın doğal frekansında önemli bir rol oynadığı sonucuna varmışlardır.

1.2. Tezin Amacı ve Kapsamı

Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde genel olarak kompozit kiriş, plaka ve kabuk gibi elemanların serbest titreşim analizinde, klasik plaka teorisi, birinci mertebe kayma deformasyon teorisi ya da yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi dikkate alınarak Hamilton prensibi ile sistemin diferansiyel denklemleri türetilmiştir. DSC metodu, Rayleigh-Ritz yöntemi, Galerkin yöntemi, Elastisite teorisine dayalı durum uzayı yöntemi, Sonlu elemanlar yöntemi ve DQ yöntemi gibi çözüm teknikleri kullanılarak diferansiyel denklemler çözülmüş, yapının doğal frekansları ve dolayısıyla mod şekilleri

elde edilmiştir. Yapıların geometrik parametrelerinin, malzeme özelliklerinin, sınır şartlarının serbest titreşim cevabı üzerinde etkileri incelenmiştir. Yapılan literatür incelemesi sonucu DQ metotlarının, FMT kompozit dikdörtgen plakaların serbest titreşim analizinde kullanılması ile ilgili sınırlı sayıda çalışma mevcuttur. Bu alandaki önemli bir eksikliği gidermek ve başka alandaki çalışmalara temel oluşturması açısından bu tez kapsamında diğer çalışmalardan farklı olarak; üretilecek olan farklı FMT kompozit plakaların serbest titreşim analizi üzerinde geometrik parametrelerinin, malzeme özelliklerinin, sınır şartlarının etkileri hem DQ metotları ile nümerik olarak hem de deneysel olarak incelenmiştir.



2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Kompozit Malzemeler

Kompozit, makroskopik olarak birleştirilen ve birbirlerinde çözünmeyen iki veya daha fazla farklı bileşenden oluşan yapısal bir malzemedir (Mazumdar 2001). Kompozit malzemeleri oluşturan bileşenlerden bir tanesine takviye elemanı adı verilmektedir. Diğer bileşen ise takviye elemanını içerisinde barındıran matris elemanıdır. Takviye elemanları elyaf, parçacık veya kılcal kristaller şeklinde olabilmektedir. Matris malzemeleri olarak da metaller, plastikler veya seramikler kullanılabilir. Takviye elemanı, kompozitin maruz kalacağı yükün taşınmasını sağlamakta, yapıya rijitlik ve dayanım kazandırmaktadır. Matris elemanı ise takviye elemanının birbirine bağlanmasını, yükün elyaflara aktarılmasını, takviye elemanının çevresel etmenlere karşı korunmasını ve bir fiberden diğerine lokal gerilme aktarımını sağlamaktadır. (Kaw 2005).

2.2. Kompozit Malzemelerin Sınıflandırılması

Kompozit malzemeler takviye elemanının geometrisine göre partikül, pul ve fiber şeklinde veya matris malzemesinin çeşidine göre polimer, metal, seramik ve karbon olarak sınıflandırılmaktadır.

2.2.1. Takviye elemanı geometrisine göre kompozitler

Parçacık takviyeli kompozitler, alaşımlar ve seramikler gibi matris ve içerisine katılmış parçacıklardan meydana gelir. Bunlar genellikle izotropiktir çünkü parçacıklar matris içerisinde rastgele dağılmaktadır. Partiküllü kompozitler, yüksek mukavemet, yüksek çalışma sıcaklığı, oksidasyon direnci gibi avantajlara sahiptir. Kauçuk içerisinde alüminyum parçacıklarının kullanımı, alüminyum içerisinde silisyum karbür parçacıklarının kullanımı ve beton yapımında çakıl, kumun kullanımı örnek verilebilir.

Pul, matris malzemesi içerisinde büyük bir kullanım alanına sahip takviye elemanlarıdır.. Bu tür malzemelere örnek olarak cam, mika, alüminyum ve gümüş verilebilir. Yüksek düzlem dışı eğilme katsayısı, yüksek mukavemet ve düşük maliyet gibi avantajları vardır. Ancak, parçalar kolayca yönlendirilememektedir ve yalnızca sınırlı sayıda malzeme çeşidi bulunmaktadır.

Fiber takviyeli kompozitler en çok kullanılan kompozit türüdür. Mukavemet ve rijitlik değerleri oldukça iyidir. Kısa (süreksiz) veya uzun (sürekli) elyaflarla takviye edilmiş matrislerden oluşur. Fiberler genellikle anizotropiktir ve cam, karbon ve aramid malzemeden üretilir. Matris malzemesi ise epoksi, alüminyum gibi metaller ve kalsiyum-alümino silikat gibi seramiklerdir. Sürekli elyaflar ya tek yönlü ya da dokuma elyaf tabakalarıdır. Çok yönlü bir yapı oluşturmak için elyaf tabakalar birbirlerinin üzerine çeşitli açılarla istiflenmektedir.

Nanokompozitler, nanometre ölçeğinde (10^{-9} m) olan malzemeler içeren yapılardır. Nanokompozit olarak sınıflandırılma yapılabilmesi için, bileşenlerden birinin 100 nm'den az olması gerekmektedir. Genel olarak ileri kompozit malzemeler mikro ölçekte (10^{-6} m) bileşenlere sahiptir. Nanometre ölçeğinde elde edilen kompozit malzemenin özelliklerinin çoğu, mikro ölçekte olanlardan daha iyidir. Bununla birlikte, nanokompozitlerin bazı durumlarda tokluk ve darbe dayanımı düşük olabilmektedir (Kaw 2005).

2.2.1.a. Fiber çeşitleri

En çok kullanılan fiber malzeme çeşitleri cam, karbon, aramid, karbon nanotüp, karbon nanofiber ve boron fiberlerdir.

Cam fiber: Kum, kireçtaşı ve diğer oksidik bileşiklerin bir karışımından üretilen amorf bir maddenin işlenmesiyle elde edilmektedir. Cam elyafların temel kimyasal bileşeni silikadır. Kimyasal bileşimi ve üretim prosesini kontrol ederek, farklı uygulama türleri için çok çeşitli cam elyaflar elde edilebilmektedir. Sertlik, yüksek mukavemet, korozyon

direnci, hafiflik, düşük maliyet gibi özellikleri vardır. Bu özellikler sayesinde cam elyaflar, düşük maliyetli endüstriyel uygulamalarda kullanılan en yaygın tipte fiber çeşididir (Barbero 2017).

Karbon fiber: Grafit fiber olarak da adlandırılan karbon fiberler, mükemmel kimyasal dirence sahip, hafif, yüksek özgül mukavemet, düşük ısı genleşme katsayısı, yüksek yorulma direnci gibi özelliklere sahip bir elyaf çeşididir. Bu özellikleri sebebiyle havacılık uygulamalarında oldukça sık kullanılmaktadır. Karbon fiberlerin mekanik özellikleri, karbon zincirlerinin atomik şekli ve grafit kristal yapısına benzer bağlantıları ile belirlenmektedir. Karbon atomik yapılar, karbon fiber yönü boyunca en güçlü atomik bağlantıları ile yönlendirilerek kontrol edilebilmektedir. Dezavantajları arasında yüksek maliyet, düşük darbe direnci ve yüksek elektrik iletkenliği bulunmaktadır.

Aramid fiber: Karbon, hidrojen, oksijen ve azottan yapılmış aromatik bir organik bileşikten meydana gelmektedir. Avantajları, düşük yoğunluk, yüksek çekme mukavemeti, düşük maliyet ve iyi darbe dayanımıdır. Dezavantajları ise düşük basma dayanımı ve güneş ışığındaki bozulmasıdır.

Boron fiber: Tungsten telinde kimyasal buhar biriktirme ile üretilir. Yüksek sertlik, yüksek mukavemet ve düşük yoğunluk gibi özelliklere sahiptirler. En çok havacılık ve spor ürünlerinde takviye elemanı olarak kullanılırlar. Mekanik özelliklerini yüksek sıcaklıklarda korumaktadırlar. Ayrıca yüksek tokluk, yüksek yorulma dayanımı ve çok iyi bir basma davranışı sergilemektedirler. Düşük üretim hızı nedeniyle tüm elyaf üreticileri arasında en pahalı olan elyaf çeşididir.

Seramik fiber: Seramik elyaflar yüksek sıcaklık uygulamaları için kullanılmaktadırlar. Silisyum Karbür (SiC) elyafları, bir karbon substratı üzerinde bor elyafı gibi üretilmektedir. Titanyum gibi metal matrisler için oldukça iyi bir takviye elemanı özelliğine sahiptirler. Ayrıca, sıcaklığa dayanıklı polimerik matrislerle birlikte de kullanılmaktadırlar. Yüksek mukavemet, yüksek sıcaklık dayanımı gibi avantajlara sahiptirler. Fakat düşük üretim hacminde dolayı maliyetleri yüksektir (Barbero 2017).

2.2.2. Matris malzemesine göre kompozitler

Kompozit malzemeler matris malzemesine göre polimer, metal, seramik, karbon olarak sınıflandırılmaktadır.

2.2.2.a. Polimer matris kompozitler

Küçük çaplı fiberlerle (örneğin grafit, aramidler, bor) takviye edilmiş bir polimerden (örneğin, epoksi, polyester, fenolik, akrilik, üretan, poliamid) oluşan polimer matris kompozitler en çok kullanılan kompozitlerden birisidir. Düşük maliyetli, yüksek mukavemet ve kolay imal edilebilirlik gibi avantajlara sahiptirler. Polimer matrisli kompozitler termoset ve termoplastik olarak ikiye ayrılmaktadır. Termoset polimerler kürlenmeden sonra erimez ve çözünmezler çünkü zincirler güçlü kovalent bağlarla bağlıdır. Termoplastikler ise, zayıf ve van der Waals tipinde bağlara sahip olduklarından yüksek sıcaklıklarda ve basınçta şekillendirilebilirler. Termoset örnekleri arasında epoksiler, polyesterler, fenolikler ve poliamid yer almaktadır. Termoplastiklerin tipik örnekleri arasında polietilen, polistiren, polieter-eter-keton ve polifenilen sülfid bulunur (Kaw 2005).

Polyester reçineler: Polyester reçineler düşük maliyetli, düşük viskoziteli, yarı saydam olma kabiliyeti gibi özelliklere sahiptirler. Düşük çalışma sıcaklığı, kırılganlık gibi dezavantajları da mevcuttur.

Fenolik reçineler: Avantajları şunlardır; düşük maliyete, sıcaklık artışları altında gelişkin boyutsal kararlılığa, iyi yapışkanlık özelliğine, yüksek mukavemete sahiptirler. Dezavantajları ise yüksek boşluk içermeleridir.

Epoksi reçineler: En yaygın kullanılan reçinelerdir. Epoksit grupları içeren düşük moleküler ağırlıklı organik sıvılardır. Epiklorohidrinin, fenoller veya aromatik aminler ile reaksiyonu epoksilerin çoğunu oluşturmaktadır. Yüksek mukavemet, yüksek korozyon direnci, düşük viskozite, kürlenme sırasında düşük uçuculuk, metallere ve

camlara iyi yapışma gibi özelliklere sahiptirler. Dezavantajları ise yüksek maliyet ve işleme zorluğudur. Havacılık uygulamalarında oldukça yaygın olarak kullanılmaktadırlar (Barbero 2017).

Prepregler: Elle tabakalama veya kalıplama işlemlerinde daha sonra kullanılmak üzere saklanan, reçine emdirilmiş bir elyaf veya kumaştan oluşurlar (Mazumdar 2001). Polimer matrisin termoset veya termoplastik olmasına bağlı olarak, bir buzdolabında veya oda sıcaklığında saklanırlar. Bu malzemelerin üretiminde tam bir kütleme işlemi yapılmamaktadır. İstenildiği zaman ve reçinenin mümkün kıldığı sıcaklık ve basınç koşullarına göre istenilen üretim parametreleri baz alınarak proses gerçekleştirilebilmektedir. Prepreg imalat aşaması; kalıp kullanılarak prepreg tabakaların rulodan kesilmesi, istenilen fiber açılarında prepreglerin üst üste dizilmesi, reçinenin kürlenmesi, kesme, delme ve birleştirme işlemleri ile montaja uygun duruma getirilmesi şeklindedir.

2.2.2.b. Metal matris kompozitler

Metal matris kompozitler adından da anlaşılacağı gibi, metal matrisine sahiptir. Bu tür kompozitlerde matris malzemeleri alüminyum, magnezyum ve titanyum içermektedir. Fiber malzemeleri ise karbon ve silisyum karbür içermektedir. Metal matrise, tasarımın gereksinimlerine göre malzeme özelliklerinin geliştirilmesi veya kötüleştirilmesi için takviye elemanı ilave edilir. Örnek olarak, silisyum karbür gibi fiber ilavesiyle, metallerin elastik rijitliği ve mukavemeti arttırılabilirken, termal genleşme ve ısı, elektrik iletkenlik katsayıları azaltılabilir. Metal matris kompozitler, alüminyum ve titanyum gibi düşük yoğunluklu metallerle takviye edilerek daha yüksek spesifik mukavemetin elde edilmesi; grafit gibi düşük termal genleşme katsayısına sahip fiberlerle takviye edilerek düşük termal genleşme katsayılarına sahip olunması ve yüksek sıcaklıklarda mukavemet özelliklerin korunması gibi avantajlara sahiptir (Kaw 2005).

2.2.2.c. Seramik matris kompozitler

Karbon veya silisyum karbür gibi fiberlerle takviye edilmiş alümina kalsiyum, alümina silikat gibi seramik bir matrise sahiptirler. Avantajları arasında; yüksek mukavemet, sertlik, yüksek çalışma sıcaklığına dayanıklılık, yüksek elastisite modülü, rijitlik ve düşük yoğunluk bulunmaktadır. Fakat seramikler düşük kırılma tokluğu özelliği göstermektedir. Bu dezavantajı giderebilmek için seramikler, silisyum karbür veya karbon gibi fiberlerle güçlendirilerek kırılma tokluğu artırılmaktadır (Kaw 2005).

2.2.2.d. Karbon - karbon matris kompozitler

Bir karbon matrisine karbon elyafı takviye edilmesiyle meydana gelen kompozitlerdir. Avantajları arasında; yüksek sıcaklıklara dayanma, düşük yoğunluk, iyi basma dayanımları, yüksek yorulma direnci, yüksek ısı iletkenliği ve yüksek sürtünme katsayısı gibi özellikler bulunmaktadır. Dezavantajları arasında ise yüksek maliyet, düşük kayma mukavemeti ve yüksek sıcaklıklarda oksitlenmeye yatkınlık bulunmaktadır (Kaw 2005).

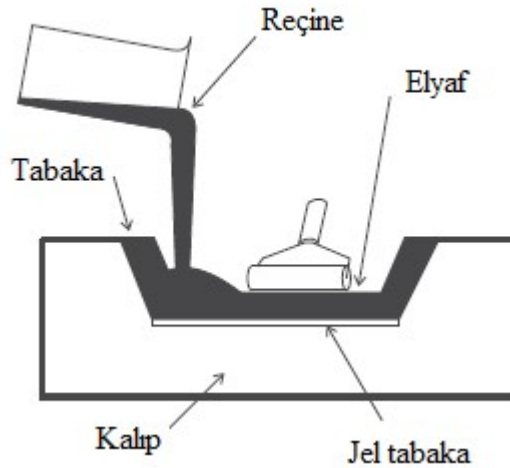
2.3. Kompozit Malzemelerin Üretim Yöntemleri

Kompozit malzemelerin geleneksel malzemelere göre üstün mekanik özelliklerinin olması sebebiyle üretim yöntemleri de önem arz etmektedir ve bu konuda birçok üretim yöntemi bulunmaktadır. Bunlardan en çok kullanılan yöntemler; el yatırma, vakum torbası, elyaf sarma, püskürtme ve sıcak preslemedir.

2.3.1. El yatırma yöntemi

El yatırma tekniği, en basit ve en yaygın kullanılan imalat işlemidir. Temel olarak, takviye elemanının kalıp içerisine elle yerleştirilmesi ve üzerine reçine uygulanması şeklindedir (Şekil 2.1). Daha sonra ıslak kompozit, homojen reçine dağılımını sağlamak ve hava kabarcıklarının çıkarılmasını kolaylaştırmak için bir rulo veya fırça yardımıyla

yuvarlanmaktadır. Bu işlem istenen kalınlığa ulaşıncaya kadar tekrar edilir. El yatırma işlemi dört temel adıma ayrılabilir: kalıp hazırlama, jel kaplama, tabakalama ve kürleme. Kalıp hazırlama, tabakalama işlemindeki en kritik adımlardan biridir. Kalıp parça sayısına, kürleme sıcaklığına, basıncına vb. bağlı olarak tahta, alçı, plastik, kompozit veya metallerden yapılabilir. Kalıbın hazırlanmasından sonra, kalıplanan parçanın iyi bir yüzey görünümü elde etmek için bir jel kaplama uygulanır. Öncelikle reçine tabakası, takviye öncesi kalıba uygulanır. Önceden iyice karıştırılmış reçine ve katalizör karışımı bir fırça yardımıyla fiberlerin üzerine sürülür. Kürleme, genellikle oda sıcaklığında gerçekleştirilir ve nihai kalıplanmış kısım, kalıptan çekilerek çıkarılır (Barbero 2017).

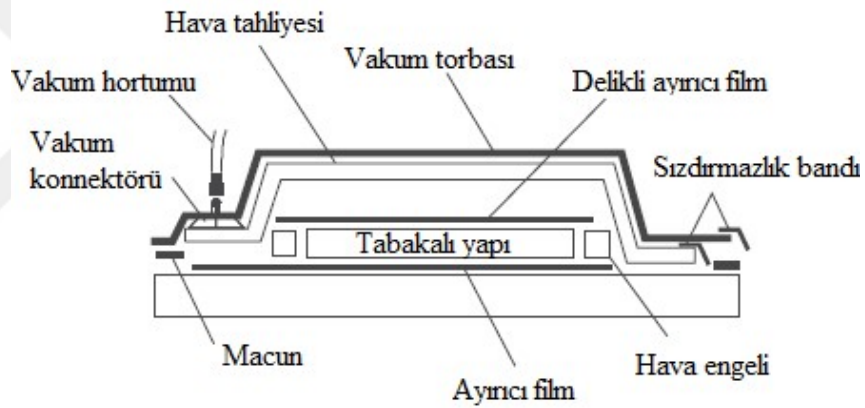


Şekil 2.1. El yatırma yöntemi (Barbero 2017)

2.3.2. Vakum torbası yöntemi

El yatırma yönteminin sonraki süreci şeklinde ele alınabilmektedir. Bu yöntemde farklı olarak, fırça veya rulo kullanıp elyaflar üzerine reçine sürüldükten sonra sistem vakum altında işleme alınmaktadır (Şekil 2.2). Elle tabakalama yöntemiyle kıyaslandığında bu yöntemin, yüksek fiber oranı, hava kabarcığı miktarının az olması, liflerin arasına reçinenin iyi bir şekilde nüfuz etmesi, fazla reçinenin ortamdan uzaklaştırılması gibi avantajları vardır. Bununla birlikte üretim maliyetinin yüksek oluşu dezavantajıdır. Bu yöntem, özellikle epoksi ve fenolik reçine kullanılması durumuna elverişlidir. Vakum torbası yöntemi ile üretim şu şekilde gerçekleştirilmektedir:

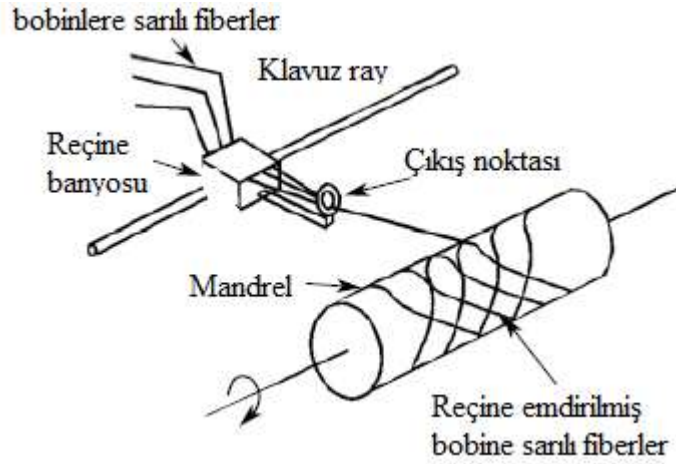
- Bir yüzeye serilen elyaflar üzerine rulo veya fırça yardımıyla reçine ve sertleştirici karışımı sürülür.
- Delikli ayırıcı bir film, tabakalı yapı üzerine konulur.
- Hava kabarcıklarının ortamdaki uzaklaştırılması ve fazla reçinenin tutulmasını sağlayan bir kumaş, ayırıcı film tabakasının üstüne konulur.
- Reçinenin nüfuz ettirildiği yapının dış ortamdan yalıtılması için sızdırmazlık macunu ile birlikte plastik bir vakum filmi kullanılır.
- Vakumlama işlemi vakum pompası yardımıyla gerçekleştirilir ve malzeme kurlanma prosesine tabii tutulur (Barbero 2017).



Şekil 2.2. Vakum torbalama yöntemi (Barbero 2017)

2.3.3. Elyaf sarma yöntemi

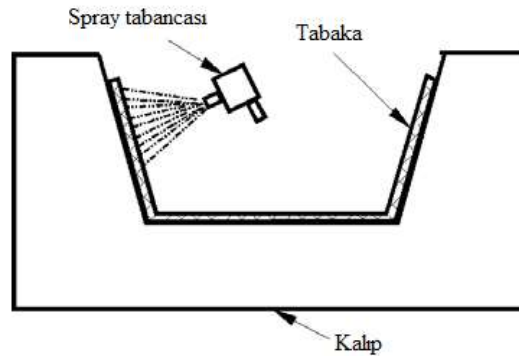
Elyaf sarma yöntemi, reçine emdirilmiş elyafların, istenen açıda dönen bir mandrel üzerine sarıldığı bir işlemdir (Şekil 2.3). Bu yöntem nispeten yavaş bir işlemdir, ancak fiber yönlenmesi kısmen kontrol edilebilmektedir. Hazırlanan sistem bir fırında veya otoklavda kurlanmaktadır ve daha sonra mandrelden çıkarılmaktadır. Elyaf sarma yöntemi, basınçlı kaplar, roketler ve endüstriyel depolama tankları gibi yuvarlak veya silindirik nesneleri üretmek için kullanılır (Rufe 2013).



Şekil 2.3. Elyaf sarma yöntemi (Mazumdar 2001)

2.3.4. Püskürtme yöntemi

El yatırma yöntemine benzer bir yöntem olmakla beraber bu yöntemde farklı olarak, kalıp içerisine elyaf ve reçine karışımı bir püskürtme tabancası vasıtasıyla püskürtülmektedir (Şekil 2.4). Püskürtme işleminden sonra rulo yardımıyla reçine içerisinde kalan hava çıkartılır. Bu yöntem karmaşık şekilli parçaların üretilmesinde el yatırma yöntemine göre daha çok kolaylık sağlamaktadır. Genellikle oda sıcaklığında pişme gerçekleşmektedir. Yöntemin düşük maliyet, kolay uygulanabilirlik gibi avantajlara sahipken yöntemde kullanılan kırılmış elyaflardan dolayı yüksek mekanik özelliklere sahip olunamaması gibi dezavantajları vardır (Şahin 2000).

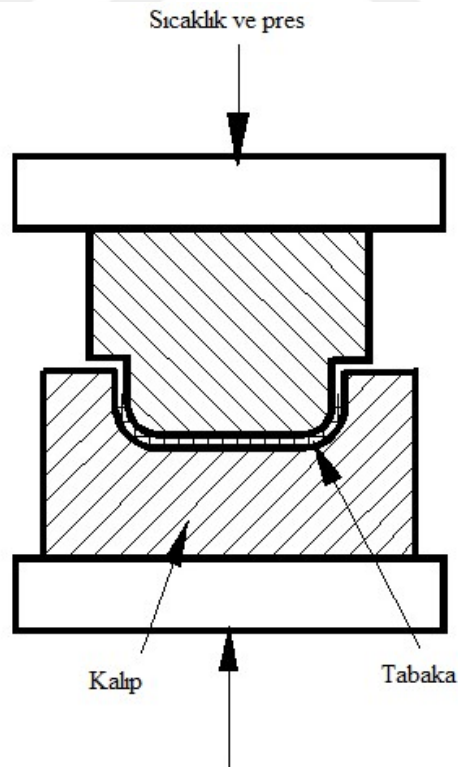


Şekil 2.4. Püskürtme yöntemi (Mazumdar 2001)

2.3.5. Sıcak presleme yöntemi

Belirli bir sıcaklıkta ve basınçta, yassı tabakalı yapılar üretmek için kullanılan bir yöntemdir. Bu işlemde kullanılan kalıplar paslanmaz çelik veya alüminyumdan yapılmıştır. Sıcak presleme yöntemi ile üretim şu şekilde gerçekleştirilmektedir:

- Tabakalı yapıyı yerleştirmeden önce, kalıplanmış kısmın kolayca çıkarılması için kalıp yüzeyine bir ayırıcı madde uygulanır.
- Kalıp daha sonra kapatılır ve pres cihazının ısıtılmış iki plakasının arasına yerleştirilir (Şekil 2.5).
- Belirli bir sıcaklık ve basınçta kürlleme işlemi gerçekleştirilir.
- Pişirme işleminden sonra malzeme soğumaya bırakılarak kalıptan çıkarılır (Mazumdar 2001).



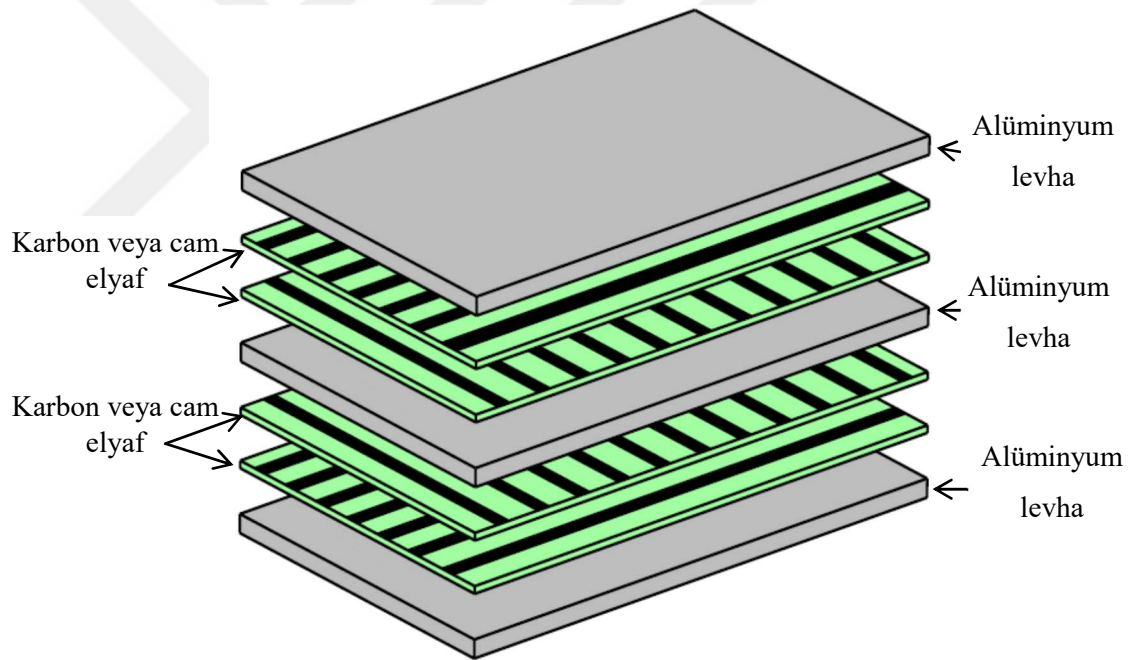
Şekil 2.5. Sıcak presleme yöntemi (Mazumdar 2001)

2.4. Fiber Metal Tabakalı Kompozitler

Son otuz yıldır, havacılık yapılarında geleneksel alüminyum alaşımlarının yerini alabilecek hafif malzemeler araştırılmaktadır. Optimum yapısal tasarım için, yüksek mukavemet, düşük yoğunluk, yüksek elastisite modülü, korozyon direnci ve iyi yorulma davranışı gibi özellikleri birleştiren yeni bir malzemeye ihtiyaç duyulmaktadır (Remmers and De Borst 2001). Fiber takviyeli kompozit malzemeler, kırılma tokluğu hariç neredeyse tüm bu gereksinimleri karşılamaktadırlar. Örneğin, karbon liflerinin yüksek sertliği sayesinde çok düşük çatlak büyüme oranlarına izin vermekte ve bu da yorulma direncini artırmaktadır. Alüminyum alaşımları ise hafiflik, darbe toleransı, yüksek mukavemet gibi iyi özelliklerinin yanı sıra yorulma çatlak oluşumu ve ilerlemesi gibi önemli bir dezavantaja sahiptir. Bu kapsamda havacılık endüstrisinde kullanılabilmek için, düşük ağırlıkta ve iyi mekanik özellikleri koruyacak, yorulmaya karşı dirençli malzemelerin geliştirilmesine yönelik çabalar yoğunlaştırılmıştır. 1978 yılında, Ulusal Havacılık ve Uzay Laboratuvarı ve Hollanda'daki Delft Teknoloji Üniversitesi'nde alüminyum alaşımlarının yorulma performansını geliştirmek için araştırmalar yapılmıştır. Tabakalı kompozit malzemelerindeki yorulma davranışının iyileştirilmesi, yapışkan tabakalara yüksek mukavemetli bir aramid lif eklenerek elde edilmiştir. Tüm bu çalışmaların sonucunda, Hollanda'daki Delft Teknoloji Üniversitesi Havacılık ve Uzay Fakültesi'nde ilk fiber metal tabakalı kompozit olan aramid takviyeli alüminyum tabakalar (ARALL) üretilmiştir. (Botelho *et al.* 2006; Crouch 2009).

Fiber metal tabakalı kompozitler, farklı tür metal levhalarıyla (genellikle alüminyum) ile karbon, cam (GLARE) veya aramid (ARALL) gibi fiber takviyeli polimer matrisli kompozitlerden meydana gelen hibrid yapılardır (Şekil 2.6). Metal levhalar dış yüzeyde bulunurlar ve polimerik kompozitten oluşan iç kısmı dış etkilere karşı korunmasını sağlamaktadırlar (Asundi and Choi 1997). Bu tür üretim metoduyla, süneklik, darbe ve hasar toleransı gibi metallerin iyi özellikleri ile yüksek özgül mukavemet, yüksek özgül rijitlik, iyi korozyon ve yorulma direnci gibi fiber takviyeli kompozit malzemelerin iyi özelliklerinin birleştirilmesi sağlanmaktadır (Vlot *et al.* 1999; Harras *et al.* 2002; Vermeeren 2003; Botelho *et al.* 2005; Khalili *et al.* 2005; Cortes and Cantwell 2006; Atas

2007; Alderliesten and Benedictus 2008; Chang *et al.* 2008; Sadighi *et al.* 2012). Her iki bileşenin dezavantajlarının çoğunluğu, proses sırasında ortadan kaldırılmaktadır veya en aza indirmektedir. Oluşan yeni yapının performansı, alüminyum alaşımlarının ve kompozitlerin performanslarının arasına düşmektedir (Krishnakumar 1994). Yapıştırıcılar ile yapı bileşenlerinin yapıştırılması işleminin düşük yapı ağırlığı, daha düşük maliyet ve gelişmiş hasar toleransı gibi avantajları bulunmaktadır. Alüminyum levhaların tek parça şeklinde yerine, yapıştırma bağlantılı şeklinde ilave edilmeleri sebebiyle yapıştırıcı katmanı çatlak kesici görevi görerek çatlak oluşumunun tüm plakayı etkilemesinden ziyade sadece levhada ilerlemesine neden olmaktadır ve böylelikle yorulmaya karşı direnç sağlanmaktadır (Asundi and Choi 1997).



Şekil 2.6. Fiber metal tabakalı kompozit plakanın şematik gösterimi

FMT kompozit konsepti çeşitli türde yapılara kolayca genişletilebilmektedir. (Örneğin, alüminyum daha fazla ısıya dayanıklı titanyum ile değiştirilebilir veya karbon fiberler kolayca cam fiberlerin yerini alabilir) Bu şekilde geniş bir yapısal malzeme ailesi üretme fırsatı vermektedirler. Doğru bileşenleri ve tabakalı yapı oluşumunu seçerek, bir FMT kompozit istenilen herhangi bir uygulamaya göre uyarlanabilmektedir (Vlot and Gunnink 2011). Bu avantajlarından (Çizelge 2.1) ve aynı zamanda kullanılan metallerin fiber

takviyeli plastik tabakalardan daha hafif olmasından dolayı fiber metal tabakalı kompozit plakalar otomobil, uçak ve uzay endüstrilerinde yaygın olarak kullanılmaktadırlar (Ghasemi *et al.* 2013b). En önemli dezavantajları ise uzun bir üretim sürecinden geçerek imal edildikleri için maliyetleri fazladır.

FMT kompozit yapılar, istiflenme durumuna göre klasik ve özel olmak üzere iki çeşide ayrılmaktadır. İnce levhalardan meydana gelen, tüm metal tabakaların aynı alaşıma sahip ve eşit kalınlıkta olduğu yapıya standart FMT kompozitler denilmektedir. Fiber ve metal tabakalar yer değiştirilerek simetrik bir yapı elde edilebilmektedir. Buna karşılık, özel bir FMT kompozit yapıda ise metal veya fiber tabakalar farklı malzeme veya kalınlığa sahip olacak şekilde tasarlanmaktadır. Yapı içerisinde ilaveten farklı bir yapışkan tabaka veya farklı kalınlıkta metal tabakalar kullanılabilir. Bu yapıdaki FMT kompozitler, isteğe bağlı olarak asimetrik bir şekilde tabakaların istiflenebilmesi durumuna olanak sağlamaktadır (Homan 2006; Şen *et al.* 2015).

Fiber metal kompozitlerin üretim aşamaları şu şekilde gerçekleşmektedir;

- Malzemelerin ve gerekli aletlerin hazırlanması. Bu aşama boyunca, alüminyum levhaların yüzeyi, metalik tabaka ile fiber takviyeli tabakalar arasındaki yapışma karakteristikliğini arttırmak için kromik asid veya fosforik asid ile önceden işlenmektedir.
- Malzemeleri temin etme, kesme, malzemeleri tabakalama.
- Kür hazırlama, vakum paketleme işlemine hazırlık.
- Akış-konsolidasyon prosesi, kimyasal kür reaksiyonu ve fiber ile metaller arasındaki yapışma sürecini içeren kürleme işlemi.
- Post stretching, otoklavdaki sıcak kürleme (200 °C) işleminden sonra fiber metal tabakalı kompozitler kalıntı gerilmeleri, alüminyum levhalarda çekme gerilmesi ve fiberlerde basma gerilmeleri oluşmaktadır. Post stretching işlemiyle bu problemler giderilmektedir (Botelho *et al.* 2006).

Çizelge 2.1. Fiber metal tabakalı kompozitlerin avantajları (Sinmazçelik *et al.* 2011)

Malzeme Davranışı	- Yüksek yorulma direnci: Çatlak sonrasında çatlak açıklığını önleyen sağlam fiber örtüleri bulunur. FMT kompozitler çok iyi yorulma özelliği gösterirler. - Yüksek mukavemet: Metal alaşımlarının yüksek yataklama mukavemeti ile yüksek mukavemet ve rijitliğe sahip fiber takviyeli kompozitlerin kombinasyonundan oluşmaktadırlar. - Yüksek kırılma tokluğu: FMT kompozitler bileşenlerine göre daha iyi kırılma tokluğuna sahiptir. Bu davranışları ile yavaş çatlak ilerlemesine sahip olmaları sebebiyle birçok yapı için oldukça cazibeli bir yere sahiptirler. - Yüksek darbe direnci: Kompozitlerle karşılaştırıldığında FMT'lerin darbe deformasyonu oldukça iyidir. Böylelikle görünür hasarların tespit edilebilirliği mümkündür. - Yüksek enerji absorbe kapasitesi: FMT'ler fiber kırılmasında ve metal tabakalardaki kayma hasarlarında enerji absorbe edebilme özelliğine sahiptir.
Fiziksel Özellikler	- Düşük yoğunluk: Epoksi esaslı polimer matris ve düşük yoğunluklu alüminyum levhalardan dolayı FMT'ler diğer malzemelere göre ağırlıktan kazanca sahip yapıdadırlar. - Mükemmel nem direnci: FMT kompozitlerde nem emilimi, alüminyum tabaların bariyer olması sebebiyle polimer kompozitlerle kıyaslandığında daha yavaştır. Ayrıca pregreg tabakalar, FMT'ler içinde çeşitli alüminyum tabakaları arasında bir nem bariyeri olarak davranmaktadır.
Dayanıklılık	- Mükemmel korozyon direnci: Mükemmel nem direncine sahip olmaları ve polimer esaslı fiber tabakaların yüksek korozyon direnci sebebiyle korozyona karşı oldukça dayanıklıdır. - Düşük malzeme deformasyonu: FMT'ler mükemmel nem ve korozyon direncine sahiptir. Çevresel etkilerden dolayı hasar oluşumu, metalik yapılar ile kompozit yapılara göre daha düşüktür.
Güvenlik	Ateşe dayanıklılık: Fiberlerin yüksek erime noktasına sahip olması, alevin iç katmanlara tesir etmesini önlemektedir. Böylelikle, fiber erime noktalarına bağlı olarak tek parça alüminyum alaşımlarına göre FMT'lerin ateşe dayanıklılıkları daha iyidir. FMT'ler uçak gövde malzemesi olarak uçaklarda kullanılmaktadır.
Maliyetten Tasarruf	- FMT'ler metalik yapılara göre önemli düzeyde ağırlıktan tasarruf sunmaktadır. - FMT'lerin yorulmaya karşı duyarsızlıklarından dolayı daha az tamir ve daha uzun bakım periyotlarına sahiptir. Bu durum bakım maliyetlerini azaltmaktadır.

ARALL kompozitler, 1978 yılında Delft Teknoloji Üniversitesi laboratuvarlarında, aramid fiberlerin yapışkan tabakalarına ilave edilmesiyle yüksek yorulma dayanımına sahip, oldukça hafif, yüksek darbe direnci, yüksek tokluk, hasara karşı dirençli bir malzeme olarak üretilmiştir (Lee 1992; Sun *et al.* 1993). Epoksi yapıştırıcıya gömülü aramid fiberler, alüminyum alaşımlı levhalar arasında sandviç yapı şeklinde yer almaktadır. Burada tek yönlü fiber prepregler kullanılmaktadır. Fiber yönlenmesi ana yükleme yönünde seçilmektedir. Tabakalar yorulma çatlağı durumunda fiberlerin hasara uğramayacağı şekilde tasarlanmaktadır. Bir başka deyişle, metalik levhalarda yayılan çatlağın arkasında kalan fiberler sağlam kalmaktadır. Yüksek dayanım, iyi yorulma direncine, kolay işlenebilirlik, kolay mekanik olarak sabitlenebilme ve oldukça iyi süneklik gibi özelliklere sahiptirler (Asundi and Choi 1997).

ARALL kompozitlerde fiberler, yorulma yüküne karşı duyarsızdırlar ve bu durum çatlak yayılımına karşı bir avantaj teşkil etmektedir. Prepregler, yüklemeyi çatlağın üzerine iletir, çatlak ucundaki gerilme yoğunluğunu ve çatlağın yayılma hızını azaltırlar. Böylelikle fiber metal tabakaların çatlak büyüme ömrü tek parça alüminyum malzemelere göre daha uzun olabilmektedir. Yükleme belirli bir çatlak açıklığı oluşana kadar başlangıçta ağırlıklı olarak alüminyum levhalar aracılığıyla aktarılır. Bu durum çatlak yayılımında avantaj sağladığı gibi aynı zamanda uçak parçaları gibi yapılarda %30 ağırlık kazancı sağlamaktadır. Diğer uçak malzemeleriyle kıyaslandığında yorulma, ağırlık kazancı, uçak gövde basıncı gibi oldukça avantajlara sahiptir. Bu nedenle dört tip standardize edilmiş ARALL üretimi 1984 yılında Alcoa şirketi tarafından gerçekleştirilmiştir. ARALL 1 ve 3 kürlleme işleminden sonra artık gerilmenin ters yönünde %4 kadar kalıcı uzamaya maruz kalırlar. ARALL 2 ve 4'te ise standart uygulamada kalıcı uzama görülmemektedir (Schijve 1993; Burianek *et al.* 2003; Shim *et al.* 2003; Sinmazçelik *et al.* 2011).

Bu avantajlarının yanı sıra ARALL kompozitlerin bazı dezavantajları da mevcuttur. Bunlar aşağıda verildiği gibidir.

- Aramid fiberler, fiber ile yapışkan arasında düşük ara yüzey dayanımına sahiptir. Bu nedenle tabaka içi kayma mukavemeti açısından %50'den fazla hacim oranına sahip bir yapının kullanımı sağlıklı değildir.
- Fiber köprüleme katmanındaki fiber hasarı bazı yorulma yüklemesi durumunda ortaya çıkmaktadır. Post stretching işlemiyle fiber hasarı önlenabilmektedir fakat bu işlem de üretim maliyetinin artmasına sebep olmaktadır.
- Anizotropik özelliği ile tek yönlü fiber yönelmesinden dolayı iki eksenli gerilmeler meydana gelmektedir. Birden fazla doğrultuda fiberlerle daha izotropik bir yapı istenilmektedir.
- Aramid fiberlerin sınırlı kırılma şekil değişimine sahip olması nedeniyle oldukça düşük çentik davranışına sahiptir (Asundi and Choi 1997).

Delft Teknoloji Üniversitesinde yapılan sonraki araştırmalarda aramid fiber yerine farklı miktarda karbon/epoksi prepreglerin kullanıldığı CARALL tabakalı kompozitler geliştirilmiştir. Karbon/epoksi kompozit, aramid/epoksi kompozit ile karşılaştırıldığında daha yüksek özgül modüle sahiptir fakat nispeten daha düşük özgül mukavemete, daha düşük hasar ve darbe direncine sahiptir. Aramid fiber kompozitler daha düşük çevrimli yorulma performansı gösterirken, karbon fiber kompozitler daha kötü yüksek çevrimli yorulma performansı göstermektedir. Ayrıca, yüksek gerilme durumundaki yorulma testlerinde bu malzemede fiber hasarlarının oluştuğu görülmüştür. Karbon fiberlerin yüksek rijitliği, oldukça etkili çatlak örtme mekanizmasına sahip olmasına ve böylelikle çok yavaş çatlak ilerlemesine izin vermektedir. Bununla birlikte karbon fiberlerin sınırlı kırılma şekil değiştirme özelliğinin bulunması (% 0,5–2,0) önemli bir dezavantaj teşkil ettiği tespit edilmiştir. Çentik davranışı tek parça alüminyum alaşımlarına göre daha hassastır. Nemli ortamlarda karbon fiberler ile alüminyum levhalar arasında galvanik korozyon hasarının görülmesinden dolayı bu konuda birçok araştırma yapılmaktadır (Lin *et al.* 1991; Lin and Kao 1996; Asundi and Choi 1997; Xia *et al.* 2007; Moussavi-Torshizi *et al.* 2010). Yüksek rijitlik ve dayanım ile iyi darbe davranışı özelliklerinin kombinasyonu, CARALL tabakalı kompozitleri uzay uygulamaları için avantajlı hale getirmektedir (Sinmazçelik *et al.* 2011).

ARALL kompozitlerden sonra geliştirilen GLARE kompozitler, aramid fiber yerine cam fiber takviyeli prepregler ile alüminyum levhalardan oluşmaktadır (Kawai and Hachinohe 2002; Botelho *et al.* 2006; Castrodeza *et al.* 2006) ARALL'a göre GLARE kompozitler uygulanan yüke karşı daha dirençlidirler ve cam fiberler arasında daha iyi yapışma özelliğine sahiptirler. Bunun sonucunda fiberlerle iki yönde oluşturulmaları mümkündür ve bu durum, çift eksenli gerilmelerin meydana geldiği yapılarda kullanılmasını oldukça uygun hale getirmektedir. Yorulma durumunda fiber kırılması şeklindeki hasarlara karşı daha dayanıklıdır. Aleve karşı dirençlidir ve oldukça hafif malzemelerdir. Aynı zamanda daha yüksek çekme mukavemetine, daha iyi darbe dayanımına, daha iyi kalıntı mukavemetine sahiptir. Bu özellikler GLARE kompozitlerin birçok alanda kullanılabilirliğini ortaya koymaktadır (Çizelge 2.2). GLARE kompozitlerin, ARALL kompozitlere göre dezavantajları ise oldukça düşük rijitliğe sahip olmalarıdır. GLARE kompozitler alüminyum alaşımlarına göre oldukça maliyetlidir ve alüminyum alaşımlarının yerine tercih edilmeleri için kullanılan yerde ağırlıktan kazancın oldukça önem arz etmesi gerekmektedir (Asundi and Choi 1997). GLARE kompozitlerin altı farklı standart çeşiti bulunmaktadır. Hepsinde de tek yönlü cam fiberler, epoksi yapıştırıcı ile gömülerek nominal fiber hacim oranı %60 olan prepregler halinde elde edilmektedir. Kompozitin üretiminde, prepregler alüminyum levhalar arasında farklı fiber yönelmelerinde tabakalanır ve böylelikle farklı standart GLARE çeşitleri üretilir. GLARE 1, 2, 4 ve 5'de tabakalar simetrik olarak istiflenmektedir. GLARE 3, fiberlerin çapraz dizilmesi ile oluşmaktadır. GLARE 6 ise $+45^0$ ve -45^0 olarak istiflenerek elde edilmektedir (Sinmazçelik *et al.* 2011).

ARALL ve GLARE kompozitler yapıştırma teknolojisi ile üretilmektedir. Otoklav içerisindeki kütleme çevriminden (120^0) sonra fiber metal tabakalar kalıntı gerilmelere, alüminyum tabakalarda düşük çekme gerilmesine ve fiberlerde basma gerilmesine sahip olur. Bu durum yorulma davranışı için uygun bir durum değildir. Bu nedenle *Post stretching* işlemi uygulanarak kalıntı gerilmeler giderilmekte ve problem çözülmektedir. Böylelikle çekme gerilmeleri fiberlerde, basma gerilmeleri alüminyum katmanlarda oluşmaktadır. Post stretching işleminin dezavantajı ise ekstra maliyete neden olmasıdır.

Çizelge 2.2. FMT kompozitlerde kullanılan çeşitli fiberlerin avantaj ve dezavantajları (Moussavi-Torshizi *et al.* 2010)

Fiber	Avantaj	Dezavantaj	FMT çeşidi
Aramid	• Çok iyi tokluk • Hem çekme hem de eğilmeli yorulma yüklemesinde mükemmel yorulma direnci • Yüksek Young modülü • Düşük ağırlık	• Düşük eğilme, burkulma, basma yükü, enine gerilme ve nem emilimi • Kompozit matrisler gibi diğer malzemelerle güçlü bağlar oluşturamazlar.	ARALL
Cam	• Yüksek çekme mukavemeti • Yüksek kırılma şekil değiştirmesi • Yüksek nem emilimi	• Yüksek ağırlık • Düşük rijitlik	GLARE

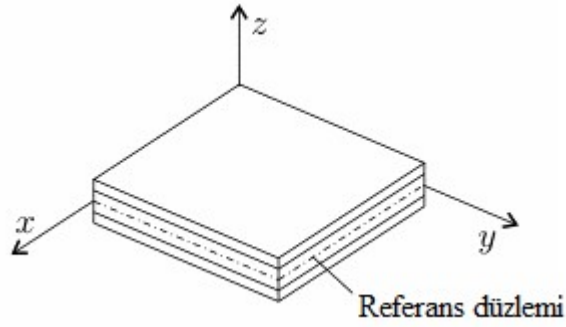
FMT kompozitlerin yeni bir konsepti olarak spliced tabakalı kompozitler 1992 yılında *Structural Laminates* şirketi (SLC) tarafından üretilmiştir. Bu kompozitlerde, alüminyum tabakalar otoklav boyutuna bağlı olarak kesik levha şeklindedirler (Asundi and Choi 1997).

2.5. Tabakalı Kompozit Plakanın Titreşim Denklemleri

Tabakalı kompozit plakaların, kalınlıklarının boyutlarına oranına, katmanların oryantasyon açısına ve istiflenme sıralarına göre makro düzeyde göstereceği davranış değişiklik göstermektedir. Plakaların bu gibi durumlardaki titreşim davranışını doğru bir şekilde inceleyebilmek için çeşitli plaka teorileri mevcuttur. Bu çalışmada plaka kalınlığının plaka boyutlarına göre oldukça küçük olduğu (kenar uzunluğu-kalınlık oranı 20 ve daha büyük olan) plakaların titreşim davranışının incelenebilmesine olanak sağlayan klasik plaka teorisi kullanılmıştır.

2.5.1. Tabakalı kompozit plakanın rijitlik matrisi

Tabakalı kompozit plakaların rijitlik matrisleri, eksenel rijitlik $[A]$, tabaka – kaplin rijitliği $[B]$, ve tabaka – eğilme rijitliği $[D]$ matrislerinden oluşmaktadır. Klasik plaka teorisine göre rijitlik matrisleri elde edilirken bazı kabuller yapılmaktadır. Bunlar; gerinimlerin tabaka boyunca lineer olduğu, düzlem dışı gerilmelerin ihmal edilebilir seviyede küçük olduğu, plak düzlemine dik şekilde olan normal ve kayma gerilmelerin $(\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ diğer gerilmelere göre oldukça küçük değerde olduğu şeklindedir (Wang *et al.* 2000).



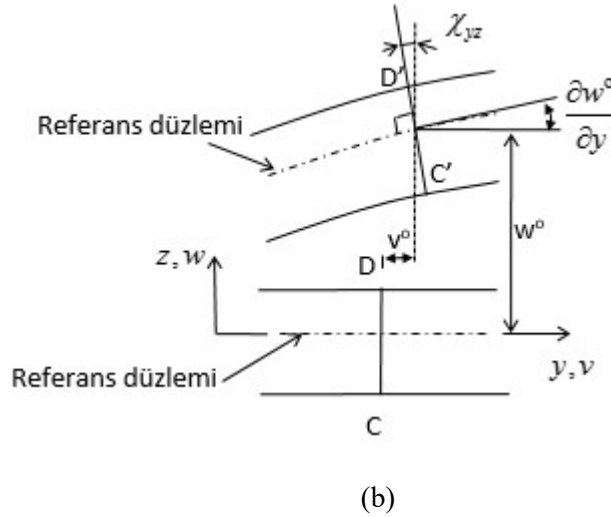
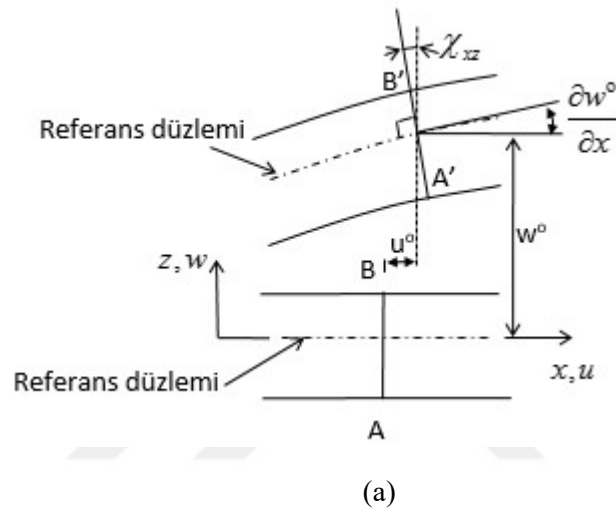
Şekil 2.7. Tabakalı Kompozit plakanın koordinat sistemi ve referans düzlemi (Kollar and Springer 2003)

Şekil 2.7’de gösterildiği gibi, tabakalı kompozit plağın orta düzlemi, referans düzlemi olarak ele alınır. Plağın merkezine göre tabakalar simetrik değilse, doğal düzlemin orta düzleme karşılık geldiği bir durum söz konusu olamamaktadır. Bunun nedeni eğilme durumunda, referans düzlemindeki gerinimlerin sıfıra eşit olmamasından dolayıdır. Referans düzlemindeki şekil değiştirmeler şu şekildedir;

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \quad (2.1)$$

İfadelerin referans düzlemine göre olduğunu ‘0’üst indisi göstermektedir.

Klasik plaka teorisi ile beraber, Kirchhoff hipotezi baz alınarak plakanın rijitlik matrisi elde edilirken bazı kabuller yapılmaktadır. Bu hipoteze göre, plak referans düzlemine dik olan doğrular deformasyon sonrasında şekil değişimine uğramayıp, yine doğru olarak kalmakta, deformasyon süresince deforme olmuş yüzeye teğet bir şekilde dönmektedirler (Kollar and Springer 2003). Referans düzlemine dik olan bir AB doğrusunun, plağın küçük bir yer değiştirmesi durumundaki dönmesi (χ_{xz}) Şekil 2.8’de görülmektedir.



Şekil 2.8. Plağın (a) x - z , (b) y - z düzlemindeki deformasyonu (Kollar and Springer 2003)

$$\chi_{xz} = \frac{\partial w^0}{\partial x} \quad (2.2)$$

Şekil 2.8'e göre, herhangi bir noktada x doğrultusundaki toplam yer değiştirme:

$$u = u^0 - z \chi_{xz} = u^0 - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \quad (2.3)$$

şeklindedir. Herhangi bir noktada y doğrultusundaki toplam yer değiştirme ise:

$$v = v^0 - z \frac{\partial w^0}{\partial y} \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir. Düzlem içi şekil değiştirme için şekil değiştirme – yer değiştirme ilişkisi bağlantıları şu şekildedir:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5)$$

(2.3) ve (2.4) nolu denklemler (2.5) nolu denklemde yerine yazılması durumunda aşağıda verilen şekil değiştirme bağlantıları elde edilmektedir.

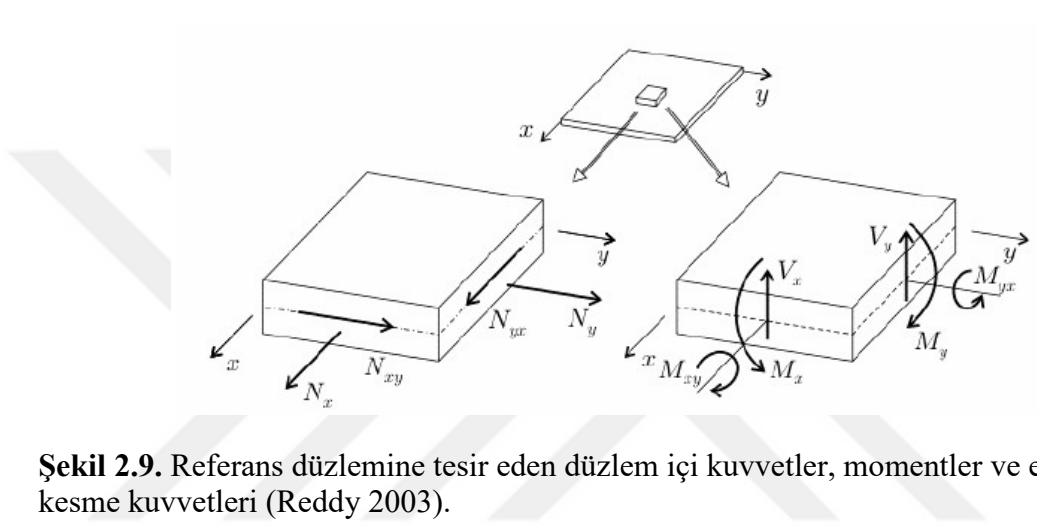
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} - z \frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Bu ifadeler aşağıda gösterildiği gibi vektörel tarzda yazılabilmektedir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Burada, referans düzleminin eğriliği $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ sembolleriyle gösterilmektedir ve bunların ifadeleri aşağıda verildiği gibidir. (Kollar and Springer 2003).

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \quad \kappa_{xy} = -\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \quad (2.8)$$



Şekil 2.9. Referans düzlemine tesir eden düzlem içi kuvvetler, momentler ve enine kesme kuvvetleri (Reddy 2003).

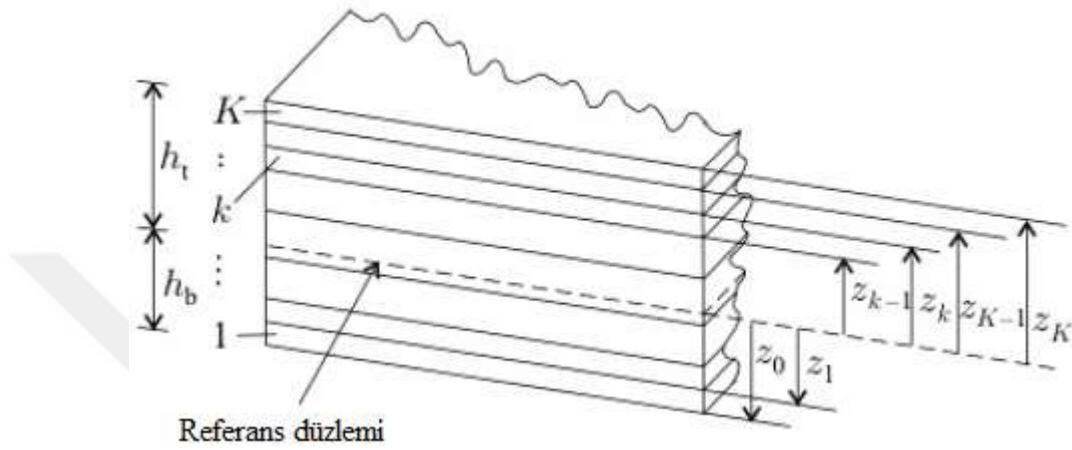
Plak üzerinde küçük bir diferansiyel eleman alınarak, bu elemana tesir eden iç kuvvetlere ve momentlere bakıldığında (Reddy 2003):

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h_b}^{h_t} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-h_b}^{h_t} \sigma_y dz & N_{xy} &= \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{xy} dz \\ M_x &= \int_{-h_b}^{h_t} z \sigma_x dz & M_y &= \int_{-h_b}^{h_t} z \sigma_y dz & M_{xy} &= \int_{-h_b}^{h_t} z \tau_{xy} dz \end{aligned} \quad (2.9)$$

Denklem (2.9)'da N ve M ifadeleri sırasıyla birim uzunluktaki düzlem içi kuvvet ve momentleri göstermektedir. Şekil 2.9'da görülen enine kesme kuvvetleri (V) ise aşağıda verildiği gibidir.

$$V_x = \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{xz} dz \quad V_y = \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{yz} dz \quad (2.10)$$

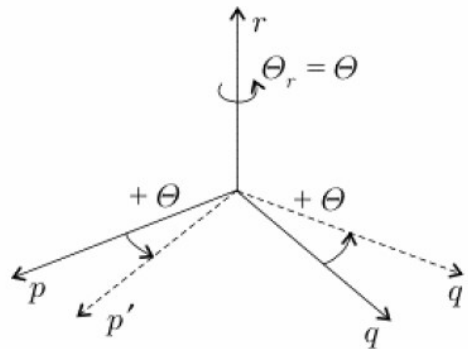
Tabakaların referans düzleminde olan mesafeleri Şekil 2.10’da görülmektedir. Burada h_t ve h_b plağın referans düzleminde kompozit malzemenin sırasıyla üst ve alt yüzeyine olan mesafelerini ifade etmektedir.



Şekil 2.10. Tabakaların referans düzlemine göre yapılan ölçülendirmeleri (Kollar and Springer 2003)

Tabakalı kompozitler için düzlem gerilme – şekil değiştirme ifadesi aşağıdaki gibidir (Kollar and Springer 2003):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$



Şekil 2.11. Düzlem- gerilme durumu için asal eksen takımının r ekseninde döndürülmesi (Kollar and Springer 2003)

Şekil 2.11’de görüldüğü şekliyle, düzlem- gerilme durumunda asal eksen takımının r eksenini etrafında döndürülmesi sonucu oluşan gerilmeler ve şekil değiştirmeler, döndürülmemiş sistemdeki gerilmeler ve şekil değiştirmelerin transformasyon matrisi ile çarpılmasıyla elde edilmektedir.

$$\{\sigma'\} = [T_\sigma]\{\sigma\} \quad \{\epsilon'\} = [T_\epsilon]\{\epsilon\} \quad (2.12)$$

Denklem (2.11) deki $[\bar{Q}]$, x – y koordinat sisteminde tabakanın rijitlik matrisidir. Rijitlik matrisinin elemanları transformasyon matrisi kullanılarak elde edilmektedir. Döndürülmüş eksen takımına göre rijitlik matrisi $[\bar{Q}]$ ile döndürülmemiş eksen takımına göre rijitlik matrisi $[Q]$ arasındaki bağıntı aşağıdaki denklemde verildiği gibidir.

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} \quad \{\sigma'\} = [C']\{\epsilon'\} \quad [T_\sigma]\{\sigma\} = [T_\sigma][C][T_\epsilon]^{-1}[T_\epsilon]\{\epsilon\} \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = [T_\sigma] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} [T_\epsilon]^{-1} \quad (2.14)$$

(2.14) nolu denklemdeki $[T_\sigma]$ ve $[T_\epsilon]$ düzlem gerilme durumu için sırasıyla gerilme ve gerinim transformasyon matrislerdir. Gerilme dönüşüm matrisi $[T_\sigma]$, $[T_\epsilon]$ ise gerinim dönüşüm matrisidir.

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad [T_\epsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$[\bar{Q}]$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılabilmektedir. Burada $c = \cos(\Theta)$ ve $s = \sin(\Theta)$ yı ifade etmektedir. Burada Θ açısı, x ekseninden fiber yönüne doğru saatin tersi yönde ölçülen değerdir.

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= c^4 Q_{11} + s^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) \\
 \bar{Q}_{22} &= s^4 Q_{11} + c^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) \\
 \bar{Q}_{12} &= c^2 s^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + (c^4 + s^4) Q_{12} \\
 \bar{Q}_{66} &= c^2 s^2 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) + (c^2 - s^2) Q_{66} \\
 \bar{Q}_{16} &= cs (c^2 Q_{11} - s^2 Q_{22} - (c^2 - s^2)(Q_{12} + 2Q_{66})) \\
 \bar{Q}_{26} &= cs (s^2 Q_{11} - c^2 Q_{22} + (c^2 - s^2)(Q_{12} + 2Q_{66}))
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Denklem (2.16)'daki Q_{ij} (i, j=1,2,6) değerleri ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_{11}}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \\
 Q_{12} &= \frac{E_{22}}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \\
 Q_{12} &= Q_{21} = \mu_{21} Q_{11} = \mu_{12} Q_{22} \\
 Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

(2.7) ve (2.11) nolu denklemler, (2.9) nolu denklemde yerine yazılırsa düzlem içi kuvvet ve moment ifadeleri elde edilmektedir (Kollar and Springer 2003; Reddy 2003).

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h_b}^{h_t} \left\{ [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [\bar{Q}] z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} dz \\
 &= \underbrace{\int_{-h_b}^{h_t} [\bar{Q}] dz}_{[A]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\int_{-h_b}^{h_t} z [\bar{Q}] dz}_{[B]} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h_b}^{h_t} z \left\{ [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [\bar{Q}] z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} dz \\
&= \underbrace{\int_{-h_b}^{h_t} z [\bar{Q}] dz}_{[B]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\int_{-h_b}^{h_t} z^2 [\bar{Q}] dz}_{[D]} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Tabakalı kompozit plağın eksenel rijitlik $[A]$, tabaka – kaplin rijitliği $[B]$, ve tabaka – eğilme rijitliği $[D]$ matrisleri böylelikle elde edilmektedir. Burada $[\bar{Q}]$ matrisi tabakanın rijitlik matrisidir.

$$\begin{aligned}
[A] &= \int_{-h_b}^{h_t} [\bar{Q}] dz \\
[B] &= \int_{-h_b}^{h_t} z [\bar{Q}] dz \\
[D] &= \int_{-h_b}^{h_t} z^2 [\bar{Q}] dz
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Bu matrislerin elemanları şu şekildedir:

$$A_{ij} = \int_{-h_b}^{h_t} Q_{ij} dz \quad B_{ij} = \int_{-h_b}^{h_t} z Q_{ij} dz \quad D_{ij} = \int_{-h_b}^{h_t} z^2 Q_{ij} dz \tag{2.21}$$

(2.21) nolu eşitlikte verilen matris elemanları toplamlar şeklinde de aşağıda verildiği gibi yazılabilmektedir:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^K (Q_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (Q_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K (Q_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

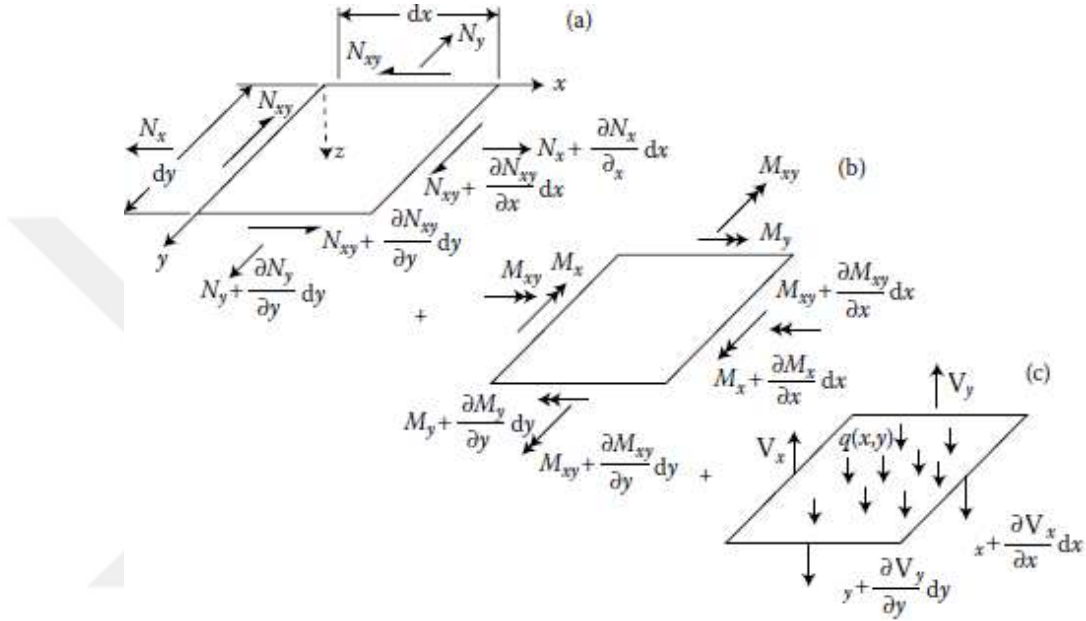
(2.22) nolu denklemde, k ıncı tabakanın referans düzlemine olan mesafesi z_k ile, toplam tabaka sayısı K ile ve k ıncı tabakanın rijitlik matrisi ise $(Q_{ij})_k$ ile gösterilmektedir. (2.18), (2.19) ve (2.22) nolu denklemler birlikte yazılırsa rijitlik matrisi aşağıdaki şekliyle elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{11} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_x^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

2.5.2. Tabakalı kompozit plakaların Newton' un hareket kanununa göre enine titreşimleri

Tabakalı kompozit plağın titreşim analizinde, klasik plaka teorisi kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir. Şekil 2.12'de görüldüğü gibi, plakanın diferansiyel denklem ifadelerini elde etmek için sonsuz küçük bir eleman ele alınmıştır. Düzlemsel normal kuvvet bileşenleri (N_x, N_y, N_{xy}) Şekil 2.12.a'da, moment bileşenleri (M_x, M_y, M_{xy}) Şekil 2.12.b'de ve enine kesme kuvveti bileşenleri (V_x, V_y) ile beraber enine yayılı yüklerde $q(x, y)$ Şekil 2.12.c'de görülmektedir. (Gibson 2011).

Buradaki normal kuvvet, moment ve kesme kuvveti bileşenlerinin ifadeleri 2.5.1. bölümde, (2.9) ve (2.10) nolu denklemlerde verildiği gibidir. Şekil 2.12’de verilen bileşenlere göre Newton’ un 2. Hareket kanunu kullanılarak tabakalı kompozit plakaların enine titreşim ifadeleri elde edilebilmektedir.



Şekil 2.12. Gerilme bileşenleri ve dış yüklerin tabakaya etkisi. (a) düzlemsel gerilme bileşenleri, (b) moment bileşenleri, (c) enine yükler ve kesme kuvveti bileşenleri (Gibson 2011)

Şekil 2.12’ye göre x yönündeki toplam kuvvetler aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$N_x dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy + N_{xy} dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dx dy - N_x dy - N_{xy} dx = \rho_0 dx dy \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

Buradaki ifadelerin tanımlamaları aşağıda verildiği gibidir.

ρ_0 = Tabakanın birim alana başına kütlesi (ρh)

ρ = Tabakanın kütle yoğunluğu, birim hacim başına kütle

h = Tabakanın kalınlığı

$u^0 = u^0(x, y)$ x yönündeki orta yüzey yer değiştirmesi

(2.24) nolu eşitlik sadeleştirilirse:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

elde edilir. Benzer şekilde y yönündeki toplam kuvvetler aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$N_x dx + \frac{\partial N_x}{\partial y} dx dy + N_{xy} dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx dy - N_y dx - N_{xy} dy = \rho_0 dx dy \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} \quad (2.26)$$

(2.26) nolu eşitlik sadeleştirilirse:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

elde edilir. Burada $v_0 = v_0(x, y, t)$ y yönündeki orta yüzey yer değiştirmesini göstermektedir. Son olarak Şekil 2.12'den z yönünde oluşan toplam enine kesme kuvvetleri ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$V_x dy + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dy + V_y dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dx dy - V_x dy - V_y dx + q(x, y) = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.28)$$

(2.28) nolu eşitlik sadeleştirilirse:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q(x, y) = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

elde edilir. Burada $w_0 = w_0(x, y, t)$ z yönündeki orta yüzey yer değiştirmesini göstermektedir. Moment dengesi için dönme atalet momentleri ihmal edilerek x ve y yönündeki momentler göz önünde bulundurulmuştur. X yönündeki momentlerin toplamı:

$$\begin{aligned} & -M_y dx - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx - M_{xy} dy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + V_y dx dy \\ & + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy dx dy + q(x, y) dx dy dy / 2 + V_x dy dy / 2 \\ & + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dy dy / 2 + M_y dx + M_{xy} dy - V_x dy dy / 2 = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem (2.30) sadeleştirildiğinde, Denklem (2.31) elde edilir.

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = V_y \quad (2.31)$$

Benzer şekilde y yönündeki momentlerin toplamı aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = V_x \quad (2.32)$$

Denklem (2.31) ve (2.32), denklem (2.29)'da yerine konulursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

Denklem (2.25), (2.27) ve (2.33) kesit tesirleri cinsinden plakanın hareket denklemlerini ifade etmektedir. Yer değiştirmeler bakımından plakanın hareket denklemleri ise, tabaka kuvvet – deformasyon denklemi (rijitlik denklemi) olan (2.23) nolu denklem, birim şekil değiştirme – yer değiştirme ifadeleri olan (2.1) nolu denklem ve eğrilik – yer değiştirme

ifadeleri olan (2.8) nolu denklemlerin (2.25), (2.29) ve (2.33) nolu denklemlerde yerine yazılması ile elde edilmektedir (Gibson 2011).

$$A_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \rho_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \rho_0 \frac{\partial^3 v^0}{\partial t^2} \quad (2.35)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u^0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u^0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3} + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y) \quad (2.36)$$

B_{ij} rijitlik matrisinde, düzlemsel yer değiştirmeler u_0 ve v_0 ifadeleri enine yer değiştirme ifadesi olan w ’ ya bağlıdır. (2.36) nolu eşitlik, enine yayılı yük değeri $q(x, y) = 0$ ve simetrik tabakalı kompozit plakanın enine titreşim analizi için ele alınacak olursa $B_{ij} = 0$ olmaktadır. Eşitlik bu durumda sadece enine yer değiştirmeleri içermektedir. Dörtkenarı da basit mesnetli, en/boy=c/d olan ortotropik plaka durumu için, $B_{ij} = 0$, $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ olacaktır ve (2.36) nolu eşitlik şu hale gelecektir (Gibson 2011).

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.37)$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Mühendislik problemleri çözülürken öncelikle fiziksel sistem oluşturulmaktadır ve bu sistemi ifade eden eşitlikler matematiksel olarak modellenmektedir. Matematiksel model integral denklemi, adi diferansiyel denklem veya kısmi diferansiyel denklem şeklindedir. Bu denklemler analitik veya nümerik olarak çözülerek mühendislik uygulamaları analiz edilmektedir. Birçok problemde, denklem takımlarının ve sınır şartlarının karmaşıklığı sebebiyle analitik çözümün elde edilmesi oldukça zordur. Bu nedenle nümerik yöntemler kullanılarak gerçek çözüme yeterli yaklaşımda çözümler elde edilmektedir. Sonlu elemanlar, sonlu farklar gibi nümerik yöntemler günümüze kadar birçok problemin çözümünde kullanılmıştır. Bu yöntemlerde, düğüm noktası sayısı arttıkça elde edilen çözümlerin analitik çözüme olan yakınsaması, hassasiyetinin artması söz konusudur. Bununla beraber düğüm noktası sayısının artması sonucu hesaplayıcı kapasitesi, hesaplama süresi de orantılı olarak artmaktadır. Daha az düğüm noktası sayısı kullanılarak gerçek çözüme yeterli yaklaşımda sonuçlar veren Diferansiyel *Quadrature* metodu ilk kez Bellman and Casti (1971) tarafından ortaya konularak kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır. Metot, belirli bir ayırık noktadaki bir uzay değişkenine göre bir fonksiyonun kısmi türevine, o değişken bölgesinin tüm ayırık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı olarak yaklaşır. DQ metodunda, her düğüm noktasının herhangi bir dereceden kısmi türevi için ağırlık katsayılarının hesaplanması söz konusudur (Siddiqi 1996).

Sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi yöntemlerle DQ yöntemi arasında problemlere yaklaşım hususunda çeşitli farklılıklar bulunmaktadır. DQ yönteminde bir fonksiyonun bir noktadaki türevi direk hesaplanabiliyorken, sonlu elemanlar yönteminde türev lokal elemanlarla yaklaşım şekliyle elde edilir. DQ yönteminde, problemlere yüksek dereceli polinomlar ele alınarak global bir yaklaşım uygulanıyorken, sonlu elemanlar yönteminde düşük dereceli polinomlar kullanılıp lokal düzeyde bir yaklaşım uygulanmaktadır (Jang 1987; Farsa 1992; Siddiqi 1996; Civalek and Çatal 2006).

3.1. Diferansiyel *Quadrature* Metodu

Diferansiyel *quadrature* metoduna göre bir fonksiyonun çözüm bölgesindeki verilen bir düğüm noktasındaki bir koordinat yönüne göre türevi, bu koordinat yönünde seçilen bütün düğüm noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı lineer toplamı ilkesine dayanmaktadır (Siddiqi 1996). DQ metodunun temeline bakıldığında, $x \in [c, d]$ aralığında tek boyutlu bir $f(x)$ fonksiyonu ele alınsın. $c = x_1, x_2, x_3, \dots, x_N = d$ olan n adet düğüm noktaları için $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_i$ düğüm noktasındaki birinci dereceden türevi denklem (3.1)'deki gibi olmaktadır.

$$f_x(x_i) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.1)$$

Burada, x_j düğüm noktalarını, $f(x_j)$ bu noktalardaki fonksiyonun değerlerini ve $a_{ij}^{(1)}$ ifadesi ise bu değerlerin fonksiyon değerlerine bağlanmasını sağlayan birinci dereceden türev ifadesi için ağırlık katsayılarını göstermektedir. Ağırlık katsayılarının hesaplanması DQ yönteminin öncelikli ve önemli bir basamağını oluşturmaktadır. Bu katsayılar, verilen koordinat yönlerinde fonksiyonel olarak yaklaşım uygulanarak elde edilmektedirler. Yaklaşım veya diğer adıyla test fonksiyonlarının seçilmesinde süreklilik şartının sağlanması gerekmektedir. Bu fonksiyonların, diferansiyel denklem içerisindeki en yüksek dereceli türeve kadar türevinin alınabiliyor olması gerekmektedir. Yani, düğüm noktası sayısı, diferansiyel denklem içerisindeki en yüksek dereceli türevden bir fazla olmalıdır.

3.1.1. Bellman'ın önerdiği ilk yaklaşım

Bu konuda ilk olarak Bellman *et al.* (1972), ağırlık katsayılarını belirleyebilmek için test fonksiyonu olarak iki farklı yaklaşımı sunmuşlardır. İlk yaklaşımda, polinomsal bir test fonksiyonunu ele almışlardır ve bu fonksiyon aşağıda verildiği şekildedir.

$$f_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

Denklem (3.2), denklem (3.1)'de yerine yazılması sonucu, n tane test fonksiyonu n tane düğüm noktasına uygulanabilmektedir. Böylelikle nxn boyutundaki birinci dereceden türev ifadesi için ağırlık katsayıları hesaplanabilmektedir.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = 0 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} x_j = 1, i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} x_j^k = k x_i^{k-1}, k = 2, 3, 4, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Ele alınan test fonksiyonuna bakıldığında (denklem (3.2)), türevin derecesi düğüm noktasından büyük veya eşit olduğu durumda ağırlık katsayılarının değeri sıfıra eşit olmaktadır. Düğüm noktalarının koordinatları belirlendiğinde, $a_{ij}^{(1)}$ ağırlık katsayılarının hesabı için nxn boyutundaki lineer cebirsel denklem takımının çözülmesi gerekmektedir. Bu denklem takımının matrisinin determinantı Vondermonde formunda olmasından dolayı tek bir çözüme sahiptir. Düğüm noktası sayısı (n) büyük seçildikçe, matrisin tekilleşmesinden dolayı tersinin alınması oldukça güç bir hale gelmektedir. Düğüm noktası sayısı 22 ve daha yüksek değerlerde seçildiğinde matris tekil hale gelmektedir ve çözüm elde edilememektedir (Shu and Richards 1992).

Yukarıdaki işlemlere benzer olarak iki veya daha yüksek dereceli türev ifadeleri de aynı şekilde oluşturulabilmektedir. Farklı türev ifadesi için hesaplanan ağırlık katsayısı değerleri de farklı olmaktadır. İkinci dereceden türevlerin ağırlık katsayıları için metot yazılırsa şu ifade elde edilir;

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.4)$$

Denklem (3.4)' deki $f^{(2)}(x_i)$ ifadesi, $f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki 2. dereceden türevini göstermektedir. $a_{ij}^{(2)}$ ifadesi ise, 2. dereceden türevler için ağırlık katsayılarıdır.

İkinci dereceden türevler için ağırlık katsayısı ifadesi, birinci dereceden türevler için yazılan ağırlık katsayıları türünden de ifade edilebilmektedir (Quan and Chang 1989).

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} \sum_{k=1}^n a_{jk}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.5)$$

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n a_{ij}^{(1)} a_{jk}^{(1)} \right] f(x_j) \quad (3.6)$$

İkinci dereceden türev ifadesi için ağırlık katsayıları, (3.2) nolu eşitlikteki polinomsal test fonksiyonunun uygulanmasıyla aşağıdaki şekilde olmaktadır.

$$k(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(2)} x_j^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (3.7)$$

(3.7) nolu eşitlik, (3.3) nolu eşitlikteki bağıntıya benzer şekilde çözülerek ikinci dereceden türev için ağırlık katsayıları elde edilmektedir. Bu şekilde ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden türev ifadeleri için ağırlık katsayıları, matris çarpımı yaklaşımı uygulanarak sırasıyla aşağıda verildiği gibi ((3.10), (3.11), (3.12)) hesaplanabilmektedir (Bert and Malik 1996).

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} a_{ij}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdot & \cdot & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdot & \cdot & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{ij}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(2)} & a_{n2}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

(3.9) nolu eşitlik aşağıda verildiği gibi de ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} a_{ij}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ik}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{kj}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

(3.10) nolu eşitlik ile görüldüğü gibi ikinci dereceden türev için ağırlık katsayıları, birinci dereceden türev için ağırlık katsayıları ifadelerinin çarpımıyla elde edilebilmektedir.

$$\begin{bmatrix} a_{ij}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ik}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{kj}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} a_{ij}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ik}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{kj}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$f(x)$ fonksiyonunun herhangi p . dereceden türev ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\frac{\partial^{(p)} f}{\partial x^{(p)}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{(p-1)} f}{\partial x^{(p-1)}} \right) = \frac{\partial^{(p-1)}}{\partial x^{(p-1)}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} a^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{(p-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(1)} \end{bmatrix}, \quad p = 2, 3, 4, \dots, n-1 \quad (3.14)$$

Bu bağıntılara bakıldığında birinci dereceden türeve ait ağırlık katsayısı olan $a^{(1)}$ hesaplandığı zaman, daha yüksek dereceli türevlere ait ağırlık katsayısı matrisleri çarpım

kuralı vasıtasıyla kolaylıkla bulunabilmektedir. Sonuç olarak herhangi bir dereceden türev ifadesinin hesaplanabilmesi için *quadrature* kuralı kullanılarak, düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri cinsinden lineer cebirsel denklem takımı elde edilmektedir. Daha sonra bu noktalardaki fonksiyon değerleri için cebirsel denklem takımı sınır şartlarıyla beraber çözülmektedir (Shu 2012).

Birinci dereceden türev ifadesi için ağırlık katsayılarının hesabı ile ilgili aşağıda üç düğüm noktası sayısına sahip bir örnek ele alacak olursak, denklem (3.3)' den şu eşitlikler elde edilir:

$k = 1$ için;

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} + a_{12}^{(1)} + a_{13}^{(1)} &= 0, & i = 1 \\ \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(1)} x_j^0 &= 0 \Rightarrow a_{21}^{(1)} + a_{22}^{(1)} + a_{23}^{(1)} = 0, & i = 2 \\ a_{31}^{(1)} + a_{32}^{(1)} + a_{33}^{(1)} &= 0, & i = 3 \end{aligned} \quad (3.15)$$

(3.15) nolu eşitlik elde edilir.

$k = 2$ için;

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 &= 1, & i = 1 \\ \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(1)} x_j &= 1 \Rightarrow a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = 1, & i = 2 \\ a_{31}^{(1)} x_1 + a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 &= 1, & i = 3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.16) nolu denklem seti elde edilir.

$k = 3$ için ise;

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1^2 + a_{12}^{(1)}x_2^2 + a_{13}^{(1)}x_3^2 &= 2x_1, & i=1 \\
\sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(1)}x_j^2 &= 2x_i \Rightarrow a_{21}^{(1)}x_1^2 + a_{22}^{(1)}x_2^2 + a_{23}^{(1)}x_3^2 = 2x_2, & i=2 \\
a_{31}^{(1)}x_1^2 + a_{32}^{(1)}x_2^2 + a_{33}^{(1)}x_3^2 &= 2x_3, & i=3
\end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.17) nolu eşitlik elde edilir. Bu denklemler matris halinde sırasıyla yazılırsa aşağıda verildiği gibi olmaktadır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11}^{(1)} \\ a_{12}^{(1)} \\ a_{13}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_1 \end{Bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{21}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} \\ a_{23}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_2 \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{31}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \\ a_{33}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_3 \end{Bmatrix} \tag{3.20}$$

(3.18), (3.19) ve (3.20) nolu denklemler $j = 1, 2, 3$ olmak üzere şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} a_{j1}^{(1)} \\ a_{j2}^{(1)} \\ a_{j3}^{(1)} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix}}_x^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_j \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

Grid (düğüm) noktaları $x_1 = 0, x_2 = 1$ ve $x_3 = 2$ olarak ele alınacak olursa;

$$[x] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & a_{31}^{(1)} \\ a_{12}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{32}^{(1)} \\ a_{13}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -0.5 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. (3.23) nolu matrisin elemanlarını düzenlemek için transpozesi alındığında ağırlık katsayıları aşağıdaki eşitlikte verildiği şekliyle elde edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 2 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

İkinci dereeden türev için ağırlık katsayılarının hesabında ise, (3.21) nolu eşitliğin sağ tarafının türevinin alınması gerekmektedir.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{21}^{(2)} & a_{31}^{(2)} \\ a_{12}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{32}^{(2)} \\ a_{13}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

(3.25) nolu eşitlikte verilen matrisin transpozesi alınırsa, verilen üç düğüm noktası durumundaki ikinci dereceden türev için ağırlık katsayıları aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{21}^{(2)} & a_{31}^{(2)} \\ a_{12}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{32}^{(2)} \\ a_{13}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

3.1.2. Bellman'ın önerdiği ikinci yaklaşım

Bellman *et al.* (1972) önerdikleri ikinci yaklaşımda ilkin benzemekle beraber seçilen test fonksiyonu ise farklıdır. Bu metotta seçilen test fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir.

$$f_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x-x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.27)$$

(3.27) nolu eşitlikte verilen ifadelerden, n düğüm noktası sayısını ve $L_N(x)$ ise N . dereceden legendre polinomunu göstermektedir. $L_N^{(1)}(x)$ ifadesi ise bu polinomun birinci dereceden türevidir. x_k düğüm noktaları koordinatları, ötelenmiş legendre polinomunun kökleri olarak seçilerek ve (3.27) nolu eşitlik, (3.3) nolu eşitlikte yerine yazılacak olursa ağırlık katsayıları aşağıda verildiği gibi elde edilmektedir (Jang *et al.* 1989).

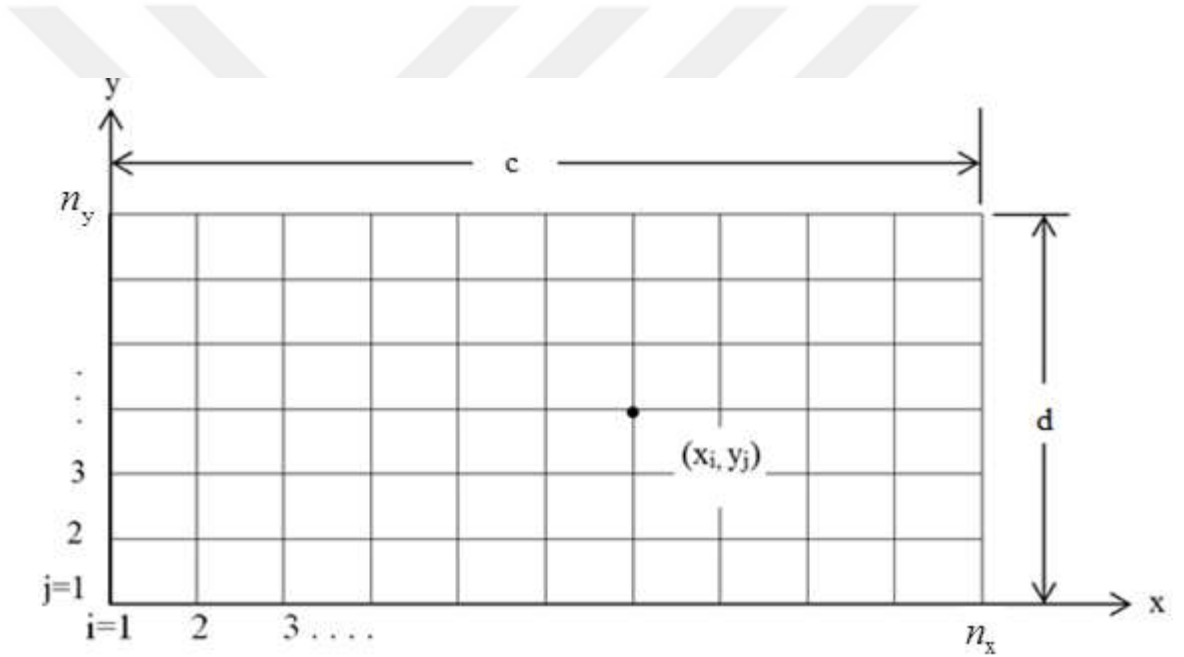
$$a_{ij}^{(1)} = \frac{L_N(x)}{(x-x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.28)$$

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{1-2x_i}{2x_i(x_i-1)}, \quad i = j \quad (3.29)$$

Bellman'ın ikinci yaklaşıma bakıldığında ilk yaklaşıma göre matrisin tekil hale gelmesi söz konusu değildir ve çözüme ulaşılmasında herhangi bir zorluk bulunmamaktadır. Fakat düğüm noktalarının koordinatları, düğüm nokta sayısı belirlendiğinde ötelenmiş legendre polinomunun kökleri olarak direk bulunabilmektedir. Mühendislik problemlerinin çözümünde ise problemin tipine göre sınır şartlarını hassas bir şekilde

uygulayabilmek için düğüm noktalarının dağılımının farklı şekilde olması gerekebilmektedir. Bir başka deyişle, ikinci yaklaşımda düğüm noktalarının dağılımı problem çeşidi fark etmeksizin sabit şekilde olmaktadır ve bu durum farklı sınır şartlarının problemlere hassas uygulanabilmesinde sorun teşkil etmektedir (Du *et al.* 1994).

İki boyutlu problemler için de bir boyutlu problemlere benzer olarak DQ metodu yazılabilmektedir (Shu and Richards 1992). Aşağıda iki boyutlu dikdörtgensel bir bölge için *quadrature* düğüm noktası sistemi ele alınmıştır.



Şekil 3.1. İki boyutlu dikdörtgensel bölge için düğüm noktaları

Şekil 3.1’de x ve y doğrultularındaki düğüm noktası sayısı sırasıyla n_x ve n_y olarak gösterilmektedir. $f(x, y)$ fonksiyonunun (x_i, y_j) ayrık noktaları için r ’inci dereceden x-kısmi türevi, s ’inci dereceden y-kısmi türevi ve $(r + s)$ ’inci dereceden x ve y kısmi türev ifadeleri sırasıyla şu şekildedir (Civalek 2004);

$$\left. \frac{\partial^r f}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{n_x} a_{ik}^{(r)} f(x_k, y_j); \quad r = 1, 2, 3, \dots, n_x - 1 \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{\partial^s f}{\partial y^s} \right|_{y=y_j} = \sum_{k=1}^{n_y} b_{ik}^{(s)} f(x_i, y_k); \quad s = 1, 2, 3, \dots, n_y - 1 \quad (3.31)$$

$$\left. \frac{\partial^{(r+s)} f}{\partial x^r \partial y^s} \right|_{x_i, y_j} = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left(\frac{\partial^s f}{\partial y^s} \right) = \sum_{k=1}^{n_x} a_{ik}^{(r)} \sum_{m=1}^{n_y} b_{jm}^{(s)} f(x_k, y_m); \quad i = 1, 2, \dots, n_x; j = 1, 2, \dots, n_y \quad (3.32)$$

Burada $a_{ij}^{(r)}$ ve $b_{ij}^{(s)}$ ifadeleri $f(x, y)$ fonksiyonunun r 'inci dereceden x -kısmi türevi için ve s 'inci dereceden y -kısmi türevi için ağırlık katsayılarını göstermektedir. Bu ifadeler aşağıda verildiği gibidir (Shu and Richards 1992).

$$a_{ij}^{(r)} = r \left[a_{ii}^{(r-1)} a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_x, \quad j \neq i \text{ ve } r = 2, 3, \dots, n_x - 1 \quad (3.33)$$

$$b_{ij}^{(s)} = s \left[b_{ii}^{(s-1)} b_{ij}^{(1)} - \frac{b_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_y, \quad j \neq i \text{ ve } s = 2, 3, \dots, n_y - 1 \quad (3.34)$$

$$a_{ij}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{n_x} a_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, \dots, n_x \text{ ve } r = 1, 2, \dots, n_x - 1 \quad (3.35)$$

$$b_{ij}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{n_y} b_{ij}^{(s)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_y \text{ ve } s = 1, 2, \dots, n_y - 1 \quad (3.36)$$

3.2. Genelleştirilmiş Diferansiyel *Quadrature* Metodu

DQ metodunun çözümü için önerilen iki yaklaşımın da bazı kısıtlayıcı durumları söz konusudur. İlk yaklaşımda düğüm noktası sayısı artırıldığında (özellikle 22' den fazla seçildiğinde) katsayılar matrisinin determinantı vondermonde formunda olmasından dolayı matris tekilleşmekte ve çözüm elde edilememektedir. Bununla beraber her bir

işlem sırasında $n \times n$ boyutundaki lineer denklem takımının çözülmesi gerekmektedir. İkinci önerilen metotta ise, farklı türde sınır şartlarının uygulanabilmesinde düğüm noktalarının dağılımı kısıtlanmaktadır. Bu güçlükleri gidermek ve metodun kullanım alanını ve uygulanabilirliğini kolaylaştırmak için ağırlık katsayılarının hesaplanması ile ilgili farklı test fonksiyonlarının kullanıldığı GDQ, HDQ ve Diferansiyel *quadrature* eleman metodu gibi yöntemler geliştirilmiştir.

Shu and Richards (1992), ağırlık katsayılarının hesaplanmasında herhangi bir matris tekiliğine ve sınır şartı kısıtlamasına sebebiyet vermeyen Lagrange interpolasyon polinomunu test fonksiyonu olarak önermişlerdir. Aşağıda bu metodun elde edilişi detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

İki boyutlu bir $f(x, y)$ fonksiyonunun (x_i, y_j) ayrık noktaları için r 'inci dereceden x 'e göre kısmi türevi ve s 'inci dereceden y 'ye göre kısmi türevi aşağıda verildiği gibi ifade edilebilmektedir. n_x , x koordinatı yönündeki düğüm noktası sayısını ve n_y , y koordinatı yönündeki düğüm noktası sayısını göstermektedir (Du *et al.* 1994).

$$f_x^r(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{n_x} a_{ik}^{(r)} f(x_k, y_j); \quad r = 1, 2, \dots, n_x - 1 \quad (3.37)$$

$$f_y^s(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{n_y} b_{jk}^{(s)} f(x_i, y_k); \quad s = 1, 2, \dots, n_y - 1 \quad (3.38)$$

(3.37) ve (3.38) nolu denklemlerdeki $a_{ik}^{(r)}$ ve $b_{jk}^{(s)}$ ifadeleri, sırasıyla x yönündeki r 'inci dereceden türeve ait ağırlık katsayısını ve y yönündeki s 'inci dereceden türeve ait ağırlık katsayısını göstermektedir. Test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon polinomu seçilmiştir (Lin *et al.* 1994).

$$f_i(x) = \frac{M(x)}{(x-x_i)M^{(1)}(x_i)}; \quad i=1,2,\dots,n_x \quad (3.39)$$

$$f_i(y) = \frac{P(y)}{(y-y_i)P^{(1)}(y_i)}; \quad i=1,2,\dots,n_y \quad (3.40)$$

(3.39) ve (3.40) nolu denklemlerdeki $M(x)$ ve $P(y)$ ifadeleri şu şekildedir.

$$M(x) = \prod_{j=1}^{n_x} (x-x_j) \quad (3.41)$$

$$P(y) = \prod_{j=1}^{n_y} (y-y_j) \quad (3.42)$$

$M(x)$ ve $P(y)$ ifadelerinin sırasıyla birinci dereceden türevlerini gösteren $M^{(1)}(x)$ ve $P^{(1)}(y)$ ifadeleri aşağıda verildiği gibidir.

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n_x} (x_i - x_j) \quad (3.43)$$

$$P^{(1)}(y_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n_y} (y_i - y_j) \quad (3.44)$$

(3.39) ve (3.40) numaralı eşitlikler, (3.37) ve (3.38) nolu denklemlerde yerine yazılırsa, x ve y doğrultusundaki birinci dereceden türevler için ağırlık katsayıları aşağıdaki gibi elde edilmektedir (Shu and Richards 1992).

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_x; i \neq j \quad (3.45)$$

$$a_{ii}^{(1)} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2M^{(1)}(x_i)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_x; i = j \quad (3.46)$$

$$b_{ij}^{(1)} = \frac{P^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_j)P^{(1)}(y_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_y; i \neq j \quad (3.47)$$

$$b_{ii}^{(1)} = \frac{P^{(2)}(y_i)}{2P^{(1)}(y_i)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_y; i = j \quad (3.48)$$

Burada x_i ve y_j düğüm noktası koordinatları belirlendiğinde (3.43) ve (3.44) nolu denklemler vasıtasıyla $i \neq j$ durumundaki $a_{ij}^{(1)}$ ve $b_{ij}^{(1)}$ ağırlık katsayıları kolaylıkla elde edilebilmektedir. $a_{ii}^{(1)}$ ve $b_{ii}^{(1)}$, in bulunabilmesi için ise, hesaplanması daha güç olan $M(x)$ ve $P(y)$ 'nin ikinci türevlerinin öncelikle elde edilmesi gerekmektedir. $a_{ii}^{(1)}$ ve $b_{ii}^{(1)}$ ifadelerinin daha kolay bir şekilde hesaplayabilmek için Taylor seri açılımı kullanırsa aşağıdaki eşitlikler bulunabilmektedir (Shu and Richards 1992; Civalek and Çatal 2006)

$$\sum_{j=1}^{n_x} a_{ij}^{(1)} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (3.49)$$

$$\sum_{j=1}^{n_y} b_{ij}^{(1)} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n_y \quad (3.50)$$

(3.49) ve (3.50) nolu denklemlerden $a_{ii}^{(1)}$ ve $b_{ii}^{(1)}$ ağırlık katsayıları değerleri, (3.45) ve (3.47) nolu denklemler kullanılarak elde edilebilmektedir.

$$a_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{n_x} a_{ij}^{(1)}; \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (3.51)$$

$$b_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{n_y} b_{ij}^{(1)}; \quad i = 1, 2, \dots, n_y \quad (3.52)$$

İkinci veya daha yüksek dereceden x ve y doğrultularındaki türev ifadeleri de benzer şekilde, Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak aşağıda verildiği gibi hesaplanabilmektedir (Shu and Du 1997; Shu 2012).

$$a_{ij}^{(r)} = r \left(a_{ii}^{(r-1)} a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right); \quad i, j = 1, 2, \dots, n_x; \quad i \neq j; r = 2, 3, \dots, n_x - 1 \quad (3.53)$$

$$a_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{n_x} a_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, \dots, n_x; \quad i = j; r = 2, 3, \dots, n_x - 1 \quad (3.54)$$

$$b_{ij}^{(s)} = s \left(b_{ii}^{(s-1)} b_{ij}^{(1)} - \frac{b_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right); \quad i, j = 1, 2, \dots, n_y; \quad i \neq j; s = 2, 3, \dots, n_y - 1 \quad (3.55)$$

$$b_{ii}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{n_y} b_{ij}^{(s)}; \quad i = 1, 2, \dots, n_y; \quad i = j; s = 2, 3, \dots, n_y - 1 \quad (3.56)$$

Yukarıdaki denklemlerden birinci veya daha yüksek dereceli türevlere ait ağırlık katsayıları, hesaplamada herhangi bir zorluk veya düğüm noktası kısıtlamasına maruz kalınmadan hesaplanabilmektedir. (3.53) - (3.56) nolu denklemler, (3.45), (3.47), (3.51) ve (3.52) nolu denklemlerle beraber x ve y doğrultularındaki türevlere ait ağırlık katsayılarının hesaplanabilmesini sağlamaktadır (Demir 2009; Shu 2012).

Üniform dağılımlı düğüm noktaları için (3.45) ve (3.47) nolu eşitlikler aşağıdaki gibi yazılabilmektedir. Burada $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ve $\Delta y = y_i - y_{i-1}$ şeklindedir ((3.57), (3.58)).

$$a_{ij}^{(1)} = (-1)^{i+j} \frac{(i-1)(n_x-i)!}{\Delta x(i-j)(j-1)!(n_x-j)!}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_x, j \neq i \quad (3.57)$$

$$b_{ij}^{(1)} = (-1)^{i+j} \frac{(i-1)(n_y-i)!}{\Delta y(i-j)(j-1)!(n_y-j)!}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n_y, j \neq i \quad (3.58)$$

Son olarak, bütün düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri elde edildiğinde, çözüm alanındaki fonksiyonel değerlerini polinomsal yaklaşım açısından belirlemek kolaydır.

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n_x} f(x_i, y_j) r_i(x) \quad (3.59)$$

$$f(x_i, y) = \sum_{j=1}^{n_y} f(x_i, y_j) s_j(y) \quad (3.60)$$

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f(x_i, y_j) r_i(x) s_j(y) \quad (3.61)$$

Burada $r_i(x)$ ve $s_j(y)$ ifadeleri sırasıyla x ve y yönlerindeki Lagrange interpolasyon polinomlarını göstermektedir ve aşağıdaki şekilde verildiği gibidirler (Shu 2012);

$$r_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots\dots(x-x_{n_x})}{M^{(1)}(x_i)} \quad (3.62)$$

$$s_j(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\dots\dots(y-y_{j-1})(y-y_{j+1})\dots\dots(y-y_{n_y})}{P^{(1)}(y_j)} \quad (3.63)$$

3.3. Harmonik Diferansiyel *Quadrature* Metodu

DQ metodu ile GDQ metodunda test fonksiyonu olarak polinom fonksiyonlar seçilerek ağırlık katsayıları bulunmaktadır. Polinom test fonksiyonları birçok problem için kabul edilebilir yeterlilikte sonuç vermektedir. Fakat özellikle periyodik davranışlarda bulunan bazı mühendislik problemlerinde, polinom yaklaşımı hassas sonuçlar vermemektedir. Bu sebeple Striz *et al.* (1995), test fonksiyonu olarak harmonik fonksiyonu ele almışlardır. Bu metotta da DQ metodunda karşılaşılan benzer zorlukların üstesinden gelebilmek için Shu and Xue (1997), Fourier seri açılımını ve GDQ metodunu kullanarak ağırlık katsayılarını hesaplayabilmışlerdir. Test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon trigonometrik polinomunu baz almışlardır ve bu polinom, (3.39) nolu eşitliğe benzer şekilde aşağıda verildiği gibidir;

$$f_k(x) = \frac{M(x)}{P(x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.64)$$

(3.64) nolu denklem daha açık bir şekilde (3.65) nolu denklemde verildiği gibi yazılabilir.

$$f_k(x) = \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}\pi \dots \sin \frac{x-x_{k-1}}{2}\pi \sin \frac{x-x_{k+1}}{2}\pi \dots \sin \frac{x-x_n}{2}\pi}{\sin \frac{x_k-x_0}{2}\pi \dots \sin \frac{x_k-x_{k-1}}{2}\pi \sin \frac{x_k-x_{k+1}}{2}\pi \dots \sin \frac{x_k-x_n}{2}\pi}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.65)$$

Burada verilen $M(x)$ ile beraber $N(x, x_k)$ ifadeleri şu şekildedir.

$$M(x) = \prod_{k=0}^n \sin \frac{x-x_k}{2}\pi = N(x, x_k) \sin \frac{x-x_k}{2}\pi \quad (3.66)$$

$$N(x_i, x_i) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \sin \frac{x_i-x_k}{2}\pi = P(x_i) \quad (3.67)$$

$$N(x_i, x_j) = N(x_i, x_j) \delta_{ij} \quad (3.68)$$

(3.68) nolu denklemdeki δ_{ij} ifadesi, Kronecker operatörüdür. Değeri $i \neq j$ durumu için 0'dır ve $i = j$ durumu için ise 1'e eşittir. (3.66) nolu eşitlik, (3.64) nolu denklemde yerine yazılması suretiyle aşağıda verildiği gibi kısaltılmış olmaktadır (Shu and Chew 1997).

$$f_k(x) = \frac{N(x, x_k)}{P(x_k)} \quad (3.69)$$

Bir boyutlu, n tane düğüm sayısına ve düğüm koordinatları $x_1, x_2, \dots, x_n$ olan, bir $f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir düğüm noktası için birinci ve ikinci mertebeden türevi sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$f_x(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.70)$$

$$f_{xx}(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.71)$$

(3.69) nolu denklem, (3.70) ve (3.71) nolu denklemler vasıtasıyla aşağıda verilen denklemler şeklinde elde edilebilmektedir.

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{N^{(1)}(x_i, x_j)}{P(x_j)} \quad (3.72)$$

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{N^{(2)}(x_i, x_j)}{P(x_j)} \quad (3.73)$$

Burada $N^{(1)}(x, x_k)$ ve $N^{(2)}(x, x_k)$ ifadeleri, $N(x_i, x_j)$ fonksiyonunun sırasıyla birinci ve ikinci dereceden türevini göstermektedir. Bu ifadeler (3.66) nolu denklemin türevinin alınmasıyla hesaplanabilmektedir. $M(x)$ ifadesinin türevleri aşağıda verildiği gibidir (Civalek and Ülker 2004).

$$M^{(1)}(x) = N^{(1)}(x, x_k) \sin \frac{x-x_k}{2} \pi + \frac{\pi}{2} N(x, x_k) \cos \frac{x-x_k}{2} \pi \quad (3.74)$$

$$M^{(2)}(x) = N^{(2)}(x, x_k) \sin \frac{x-x_k}{2} \pi + \pi N^{(1)}(x, x_k) \cos \frac{x-x_k}{2} \pi - \frac{\pi^2}{4} N(x, x_k) \sin \frac{x-x_k}{2} \pi \quad (3.75)$$

$$M^{(3)}(x) = N^{(3)}(x, x_k) \sin \frac{x-x_k}{2} \pi + \frac{3\pi}{2} N^{(2)}(x, x_k) \cos \frac{x-x_k}{2} \pi - \frac{3\pi^2}{4} N^{(1)}(x, x_k) \sin \frac{x-x_k}{2} \pi - \frac{\pi^3}{8} N(x, x_k) \cos \frac{x-x_k}{2} \pi \quad (3.76)$$

(3.74) nolu denklem, $x = x_k$ için,

$$M^{(1)}(x) = \frac{\pi}{2} N(x_i, x_i) = \frac{\pi}{2} P(x_i) \quad (3.77)$$

şeklinde yazılmaktadır. (3.74) nolu denklemdeki $N(x, x_k)$ ifadesi, $i \neq j$ durumunda (3.68) nolu eşitlikte δ_{ij} değeri sıfıra eşit olduğundan dolayı $N^{(1)}(x, x_k)$ ifadesi aşağıda belirtildiği gibi yazılabilmektedir (Shu and Chew 1997; Civalek and Demir 2009).

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{\pi M^{(1)}(x_i)}{\sin \frac{x_i - x_j}{2} \pi} \quad (3.78)$$

Benzer şekilde (3.75) nolu denklemde $x = x_k$ durumu için,

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(2)}(x_i)}{\pi} \quad (3.79)$$

denklemini elde edilmektedir. (3.75) nolu denklemde, $N(x, x_k)$ ifadesi $i \neq j$ durumunda sıfıra eşit olduğundan, $N^{(2)}(x_i, x_j)$ ifadesi aşağıda verildiği gibi yazılabilir (Striz *et al.* 1995).

$$N^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(2)}(x_i) - \pi N^{(1)}(x_i, x_j) \cos \frac{x_i - x_j}{2} \pi}{\sin \frac{x_i - x_j}{2} \pi}, \quad j \neq i \quad (3.80)$$

(3.76) nolu denklemde x yerine x_k yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$N^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{2}{3\pi} \left[M^{(3)}(x_i) + \frac{\pi^3}{8} N(x_i, x_i) \right] \quad (3.81)$$

Denklem (3.77), (3.78) ve (3.79), (3.72) nolu denklemde yerine konulursa aşağıdaki denklemler elde edilmektedir (Civalek and Ülker 2004).

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{\pi}{2} \frac{P(x_i)}{P(x_j) \sin \frac{x_i - x_j}{2} \pi}, \quad j \neq i \quad (3.82)$$

$$a_{ii}^{(1)} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{\pi P(x_i)} \quad (3.83)$$

Benzer şekilde, denklem (3.80) ve (3.81), (3.73) nolu denklemde yerine konulursa ve (3.82) ve (3.83) nolu denklemler aracılığıyla aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} \left[2a_{ii}^{(1)} - \pi \cot \frac{x_i - x_j}{2} \pi \right], \quad j \neq i \quad (3.84)$$

$$a_{ii}^{(2)} = \frac{2}{3\pi} \left[\frac{M^{(3)}(x_i)}{P(x_i)} + \frac{\pi^3}{8} \right] \quad (3.85)$$

Denklem (3.82) ve (3.84)' den $a_{ij}^{(1)}$ ve $a_{ij}^{(2)}$ ifadeleri kolaylıkla bulunabilmektedir. Fakat (3.83) ve (3.85) nolu denklemlerden $a_{ii}^{(1)}$ ve $a_{ii}^{(2)}$ ifadelerini hesaplayabilmek için $M^{(2)}(x_i)$ ve $M^{(3)}(x_i)$ değerlerinin hesaplanması gerekmektedir ve bunları hesabı da oldukça güçtür. Bu durum aşağıdaki yaklaşım kullanılarak kolaylaştırılabilmektedir. Buna göre bir temel fonksiyon (3.70) ve (3.71) nolu eşitliklerdeki lineer operatörü sağlıyorsa, bir başka temel fonksiyon da bunu sağlaması gerekmektedir. Bu nedenle $a_{ij}^{(1)}$ ve $a_{ij}^{(2)}$ ağırlık katsayıları, $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots, \sin n_x/2, \cos n_x/2$ şeklindeki başka bir temel fonksiyonu da sağlamalıdır (Striz *et al.* 1995; Shu and Xue 1997).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = 0 \quad \text{veya} \quad a_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}^{(1)} \quad (3.86)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(2)} = 0 \quad \text{veya} \quad a_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}^{(2)} \quad (3.87)$$

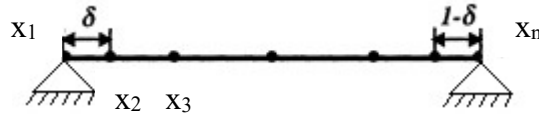
Denklem (3.86) ve (3.87)'den $i = j$ durumu için ağırlık katsayısı ifadeleri kolaylıkla bulunabilmektedir. Daha yüksek dereceli türevler için ağırlık katsayısı değerleri ise matris çarpımı yaklaşımı kullanılarak elde edilebilmektedir.

3.4. Sınır Şartlarının Uygulanması

DQ metodunda sınır şartlarının hassas bir şekilde düğüm noktalarında uygulanması oldukça büyük bir önem arz etmektedir. Burada sınır şartlarının uygulanmasında kullanılan yöntemlerden en temel olanlarından bahsedilmiştir.

3.4.1. δ tekniği

Bir düğüm noktasına birden fazla sınır şartının uygulanabilmesini sağlamak için Jang *et al.* (1989) tarafından sunulmuş bir yöntemdir. Bu teknikte, sınır düğüm noktasına deplasmanların sıfıra eşit olduğu $w=0$ şartı uygulanırken, bu düğüme δ kadar uzaklıkta olan ilk düğüm noktasına ise türev sınır şartı uygulanmaktadır.



Şekil 3.2. Kiriş problemi için delta noktalarının uygulanması (Shu 2012)

Şekil 3.2’de δ noktaları $x_2 = \delta$ ve $x_{n-1} = 1 - \delta$ düğüm noktalarında bulunmaktadır. Kirişin örneğin her iki ucunun basit – basit mesnet sınır şartına sahip olması durumunda, her iki uçtaki deplasman ve moment ($\partial^2 w / \partial x^2 = 0$) değerleri sıfıra eşittir. Sınırdaki düğüm noktalarına (x_1 ve x_n) deplasman sınır şartı ($w=0$) uygulanırken, x_2 ve x_{n-1} düğüm noktalarına ise moment sınır şartı aşağıda verildiği gibi uygulanabilmektedir (Jang *et al.* 1989; Malik 1995).

$$\sum_{k=1}^n a_{2,k}^{(2)} w_k = 0 \quad (3.88)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{n-1,k}^{(2)} w_k = 0 \quad (3.89)$$

δ tekniğinde, türev içeren sınır şartları aslında sınır düğüme uygulanması gerekiyorken bu noktaya δ kadar uzaklıkta bir noktaya uygulanmaktadır. Bu durumda göz önünde bulundurulan δ değeri sonuçları etkileyebilmektedir (0,0001' den küçük olmalıdır). Bununla birlikte δ değeri diğer düğüm noktalarından daha küçük seçildiği vakit, lineer cebirsel denklem takımı tekillleşmekte ve matrisin tersinin alınarak ağırlık katsayılarının hesaplanabilmesi zor bir hale gelmektedir (Shu 2012).

3.4.2. Ağırlık katsayıları matrisinin modifikasyonu metodu

Bu yöntem, δ tekniğinin dezavantajlarının üstesinden gelmek için Wang and Bert (1993) tarafından sunulmuştur. Bu yaklaşımda, yalnızca bir sınır koşulu sayısal olarak sisteme uygulanır. Diğer sınır koşulu (türev koşulu) ise, DQ ağırlık katsayısı matrisleri oluşturulurken sisteme uygulanmaktadır. Bu yaklaşımı göstermek için ankastre – basit mesnet durumu ele alınırsa aşağıda verildiği gibi sınır şartları yazılabilir.

$$x = 0 \quad \text{durumunda} \quad w = 0, \quad dw/dx = 0 \quad (3.90)$$

$$x = 1 \quad \text{durumunda} \quad w = 0, \quad d^2w/dx^2 = 0 \quad (3.91)$$

Ağırlık katsayıları olarak $[a^{(s)}]$ ve $[\tilde{a}^{(s)}]$ ifadeleri sırasıyla s. dereceden türev için ağırlık katsayılarının orijinal ve modifiye edilmiş hallerini göstermektedir. Bu durumda türev ifadesi şu şekildedir (Shu 2012).

$$\frac{d^s w}{dx^s} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{s-1} w}{dx^{s-1}} \right) \quad (3.92)$$

$$[a^{(s)}] = [a^{(1)}][a^{(s-1)}] = [a^{(2)}][a^{(s-2)}] = \dots = [a^{(s-1)}][a^{(1)}] \quad (3.93)$$

Aşağıda dw/dx türevinin her bir düğüm noktası için DQ analoğu gösterilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} (dw/dx)_1 \\ (dw/dx)_2 \\ . \\ . \\ . \\ (dw/dx)_{n-1} \\ (dw/dx)_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & . & . & . & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1,n}^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & . & . & . & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2,n}^{(1)} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & . & . & . & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ a_{n,1}^{(1)} & a_{n,2}^{(1)} & . & . & . & a_{n,n-1}^{(1)} & a_{n,n}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_{n-1} \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (3.94)$$

Denklem (3.90)'daki türev koşulunu uygulayabilmek için denklem (3.94)'deki matrisin ilk satırındaki elemanları yerine aşağıdaki denklemde verildiği gibi sıfır yazılır.

$$\begin{Bmatrix} (dw/dx)_1 \\ (dw/dx)_2 \\ . \\ . \\ . \\ (dw/dx)_{n-1} \\ (dw/dx)_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & . & . & . & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2,n}^{(1)} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & . & . & . & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ a_{n,1}^{(1)} & a_{n,2}^{(1)} & . & . & . & a_{n,n-1}^{(1)} & a_{n,n}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_{n-1} \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (3.95)$$

Burada (3.94) nolu denklemdeki matris $[a^{(1)}]$ ve (3.95) nolu denklemdeki matris ise $[\tilde{a}^{(1)}]$ matrisidir. Denklem (3.91)'deki ikinci sınır şartını uygulayabilmek için ikinci dereceden ağırlık katsayısı matrisi $[\bar{a}^{(2)}]$, denklem (3.93) kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Malik 1995).

$$[\bar{a}^{(2)}] = [a^{(1)}][\tilde{a}^{(1)}] \quad (3.96)$$

Denklem (3.91)'deki $x=1$ durumundaki ikinci sınır şartının uygulanabilmesi için, $\left[\bar{a}^{(2)}\right]$ ikinci dereceden ağırlık katsayısı matrisinin son satırındaki eleman değerlerinin yerine aşağıdaki denklemde görüldüğü gibi sıfır yazılır.

$$\left[\tilde{a}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1,1}^{(2)} & \bar{a}_{1,2}^{(2)} & . & . & . & \bar{a}_{1,n-1}^{(2)} & \bar{a}_{1,n}^{(2)} \\ \bar{a}_{2,1}^{(2)} & \bar{a}_{2,2}^{(2)} & . & . & . & \bar{a}_{2,n-1}^{(2)} & \bar{a}_{2,n}^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \bar{a}_{n-1,1}^{(2)} & \bar{a}_{n-1,2}^{(2)} & . & . & . & \bar{a}_{n-1,n-1}^{(2)} & \bar{a}_{n-1,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Denklem (3.90) ve (3.91)'deki sınır şartları $\left[\tilde{a}^{(2)}\right]$ matrisi ile birlikte tamamen uygulanmış olmaktadır. $\left[\tilde{a}^{(2)}\right]$ matrisinin kullanılması suretiyle, $\left[\tilde{a}^{(3)}\right]$ ve $\left[\tilde{a}^{(4)}\right]$ modifiye edilmiş sırasıyla üçüncü ve dördüncü dereceden türev için ağırlık katsayısı matrisleri aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\left[\tilde{a}^{(3)}\right] = \left[a^{(1)}\right] \left[\tilde{a}^{(2)}\right] \quad (3.98)$$

$$\left[\tilde{a}^{(4)}\right] = \left[a^{(2)}\right] \left[\tilde{a}^{(2)}\right] \quad (3.99)$$

Yukarda bahsedilen yöntem, ağırlık katsayısı matrisi üzerinde sınır şartı durumlarına göre basitçe bazı matris elemanlarının sıfırlanması temeline dayanmaktadır. Fakat homojen olmayan türev şartının bu yöntemde uygulanabilmesi kolay değildir. Bu zorluğu giderilmek için Malik and Bert (1996) tarafından toplama formu kullanımını ortaya konulmuştur.

Genel bir durumdaki homojen olmayan sınır şartları aşağıda verildiği gibi alınırsa,

$$x=0 \quad \text{durumunda} \quad w=e, \quad dw/dx=f \quad (3.100)$$

$$x=1 \quad \text{durumunda} \quad w=g, \quad d^2w/dx^2=h \quad (3.101)$$

Bu denklemlerdeki e, f, g ve h değerleri birer sabit sayıdır. İlk olarak, $x = x_i$ düğüm noktası için ikinci dereceden türev şartının DQ analoğu uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$w_{xx}(x_i) = \sum_{kl=1}^n a_{i,kl}^{(1)} w_x(x_{kl}) \quad (3.102)$$

(3.100) nolu denklemdeki türev şartı, (3.102) nolu denklemde yerine yazılıp DQ formunun uygulanmasıyla aşağıdaki denklem elde edilmektedir (Shu 2012).

$$w_{xx}(x_i) = a_{i,1}^{(1)} f + \sum_{k=1}^n \sum_{kl=2}^n a_{i,kl}^{(1)} a_{kl,k}^{(1)} w_k = a_{i,1}^{(1)} f + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{i,k}^{(2)} w_k \quad (3.103)$$

İkinci mertebeden türev için ağırlık katsayısı matrisinin elemanları şu şekilde hesaplanabilmektedir.

$$\tilde{a}_{i,k}^{(2)} = \sum_{kl=2}^n a_{i,kl}^{(1)} a_{kl,k}^{(1)} \quad (3.104)$$

Benzer şekilde, üçüncü ve dördüncü dereceden türevlerin dağılımları sırasıyla şöyle yazılabilir:

$$w_{xxx}(x_i) = a_{i,n}^{(1)} h + f \sum_{kl=1}^{n-1} a_{i,kl}^{(1)} a_{kl,l}^{(1)} + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{i,k}^{(3)} w_k \quad (3.105)$$

$$w_{xxxx}(x_i) = a_{i,N}^{(2)} h + f \sum_{kl=1}^{n-1} a_{i,kl}^{(2)} a_{kl,l}^{(1)} + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{i,k}^{(4)} w_k \quad (3.106)$$

Burada $\tilde{a}_{i,k}^{(3)} = \sum_{kl=1}^{n-1} a_{i,kl}^{(1)} \tilde{a}_{kl,k}^{(2)}$ ve $\tilde{a}_{i,k}^{(4)} = \sum_{kl=1}^{n-1} a_{i,kl}^{(2)} \tilde{a}_{kl,k}^{(2)}$ ifadeleri sırasıyla üçüncü ve dördüncü dereceden türevler için düzenlenmiş ağırlık katsayılarını göstermektedir. Ağırlık katsayılarının modifiye edilmesi yöntemi kullanılarak sınır şartları ağırlık katsayıları matrisi üzerinde değişiklik yapılarak direkt uygulanabilmektedir. Böylelikle DQ metodunun uygulanmış olduğu ana denklem ise sadece içteki düğüm noktalarına uygulanmış olmaktadır ($2 \leq i \leq n-1$). Bu sebeple ana denklem sistemi $(n-2) \times (n-2)$ boyutundadır. Bu yöntem birçok problemi çözmek için başarıyla uygulanmıştır fakat ankastre – ankastre sınır şartı durumu gibi bazı problemlerin çözümünde ise hassas sonuçlar vermemektedir (Shu 2012).

3.4.3. Ağırlık katsayılarının modifikasyonu – 2 metodu

Yukarda anlatılan ilk yaklaşım bütün sınır şartı kombinasyonları için kullanılamamaktadır. Bu sebeple Karami and Malekzadeh (2002) tarafından yeni bir yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşıma göre, iki uç noktadaki ikinci dereceden türev olan $w_1^{[2]}$ ve $w_n^{[2]}$ ifadeleri, üçüncü ve dördüncü dereceden türevlerin ağırlık katsayılarının hesaplanmasında bağımsız değişkenler olarak görülmektedir (Wang 2015).

$$w_i^{[3]} = \sum_{k=2}^{n-1} a_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^n a_{kl}^{(2)} w_l + a_{i1}^{(1)} w_1^{[2]} + a_{in}^{(1)} w_n^{[2]} = \sum_{j=1}^{n+2} a_{ij}^{(3)} u_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.107)$$

$$w_i^{[4]} = \sum_{k=2}^{n-1} a_{ik}^{(2)} \sum_{j=1}^n a_{kl}^{(2)} w_l + a_{i1}^{(1)} w_1^{[2]} + a_{in}^{(2)} w_n^{[2]} = \sum_{j=1}^{n+2} a_{ij}^{(4)} u_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.108)$$

Burada $\{u\}^T = [w_1, w_1^{[2]}, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n, w_n^{[2]}]$ ve $a_{ij}^{(1)}$ ve $a_{ij}^{(2)}$ sırasıyla birinci ve ikinci dereceden türev için ağırlık katsayılarıdır. Tüm düğüm noktalarındaki birinci ve ikinci dereceden türevler u_j ($j = 1, 2, \dots, n+2$) cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$w_i^{[1]} = \sum_{j=1}^{n+2} \bar{a}_{ij}^{(1)} u_j, \quad w_i^{[2]} = \sum_{j=1}^{n+2} \bar{a}_{ij}^{(2)} u_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.109)$$

Burada, $\bar{a}_{ij}^{(1)} = \bar{a}_{ij}^{(2)} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 2, n+2$)'dir. (3.109) nolu denklem, sınır noktalarındaki eğim sınır şartının sıfır olduğu durumlar için modifiye edilmesi gerekmektedir. Örneğin $w_1^{[1]} = 0$ durumunda, $w_1^{[2]}$ düzenlenirse aşağıda verildiği gibidir.

$$w_1^{[2]} = \sum_{k=2}^n a_{1k}^{(1)} w_k^{[1]} = \sum_{k=2}^n \sum_{l=1}^n a_{1k}^{(1)} a_{kl}^{(1)} w_l = \sum_{j=1}^{n+2} a_{1j}^{(2)} u_j \quad (3.110)$$

Bu yöntemle beraber sınır şartlarının tüm kombinasyonları herhangi bir zorluk olmadan uygulanabilmektedir (Wang 2015).

3.4.4. Ağırlık katsayılarının modifikasyonu – 3 metodu

Bu yöntem bir önceki metoda benzemekle beraber tek fark ilave serbestlik olarak $w_1^{[2]}$ ve $w_n^{[2]}$ ifadeleri yerine $w_1^{[1]}$ ve $w_n^{[1]}$ ifadelerinin kullanılmasıdır. Bu metotta, ilave serbestlik derecesi olarak iki uç noktadaki birinci mertebeden türevler ($w_1^{[1]}$ ve $w_n^{[1]}$), üçüncü ve dördüncü mertebeden türevlerin ağırlık katsayıları hesaplanırken bağımsız değişkenler olarak düşünülmektedir). İç düğüm noktalarındaki ikinci dereceden türevlerin ağırlık katsayılarının hesabı geleneksel DQ metodu ile aynı şekildedir (Wang 2015).

$$w_i^{[2]} = \sum_{k=2}^{n-1} a_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(1)} w_j + a_{i1}^{(1)} w_1^{[1]} + a_{in}^{(1)} w_n^{[1]} = \sum_{j=1}^{n+2} \bar{a}_{ij}^{(2)} u_j \quad (i = 1, n) \quad (3.111)$$

$$w_i^{[2]} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(1)} w_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(2)} w_j = \sum_{j=1}^{n+2} \bar{a}_{ij}^{(2)} u_j \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \quad (3.112)$$

$\{u\}^T = [w_1, w_1^{[1]}, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n, w_n^{[1]}]$ ve $\bar{a}_{ij}^{(2)} = 0$ ($i = 2, 3, \dots, n-1; j = 2, n+2$)'ye eşittir.

Üçüncü ve dördüncü mertebeden türevlerin ağırlık katsayıları şu şekildedir;

$$w_i^{[3]} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(1)} w_k^{[2]} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^{n+2} \bar{a}_{kj}^{(2)} u_j = \sum_{j=1}^{n+2} a_{ij}^{(3)} u_j \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.113)$$

$$w_i^{[4]} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(2)} w_k^{[2]} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(2)} \sum_{j=1}^{n+2} \bar{a}_{kj}^{(2)} u_j = \sum_{j=1}^{n+2} a_{ij}^{(4)} u_j \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.114)$$

Birinci mertebeye türevleri, u_j ($j=1,2,\dots,n+2$) cinsinden şu şekilde ifade edilebilir;

$$w_i^{[1]} = \sum_{j=1}^{n+2} \bar{a}_{ij}^{(1)} u_j \quad (i=1,2,\dots,n); \quad \bar{a}_{ij}^{(1)} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n; j=2,n+2) \quad (3.115)$$

3.4.5. Düğüm noktası seçimi

Düğüm noktası sayısı ve bu noktaların dağılımları, DQ metodunun hassasiyetini etkileyen önemli parametrelerdendir. Düğüm noktalarının seçiminde çeşitli yaklaşımlar bulunmakla birlikte, düğüm noktalarının seçiminde en çok kullanılan metot her bir koordinat yönünde eşit aralıklı dağılmış olan noktaların seçimidir. x ve y koordinatlarında eşit aralıklarla dağılmış düğüm noktalarının seçimini veren bağıntılar aşağıdaki gibidir. Burada n_x ve n_y sırasıyla bu koordinatlardaki düğüm noktası sayısını göstermektedir (Bert and Malik 1996; Siddiqi 1996).

$$x_i = \frac{i-1}{n_x-1} \quad i=1,2,\dots,n_x \quad (3.116)$$

$$y_j = \frac{j-1}{n_y-1} \quad j=1,2,\dots,n_y \quad (3.117)$$

Eşit aralıklı dağılmış düğüm noktaları seçimi, bazı problemlerin çözümünde hassas sonuçlar vermeyebilmektedir. Bu sebeple eşit aralıklı olmayan düğüm noktalarının kullanılması gerekebilmektedir. Bu yöntemler arasında en çok kullanılanı olan Chebyshev-Gauss-Lobatto dağılımında, sınır koşullarının uygulandığı uç noktalara doğru düğüm noktaları sıklaşmaktadır. Aşağıda bu dağılım için düğüm noktaları seçimini veren bağıntılar belirtilmiştir (Shu and Richards 1992; Bert and Malik 1996).

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{n_x - 1} \right]; \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (3.118)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{(j-1)\pi}{n_y - 1} \right]; \quad j = 1, 2, \dots, n_y \quad (3.119)$$

3.5. Tabakalı Kompozit Dikdörtgen Plakanın DQ Metotları İle Serbest Titreşim Analizi

Bölüm 2.5’de anlatıldığı üzere klasik tabakalı plaka teorisine (CLPT) dayalı, simetrik tabakalı, ortotropik ince dikdörtgen plakanın serbest titreşimini ifade eden denklem sinüzoidal zaman cevabı varsayımına göre şu şekildedir (Wang 2015);

Enine deplasman, $w_o(x, y, z, t) = w(x, y)e^{i\omega t}$ şeklinde olmak üzere;

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \omega^2 w \end{aligned} \quad (3.120)$$

Burada plakanın boyu c , genişliği d , kalınlığı h , D_{ij} eğilme rijitliğini, ρ plaka malzemesinin yoğunluğunu ve ω dairesel frekansı göstermektedir.

Plaka sınır şartları aşağıda verildiği gibidir:

1. Basit mesnetli kenar:

$$w = M_x = 0 \quad (x = 0, c) \quad \text{veya} \quad w = M_y = 0 \quad (y = 0, d) \quad (3.121)$$

2. Ankastre kenar:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, c) \quad \text{veya} \quad w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, d) \quad (3.122)$$

3. Serbest kenar:

$$V_x = M_x = 0 \quad (x = 0, c) \quad \text{veya} \quad V_y = M_y = 0 \quad (y = 0, d) \quad (3.123)$$

Burada, eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri ifadeleri aşağıda verildiği gibidir.

$$M_x = D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.124)$$

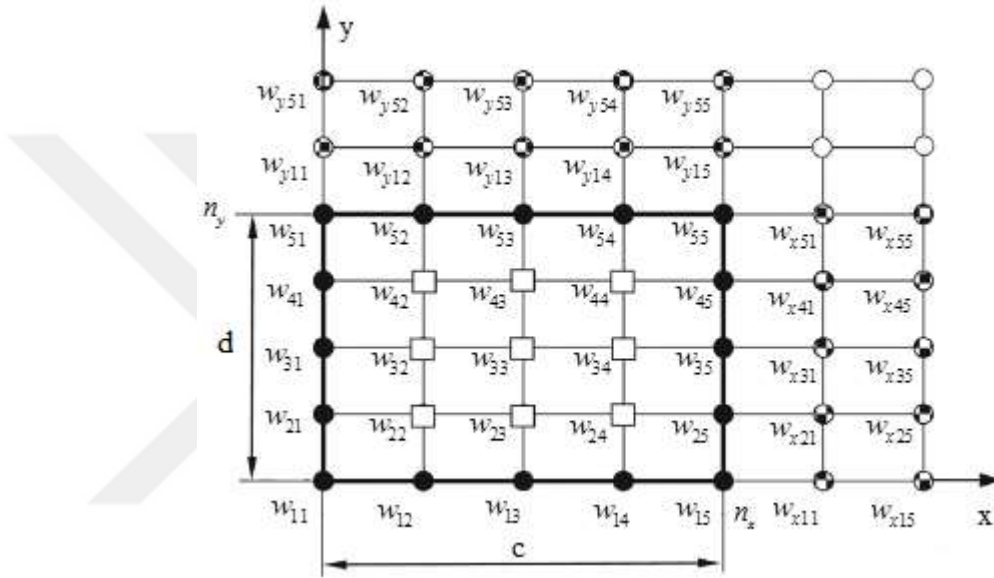
$$M_y = D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.125)$$

$$V_x = D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \quad (3.126)$$

$$V_y = D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 4D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.127)$$

Serbest kenar durumunda, $M_x = M_y = R = 0$ şartının uygulanması gerekmektedir. Burada noktasal kuvvet R ifadesi şu şekildedir;

$$R = 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.128)$$



Şekil 3.3. 5x5 düğüm noktası dağılımına sahip dikdörtgen plaka ($n = n_x = n_y = 5$)

Şekil 3.3’de her bir iç nokta bir serbestlik derecesine sahiptir, yani w_{ij} ($i = 2, 3, \dots, n_y - 1, j = 2, 3, \dots, n_x - 1$) ifadeleridir. Her bir köşe noktası üç serbestlik derecesine sahiptir, bunlar w_{ij}, w_{xij}, w_{yij} ($i = 1, n_y, j = 1, n_x$)’ dir. Her bir sınır noktası $x=0$ ve $x=c$ ’de w_{ij}, w_{xij} ($i = 2, \dots, n_y - 1, j = 1, n_x$) olmak üzere iki serbestlik derecesine sahiptir ve her bir sınır noktası $y=0$ ve $y=d$ ’de w_{ij}, w_{yij} ($i = 1, n_y, j = 2, \dots, n_x - 1$) olmak üzere iki serbestlik derecesine sahiptir.

Şekil 3.3’de x ve y ’ ye göre dönme ifadelerinin birinci dereceden türevlerini hesaplayabilmek için plakanın dışına ek düğüm noktaları ($2n_x + 2n_y$) ilave edilmiştir. Ek

düğüm noktaları burada yarı dolu noktalarla gösterilmiştir. $(n_x + 1)$ çizgisi boyunca yarı dolu noktalar için serbestlik derecesi, $(\partial w / \partial x)_{x=0} = w_{x0}$ ve $(n_x + 2)$ çizgisi boyunca ise $(\partial w / \partial x)_{x=c} = w_{xc}$ ifadelerine eşittir. Benzer şekilde, $(n_y + 1)$ çizgisi boyunca yarı dolu noktalar için serbestlik derecesi $(\partial w / \partial x)_{y=0} = w_{y0}$ ve $(n_y + 2)$ çizgisi boyunca ise $(\partial w / \partial x)_{y=d} = w_{yd}$ ifadelerine eşittir. Sınır şartlarının uygulanmasında ağırlık katsayılarının modifikasyonu metodu için buradaki içi boş noktalar kullanılmamaktadır. Yer değiştirme vektörünün sıralaması ise şu şekildedir: (Wang 2015)

$$w_{1j} (j = 1, 2, \dots, n), w_{x11}, w_{x1n}, w_{2j} (j = 1, 2, \dots, n), w_{x21}, w_{x2n}, \dots, w_{nj} (j = 1, 2, \dots, n), w_{xn1}, w_{xnn}, w_{yj1} (j = 1, 2, \dots, n), w_{yjn} (j = 1, 2, \dots, n).$$

Örneğin, $n_x = n_y = 5$ dağılımı için deplasman vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \{\bar{w}\}^T = \{ & w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{x11}, w_{x15}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24}, w_{25}, \\ & w_{x21}, w_{x25}, w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{34}, w_{35}, w_{x31}, w_{x35}, w_{41}, w_{42}, \\ & w_{43}, w_{44}, w_{45}, w_{x41}, w_{x45}, w_{51}, w_{52}, w_{53}, w_{54}, w_{55}, w_{x51}, w_{x55}, \\ & w_{y11}, w_{y12}, w_{y13}, w_{y14}, w_{y15}, w_{y51}, w_{y52}, w_{y53}, w_{y54}, w_{y55} \} \end{aligned} \quad (3.129)$$

Bu tez kapsamında, uç noktalardaki ilave serbestlik derecesini uygulamak için modifiye edilmiş ağırlık katsayıları-3 yöntemi kullanılmıştır. Bir başka deyişle, $w'_1 = (\partial w / \partial x)_{x=0}$ $w'_n = (\partial w / \partial x)_{x=c}$ şeklindedir. Çözüm fonksiyonu w 'nin i . noktadaki birinci mertebeden dördüncü mertebeye kadar türev ifadeleri şu şekilde yazılabilmektedir:

$$w_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_x+2} a_{ij}^{(1)} \delta_j \quad (3.130)$$

$$w_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{n_x+2} a_{ij}^{(2)} \delta_j \quad (3.131)$$

$$w_i^{(3)} = \sum_{j=1}^{n_x+2} a_{ij}^{(3)} \delta_j \quad (3.132)$$

$$w_i^{(4)} = \sum_{j=1}^{n_x+2} a_{ij}^{(4)} \delta_j \quad (i = 1, 2, \dots, n_x) \quad (3.133)$$

Burada $a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, a_{ij}^{(3)}, a_{ij}^{(4)}$ ifadeleri sırasıyla birinci mertebeden, dördüncü mertebeye kadar x 'e göre ağırlık katsayılarını göstermektedir. n_x , x doğrultusundaki toplam düğüm sayısını ifade etmektedir. δ_j ifadesi ise aşağıdaki gibidir:

$$\delta_j = w_j \quad (j = 1, 2, \dots, n_x), \quad \delta_{n_x+1} = w', \quad \delta_{n_x+2} = w' n_x \quad (3.134)$$

Benzer şekilde y doğrultusundaki ağırlık katsayıları da yukarıda bahsedildiği gibi yazılabilmektedir. Her iki eksen doğrultusunda toplam düğüm noktası sayısı eşit sayıda alınabilmektedir. Buna göre (3.120) nolu denklemde ifade edilen iç düğüm noktalarının diferansiyel denkleminin DQ eşitliği aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\begin{aligned} & D_{11} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ik}^{(4)} \bar{w}_{kl} + 4D_{16} \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(3)} b_{lk}^{(1)} \bar{w}_{jk} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(2)} b_{lk}^{(2)} \bar{w}_{jk} \\ & + 4D_{26} \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(1)} b_{lk}^{(3)} \bar{w}_{jk} + D_{22} \sum_{k=1}^{n+2} b_{lk}^{(4)} \bar{w}_{lk} = \rho h \omega^2 w_{il} \\ & (i = 2, 3, \dots, n_y - 1; l = 2, 3, \dots, n_x - 1) \end{aligned} \quad (3.135)$$

Eğilme momenti denklemleri $\partial w / \partial x$ veya $\partial w / \partial y$ ifadelerinin serbestlik derecelerinin bulunduğu yere yerleştirilir. Kesme kuvveti denklemleri ise w deplasman ifadesinin bulunduğu yere yerleştirilir. Sınır şartı ifadelerinin DQ eşitlikleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} & D_{11} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ik}^{(2)} \bar{w}_{kl} + D_{12} \sum_{k=1}^{n+2} b_{lk}^{(2)} \bar{w}_{ik} + 2D_{16} \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(1)} b_{lk}^{(1)} \bar{w}_{jk} = (M_x)_{il} \\ & (i = 1, 2, \dots, n_y; l = 1, n_x) \end{aligned} \quad (3.136)$$

w_{il} ($i = 2, 3, \dots, n_y - 1; l = 1, n_x$) durumları için DQ eşitliği aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} D_{11} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ik}^{(3)} \bar{w}_{kl} + 4D_{16} \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(2)} b_{lk}^{(1)} \bar{w}_{jk} + (D_{12} + 4D_{66}) \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(1)} b_{lk}^{(2)} \bar{w}_{jk} \\ + 2D_{26} \sum_{k=1}^{n+2} b_{lk}^{(3)} \bar{w}_{ik} = (V_x)_{il} \quad (i = 2, 3, \dots, n_y - 1; l = 1, n_x) \end{aligned} \quad (3.137)$$

Denklem (3.137) dört köşe noktasını içermemektedir. $(w_{il} (i = 1, n_y; l = 1, n_x))$

Benzer olarak, $(\partial w / \partial y)_{y=0}$ ve $(\partial w / \partial y)_{y=d}$ durumları için DQ eşitlikleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} D_{12} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ik}^{(2)} \bar{w}_{kl} + D_{22} \sum_{k=1}^{n+2} b_{lk}^{(2)} \bar{w}_{ik} + 2D_{26} \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(1)} b_{lk}^{(1)} \bar{w}_{jk} = (M_y)_{il} \\ (i = 1, n_y; l = 1, 2, \dots, n_x) \end{aligned} \quad (3.138)$$

w_{il} ($i = 1, n_y; l = 2, 3, \dots, n_x - 1$) durumları için DQ eşitliği aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} D_{22} \sum_{k=1}^{n+2} b_{lk}^{(3)} \bar{w}_{ik} + 4D_{26} \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(1)} b_{lk}^{(2)} \bar{w}_{jk} + (D_{12} + 4D_{66}) \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(2)} b_{lk}^{(1)} \bar{w}_{jk} \\ + 2D_{16} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ik}^{(3)} \bar{w}_{kl} = (V_y)_{il} \quad (i = 1, n_y; l = 2, 3, \dots, n_x - 1) \end{aligned} \quad (3.139)$$

Denklem (3.139), dört köşe noktasını içermemektedir. $(w_{il} (i = 1, n_y; l = 1, n_x))$

Son olarak, dört köşe noktasında $w_{il} (i = 1, n_y; l = 1, n_x)$ aşağıdaki DQ denklemleri uygulanır:

$$\begin{aligned} 2D_{16} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ik}^{(2)} \bar{w}_{kl} + 2D_{26} \sum_{k=1}^{n+2} b_{lk}^{(2)} \bar{w}_{ik} + 4D_{66} \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} a_{ij}^{(1)} b_{lk}^{(1)} \bar{w}_{jk} = R_{il} \\ (i = 1, n_y; l = 1, n_x) \end{aligned} \quad (3.140)$$

Denklem (3.135) ile denklem (3.140) arasındaki bütün denklemler toplanıp gerekli matematiksel işlemler yapıldıktan sonra aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_e\} \\ \{w_i\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_e\} \\ \lambda[I]\{w_i\} \end{Bmatrix} \quad (3.141)$$

Burada e ve i indisleri, sırasıyla sınır noktalarındaki serbestlik derecesine ilişkin ve bütün iç noktalardaki diferansiyel denklemin DQ analoglarını elde etmek için kullanılan düğüm noktalarını belirtmektedir. $\{F_e\}$ genelleştirilmiş kuvvet vektörünü, $\{\Delta_e\}$ sınır noktalarındaki deplasmanların vektörünü ve $\lambda = \rho h \omega^2$ ifadesini göstermektedir. Denklem (3.141), $(n+2)x(n+2)-4$ sayıda denklemi içermekte olup, denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir.

Sınır şartlarının herhangi bir kombinasyonu, deplasman, kesme kuvveti, eğim ya da eğilme momenti şartlarını belirten denklem (3.136) ile denklem (3.140) arasındaki eşitliklerin kullanılması ile elde edilebilmektedir. Sınır şartları uygulandıktan sonra anizotropik dikdörtgen plakanın serbest titreşim analizi için DQ denklemi aşağıdaki formu almaktadır.

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{ee} & \bar{K}_{ei} \\ \bar{K}_{ie} & \bar{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_e\} \\ \{w_i\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \lambda[I]\{w_i\} \end{Bmatrix} \quad (3.142)$$

Burada üst çizgi ifadeleri, sıfır genelleştirilmiş deplasmanlar çıkarıldığından dolayı modifiye edilmiş miktarları belirtmektedir. Sıfırdan farklı sınır noktalarındaki düğüm noktalarının çökme bileşenlerini ifade eden $\{\bar{\Delta}_e\}$ vektörü elimine edildikten sonra, denklem (3.142) aşağıdaki formda yeniden ifade edilebilir:

$$\left[K_{ii} - \bar{K}_{ib} \bar{K}_{bb}^{-1} \bar{K}_{bi} \right] \{w_i\} = \lambda[I]\{w_i\} \quad (3.143)$$

Denklem (3.143) daha basit bir şekilde yazılırsa aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$[\overline{K}]\{w_i\} = \lambda[I]\{w_i\} \quad (3.144)$$

Denklem (3.144) standart bir öz değer matris denklemidir ve bir standart öz değer çözücü ile çözülebilir. Mod şekillerini belirten $\{w_i\}$ vektörü benzer biçimde elde edilebilir.

Serbest kenar sınır şartı haricindeki sınır şartları durumları için ağırlık katsayılarının düzenlenmesi yöntemi kullanılarak sınır şartları hareket denklemine direk uygulanabilmektedir. Böylelikle sadece iç düğüm noktalarının DQ denklemine ihtiyaç kalmaktadır.

$$\begin{aligned} & D_{11} \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(4)} w_{kl} + 4D_{16} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(3)} b_{lk}^{(1)} w_{jk} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(2)} b_{lk}^{(2)} w_{jk} \\ & + 4D_{26} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(1)} b_{lk}^{(3)} w_{jk} + D_{22} \sum_{k=1}^n b_{lk}^{(4)} w_{ik} = \rho h \omega^2 w_{il} \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n_y - 1; l = 2, 3, \dots, n_x - 1)$$

Sınır şartları, ağırlık katsayılar matrisi oluşturuluyorken matris içerisine dahil edildiklerinden dolayı denklem (3.145), denklem (3.135)'den farklıdır. Ayrıca, serbestlik dereceleri x veya y'ye göre birinci mertebeden türevleri içermemektedir. Bu nedenle toplam aralık 1 den n' ye kadardır.

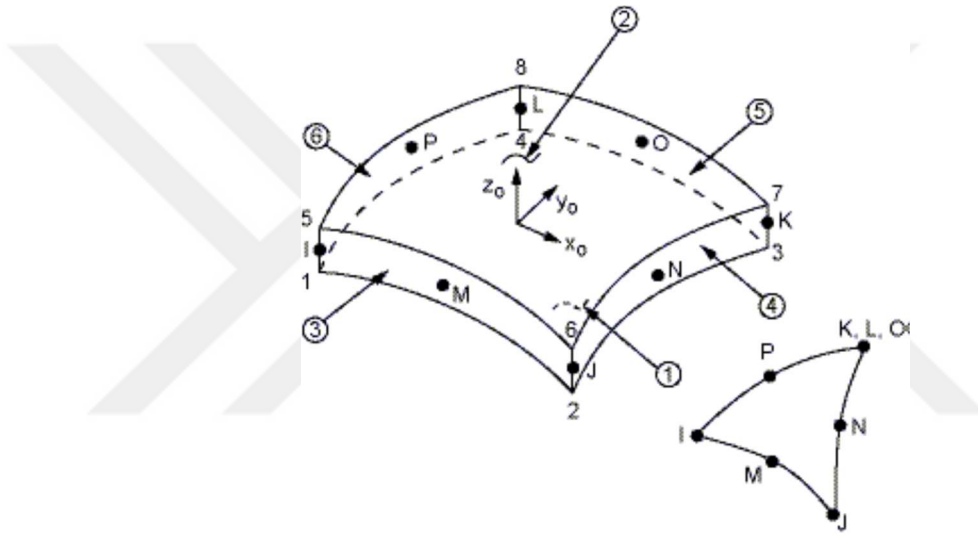
Matris şeklindeki denklem (3.145) aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$[K_{ii}]\{w_i\} = \lambda[I]\{w_i\} \quad (3.146)$$

Burada, bütün sınır noktalarındaki dönmeler sıfıra eşit olduğundan $\{w_i\}$ vektöründe yer almazlar.

3.6. FMT Kompozit Plakanın Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Titreşim Analizi

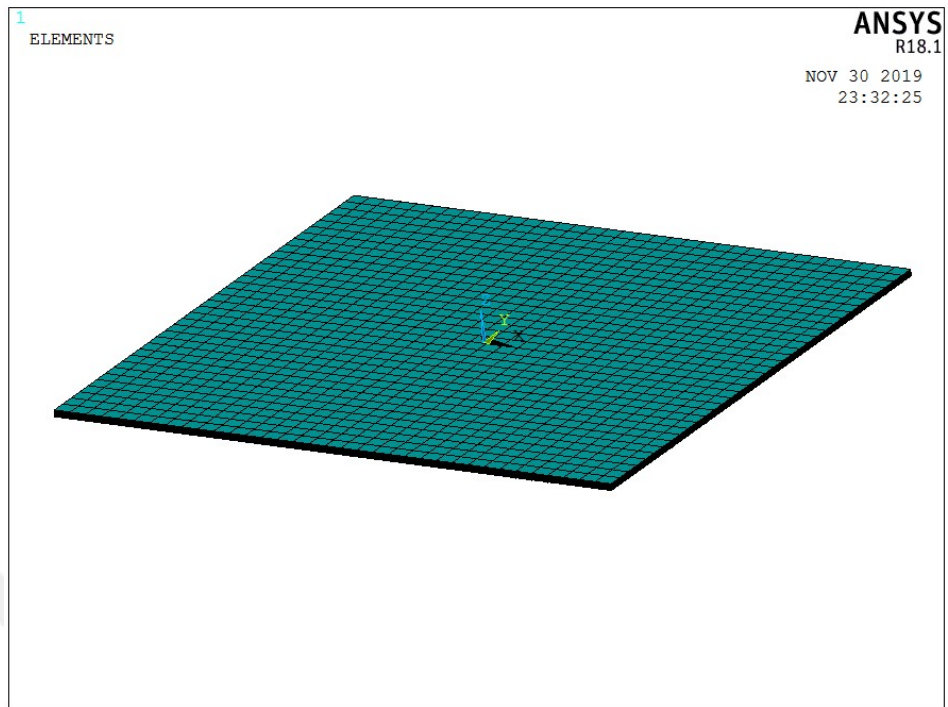
FMT kompozit plakanın sonlu elemanlar yöntemi ile titreşim analizinde, ANSYS paket programı kullanılmıştır. ANSYS programında SHELL 281 elemanı kullanılarak model oluşturulmuş ve analizi gerçekleştirilmiştir. SHELL 281 elemanı, 8 düğüme ve her bir düğümde x, y, z yönlerinde öteleme ve dönme olmak üzere 6 serbestlik derecesine ve ince kabuk yapıların analizi için uygun bir geometriye sahiptir.



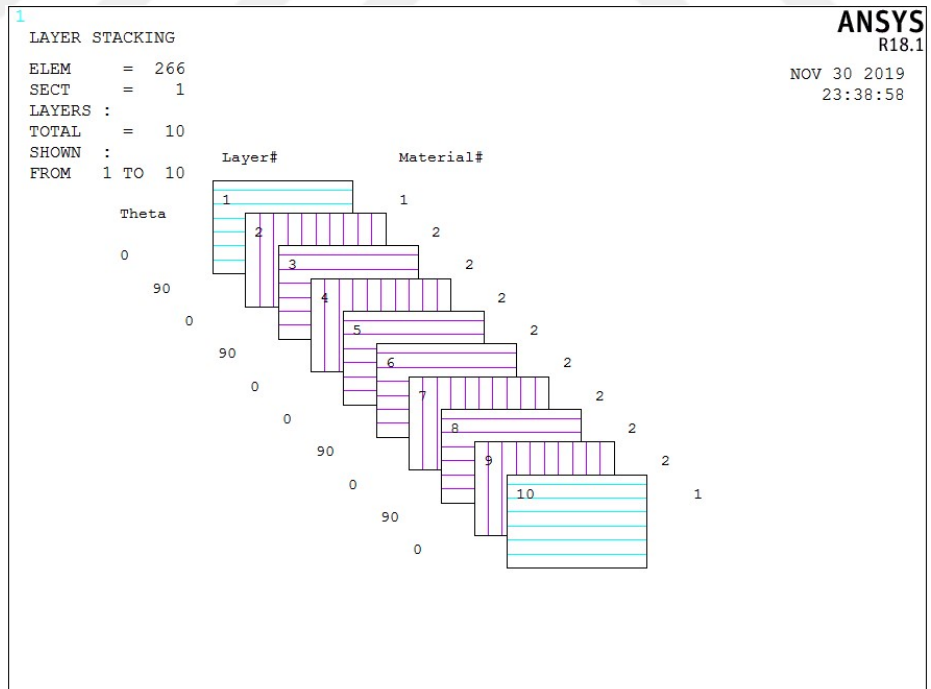
Şekil 3.4. SHELL 281 elemanın geometrisi (Ansys 2018)

FMT kompozit plakanın karbon veya cam elyaf tabakaları, yapısal → lineer → elastik → ortotropik malzeme ve alüminyum tabakaları ise yapısal → lineer → elastik → izotropik malzeme şeklinde modellenmiştir.

Şekil 3.5’de örnek bir FMT kompozit plakanın ANSYS modeli görülmektedir. Model en üst ve en alt tabakaların Alüminyum 1050 malzemesinden, aradaki tabakaların ise cam-epoksi malzemesinden oluştuğu 10 tabakadan meydana gelmektedir. Şekil 3.6’da, Şekil 3.5’de verilen tabakalı elemanın istifleme açısı ve sırası görülmektedir.



Şekil 3.5. FMT kompozit plakanın ANSYS modeli



Şekil 3.6. Tabakalı elemanların istifleme açısı ve sırası

3.7. Fiber Metal Tabakalı Kompozit Numunelerin Üretimi

Deneysel çalışma için FMT kompozit plakaların üretimi öncelikle vakum destekli reçine infüzyonu yöntemiyle (Şekil 3.7) gerçekleştirilmiştir. Bu işlem, bölümümüzde mevcut olan alttan ısıtmalı ve bir masada kürleme işleminin gerçekleştirilebildiği bir deney düzeneğinde yapılmıştır.



Şekil 3.7. Vakum altına alınmış numune

Vakum destekli reçine infüzyonu yöntemiyle üretim sonucunda Şekil 3.8’de görüldüğü gibi alüminyum levhalar ile cam elyaf kumaşlar arasında istenildiği şekilde epoksinin nüfuz etmediği ve tabakalar arasında istenilen yapışmanın sağlanmadığı görülmüştür. Bu nedenle fiber metal tabakalı kompozit plakaların üretimi için sıcak presle üretim yöntemi gerçekleştirilmiştir.

Sıcak presle malzeme üretiminde öncelikle üretici firmadan temin edilen 12000 x 1000 mm ebatlarında ve sırasıyla 0,18 mm ve 0,14 mm kalınlıklarında plain dokuma şeklindeki karbon elyaf takviyeli prepregler ile cam elyaf takviyeli prepregler, laboratuvarında 200 x 200 mm ebatlarında kesilmiştir (Şekil 3.9).



Şekil 3.8. Vakum destekli reçine infüzyonu yöntemiyle üretilen FMT kompozit plakalar

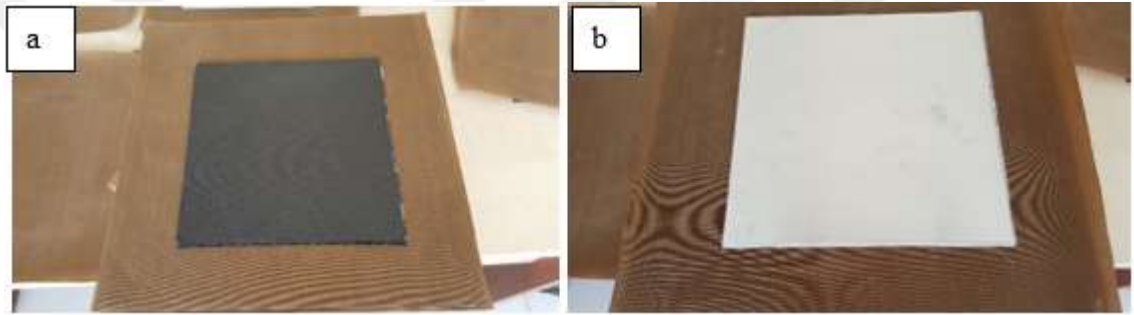


Şekil 3.9. Numune boyutlarında kesilen Plain dokuma karbon ve cam prepregler

FMT kompozit plakanın alt ve üst tabakasında yer alacak olan 0,3 mm kalınlığındaki Alüminyum (Al-1050) levhalar da aynı boyutlarda kesilmiştir. 200 x 200 mm ebatlarında kesilen karbon fiber prepregler ile alüminyum levhalar, iki çelik plaka kalıp arasına alınarak sıcak prese yerleştirilmiştir (Şekil 3.10 ve Şekil 3.11). Benzer şekilde 200 x 200 mm ebatlarında kesilen cam fiber prepregler ile alüminyum levhalar, iki çelik plaka kalıp arasına alınarak sıcak prese yerleştirilmiştir (Şekil 3.12). Kalıplar arasındaki FMT malzemelerin sıcak presleme işlemi sonrasında kalıp ile malzemenin birbirine yapışmasını önlemek ve malzemeyi kalıptan kolaylıkla çıkarabilmek amacıyla kalıplar ile malzeme arasına ayırıcı olarak teflon film yerleştirilmiştir.



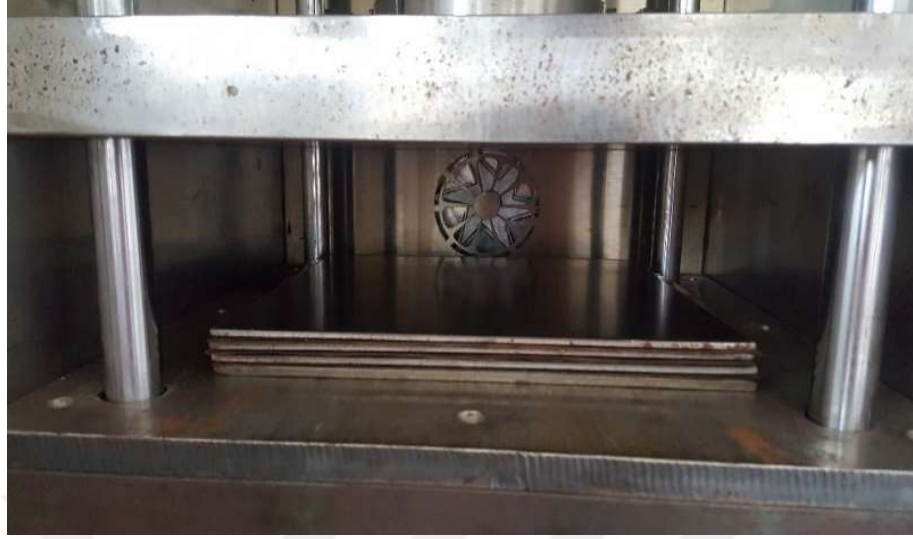
Şekil 3.10. Sıcak pres ile tabakalı kompozit üretiminde kullanılan kalıplar



Şekil 3.11. FMT kompozitin sıcak presleme öncesi hazırlanması; (a) CARAL (Karbon prepreg ile Alüminyum tabakalı); (b) GLARE (Cam prepreg ile Alüminyum tabakalı)

Sıcak pres makinesine konulan malzeme 140 °C sıcaklıkta ve 20 kN kuvvet altında (5 bar basınç altında) 2 saat boyunca ısıtılarak kürlenme işlemine tabii tutulmuştur. (Şekil 3.12). Böylelikle alüminyum levhalar ile prepreg malzemelerin arasında istenilen yapışma sağlanmıştır. Isıtılan ve preslenen kompozit plakalar daha sonra soğuması için bir saat kadar bekletilmiştir.

Üretilen konfigürasyonlardan alüminyum levhaların üst üste geldiği durumlardaki levhalar arasındaki yapışma, ARALDITE AW 106 reçine ve HV 953U sertleştirici kullanılarak sağlanmıştır. Alüminyum levhaların üst üste geldiği konfigürasyonlar öncelikle simetrik olarak ayrı ayrı sıcak preste üretilmiştir. Daha sonra reçine ve sertleştiriciden ağırlıkça %80 karışım oluşturularak, alüminyum yüzeyleri arasına uygulanmış ve üzerlerine ağırlık konularak oda sıcaklığında 24 saat bekletilerek kürlenmiştir. (Şekil 3.13). Şekil 3.14 ve Şekil 3.15’de üretilen FMT plakalar (GLARE ve CARALL) görülmektedir.



Şekil 3.12. Sıcak preste deney numunelerinin hazırlanışı



Şekil 3.13. Alüminyum levhaların yapıştırılması ve levhaların üzerine ağırlık konularak kürlenmesi

Üretilen FMT kompozit plakalarda, cam ve karbon prepreg malzemeler ile alüminyum levhaların istenilen ara yüzey yapışmasına sahip olduğu görülmüştür. Sıcak presleme işleminden sonra numunelerin etrafında bulunan kalıntı çapaklar, laboratuvarında bulunan testere tezgahı vasıtasıyla talaş kaldırılarak her bir numune eşit uzunluk ve geniş değerlerine getirilerek titreşim deneylerine hazır hale getirilmiştir.



Şekil 3.14. Üretilen CARAL FMT Kompozit Plakalar



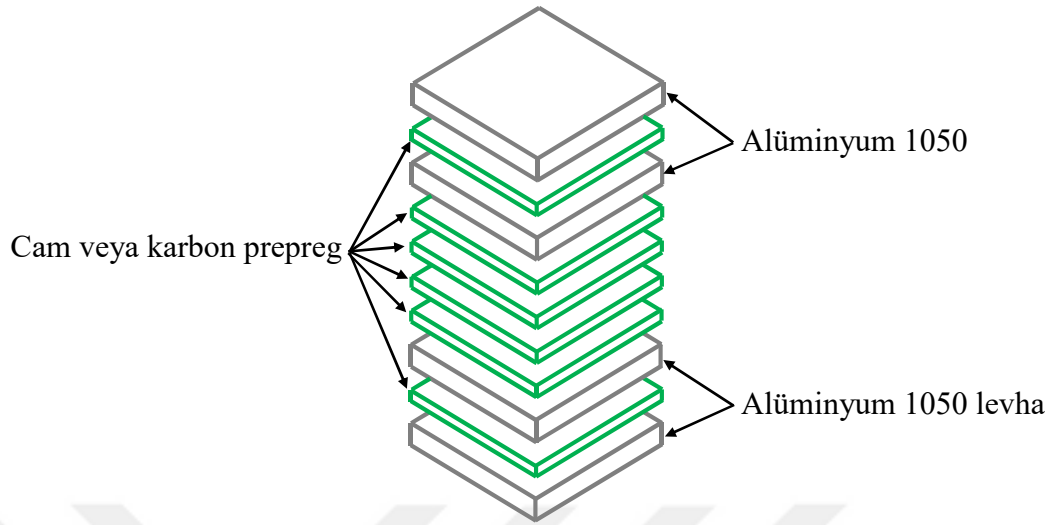
Şekil 3.15. Üretilen GLARE FMT Kompozit Plakalar

Çizelge 3.1. GLARE tabaka diziliş durumları

GLARE		
Grup No	Konfigürasyon	Açıklama
A_1	$(G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0})_s$	A grubu, $[G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0}]_s$ çapraz dizilişinde Al katmanı sayısı dıştan içeri doğru arttığı durumları içermektedir.
A_2	$(Al - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0})_s$	
A_3	$(Al - G_{0^0/90^0} - Al - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0})_s$	
A_4	$(Al - G_{0^0/90^0} - Al - G_{0^0/90^0} - Al)_s$	
B_1	$(G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0})_s$	B grubu, $[G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0}]_s$ çapraz dizilişinde Al katmanı dıştan içeri doğru yerleştirildiği durumları içermektedir.
B_2	$(Al - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0})_s$	
B_3	$(G_{0^0/90^0} - Al - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0})_s$	
B_4	$(G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - Al - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0})_s$	
B_5	$(G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - Al - G_{0^0/90^0})_s$	
B_6	$(G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - Al)_s$	
C_1	$(Al - G_{0^0/90^0} - Al - G_{0^0/90^0} - Al)_s$	C grubu, $[Al / \theta / Al / \theta / Al]_s$ dizilişinde alt, üst ve ara katmanda Al bulunurken, ara katmanlardaki cam prepreglerin θ açısız yönelme durumlarındaki değişimi içermektedir.
C_2	$(Al - G_{30^0/60^0} - Al - G_{30^0/60^0} - Al)_s$	
C_3	$(Al - G_{45^0/45^0} - Al - G_{45^0/45^0} - Al)_s$	
C_4	$(Al - G_{0^0/90^0} - Al - G_{30^0/60^0} - Al)_s$	
C_5	$(Al - G_{0^0/90^0} - Al - G_{45^0/45^0} - Al)_s$	
C_6	$(Al - G_{30^0/60^0} - Al - G_{0^0/90^0} - Al)_s$	
C_7	$(Al - G_{30^0/60^0} - Al - G_{45^0/45^0} - Al)_s$	
D_1	$(G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0})_s$	D grubu, $[G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0}]_s$ açılı dizilişinde Al katmanı dıştan içeri doğru yerleştirildiği durumları içermektedir.
D_2	$(Al - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0})_s$	
D_3	$(G_{30^0/60^0} - Al - G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0})_s$	
D_4	$(G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - Al - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0})_s$	
D_5	$(G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0} - Al - G_{30^0/60^0})_s$	
D_6	$(G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - Al)_s$	

Çizelge 3.2. CARALL tabaka diziliş durumları

CARALL		
Grup No	Konfigürasyon	Açıklama
A_1	$(C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0})_s$	A grubu, $[C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0}]_s$ çapraz dizilişinde Al katmanı sayısı dıştan içeri doğru arttığı durumları içermektedir.
A_2	$(Al - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0})_s$	
A_3	$(Al - C_{0^0/90^0} - Al - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0})_s$	
A_4	$(Al - C_{0^0/90^0} - Al - C_{0^0/90^0} - Al)_s$	
B_1	$(C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0})_s$	B grubu, $[C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0}]_s$ çapraz dizilişinde Al katmanı dıştan içeri doğru yerleştirildiği durumları içermektedir.
B_2	$(Al - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0})_s$	
B_3	$(C_{0^0/90^0} - Al - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0})_s$	
B_4	$(C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - Al - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0})_s$	
B_5	$(C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - Al - C_{0^0/90^0})_s$	
B_6	$(C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - Al)_s$	
C_1	$(Al - C_{0^0/90^0} - Al - C_{0^0/90^0} - Al)_s$	C grubu, $[Al / \theta / Al / \theta / Al]_s$ dizilişinde alt, üst ve ara katmanda Al bulunurken, ara katmanlardaki karbon prepreğerin θ açılal yönelme durumlarındaki değişimi içermektedir.
C_2	$(Al - C_{30^0/60^0} - Al - C_{30^0/60^0} - Al)_s$	
C_3	$(Al - C_{45^0/45^0} - Al - C_{45^0/45^0} - Al)_s$	
C_4	$(Al - C_{0^0/90^0} - Al - C_{30^0/60^0} - Al)_s$	
C_5	$(Al - C_{0^0/90^0} - Al - C_{45^0/45^0} - Al)_s$	
C_6	$(Al - C_{30^0/60^0} - Al - C_{0^0/90^0} - Al)_s$	
C_7	$(Al - C_{30^0/60^0} - Al - C_{45^0/45^0} - Al)_s$	
D_1	$(C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0})_s$	D grubu, $[C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0}]_s$ açılı dizilişinde Al katmanı dıştan içeri doğru yerleştirildiği durumları içermektedir.
D_2	$(Al - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0})_s$	
D_3	$(C_{30^0/60^0} - Al - C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0})_s$	
D_4	$(C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - Al - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0})_s$	
D_5	$(C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0} - Al - C_{30^0/60^0})_s$	
D_6	$(C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - C_{30^0/60^0} - C_{45^0/45^0} - Al)_s$	



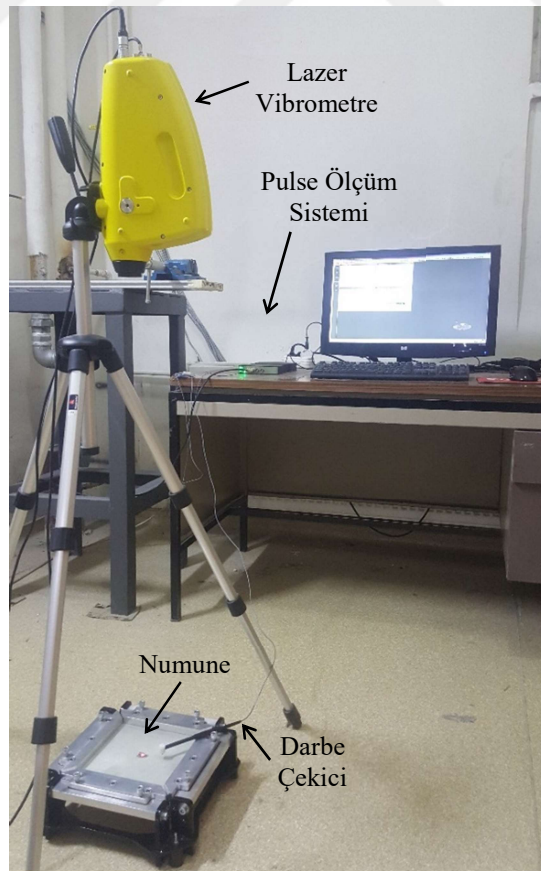
Şekil 3.16. Üretilen 10 tabakalı FMT kompozitlerden konfigürasyonunun şematik gösterimi

Şekil 3.16’da üretilen konfigürasyonlardan A_3 tabaka dizilişine sahip FMT kompozit plakanın örnek olarak şematik gösterimi verilmiştir. Tez kapsamında FMT kompozit plakaların geometrisinin (tabaka sayısı, tabaka kalınlıkları, fiber yönlenmeleri) ve tabaka malzemesi özelliklerinin (alüminyum levha, cam-fiber, karbon-fiber tabakalar) titreşim karakteristiklerine etkisinde incelenmiş olan konfigürasyonlar Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2’de verilmiştir. Burada verilen konfigürasyonlarda GLARE ve CARALL tabakalı kompozit plakalar üretilmiştir. Şekil 3.14 ve Şekil 3.15’de üretilen FMT kompozit plakalar görülmektedir. Üretilen malzemelerde yapışma vb. bir sorun olmadığı ve yapılacak olan deneysel çalışmalarda kullanılabilir olduğu görülmüştür. Her bir numunenin kalınlıkları kumpas ile ölçülerek tespit edilmiştir.

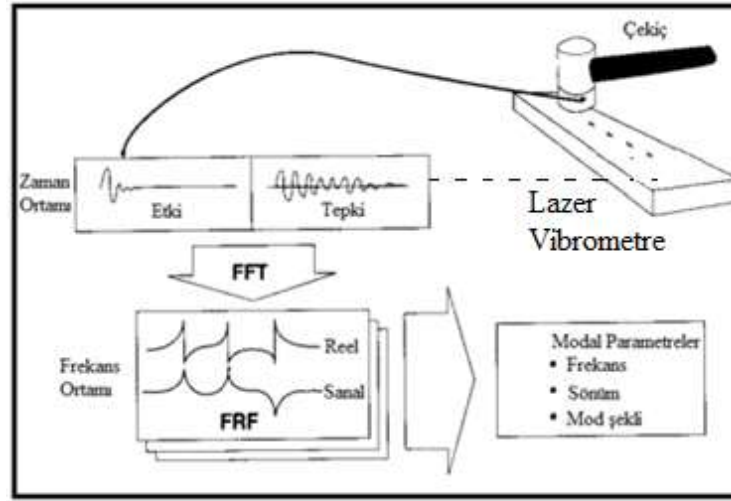
3.8. Serbest Titreşim Deneyleri

Üretilen FMT kompozit malzemelerden uygun ölçülerde kesilen deney numunelerinin mekanik özellikleri bölümümüzde mevcut olan Shimadzu marka çekme cihazında çekme deneyi uygulanarak belirlenmiştir. Daha sonra, FMT kompozit plakaların titreşim ve sönüm karakteristiklerinin belirlenmesi için bölümümüzde mevcut bulunan PULSE ölçüm sistemi kullanılmıştır. (Şekil 3.17). Bu sistem bilgisayar endeksli ve birçok ölçüm

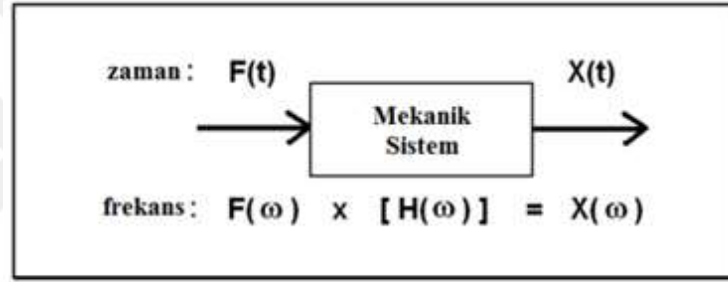
kanalından oluşan bir sistemdir. Bu sistem sayesinde kiriş, plaka vb. yapıların titreşim karakteristikleri (doğal frekans, sönüm oranı) belirlenebilmektedir. İşlem esnasında yapı üzerinde belirli bir noktaya, kuvver transdüseri (darbe çekici) vasıtasıyla bir tahrik kuvveti uygulanmaktadır. Uygulanan tahrik kuvveti sonucu oluşan titreşim cevabı Lazer Vibrometre ile ölçülmektedir. ME'scope VES modal analiz vasıtasıyla, uyarı ile cevap arasındaki farkın transfer fonksiyonu (Frekans Cevap Fonksiyonu, FRF) elde edilmektedir. Sönüm oranları, yarı güç bant genişliği (*half-power bandwidth*) metodu yardımıyla sistem üzerinden belirlenebilmektedir (Şekil 3.18). Fourier dönüşümü (FFT- *Fast Fourier Transform*) yardımıyla zaman ortamındaki etki ve tepki fonksiyonları, frekans ortamına dönüştürülmektedir. Tepki fonksiyonun Fourier dönüşümünün ($X(\omega)$) etki fonksiyonunun Fourier dönüşümüne ($F(\omega)$) oranı, yapının frekans cevap fonksiyonunu (FRF) vermektedir. FRF grafiği ile deney numunelerinin doğal frekans ve sönüm oranları ölçüm sistemi üzerinden okunabilmektedir (Heylen *et al.* 1997).



Şekil 3.17. Titreşim ölçüm sistemi



(a)

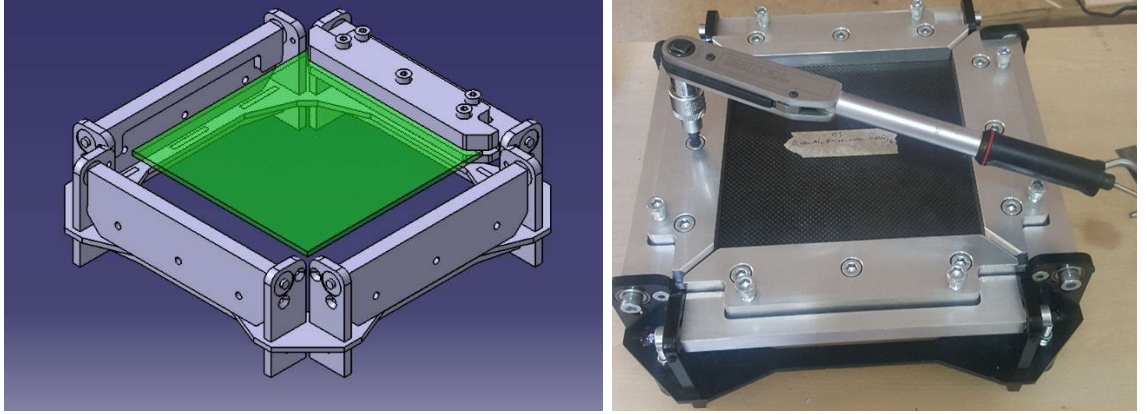


(b)

Şekil 3.18. Ölçüm sistemi: (a) deneysel donanım; (b) FRF blok diyagramı (Heylen *et al.* 1997)

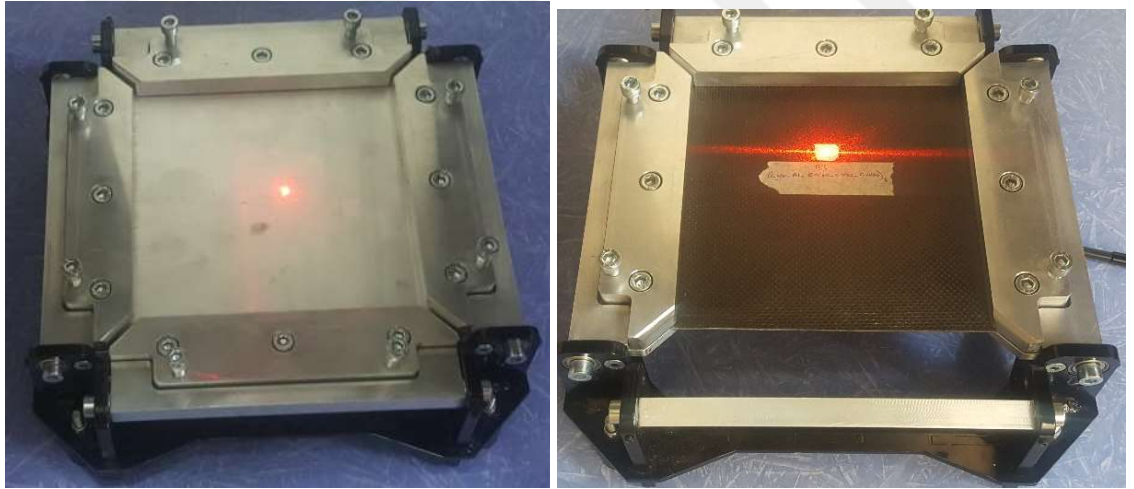
3.8.1. Plakalara sınır şartlarının uygulanması

Tez kapsamında, plakaların sınır şartlarının uygulanabilmesi için bir düzenek tasarlanmıştır. Düzenek üzerine yerleştirilen numunenin her bir kenarına ankastre, basit mesnet ve serbest sınır şartları kolaylıkla uygulanabilmektedir (Şekil 3.19). Böylelikle plakanın herhangi bir kenarına bu üç sınır şartı da kolaylıkla uygulanabilmektedir. Farklı sınır şartlarının plakanın doğal frekansları üzerine etkileri araştırılabilmektedir.



Şekil 3.19. Sınır şartlarının uygulanmasını sağlayan düzenek

Üretilen plakalar, sınır şartı sağlama aparatına takılarak torkmetre ile eşit miktarda cıvataları sıkılmıştır. PULSE ölçüm setinin, ölçüm ışın gönderen başlığı numune üzerine dik olacak şekilde odaklanması sağlanmıştır. Malzeme üzerinde belirli noktalardan darbe çekici ile tahrik kuvveti uygulanmış ve doğal frekans ve sönüm oranları elde edilmiştir.

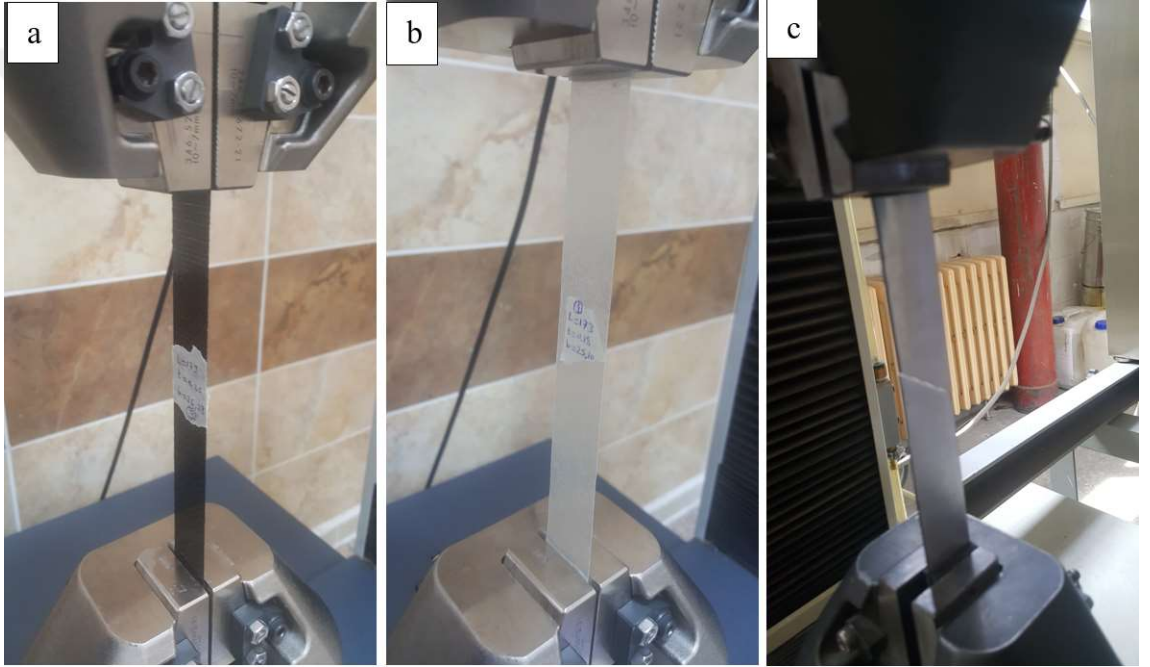


Şekil 3.20. Deney düzeneği

3.9. Çekme Testi

FMT kompozitleri oluşturan karbon prepreg, cam prepreg ve alüminyum levhanın mekanik özelliklerini belirlemek için Atatürk Üniversitesi mekanik laboratuvarında bulunan Universal çekme cihazı (Shimadzu) kullanılarak deneyler yapılmıştır (Şekil

3.21). Üretilen kompozitlerin çekme deneyleri ASTM D 3039 standardına uygun olarak gerçekleştirilmiştir. Numunelerin genişliği 25 mm, kalınlığı 0,3 mm ve gauge boyu 250 mm'dir. Deneylerde şekil değiştirme oranı 1 mm/dak şeklinde uygulanmış ve numune kırılınca test sonlandırılmıştır. Her bir malzeme için 5'er adet numuneden çekme testleri yapıp, deney sonuçlarının aritmetik ortalaması alınarak malzemelerin mekanik özellikleri belirlenmiştir. Nümerik analizlerde cam prepreg, karbon prepreg ve Al 1050 levhanın mekanik özellikleri olarak burada elde edilen veriler kullanılmıştır.



Şekil 3.21. Çekme testi: (a) Karbon prepreg; (b) Cam prepreg; (c) Alüminyum levha

Şekil 3.22' de çekme testleri sonucunda cam prepreg ve karbon prepreg numunelerinin kırılma şekli görülmektedir. Yapılan çekme testleri sonucunda, cam ve karbon prepreglerin genellikle çekme testi cihazının çenelerine yakın yerlerden kırıldığı görülmüştür. Alüminyum 1050 numunesinin ise genellikle numunenin ortasına yakın yerlerden kırıldığı gözlemlenmiştir. Çekme testi sonucunda malzemelerin gerilme – birim şekil değiştirme grafikleri elde edilmiş ve bu grafiklerden mekanik özellikleri tespit edilmiştir.



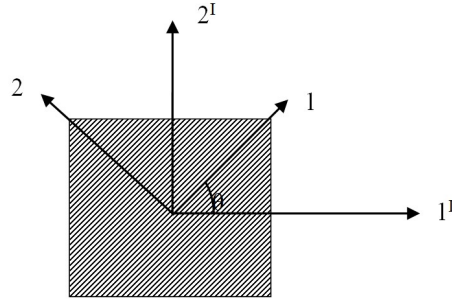
Şekil 3.22. Çekme testi numunelerinin kırılma şekli

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

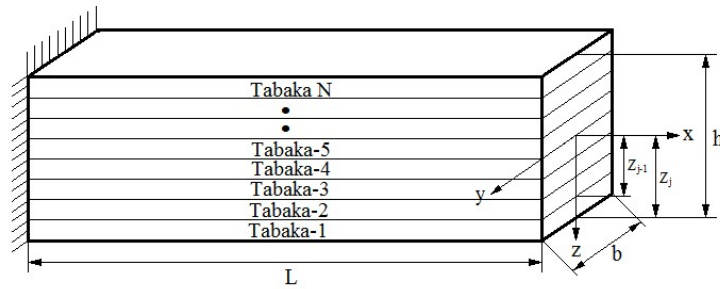
Yapılan bu çalışmada, DQ metotlarına dayalı olarak MATLAB programı vasıtasıyla FMT kompozit plakanın matematik modelinin programı hazırlanmıştır. Bu programdan elde edilen sonuçların doğruluğunu denetlemek amacıyla literatürdeki farklı çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçlar ile kıyaslanması yapılmıştır.

4.1. Literatür Sonuçları ile Modelin Kıyaslanması: Çalışma 1

Çizelge 4.1 - Çizelge 4.4’de Leissa ve Narita’nın yaptıkları çalışmada kullandıkları (Leissa and Narita 1989) Ritz metodu ile tabakalı kompozit plakanın serbest titreşim analizi sonuçları ve DQ metodu kullanılarak elde edilen sonuçlar verilmiştir. Kullanılan plaka, simetrik açısall veya çapraz takviyeli, dörtkenarı basit mesnetli dikdörtgen bir geometriye sahiptir. Plakanın geometrik parametreleri $h/a=0,006$, $a/b=1$ veya 2’dir (Şekil 4.1, Şekil 4.2).



Şekil 4.1. Tabakalı kompozit plakanın yön doğrultuları



Şekil 4.2. Tabakalı kompozit plaka

Çizelge 4.3. Açısal takviyeli $(\theta, -\theta, \theta)$ dikdörtgen plakanın $(a/b = 2)$ boyutsuz doğal frekans değerleri

Modlar ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho 12(1 - \mu_{12} \mu_{21}) / E_{11}}$)										
Fiber yön, açısı	Metot	1	2	3	4	5	6	7	8	
(E/E)										
θ	0°	DQM	33,3	60,8	108,5	109,2	133,3	177,8	178,0	234,5
		Ritz	33,5	60,7	108,6	109,1	133,2	177,6	177,7	234,6
	15°	DQM	34,4	31,7	108,1	110,9	137,7	170,8	185,9	238,4
		Ritz	34,3	61,6	108,2	110,9	137,7	170,8	185,9	238,3
	30°	DQM	36,8	63,3	105,7	118,5	147,4	162,8	194,5	231,9
		Ritz	36,7	63,5	105,8	118,5	147,6	162,9	194,9	232,0
	45°	DQM	39,4	63,8	102,0	130,9	153,6	157,7	200,3	218,0
		Ritz	39,5	64,0	102,2	130,8	153,9	158,0	200,9	218,2
	60°	DQM	41,8	62,9	96,9	143,0	146,8	167,3	202,9	204,0
		Ritz	41,9	63,0	97,1	143,1	146,8	167,4	203,2	204,1
	75°	DQM	43,8	61,5	92,3	136,3	158,0	174,8	193,4	203,9
		Ritz	43,7	61,4	92,3	136,3	158,0	174,7	193,3	203,8
	90°	DQM	44,5	60,8	90,4	133,3	162,7	177,8	189,3	204,4
		Ritz	44,4	60,7	90,2	133,2	162,7	177,7	189,2	204,1
	(B/E)									
	θ	0°	DQM	17,2	44,2	51,1	69,4	92,71	110,1	111,4
Ritz			17,3	44,1	51,1	69,4	92,70	110,2	111,4	123,6
15°		DQM	19,8	44,5	56,5	74,2	93,82	111,5	116,4	140,2
		Ritz	19,9	44,7	56,7	74,6	94,24	112,0	116,7	140,9
30°		DQM	24,6	46,0	71,6	74,9	102,4	110,9	144,6	146,0
		Ritz	25,1	46,7	72,4	75,7	104,2	112,2	146,8	147,0
45°		DQM	29,3	46,4	70,2	94,2	102,8	116,0	140,0	146,4
		Ritz	29,9	47,6	71,9	95,2	104,6	118,1	142,2	150,0
60°		DQM	34,3	45,3	63,2	87,3	116,8	125,8	137,6	148,4
		Ritz	34,6	46,2	64,5	88,9	118,7	126,2	139,0	150,6
75°		DQM	38,6	44,4	56,1	74,8	100,2	131,9	149,7	154,3
		Ritz	38,7	44,6	56,6	75,3	100,9	132,6	149,8	154,6
90°		DQM	40,2	44,1	53,2	69,4	93,04	123,6	158,7	160,9
		Ritz	40,3	44,1	53,2	69,4	93,02	123,6	158,7	160,9
(G/E)										
θ		0°	DQM	17,1	45,1	45,8	68,5	94,0	95,66	113,7
	Ritz		17,1	45,1	45,7	68,5	94,0	95,65	113,7	114,8
	15°	DQM	19,2	43,5	53,6	71,2	93,7	107,3	107,4	134,3
		Ritz	19,3	43,6	53,9	71,6	94,1	107,7	107,8	135,1
	30°	DQM	23,7	44,0	70,5	71,4	99,5	105,4	140,5	142,4
		Ritz	24,2	44,8	71,4	72,4	101,3	106,9	142,6	143,9
	45°	DQM	28,8	44,6	67,2	93,0	100,8	113,9	134,1	142,3
		Ritz	29,5	45,9	68,9	94,4	101,9	116,3	136,4	146,2
	60°	DQM	34,4	44,7	61,2	83,6	111,1	127,0	138,2	142,0
		Ritz	34,7	45,6	62,7	85,4	113,1	127,4	139,5	144,4
	75°	DQM	38,9	45,0	56,1	72,8	95,2	123,0	150,4	154,0
		Ritz	39,0	45,2	56,5	73,4	95,9	123,8	150,5	154,6
	90°	DQM	40,7	45,1	54,1	68,5	88,8	114,8	146,3	159,1
		Ritz	40,7	45,1	54,0	68,5	88,7	114,8	146,3	159,1

Çizelge 4.4. Çapraz takviyeli ($0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, \dots$) kare plakanın ($a/b = 1$) boyutsuz doğal frekans değerleri

		Modlar ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho 12(1 - \mu_{12}\mu_{21}) / E_{11}}$)							
Tabaka sayısı*	Metot	1	2	3	4	5	6	7	8
(E/E)									
3	DQM	15,22	33,82	44,09	60,89	65,88	91,23	92,79	108,60
	Ritz	15,19	33,77	44,05	60,77	65,83	91,05	92,74	108,44
5	DQM	15,22	35,94	42,39	60,89	71,61	88,44	94,68	105,60
	Ritz	15,19	35,89	42,34	60,77	71,56	94,50	88,39	105,44
7	DQM	15,22	36,90	41,55	60,89	74,16	86,31	96,26	104,16
	Ritz	15,19	36,85	41,51	60,77	74,12	96,08	86,26	104,00
9	DQM	15,22	37,43	41,07	60,89	75,58	85,07	97,15	103,33
	Ritz	15,19	37,38	41,03	60,77	75,53	96,98	85,02	103,97
15	DQM	15,22	38,18	40,38	60,89	77,56	83,27	98,41	102,14
	Ritz	15,19	38,13	40,33	60,77	77,51	98,24	83,23	101,97
25	DQM	15,22	38,63	39,95	60,89	78,73	82,17	99,16	101,40
	Ritz	15,19	38,58	39,90	60,77	78,68	98,99	82,12	101,24
(B/E)									
3	DQM	11,04	18,73	34,89	39,75	44,16	55,24	58,74	74,92
	Ritz	11,03	18,72	34,89	39,75	44,15	55,23	58,18	74,54
5	DQM	11,04	24,04	36,79	44,16	49,28	63,53	81,03	85,50
	Ritz	11,03	24,03	36,79	44,15	49,28	63,52	81,03	86,00
7	DQM	11,04	26,17	35,30	44,16	54,77	67,08	77,42	83,27
	Ritz	11,03	26,17	35,30	44,15	54,77	67,07	77,42	83,26
9	DQM	11,04	27,31	34,42	44,16	57,67	69,03	75,29	81,66
	Ritz	11,03	27,31	34,42	44,15	57,67	69,02	75,28	81,65
15	DQM	11,04	28,86	33,14	44,16	61,57	71,71	72,13	79,31
	Ritz	11,03	28,86	33,13	44,15	61,57	71,70	72,13	79,30
25	DQM	11,04	29,76	32,33	44,16	63,82	70,15	73,29	77,86
	Ritz	11,03	29,76	32,33	44,15	63,82	70,15	73,28	77,84
(G/E)									
3	DQM	11,29	18,56	33,07	40,12	45,17	54,38	56,11	74,25
	Ritz	11,29	18,55	33,06	40,11	45,15	54,37	56,07	74,25
5	DQM	11,29	24,04	37,09	45,17	48,37	64,50	81,21	83,24
	Ritz	11,29	24,03	37,08	45,15	48,37	64,47	81,20	83,24
7	DQM	11,29	26,23	35,57	45,17	54,10	68,10	77,51	84,50
	Ritz	11,29	26,22	35,57	45,15	54,10	68,07	77,50	84,50
9	DQM	11,29	27,40	34,68	45,17	57,12	70,07	75,31	82,87
	Ritz	11,29	27,40	34,67	45,15	57,12	70,04	75,30	82,87
15	DQM	11,29	28,99	33,36	45,17	61,16	72,07	72,79	80,49
	Ritz	11,29	28,99	33,35	45,15	61,16	72,06	72,76	80,49
25	DQM	11,29	29,92	32,54	45,17	63,48	70,03	74,39	79,02
	Ritz	11,29	29,91	32,53	45,15	63,48	70,02	74,36	79,02

*Tabaka sayısı: 1=(0°), 3=($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$), 5=($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$) vb.

4.2. Literatür Sonuçları ile Modelin Kıyaslanması: Çalışma 2

Simetrik eşit kalınlıkta üç tabakalı ($\theta, -\theta, \theta$) E-glass/epoksi kompozit plakanın malzeme

özellikleri şu şekildedir: $E_{11} / E_{22} = 2,45$, $G_{12} = 0,48E_{22}$, $\nu_{12} = 0,23$. Plakanın geometrik parametreleri ise şu şekildedir: $h/a=0,006$ ve $a/b=1$ (Wang 2015). DQ metotlarından ve ANSYS paket programında oluşturulan modelden elde edilen sonuçlar ile literatürde verilen Ritz yöntemi, sonlu elemanlar gibi yöntemlerden elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgelerde kıyaslanmıştır.

Çizelge 4.5. E-glass/epoksi (E/E) simetrik üç tabakalı $(\theta, -\theta, \theta)$ kompozit kare plakanın boyutsuz doğal frekans değerleri (BBBB – dört kenarı basit mesnet plaka)

		Modlar ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho 12(1 - \mu_{12}\mu_{21}) / E_{11}}$)							
Fiber yön, açısı	Metot	1	2	3	4	5	6	7	8
0°	ANSYS	15,32	33,58	44,83	61,25	65,12	90,99	94,54	109,50
	DQ	15,18	33,30	44,42	60,85	64,59	90,49	93,76	108,42
	GDQ	15,22	33,34	44,46	60,89	64,57	90,47	93,70	108,58
	HDQ	15,22	33,34	44,46	60,89	54,57	90,47	93,70	108,58
	Wang (2015)	15,17	33,24	44,38	60,68	64,45	90,14	93,63	108,46
	Leissa and Narita (1989)	15,19	33,30	44,42	60,77	64,53	90,29	93,66	108,60
15°	ANSYS	15,53	34,36	44,24	61,27	67,24	92,18	92,21	109,70
	DQ	15,39	34,07	43,85	60,85	66,71	91,48	91,63	109,03
	GDQ	15,43	34,11	43,89	60,88	66,70	91,44	91,61	109,01
	HDQ	15,43	34,11	43,89	60,88	66,70	91,44	91,61	109,01
	Wang (2015)	15,39	34,03	43,82	60,73	66,56	91,34	91,37	108,78
	Leissa and Narita (1989)	15,43	34,09	43,87	60,85	66,67	91,40	91,56	108,90
30°	ANSYS	15,97	36,10	42,89	61,76	72,24	86,38	94,23	109,40
	DQ	15,82	35,78	42,53	61,31	71,71	85,76	93,63	108,79
	GDQ	15,86	35,82	42,58	61,34	71,70	85,70	93,60	108,79
	HDQ	15,86	35,82	42,58	61,34	71,70	85,73	93,60	108,79
	Wang (2015)	15,85	35,76	42,52	61,27	71,54	85,58	93,48	108,65
	Leissa and Narita (1989)	15,90	35,86	42,62	61,45	71,71	85,72	93,74	108,90
45°	ANSYS	16,19	37,17	42,02	62,10	77,61	80,51	95,12	109,10
	DQ	16,04	36,84	41,68	61,65	77,06	79,96	94,49	108,75
	GDQ	16,08	36,88	41,73	61,67	77,03	79,95	94,45	108,76
	HDQ	16,08	36,88	41,73	61,67	77,03	79,95	94,45	108,76
	Wang (2015)	16,08	36,83	41,68	61,64	76,86	79,81	94,38	108,68
	Leissa and Narita (1989)	16,14	36,93	41,81	61,85	77,04	80,00	94,68	109,00

Çizelge 4.6. E-glass/epoksi (E/E) simetrik üç tabakalı $(\theta, -\theta, \theta)$ kompozit kare plakanın boyutsuz doğal frekans değerleri (SSSS – dört kenarı serbest plaka)

		Modlar ($\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho 12(1 - \mu_{12}\mu_{21}) / E_{11}}$)							
Fiber yön, açısı	Metot	1	2	3	4	5	6	7	8
0°	ANSYS	10,11	14,27	22,62	24,95	30,19	39,82	49,08	49,83
	DQ	10,03	14,08	22,33	24,77	29,92	39,42	48,82	49,49
	GDQ	10,08	14,11	22,37	24,83	29,99	39,38	48,89	49,48
	HDQ	10,08	14,11	22,37	24,83	29,99	39,38	48,89	49,48
	Wang (2015)	9,98	14,11	22,37	24,67	29,86	39,38	48,55	49,30
15°	ANSYS	10,37	14,32	21,96	25,12	30,52	40,39	48,35	51,95
	DQ	10,28	14,15	21,69	24,91	30,25	40,02	48,01	51,63
	GDQ	10,33	14,18	21,74	24,98	30,33	39,98	48,06	51,64
	HDQ	10,33	14,18	21,74	24,98	30,31	39,98	48,06	51,64
	Wang (2015)	10,25	14,16	21,73	24,85	30,21	39,93	47,86	51,39
30°	ANSYS	10,90	14,54	20,52	25,53	30,90	42,82	48,48	54,08
	DQ	10,77	14,40	20,28	25,27	30,63	42,48	48,08	53,74
	GDQ	10,82	14,44	20,32	25,34	30,70	42,44	48,12	53,69
	HDQ	10,82	14,44	20,32	25,34	30,70	42,44	48,12	53,69
	Wang (2015)	10,79	14,35	20,29	25,28	30,60	42,28	48,04	53,55
45°	ANSYS	11,16	14,76	19,68	25,77	30,93	46,68	48,71	48,93
	DQ	11,01	14,65	19,45	25,49	30,68	46,37	48,28	48,56
	GDQ	11,06	14,68	19,49	25,57	30,74	46,33	48,31	48,52
	HDQ	11,06	14,68	19,49	25,57	30,74	46,33	48,31	48,52
	Wang (2015)	11,06	14,55	19,46	25,54	30,64	46,11	48,29	48,36

Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6 incelendiğinde, grid sayısının 21 olduğu DQ, GDQ ve HDQ sonuçlarıyla beraber ANSYS paket programında oluşturulan modelden elde edilen sonuçlar, Leissa and Narita (1989)'nın ve Wang (2015)'in çalışmalarından elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Burada, DQ yöntemlerinden elde edilen sonuçlar ile, Leissa and Narita (1989)'nın ve Wang (2015)'in sırasıyla kullandıkları Ritz yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi sonuçlarının birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. GDQ ve HDQ metotları sonuçlarının birbirine yakın değerler verdiği sonucuna varılmıştır.

4.3. Literatür Sonuçları ile Modelin Kıyaslanması: Çalışma 3

T300/934 Karbon epoksi ve alüminyum 2024-T3 malzemelerinden oluşan 10 tabakalı kompozit plakanın birinci merteye kayma deformasyon teorisi ile ABAQUS programı

sonuçlarının kullanıldığı çalışma (Ghasemi *et al.* 2013b) ile DQM ve ANSYS sonuçları aşağıdaki çizelgelerde karşılaştırılmıştır. İncelenen plakanın genişliği ve uzunluğu $a=b=200$ mm, tabaka istiflenmesi $[0^0/90^0/0^0/90^0/0^0]_s$, her bir tabakanın kalınlığı 0,269 mm, $a/h=74,3$ ve sınır şartı ise dörtkenarı basit mesnetli şeklindedir.

Çizelge 4.7. FMT plakanın geometrik ve malzeme özellikleri (Ghasemi *et al.* 2013b)

Malzeme	E_x (GPa)	E_y (GPa)	E_z (GPa)	G_{xy} (GPa)	G_{yz} (GPa)	G_{xz} (GPa)	ν_{xy}	ν_{yz}	ν_{xz}	ρ (kg/m ³)
Karbon epoksi T300/934	120	7,9	7,9	5,5	5,5	5,5	0,3	0,3	0,3	1580
Al 2024-T3		72,4			27,6			0,33		2780

Çizelge 4.8. $[0^0/90^0/0^0/90^0/0^0]_s$ dizilişine sahip FMT plakanın farklı diziliş sırasının, a/b oranının ve çözüm yöntemlerinin birinci doğal frekans değerine etkisi (BBBB)

		ω (rad/s) a/b						
Tabaka dizilimi	Çözüm metodu	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Al tabakasız	ANSYS	1893	2966	4670	6945	9756	13082	16905
	ABAQUS	1893	2973	4690	6990	9844	13239	17170
	DQM	1900	2990	4715	7025	9889	12296	17238
(1,10) Al tabaka	ANSYS	2170	3698	5900	8745	12214	16289	20951
	ABAQUS	2169	3711	5950	8847	12399	16605	21462
	DQM	2200	3751	5986	8886	12442	16652	21513
(1,2,9,10) Al tabaka	ANSYS	2240	3594	5522	8009	11043	14612	18705
	ABAQUS	2244	3621	5579	8111	11212	14882	19118
	DQM	2277	3660	5623	8157	11261	14932	19169
(1,2,3,8,9,10) Al tabaka	ANSYS	2212	3617	5593	8132	11222	14856	19019
	ABAQUS	2217	3644	5650	8234	11394	15129	19441
	DQM	2249	3682	5693	8279	11441	15179	19491
(1,2,3,4, 7,8,9,10) Al tabaka	ANSYS	2140	3470	5336	7733	10656	14098	18052
	ABAQUS	2146	3493	5381	7810	10779	14289	18338
	DQM	2173	3525	5416	7847	10817	14326	18375
Hepsi Al tabaka	ANSYS	2058	3342	5142	7456	10281	13615	17454
	ABAQUS	2064	3358	5172	7503	10353	13721	17608
	DQM	2081	3380	5195	7526	10376	13743	17627

Çizelge 4.9. $[0^\circ/\theta/0^\circ/\theta/0^\circ]_s$ tabaka dizilişine sahip basit mesnetli kompozit plakanın farklı açılardaki diziliş durumunda ve çözüm yöntemlerinde elde edilen birinci doğal frekans değerleri (a/b=1, BBBB)

θ°	Çözüm metodu	ω (rad/s)
0	ANSYS	1892
	DQM	1900
	ABAQUS	1892
15	ANSYS	1924
	DQM	1935
	ABAQUS	1934
30	ANSYS	1987
	DQM	2003
	ABAQUS	2016
45	ANSYS	2013
	DQM	2032
	ABAQUS	2054
60	ANSYS	1980
	DQM	1995
	ABAQUS	2014
75	ANSYS	1921
	DQM	1931
	ABAQUS	1934
90	ANSYS	1893
	DQM	1900
	ABAQUS	1893

Çizelge 4.8 ve Çizelge 4.9’da Ghasemi *et al.* (2013b) yaptıkları çalışmada kullandıkları sonlu elemanlar metoduna göre elde ettikleri sonuçlar ile bu çalışma kapsamında DQ metodu ve ANSYS paket programından elde edilen sonuçların birbirine oldukça yakın değerlerde olduğu görülmektedir.

4.4. Literatür Sonuçları ile Modelin Kıyaslanması: Çalışma 4

3 tabaka Glass fiber (Glare 3) kompozit tabakası (0° , 90°) ve 2 tabaka alüminyum 2024-T3 metal tabakası olmak üzere toplam 5 tabakadan oluşan FMT tabakalı kompozitin ESDU, sonlu elemanlar analizi, deneysel analiz ve multiple scale metotlarının kullanıldığı çalışma (Harras *et al.* 2002) ile ANSYS ve DQM analiz sonuçları aşağıdaki çizelgelerde kıyaslanmıştır. Yapılan çalışmada ele alınan plakanın geometrik özellikleri şu şekildedir:

genişlik=300 mm, uzunluk=450 mm, tabaka kalınlığı=1,4 mm, tabaka dizilişi [Al, 0°/90°, Al, 0°/90°, Al] şeklinde ve plaka dörtkenarı ankastre sınır şartına sahiptir.

Çizelge 4.10. Glare 3 plakanın ve malzeme özellikleri (Harras *et al.* 2002)

Malzeme	E_x (GPa)	E_y (GPa)	E_z (GPa)	G_{xy} (GPa)	G_{yz} (GPa)	G_{xz} (GPa)	ν_{xy}	ν_{yz}	ν_{xz}	ρ (kg/m ³)
Cam epoksi	31,17	31,17	9,41	5,54	5,54	5,54	0,098	0,057	0,057	2000
Al 2024-T3		72,3			27,6			0,33		2700

Çizelge 4.11. Glare 3 plakanın doğal frekanslarının DQM ve ANSYS sonuçları ile çeşitli metotlardan elde edilen sonuçlarının kıyaslanması (Harras *et al.* 2002)

a=450 mm, b=300 mm, $t_{Al}=0,3$ mm, t_{Glare3} (0°-90°)=0,25 mm, h=1,4 mm						
Tabaka dizilimi (θ)	Metot	ω (Hz)				
		Mod numarası				
		1	2	3	4	5
(Al-0°-90°-Al-0°-90°-Al)	ESDU	105,60	162,90	259,40	260,30	311,90
	Finite Element	105,37	162,31	258,34	259,13	310,45
	Rayleigh-Ritz	104,64	161,26	256,63	257,52	308,63
	Experimental	93,50	153,00	245,00	253,00	298,00
	ANSYS	104,51	161,03	256,16	257,04	307,96
	DQM	104,62	161,50	256,63	257,65	309,11
	GDQM	104,72	161,54	256,55	257,67	309,07
	HDQM	104,73	161,53	256,66	257,81	309,10

Çizelge 4.11’de Harras *et al.* (2002) yaptıkları çalışmada kullandıkları yöntemlerden elde ettikleri doğal frekanslar ile bu çalışma kapsamında DQ metotları ve ANSYS paket programından elde edilen doğal frekans değeriğerlerinin birbirine çok yakın olduğu anlaşılmaktadır.

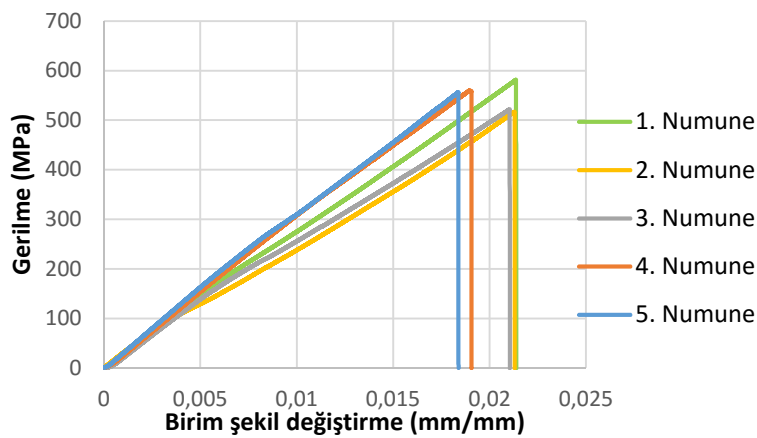
Yukarda bahsedilen örnek uygulamalarda DQ metodu kullanılarak doğal frekans değeriğerleri elde edilmiş ve bu değeriğerler literatürde kullanılan çeşitli metotlarla bulunan doğal frekans değeriğerleri ile karşılaştırılması yapılmıştır. Sonuçların birbiri ile iyi bir uyum içinde olduğu görülmüştür. Teorik model doğrulandıktan sonra, farklı parametrelere (Alüminyum tabaka sayısı, sınır şartları, fiber yönlennmeleri, Alüminyum tabakanın konumu gibi) ve geometriye sahip olarak üretilen FMT kompozit plakaların deneysel olarak serbest titreşim analizi yapılmış ve enerji absorbe kapasiteleri (damping)

belirlenmiştir. Deneysel çalışmayla birlikte, DQ metotları ve ANSYS paket programı kullanılarak da nümerik olarak serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir.

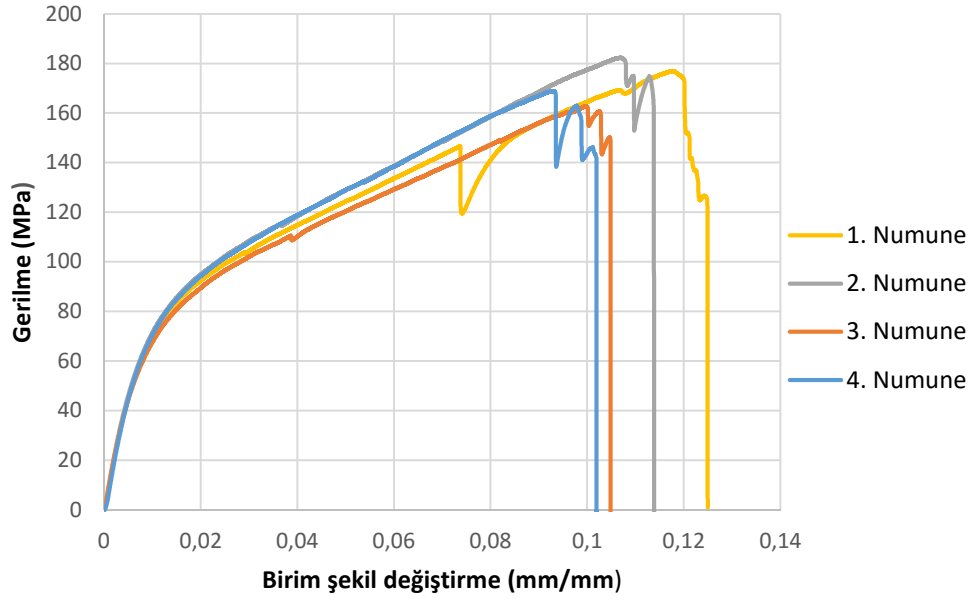
4.5. Karbon, Cam Prepreglerin ve Alüminyum Levhanın Mekanik Özellikleri

Üretilen FMT kompozit plakaların nümerik analizlerinin yapılabilmesi için öncelikle bu yapıyı oluşturan karbon, cam prepregler ile alüminyum levhanın mekanik özelliklerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bölüm 3.9’da bahsedildiği üzere bu malzemelere çekme testi yapılarak, Şekil 4.3 - Şekil 4.7 arasında gösterilen gerilme – birim şekil değiştirme grafikleri çizilmiştir. Bu grafiklerde, Hooke Yasası’nın geçerli olduğu lineer bölgeler yardımıyla elastisite modülleri belirlenmiştir. Aşağıda belirtilen denklem (3.147) yardımıyla da malzemelerin kayma modülleri hesaplanmıştır (Jones 2014). Burada E_x ifadesi, 45° fiber yönelme açısına sahip numunenin çekme doğrultusundaki elastisite modülünü göstermektedir. E_1 , E_2 ve ν_{12} ifadeleri ise sırasıyla 1 (x) ve 2 (y) yönündeki elastisite modüllerini ve poisson oranını belirtmektedir.

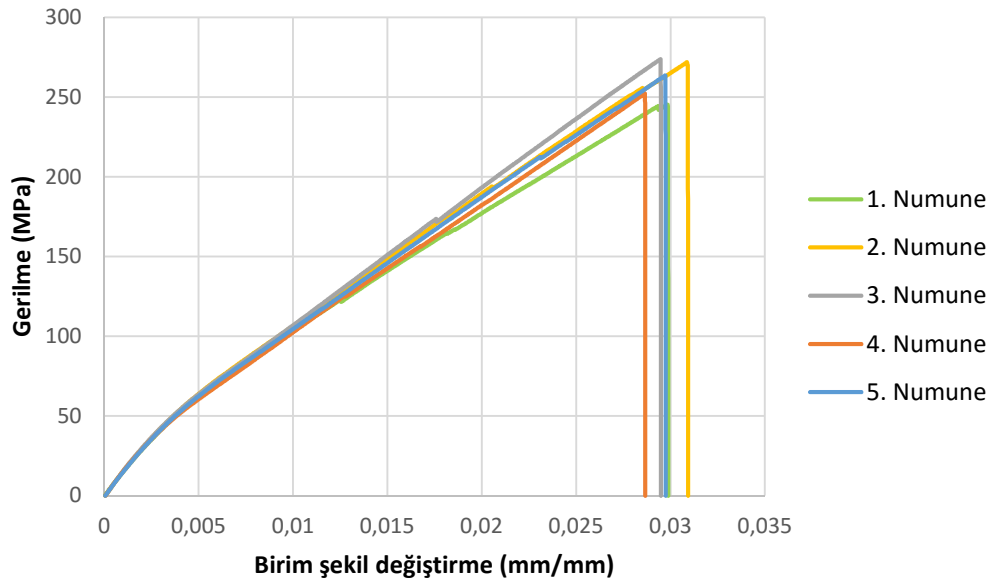
$$G_{12} = \frac{1}{\left(\frac{4}{E_x} - \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right)} \quad (3.147)$$



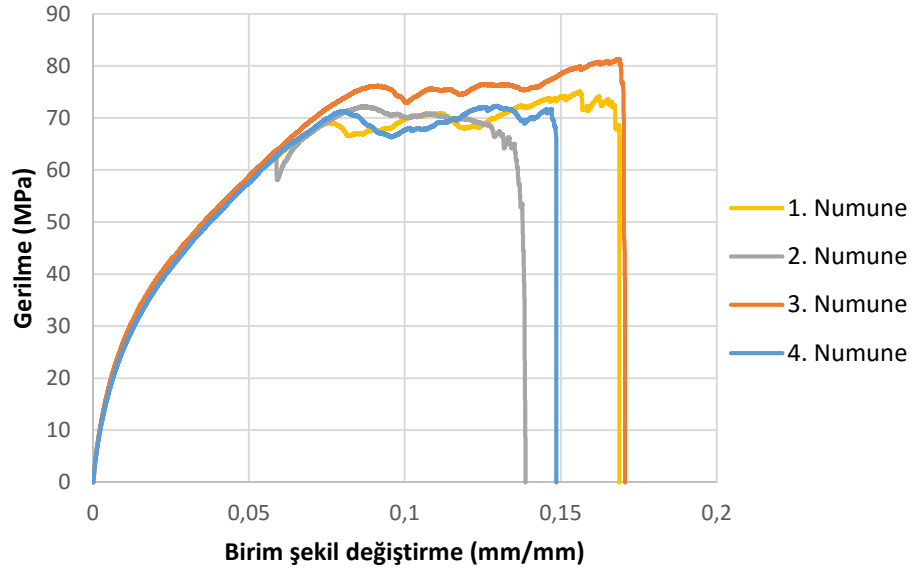
Şekil 4.3. $0^\circ / 90^\circ$ Yönlendirilmiş karbon prepregin gerilme – şekil değiştirme grafiği



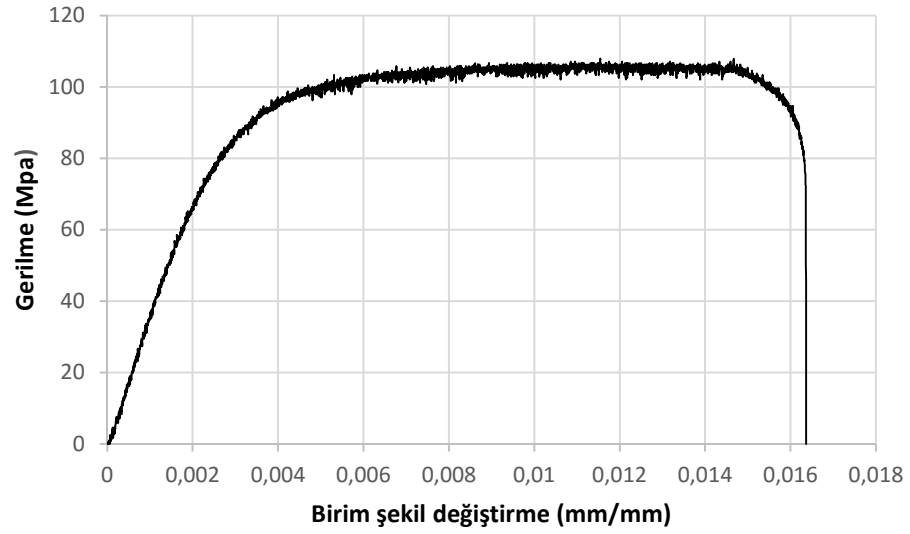
Şekil 4.4. $45^\circ / 45^\circ$ Yönlenme açılı karbon prepreğin gerilme – şekil değiştirme grafiği



Şekil 4.5. $0^\circ / 90^\circ$ Yönlenme açılı cam prepreğin gerilme – şekil değiştirme grafiği



Şekil 4.6. $45^\circ / 45^\circ$ Yönlenme açılı cam prepregin gerilme – şekil değiştirme grafiği



Şekil 4.7. Alüminyum 1050 levhanın gerilme – şekil değiştirme grafiği

FMT kompozit üretiminde kullanılan malzemelerin çekme testinden elde edilen mekanik özellikleri Çizelge 4.12’de verilmiştir.

Çizelge 4.12. FMT kompozit üretiminde kullanılan malzemelerin mekanik özellikleri

Malzeme	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	ρ (kg / m ³)
Karbon prepreg	29,33±1.80	29,33±1.80	2,72 ± 0.03	0,041	1371,4
Cam prepreg	14,01±0.24	14,01±0.24	1,06 ± 0.04	0,145	1627,6
Al 1050	34,00±0.26	34,00±0.26	12,78±0.09	0,330	2599,2

4.6. FMT Plakaların Nümerik ve Deneysel Olarak Serbest Titreşim Analizi

Yapılan çalışma kapsamında, deneysel ve nümerik analizlerde ele alınan FMT kompozit plakanın genişlik ve uzunluk değerleri $c = d = 180$ mm şeklindedir. Her bir karbon prepreg tabakasının kalınlığı 0,25 mm, cam prepreg tabakasının kalınlığı 0,18 mm ve alüminyum tabakasının kalınlığı ise 0,3 mm'dir. Sınır şartları; dört kenarı ankastre (AAAA), bir kenarı serbest üç kenarı ankastre (ASAA) ve iki kenarı ankastre diğer iki kenarı serbest (ASSA) olarak incelenmiştir. Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'de verilen konfigürasyon durumları için belirtilen sınır şartlarında, DQ, GDQ, HDQ metotları ile ANSYS paket programından elde edilen doğal frekans değerleri ile birlikte deneysel olarak elde edilen doğal frekans değerleri aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir. Burada nümerik analizlerde x ve y doğrultuları için $n_x = n_y = 22$ olarak düğüm nokta sayısı alınarak sonuçlar elde edilmiştir. Deneyler, her bir numunenin iki kez sökölüp takılması suretiyle ve her bir ölçümde dört veri kaydedilerek yapılmıştır. Elde edilen verilerin ortalaması alınarak çizelgelere işlenmiştir. Çizelge 4.13, Çizelge 4.14 ve Çizelge 4.15'de cam fiber prepreg ile alüminyum levhadan oluşan FMT kompozit (GLARE) plakanın nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ile deneysel sönüm oranları verilmiştir. Çizelgelere bakıldığında, DQ metotları, ANSYS paket programı ve deneysel yöntemden elde edilen birinci doğal frekans değerlerinin oldukça birbirine yakın olduğu görülmektedir. Böylelikle nümerik ve deneysel yöntem sonuçları kıyaslanarak modelin doğruluğu ortaya konulmuştur. Çizelgelerde, deneysel sonuç ile GDQ metodu sonuçlarının yüzdesel olarak fark değerleri de verilmiştir. B_6 ve D_6 durumlarındaki farkın diğer durumlara göre daha fazla çıkmasının sebebi bu iki konfigürasyonda Al tabakaların üst üste gelmesi ve bu katmanların yapıştırıcı kullanılarak bir araya getirilmesi durumundan kaynaklandığı düşünülmektedir.

Çizelge 4.13. GLARE kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (AAAA)

Grup No	ω (Hz)					Fark* (%)	Deneysel Sönüm oranı (%)
	Çözüm Yöntemleri						
	DQ	GDQ	HDQ	ANSYS	Deneysel		
A_1	249,17	249,83	249,83	248,87	256,30	2,52	2,053
A_2	402,87	405,13	405,14	400,60	406,30	1,28	0,764
A_3	447,13	449,73	449,73	444,51	440,00	2,21	0,743
A_4	472,55	475,29	475,30	471,66	428,00	11,83	0,720
B_1	249,17	249,83	249,83	248,87	250,00	0,06	2,053
B_2	402,87	405,13	405,14	400,60	406,30	1,28	0,764
B_3	357,28	359,07	359,08	355,93	382,00	6,00	0,656
B_4	317,77	319,12	319,12	317,16	337,50	5,44	0,788
B_5	286,81	287,82	287,83	286,70	330,00	12,78	0,796
B_6	267,50	268,28	268,28	267,58	328,00	18,20	1,546
C_1	472,55	475,29	475,30	471,66	428,00	11,83	0,971
C_2	471,52	474,49	474,50	470,81	418,80	13,29	0,623
C_3	471,11	474,22	474,22	470,52	418,80	13,23	1,300
C_4	472,38	475,16	475,16	471,51	437,50	8,60	0,699
C_5	472,32	475,11	475,12	471,47	456,30	4,12	1,270
C_6	471,70	474,63	474,63	470,96	418,80	13,33	0,660
C_7	471,46	474,44	474,45	470,76	431,30	10,00	0,758
D_1	242,80	244,89	244,90	243,75	250,00	2,04	1,071
D_2	401,11	403,82	403,82	399,31	412,00	1,98	0,602
D_3	354,65	357,03	357,03	353,65	362,50	1,50	1,420
D_4	313,41	315,74	315,75	313,4	337,50	6,44	0,784
D_5	281,14	283,63	283,63	282,23	312,50	9,23	0,736
D_6	261,12	263,33	263,33	262,58	318,80	17,19	0,964

*Fark (%): Deneysel sonuç ile GDQ metodu çözüm sonucunun yüzdesel fark değeri

Çizelge 4.14. GLARE kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (ASAA)

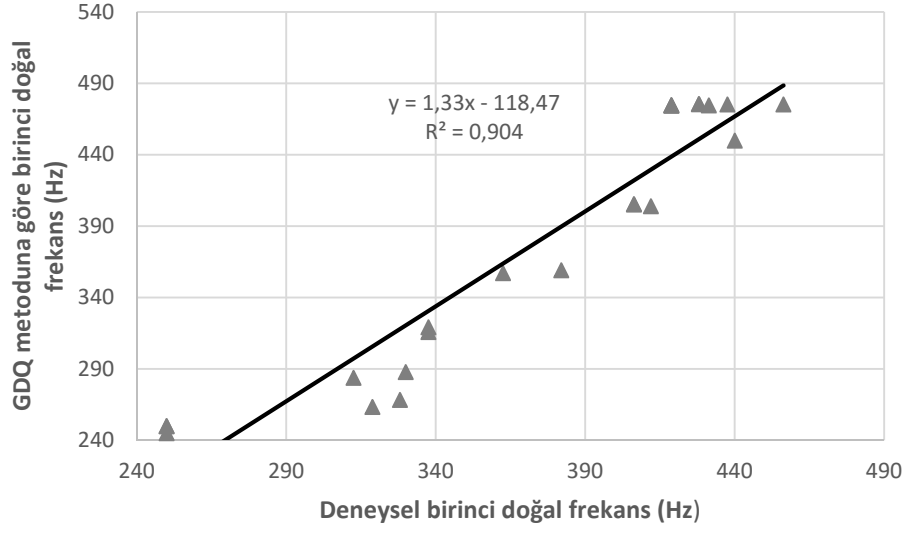
Grup No	ω (Hz)					Fark* (%)	Deneysel Sönüm oranı (%)
	Çözüm Yöntemleri						
	DQ	GDQ	HDQ	ANSYS	Deneysel		
A_1	173,49	173,33	173,31	172,50	162,50	6,66	1,330
A_2	270,47	270,22	270,22	267,54	274,00	1,38	1,526
A_3	299,39	299,10	299,16	296,04	310,00	3,51	1,613
A_4	316,48	316,17	316,18	313,95	331,30	4,56	0,947
B_1	173,49	173,33	173,31	172,50	162,50	6,66	1,330
B_2	270,47	270,22	270,22	267,54	272,00	1,38	1,526
B_3	241,70	241,48	241,49	239,59	262,50	8,00	1,030
B_4	216,92	216,73	216,74	215,52	231,30	6,30	1,180
B_5	197,66	197,48	197,49	196,77	210,00	5,96	1,803
B_6	185,57	185,55	185,52	185,07	212,50	12,68	1,074
C_1	316,48	316,17	316,18	313,95	331,30	4,56	0,947
C_2	313,30	312,95	312,96	310,65	327,10	4,32	0,687
C_3	312,25	311,89	311,90	309,57	329,00	5,20	0,819
C_4	315,95	315,64	315,64	313,40	348,77	9,49	0,735
C_5	315,77	315,46	315,46	313,22	350,00	9,86	0,853
C_6	313,85	313,51	313,51	311,22	353,30	11,26	1,480
C_7	313,13	312,78	312,78	310,48	337,50	7,32	0,833
D_1	152,78	152,31	152,32	151,08	156,30	2,55	1,606
D_2	265,28	264,96	264,97	262,25	275,00	3,65	1,752
D_3	233,43	233,10	233,10	230,94	237,50	1,85	1,702
D_4	203,28	202,92	202,92	201,24	206,30	1,63	1,600
D_5	180,34	179,93	179,94	178,68	187,50	4,03	1,347
D_6	165,12	164,65	164,66	163,03	204,00	19,28	1,500

*Fark (%): Deneysel sonuç ile GDQ metodu çözüm sonucunun yüzdesel fark değeri

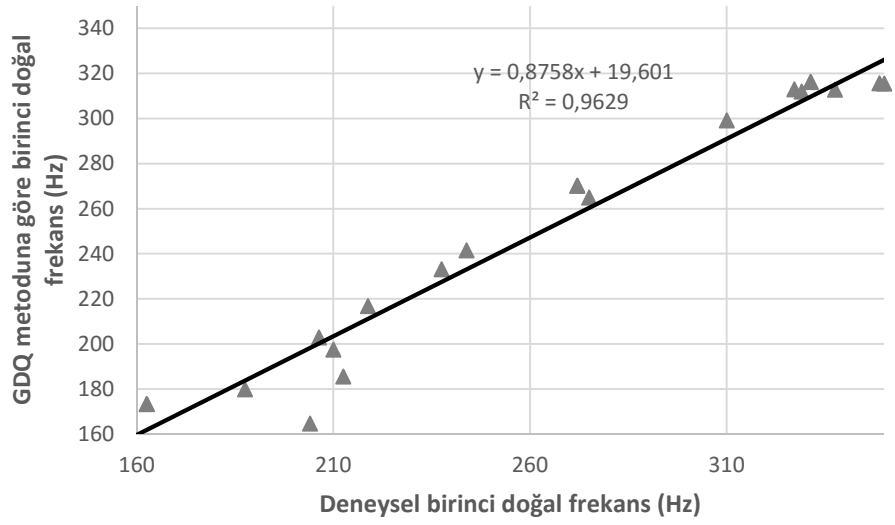
Çizelge 4.15. GLARE kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (ASSA)

Grup No	ω (Hz)					Fark* (%)	Deneysel Sönüm oranı (%)
	Çözüm Yöntemleri						
	DQ	GDQ	HDQ	ANSYS	Deneysel		
A_1	41,76	41,90	41,90	41,85	44,00	4,77	1,480
A_2	75,67	76,08	76,08	75,58	78,00	2,46	6,566
A_3	84,46	84,92	84,92	84,33	93,75	9,41	4,505
A_4	89,22	89,71	89,72	89,24	98,00	8,45	4,470
B_1	41,76	41,90	41,90	41,85	44,00	4,77	1,480
B_2	75,67	76,08	76,08	75,58	78,00	2,46	6,566
B_3	65,95	66,28	66,28	65,94	75,00	11,62	6,543
B_4	57,24	57,51	57,51	57,31	62,50	7,98	4,965
B_5	50,12	50,33	50,33	50,23	56,25	10,52	3,950
B_6	45,43	45,60	45,60	45,54	60,00	24,00	3,670
C_1	89,22	89,71	89,72	89,24	98,00	8,45	4,470
C_2	89,99	90,47	90,47	89,95	100,00	9,53	3,466
C_3	90,19	90,71	90,71	90,17	102,00	11,06	3,832
C_4	89,36	89,84	89,85	89,36	100,00	10,16	4,186
C_5	89,40	89,89	89,90	89,40	103,15	12,85	4,097
C_6	89,84	90,34	90,35	89,83	98,00	7,81	3,070
C_7	90,00	90,51	90,51	89,99	100,00	9,49	4,112
D_1	47,07	47,46	47,46	47,09	48,00	1,12	1,596
D_2	88,73	89,24	89,25	76,73	80,00	11,55	5,048
D_3	78,36	78,82	78,83	67,80	75,00	5,09	3,155
D_4	69,87	70,30	70,31	60,49	62,50	12,48	5,067
D_5	62,79	63,24	63,24	54,43	56,25	12,42	4,155
D_6	58,46	58,92	58,92	50,76	66,00	10,72	3,945

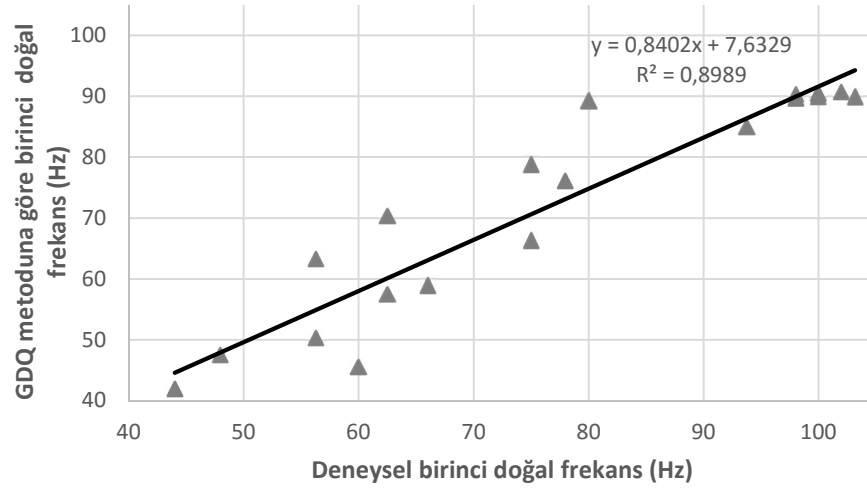
*Fark (%): Deneysel sonuç ile GDQ metodu çözüm sonucunun yüzdesel fark değeri



Şekil 4.8. GLARE kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (AAAA)



Şekil 4.9. GLARE kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (ASAA)



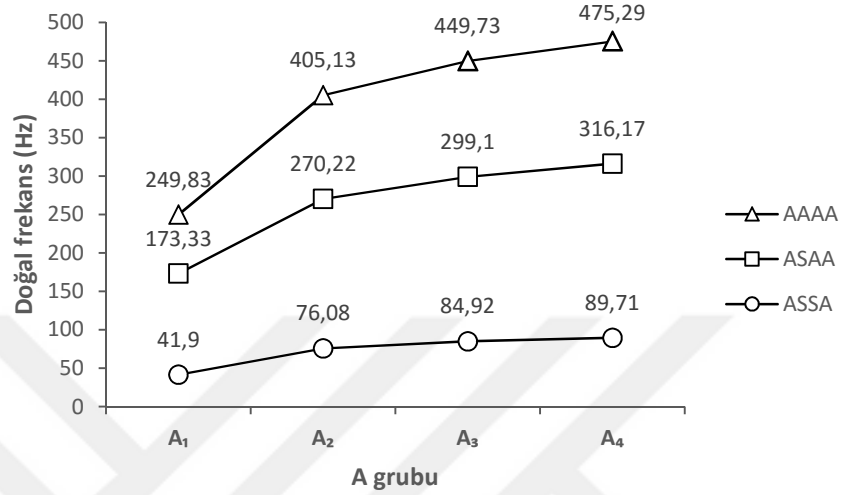
Şekil 4.10. GLARE kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (ASSA)

Şekil 4.8, Şekil 4.9 ve Şekil 4.10’da GLARE kompozitler için sırasıyla AAAA, ASAA, ASSA sınır şartları durumlarındaki bütün tabakalı dizilişler için GDQ metoduyla elde edilen birinci doğal frekanslara karşılık deneysel olarak elde edilen birinci doğal frekansların dağılımı görülmektedir. Regresyon analizi sonucu elde edilen grafikler incelendiğinde, nümerik yöntem ile deneysel yöntem arasında doğrusal bir bağıntı mevcuttur. Elde edilen bağıntılara bakıldığında belirleme katsayıları AAAA ($R^2=0,90$), ASAA ($R^2=0,96$) ve ASSA ($R^2=0,89$) sınır şartları için 1’e yakın şekildedir. Böylelikle, nümerik ve deneysel yöntem sonuçları arasındaki ilişki matematiksel olarak belirlenmiş ve sonuçların birbiriyle oldukça uyumlu olduğu tespit edilmiştir.

Yapılan bu doğrusal regresyon analiziyle bu iki yöntem arasındaki bağıntı tespit edildikten sonra farklı sınır şartlarının ve farklı tabaka diziliş durumlarının plakanın doğal frekanslarına ve sönüm oranlarına etkisi aşağıda verilen grafiklerle incelenmiştir.

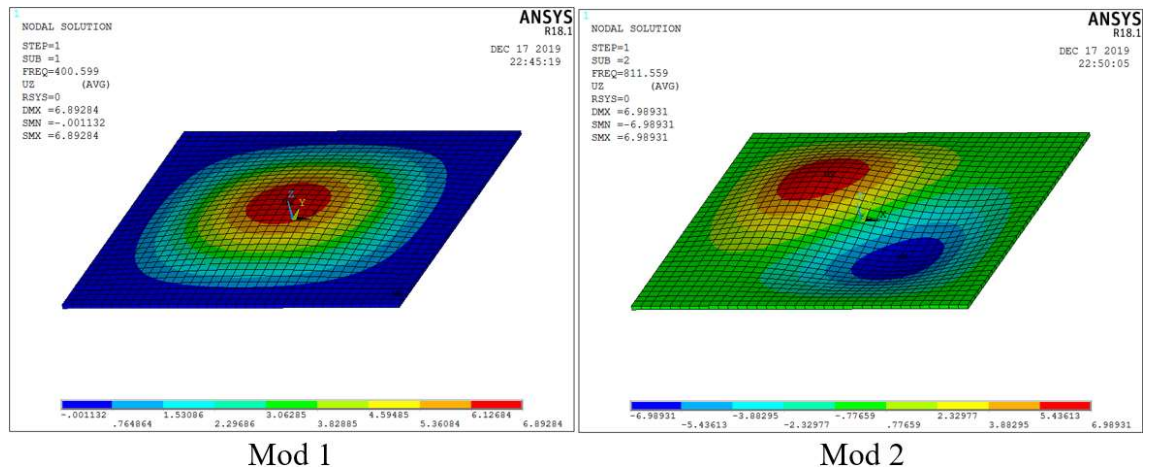
Şekil 4.11’de GDQ metodu kullanılarak GLARE kompozit plakalarda alüminyum tabaka sayısı değişiminin birinci doğal frekanslara etkisi incelenmiştir. Burada, cam prepreg tabakalarının yerine alüminyum tabakalar kullanılması suretiyle yapı içerisindeki alüminyum tabaka sayısı arttıkça plakanın efektif elastisite modülü, rijitliği ve yoğunluğu

artmaktadır. Sistemin rijitliğindeki artış, hem yoğunluk hem de kütle atalet momentindeki artışa göre daha etkin olmasından dolayı doğal frekansların arttığı görülmektedir.

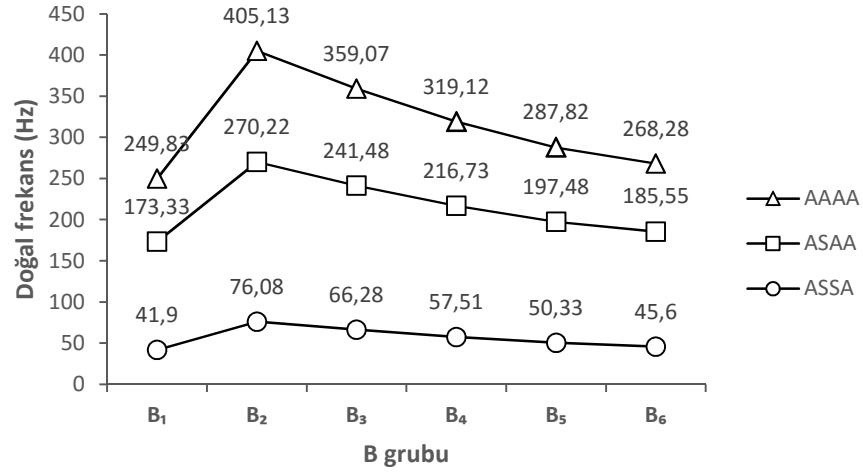


Şekil 4.11. GDQ metoduna göre GLARE kompozit plakanın farklı sınır şartları durumlarındaki alüminyum tabaka sayısı değişiminin birinci doğal frekanslara etkisi

Şekil 4.12’de GLARE kompozit plakalardan A₂ tabaka dizilişi için AAAA sınır şartı durumundaki ilk iki mod şekli görülmektedir.



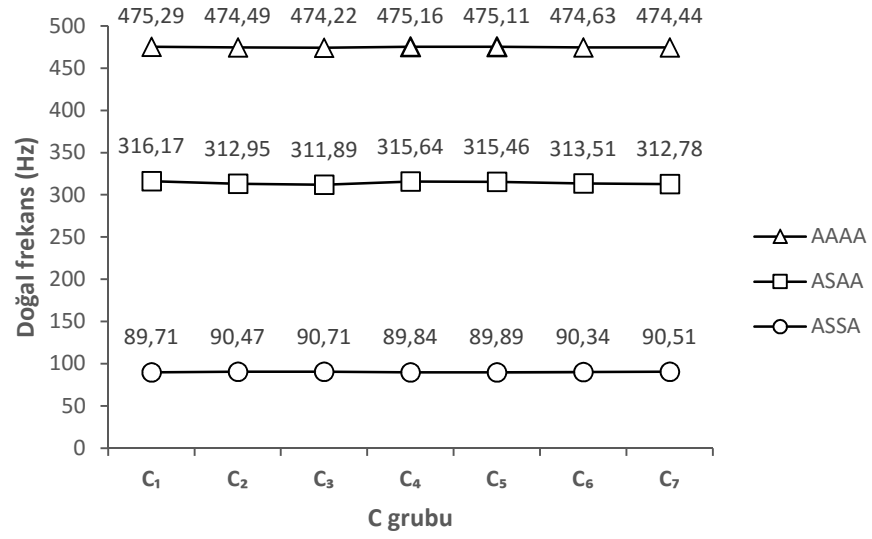
Şekil 4.12. Dörtkenarı ankastre GLARE A₂ plakanın mod şekilleri



Şekil 4.13. GDQ metoduna göre çapraz dizilişli GLARE kompozit plakada alüminyum tabakaların dış tabakadan içeri doğru yerleştirilmesinin birinci doğal frekanslara etkisi

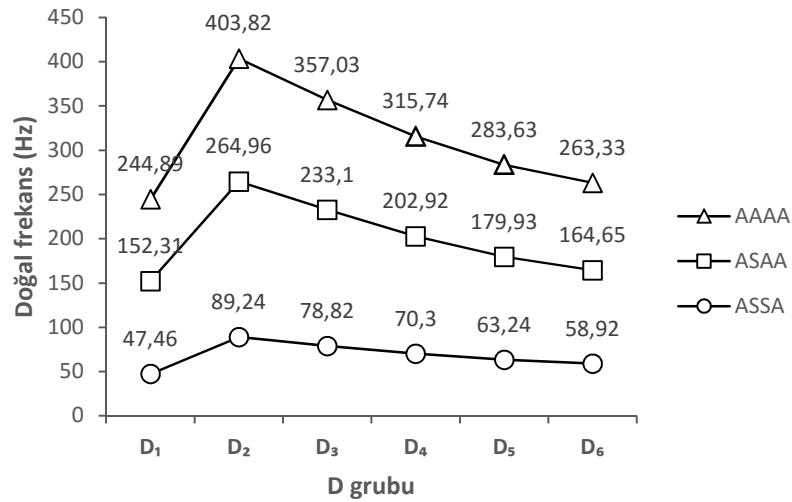
$[G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0} - G_{0^0/90^0}]_s$ dizilişine sahip GLARE kompozitlerde iki adet alüminyum tabakanın en dış tabakadan merkeze doğru yerleştirilmesi ile oluşturulan B grubunda (B₁, B₂, B₃, B₄, B₅, B₆) alüminyum tabakaların iç katmanlara yerleştirilmesiyle beraber rijitliğin azalmasından dolayı doğal frekans değerlerinde azalma görülmektedir. (Şekil 4.13). Bu durumun sebebi, alüminyum tabakalarının yanal rijitliğinin cam prepreg tabakalardan daha büyük olması ve alüminyum tabakalar yapının dış yüzeylerinde yer aldığından plakanın doğal frekansları üzerindeki etkilerinin artmasıdır. Diğer bir sebep ise, alüminyum levhalar yapının merkezine doğru yerleştirildikçe yapının kütle atalet momenti azalmaktadır. Bu nedenlerle, plakanın doğal frekansının, Al levhanın plakanın orta tabakalarına gömülü olduğu durumlara kıyasla daha yüksek olduğu görülmüştür.

C grubunda (C₁, C₂, C₃, C₄, C₅, C₆, C₇), GLARE kompozit plakanın fiber yönlenme açılarının doğal frekans üzerindeki etkileri araştırılmıştır. $[Al/\theta/Al/\theta/Al]_s$ dizilişinde alt, üst ve ara katmanda Al bulunurken, ara katmanlardaki cam prepreglerin θ açısallı yönlenme durumlarındaki değişimin, yapının serbest titreşimlerine olan etkileri incelenmiştir. Fiber yönlenme açılarındaki değişime karşılık plakanın doğal frekanslarında gözle görülür bir değişim olmamıştır (Şekil 4.14).

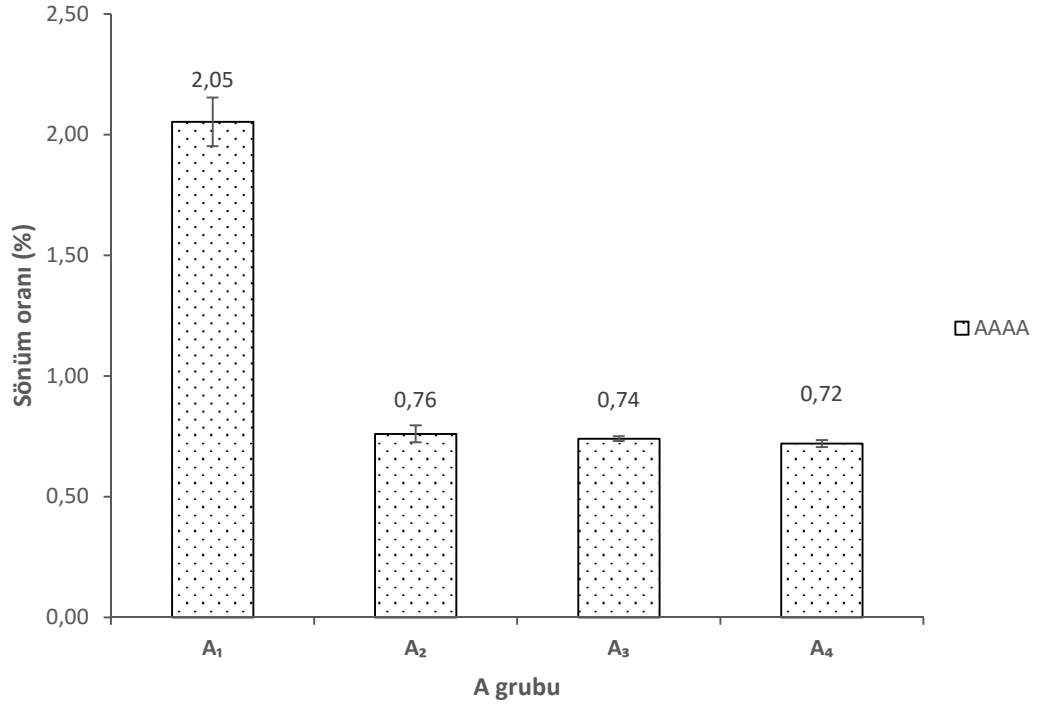


Şekil 4.14. GLARE kompozitlerde fiber yönelmelerinin birinci doğal frekanslara etkisi

D grubu, $\left[G_{30^\circ/60^\circ} - G_{45^\circ/45^\circ} - G_{30^\circ/60^\circ} - G_{45^\circ/45^\circ} - G_{30^\circ/60^\circ} \right]_s$ açılı dizilişinde cam prepreglerin yerine iki adet Al katmanının en dış tabakadan içeri doğru yerleştirildiği durumları içermektedir. Al tabakalar plakanın merkezine doğru yerleştirildikçe yapının kütle atalet momentinin azalmasından dolayı doğal frekanslar da azalmaktadır (Şekil 4.15).



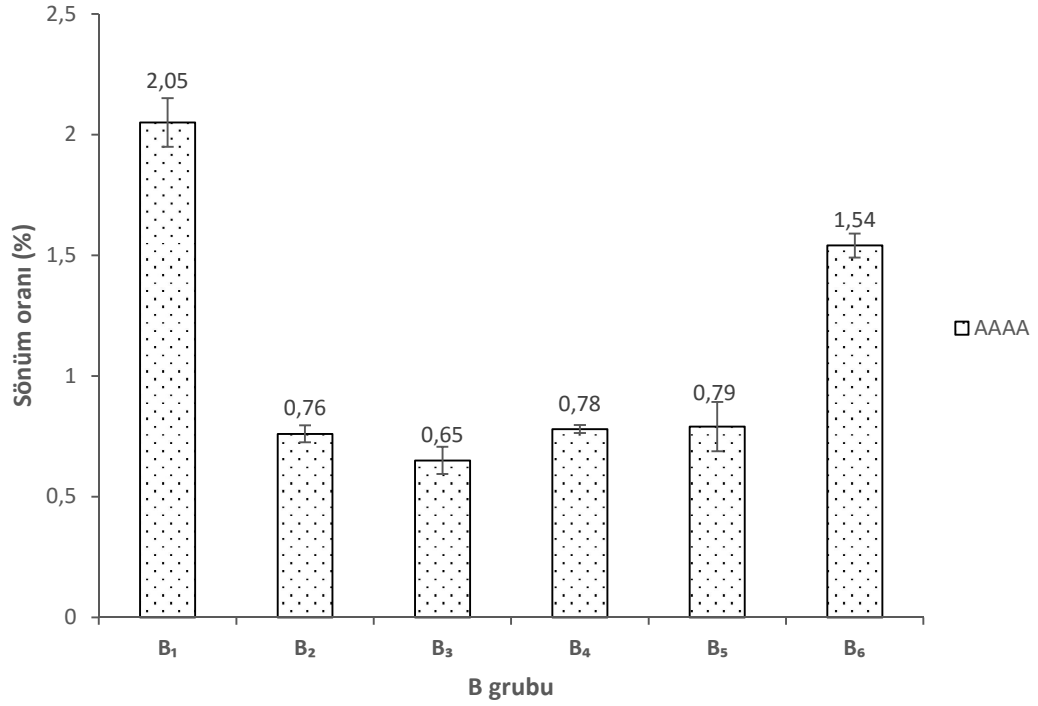
Şekil 4.15. GDQ metoduna göre açılı dizilişli GLARE kompozit plakada alüminyum tabakaların dış tabakadan içeri doğru yerleştirilmesinin birinci doğal frekanslara etkisi



Şekil 4.16. A grubu dizilişleri için GLARE kompozit plakalara ait deneysel sönüm oranları

Şekil 4.16’da GLARE kompozit plakaların dörtkenarlı ankastre (AAAA) sınır şartında ve çeşitli tabaka diziliş durumlarındaki deneysel sönüm oranları (%) verilmiştir. Yapı içerisinde cam prepreg yerine Al tabaka yerleştirilerek Al tabaka sayısı artırıldıkça sönüm oranları değerlerinin azaldığı görülmektedir. Özellikle bütün tabakaların cam prepreglerden oluştuğu A_1 dizilişinde sönüm oranı yüksek iken, yapı içerisine Al tabaka yerleştirildiği vakit sönüm oranlarının düştüğü görülmektedir.

Bu durum, Al tabaka sayısı artışının titreşim enerjisi kaybının azalmasına neden olmasından kaynaklanmaktadır. Yapı içerisindeki Al tabaka sayısı artışıyla beraber yapının enerji tüketim kapasitesi azalmaktadır. (Liang *et al.* 2011). Bunun neticesinde de FMT kompozit plakanın deneysel sönüm oranlarında azalma tespit edilmiştir.



Şekil 4.17. B grubu dizilişleri için GLARE kompozit plakalara ait deneysel sönüm oranları

Şekil 4.17’de GLARE kompozit plakaların dörtkenarı ankastre (AAAA) sınır şartında ve B grubu diziliş durumlarındaki deneysel sönüm oranları (%) verilmiştir. Al tabakasının yapının merkezine doğru yerleştirildiği B ve D konfigürasyonları için her üç sınır şartında da deneysel sönüm oranları ile ilgili net bir eğilim görülmemektedir (Çizelge 4.13 - Çizelge 4.15). Ancak genel olarak Al tabakalar yapının merkezinde yer aldığında, dış yüzeyde bulunduğu duruma göre sönüm oranlarının daha yüksek olduğu tespit edilmiştir (Şekil 4.17).

Plaka örneğin eğilme şeklinde deformasyona uğradığında, plakanın dış yüzeyleri iç katmana göre daha çok deformasyona uğramaktadır. Dolayısıyla dış yüzeyde cam prepregler bulunduğu, daha fazla enerji tüketilmesine sebebiyet vermektedir.

Çizelge 4.16. CARALL kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (AAAA)

Grup No	ω (Hz)					Fark* (%)	Deneysel Sönüm oranı (%)
	Çözüm Yöntemleri						
	DQ	GDQ	HDQ	ANSYS	Deneysel		
A_1	535,07	536,48	536,48	533,36	493,80	8,64	2,523
A_2	580,29	582,11	582,11	577,14	560,00	3,94	1,623
A_3	576,85	578,71	578,71	574,01	592,00	2,24	1,550
A_4	563,61	565,43	565,44	562,23	556,30	1,64	1,253
B_1	535,07	536,48	536,48	533,36	493,80	8,64	2,523
B_2	580,29	582,11	582,11	577,14	556,30	3,94	1,623
B_3	553,15	554,80	554,80	550,81	581,30	4,55	1,640
B_4	531,64	533,14	533,15	530,02	556,30	4,16	1,743
B_5	516,51	517,91	517,92	515,41	537,50	3,64	1,755
B_6	508,39	509,74	509,74	507,55	581,30	12,31	1,956
C_1	563,61	565,43	565,44	562,23	556,30	1,64	1,257
C_2	560,96	562,91	562,91	559,61	556,30	1,18	1,742
C_3	560,02	562,01	562,02	558,67	552,00	1,81	1,543
C_4	563,20	565,04	565,05	561,83	531,30	6,35	2,313
C_5	563,06	564,91	564,91	561,69	515,50	10,22	2,013
C_6	561,41	563,33	563,34	560,05	543,80	3,59	2,053
C_7	560,81	562,76	562,77	559,46	556,30	1,16	2,520
D_1	522,61	524,66	524,66	520,89	490,00	7,07	1,250
D_2	575,03	577,11	577,11	572,04	593,80	2,81	0,847
D_3	546,58	548,56	548,56	544,06	458,00	19,77	0,654
D_4	522,13	524,12	524,12	520,31	506,30	3,51	1,766
D_5	505,86	507,81	507,81	504,73	475,00	6,90	1,313
D_6	496,73	498,68	498,68	496,06	556,00	10,30	0,787

*Fark (%): Deneysel sonuç ile GDQ metodu çözüm sonucunun yüzdesel fark değeri

Çizelge 4.17. CARALL kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (ASAA)

Grup No	ω (Hz)					Fark* (%)	Deneysel Sönüm oranı (%)
	Çözüm Yöntemleri						
	DQ	GDQ	HDQ	ANSYS	Deneysel		
A_1	376,09	378,37	378,37	376,36	356,30	6,17	1,250
A_2	392,31	394,71	394,72	391,76	374,45	5,41	0,983
A_3	386,83	389,21	389,22	386,41	368,80	5,53	0,681
A_4	377,94	380,26	380,27	378,30	357,20	6,45	0,708
B_1	376,09	378,37	378,37	376,36	356,30	6,17	1,250
B_2	392,31	394,71	394,72	391,76	374,45	5,41	0,983
B_3	379,00	381,30	381,31	378,89	340,00	12,14	0,960
B_4	368,42	370,66	370,66	368,73	362,50	2,25	1,393
B_5	361,00	363,16	363,16	361,57	356,30	1,92	0,982
B_6	356,97	359,13	359,13	357,72	375,00	4,32	0,764
C_1	377,94	380,26	380,27	378,30	357,20	6,45	0,708
C_2	367,80	370,07	370,07	367,90	384,00	3,62	0,720
C_3	364,48	366,75	366,75	364,53	362,50	1,17	0,910
C_4	376,36	378,68	378,68	376,69	375,00	0,98	1,191
C_5	375,84	378,15	378,16	376,16	370,00	2,02	0,834
C_6	369,52	371,81	371,81	369,68	368,80	0,81	0,644
C_7	367,29	369,56	369,57	367,36	356,30	3,72	1,390
D_1	328,41	330,47	330,47	327,40	300,00	10,15	1,180
D_2	372,61	374,92	374,93	371,74	350,00	7,12	0,632
D_3	353,47	355,66	355,67	352,61	328,00	8,43	0,752
D_4	332,39	334,47	334,47	331,69	318,80	4,91	0,794
D_5	320,14	322,13	322,13	319,62	312,00	3,24	0,983
D_6	312,43	314,38	314,39	312,07	293,80	7,00	1,515

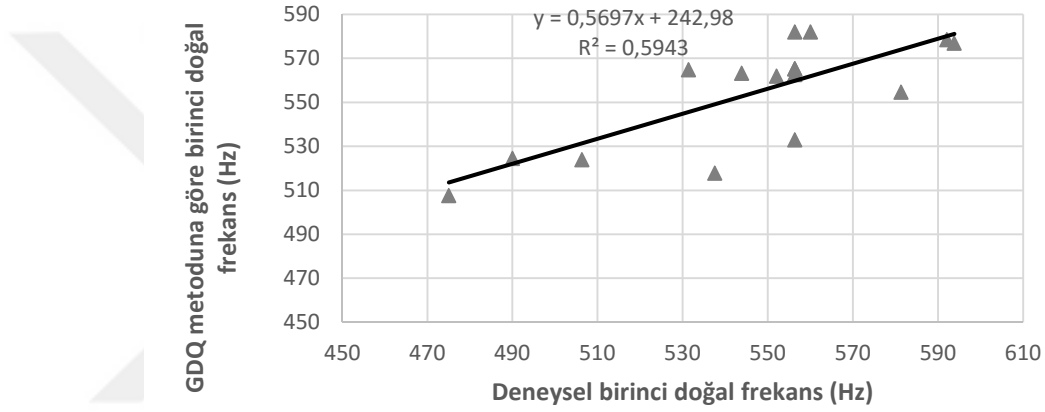
*Fark (%): Deneysel sonuç ile GDQ metodu çözüm sonucunun yüzdesel fark değeri

Çizelge 4.18. CARALL kompozit plakaların nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ve deneysel sönüm oranları (ASSA)

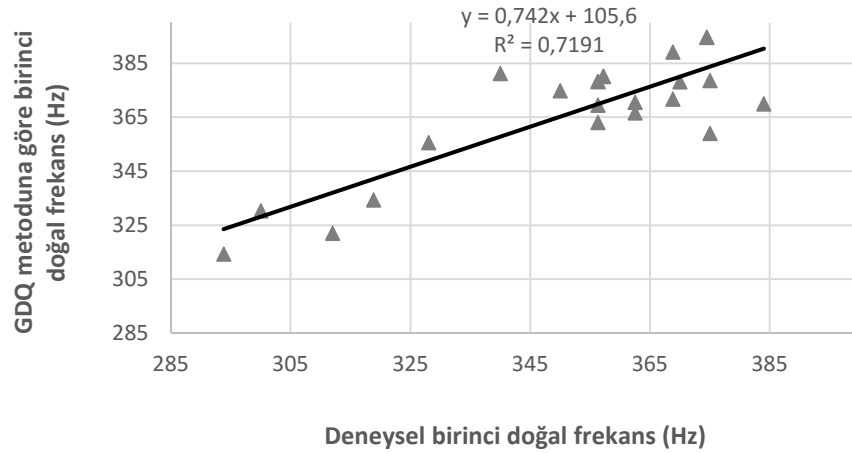
Grup No	ω (Hz)					Fark* (%)	Deneysel Sönüm oranı (%)
	Çözüm Yöntemleri						
	DQ	GDQ	HDQ	ANSYS	Deneysel		
A_1	92,36	92,71	92,71	92,52	87,50	5,95	2,470
A_2	107,44	107,98	107,98	107,47	110,00	1,83	2,390
A_3	107,86	108,42	108,42	107,88	114,20	5,06	3,125
A_4	105,39	105,94	105,94	105,52	112,50	5,83	4,205
B_1	92,36	92,71	92,71	92,52	87,50	5,95	2,470
B_2	107,44	107,98	107,98	107,47	110,00	1,83	2,390
B_3	100,48	100,94	100,95	100,58	112,00	9,87	3,265
B_4	94,67	95,07	95,08	94,82	106,00	10,31	4,400
B_5	90,38	90,74	90,74	90,55	93,75	3,21	5,825
B_6	87,99	88,32	88,32	88,17	104,00	15,07	3,123
C_1	105,39	105,94	105,94	105,52	112,50	5,83	4,205
C_2	107,73	108,36	108,36	107,81	112,00	3,25	2,250
C_3	108,44	109,09	109,10	108,52	113,40	3,80	4,545
C_4	105,82	106,38	106,39	105,95	109,40	2,76	5,925
C_5	105,96	106,53	106,53	106,08	115,65	7,88	2,715
C_6	107,40	108,01	108,02	107,49	112,50	3,99	3,030
C_7	107,86	108,49	108,50	107,94	112,50	3,56	6,135
D_1	104,42	105,31	105,31	104,37	94,75	11,14	5,836
D_2	112,02	112,71	112,71	111,92	115,65	2,54	4,326
D_3	106,51	107,25	107,26	106,44	106,30	0,90	2,760
D_4	103,49	104,23	104,24	103,44	106,00	1,67	4,133
D_5	100,56	101,37	101,37	100,59	103,15	1,73	4,916
D_6	99,22	100,05	100,05	99,31	106,30	5,88	5,743

*Fark (%): Deneysel sonuç ile GDQ metodu çözüm sonucunun yüzdesel fark değeri

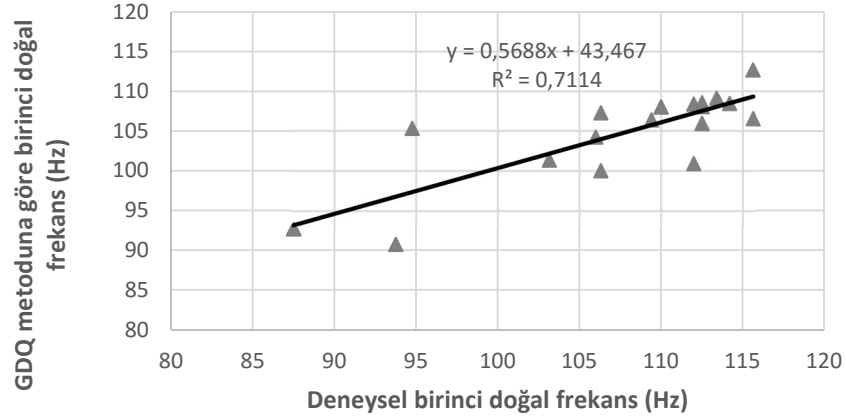
Çizelge 4.16, Çizelge 4.17 ve Çizelge 4.18’de karbon fiber prepreg ile alüminyum levhadan oluşan FMT kompozit (CARALL) plakanın nümerik ve deneysel birinci doğal frekansları ile deneysel sönüm oranları verilmiştir. GDQ metodu sonuçlarının deneysel sonuçlara göre yüzdesel fark değerleri çizelgelerde mevcuttur. Çizelgelerden, nümerik yöntemlerden elde edilen birinci doğal frekanslar ile deneysel olarak elde edilen birinci doğal frekansların oldukça birbirine yakın olduğu görülmektedir. Böylelikle nümerik ve deneysel yöntem sonuçları kıyaslanarak modelin doğruluğu ortaya konulmuştur.



Şekil 4.18. CARALL kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (AAAA)



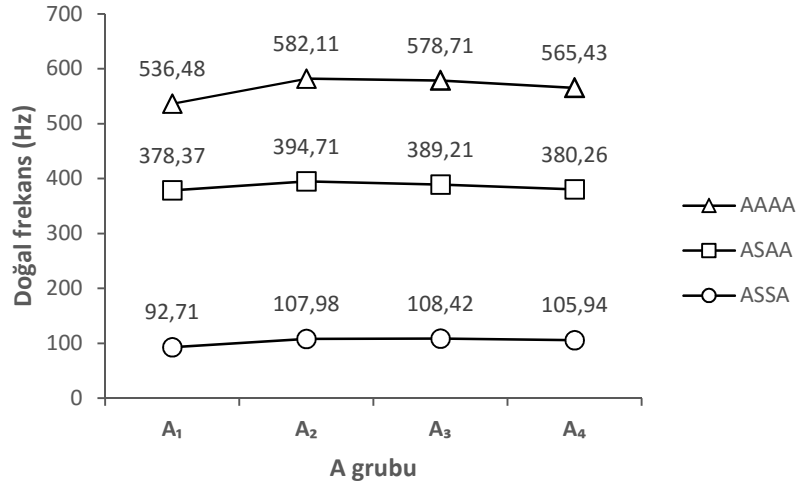
Şekil 4.19. CARALL kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (ASAA)



Şekil 4.20. CARALL kompozitler için nümerik ve deneysel birinci doğal frekanslar arasındaki ilişki (ASSA)

Şekil 4.18, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20’de CARALL kompozitler için sırasıyla AAAA, ASAA, ASSA sınır şartları durumlarındaki bütün tabakalı dizilişler için GDQ metoduyla ve deneysel olarak elde edilen birinci doğal frekansların dağılımı görülmektedir. Regresyon analizi sonucu elde edilen grafikler incelendiğinde, nümerik yöntem ile deneysel yöntem arasında doğrusal bir bağıntı mevcuttur. Elde edilen bağıntılara bakıldığında belirleme katsayıları AAAA ($R^2=0,59$), ASAA ($R^2=0,71$) ve ASSA ($R^2=0,71$) sınır şartları için 1’e yakın şekildedir. Böylelikle, nümerik ve deneysel yöntem sonuçları arasındaki ilişki matematiksel olarak belirlenmiş ve sonuçların birbiriyle oldukça uyumlu olduğu tespit edilmiştir.

Yapılan bu doğrusal regresyon analizinden sonra farklı sınır şartlarının ve farklı tabaka diziliş durumlarının CARALL FMT kompozit plakanın doğal frekanslarına ve sönüm oranlarına etkisi aşağıda verilen grafiklerle incelenmiştir. Çeşitli parametrelerin CARALL plakaların titreşim karakteristiklerine olan etkileri buradaki grafiklerle analiz edilmiştir.

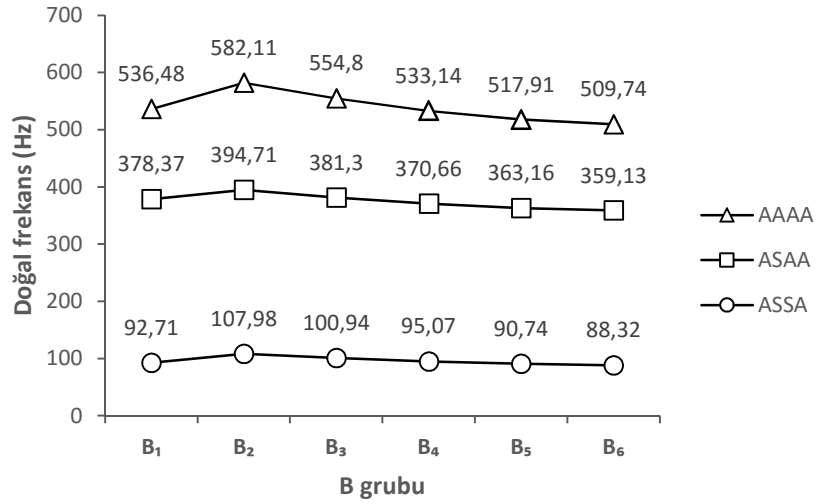


Şekil 4.21. GDQ metoduna göre CARALL kompozit plakanın farklı sınır şartları durumlarındaki alüminyum tabaka sayısı değişiminin birinci doğal frekanslara etkisi

CARALL kompozit plakalarda, karbon prepreg tabakalar yerine Al tabaka yerleştirilerek yapı içerisindeki Al tabaka sayısının artırılmasının birinci doğal frekanslara etkisi Şekil 4.21’de incelenmiştir. Aynı tabaka diziliş durumları için en yüksek doğal frekans değerleri, rijitliğin daha yüksek olduğu AAAA sınır şartında elde edilmiştir. Bütün tabakalar karbon prepreg şeklindeki A_1 durumuna göre, alt ve üst tabakalara Al levhaların yerleştirildiği A_2 durumunda doğal frekanslar her üç sınır şartı durumu için artış göstermiştir. Fakat yapı içerisinde, karbon prepreglerin yerine Al tabaka yerleştirilmesi suretiyle Al tabaka sayısı arttırıldıkça doğal frekans değerlerinin azaldığı görülmektedir. Al levhaların yoğunluğu karbon prepreglere göre daha büyük olduğu için plaka içerisindeki Al tabaka sayısı attıkça yapının yoğunluğu artmaktadır ve bunun sonucunda da doğal frekanslar azalmaktadır.

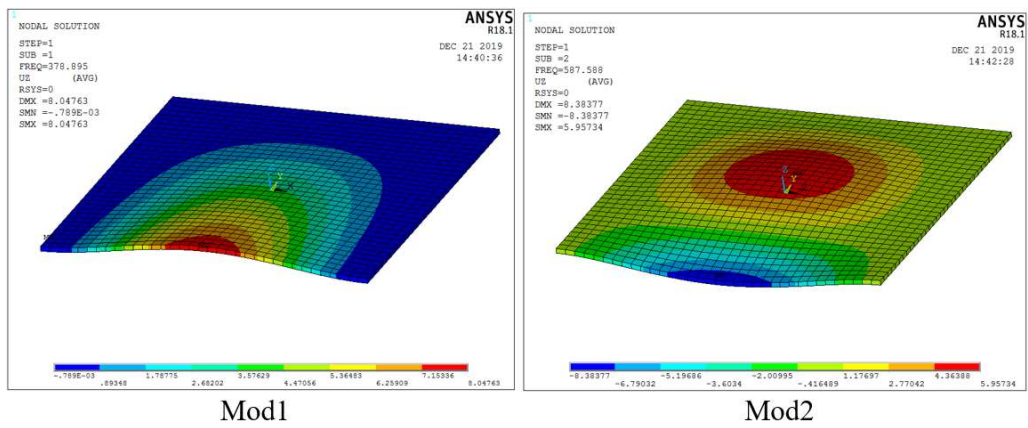
CARALL kompozitler için B grubunda, $[C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0} - C_{0^0/90^0}]_s$ çapraz dizilişi için iki adet Al tabakaların en dış yüzeyden plakanın merkezine doğru yerleştirildikçe titreşim karakteristiklerine olan etkisi incelenmiştir. Al levhalar yapı içerisinde iç katmanlara doğru yerleştirildiğinde, plakanın kütle atalet momenti azalmıştır. Şekil 4.22’de görüldüğü gibi B_2 konumundan B_6 konumuna doğru bir yerleşim

söz konusu olduğunda, her üç sınır şartı durumu için yapının doğal frekansında azalma görülmüştür.

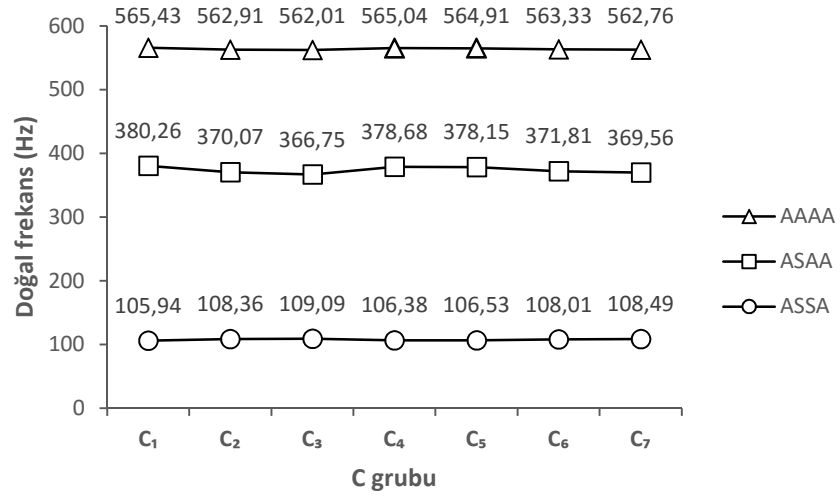


Şekil 4.22. GDQ metoduna göre çapraz dizilişli CARALL kompozit plakada alüminyum tabakaların merkeze doğru yerleştirilmesinin birinci doğal frekanslara etkisi

Şekil 4.23’de CARALL kompozit plakalardan B₃ tabaka dizilişi için ASAA sınır şartı durumundaki ilk iki mod şekli görülmektedir.

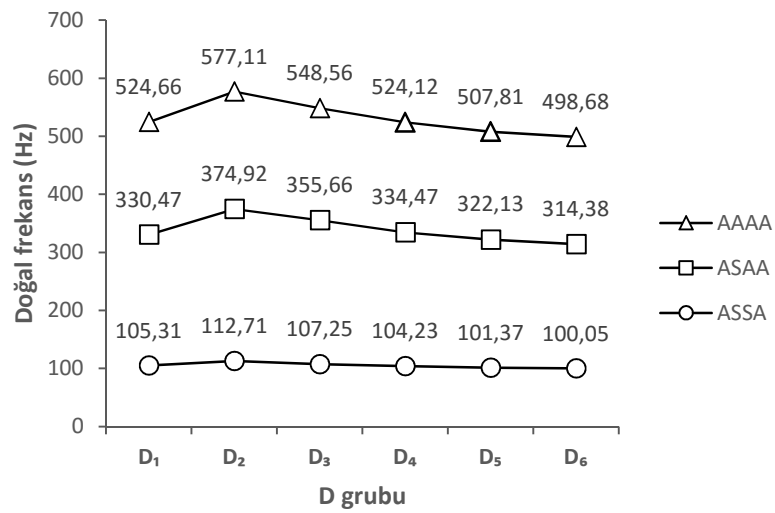


Şekil 4.23. Üç kenarı ankastre, bir kenarı serbest CARALL B₃ plakanın mod şekilleri



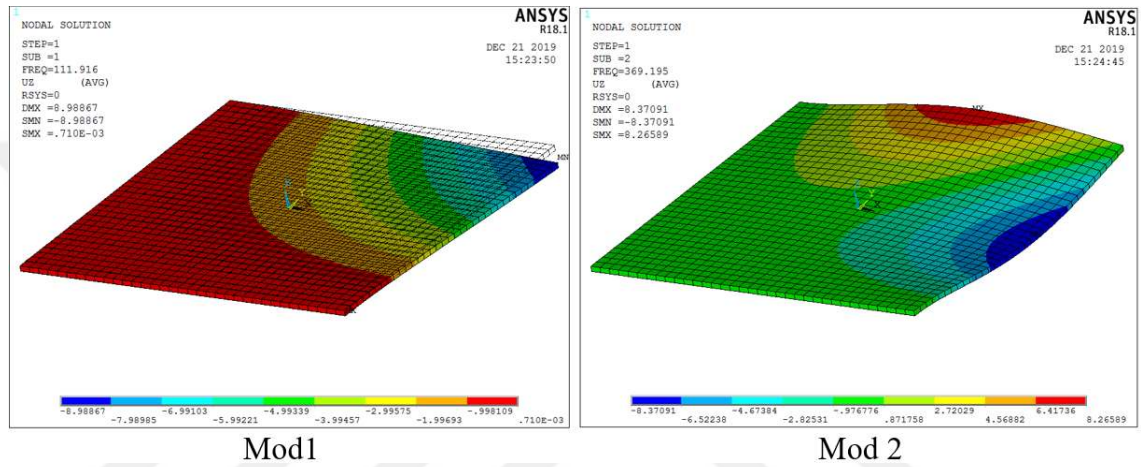
Şekil 4.24. CARALL kompozitlerde fiber yönelme açılarının birinci doğal frekanslara etkisi

$[Al/\theta/Al/\theta/Al]_s$ dizilişine sahip CARALL kompozitler için C grubunda, ara katmanlarda bulunan karbon prepreglerin θ açısall yönelme durumlarındaki değişimin, yapının serbest titreşimlerine olan etkileri araştırılmıştır. Fiber yönelme açılarındaki değişime karşılık plakanın doğal frekanslarında gözle görülür bir değişim olmadığı sonucuna varılmıştır (Şekil 4.24).



Şekil 4.25. GDQ metoduna göre açılı dizilişli CARALL kompozit plakada alüminyum tabakaların dış tabakadan içeri doğru yerleştirilmesinin birinci doğal frekanslara etkisi

CARALL kompozitler için, $\left[G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0} - G_{45^0/45^0} - G_{30^0/60^0} \right]_s$ açılı dizilişine sahip D grubunda, karbon prepreglerin yerine iki adet Al tabakalarının en dış tabakadan merkeze doğru yerleştirilmesinin titreşim karakteristiklerine olan etkisi araştırılmıştır. Burada, Al tabakalar plakanın merkezine doğru yerleştirildikçe yapının kütle atalet momentinin azalmasından dolayı doğal frekansların da azaldığı görülmüştür (Şekil 4.25).



Şekil 4.26. İki kenarı ankastre, iki kenarı serbest CARALL D₃ plakanın mod şekilleri

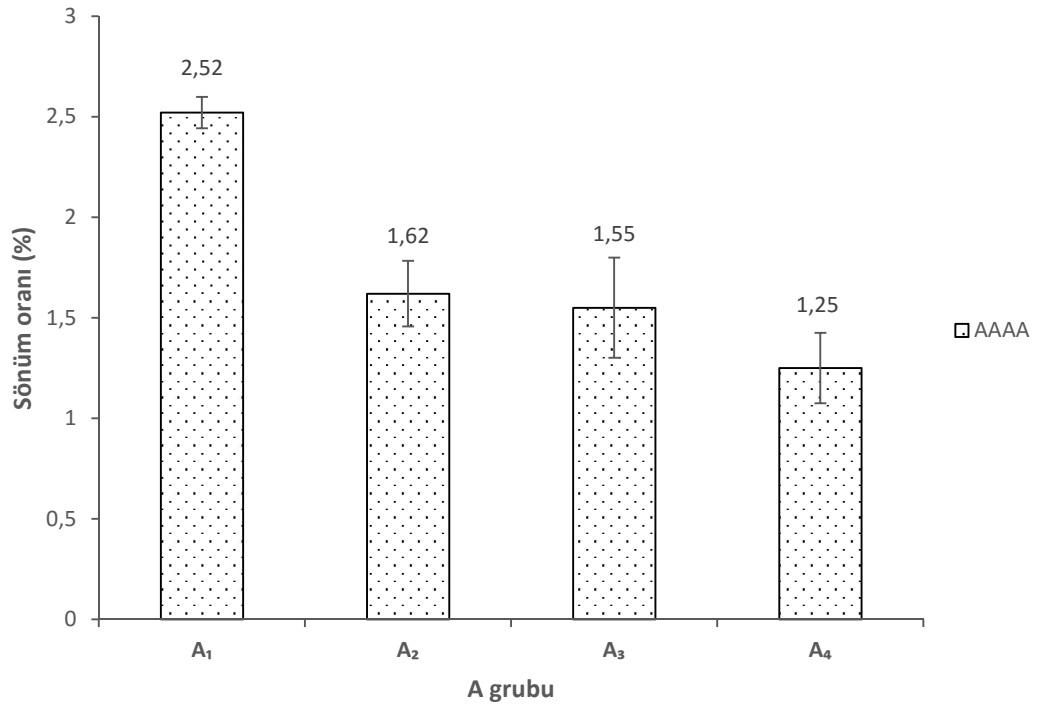
Şekil 4.26’da CARALL D₃ plakanın ASSA sınır şartı için ilk iki mod şekli görülmektedir.

Şekil 4.27’de dörtkenarı ankastre (AAAA) ve A konfigürasyonlarına sahip CARALL kompozit plakaların için tabaka dizilişlerindeki değişime bağlı olarak deneysel sönüm oranlarının değişimi (%) verilmiştir. Grafik incelendiğinde, yapı içerisinde karbon prepreg tabakaları yerine Al tabaka yerleştirilerek yapıdaki Al tabaka sayısı arttıkça sönüm oranları değerlerinin azaldığı görülmektedir. Özellikle bütün tabakaların cam prepreglerden oluştuğu A_1 dizilişinde sönüm oranı yüksek iken, yapı içerisine Al tabaka yerleştirildiği vakit sönüm oranlarının düştüğü görülmektedir.

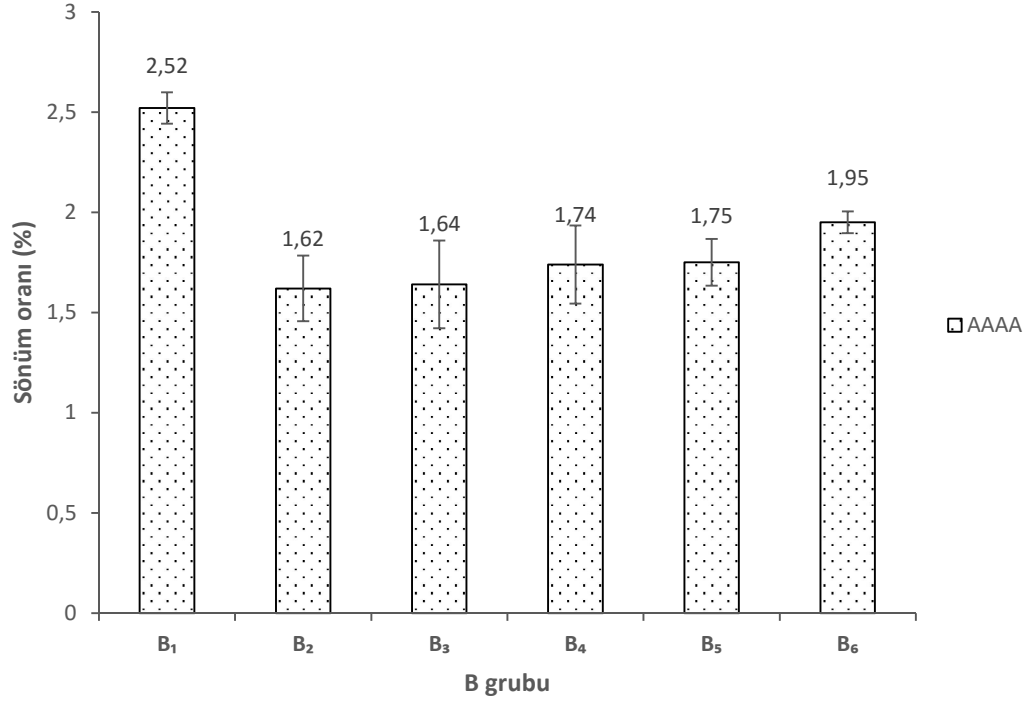
Bu durumun sebebi, yapı içerisindeki Al tabaka sayısı artışıyla beraber yapının enerji tüketim kapasitesinin azalmasından kaynaklanmaktadır (Liang *et al.* 2011).

Şekil 4.28’de CARALL kompozit plakaların dörtkenarı ankastre (AAAA) sınır şartında ve B grubu diziliş durumlarındaki deneysel sönüm oranları (%) verilmiştir. Al tabakasının yapının merkezine doğru yerleştirildiği B ve D konfigürasyonları için her üç sınır şartında da deneysel sönüm oranları ile ilgili net bir eğilim görülmemektedir (Çizelge 4.16 - Çizelge 4.18). Ancak genel olarak Al tabakalar yapının merkezinde yer aldığında, dış yüzeyde bulunduğu duruma göre plakanın sönüm oranlarının daha yüksek olduğu tespit edilmiştir (Şekil 4.28).

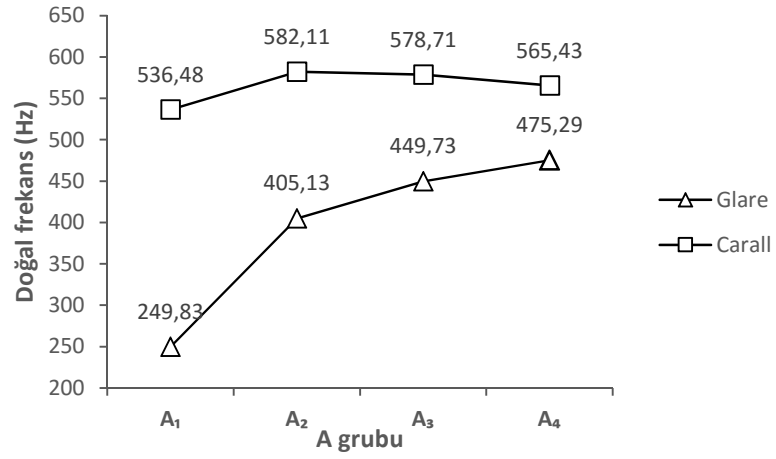
Plaka örneğin eğilme şeklinde deformasyona uğradığında, plakanın dış yüzeyleri iç katmana göre daha çok deformasyona uğramaktadır. Dolayısıyla dış yüzeyde karbon prepregler bulunduğuunda, daha fazla enerji tüketilmesine sebebiyet vermektedir.



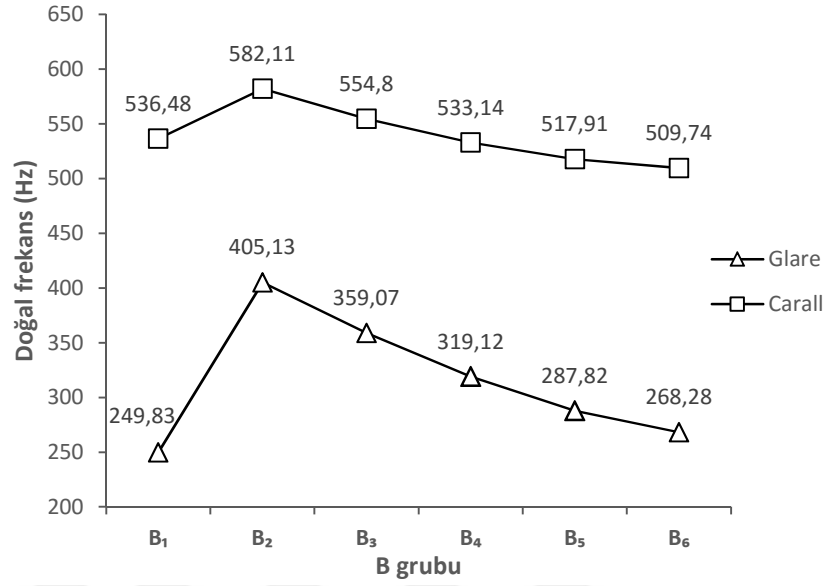
Şekil 4.27. A grubu dizilişleri için CARALL kompozit plakalara ait deneysel sönüm oranları



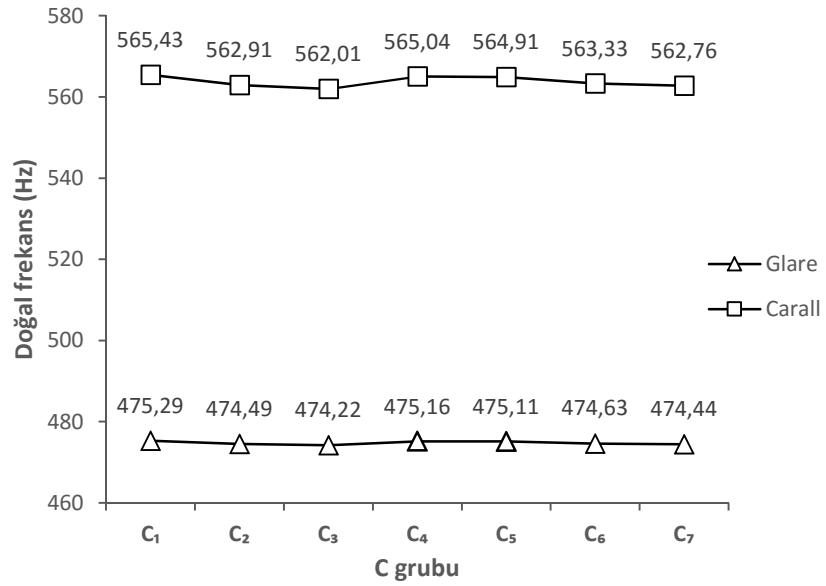
Şekil 4.28. B grubu dizilişleri için CARALL kompozit plakalara ait deneysel sönüm oranları



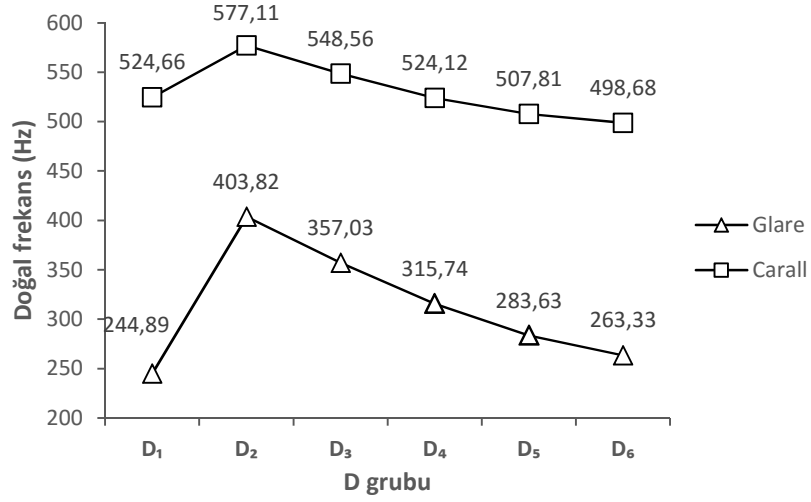
Şekil 4.29. GDQ metoduna göre GLARE ve CARALL kompozit plakaların A grubu dizilişlerindeki birinci doğal frekanslar (AAAA sınır şartı)



Şekil 4.30. GDQ metoduna göre GLARE ve CARALL kompozit plakaların B grubu dizilişlerindeki birinci doğal frekanslar (AAAA sınır şartı)



Şekil 4.31. GDQ metoduna göre GLARE ve CARALL kompozit plakaların C grubu dizilişlerindeki birinci doğal frekanslar (AAAA sınır şartı)



Şekil 4.32. GDQ metoduna göre GLARE ve CARALL kompozit plakaların D grubu dizilişlerindeki birinci doğal frekanslar (AAAA sınır şartı)

Dörtkenarı ankastre sınır şartına ve aynı tabaka dizilişine sahip GLARE ve CARALL kompozitler için birinci doğal frekansların değişimi, Şekil 4.29 - Şekil 4.32’de verilmiştir. Grafikler incelendiğinde, bütün tabaka diziliş durumları (A, B, C ve D grubu) için birinci doğal frekans değerlerinin CARALL tabakalı kompozitlerde, GLARE tabakalı kompozitlere göre daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu durumun sebebi, karbon prepregler cam prepreglere göre daha yüksek efektif elastisite modülüne ve daha düşük yoğunluğa sahiptir. Cam prepreg yerine karbon prepreg kullanıldığında, yapının yoğunluğu ve kütle atalet momenti azalmaktadır ve bu durum neticesinde de plakaların doğal frekansında artış meydana gelmektedir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, fiber metal tabakalı kompozit plakaların serbest titreşim analizi, diferansiyel *quadrature* metotları (DQ, GDQ, HDQ) ve ANSYS paket programı ile nümerik olarak ve ayrıca malzeme üretimi yapıp titreşim ölçüm seti yardımıyla da deneysel olarak gerçekleştirilmiştir. Öncelikle tabakalı kompozit plakanın titreşim hareketini ifade eden denklem, klasik plaka teorisi kullanılarak Newton'un hareket kanununa göre elde edilmiştir. Plakanın titreşimini ifade eden diferansiyel denklem, MATLAB ortamında DQ, GDQ, HDQ metotlarına dayalı kod yazılıp modellenerek çözülmüştür. Sunulan nümerik yöntemlerden elde edilen sonuçlar ile literatürdeki farklı çözüm yöntemlerinden elde edilmiş olan sonuçlar kıyaslanmış ve doğal frekans değerlerinin birbiriyle oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.

Fiber metal tabakalı kompozit olarak, cam fiber prepreg ile alüminyum levhadan oluşan (GLARE) yapı ve karbon fiber prepreg ile alüminyum levhadan oluşan (CARALL) yapı elâ alınmıştır. Malzemelerin üretimi sıcak presleme işlemi ile gerçekleştirilmiştir. Malzemelerin mekanik özellikleri çekme testlerinden belirlenerek MATLAB ve ANSYS paket programında oluşturulan modellerde kullanılmıştır. Serbest titreşim analizi üzerinde geometrik parametrelerin, malzeme özelliklerinin, sınır şartlarının etkileri hem diferansiyel *quadrature* metotları ile nümerik olarak hem de deneysel olarak araştırılmıştır. Sınır şartları olarak dört kenarı ankastre (AAAA), bir kenarı serbest üç kenarı ankastre (ASAA) ve iki kenarı ankastre diğer iki kenarı serbest (ASSA) şeklindeki durumlar incelenmiştir. DQ metotları, ANSYS paket programı ve deneysel yöntemden elde edilen birinci doğal frekans değerlerinin, birkaç numune türü dışında diğer bütün numune gruplarında oldukça birbirine yakın olduğu tespit edilmiştir. Böylelikle nümerik ve deneysel yöntem sonuçları kıyaslanarak modelin doğruluğu ortaya konulmuştur. Araştırılan konfigürasyonlar çerçevesinde elde edilen sonuçlar ve tespitler aşağıda özetlenmiştir.

- GLARE ve CARALL kompozit plakalar için bütün sınır şartlarında ve bütün tabaka diziliş durumları için GDQ metoduyla elde edilen birinci doğal frekanslara karşılık deneysel olarak elde edilen birinci doğal frekansların dağılımı incelenerek nümerik yöntem ile deneysel yöntem arasında doğrusal bir bağıntının mevcut olduğu görülmüştür. Böylelikle her iki FMT kompozit türünde de nümerik ve deneysel yöntem sonuçlarının birbiriyle oldukça uyumlu olduğu tespit edilmiştir.
- GLARE kompozit plakalarda, cam prepreg tabakalar yerine alüminyum tabakalar yerleştirilmesi suretiyle yapı içerisindeki alüminyum tabaka sayısı arttıkça doğal frekansların arttığı görülmüştür.
- Çapraz ve açılı tabakalı dizilişe sahip GLARE kompozitlerden, alüminyum tabakaların en dış tabakadan merkeze doğru yerleştirilmesiyle beraber doğal frekans değerlerinde azalma tespit edilmiştir.
- Fiber yönlenme açılarının doğal frekanslar üzerinde etkileri bakımından ele alınan GLARE kompozit plakalar için doğal frekanslarda gözle görülür bir değişim olmamıştır.
- CARALL kompozit plakalarda, bütün tabakalar karbon prepreglerden oluştuğu duruma göre alt ve üst tabakaların Al levhalardan oluştuğu dizilişte doğal frekanslarda bir artış görülmüştür. Fakat, karbon prepreg tabakalar yerine Al tabakalar yerleştirilerek yapı içerisindeki Al tabaka sayısının arttırılması durumunda birinci doğal frekans değerlerinin azaldığı sonucuna varılmıştır.
- Çapraz ve açılı tabakalı dizilişe sahip CARALL kompozit plakalarda, Al tabakalar karbon prepreg tabakaların yerine en dış yüzeyden plakanın merkezine doğru yerleştirildikçe yapının birinci doğal frekanslarında azalmaya sebebiyet vermiştir.

- Ele alınan CARALL kompozitlerde, ara katmanlarda bulunan karbon prepreglerin θ açısasal yönlenme durumlarındaki değişimine karşılık plakanın doğal frekanslarında çok büyük bir etkinin olmadığı görülmüştür.
- Çalışmada kullanılan FMT kompozit plakalarda, bütün tabaka diziliş durumları için en yüksek doğal frekans değerleri dört kenarı ankastre (AAAA) sınır şartında, en düşük doğal frekanslar ise iki kenarı serbest, iki kenarı ankastre sınır şartında elde edilmiştir.
- Aynı sınır şartına ve aynı tabaka dizilişine sahip GLARE ve CARALL kompozitler için birinci doğal frekans değerlerinin CARALL tabakalı kompozitlerde, GLARE tabakalı kompozitlere göre daha yüksek olduğu tespit edilmiştir.
- Çeşitli tabaka dizilişlerinin GLARE kompozit plakaların deneysel sönüm oranlarına etkisi incelendiğinde, yapı içerisindeki Al tabaka sayısı artırımının AAAA sınır şartında sönüm oranlarının azalmasına sebebiyet vermiştir. Özellikle bütün tabakaların cam prepreglerden oluştuğu A_1 dizilişine göre, yapı içerisinde 2, 4 ve 6 tabaka Al içeren sırasıyla A_2 , A_3 ve A_4 dizilişlerinde sönüm oranlarının düşük olduğu görülmüştür.
- CARALL kompozit plakaların AAAA sınır şartına sahip çeşitli tabaka diziliş durumlarındaki deneysel sönüm oranlarının değişimi incelendiğinde ise, yapı içerisinde karbon prepreg tabakaları yerine Al tabaka yerleştirilerek yapıdaki Al tabaka sayısı arttıkça sönüm oranları değerlerinin azaldığı görülmüştür.
- GLARE ve CARALL kompozitler için Al tabakalarının yapının merkezine doğru yerleştirildiği B ve D konfigürasyonlarında, Al tabakalar yapının merkezinde yer aldığı, dış yüzeyde bulunduğu duruma göre sönüm oranlarının daha yüksek olduğu tespit edilmiştir.

Yapılan çalışma ile fiber metal tabakalı kompozit plakaların serbest titreşim analizinin diferansiyel *quadrature* metotları ile nümerik olarak ve deneysel olarak incelenmesi hususunda literatürde çok az sayıda çalışma bulunması sebebiyle bu alandaki önemli bir eksikliğin giderilmesine çalışılmıştır. Geometrik parametrelerin, malzeme özelliklerinin ve sınır şartlarının plakaların titreşim karakteristiklerine olan etkileri araştırılmıştır. Böylelikle çalışma şartlarına en uygun malzemelerin seçilmesine ve gerçekleştirilecek tasarımlara katkı sağlanmaya çalışılmıştır.

5.2. Öneriler

- Kayma deformasyonlarının göz önünde bulunduran birinci mertebe veya yüksek mertebe kayma deformasyon teorilerine göre plakanın titreşim ifade denklemi elde edilebilir.
- Farklı plaka en/boy oranına sahip plakalar kullanılarak serbest titreşim analizine olan etkileri araştırılabilir.
- Farklı tabaka malzemelerinin (aramid, hibrit elyaf, farklı metal tabaka vb.) geometrik parametrelerin (tabaka sayısı, tabaka kalınlıkları, fiber yönlenmeleri, tabaka dizilişleri) ve farklı sınır şartlarının fiber metal tabakalı kompozit plakaların titreşim karakteristiklerine olan etkileri incelenebilir.
- Diferansiyel *quadrature* metoduna benzer olarak diferansiyel *quadrature* eleman metodu veya farklı bir nümerik yöntem kullanılarak fiber metal tabakalı kompozitlerin serbest titreşim analizi gerçekleştirilebilir.
- FMT kompozitlerin darbe davranışı incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Alderliesten, R. and Benedictus, R., 2008. Fiber/metal composite technology for future primary aircraft structures. *Journal of Aircraft*, 45 (4), 1182-1189.
- Alibeigloo, A. and Emtehani, A., 2015. Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plate using differential quadrature method. *Meccanica*, 50 (1), 61-76.
- Alibeigloo, A. and Shakeri, M., 2007. Elasticity solution for the free vibration analysis of laminated cylindrical panels using the differential quadrature method. *Composite Structures*, 81 (1), 105-113.
- Amir, S.M.M., Sultan, M., Jawaaid, M., Ariffin, A.H., Mohd, S., Salleh, K.A.M., Ishak, M.R. and Shah, A.U.M., 2019. Nondestructive testing method for Kevlar and natural fiber and their hybrid composites. *Durability and Life Prediction in Biocomposites, Fibre-Reinforced Composites and Hybrid Composites*. Elsevier, 367-388.
- Ansari, R., Hasrati, E., Shojaei, M.F., Gholami, R. and Shahabodini, A., 2015. Forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using a numerical strategy. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 69, 294-305.
- Ansys, I., 2018. ANSYS 18.1 reference manual.
- Aragh, B.S. and Yas, M., 2011. Effect of continuously grading fiber orientation face sheets on vibration of sandwich panels with FGM core. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53 (8), 628-638.
- Arani, A.G., Kiani, F. and Afshari, H., 2019. Free and forced vibration analysis of laminated functionally graded CNT-reinforced composite cylindrical panels. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 1099636219830787.
- Asadi, H. and Aghdam, M., 2014. Large amplitude vibration and post-buckling analysis of variable cross-section composite beams on nonlinear elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 79, 47-55.
- Asundi, A. and Choi, A.Y., 1997. Fiber metal laminates: an advanced material for future aircraft. *Journal of Materials Processing Technology*, 63 (1-3), 384-394.
- Atas, C., 2007. An experimental investigation on the impact response of fiberglass/aluminum composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26 (14), 1479-1491.
- Baccocchi, M., Eisenberger, M., Fantuzzi, N., Tornabene, F. and Viola, E., 2016. Vibration analysis of variable thickness plates and shells by the generalized differential quadrature method. *Composite Structures*, 156, 218-237.
- Barbero, E.J., 2017. Introduction to composite materials design. CRC press.
- Bellman, R. and Casti, J., 1971. Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34 (2), 235-238.
- Bellman, R., Kashef, B. and Casti, J., 1972. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Journal of computational physics*, 10 (1), 40-52.
- Bert, C.W. and Malik, M., 1996. Differential quadrature method in computational mechanics: a review.

- Botelho, E., Campos, A., De Barros, E., Pardini, L. and Rezende, M., 2005. Damping behavior of continuous fiber/metal composite materials by the free vibration method. *Composites Part B: Engineering*, 37 (2-3), 255-263.
- Botelho, E.C., Silva, R.A., Pardini, L.C. and Rezende, M.C., 2006. A review on the development and properties of continuous fiber/epoxy/aluminum hybrid composites for aircraft structures. *Materials Research*, 9 (3), 247-256.
- Burianek, D.A., Giannakopoulos, A. and Spearing, S.M., 2003. Modeling of facesheet crack growth in titanium-graphite hybrid laminates, Part I. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 (6), 775-798.
- Castrodeza, E.M., Abdala, M.R.S. and Bastian, F.L., 2006. Crack resistance curves of GLARE laminates by elastic compliance. *Engineering Fracture Mechanics*, 73 (16), 2292-2303.
- Chang, P.-Y., Yeh, P.-C. and Yang, J.-M., 2008. Fatigue crack initiation in hybrid boron/glass/aluminum fiber metal laminates. *Materials Science and Engineering: A*, 496 (1-2), 273-280.
- Chen, W. and Lü, C., 2005. 3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates with one pair of opposite edges simply supported. *Composite Structures*, 69 (1), 77-87.
- Cicco, D. and Taheri, F., 2018. Use of a Simple Non-Destructive Technique for Evaluation of the Elastic and Vibration Properties of Fiber-Reinforced and 3D Fiber-Metal Laminate Composites. *Fibers*, 6 (1), 14.
- Civalek, O. and Ülker, M., 2004. Harmonic differential quadrature (HDQ) for axisymmetric bending analysis of thin isotropic circular plates. *Structural Engineering and Mechanics*, 17 (1), 1-14.
- Civalek, Ö., 2004. Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. *Engineering Structures*, 26 (2), 171-186.
- Civalek, Ö., 2007. Three-dimensional vibration, buckling and bending analyses of thick rectangular plates based on discrete singular convolution method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49 (6), 752-765.
- Civalek, Ö., 2009. Fundamental frequency of isotropic and orthotropic rectangular plates with linearly varying thickness by discrete singular convolution method. *Applied Mathematical Modelling*, 33 (10), 3825-3835.
- Civalek, Ö., 2013. Nonlinear dynamic response of laminated plates resting on nonlinear elastic foundations by the discrete singular convolution-differential quadrature coupled approaches. *Composites Part B: Engineering*, 50, 171-179.
- Civalek, Ö., 2017. Vibration of laminated composite panels and curved plates with different types of FGM composite constituent. *Composites Part B: Engineering*, 122, 89-108.
- Civalek, Ö. and Baltacıoğlu, A.K., 2019. Free vibration analysis of laminated and FGM composite annular sector plates. *Composites Part B: Engineering*, 157, 182-194.
- Civalek, Ö. ve Çatal, S., 2006. Genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ile bazı sınır değer problemlerinin sayısal çözümü üzerine. *Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 8 (1), 19-37.
- Civalek, Ö. ve Demir, Ç., 2009. Elastik zemine oturan kirişlerin ayrık tekil konvolüsyon ve harmonik diferansiyel quadrature yöntemleriyle analizi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 11 (1), 56-71.

- Cortes, P. and Cantwell, W., 2006. The prediction of tensile failure in titanium-based thermoplastic fibre–metal laminates. *Composites Science and Technology*, 66 (13), 2306-2316.
- Crouch, T.P., 2009. Investigation of the Structural Behaviour of Fibre-Reinforced Metal Laminates by Finite Element Analysis. *The UNSW Canberra at ADFA Journal of Undergraduate Engineering Research*, 2 (2).
- Daneshmehr, A., Nateghi, A. and Inman, D., 2013. Free vibration analysis of cracked composite beams subjected to coupled bending–torsion loads based on a first order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 37 (24), 10074-10091.
- Davar, A., Khalili, S. and Fard, K.M., 2014. Assessment of different higher order theories for low-velocity impact analysis of fibre-metal laminate cylindrical shells. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 228 (3), 160-189.
- Demir, E., 2009. Lineer olmayan titreşim problemlerinin çözümünde birleşim (diferensiyel quadrature ve simülasyon) metodu.
- Demir, O., Balkan, D., Peker, R.C., Metin, M. and Arikoglu, A., 2018. Vibration analysis of curved composite sandwich beams with viscoelastic core by using differential quadrature method. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 1099636218767491.
- Du, H., Lim, M. and Lin, R., 1994. Application of generalized differential quadrature method to structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 (11), 1881-1896.
- Ersoy, H., Mercan, K. and Civalek, Ö., 2018. Frequencies of FGM shells and annular plates by the methods of discrete singular convolution and differential quadrature methods. *Composite Structures*, 183, 7-20.
- Fantuzzi, N., Tornabene, F. and Viola, E., 2014. Generalized differential quadrature finite element method for vibration analysis of arbitrarily shaped membranes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 79, 216-251.
- Farsa, J., 1992. Development of a differential quadrature technique for the fundamental frequency analysis of tapered, orthotropic, anisotropic and laminated thin plates.
- Fu, T., Chen, Z., Yu, H., Wang, Z. and Liu, X., 2019. Mechanical behavior of laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates resting on elastic foundations in thermal environments. *Journal of composite materials*, 53 (9), 1159-1179.
- Fu, Y.-M. and Tao, C., 2016. Nonlinear dynamic responses of viscoelastic fiber–metal-laminated beams under the thermal shock. *Journal of Engineering Mathematics*, 98 (1), 113-128.
- Fu, Y., Chen, Y. and Zhong, J., 2014. Analysis of nonlinear dynamic response for delaminated fiber–metal laminated beam under unsteady temperature field. *Journal of Sound and Vibration*, 333 (22), 5803-5816.
- Ganapathi, M., Kalyani, A., Mondal, B. and Prakash, T., 2009. Free vibration analysis of simply supported composite laminated panels. *Composite Structures*, 90 (1), 100-103.
- Ghasemi, A.R. and Mohandes, M., 2018. Free vibration analysis of micro and nano fiber-metal laminates circular cylindrical shells based on modified couple stress theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 1-12.

- Ghasemi, A.R. and Mohandes, M., 2019. Free vibration analysis of rotating fiber–metal laminate circular cylindrical shells. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 21 (3), 1009-1031.
- Ghasemi, F.A., Ansari, R. and Paskiabi, R.B., 2013a. Free vibration analysis of truncated conical fiber metal laminate (FML) shells. *Mechanics & Industry*, 14 (5), 367-382.
- Ghasemi, F.A., Paknejad, R. and Fard, K.M., 2013b. Effects of geometrical and material parameters on free vibration analysis of fiber metal laminated plates. *Mechanics & Industry*, 14 (4), 229-238.
- Ghashochi-Bargh, H. and Sadr, M.H., 2017. Vibration Optimization of fiber-metal laminated composite shallow shell panels using an adaptive PSO algorithm. *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 4 (2), 99-110.
- Gibson, R.F., 2011. *Principles of Composite Material Mechanics*, Third Edition. Taylor & Francis.
- Haftchenari, H., Darvizeh, M., Darvizeh, A., Ansari, R. and Sharma, C., 2007. Dynamic analysis of composite cylindrical shells using differential quadrature method (DQM). *Composite Structures*, 78 (2), 292-298.
- Han, B., Hui, W.-W., Zhang, Q.-C., Zhao, Z.-Y., Jin, F., Zhang, Q., Lu, T.J. and Lu, B.-H., 2018. A refined quasi-3D zigzag beam theory for free vibration and stability analysis of multilayered composite beams subjected to thermomechanical loading. *Composite Structures*, 204, 620-633.
- Hanten, L., Giunta, G., Belouettar, S. and Salnikov, V., 2018. Free Vibration Analysis of Fibre-Metal Laminated Beams via Hierarchical One-Dimensional Models. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018.
- Harras, B., Benamar, R. and White, R., 2002. Experimental and theoretical investigation of the linear and non-linear dynamic behaviour of a glare 3 hybrid composite panel. *Journal of Sound and Vibration*, 252 (2), 281-315.
- Heylen, W., Lammens, S. and Sas, P., 1997. *Modal analysis theory and testing*, 200. Katholieke Universiteit Leuven Leuven, Belgium.
- Homan, J., 2006. Fatigue initiation in fibre metal laminates. *International Journal of Fatigue*, 28 (4), 366-374.
- Jang, S.K., 1987. *Application of differential quadrature to the analysis of structural components*, University of Oklahoma.
- Jang, S.K., Bert, C.W. and Striz, A.G., 1989. Application of differential quadrature to static analysis of structural components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 (3), 561-577.
- Jodaei, A., Jalal, M. and Yas, M., 2012. Free vibration analysis of functionally graded annular plates by state-space based differential quadrature method and comparative modeling by ANN. *Composites Part B: Engineering*, 43 (2), 340-353.
- Jones, R.M., 2014. *Mechanics of composite materials*. CRC press.
- Karami, G. and Malekzadeh, P., 2002. A new differential quadrature methodology for beam analysis and the associated differential quadrature element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 (32), 3509-3526.
- Karami, G., Malekzadeh, P. and Mohebpour, S., 2006. DQM free vibration analysis of moderately thick symmetric laminated plates with elastically restrained edges. *Composite Structures*, 74 (1), 115-125.

- Kaw, A.K., 2005. Mechanics of composite materials. CRC press.
- Kawai, M. and Hachinohe, A., 2002. Two-stress level fatigue of unidirectional fiber-metal hybrid composite: GLARE 2. *International Journal of Fatigue*, 24 (5), 567-580.
- Khalili, S., Malekzadeh, K., Davar, A. and Mahajan, P., 2010. Dynamic response of pre-stressed fibre metal laminate (FML) circular cylindrical shells subjected to lateral pressure pulse loads. *Composite Structures*, 92 (6), 1308-1317.
- Khalili, S., Mittal, R. and Kalibar, S.G., 2005. A study of the mechanical properties of steel/aluminium/GRP laminates. *Materials Science and Engineering: A*, 412 (1-2), 137-140.
- Kolar, R., 2002. Dynamic characteristics of layered metal-fiber composites including transverse shear deformation, *Smart Materials II*. International Society for Optics and Photonics, pp. 270-278.
- Kollar, L.P. and Springer, G.S., 2003. Mechanics of composite structures. Cambridge university press.
- Krishnakumar, S., 1994. Fiber metal laminates—the synthesis of metals and composites. *Material And Manufacturing Process*, 9 (2), 295-354.
- Lanhe, W., Hua, L. and Daobin, W., 2005. Vibration analysis of generally laminated composite plates by the moving least squares differential quadrature method. *Composite Structures*, 68 (3), 319-330.
- Lee, S.M., 1992. Handbook of composite reinforcements. John Wiley & Sons.
- Leissa, A.W. and Narita, Y., 1989. Vibration studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates. *Composite Structures*, 12 (2), 113-132.
- Liang, Z., Lee, G.C., Dargush, G.F. and Song, J., 2011. Structural damping: applications in seismic response modification. CRC press.
- Lin, C. and Kao, P., 1996. Fatigue delamination growth in carbon fibre-reinforced aluminium laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 27 (1), 9-15.
- Lin, C., Kao, P. and Yang, F., 1991. Fatigue behaviour of carbon fibre-reinforced aluminium laminates. *Composites*, 22 (2), 135-141.
- Lin, R., Lim, M. and Du, H., 1994. Deflection of plates with nonlinear boundary supports using generalized differential quadrature. *Computers & structures*, 53 (4), 993-999.
- Liu, J. and Liaw, B., 2002. Vibration and impulse responses of fiber-metal laminated beams, SPIE proceedings series. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers.
- Lü, C., Chen, W. and Shao, J., 2008. Semi-analytical three-dimensional elasticity solutions for generally laminated composite plates. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 27 (5), 899-917.
- Malekzadeh, K., Khalili, S.M.R., Davar, A. and Mahajan, P., 2010. Transient dynamic response of clamped-free hybrid composite circular cylindrical shells. *Applied Composite Materials*, 17 (2), 243-257.
- Malekzadeh, P., 2007. A differential quadrature nonlinear free vibration analysis of laminated composite skew thin plates. *Thin-walled structures*, 45 (2), 237-250.
- Malekzadeh, P., 2008. Differential quadrature large amplitude free vibration analysis of laminated skew plates based on FSDT. *Composite Structures*, 83 (2), 189-200.

- Malekzadeh, P. and Zarei, A., 2014. Free vibration of quadrilateral laminated plates with carbon nanotube reinforced composite layers. *Thin-walled structures*, 82, 221-232.
- Malik, M., 1995. Differential quadrature method in computational mechanics: New developments and applications.
- Malik, M. and Bert, C., 1996. Implementing multiple boundary conditions in the DQ solution of higher-order PDEs: application to free vibration of plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 (7), 1237-1258.
- Mazumdar, S., 2001. Composites manufacturing: materials, product, and process engineering. CrC press.
- Merzuki, M., Rejab, M., Sani, M., Zhang, B., Quanjing, M. and Rafizi, W., 2019. Investigation of modal analysis on glass fiber laminate aluminium reinforced polymer: An experimental study, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing, pp. 012065.
- Mishra, I. and Sahu, S.K., 2012. An experimental approach to free vibration response of woven fiber composite plates under free-free boundary condition. *International Journal of Advanced Technology in Civil Engineering*, 1 (2), 67-72.
- Mohammad-Abadi, M. and Daneshmehr, A., 2015. Modified couple stress theory applied to dynamic analysis of composite laminated beams by considering different beam theories. *International Journal of Engineering Science*, 87, 83-102.
- Mohandes, M. and Ghasemi, A.R., 2019. A new approach to reinforce the fiber of nanocomposite reinforced by CNTs to analyze free vibration of hybrid laminated cylindrical shell using beam modal function method. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 73, 224-234.
- Mohandes, M., Ghasemi, A.R., Irani-Rahagi, M., Torabi, K. and Taheri-Behrooz, F., 2018. Development of beam modal function for free vibration analysis of FML circular cylindrical shells. *Journal of Vibration and Control*, 24 (14), 3026-3035.
- Moraveji Tabasi, H., Eskandari Jam, J., Malekzadeh Fard, K. and Heydari Beni, M., 2020. Buckling and Free Vibration Analysis of Fiber Metal-laminated Plates Resting on Partial Elastic Foundation. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 6 (1), 37-51.
- Moussavi-Torshizi, S.E., Dariushi, S., Sadighi, M. and Safarpour, P., 2010. A study on tensile properties of a novel fiber/metal laminates. *Materials Science and Engineering: A*, 527 (18-19), 4920-4925.
- Nasihatgozar, M. and Khalili, S., 2017. Free vibration of a thick sandwich plate using higher order shear deformation theory and DQM for different boundary conditions. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 3 (1), 16-24.
- Prasad, E. and Sahu, S., 2017. Free vibration analysis of fiber metal laminated plates.
- Prasad, E. and Sahu, S., 2018. Vibration analysis of woven fiber metal laminated plates—experimental and numerical studies. *International journal of structural stability and dynamics*, 18 (11), 1850144.
- Quan, J. and Chang, C.-T., 1989. New insights in solving distributed system equations by the quadrature method—I. Analysis. *Computers & Chemical Engineering*, 13 (7), 779-788.
- Rahimi, G.H., Gazor, M.S., Hemmatnezhad, M. and Toorani, H., 2014. Free vibration analysis of fiber metal laminate annular plate by state-space based differential quadrature method. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2014.

- Ravishankar, H., Rengarajan, R., Devarajan, K. and Kaimal, B., 2016. Free vibration behaviour of fiber metal laminates, hybrid composites, and functionally graded beams using finite element analysis. *International Journal of Acoustics and Vibration*, 21 (4), 418-428.
- Reddy, J.N., 2003. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press.
- Remmers, J. and De Borst, R., 2001. Delamination buckling of fibre-metal laminates. *Composites Science and Technology*, 61 (15), 2207-2213.
- Rufe, P.D., 2013. *Fundamentals of manufacturing*. Society of Manufacturing Engineers.
- Sadighi, M., Alderliesten, R. and Benedictus, R., 2012. Impact resistance of fiber-metal laminates: A review. *International Journal of Impact Engineering*, 49, 77-90.
- Sadr, M.H., Ghashochi Bargh, H., Pourzand, H. and Karimi, M., 2011. Optimum Vibration Design of Fiber Metal Laminated Panels by Particle Swarm Optimization Algorithm, ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, pp. 805-811.
- Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M., 2015. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results. *Composite Structures*, 129, 177-201.
- Schijve, J., 1993. Development of fibre-metal laminates, ARALL and GLARE, new fatigue resistant materials. Delft University of Technology, Faculty of Aerospace Engineering, Report LR-715.
- Secgin, A., Atas, C. and Sarigül, A.S., 2009. The effects of composite plate design parameters on linear vibrations by discrete singular convolution method. *Journal of composite materials*, 43 (24), 2963-2986.
- Shao, X., Fu, Y. and Chen, Y., 2015. Nonlinear dynamic response and active control of fiber metal laminated plates with piezoelectric actuators and sensors in unsteady temperature field. *Smart Materials and Structures*, 24 (5), 055023.
- Shim, D., Alderliesten, R., Spearing, S. and Burianek, D., 2003. Fatigue crack growth prediction in GLARE hybrid laminates. *Composites Science and Technology*, 63 (12), 1759-1767.
- Shooshtari, A. and Razavi, S., 2010. A closed form solution for linear and nonlinear free vibrations of composite and fiber metal laminated rectangular plates. *Composite Structures*, 92 (11), 2663-2675.
- Shooshtari, A. and Razavi, S., 2014. Nonlinear free and forced vibrations of anti-symmetric angle-ply hybrid laminated rectangular plates. *Journal of composite materials*, 48 (9), 1091-1111.
- Shu, C., 2012. *Differential quadrature and its application in engineering*. Springer Science & Business Media.
- Shu, C. and Chew, Y., 1997. Fourier expansion-based differential quadrature and its application to Helmholtz eigenvalue problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13 (8), 643-653.
- Shu, C. and Du, H., 1997. Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 34 (7), 819-835.

- Shu, C. and Richards, B.E., 1992. Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 15 (7), 791-798.
- Shu, C. and Xue, H., 1997. Explicit computation of weighting coefficients in the harmonic differential quadrature. Elsevier.
- Siddiqi, Z.A., 1996. Analysis of interacting subdomains in structural mechanics problems by the differential quadrature method.
- Sinmazçelik, T., Avcu, E., Bora, M.Ö. and Çoban, O., 2011. A review: Fibre metal laminates, background, bonding types and applied test methods. *Materials & Design*, 32 (7), 3671-3685.
- Srinivasa, C.V., Suresh, Y.J. and Kumar, W.P., 2014. Experimental and finite element studies on free vibration of skew plates. *International Journal of Advanced Structural Engineering (IJASE)*, 6 (1), 48.
- Striz, A., Wang, X. and Bert, C., 1995. Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica*, 111 (1-2), 85-94.
- Sun, C., Dicken, A. and Wu, H., 1993. Characterization of impact damage in ARALL laminates. *Composites Science and Technology*, 49 (2), 139-144.
- Şahin, Y., 2000. Kompozit malzemelere giriş. Gazi kitabevi.
- Şen, I., Alderliesten, R. and Benedictus, R., 2015. Lay-up optimisation of fibre metal laminates based on fatigue crack propagation and residual strength. *Composite Structures*, 124, 77-87.
- Tao, C., Fu, Y.-M. and Dai, H.-L., 2016. Nonlinear dynamic analysis of fiber metal laminated beams subjected to moving loads in thermal environment. *Composite Structures*, 140, 410-416.
- Tao, C., Fu, Y. and Dai, T., 2017. Dynamic analysis for cracked fiber-metal laminated beams carrying moving loads and its application for wavelet based crack detection. *Composite Structures*, 159, 463-470.
- Thai, H.-T. and Kim, S.-E., 2010. Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52 (4), 626-633.
- Thambiratnam, D. and Zhuge, Y., 1996. Free vibration analysis of beams on elastic foundation. *Computers & structures*, 60 (6), 971-980.
- Tornabene, F., Baccocchi, M., Fantuzzi, N. and Reddy, J., 2019. Multiscale approach for three-phase CNT/polymer/fiber laminated nanocomposite structures. *Polymer composites*, 40 (S1), E102-E126.
- Tornabene, F., Fantuzzi, N. and Baccocchi, M., 2014. The local GDQ method applied to general higher-order theories of doubly-curved laminated composite shells and panels: the free vibration analysis. *Composite Structures*, 116, 637-660.
- Tornabene, F., Fantuzzi, N. and Baccocchi, M., 2016a. The local GDQ method for the natural frequencies of doubly-curved shells with variable thickness: a general formulation. *Composites Part B: Engineering*, 92, 265-289.
- Tornabene, F., Fantuzzi, N., Baccocchi, M. and Reddy, J., 2017. An equivalent layer-wise approach for the free vibration analysis of thick and thin laminated and sandwich shells. *Applied Sciences*, 7 (1), 17.

- Tornabene, F., Fantuzzi, N., Baccocchi, M. and Viola, E., 2016b. Effect of agglomeration on the natural frequencies of functionally graded carbon nanotube-reinforced laminated composite doubly-curved shells. *Composites Part B: Engineering*, 89, 187-218.
- Vermeeren, C., 2003. An historic overview of the development of fibre metal laminates. *Applied Composite Materials*, 10 (4-5), 189-205.
- Viola, E., Tornabene, F. and Fantuzzi, N., 2013. Generalized differential quadrature finite element method for cracked composite structures of arbitrary shape. *Composite Structures*, 106, 815-834.
- Vlot, A. and Gunnink, J.W., 2011. *Fibre metal laminates: an introduction*. Springer Science & Business Media.
- Vlot, A., Vogelesang, L. and De Vries, T., 1999. Towards application of fibre metal laminates in large aircraft. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 71 (6), 558-570.
- Vogelesang, L.B. and Vlot, A., 2000. Development of fibre metal laminates for advanced aerospace structures. *Journal of Materials Processing Technology*, 103 (1), 1-5.
- Wang, C., Reddy, J.N. and Lee, K., 2000. *Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions*. Elsevier.
- Wang, X., 2015. *Differential quadrature and differential quadrature based element methods: theory and applications*. Butterworth-Heinemann.
- Wang, X. and Bert, C., 1993. A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates. *Journal of Sound Vibration*, 162, 566-572.
- Xia, Y., Wang, Y., Zhou, Y. and Jeelani, S., 2007. Effect of strain rate on tensile behavior of carbon fiber reinforced aluminum laminates. *Materials Letters*, 61 (1), 213-215.
- Yas, M. and Aragh, B.S., 2011. Elasticity solution for free vibration analysis of four-parameter functionally graded fiber orientation cylindrical panels using differential quadrature method. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 30 (5), 631-638.
- Yas, M. and Samadi, N., 2012. Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 98, 119-128.
- Zhen, W. and Wanji, C., 2006. Free vibration of laminated composite and sandwich plates using global-local higher-order theory. *Journal of Sound and Vibration*, 298 (1-2), 333-349.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Kırıkkale'nin Keskin ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini doğduğu ilçede, lise öğrenimini ise Kırıkkale'de tamamladı. 2009 yılında Kırıkkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. Aynı zamanda çift anadal programıyla 2007 yılında başladığı Endüstri Mühendisliği Bölümü'nden ise 2010 yılında mezun oldu. 2009 yılında Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda başladığı Yüksek Lisans öğreniminin 2012 yılında mezun oldu. 2013 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Makine Teorisi ve Dinamiği Bilim Dalı'nda Doktora öğrenimine başladı.

2011 yılında Araştırma Görevlisi olarak göreve başladığı Bayburt Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde halen görevini sürdürmekte ve mekanik titreşimler alanındaki çalışmalarına devam etmektedir.

Tez Kapsamındaki yayınları:

- Maraş, S., Yaman, M., Şansveren, M.F., and Reyhan, S.K., 2018. Free Vibration Analysis of Fiber Metal Laminated Straight Beam. Open Chemistry, 16(1), 944-948.
- Maraş, S., Yaman, M., 2017. Fiber Metal Lmainatların Dinamik Analizi. 2nd International Conference on Advanced Engineering Technologies (sözlü sunum-Yayın No:4073679)
- Maraş, S., Şakar, G., 2016.Free Vibration Analysis of Fiber Metal Laminated Curved Beam. 1st International Mediterranean Science and Engineering Congress. (sözlü sunum-Yayın No:4221068)