



**YARI-TANJANT DEMETTE BAZI POLİNOM
YAPILAR ÜZERİNE**

İmran GÜNEŞ

Danışman: Prof. Dr. Kürşat AKBULUT

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2025

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YARI –TANJANT DEMETTE BAZI POLİNOM YAPILAR ÜZERİNE
(On Some Polynomial Structures in the Semi -Tangent Bundle)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İmran GÜNEŞ

Danışman: Prof. Dr. Kürşat AKBULUT

Erzurum
Temmuz, 2025

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

İmran Güneş tarafından hazırlanan “Yarı –Tanjant Demete Bazı Polinom Yapılar Üzerine” başlıklı çalışması 16/07/2025 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Geomeri Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. ARİF SALİMOV
Bakü Devlet Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Danışman: Prof. Dr. KÜRŞAT AKBULUT
Atatürk Üniveristesi

Aslı ıslak imzalıdır

Jüri Üyesi: Prof. Dr. FURKAN YILDIRIM
Atatürk Üniveristesi

Aslı ıslak imzalıdır

Enstitü Yönetim
Kurulunun 16/07/2025
tarih ve sayılı
kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Alper NUHOĞLU

Enstitü Müdürü

Aslı ıslak imzalıdır

Bu tez çalışması, 122F131 numaralı Tübitak 1001 projesi kapsamında desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Prof. Dr. Kürşat AKBULUT danışmanlığında sunulan “Yarı –Tanjant Demete Bazı Polinom Yapılar Üzerine” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	10	30
Kuramsal Temeller	30	30
Materyal ve Yöntem	4	35
Araştırma Bulguları ve Tartışma	16	20
Sonuç ve Öneriler	3	20
Tezin Geneli	14	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
İmran GÜNEŞ	Prof. Dr. Kürşat AKBULUT
16.7.2025	16.7.2025
İmza: Aslı ıslak imzalıdır	İmza: Aslı ıslak imzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ’de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/....../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesi sürecinde hiçbir konuda desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Kürşat AKBULUT'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve desteklerini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Furkan YILDIRIM'a teşekkürlerimi sunarım. Yine bu süreçteki yardımlarından dolayı Sayın Prof Dr. Arif SALİMOV'a teşekkürü borç bilirim.

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından *“1001- Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı”* kapsamında 122F131 numaralı araştırma projesi ile desteklenmiştir.

İmran GÜNEŞ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARI-TANJANT DEMETTE BAZI POLİNOM YAPILAR ÜZERİNE

İmran GÜNEŞ

Danışman: Prof. Dr. Kürşat AKBULUT

Amaç: Bu çalışmanın amacı, ilk olarak, yarı- tanjant demette almost kontakt, almost parakontakt ve almost product yapıları incelemek daha sonra bu yapıların yarı tanjant demette izdüşümlü vektör alanlarının tam, dikey ve yatay liftlerine göre Lie türevlerini araştırmaktır. Bununla birlikte, yine yarı-tanjant demette bu polinom yapılara göre vektör alanlarının tam, dikey ve yatay liftlerinin holomorfluk ve infinitesimal otomorfizm olma şartları araştırılmıştır.

Yöntem: Bu tezde, genel tensör hesaplamaları ve yarı-tanjant demet geometrisi araştırma metot ve yöntemi olarak kullanılmıştır.

Bulgular: Bu tezde ilk olarak, tanjant demetten farklı bir demet yapısına sahip olan yarı-tanjant demette, almost kontakt ve almost parakontakt yapılar incelendi. Daha sonra yarı- tanjant demette vektör alanlarının tam, dikey ve yatay liftlerine göre almost kontakt ve almost parakontakt yapıların Lie türevlerini incelenmiştir. Bununla birlikte yarı-tanjant demette bu polinom yapılara göre vektör alanlarının tam, dikey ve yatay liftlerinin holomorf olma şartı araştırılmıştır. Son olarak yarı-tanjant demette bu polinom yapılara göre vektör alanlarının tam, dikey ve yatay liftlerinin infinitesimal otomorfizm olma şartları araştırılmıştır.

Sonuç: Bu çalışma ile yarı-tanjant demet teorisinin kuramsal alt yapısına katkı sunulmuş ve bu kapsamda ileride ilgili konuda yapılacak çalışmalara metodjik ve yapısal destek sağlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tam lift , liner koneksiyon, pull-back demeti, yarı-tanjant demet, lie türevi, almost kontakt yapı, almost parakontakt yapı, infinitesimal otomorfizm.

2025, 43 sayfa

ABSTRACT

MASTER THESIS

ON SOME POLYNOMIAL STRUCTURES IN THE SEMI-TANGENT BUNDLE

İmran GÜNEŞ

Supervisor: Prof. Kürşat AKBULUT

Purpose: The goal of this study is first to examine almost contact, almost paracontact and almost product structures in the semi-tangent bundle and then to investigate the Lie derivatives of these structures with respect to the complete, vertical and horizontal lifts of projectable vector fields in the semi-tangent bundle. In addition, the conditions for holomorphism and infinitesimal automorphism of the complete, vertical and horizontal lifts of vector fields with respect to these polynomial structures in the semi-tangent bundle are investigated.

Method: In this thesis, general tensor calculations and geometry of semi-tangent bundle are used as research methods.

Findings: In this thesis, firstly, almost contact and almost paracontact structures were investigated in semi-tangent bundle, which has a bundle structure different from tangent bundle. Then, Lie derivatives of almost contact and almost paracontact structures were investigated with respect to complete, vertical and horizontal lifts of vector fields in semi-tangent bundle. In addition, the condition of holomorphism of complete, vertical and horizontal lifts of vector fields with respect to these polynomial structures in semi-tangent bundle was investigated. Finally, the conditions of infinitesimal automorphism of complete, vertical and horizontal lifts of vector fields with respect to these polynomial structures in semi-tangent bundle were investigated.

Conclusion: This study has contributed to the theoretical structure of semi-tangent bundle theory and in this context, methodological and structural support has been provided for future studies on the subject.

Keywords: Complete lift, pull-back bundle, polynomial structure, semi-tangent bundle, almost contact structure, lie derivation, almost product structure, infinitesimal automorphism.

2025, 43 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	3
MATERYAL VE YÖNTEM	8
Yarı -Tanjant Demet	10
Yarı-Tanjant Demette Liftler	12
Fonksiyonların Dikey Lifti.....	12
Vektör Alanlarının Dikey Lifti	12
Kovektör Alanlarının Dikey Lifti.....	12
Afinor Alanlarının Dikey Lifti	13
Fonksiyonların Tam Lifti	13
Vektör Alanlarının Tam Lifti	13
Kovektör Alanlarının Tam Lifti	13
Afinor Alanlarının Tam Lifti	14
γ – operatörü	14
ARAŞTIRMA VE BULGULAR.....	22
SONUÇ.....	30
KAYNAKÇA	31
ÖZGEÇMİŞ.....	33

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Diferensiyellenebilir atlas	4
--	---



SİMGELER DİZİNİ

S_{ij}^h	Burulma Tensörü
∇	Burulmasız Afın Konneksiyon
$t(B_m)$	B_m Üzerindeki Yarı-tanjant Demet
Γ_{ij}^h	Cristoffel Sembolü
ω	Dejenere Simplektik Yapı
vv	Dikey Lift
R_{ijk}^h	Eğrilik Tensörü
γ	Gama Operatörü
F	İzdüşümlü Afınor Alanları
X	İzdüşümlü Vektör Alanları
$T(M_n)$	M_n Üzerindeki Tanjant Demet
g	Pseudo-Riemannian Metriği
$\overset{C}{\otimes}$	Pür Çarpım
π	Tabii İzdüşüm
cc	Tam Lift
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
HH	Yatay Lift

GİRİŞ

Diferansiyel geometri, geometrik hesapları anlamada integral alma metodlarını, tensör analizi ve diferansiyel alma tekniklerini kullanan matematiğin önemli bir alt disiplini. Temelleri 17 yy. Carl Friedrich Gauss tarafından atılan çok sayıda yapılan çalışmalarla güncelliğini muhafaza eden Diferansiyel Geometrinin öncelikli konusu Öklid uzayında yüzeyler ve eğriler olmuştur. Gauss, eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyel geometri alanına önemli katkılar sunmuş ve yaptığı çalışmalar diferansiyel geometrinin temellerini oluşturmuştur. Bu bağlamda Gauss'un "*Eğriler ve Yüzeyler Üzerine Genel Araştırmalar*" isimli çalışması bu alanın öncü çalışması olmuştur.

Yüzeylerin dahili geometrisi fikri Gauss tarafından 1827 de ilk olarak ortaya koyulup yüzey üzerinde tanımlanan eğrilerin bu kapsamda birer dahili geometri problemi olduğunu belirtilmiştir. Bununla birlikte aynı yüzyılda Rus matematikçi Lobachevskii, Euclid dışı geometrilerin de varlığını ortaya koymuştur.

Yine 1851 de Gauss'un öğrencisi olan Riemannian, kendi ismiyle bilinen Riemannian Geometrisi fikrini ortaya koymuş ve bu kapsamda teorik çalışmalar yapmıştır. İlgili teori Relativite ve Mekanik teorisinde geniş bir uygulama alanları bulmuştur.

Diferansiyel geometride lokal koordinatlarla hesaplama teknikleri oldukça sık kullanılmaktadır. Bu teknikleri anlama ve kullanmada karşılaştığımız en önemli geometrik obje "tensör" kavramıdır. Diferansiyel geometride tensör kavramını ilk olarak 1846'da William Rowan Hamilton tarafından literature kazandırılmış ancak modern kullanımı 1898'de Woldemar Voigt tarafından yapılmıştır. Daha sonraları bu kavram, 1890'lı yıllarda, Gregorio Ricci-Curbastro ve öğrencisi Levi-Civita tarafından "mutlak diferansiyel hesap yöntemleri ve uygulamaları" adıyla yapılan çalışmalarla geliştirilmiş bu ise eğri ve yüzeyleri lokal olarak (koordinatlarla) inceleme imkanı sunmuştur.

Diferansiyel geometride tensör kavramının doğuşu beraberinde birçok önemli diferansiyel geometrik kavramların tanımlanmasına olanak sağlamıştır. Bu kavramlardan bazıları; vektör alanı, kovektör alanı ve tensör alanı kavramlarıdır. Uzayda her bir noktaya sırasıyla, bir vektör veya bir kovektör karşı koyma kuralı olarak tanımlanan vektör alanına veya kovektör alanının genellenmesi olan tensör alanı, manifoldun üzerindeki her bir noktaya bir

tensör karşılık getiren dönüşüm olarak tanımlanmaktadır ve literatürde tensör alanı ifadesi yerine kısaca tensör ifadesi kullanılmaktadır.

Riemannian manifoldunda tanjant demetlerin diferansiyel geometrisi ilk olarak 1958’de Sasaki tarafından araştırılmıştır. Tanjant demetteki geometrilerin gelişmesine Dombrowski 1962’de önemli katkı sağlamıştır. Yano ve Ledger 1965’te, tanjant demetin simetrik uzaylarda tanımını yapıp bununla ilgili çalışmışlardır. Daha sonra Kandatu, 1966 yılında lineer olmayan konneksiyona sahip olan bir manifoldta tanjant demetin tanımını yapmıştır.

Yano ve Kobayashi 1966’da ilk olarak tanjant demette lift kavramını tanımlamış ve bu bağlamda tensör alanlarının ve konneksiyonların tam ve dikey liftlerini incelemiştir. Daha öncesinde Sasaki 1958’de yapmış olduğu çalışmalarda lift kavramını “genişleme” ve “devam” anlamında kullanmıştır. Yine Ishihara ve Yano 1967 yılında tanjant demette konneksiyonların ve tensör alanlarının yatay liftlerini incelemiştir. Bununla birlikte tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların liftleri 1970’de Morimoto tarafından çalışmalarında ele alınmıştır.

Tanjant demette almost kontakt yapılar ve almost parakontakt yapılar, vektör alanlarının tam, dikey ve yatay liftlerine göre almost kontakt yapıların ve almost paracontact yapıların Lie ve Kovaryant türevleri ayrıca almost r-kontakt yapısı ve Lorentzian almost r-parakontakt yapısı için Tachibana ve Vishnevskii operatörleri ayrıca bu konularla ilgili ön çalışmalar; Blair (1976), Das (1993), Omran vd. (1984), Oproiu (1973), Salimov ve Cayır (2013), Cayır (2015, 2016), Cayır ve Köseoğlu (2016), Das ve Khan (2005), Das ve Nivas (2006), Tekkoyun (2006), Tekkoyun (2009), Khan (2014), Vanzura (1970), Matsumoto (1989), Khan ve Jun (2014), Khan (2016), Khan (2017), Khan (2018), Davies (1969), Salimov (2013), Sato (1976), Adati (1981), Magden (2004), Yano ve Davies (1971) tarafından yapılmıştır.

Tanjant demetten farklı bir demet olan yarı-tanjant demet teorisi ilk olarak 1979 yılında Duc tarafından ortaya koyulmuştur. Ardından 1985 yılında Vishnevskii, Shirokov ve Shurgyin tarafından yapılan çalışmalarla yarı-tanjant demette izdüşümlü lineer konneksiyonlar, bunların eğrilik ve burulma tensörleri ve Lie türevleri gibi önemli sonuçlar elde edilmiştir. Yine 2000 yılında Salimov ve Kadioğlunun yaptığı çalışmada ise yarı-tanjant demette Lie ve Kovaryant türevlerin tam liftleri araştırılmıştır. Bununla birlikte 2002 yılında Vishnevskii’nin yaptığı çalışmada ise yarı-tanjant demette integrallenebilir yapılar, çeşitli diferansiyel geometrik objelerin lifleri ve izdüşümlü lineer konneksiyonların liftleri incelenmiştir. Son yıllarda ise Yıldırım’ın 2018, 2020 ve 2021 de yapmış olduğu çalışmalarıyla ilgili teoriye önemli katkılar sağlamıştır.

KURAMSAL TEMELLER VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Tanım 1. (Topolojik Uzay): W bir küme olsun. τ, W kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere eğer,

- $\emptyset \in \tau$ ve $W \in \tau$ ise,
- τ nun keyfi sayıda birleşimi τ kümesine ait ise yani; $(A_i)_{i \in I}$ I indis kümesi için ise $\bigcup_i A_i \in \tau$
- τ ailesinin sonlu sayıda kesişimi τ kümesine aittir; $\{A_i\}_{i \in J}, J$ sonlu indis kümesi için $A_i \in \tau$ ise $\bigcap_i A_i \in \tau$

şartları sağlanıyorsa (W, τ) ikilisine bir topolojik uzay adı verilir (Şahin 2012).

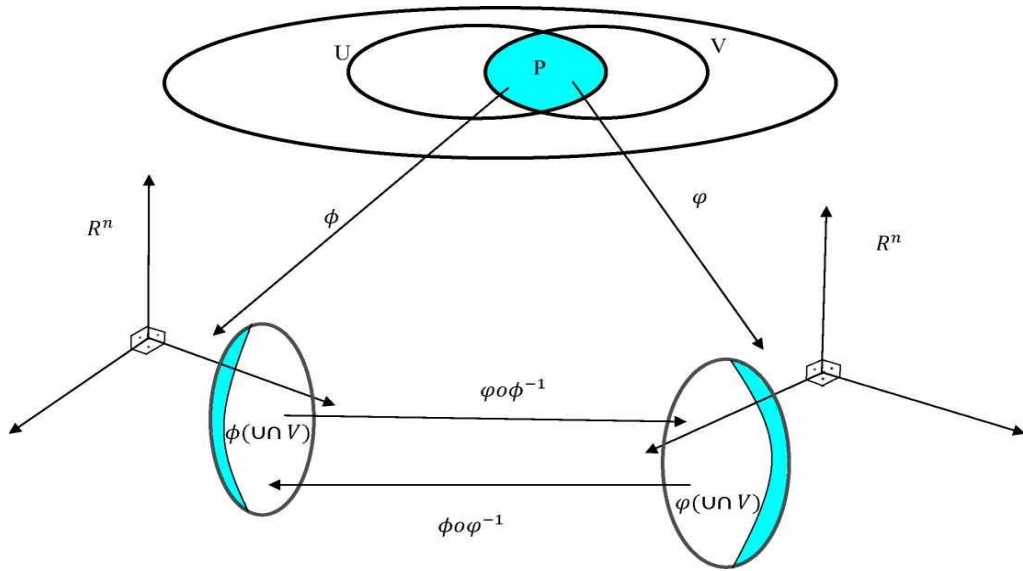
Tanım 2. (Hausdorff Uzayı): Y bir topolojik uzay olsun. Y 'nin P ve Q gibi farklı noktaları için, Y de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan B_P ve B_Q açık alt kümeleri $B_P \cap B_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse Y topolojik uzayına bir Hausdorff Uzayı denir.

Tanım 3. (Manifold): $\tilde{M}$ bir topolojik uzay olsun. Eğer,

- ✓ $\tilde{M}$ bir Hausdorff uzayıdır.
- ✓ $\tilde{M}$ nin herbir açık alt kümesi E^n e veya E^n in bir açık alt kümesine homeorftur.
- ✓ $\tilde{M}$ sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülebilir.

önergeleri doğru ise $\tilde{M}$ bir n -boyutlu topolojik manifolddur denir.

Tanım 4. (Atlas): $\tilde{M}$, bir topolojik n - manifold ve $\tilde{M}$ nin bir açık örtüsü $\{w_\alpha\}$ olsun. w_α açık kümelerinin α indislerinin kümesi B olmak üzere $\{w_\alpha\}$ örtüsü için $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in B}$ yazılır. E^n de w_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık küme w_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, w_α) haritalarının $\{(\psi_\alpha, w_\alpha)\}_{\alpha \in B}$ koleksiyonuna bir atlas denir (Hacısalıhoğlu 1983).



Şekil 1. Diferensiyellenebilir atlas

Tanım 5. (Diferensiyellenebilir Manifold): $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde k . mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas verilmiş ise, $\tilde{M}$ ye k . mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Eğer atlas keyfi mertebeden diferensiyellenebilirse $\tilde{M}$ ye $\mathbb{C}^\infty$ - sınıfından manifold denir (Şahin 2012).

Tanım 6. (Tensör): U bir vektör uzayı ve U^* , U nun kovektör uzayı olsun. Bu durumda

$$\varphi : \overbrace{U \times U \dots \times U}^{m \text{ tane}} \times \overbrace{U^* \times U^* \dots \times U^*}^{n \text{ tane}} \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü ve $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ ve $u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^* \in U^*$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$\varphi(u_1, \dots, \lambda_1 u_k + \lambda_2 u'_k, \dots) = \lambda_1 \varphi(u_1, \dots, u_k, \dots) + \lambda_2 \varphi(u_1, \dots, u'_k, \dots)$$

şartını sağlarsa φ ye m . mertebeden kovaryant ve n . mertebeden kontravaryant tensör denir (Şahin 2012).

Tanım 7. (Tensör Alanı): $T_p^q(\tilde{M})$, $p \in \tilde{M}$ noktasındaki tensör uzayı olmak üzere keyfi bir $p \in \tilde{M}$ noktasına bir ve sadece bir t_p tensörünü karşılık getiren $t : p \rightarrow t_p$ dönüşümüne $\tilde{M}$ üzerinde (p, q) tipli tensör alanı denir. (p, q) tipli t tensör alanını x^i yerel koordinatlarında,

$$t = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p}$$

biçiminde ifade edilir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 8. (Vektör Alanı): $\tilde{M}$, $\mathbb{C}^\infty$ sınıfından bir manifold ve T_q , $q \in \tilde{M}$ noktasındaki teğet uzayı olsun. $\tilde{M}$ manifoldunun her $q \in \tilde{M}$ noktasına T_q uzayından bir ve yalnız bir Y_q

vektörü karşılık getiren Y vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 9. (Kovektör Alanı): $\tilde{M}, \mathbb{C}^\infty$ sınıfından bir manifold ve T_q^* , $q \in \tilde{M}$ noktasındaki dual uzayı olsun. $\tilde{M}$ manifoldunun her $q \in \tilde{M}$ noktasına bir ve sadece bir ω_q kovektörü karşılık getiren ω dönüşümüne $\tilde{M}$ üzerinde kovektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 10. (Kovaryant Diferensiyelleme): $T_0^1(\tilde{M})$, $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde vektör alanlarının modülü olmak üzere,

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \tilde{\nabla}(\tilde{X}, \tilde{Y}): T_0^1(\tilde{M}) \times T_0^1(\tilde{M}) \rightarrow T_0^1(\tilde{M})$$

dönüşümü

$$\text{i. } \tilde{\nabla}_{g\tilde{X}+f\tilde{Y}} \tilde{Z} = g\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z} + f\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Z},$$

$$\text{ii. } \tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}(f\tilde{Y} + g\tilde{X}) = (\tilde{Z}f)\tilde{Y} + f\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\tilde{Y} + (\tilde{Z}g)\tilde{X} + g\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\tilde{X}$$

koşulunu sağlıyorsa $\tilde{\nabla}$ 'ya lineer (afin) konneksiyon denir. Burada $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}: T_0^1(\tilde{M}) \rightarrow T_0^1(\tilde{M})$ dönüşümüne $\tilde{X}$ vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Tanım 11. (Eğrilik ve Burulma Tensörü): $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde $T_0^1(\tilde{M})$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$T: T_0^1(\tilde{M}) \times T_0^1(\tilde{M}) \rightarrow T_0^1(\tilde{M})$$

$$(X, Y) \rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

$$R: T_0^1(\tilde{M}) \times T_0^1(\tilde{M}) \times T_0^1(\tilde{M}) \rightarrow T_0^1(\tilde{M})$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

ile tanımlı T ve R tensör alanlarına ∇ lineer konneksiyonunun sırasıyla burulma tensörü ve eğrilik tensörü denir. Açıktır ki T , (1,2) tipli tensör alanı ve R , (1,3) tipli tensör alanıdır (Şahin 2012).

Tanım 12. (Levi-Civita Konneksiyonu): Her $Y \in T_x(\tilde{M})$ ve (0,2) tipli simetrik g tensörü için $g(X, Y) = 0$ olup ve $X = 0$ olmasını gerektiriyorsa g 'ye $\tilde{M}$ üzerinde Riemannian

metriği denir. Burada $x \in \tilde{M}$ dir. Lokal olarak bu ifade $Det(g_{ij}) \neq 0$ şeklinde tanımlanır. g 'nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g metriği

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

kuadratik formuyla da ifade edebilir.

Eğer $\tilde{M}$ üzerinde Riemannian metriği verilmişse, $(\tilde{M}, g)$ çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij})$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian veya Levi-Civita konneksiyonu denir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 13. (Lie Operatörü): $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$, bir $U \subset \tilde{M}$ açık kümesinde tanımlı olan vektör alanları ve f fonksiyonu $\mathbb{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ kümesinin bir elemanı olmak üzere $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ vektör alanlarının Lie operatörü,

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}](f) = \tilde{X}\tilde{Y}(f) - \tilde{Y}\tilde{X}(f)$$

eşitliği ile ifade edilir ve $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ şeklinde gösterilir (Salimov ve Mağden 2008). ∂_i doğal çatısına göre $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ vektör alanının gösterimi,

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X} = (\tilde{X}^i \partial_i \tilde{Y}^j - \tilde{Y}^i \partial_i \tilde{X}^j) \partial_j$$

şeklindedir. Özel olarak $\tilde{X} = \partial_i$ ve $\tilde{Y} = \partial_j$ alınırsa,

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

olduğu görülür .

Lie operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. $[\tilde{X}, \tilde{Y} + \tilde{Z}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] + [\tilde{X}, \tilde{Z}]$ (Lineerlik)
- ii. $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = -[\tilde{Y}, \tilde{X}]$ (Anti-simetriklik)
- iii. $[\tilde{X}, f\tilde{Y}] = (\tilde{X}f)\tilde{Y} + f[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ (Leibniz Şartı)
- iv. $[\tilde{X}, [\tilde{Y}, \tilde{Z}]] + [\tilde{Y}, [\tilde{Z}, \tilde{X}]] + [\tilde{Z}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] = 0$ (Jacobi Özdeşliği)
- v. $[f\tilde{X}, \tilde{Y}] = -(Yf)\tilde{X} + f[\tilde{X}, \tilde{Y}]$

$$\text{vi. } [f\tilde{X}, g\tilde{Y}] = f(\tilde{X}g)\tilde{Y} - g(\tilde{Y}f)\tilde{X} + fg[\tilde{X}, \tilde{Y}]$$

Tanım 13.2. (Lie Türevi): $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(\tilde{M})$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $L_{\tilde{X}}$, tensör diferansiyelleme işlemine X vektör alanı yönündeki tensör diferansiyellemesi denir.

$$1. L_{\tilde{X}} f = \tilde{X}f, \forall f \in \mathfrak{S}_0^0(\tilde{M})$$

$$2. L_{\tilde{X}} \tilde{Y} = [\tilde{X}, \tilde{Y}], \forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{S}_0^1(\tilde{M}).$$

$L_X Y$ nin lokal koordinatlarla ifadesi

$$L_{\tilde{X}} \tilde{Y}^i = \tilde{X}^k \partial_k \tilde{Y}^i - \tilde{Y}^k \partial_k \tilde{X}^i$$

şeklindedir. Lie diferansiyellemesi vasıtasıyla bulunan değerlere Lie türevi denir.

$t \in \mathfrak{S}_s^r(\tilde{M})$ keyfi tipli tensör alanı için Lie türevi,

$$L_{\tilde{X}} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \tilde{X}^k \partial_k t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{\lambda=1}^s (\partial_{j_\lambda} \tilde{X}^k) t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \sum_{\lambda=1}^r (\partial_k \tilde{X}^{i_\lambda}) t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

biçimindedir (Salimov ve Mağden 2008).

MATERYAL VE YÖNTEM

Tanjant Demet

$T_q(\tilde{M})$, $q \in \tilde{M}$ noktasındaki teğet vektör uzayı olmak üzere ,

$$T(\tilde{M}) = \bigcup_{q \in \tilde{M}} T_q(\tilde{M}) \quad (1)$$

ile verilen $T(\tilde{M})$ kümesine tanjant demet denir. Burada $\tilde{M}$, $\mathbb{C}^\infty$ tipinden diferensiyellenebilir bir manifoldtur.

$\tilde{q} \in T(\tilde{M})$ için $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki $T(\tilde{M})$ doğal demet yapısını tanımlayan $\tilde{\pi}: T(\tilde{M}) \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü $\tilde{q} \mapsto q$ şeklindedir. Buradan $\tilde{\pi}(\tilde{q}) = q$ dir. $\tilde{\pi}^{-1}(q) = T(\tilde{M})$ kümesine $\tilde{M}$ baz uzayının q noktasındaki fibresi denir.

$\tilde{M}$ manifoldunun $(V; x^i)$ koordinat sistemiyle verilmiş olduğunu kabul edelim. Öyle ki $(x^i), V$ yerel komşuluğunda tanımlı yerel koordinat sistemidir. Burada $\tilde{\pi}^{-1}(V) \subset T(\tilde{M})$ açık kümesi ile $V \times \mathbb{R}^n$ homeomorfturlar. $\tilde{q} \in T_q(M)$, $(q \in V)$ noktası $(q, \tilde{X})$ sıralı ikilisi ile ifade edilir ve $\tilde{X} \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri $T_q(\tilde{M})$ teğet vektör uzayında $\{\partial_i\}$, $(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i})$ doğal bazına göre $\tilde{q}$ nın $(y^i) = (x^{\bar{i}})$ $\bar{i} = n+1, \dots, 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. V komşuluğunda $q = \tilde{\pi}(\tilde{q})$ nin koordinatları (x^i) $i = 1, \dots, n$ ile verilirse $\tilde{q}$ noktası uygun $(x^i, x^{\bar{i}}) \mapsto \tilde{q} \in \tilde{\pi}^{-1}(V)$ ile verilmiş olur. Buradan $\tilde{\pi}^{-1}(V) \subset T(\tilde{M})$ açık kümesinde $(x^i, x^{\bar{i}})$ yerel koordinatlar sistemini elde edilir. Öyle ki $(x^i, x^{\bar{i}})$ ye (x^i) den indirgenmiş $\tilde{\pi}^{-1}(V)$ de koordinatlar denir.

$(V', X^{i'})$, $\tilde{M}$ bazının $q = \tilde{\pi}(\tilde{q})$ noktasını içeren eden diğer bir koordinat komşuluğu olsun. Buradan $\tilde{\pi}^{-1}(V)$ koordinat komşuluğu $\tilde{q}$ noktasını ihtiva eder ve $\tilde{\pi}^{-1}(V')$ ya göre $\tilde{q}$ nin indirgenmiş koordinatları $(x^{i'}, y^{i'})$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{i'} = x^i(x), \\ y^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} y^i, \end{cases} \quad (2)$$

olarak tanımlanır. $x^{i'}(x)$, q noktasındaki $x^1, x^2, \dots, x^n$ değişkenlerinin $\mathbb{C}^\infty$ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{i}} = y^i, x^{\bar{i}'} = y^{i'}$ ile gösterirsek (2) eşitliğinin,

$$x^{q'} = x^{q'}(x), \quad q' = 1, \dots, 2n \quad (3)$$

şeklindedir. (2) denkleminin Jacobian matrisi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} y^j & \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \end{pmatrix} \quad (4)$$

şeklinde verilir. (2) eşitliğinin tersi ise

$$\begin{cases} x^i = x^i(x'), \\ y^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} y^{i'} \end{cases} \quad (5)$$

veya

$$x^q = x^q(x'), \quad q = 1, \dots, 2n \quad (6)$$

olarak yazılır. (5) ifadesinin Jacobian matrisi,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} y^{j'} & \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

şeklindedir. $\text{Det}\left(\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q}\right) > 0$, $(\text{Det}\left(\frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}}\right) > 0)$ olduğundan (4) ve (7) eşitlikleri $T(\tilde{M})$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu ifade eder.

$\tilde{M}$ bazındaki $\mathbb{C}^\infty$ sınıfından (p, q) tipli tensör alanlarının kümesini $T_q^p(\tilde{M})$ ve $\tilde{M}$ deki tensör alanlarının kümesini ise $T(\tilde{M}) = \sum_{p, q=0}^{\infty} T_q^p(\tilde{M})$ ile işaretleyeceğiz. Bununla birlikte $T(\tilde{M})$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini ise $T_q^p(T(\tilde{M}))$ ile ifade edeceğiz.

Önerilen bu yüksek lisans tezinde temel alınan Yarı-Tanjant Demet, Tanjant Demetten farklı olup bir pull-back demeti tanımlanmaktadır. Şimdi Yarı-Tanjant geometrisini inceleyelim.

Yarı -Tanjant Demet

M_n ve B_m sırasıyla boyutları n ve m olan C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifoldlar ve (M_n, π_1, B_m) , $\pi_1 : M_n \rightarrow B_m$ izdüşüm dönüşümü(submersiyonu) ile tanımlanan diferensiyellenebilir bir demet olsun. Bu durumda $\pi_1^{-1}(U)$ komşuluğunda lokal koordinatlar $(x^i) = (x^a, x^\alpha)$, $i, j = 1, \dots, n$; $a, b, \dots = 1, \dots, n-m$; $\alpha, \beta, \dots = n-m+1, \dots, n$ şeklinde tanımlanır. Burada x^α ve x^a sırasıyla, B_m manifoldunun koordinatları ve $\pi_1 : M_n \rightarrow B_m$ keyfi demetinin fibre koordinatlarıdır. Bununla birlikte, $(x^{i'}) = (x^{a'}, x^{\alpha'})$ M_n manifoldu üzerinde diğer bir lokal koordinatlar olmak üzere $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $(x^{1'}, \dots, x^{n-m'}, x^{1'}, \dots, x^{m'})$ indirgenmiş koordinatlar

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^b, x^\beta), & a, b, \dots = 1, \dots, n-m \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), & \alpha, \beta, \dots = n-m+1, \dots, n, \end{cases} \quad (8)$$

şeklinde tanımlanır. (8) dönüşümüne M_n de koordinatların dönüşüm kanunu denir. Bu dönüşümü temsil eden Jakobiyan matrisi,

$$(A_j^{i'}) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} & \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^\beta} \\ 0 & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \end{pmatrix}$$

ile tanımlıdır (Salimov ve Kadioğlu 2000).

$T_p(B_m)$, B_m baz manifoldunun $p = (x^a, x^\alpha) \in M_n$, $p = \pi_1(\tilde{p})$ biçiminde tanımlanan bir p noktasındaki tanjant uzayı olsun. $T_p(B_m)$ tanjant uzayındaki $\{\partial_\alpha\} = \{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}$ doğal çatısına göre X vektör alanının bileşenleri, $X^\alpha = dx^\alpha(X)$ olmak üzere, M_n manifoldu üzerinde $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti $(X^I = x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha), (\bar{x}^\alpha = y^\alpha, \bar{\alpha} = \alpha + m, I = 1, \dots, n+m)$ lokal koordinatları ile tanımlanır.

B_m manifoldunun doğal demet yapısına ve $\pi : (x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) \rightarrow (x^\alpha)$ biçiminde tanımlı $\pi : t(B_m) \rightarrow B_m$ izdüşümüne sahip $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde, eğer $\pi_2 : (x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) \rightarrow (x^a, x^\alpha)$, $\pi_2 : t(B_m) \rightarrow M_n$ şeklinde dönüşüm tanımlanacak olursa o zaman, M_n manifoldu da bir demet yapısına sahip olur. Burada izdüşüm dönüşümleri arasında $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ bağıntısı vardır.

Bununla birlikte, $\tilde{\pi} : T(B_m) \rightarrow B_m$ demet dönüşümü ve $\pi_1 : M_n \rightarrow B_m$ doğal projeksiyon dönüşümü ise $\pi_2 : t(B_m) \rightarrow M_n$ dönüşümü ile karakterize edilen pullback demeti

$$t(B_m) = \left\{ ((x^a, x^\alpha), \bar{x}^\alpha) \in M_n \times T_p(B_m) \mid \pi_1(x^a, x^\alpha) = \pi(x^\alpha, \bar{x}^\alpha) \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Pontryagin 1947; Ostianu 1974; Poor 1981; Vishnevskii vd. 1985; Lawson ve Michelsohn 1989; Husemoller 1994; Vishnevskii 2002) .

Ayrıca , M_n manifoldunda lokal koordinatların (8) deki dönüşüm kuralına göre $t(B_m)$ yarı- tanjant demetinde $(x^{a'}, x^{\alpha'}, \bar{x}^{\bar{\alpha}'})$ indirgenmiş fibre koordinatlarının dönüşüm kanunu

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^b, x^\beta), & a, b, \dots = 1, \dots, n-m, \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), & \alpha, \beta, \dots = n-m+1, \dots, n, \\ \bar{x}^{\bar{\alpha}'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} y^\beta, & \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots = n+1, \dots, n+m \end{cases} \quad (9)$$

biçiminde tanımlanır. (9) dönüşümü temsil eden Jakobiyen matrisi,

$$\bar{A} = (A_{j'}^I) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} & \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \end{pmatrix} \quad (10)$$

ile ifade edilir (Salimov ve Kadioğlu 2000).

Böylece $I = (a, \alpha, \bar{\alpha})$, $J = (b, \beta, \bar{\beta})$, $I, J = 1, \dots, n+m$. (10) de belirtilen blok matrisin asal köşegeninde yer alan her bir matris için,

$$\text{Det} \left(\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} \right) \neq 0 \text{ ve } \text{Det} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \right) \neq 0$$

olduğundan $\text{Det}(\bar{A}) \neq 0$ olur. Buradan (10) dönüşümünün tersi

$$\begin{cases} x^a = x^a(x^{b'}, x^{\beta'}), \\ x^\alpha = x^\alpha(x^{\beta'}), \\ \bar{x}^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}} y^{\beta'}, \end{cases}$$

biçiminde olup bu dönüşümü temsil eden matris ise,

$$(A_{j'}^I) = \begin{pmatrix} A_{b'}^a & A_{\beta'}^a & 0 \\ 0 & A_{\beta'}^\alpha & 0 \\ 0 & A_{\beta', \varepsilon}^\alpha y^{\varepsilon'} & A_{\beta'}^{\alpha'} \end{pmatrix} \quad (11)$$

şeklinde yazılır. Burada $A_b^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^b}$, $A_{\beta'}^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{\beta'}}$, $A_{\beta'}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}}$ ve $A_{\beta'\epsilon'}^\alpha = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\epsilon'}}$ şeklinde tanımlanır.

Yarı-tanjant demetin boyutu $\dim t(B_m) = n + m$ dir. Eğer $n = m$ ise $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti $T(B_m)$ tanjant demetine eşit olur (Salimov ve Kadioğlu 2000).

Yarı-Tanjant Demette Liftler

Fonksiyonların Dikey Lifti

$f \in \mathfrak{T}_0^0(B_m)$, B_m manifoldunda tanımlanan bir fonksiyon olsun, f fonksiyonunun $t(B_m)$ yarı-tanjant demetindeki ${}^w f$ dikey lifti $\pi: t(B_m) \rightarrow B_m$ ve ${}^v f = f \circ \pi_1$ olmak üzere

$${}^w f = {}^v f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi, \quad {}^w f(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) = f(x^\alpha) \quad (12)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her bir fibre boyunca $\pi: t(B_m) \rightarrow B_m$ izdüşümü sabittir denir (Ay 2013).

Vektör Alanlarının Dikey Lifti

$X \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$, B_m manifoldunda lokal olarak $X = X^\alpha \partial_\alpha$ şeklinde yazılabilen bir vektör alanını olsun. (10) eşitliği dikkate alınırsa $t(B_m)$ yarı -tanjant demette vektör alanlarının dönüşüm kanunu ${}^w X' = \bar{A}({}^w X)$ şeklinde yazılır. Buradan $X \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ vektör alanının yarı-tanjant demette ${}^w X$ dikey lifti lokal koordinatlarla,

$${}^w X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix}, \quad (13)$$

şeklinde tanımlanır (Vishnevskii vd. 1985).

Kovektör Alanlarının Dikey Lifti.

Şimdi lokal koordinatlarla gösterimi $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ olan $\omega \in \mathfrak{T}_1^0(B_m)$, kovektör alanının $t(B_m)$ yarı- tanjant demetinde dikey lifti

$${}^w \omega = (0, \omega_\alpha, 0), \quad (14)$$

şeklinde dir. Burada (10), eşitliğinden ${}^w \omega = \bar{A}({}^w \omega')$ dır. ω' 'nın $t(B_m)$ yarı -tanjant demetine dikey lifti denir ve ${}^{ww} \omega$ ile ifade edilir (Vishnevskii vd. 1985).

Afinor Alanlarının Dikey Lifti

${}^v F_J^I = A_I^J A_J^{I'} ({}^v F_{J'}^{I'})$ şartını sağlayan keyfi bir $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ afinor alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ indirgenmiş koordinatlarına göre dikey lifti ${}^v F$,

$${}^v F : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

şeklinde bileşenlere sahip (1,1) tipli bir tensör alanıdır (Vishnevskii vd. 1985).

Yarı tanjant demette $t(B_m)$ alınan keyfi tipli P , Q ve R tensör alanları için, bu tensör alanlarının toplamı ve tensör çarpımının yarı-tanjant demette dikey lifti,

$${}^v(P \otimes Q) = {}^v P \otimes {}^v Q, \quad {}^v(P + R) = {}^v P + {}^v R \quad (16)$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde yarı-tanjant demette tanımlanan tam lift $\mathfrak{S}(B_m)$ tensör cebirinden $\mathfrak{S}(t(B_m))$ tensör cebirine tanımlanan cebirsel bir izomorfizmdir.

Fonksiyonların Tam Lifti

M_n de tanımlı $f = f(x^a, x^\alpha)$ fonksiyonun $t(B_m)$ yarı tanjant demetine ${}^{cc} f$ tam lifti

$${}^{cc} f = \iota(df) = x^{\bar{\beta}} \partial_\beta f = y^\beta \partial_\beta f \quad (17)$$

şeklinde tanımlanır (Salimov ve Kadioğlu 2000).

Vektör Alanlarının Tam Lifti

$X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $X = X^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha$ izdüşümü ile $X = X^a(x^a, x^\alpha) \partial_a + X^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha$ şeklinde tanımlanan izdüşümlü bir vektör alanı olsun. $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ nin $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ koordinatlarına göre $t(B_m)$ yarı -tanjant demete tam lifti,

$${}^{cc} X : \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ y^\epsilon \partial_\epsilon X^\alpha \end{pmatrix} \quad (18)$$

şeklindedir (Salimov ve Kadioğlu 2000).

Kovektör Alanlarının Tam Lifti

$\omega \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$, B_m manifoldu üzerinde kovektör alanı olsun. $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre ω 'nın tam lifti

$${}^{cc}\omega = (0, y^\varepsilon \partial_\varepsilon \omega_\alpha, \omega_\alpha) \quad (19)$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir (Vishnevskii vd. 1985).

Afinor Alanlarının Tam Lifti

$F \in \mathfrak{F}_1^1(M_n)$, $F = F_\beta^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha \otimes dx^\beta$ izdüşümü ile tanımlanan keyfi izdüşümlü afinor alanı olsun. Bu F afinor alanının (x^a, x^α) koordinatlarına göre bileşenleri

$$F : \begin{pmatrix} F_b^a(x^a, x^\alpha) & F_\beta^a(x^a, x^\alpha) \\ 0 & F_\beta^\alpha(x^\alpha) \end{pmatrix}$$

biçimindedir (Vishnevskii 2002).

(10) eşitliği dikkate alındığında ${}^{cc}F_J^I = A_I^I A_J^{I'} ({}^{cc}F_{J'}^{I'})$ şartını sağlayan $F \in \mathfrak{F}_1^1(M_n)$ keyfi afinor alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demette tam lifti ${}^{cc}F$, $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ koordinatlarına göre,

$${}^{cc}F : \begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix}, \quad (20)$$

şeklinde tanımlanan (1-1) tipli afinor alanıdır (Vishnevskii vd. 1985).

P, Q ve R , $t(B_m)$ de keyfi tipli tensör alanları olsun. Bu tensör alanlarının toplamı ve tensör çarpımının yarı-tanjant demette tam liftleri,

$${}^{cc}(P + R) = {}^{cc}P + {}^{cc}R, \quad {}^{cc}(P \otimes Q) = {}^{cc}P \otimes {}^{vv}Q + {}^{vv}P \otimes {}^{cc}Q, \quad (21)$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde yarı-tanjant demette tanımlanan tam lift $\mathfrak{F}(B_m)$ tensör cebirinden $\mathfrak{F}(t(B_m))$ tensör cebirine tanımlanan cebirsel bir izomorfizmdir.

γ – operatörü

Keyfi $F \in \mathfrak{F}_0^1(T(M_n))$ afinoru için (10) matrisinden $(\gamma F)' = \bar{A}(\gamma F)$ eşitliği sağlanır. Burada γF indirgenmiş koordinat sisteminde ,

$$\gamma F = (\gamma F)^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon F_\varepsilon^a \end{pmatrix} \quad (22)$$

biçiminde bir vektör alanı belirtir.

Teorem 1. $\tilde{X}$ ve Y , sırasıyla, $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve $Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ izdüşümleri ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanları, $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$, $F \in \mathfrak{S}_1^1(B_m)$ ve ∇ , B_m üzerinde izdüşümlü lineer konneksiyon olmak üzere olmak üzere,

$$\text{i. } {}^{cc}\nabla_{{}^wX} {}^w f = 0, \quad \text{ii. } {}^{cc}\nabla_{{}^wX} {}^{cc} f = {}^w(\nabla_X f), \quad \text{iii. } {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X} {}^w f = {}^w(\nabla_X f), \quad \text{iv. } {}^{cc}\nabla_{{}^wX} {}^w Y = 0$$

$$\text{v. } {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X} {}^{cc} f = {}^{cc}(\nabla_X f), \quad \text{vi. } {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X} {}^{cc} Y = {}^{cc}(\nabla_X Y), \quad \text{vii. } [{}^wX, {}^wY] = 0 \quad \text{viii. } {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X} {}^w Y = {}^w(\nabla_X Y)$$

eşitlikleri sağlanır (Salimov ve Kadioğlu 2000; Yıldırım, 2021a, 2021b, 2021c; Polat ve Yıldırım 2021).

Teorem 2. $\tilde{X}$ ve Y , sırasıyla, $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve $Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ izdüşümleri ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanları ve $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ll} L_{{}^wX} {}^w Y = 0 & L_{{}^wX} {}^w f = 0 \\ L_{{}^{cc}X} {}^w f = {}^w(L_X f) & L_{{}^wX} {}^{cc} Y = {}^w(L_X Y) \\ L_{{}^wX} {}^{cc} f = {}^w(L_X f) & L_{{}^{cc}X} {}^{cc} f = {}^{cc}(L_X f) \\ L_{{}^{cc}X} {}^w Y = {}^w(L_X Y) & L_{{}^{cc}X} {}^{cc} Y = {}^{cc}(L_X Y) \end{array}$$

eşitlikleri sağlanır (Salimov ve Kadioğlu 2000; Yıldırım, 2021a, 2021b, 2021c; Polat ve Yıldırım 2021).

Teorem 3. X, Y ve F , M_n manifoldu üzerinde izdüşümleri sırasıyla B_m de X, Y ve F şeklinde olan izdüşümlü vektör alanları ve afinor alanı olsunlar. Eğer $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$, $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$ ve $I = id_{M_n}$ ise (Vishnevskii vd. 1985 ; Vishnevskii 2002).

$$\text{(i)} \quad {}^w\omega {}^w X = 0, \quad \text{(ii)} \quad {}^{cc}X {}^w f = {}^w(Xf), \quad \text{(iii)} \quad {}^w\omega({}^{cc}X) = {}^w(\omega(X)), \quad \text{(iv)} \quad {}^wF {}^{cc}X = {}^w(FX),$$

$$\text{(v)} \quad {}^wX {}^{cc} f = {}^w(Xf), \quad \text{(vi)} \quad {}^{cc}(fX) = {}^{cc}f {}^wX + {}^w f {}^{cc}X, \quad \text{(vii)} \quad {}^wI {}^{cc}X = {}^wX, \quad \text{(viii)} \quad \tilde{I} = \tilde{I},$$

$$\text{(ix)} \quad [{}^wX, {}^{cc}Y] = {}^w[X, Y], \quad \text{(x)} \quad {}^{cc}\omega({}^wX) = {}^w(\omega(X)), \quad \text{(xi)} \quad {}^wF {}^wX = {}^w(FX),$$

$$\text{(xiii)} \quad {}^{cc}X {}^{cc} f = {}^{cc}(Xf), \quad \text{(xiv)} \quad {}^{cc}\omega({}^{cc}X) = {}^{cc}(\omega(X)), \quad \text{(xv)} \quad {}^{cc}(FX) = {}^{cc}F {}^{cc}X, \quad \text{(xvi)} \quad {}^w(fX) = {}^w f {}^wX,$$

$$\text{(xvii)} \quad {}^wI {}^wX = 0, \quad \text{(xviii)} \quad [{}^{cc}X, {}^{cc}Y] = {}^{cc}[X, Y], \quad \text{(xix)} \quad {}^w(f\omega) = {}^w f {}^w\omega, \quad \text{(xx)} \quad {}^wX {}^w f = 0,$$

$$\text{(xxi)} \quad [{}^wX, {}^wY] = 0 \text{ eşitlikleri elde edilir.}$$

İspat (i). $f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$, $\omega \in \mathfrak{F}_1^0(M_n)$, $X \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} {}^{vv}\omega({}^{vv}X) &= {}^{vv}\omega_I {}^{vv}X^I \\ &= {}^{vv}\omega_a \underset{0}{} + {}^{vv}\omega_\alpha \underset{0}{} + {}^{vv}\omega_{\bar{\alpha}} \underset{0}{\phantom{X^{\bar{\alpha}}}} = 0 \end{aligned}$$

(ii). $f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$${}^{cc}X {}^{vv}f = {}^{cc}X^I \underset{0}{\partial_I} {}^{vv}f = {}^{cc}X^a \underset{0}{\partial_a} {}^{vv}f + {}^{cc}X^\alpha \underset{0}{\partial_\alpha} {}^{vv}f + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} {}^{vv}f = X^\alpha \underset{0}{\partial_\alpha} {}^{vv}f = {}^{vv}(Xf) \text{ elde edilir.}$$

(iii).

$${}^{vv}\omega_I {}^{cc}X^I = {}^{vv}\omega_a \underset{0}{} + {}^{vv}\omega_\alpha \underset{0}{} + {}^{vv}\omega_{\bar{\alpha}} \underset{0}{\phantom{X^{\bar{\alpha}}}} = \omega_a X^\alpha = \omega(X) = {}^{vv}(\omega(X)) \text{ elde edilir.}$$

$$\text{(iv). } {}^{vv}F {}^{cc}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_\beta^\alpha X^\alpha \end{pmatrix} = {}^{vv}(FX) \text{ elde edilir.}$$

(v). $f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} {}^{vv}X {}^{cc}f &= {}^{vv}X^I \underset{0}{\partial_I} {}^{cc}f = {}^{vv}X^a \underset{0}{\partial_a} {}^{cc}f + {}^{vv}X^\alpha \underset{0}{\partial_\alpha} {}^{cc}f + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} \underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} {}^{cc}f \\ &= X^\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(y^\sigma \partial_\sigma f)}_{\delta_\alpha^\sigma} = X^\alpha \partial_\alpha f = {}^{vv}(Xf) \end{aligned}$$

elde edilir.

vi. $f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ ve $\tilde{X} \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} {}^{cc}(fX) &= {}^{cc}(fX)^I \partial_I = {}^{cc}(fX)^a \partial_a + {}^{cc}(fX)^\alpha \partial_\alpha + {}^{cc}(fX)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \\ &= (fX)^a \partial_a + (fX)^\alpha \partial_\alpha + y^\sigma \partial_\sigma (fX)^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} \\ &= fX^a \partial_a + fX^\alpha \partial_\alpha + (y^\sigma \partial_\sigma f) X^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} + y^\sigma f (\partial_\sigma X^\alpha) \partial_{\bar{\alpha}} \\ &= (y^\sigma \partial_\sigma f) X^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} + f(X^a \partial_a + X^\alpha \partial_\alpha + y^\sigma \partial_\sigma X^\alpha \partial_{\bar{\alpha}}) \\ &= {}^{cc}f {}^{vv}X + {}^{cc}\tilde{X} {}^{vv}f \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

vii. $I \in B_m$ ve $X \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$${}^{vv}I^{cc}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_\beta^\alpha X^\alpha \end{pmatrix} = {}^{vv}X$$

viii. $\tilde{I} \in M_n$ olmak üzere, ${}^{cc}I = \begin{pmatrix} \delta_b^a & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix} = \tilde{I}$ dir.

ix.

$$\left[{}^{cc}X, {}^{vv}Y \right]^b = {}^{cc}X^I \partial_I \underset{0}{{}^{vv}Y^b} - \underset{0}{{}^{vv}Y^I} \partial_I {}^{cc}X^b = - \underset{0}{{}^{vv}Y^a} \partial_a X^b - \underset{0}{{}^{vv}Y^\alpha} \partial_\alpha X^b - \underset{0}{{}^{vv}Y^{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\alpha}} X^b = 0$$

$$\left[{}^{cc}X, {}^{vv}Y \right]^\beta = {}^{cc}X^I \partial_I \underset{0}{{}^{vv}Y^\beta} - \underset{0}{{}^{vv}Y^I} \partial_I {}^{cc}X^\beta = - \underset{0}{{}^{vv}Y^a} \partial_a X^\beta - \underset{0}{{}^{vv}Y^\alpha} \partial_\alpha X^\beta - \underset{0}{{}^{vv}Y^{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\alpha}} X^\beta = 0$$

$$\left[{}^{cc}X, {}^{vv}Y \right]^{\bar{\beta}} = {}^{cc}X^I \partial_I \underset{0}{{}^{vv}Y^{\bar{\beta}}} - \underset{0}{{}^{vv}Y^I} \partial_I {}^{cc}X^{\bar{\beta}} = {}^{cc}X^a \partial_a Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^\alpha \partial_\alpha Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} Y^{\bar{\beta}}$$

$$- \underset{0}{{}^{vv}Y^a} \partial_a (y^\sigma \partial_\sigma X^\beta) - \underset{0}{{}^{vv}Y^\alpha} \partial_\alpha (y^\sigma \partial_\sigma X^\beta) - \underset{0}{{}^{vv}Y^{\bar{\alpha}}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (y^\sigma \partial_\sigma X^\beta)}_{\delta_\alpha^{\bar{\sigma}}} = X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta - Y^\alpha \partial_\alpha X^\beta = [X, Y]^\beta$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$\left[{}^{vv}X, {}^{cc}Y \right] = \left[{}^{cc}X, {}^{vv}Y \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [X, Y]^\beta \end{pmatrix} = {}^{vv}[X, Y] \quad \text{elde edilir.}$$

x. ${}^{cc}\omega^{vv}X = {}^{cc}\omega_I^{vv}X^I = {}^{cc}\omega_a^{vv}X^a + {}^{cc}\omega_\alpha^{vv}X^\alpha + {}^{cc}\omega_{\bar{\alpha}}^{vv}X^{\bar{\alpha}} = \omega_\alpha X^\alpha = \omega(X) = {}^{vv}\omega(X)$

xi. $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olmak üzere,

$${}^{vv}F^{vv}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

xii. $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olmak üzere,

$${}^{cc}\tilde{F}^{vv}X = \begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_\beta^\alpha X^\alpha \end{pmatrix} = {}^{vv}(FX)$$

xiii. $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
{}^{cc}\tilde{X}{}^{cc}f &= {}^{cc}X^I\partial_I{}^{cc}f = {}^{cc}X^a\partial_a{}^{cc}f + {}^{cc}X^\alpha\partial_\alpha{}^{cc}f + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{cc}f \\
&= X^\alpha\partial_\alpha(y^\sigma\partial_\sigma f) + y^s\partial_s X^\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(y^\sigma\partial_\sigma f)}_{\delta_\alpha^\sigma} = y^\sigma X^\alpha\partial_\alpha(\partial_\sigma f) + y^s\partial_s X^\alpha\partial_\alpha f \\
&= y^\sigma(X^\alpha\partial_\alpha(\partial_\sigma f) + (\partial_\sigma X^\alpha)\partial_\alpha f) = y^\sigma\partial_\sigma(X^\alpha\partial_\alpha f) = y^\sigma\partial_\sigma(Xf) = {}^{cc}(Xf)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{xiv.} \quad {}^{cc}\omega({}^{cc}\tilde{X}) &= {}^{cc}\omega_I{}^{cc}X^I = {}^{cc}\omega_a{}^{cc}X^a + {}^{cc}\omega_\alpha{}^{cc}X^\alpha + {}^{cc}\omega_{\bar{\alpha}}{}^{cc}X^{\bar{\alpha}} = (y^\sigma\partial_\sigma\omega_a)X^a + \omega_a(y^\sigma\partial_\sigma X^a) \\
&= y^\sigma(\partial_\sigma\omega_a)X^a + y^\sigma\omega_a(\partial_\sigma X^a) = y^\sigma\partial_\sigma(\omega_a X^a) = {}^{cc}(\omega(X)) \text{ olduğu gösterilmiş olur.}
\end{aligned}$$

xv. $\tilde{X} \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $F \in \mathfrak{I}_1^1(M_n)$ olmak üzere,

$${}^{cc}(FX) = \begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon\partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon\partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix} = {}^{cc}F{}^{cc}X$$

elde edilir.

xvi. $f \in \mathfrak{I}_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$${}^{vv}(fX) = {}^{vv}(fX)^I\partial_I = \underbrace{{}^{vv}(fX)^a\partial_a}_0 + \underbrace{{}^{vv}(fX)^\alpha\partial_\alpha}_0 + {}^{vv}(fX)^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}} = (fX)^\alpha = fX^\alpha = {}^{vv}f{}^{vv}X$$

elde edilir.

xvii. $I = I_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha \in B_m$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
{}^{vv}F = ({}^{vv}F_J^I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad {}^{vv}I = ({}^{vv}I_J^I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_\beta^\alpha & 0 \\ & \delta_\beta^\alpha & \end{pmatrix} \\
{}^{vv}I = ({}^{vv}I_J^I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad {}^{vv}I{}^{vv}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

xviii. Keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için $\begin{pmatrix} [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^b \\ [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^\beta \\ [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant

demette tanımlı $[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^J$ nin bileşenleri olmak üzere $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre

$$[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^J = ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^J - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^J$$

eşitliği yazılabilir. Burada (18) kullanılarak,

$J = b$ için

$$\begin{aligned} [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^b &= ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^b - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^b \\ &= ({}^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}Y)^b}_0 + ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^b + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^b}_0 \\ &\quad - ({}^{cc}Y)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}X)^b}_0 - ({}^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^b - ({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^b}_0 \\ &= ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^b - ({}^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^b \\ &= X^\alpha \partial_\alpha Y^b - Y^\alpha \partial_\alpha X^b \\ &= [X, Y]^b \end{aligned}$$

olur.

$J = \beta$ için, (11)'den

$$\begin{aligned} [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^\beta &= ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^\beta - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^\beta \\ &= ({}^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}Y)^\beta}_0 + ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^\beta + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^\beta}_0 \\ &= ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^\beta - ({}^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^\beta = X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta - Y^\alpha \partial_\alpha X^\beta = [X, Y]^\beta \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $J = \bar{\beta}$ için, (18)'den

$$\begin{aligned} [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\bar{\beta}} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}} - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} \\ &= ({}^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}}}_0 + ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\overset{cc}{Y})^a \underbrace{\partial_a(\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}}}_0 - (\overset{cc}{Y})^\alpha \partial_\alpha(\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}} - (\overset{cc}{Y})^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}}(\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}} \\
& = X^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \partial_\varepsilon Y^\beta) + y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^\sigma \partial_\sigma Y^\beta}_{\delta_\alpha^\sigma} - Y^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta) - y^\varepsilon \partial_\varepsilon Y^\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^\sigma \partial_\sigma X^\beta}_{\delta_\alpha^\sigma} \\
& = y^\varepsilon X^\alpha \partial_\alpha \partial_\varepsilon Y^\beta + y^\varepsilon (\partial_\varepsilon X^\sigma) (\partial_\sigma Y^\beta) - y^\varepsilon Y^\alpha \partial_\alpha \partial_\varepsilon X^\beta - y^\varepsilon (\partial_\varepsilon Y^\sigma) (\partial_\sigma X^\beta) \\
& = y^\varepsilon \partial_\varepsilon [X, Y]^\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. $\overset{cc}{[X, Y]}$ nin $t(B_m)$ deki $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ lokal koordinatlarına göre bileşenleri,

$$\overset{cc}{[X, Y]} = \begin{pmatrix} [X, Y]^b \\ [X, Y]^\beta \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon [X, Y]^\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $[\overset{cc}{X}, \overset{cc}{Y}] = \overset{cc}{[X, Y]}$ eşitliği sağlanmış olur.

xix. $f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$, $X \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \mathfrak{F}_1^0(M_n)$ olmak üzere,

$${}^w(f\omega) = {}^w(f\omega)_I dx^I = \underbrace{{}^w(f\omega)_a dx^a}_0 + {}^w(f\omega)_\alpha dx^\alpha + \underbrace{{}^w(f\omega)_{\bar{\alpha}} dx^{\bar{\alpha}}}_0 = (f\omega)_\alpha = f\omega_\alpha = {}^w f {}^w \omega \quad \text{elde}$$

edilir.

xx. $f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$${}^w X {}^w f = {}^w X^I \partial_I {}^w f = \underbrace{{}^w X^a \partial_a {}^w f}_0 + \underbrace{{}^w X^\alpha \partial_\alpha {}^w f}_0 + \underbrace{{}^w X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^w f}_0 = 0$$

elde edilir.

xxi. ${}^w X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\beta \end{pmatrix}$, ${}^w Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y^\beta \end{pmatrix}$ ve $I = (a, \alpha, \bar{\alpha})$ olmak üzere,

$$[{}^w X, {}^w Y]^b = {}^w X^I \partial_I \underbrace{{}^w Y^b}_0 - \underbrace{{}^w Y^I \partial_I {}^w X^b}_0 = 0,$$

$$[{}^w X, {}^w Y]^\beta = {}^w X^I \partial_I \underbrace{{}^w Y^\beta}_0 - \underbrace{{}^w Y^I \partial_I {}^w X^\beta}_0 = 0,$$

$$[{}^w X, {}^w Y]^{\bar{\beta}} = {}^w X^I \partial_I \underbrace{{}^w Y^{\bar{\beta}}}_0 - \underbrace{{}^w Y^I \partial_I {}^w X^{\bar{\beta}}}_0 = \underbrace{{}^w X^a \partial_a Y^{\bar{\beta}}}_0 + \underbrace{{}^w X^\alpha \partial_\alpha Y^{\bar{\beta}}}_0 + \underbrace{{}^w X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} Y^{\bar{\beta}}}_0$$

$$- \underbrace{{}^w Y^a \partial_a X^{\bar{\beta}}}_0 - \underbrace{{}^w Y^\alpha \partial_\alpha X^{\bar{\beta}}}_0 - \underbrace{{}^w Y^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} X^{\bar{\beta}}}_0 = 0$$

elde edilir. Buradan $[{}^w X, {}^w Y] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ olduğu görülür.



ARAŞTIRMA VE BULGULAR

B_m , m - boyutlu diferensiyellenebilir manifold ($m=2k+1, k \geq 0$) olsun. $\eta \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ve $I = id_{M_n}$ olmak üzere $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve $\xi \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ M_n üzerinde izdüşümleri sırasıyla $\varphi = \varphi_\beta^\alpha (x^\alpha) \partial_\alpha \otimes dx^\beta$ ve $\xi = \xi^\alpha (x^\alpha) \partial_\alpha$, $\xi = \xi^a (x^\alpha, x^\alpha) \partial_a + \xi^\alpha (x^\alpha) \partial_\alpha$ şeklinde olan ve

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \eta(\xi) = 1 \quad (23)$$

şartını sağlayan afinor alanı ve vektör alanı olsun. Buradan (φ, ξ, η) sıralı üçlüsüne B_m baz manifoldunda almost kontakt yapı denir. (23) eşitliliğinin kullanılmasıyla,

$$\left({}^{cc}\varphi \right)^2 = -I + {}^{vv}\eta \otimes {}^{cc}\xi + {}^{cc}\eta \otimes {}^{vv}\xi, \quad (24)$$

$${}^{cc}\varphi {}^{vv}\xi = 0, \quad {}^{vv}\eta \circ {}^{cc}\varphi = 0, \quad {}^{vv}\eta \circ {}^{cc}\varphi = 0,$$

$${}^{cc}\eta \circ {}^{cc}\varphi = 0, \quad {}^{vv}\eta({}^{vv}\xi) = 0, \quad {}^{vv}\eta({}^{cc}\xi) = 1, \quad {}^{cc}\eta({}^{vv}\xi) = 1, \quad {}^{cc}\eta({}^{cc}\xi) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. (24) eşitliklerinin kullanılmasıyla $t(B_m)$ yarı tanjant demette

$J^2 {}^{vv}X = -{}^{vv}X$ ve $J^2 {}^{cc}X = -{}^{cc}X$ şartlarını sağlayan ve

$$J = {}^{cc}\varphi - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \quad (25)$$

şeklinde tanımlanan (1,1) tipli tensör alanı tanımlanır. (1,1) tipli bu J tensör alanına $t(B_m)$

yarı tanjant demette almost kontakt yapı denir. Keyfi bir $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için (25) eşitliği kullanılarak,

$$J {}^{vv}X = {}^{vv}(\varphi X) + {}^{vv}(\eta(X)) {}^{cc}\xi,$$

$$J {}^{cc}X = {}^{cc}(\varphi X) - {}^{vv}(\eta(X)) {}^{vv}\xi + {}^{cc}(\eta(X)) {}^{cc}\xi$$

eşitlikleri elde edilir (Yıldırım vd. 2023).

Benzer şekilde B_m , m - boyutlu diferensiyellenebilir manifold ($m=2k+1, k \geq 0$) olsun.

$\eta \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ve $I = id_{M_n}$ olmak üzere $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ ve $\xi \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ M_n üzerinde izdüşümleri sırasıyla $\varphi = \varphi_\beta^\alpha (x^\alpha) \partial_\alpha \otimes dx^\beta$ ve $\xi = \xi^\alpha (x^\alpha) \partial_\alpha$, $\xi = \xi^a (x^\alpha, x^\alpha) \partial_a + \xi^\alpha (x^\alpha) \partial_\alpha$ şeklinde olan ve

$$\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \eta(\xi) = 1 \quad (26)$$

şartını sağlayan afinor alanı ve vektör alanı olsun. Buradan (φ, ξ, η) sıralı üçlüsüne B_m baz manifoldunda almost parakontakt yapı denir. (26) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\left({}^{cc}\varphi \right)^2 = I - {}^w\eta \otimes {}^{cc}\xi - {}^{cc}\eta \otimes {}^w\xi, \quad (27)$$

$${}^{cc}\varphi {}^w\xi = 0, \quad {}^{cc}\varphi {}^{cc}\xi = 0, \quad {}^w\eta {}^{cc}\varphi = 0,$$

$${}^{cc}\eta \circ {}^{cc}\varphi = 0, \quad {}^w\eta({}^w\xi) = 0, \quad {}^{cc}\eta({}^w\xi) = 1, \quad {}^{cc}\eta({}^{cc}\xi) = 0$$

(27) eşitlikleri elde edilir. (27) eşitliklerinin kullanılmasıyla, $t(B_m)$ yarı-tanjant demet üzerinde

$J^2 {}^wX = {}^wX$ ve $J^2 {}^{cc}X = {}^{cc}X$ şartlarını sağlayan ve

$$J = {}^{cc}\varphi - {}^w\xi \otimes {}^w\eta - {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \quad (28)$$

şeklinde tanımlanan (1,1) tipli tensör alanı tanımlanır. (1,1) tipli bu J tensör alanına $t(B_m)$ yarı-tanjant demette almost parakontakt yapı denir. Keyfi bir $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ kullanılarak için (28) eşitliğinden,

$$J {}^wX = {}^w(\varphi X) - {}^w(\eta(X)) {}^{cc}\xi, \quad J {}^{cc}X = {}^{cc}(\varphi X) - {}^w(\eta(X)) {}^w\xi - {}^{cc}(\eta(X)) {}^{cc}\xi,$$

eşitlikleri elde edilir (Yıldırım vd. 2023).

Teorem 4. $J \in \mathfrak{S}_1^1(t(B_m))$ yarı- tanjant demette (25) eşitliği ile tanımlanan almost kontakt yapı L_X , X vektör alanına göre Lie türev operatörü ve $\eta(Y) = 0$ için,

$$(i) \quad (L_{{}^wX} J) {}^wY = 0, \quad (ii) \quad (L_{{}^wX} J) {}^{cc}Y = {}^w((L_X \varphi)Y) + {}^w((L_X \eta)Y) {}^{cc}\xi,$$

$$(iii) \quad (L_{{}^{cc}X} J) {}^wY = {}^w((L_X \varphi)Y) + {}^w((L_X \eta)Y) {}^{cc}\xi,$$

$$(iv) \quad (L_{{}^{cc}X} \tilde{J}) {}^{cc}Y = {}^{cc}((L_X \varphi)Y) - {}^w((L_X \eta)Y) {}^w\xi + {}^{cc}((L_X \eta)Y) {}^{cc}\xi,$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $X, Y, \xi \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, M_n de izdüşümlü vektör alanları, $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ M_n de izdüşümlü afinor alanı ve η 1- formdur.

İspat. $J = {}^{cc}\varphi - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta$ ve $\eta(Y)=0$ için,

$$(i) \quad (L_{w_X} J)^{vv} Y = L_{w_X} \left({}^{cc}\varphi - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right)^{vv} Y - \underbrace{\left({}^{cc}\varphi - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right) L_{w_X}^{vv} Y}_0$$

$$= \underbrace{L_{w_X}^{vv}(\varphi Y)}_0 - L_{w_X} \underbrace{\left({}^{vv}\eta^{vv}(Y) \right)}_0 {}^{vv}\xi + L_{w_X} \underbrace{{}^{vv}(\eta(Y))}_0 {}^{cc}\xi = 0$$

$$(ii) \quad (L_{w_X} J)^{cc} Y = L_{w_X} \left({}^{cc}\varphi - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right)^{cc} Y - \left({}^{cc}\varphi - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right) L_{w_X}^{cc} Y$$

$$= \underbrace{L_{w_X}^{cc} \varphi^{cc} Y}_{\substack{(L_{w_X}^{cc} \varphi)^{cc} Y + {}^{cc}\varphi(L_{w_X}^{cc} Y) \\ {}^{vv}((L_X \varphi)Y)}} - L_{w_X} \underbrace{{}^{vv}(\eta(Y))^{vv} \xi}_0 + \underbrace{L_{w_X}^{cc} \xi^{cc}(\eta(Y))}_{\substack{{}^{cc}(\eta(Y))L_{w_X}^{cc} \xi + {}^{cc}\xi(L_{w_X}^{cc}(\eta(Y)))}} - {}^{cc}\varphi L_{w_X}^{cc} Y +$$

$$+ \underbrace{{}^{vv}\eta^{vv}(L_X Y)^{vv} \xi}_0 - \underbrace{{}^{vv}(\eta(L_X Y))^{cc} \xi}_{\substack{{}^{vv}(L_X \eta(Y)) - {}^{vv}((L_X \eta)Y)}}$$

$$= \left(L_{w_X}^{cc} \varphi \right)^{cc} Y + {}^{cc}\varphi \left(L_{w_X}^{cc} Y \right) - {}^{cc}\varphi L_{w_X}^{cc} Y - {}^{vv}(L_X(\eta(Y)))^{cc} \xi + {}^{vv}((L_X \eta)Y)^{cc} \xi$$

$$= {}^{vv}((L_X \varphi)Y) + {}^{cc}\varphi^{vv}(L_X Y) + \underbrace{{}^{cc}(\eta(Y))L_{w_X}^{cc} \xi}_0 + {}^{cc}\xi \underbrace{\left(L_{w_X}^{cc}(\eta(Y)) \right)}_{{}^{vv}(L_X \eta(Y))}$$

$$- {}^{cc}\varphi^{vv}(L_X Y) - {}^{vv}(L_X \eta(Y))^{cc} \xi + {}^{vv}((L_X \eta)Y)^{cc} \xi = {}^{vv}((L_X \varphi)Y) + {}^{vv}((L_X \eta)Y)^{cc} \xi,$$

$$(iii) \quad (L_{cc_X} J)^{vv} Y = L_{cc_X} \left({}^{cc}\varphi - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right)^{vv} Y - \left({}^{cc}\varphi - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right) L_{cc_X}^{vv} Y$$

$$= \underbrace{L_{cc_X}^{cc} \varphi^{vv} Y}_{\substack{{}^{vv}(L_X \varphi Y) \\ {}^{vv}((L_X \varphi)Y) + {}^{vv}(\varphi L_X Y)}} - L_{cc_X} \underbrace{\left({}^{vv}\eta^{vv}(Y) \right)}_0 {}^{vv} \xi + \underbrace{L_{cc_X}^{cc} \xi^{vv}(\eta(Y))}_{\substack{{}^{vv}(\eta(Y))(L_{cc_X}^{cc} \xi) + {}^{cc}\xi(L_{cc_X}^{vv}(\eta(Y)))}} - \underbrace{{}^{cc}\varphi L_{cc_X}^{vv} Y}_{\substack{{}^{vv}(\varphi L_X Y)}}$$

$$+ {}^{vv}\eta^{vv}(L_X Y)^{vv} \xi - \underbrace{{}^{vv}(\eta(L_X Y))^{cc} \xi}_{\substack{{}^{vv}(L_X \eta(Y)) - {}^{vv}((L_X \eta)Y)}}$$

$$= {}^{vv}((L_X \varphi)Y) + {}^{vv}(\varphi L_X Y) + {}^{vv}(\eta(Y)) \underbrace{\left(L_{cc_X}^{cc} \xi \right)}_{{}^{cc}(L_X \xi)} + {}^{cc}\xi \left(\underbrace{L_{cc_X}^{vv}(\eta(Y))}_{{}^{vv}(L_X \eta(Y))} \right)$$

$$- {}^{vv}(\varphi L_X Y) - {}^{vv}(L_X \eta(Y))^{cc} \xi + {}^{vv}((L_X \eta)Y)^{cc} \xi$$

$$\begin{aligned}
&= {}^{vv}((L_X \phi)Y) + \left(\eta(Y) \right)_0^{vv} (L_X \xi) + {}^{vv}((L_X \eta)Y) {}^{cc} \xi \\
&= {}^{vv}((L_X \phi)Y) + {}^{vv}((L_X \eta)Y) {}^{cc} \xi, \\
\text{(iv)} \quad (L_{cc_X} J) {}^{cc} Y &= L_{cc_X} \left({}^{cc} \phi - {}^{vv} \xi \otimes {}^{vv} \eta + {}^{cc} \xi \otimes {}^{cc} \eta \right) {}^{cc} Y - \left({}^{cc} \phi - {}^{vv} \xi \otimes {}^{vv} \eta + {}^{cc} \xi \otimes {}^{cc} \eta \right) L_{cc_X} {}^{cc} Y \\
&= \underbrace{L_{cc_X} {}^{cc} \phi {}^{cc} Y}_{\substack{{}^{cc} (L_X \phi Y) \\ {}^{cc} ((L_X \phi)Y) + {}^{cc} (\phi L_X Y)}} - L_{cc_X} \underbrace{{}^{vv} \xi {}^{vv} (\eta(Y))}_0 + \underbrace{L_{cc_X} {}^{cc} \xi {}^{cc} (\eta(Y))}_{\substack{{}^{cc} (\eta(Y)) \left({}^{cc} (L_{cc_X} {}^{cc} \xi) + {}^{cc} \xi {}^{cc} L_{cc_X} {}^{cc} (\eta(Y)) \right)}} - \underbrace{{}^{cc} \phi L_{cc_X} {}^{cc} Y}_{\substack{{}^{cc} (\phi L_X Y)}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{vv} \eta {}^{cc} (L_X Y)}_{\substack{{}^{vv} (\eta(L_X Y)) \\ {}^{cc} (L_X \eta(Y)) - {}^{cc} ((L_X \eta)Y)}} {}^{vv} \xi - \underbrace{{}^{cc} (\eta(L_X Y))}_{\substack{{}^{cc} (L_X \eta(Y)) - {}^{cc} ((L_X \eta)Y)}} {}^{cc} \xi \\
&= {}^{cc} ((L_X \phi)Y) + {}^{cc} (\phi L_X Y) + \underbrace{{}^{cc} (\eta(Y))}_0 {}^{cc} (L_{cc_X} {}^{cc} \xi) + {}^{cc} \xi \underbrace{{}^{cc} L_{cc_X} {}^{cc} (\eta(Y))}_{\substack{{}^{cc} (L_X \eta(Y))}} \\
&\quad - {}^{cc} (\phi L_X Y) + {}^{vv} (\eta(L_X Y)) {}^{vv} \xi - {}^{cc} (L_X \eta(Y)) {}^{cc} \xi + {}^{cc} ((L_X \eta)Y) {}^{cc} \xi \\
&= {}^{cc} ((L_X \phi)Y) + \underbrace{{}^{vv} (\eta(L_X Y))}_{\substack{{}^{vv} (L_X \eta(Y)) - {}^{vv} ((L_X \eta)Y)}} {}^{vv} \xi + {}^{cc} ((L_X \eta)Y) {}^{cc} \xi \\
&= {}^{cc} ((L_X \phi)Y) - \underbrace{{}^{vv} \xi {}^{vv} (L_X \eta(Y))}_0 - {}^{vv} ((L_X \eta)Y) {}^{vv} \xi + {}^{cc} ((L_X \eta)Y) {}^{cc} \xi \\
&= {}^{cc} ((L_X \phi)Y) - {}^{vv} ((L_X \eta)Y) {}^{vv} \xi + {}^{cc} ((L_X \eta)Y) {}^{cc} \xi \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki teoremin ispatından aşağıdaki Sonuç 1 elde edilir.

Sonuç 1. Teorem (4) de eğer $Y = \xi$ ve $\eta(\xi) = 1$ olduğu kabul edilirse (23) eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad (L_{vv_X} J) {}^{vv} \xi &= {}^{vv} (L_X \xi), \quad \text{(ii)} \quad (L_{vv_X} J) {}^{cc} \xi = {}^{vv} ((L_X \phi) \xi) + {}^{vv} ((L_X \eta) \xi) {}^{cc} \xi, \\
\text{(iii)} \quad (L_{cc_X} J) {}^{vv} \xi &= {}^{vv} ((L_X \phi) \xi) + {}^{cc} (L_X \xi) + {}^{vv} ((L_X \eta) \xi) {}^{cc} \xi, \\
\text{(iv)} \quad (L_{cc_X} J) {}^{cc} \xi &= {}^{cc} ((L_X \phi) \xi) - {}^{vv} (L_X \xi) - {}^{vv} ((L_X \eta) \xi) {}^{vv} \xi + {}^{cc} ((L_X \eta) \xi) {}^{cc} \xi.
\end{aligned}$$

Burada $\xi \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ dir.

Teorem 5. $J \in \mathfrak{I}_1^1(t(B_m))$ yarı-tanjant demette (28) eşitliği ile tanımlanan almost parakontakt yapı L_X , X vektör alanına göre Lie türev operatörü ve $\eta(Y)=0$ için,

$$(i) (L_{w_X} \tilde{J})^v Y = 0, \quad (ii) (L_{w_X} \tilde{J})^{cc} Y = {}^w((L_X \phi)Y) - {}^w((L_X \eta)Y)^{cc} \xi,$$

$$(iii) (L_{cc_X} \tilde{J})^v Y = {}^w((L_X \phi)Y) - {}^w((L_X \eta)Y)^{cc} \xi,$$

$$(iv) (L_{cc_X} \tilde{J})^{cc} Y = {}^{cc}((L_X \phi)Y) - {}^w((L_X \eta)Y)^v \xi - {}^{cc}((L_X \eta)Y)^{cc} \xi$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $X, Y, \xi \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$, M_n de izdüşümlü vektör alanları, $\phi \in \mathfrak{I}_1^1(M_n)$ M_n de izdüşümlü afinor alanı ve η 1- formdur.

İspat . $\tilde{J} = {}^{cc}\phi - {}^w\xi \otimes {}^w\eta - {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta$ yarı-tanjant demette (28) eşitliği ile tanımlanan almost parakontakt yapı olmak üzere $\eta(Y)=0$ için,

$$(i) (L_{w_X} \tilde{J})^v Y = L_{w_X} \left({}^{cc}\phi - {}^w\xi \otimes {}^w\eta - {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right)^v Y - \underbrace{\left({}^{cc}\phi - {}^w\xi \otimes {}^w\eta - {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right) L_{w_X}^v Y}_0$$

$$= \underbrace{L_{w_X}^v(\phi Y)}_0 - L_{w_X}^v \xi \left(\underbrace{{}^w\eta^v(Y)}_0 \right) - L_{w_X}^{cc} \xi \left(\underbrace{\eta(Y)}_0 \right) = 0$$

$$(ii) (L_{w_X} \tilde{J})^{cc} Y = L_{w_X} \left({}^{cc}\phi - {}^w\xi \otimes {}^w\eta - {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right)^{cc} Y - \left({}^{cc}\phi - {}^w\xi \otimes {}^w\eta - {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right) L_{w_X}^{cc} Y$$

$$= \underbrace{L_{w_X}^{cc} \phi^{cc} Y}_{\left(L_{w_X}^{cc} \phi \right)^{cc} Y + {}^{cc}\phi \left(L_{w_X}^{cc} Y \right)} - L_{w_X}^v \xi \left(\underbrace{\eta(Y)}_0 \right) - \underbrace{L_{w_X}^{cc} \xi^{cc}(\eta(Y))}_{{}^{cc}(\eta(Y)) L_{w_X}^{cc} \xi + {}^{cc}\xi \left(L_{w_X}^{cc}(\eta(Y)) \right)} - {}^{cc}\phi^v(L_X Y)$$

$$+ \underbrace{{}^w\eta^v(L_X Y)^v \xi}_0 + \underbrace{{}^w(\eta(L_X Y))^{cc} \xi}_{{}^w(L_X \eta(Y)) - {}^w((L_X \eta)Y)}$$

$$= {}^w((L_X \phi)Y) + {}^{cc}\phi^v(L_X Y) - \underbrace{{}^{cc}(\eta(Y)) L_{w_X}^{cc} \xi}_0 - \underbrace{{}^{cc}\xi \left(L_{w_X}^{cc}(\eta(Y)) \right)}_{{}^w(L_X \eta(Y))}$$

$$- {}^{cc}\phi^v(L_X Y) + {}^w(L_X \eta(Y))^{cc} \xi - {}^w((L_X \eta)Y)^{cc} \xi$$

$$= {}^w((L_X \phi)Y) - {}^w((L_X \eta)Y)^{cc} \xi,$$

$$(iii) (L_{cc_X} \tilde{J})^v Y = L_{cc_X} \left({}^{cc}\phi - {}^w\xi \otimes {}^w\eta - {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right)^v Y - \left({}^{cc}\phi - {}^w\xi \otimes {}^w\eta - {}^{cc}\xi \otimes {}^{cc}\eta \right) L_{cc_X}^v Y$$

$$\begin{aligned}
&= L_{cc_X}^{cc} \phi^{wv} Y - L_{cc_X} \left({}^{vw} \eta^{vw} (Y) \right) {}^{vw} \xi - L_{cc_X} {}^{vw} (\eta(Y)) {}^{cc} \xi - {}^{cc} \phi L_{cc_X} {}^{wv} Y \\
&+ {}^{vw} \eta^{vw} (L_X Y) {}^{vw} \xi + {}^{vw} (\eta(L_X Y)) {}^{cc} \xi \\
&= \underbrace{L_{cc_X}^{cc} \phi^{wv} Y}_{\substack{{}^{vw} (L_X \phi Y) + {}^{vw} (\phi L_X Y)}} - L_{cc_X} {}^{vw} \xi \left(\underbrace{{}^{vw} \eta^{vw} (Y)}_0 \right) - \underbrace{L_{cc_X}^{cc} \xi {}^{vw} (\eta(Y))}_{\substack{{}^{vw} (\eta(Y)) (L_{cc_X}^{cc} \xi) + {}^{cc} \xi (L_{cc_X} {}^{vw} (\eta(Y)))}} - \underbrace{{}^{cc} \phi L_{cc_X} {}^{wv} Y}_{\substack{{}^{vw} (\phi L_X Y)}} \\
&+ \underbrace{{}^{vw} \eta^{vw} (L_X Y)}_0 {}^{vw} \xi + \underbrace{{}^{vw} (\eta(L_X Y))}_{\substack{{}^{vw} (L_X \eta(Y)) - {}^{vw} ((L_X \eta) Y)}} {}^{cc} \xi \\
&= {}^{vw} ((L_X \phi) Y) + {}^{vw} (\phi L_X Y) - \underbrace{{}^{vw} (\eta(Y)) (L_{cc_X}^{cc} \xi)}_{\substack{{}^{cc} (L_X \xi)}} - {}^{cc} \xi \left(\underbrace{L_{cc_X} {}^{vw} (\eta(Y))}_{\substack{{}^{vw} (L_X \eta(Y))}} \right) \\
&- {}^{vw} (\phi L_X Y) + {}^{vw} (L_X \eta(Y)) {}^{cc} \xi - {}^{vw} ((L_X \eta) Y) {}^{cc} \xi \\
&= {}^{vw} ((L_X \phi) Y) - \left(\underbrace{\eta(Y)}_0 \right) {}^{cc} (L_X \xi) - {}^{vw} ((L_X \eta) Y) {}^{cc} \xi \\
&= {}^{vw} ((L_X \phi) Y) - {}^{vw} ((L_X \eta) Y) {}^{cc} \xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad & \left(L_{cc_X} \tilde{J} \right) {}^{cc} Y = L_{cc_X} \left({}^{cc} \phi - {}^{vw} \xi \otimes {}^{vw} \eta - {}^{cc} \xi \otimes {}^{cc} \eta \right) {}^{cc} Y - \left({}^{cc} \phi - {}^{vw} \xi \otimes {}^{vw} \eta - {}^{cc} \xi \otimes {}^{cc} \eta \right) L_{cc_X} {}^{cc} Y \\
&+ \underbrace{{}^{vw} \eta {}^{cc} (L_X Y)}_{\substack{{}^{vw} (\eta(L_X Y))}} {}^{vw} \xi + \underbrace{{}^{cc} (\eta(L_X Y))}_{\substack{{}^{cc} (L_X \eta(Y)) - {}^{cc} ((L_X \eta) Y)}} {}^{cc} \xi \\
&= {}^{cc} ((L_X \phi) Y) + {}^{cc} (\phi L_X Y) - \underbrace{{}^{cc} (\eta(Y))}_0 {}^{cc} (L_{cc_X} {}^{cc} \xi) - \underbrace{{}^{cc} \xi {}^{cc} L_{cc_X} {}^{cc} (\eta(Y))}_{\substack{{}^{cc} (L_X \eta(Y))}} \\
&- {}^{cc} (\phi L_X Y) + {}^{vw} (\eta(L_X Y)) {}^{vw} \xi + {}^{cc} (L_X \eta(Y)) {}^{cc} \xi - {}^{cc} ((L_X \eta) Y) {}^{cc} \xi \\
&= {}^{cc} ((L_X \phi) Y) + \underbrace{{}^{vw} (\eta(L_X Y))}_{\substack{{}^{vw} (L_X \eta(Y)) - {}^{vw} ((L_X \eta) Y)}} {}^{vw} \xi - {}^{cc} ((L_X \eta) Y) {}^{cc} \xi \\
&= {}^{cc} ((L_X \phi) Y) + \underbrace{{}^{vw} \xi {}^{vw} (L_X \eta(Y))}_0 - {}^{vw} ((L_X \eta) Y) {}^{vw} \xi - {}^{cc} ((L_X \eta) Y) {}^{cc} \xi \\
&= {}^{cc} ((L_X \phi) Y) - {}^{vw} ((L_X \eta) Y) {}^{vw} \xi - {}^{cc} ((L_X \eta) Y) {}^{cc} \xi,
\end{aligned}$$

Burada $\eta L_X Y = L_X \eta(Y) - (L_X \eta)Y$ ve $\varphi Y \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ dir. Teorem (5) nin ispatı dikkate alınırsa Sonuç (2) aşağıdaki gibi elde edilir.

Sonuç 2. Eğer Teorem (5) de $Y = \xi$ ve $\eta(\xi) = 1$ olduğu kabul edilirse (26) eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$(i) (L_{w_X} \tilde{J})^w \xi = -{}^w(L_X \xi), (ii) (L_{w_X} \tilde{J})^{cc} \xi = {}^w((L_X \varphi) \xi) - {}^w((L_X \eta) \xi)^{cc} \xi,$$

$$(iii) (L_{cc_X} \tilde{J})^w \xi = {}^w((L_X \varphi) \xi) - {}^{cc}(L_X \xi) - {}^w((L_X \eta) \xi)^{cc} \xi,$$

$$(iv) (L_{cc_X} \tilde{J})^{cc} \xi = {}^{cc}((L_X \varphi) \xi) - {}^w(L_X \xi) - {}^w((L_X \eta) \xi)^w \xi - {}^{cc}((L_X \eta) \xi)^{cc} \xi.$$

Burada $\xi \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ dir.

Tanım 1. X ve J sırasıyla M_n manifoldu üzerinde tanımlı bir vektör alanı ve almost kompleks yapı olsun. Eğer $L_X J = 0$ ise X 'e infinitesimal automorphsim denir. Burada L_X, X vektör alanına göre Lie türev operatörüdür ve keyfi bir $Y \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ için ,

$$(L_X J)(Y) = L_X(JY) - JL_X Y = [X, JY] - J[X, Y]$$

şeklinde tanımlanır (Vanžura 1976).

Sonuç 3. $\tilde{X}$ ve Y, M_n manifoldu üzerinde izdüşümleri sırasıyla B_m de X ve Y olan izdüşümlü vektör alanları ve η, M_n de $\eta(Y) = 0$ şartını sağlayan 1- form olsun. Eğer Teorem 4 te $L_X \varphi = 0$ ve $L_X \eta = 0$ ise ${}^w X$ ve ${}^{cc} \tilde{X}$, $t(B_m)$ yarı tanjant demetinde, (25) eşitliği ile tanımlanan J almost kontakt yapısına göre infinitesimal otomorfizimdir. Burada $\varphi \in \mathfrak{Z}_1^1(M_n)$ dir.

Sonuç 4. $\tilde{X}$ ve Y, M_n manifoldu üzerinde izdüşümleri sırasıyla B_m de X ve Y olan izdüşümlü vektör alanları ve η, M_n de $\eta(Y) = 0$ şartını sağlayan 1- form olsun. Eğer Teorem 4 te $L_X \varphi = 0$ ve $L_X \eta = 0$ ise ${}^w X$ ve ${}^{cc} \tilde{X}$, $t(B_m)$ yarı tanjant demetinde, (28) eşitliği ile tanımlanan J almost produkt yapısına göre infinitesimal otomorfizimdir. Burada $\varphi \in \mathfrak{Z}_1^1(M_n)$ dir.

Burada Tanım 1 de,

(i) Eğer J almost produkt yapı ise o zaman X vektör alanına, M_n de almost decomposable vektör alanı denir.

(ii) Eğer J almost kompleks yapı ise o zaman X vektör alanına, M_n de almost holomorphic vektör alanı denir.

(iii) Eğer J almost kontakt yapı ise o zaman X vektör alanına, M_n de almost kontakt holomorphic vektör alanı denir.

(iv) Eğer J almost para-kontakt yapı ise o zaman X vektör alanına, M_n de almost parakontakt holomorphic vektör alanı denir.

(v) Eğer J almost para-kompleks yapı ise o zaman X vektör alanına, M_n de almost para-holomorfik vektör alanı denir (Salimov 2023).

Tanım 1 ve Teorem 4 kullanılarak aşağıdaki Teorem 6 elde edilmiştir:

Teorem 6. $\tilde{X}$ ve Y , M_n manifoldu üzerinde izdüşümleri sırasıyla B_m de X ve Y olan izdüşümlü vektör alanları ve η , M_n de $\eta(Y)=0$ şartını sağlayan 1- form olsun. Eğer Teorem 4 te $L_X\varphi=0$ ve $L_X\eta=0$ ise wX ve ${}^{cc}\tilde{X}$, $t(B_m)$ yarı tanjant demetinde, (25) eşitliği ile tanımlanan J almost kontakt yapısına göre almost kontakt holomorfik vektör alanlarıdır. Burada $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ dir.

Bununla birlikte Tanım 1 ve Teorem 5 kullanılarak aşağıdaki Teorem 7 elde edilir.

Teorem 7. $\tilde{X}$ ve Y , M_n manifoldu üzerinde izdüşümleri sırasıyla B_m de X ve Y olan izdüşümlü vektör alanları ve η , M_n de $\eta(Y)=0$ şartını sağlayan 1- form olsun. Eğer Teorem 5 te $L_X\varphi=0$ ve $L_X\eta=0$ ise wX ve ${}^{cc}\tilde{X}$, $t(B_m)$ yarı tanjant demetinde, (28) eşitliği ile tanımlanan J almost kontakt yapısına göre almost parakontakt decomposable vektör alanlarıdır. Burada $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ dir.

SONUÇ

1. Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışmada ilk olarak $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde almost kontakt yapı ve almost product yapı tanımlandı.
2. Almost kontakt yapı ve almost product yapının $t(B_m)$ yarı- tanjant demette izdüşümlü bir X vektör alanının wX dikey ve ${}^{cc}\tilde{X}$ tam liftlerine göre Lie türevlenebilme şartları incelendi.
3. $\tilde{X}$ ve Y, M_n manifoldu üzerinde izdüşümleri sırasıyla B_m de X ve Y olan izdüşümlü vektör alanları ve η, M_n de $\eta(Y)=0$ şartını sağlayan 1- form olsun. Eğer Teorem 4 te $L_X\varphi=0$ ve $L_X\eta=0$ ise wX ve ${}^{cc}\tilde{X}$, $t(B_m)$ yarı tanjant demetinde, (25) eşitliği ile tanımlanan J almost kontakt yapısına göre almost kontakt holomorfik vektör alanları olduğu ispat edildi.
4. $\tilde{X}$ ve Y, M_n manifoldu üzerinde izdüşümleri sırasıyla B_m de X ve Y olan izdüşümlü vektör alanları ve η, M_n de $\eta(Y)=0$ şartını sağlayan 1- form olsun. Eğer Teorem 5 te $L_X\varphi=0$ ve $L_X\eta=0$ ise wX ve ${}^{cc}\tilde{X}$, $t(B_m)$ yarı tanjant demetinde, (28) eşitliği ile tanımlanan J almost kontakt yapısına göre almost parakontakt decomposable vektör alanı olduğu ispat edildi.
5. $\tilde{X}$ ve Y, M_n manifoldu üzerinde izdüşümleri sırasıyla B_m de X ve Y olan izdüşümlü vektör alanları ve η, M_n de $\eta(Y)=0$ şartını sağlayan 1- form olsun. Eğer Teorem 4 te $L_X\varphi=0$ ve $L_X\eta=0$ ise wX ve ${}^{cc}\tilde{X}$, $t(B_m)$ yarı tanjant demetinde, (25) eşitliği ile tanımlanan J almost kontakt yapısına göre infinitesimal otomorfizim olduğu gösterildi.
6. $\tilde{X}$ ve Y, M_n manifoldu üzerinde izdüşümleri sırasıyla B_m de X ve Y olan izdüşümlü vektör alanları ve η, M_n de $\eta(Y)=0$ şartını sağlayan 1- form olsun. Eğer Teorem 4 te $L_X\varphi=0$ ve $L_X\eta=0$ ise wX ve ${}^{cc}\tilde{X}$, $t(B_m)$ yarı tanjant demetinde, (28) eşitliği ile tanımlanan J almost produkt yapısına göre infinitesimal otomorfizim olduğu sonucu elde edildi.

KAYNAKÇA

- Ay, S., 2013. Yarı Tanjant Demet. (Y. Lisans Tezi), Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.
- Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Maths, Vol. 509, New York: Springer Verlag, 1976.
- Çayır H, Koseogolu G. Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to cX and vX on tangent bundle $T(M)$. New Tr. in Math. Sci., 4 (1) (2016), 153-159.
- Das Lovejoy S. Fiberings on almost r.contact manifolds. Publicationes Mathematicae, Debrecen, Hungary 1993; 43: 161-167.
- Husemoller D. Fibre Bundles. New York: Springer, 1994.
- Lawson HB, Michelsohn ML. Spin Geometry. Princeton: Princeton University Press, 1989.
- Omran T, Sharffuddin A, Husain SI. Lift of Structures on Manifolds. Publications de l'Institut Mathematique,, Nouvelle serie 1984; 360 (50): 93-97.
- Oproiu V. Some remarkable structures and connections defined on the tangent bundle. Rendiconti di Matematica 1973; 3 (6): 503-540.
- Ostianu N.M. Step-fibred spaces. Tr. Geom. Sem. 5, Moscow: (VINITI) 1974; 259-309.
- Polat M, Yıldırım F. Complete lifts of projectable linear connection to semi-tangent bundle. Honam Mathematical J., 2021; 43 (3): 483-501. <https://doi.org/10.5831/HMJ.2021.43.3.483>
- Pontryagin LS. Characteristic cycles on differentiable manifolds. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. 1947; 21 (63): 233-284.
- Poor WA. Differential Geometric Structures. New York: McGraw-Hill, 1981.
- Salimov AA. Tensor Operators and Their applications. New York: Nova Sci. Publ., 2013.
- Salimov AA, Cayır H. Some Notes On Almost Paracontact Structures. Comptes Rendus de Acedemie Bulgare Des Sciences 2013; 66 (3): 331-338.
- Salimov AA, Kadioglu E. Lifts of Derivations to the Semi-tangent Bundle. Turk J. Math. 2000; 24 (3): 259-266.
- Salimov AA. Applications of Holomorphic Functions in Geometry. Birkhauser: Springer, 2023.
- Salimov A.A. and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi.
- Sasaki S. On The Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds. Tohoku Math. J. 1958; 10 (3): 338-358. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178244668>
- Steenrod N. The Topology of Fibre Bundles. Princeton: Princeton University Press., 1951.
- Şahin B, Akyol MA. Golden maps between Golden Riemannian manifolds and constancy of certain maps. Math. Com. 2014; 19 (2): 333-342.
- Şahin B, Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, 2012. Nobel Yayınları
- Vanžura J. Integrability conditions for polynomial structures. Kodai Math. Sem. Rep. 1976; 27, 42-50.
- Vishnevskii V, Shirokov AP, Shurygin VV. Spaces over Algebras. Kazan: Kazan Gos. Univ., 1985 (in Russian).

- Vishnevskii VV. Integrable affinor structures and their plural interpretations. Geometry, 7.J. Math. Sci. (New York) 2002; 108 (2): 151-187.
- Yano K, Ishihara S. Tangent and Cotangent Bundles. New York: Marcel Dekker Inc., 1973.
- Yıldırım F, Akbulut K, Atasever K., Some Notes on Almost Contact Structure and Almost Paracontact Structure in Semi-Tangent Bundle $t(M)$, 7th International Conference On Computational Mathematics and Engineering Science (CMES), Elazığ, (2023), 157.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER
Adı Soyadı: İmran GÜNEŞ Doğum tarihi: Doğum Yeri: Tel: Email:
EĞİTİM
Lisans: Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümü Yüksek Lisans: Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
YABANCI DİL BİLGİSİ
İngilizce: Orta
Tezden Üretilmiş Yayınlar: Akbulut K ,Yıldırım F, Gunes I, On Lie Differentiability Conditions of Some Polynomial Structures in the Semi -Tangent Bundle, 2nd International Symposium on Current Developments in Fundamental and Applied Mathematics Sciences (ISCDFAMS), Ankara,(2023), Akbulut K ,Yıldırım F, Gunes I, On Infinitesimal Authomorphism with respect to Some Polynomial Structures in the Semi-Tangent Bundle,3rd International Symposium on Current Developments in Fundamental and Applied Mathematics Sciences (ISCDFAMS), İstanbul,(2024), 42.