



GENELLEŞMİŞ CHEBYSHEV POLİNOMLARI

Betöl ŞAKİROĞLU

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı
Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN
2016
Her hakkı saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞMİŞ CHEBYSHEV POLİNOMLARI

Betül ŞAKİROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2016

Her hakkı saklıdır



**T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TEZ ONAY FORMU

GENELLEŞMİŞ CHEBYSHEV POLİNOMLARI

Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN danışmanlığında, Betül ŞAKİROĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma 13/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu** (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Nurullah ANKARALIOĞLU

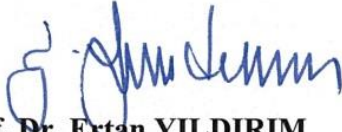
İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sibel TURANLI

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 16/06/2016 tarih ve 25/06/2016 nolu kararı ile onaylanmıştır.


Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞMİŞ CHEBYSHEV POLİNOMLARI

Betül ŞAKİROĞLU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN

Bu çalışmada ilk olarak Genelleşmiş Chebyshev Polinomları matris yardımıyla oluşturulmuştur. Daha sonra, bu polinomların türevi için yeni indirgeme bağıntısı tanımlanmış ve türev polinomları için tanımlanan kombinasyonel form yardımıyla tablolar oluşturulmuştur. Son olarak türev polinomlarının tablolar yardımıyla kolayca yazıldığını gösteren örnekler verilmiştir.

2016, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler: Chebyshev Polinomu, Matrisler, Fibonacci Sayıları, Fibonnaci Polinomu, Lucas Polinomu, Pochhammer Sembolü.

ABSTRACT

Master Thesis

GENERALIZED CHEBYSHEV POLYNOMIALS

Betül ŞAKİROĞLU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İnci GÜLTEKİN

In this thesis, firstly the generalized Chebyshev Polynomials $V_{n,m}(x)$ and $\Omega_{n,m}(x)$ have been obtained via matrices. Later, new recurrence relation has been defined for the derivatives of these polynomials and created tables with the help of combinatorial forms described for derivative polynomials of this polynomial. Finally, examples showing how to write derivative polynomials easily have been given.

2016, 66 pages

Keywords: Chebyshev Polynomial, Matrices, Fibonacci Numbers, Fibonacci Polynomial, Lucas Polynomial, Pochhammer symbol.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Çalışmalarım boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü, sabır ve desteklerinden dolayı değerli hocam Sayın Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN'e,

Kelimelerle anlatılamayan fedakarlığı, karşılıksız sevgisi ve sonsuz desteğinden dolayı hakkını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim canım babam Sayın Yrd. Doç. Dr. Halis ŞAKİROĞLU'na ve aileme teşekkür ederim.

Betül ŞAKİROĞLU

Haziran, 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Geren Fonksiyonu	3
2.1.1. Geren fonksiyonlarının eşitliği.....	4
2.1.2. Geren fonksiyonlarda toplama ve çarpma.....	5
2.2. Dizilerin Konvolüsyonu	8
2.2.1. Genelleşen Fibonacci Sayılarının Konvolüsyonu	8
2.3. Vieta Polinomları	10
2.3.1. Vieta tabloları ve polinomları.....	10
2.4. Pochhammer Sembolleri	13
2.5. Gauss Fonksiyonları	15
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	17
3.1. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomları.....	17
3.2. Genelleştirilmiş $J_{n,m}(x)$ Jakobsthal ve $j_{n,m}(x)$ Jakobsthal Lucas Polinomları.....	24
3.3. Chebyshev ve Jakobsthal Polinomları	25
3.4. $P_{n,m}(x)$ Polinomları ve Chebyshev Polinomları	28
3.5. Chebyshev Polinomlarının Karışık Konvolüsyonları.....	30
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	37
4.1. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomları.....	37
4.2. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Tabloları	39
4.3. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Matris Gösterimi	41
4.4. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun Türev Polinomu	52
4.5. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Türev Polinomlarının Tabloları	63

5. SONUÇ	65
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	67



SİMGELER DİZİNİ

$[\]$	Tam Değer
$(x)_n$	Pochhammer Sembolü
$\Omega_{n,m}(x)$	Genelleştirilmiş Chebyshev polinomu (Vieta-Lucas Polinomu)
$\Omega'_{n,m}(x)$	$\Omega_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun Türev Polinomu
$\Omega^s_{n,m}(x)$	$\Omega_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun s. Konvolüsyonu
$B'(n, j)$	$V'_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun Türev Tablosu
$B_{n,m}(x)$	Morgan-Voyce Polinomu
$C_{n,m}(x)$	Horadam Polinomu
$F_n^{(k)}$	k. Fibonacci Konvolüsyon Dizisi
F_n	Fibonacci sayıları
$J_{n,m}(x)$	Genelleştirilmiş Jakobsthal polinomu
$P_{n,m}(x)$	Genelleştirilmiş Karakteristik Polinom (Parametrik polinom)
$V_{n,m}(x)$	Genelleştirilmiş Chebyshev polinomu (Vieta-Fibonacci Polinomu)
$V'_{n,m}(x)$	$V_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun Türev Polinomu
$V_{n,m}^{r,s}(x)$	$V_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun Karışık Konvolüsyonu
$V_{n,m}^r(x)$	$V_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun r. Konvolüsyonu
$V_n(x)$	Vieta- Fibonnaci Polinomu
$b'(n, j)$	$\Omega'_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun Türev Tablosu
$j_{n,m}(x)$	Genelleştirilmiş Jakobsthal-Lucas polinomu
$v_n(x)$	Vieta- Lucas Polinomu
${}_2F_1[a, b; c; z]$	Gauss Serisi (Hipergeometrik Seri)
$\Gamma(x)$	Gama Fonksiyonu
$B(n, j)$	$V_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinom Tablosu
$P(x)$	Karakteristik Polinomu
$b(n, j)$	$\Omega_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinom Tablosu

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. $B(n, j)$ vieta tablosu.....	11
Çizelge 2.2. $b(n, j)$ vieta tablosu	11
Çizelge 3.1. $V_{n,2}(x)$ polinom değerleri	21
Çizelge 3.2. $V_{n,3}(x)$ polinom değerleri.....	21
Çizelge 3.3. $V_{n,4}(x)$ polinom değerleri.....	22
Çizelge 4.1. $B(n, j)$ vieta-fibonacci polinom tablosu	40
Çizelge 4.2. $b(n, j)$ vieta-lucas polinom tablosu	40
Çizelge 4.3. $B'(n, j)$ vieta-fibonacci polinom türev tablosu.....	63
Çizelge 4.4. $b'(n, j)$ vieta-lucas polinom türev tablosu.....	64

1. GİRİŞ

Matematikte ilk kez Chebyshev Polinomları, sayılar teorisi ve onun adını taşıyan polinomların dizisi üzerinde çalışmış ünlü Rus matematikçi Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) tarafından tanımlanmıştır.

Ortogonal polinomların bir dizisi olan Chebyshev Polinomları, De Moivre formülüne bağlantılıdır. Bu polinomlar Fibonacci ve Lucas gibi indirgeme bağıntıları yardımıyla kolayca tanımlanabilir. Bu yüzden birçok matematikçi bu polinomları incelemiş ve birçok özellik elde etmiştir.

Chebyshev Polinomları matematiğin birçok alanında özellikle polinomların yaklaşımları alanında büyük önem taşımakta olup, bu alanda birçok makale ve kitap yazılmıştır (Rivlin 1990; Mason 2003).

Chebyshev Polinomları, fourier serileri, nümerik analizde, graf teorisinde, ve diğer birçok alanda çeşitli uygulamalara sahiptir. Birinci türden ve ikinci türden n inci Chebyshev Polinomları sırasıyla $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ ile gösterilir ve sinüs ve kosinüs gibi birçok açı formülünden doğrudan elde edilebilir. Birinci türden ve ikinci türden Chebyshev Polinomlarının, indirgeme özellikleri Horadam (2002) tarafından tanımlanan Vieta –Fibonacci ve Vieta-Lucas polinomlarına yakından bağlantılı olduğu iyi bilinir. Bu yüzden Vitula ve Slota modifiye Chebyshev Polinomları olarak Vieta polinomlarını yeniden tanımlamıştır.

Yakın geçmişte; Gospava B. Djordjevic de (2009) genelleşmiş Chebyshev polinomları üzerine çalışmalar yapmıştır. Chebyshev polinomlarının; Morgan-Voyce, Horadam ve Jacobsthal polinomları gibi iyi bilinen polinomlarla ilişkilerini incelemiştir (Djordjevic 2009).

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde; tez boyunca kullanılan bütün kavramların temel tanım ve özellikleri verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının temel tanım ve özellikleri, bu polinomlara özel durum dahil edilen polinom sınıfları, genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Jacobsthal, Morgan- Voyce ve Horadam polinomlarıyla ilişkileri ve ayrıca genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının karmaşık konvolüsyonları hakkında bilgi verilmiştir.

Tez çalışmasının dördüncü bölümünde; tanımlanan genelleştirilmiş Chebyshev Polinomları matrisler yardımı ile verilmiş, bu polinomun türev polinomunu için indirgeme bağıntısı tanımlanmış ve türev polinom tablosu elde edilmiştir.

Tezin son bölümünde ise yapılan tüm çalışmalara yönelik sonuçlara yer verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Geren Fonksiyonu

Geren fonksiyonu sabit katsayılı lineer homojen indirgeme bağıntılarını çözmek için kuvvetli bir araçtır. 1718 yılında Fransız matematikçi Abraham De Moivre Fibonacci indirgeme bağıntısını çözmek için geren fonksiyonunu buldu.

Tanım 2.1.1: $a_0, a_1, a_2, \dots$ reel sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

fonksiyonuna $\{a_n\}$ dizisinin geren fonksiyonu denir (Koshy 1976).

$i > n$ için, $a_i = 0$ olmak üzere, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlu dizisi için geren fonksiyonu,

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

olur. Örneğin;

$$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$

pozitif tam sayılar için geren bir fonksiyondur.

$$f(x) = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}x^n + \dots$$

1,3,6,10,... üçgen sayıların dizisi için geren fonsiyondur (Koshy 1976).

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

Polinomu $\frac{(x^6-1)}{(x-1)}$ olarak yazılabilir. $f(x) = \frac{(x^6-1)}{(x-1)}$ fonksiyonuna polinomdaki 1,1,1,1,1,1 katsayılarının dizisinin geren fonksiyonu denir.

2.1.1. Geren fonksiyonlarının eşitliği

Tanım 2.1.1.1:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ve \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

iki geren fonksiyon olsun. Her $n \geq 0$ için $a_n = b_n$ ise $f(x)$ ve $g(x)$ geren fonksiyonlar birbirine eşittir.

Örneğin;

$$f(x) = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$$

ve

$$g(x) = 1 + \frac{2.3}{2}x + \frac{3.4}{2}x^2 + \frac{4.5}{2}x^3 + \dots$$

için $f(x) = g(x)$ dir.

Genellikle kullanılacak geren fonksiyonu

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + a x + a^2 x^2 + \dots + a^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$$

şeklindedir (Koshy 1976).

Buna göre $a = 2$ için $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ dizisinin geren fonksiyonu;

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots$$

olur.

2.1.2. Geren fonksiyonlarda toplama ve çarpma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{ve} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

iki geren fonksiyon olmak üzere;

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

ve

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\frac{1}{(1-ax)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a^n x^n$$

olur.

Örnek 2.1.2.1: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 4$, $a_1 = 7$ sabit katsayılı lineer homojen indirgeme bağıntısını çözmek için geren fonksiyonunu kullanalım.

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$(-) \quad 5x g(x) = 5a_0x + 5a_1x^2 + 5a_2x^3 + \cdots + 5a_{n-1}x^n + \cdots$$

$$6x^2 g(x) = 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 + \cdots + 6a_{n-2}x^n + \cdots$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$g(x) - 5x g(x) + 6x^2 g(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x + (a_2 - 5a_1 + 6a_0)x^2 + \cdots$$

$$\cdots + (a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2})x^n + \cdots$$

olur.

$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ olduğundan ve $a_0 = 4$, $a_1 = 7$ yerine yazılırsa,

$$g(x)(1 - 5x + 6x^2) = 4 - 13x$$

elde edilir.

$$g(x) = \frac{4 - 13x}{(1 - 2x)(1 - 3x)} = \frac{A}{(1 - 2x)} + \frac{B}{(1 - 3x)}$$

eşitliğinde $A = 5$ ve $B = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{5}{(1 - 2x)} + \frac{1}{(1 - 3x)} \\ &= 5 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (5 \cdot 2^n + 3^n) x^n \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.2.1: Başlangıç değerleri; $F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ olmak üzere;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

şeklinde tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları denir(Koshy 1976).

Örnek 2.1.2.2: 1,1,2,3,5,8,13,21,... Fibonacci dizisinin genel fonksiyonu;

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 \dots$$

$$x f(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 \dots$$

$$x^2 f(x) = x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 \dots$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$f(x) - x f(x) - x^2 f(x) = 1$$

$$f(x)(1 - x - x^2) = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

olur. O halde; polinomun son hali,

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 \dots$$

şeklindedir.

2.2. Dizilerin Konvolüsyonu

Tanım 2.2.1: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$

iki dizi olmak üzere bu iki dizinin konvolüsyonunun terimleri

$$c_1 = a_1 b_1$$

$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$$

...

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_n b_1$$

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}$$

olarak hesaplanan $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ dizisidir (Verner and Hoggat 1970).

2.2.1. Genelleşen Fibonacci Sayılarının Konvolüsyonu

1,1,2,3,5,8,13,21,... fibonacci sayıları için genel fonksiyonu,

$$\frac{1}{1-x-x^2} = F_1 + F_2 x + F_3 x^2 + F_4 x^3 + F_5 x^4 + \dots$$

olup,

$$\frac{1}{(1-x-x^2)^{k+1}} = F_1^{(k)} + F_2^{(k)} x + F_3^{(k)} x^2 + \dots + F_{n+1}^{(k)} x^n + \dots$$

eşitliği ise Fibonacci sayılarının k. konvolüsyonunun genel fonksiyonu olur (Verner and Hoggat 1970).

Şimdi de Fibonacci sayı dizisinin kendisiyle konvolüsyonunu bulalım. Bu sayılara birinci Fibonacci konvolüsyon dizisi denir.

Birinci Fibonacci Konvolüsyon Dizisi;

$$\begin{aligned}
 F_1^{(1)} &= F_1 F_1 &= 1 \\
 F_2^{(1)} &= F_1 F_2 + F_2 F_1 &= 1 + 1 = 2 \\
 F_3^{(1)} &= F_1 F_3 + F_2 F_2 + F_3 F_1 &= 2 + 1 + 2 = 5 \\
 F_4^{(1)} &= F_1 F_4 + F_2 F_3 + F_3 F_2 + F_4 F_1 &= 3 + 2 + 2 + 3 = 10 \\
 & &= 20 \\
 & &= 38 \\
 & &= 71 \\
 & &\vdots
 \end{aligned}$$

(1,2,5,10,20,38,71,...) şeklinde bulunur.

Şimdi ise Fibonacci dizisi ile birinci Fibonacci konvolüsyon dizisinin konvolüsyonunu bulalım.

İkinci Fibonacci Konvolüsyon Dizisi;

$$\begin{aligned}
 F_1^{(2)} &= F_1 F_1^{(1)} &= 1 \\
 F_2^{(2)} &= F_2 F_1^{(1)} + F_1 F_2^{(1)} &= 1 + 2 = 3 \\
 F_3^{(2)} &= F_3 F_1^{(1)} + F_2 F_2^{(1)} + F_1 F_3^{(1)} &= 2 + 2 + 5 = 9 \\
 F_4^{(2)} &= F_4 F_1^{(1)} + F_3 F_2^{(1)} + F_2 F_3^{(1)} + F_1 F_4^{(1)} &= 3 + 4 + 5 + 10 = 22 \\
 & &= 41 \\
 & &= 111 \\
 & &\vdots
 \end{aligned}$$

(1,3,9,22,41,111,...) şeklinde bulunur.

Fibonacci dizisi,

$$\frac{1}{1-x-x^2} = F_1 + F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + F_5x^4 + \dots + F_{n+1}x^n + \dots$$

Birinci Fibonacci Konvolüsyon dizisi,

$$\frac{1}{(1-x-x^2)^2} = F_1^{(1)} + F_2^{(1)}x + F_3^{(1)}x^2 + \dots + F_{n+1}^{(1)}x^n + \dots$$

İkinci Fibonacci Konvolüsyon dizisi,

$$\frac{1}{(1-x-x^2)^3} = F_1^{(2)} + F_2^{(2)}x + F_3^{(2)}x^2 + \dots + F_{n+1}^{(2)}x^n + \dots$$

şeklindedir.

2.3. Vieta Polinomları

2.3.1. Vieta tabloları ve polinomları

$n \geq 1$ için aşağıdaki gibi tanımlanan

$$B(n, j) = \binom{n-j-1}{j}, \quad \left(0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) \quad (2.1)$$

ve

$$b(n, j) = \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j}, \quad \left(0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \quad (2.2)$$

kombinasyonel formları göz önüne alalım. Buna göre $B(n, j)$ ve $b(n, j)$ nin ilk birkaç terimi Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2’de gösterilmiştir.

Çizelge 2.1. $B(n, j)$ vieta tablosu

1
1
1 1
1 2
1 3 1
1 4 3
1 5 6 1
1 6 10 4
1 7 15 10 1
1 8 21 20 5
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Çizelge 2.2. $b(n, j)$ vieta tablosu

1
1 2
1 3
1 4 2
1 5 5
1 6 9 2
1 7 14 7
1 8 20 16 2
1 9 27 30 9
1 10 35 50 25 2
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Çizelge 2.1 Vieta- Fibonacci tablosu ve Çizelge 2.2 Vieta- Lucas tablosu olarak adlandırılır.

Çizelge 2.1 ve (2.1)' den $V_n(x)$ Vieta – Fibonacci polinomları

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}, \quad V_0(x) = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır (Horadam 1973). (2.3)' den

$$V_1(x) = 1, \quad V_2(x) = x, \quad V_3(x) = x^2 - 1, \quad V_4(x) = x^3 - 2x, \quad V_5(x) = x^4 - 3x^2 + 1 \\ V_6(x) = x^5 - 4x^3 + 3x, \quad V_7(x) = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$$

elde edilir.

Çizelge 2.2. ve (2.2) eşitliğinden $v_n(x)$ Vieta – Lucas polinomları,

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad v_0(x) = 2 \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır (Horadam 1973). (2.4)'den

$$v_1(x) = x, \quad v_2(x) = x^2 - 2, \quad v_3(x) = x^3 - 3x, \quad v_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2 \\ v_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x, \quad v_6(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$$

elde edilir.

2.4. Pochhammer Sembolleri

Tanım 2.4.1: n negatif olmayan tam sayı olmak üzere,

$$(x)_n = x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1) \quad (2.5)$$

$$(x)_0 = 1, \quad (1)_n = n!$$

şeklinde tanımlanan ifade pochhammer sembolü olarak adlandırılır (Anonim 2016).

Şimdi bununla ilgili birkaç özellik verelim.

Özellikler

$$1) \quad \frac{(x)_n}{n!} = \binom{x+n-1}{n} \quad (2.6)$$

$$2) \quad x^{(n)} = (-1)^n (-x)_n \quad (2.7)$$

3) x ve $x+n$ negatif olmayan sayılarını Gama fonksiyonunu kullanarak n 'nin reel değerleri için genişletilebilir.

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \quad (2.8)$$

şeklindedir. Burada Gama fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = (x-1)! \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$4) \quad (2.10)$$

$$(a + b)^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (a)^{(n-j)} (b)^{(j)}$$

Özel olarak;

$$(1 - x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-x)^k \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilir.

$$5) \quad (a)_{n-k} = \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-a-n)_k} \quad (2.12)$$

$$6) \quad \frac{(-1)^k}{(n-k)!} = \frac{(-n)_k}{n!} \quad (2.13)$$

$$7) \quad (-n)_{mk} = m^{mk} \left(\frac{-n}{m} \right)_k \left(\frac{1-n}{m} \right)_k \dots \left(\frac{m-1-n}{m} \right)_k \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} 8) \quad \binom{-n}{k} &= \frac{-n \cdot -(n+1) \cdot -(n+2) \dots -(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \\ &= (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned} \quad (2.15)$$

(Anonim 2016).

2.5. Gauss Fonksiyonları

$$1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

serisi Gauss serisi ya da hipergeometrik seri olarak adlandırılır. Genellikle,

${}_2F_1 [a, b; c; z]$ şeklinde gösterilir. z değişken, a, b ve c de fonksiyonun parametreleri olarak adlandırılır (Slater 1966).

Eğer a ve b den herhangi biri $-n$ negatif bir tam sayı ise; seri sadece sınırlı sayıda terime sahiptir.

Örneğin; $a = -2$ ise;

$${}_2F_1 [a, b; c; z] = 1 + \frac{(-2)b}{c} \frac{z}{1!} + \frac{(-2)(-1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + 0 = 1 - \frac{2bz}{c} + \frac{b(b+1)z^2}{c(c+1)}$$

olur.

Bundan sonraki bütün terimlerin sıfır olduğu görülür.

Gauss fonksiyonu;

$${}_2F_1 [a, b; c; z] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}$$

şeklinde tanımlanır. Burada a, b, c ve z reel ya da kompleks olabilir.

$${}_2F_1[a, b; c; z] = {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right]$$

ya da

$${}_2F_1[a, b; c; z] = F[a, b; c; z]$$

şeklinde de gösterilir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomları

Tanım 3.1.1. Genelleştirilmiş Chebyshev polinomları $\Omega_{n,m}(x)$ ve $V_{n,m}(x)$ ile gösterilir. (x reel bir değişkendir) ve

$$\Omega_{n,m}(x) = x \Omega_{n-1,m}(x) - \Omega_{n-m,m}(x); \quad n \geq m, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

$$\Omega_{n,m}(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3 \dots, m-1$$

$$\Omega_{m,m}(x) = x^m - 2$$

$$V_{n,m}(x) = x V_{n-1,m}(x) - V_{n-m,m}(x); \quad n \geq m, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

$$V_{n,m}(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3 \dots, m-1$$

$$V_{m,m}(x) = x^m - 1$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayılar kümesini gösterir (Djordjevic 2009).

$\Omega_{n,m}(x)$ ve $V_{n,m}(x)$ polinomlarının geren fonksiyonları,

$$F^m(t) = (1 - t^m)(1 - xt + t^m)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{n,m}(x) t^n \quad (3.3)$$

$$G^m(t) = (1 - xt + t^m)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{n,m}(x) t^n$$

şeklindedir. (3.3)' ün sağlamasını yapalım.

$$G^m(t) = (1 - xt + t^m)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{n,m}(x) t^n$$

için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_{n,m}(x) t^n = V_{1,m}(x) t + V_{2,m}(x) t^2 + V_{3,m}(x) t^3 + \dots$$

toplamında $m = 1$ seçilirse,

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_{n,m}(x) t^n = V_{1,1}(x) t + V_{2,1}(x) t^2 + V_{3,1}(x) t^3 + \dots$$

olur. (3.2) formülleri kullanırsa,

$$V_{1,1}(x) = x^1 - 1 = x - 1$$

$$V_{2,1}(x) = x V_{1,1}(x) - V_{1,1}(x)$$

$$= x \cdot (x - 1) - (x - 1)$$

$$= x^2 - 2x + 1$$

$$= (x - 1)^2$$

$$V_{3,1}(x) = x V_{2,1}(x) - V_{2,1}(x)$$

$$= x (x - 1)^2 - (x - 1)^2$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$= (x - 1)^3$$

⋮

olup,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \frac{1}{1 - ax}$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} G^1(t) &= (x-1)t + (x-1)^2 t^2 + (x-1)^3 t^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1-(x-1)t} = \frac{1}{1-xt+t} = (1-xt+t)^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.3)'ün açık formülleri,

$$\begin{aligned} \Omega_{n,m}(x) &= \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^k \frac{n-(m-2)k}{n-(m-1)k} \binom{n-(m-1)k}{k} x^{n-mk} \\ V_{n,m}(x) &= \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^k \binom{n-(m-1)k}{k} x^{n-mk} \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklindedir.

Örnek 3.1.1: $\Omega_{4,3}(x)$ genelleştirilmiş chebyshev polinomu (3.1)'den

$$\begin{aligned} \Omega_{4,3}(x) &= x \Omega_{3,3}(x) - \Omega_{1,3}(x) \\ &= x(x^3 - 2) - x \\ &= x^4 - 3x \end{aligned}$$

ve (3.4)'den

$$\begin{aligned}
\Omega_{4,3}(x) &= \sum_{k=0}^{[4/3]} (-1)^k \frac{4-k}{4-2k} \binom{4-2k}{k} x^{4-3k} \\
&= 1 \binom{4}{0} x^4 + (-1) \frac{3}{2} \binom{2}{1} x^1 \\
&= x^4 - 3x
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.1. 2 : $V_{4,2}(x)$ genelleştirilmiş chebyshev polinomu (3.2)' den

$$V_{4,2}(x) = x V_{3,2}(x) - V_{2,2}(x) ; \quad 4 \geq 2 , \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$V_{3,2}(x) = x V_{2,2}(x) - V_{1,2}(x)$$

$$= x (x^2 - 1) - x$$

$$= x^3 - 2x$$

$$V_{4,2}(x) = x (x^3 - 2x) - (x^2 - 1)$$

$$= x^4 - 3x^2 + 1$$

ve (3.4)' den

$$\begin{aligned}
\Omega_{4,2}(x) &= \sum_{k=0}^{[4/2]} (-1)^k \binom{4-k}{k} x^{4-2k} \\
&= 1 \cdot \binom{4}{0} x^4 + (-1) \binom{3}{1} x^2 + 1 \cdot \binom{2}{2} x^0 \\
&= x^4 - 3x^2 + 1
\end{aligned}$$

olur.

Aşağıdaki tablolarda $m = 2,3,4$ değerleri için birkaç $V_{n,m}(x)$ genelleştirilmiş chebyshev polinomu verilir.

Çizelge 3.1. $V_{n,2}(x)$ polinom değerleri

$m = 2$	$V_{n,2}(x)$ polinom değerleri
$V_{2,2}(x)$	$x^2 - 1$
$V_{3,2}(x)$	$x^3 - 2x$
$V_{4,2}(x)$	$x^4 - 3x^2 + 1$
$V_{5,2}(x)$	$x^5 - 4x^3 + 3x$
$V_{6,2}(x)$	$x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$
$V_{7,2}(x)$	$x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x$

Çizelge 3.2. $V_{n,3}(x)$ polinom değerleri

$m = 3$	$V_{n,3}(x)$ polinom değerleri
$V_{3,3}(x)$	$x^3 - 1$
$V_{4,3}(x)$	$x^4 - 2x$
$V_{5,3}(x)$	$x^5 - 3x^2$
$V_{6,3}(x)$	$x^6 - 4x^3 + 1$
$V_{7,3}(x)$	$x^7 - 5x^4 + 3x$
$V_{8,3}(x)$	$x^8 - 6x^5 + 6x^2$
$V_{9,3}(x)$	$x^9 - 7x^6 + 10x^3 - 1$

Çizelge 3.3. $V_{n,4}(x)$ polinom değerleri

$m = 4$	$V_{n,4}(x)$ polinom değerleri
$V_{4,4}(x)$	$x^4 - 1$
$V_{5,4}(x)$	$x^5 - 2x$
$V_{6,4}(x)$	$x^6 - 3x^2$
$V_{7,4}(x)$	$x^7 - 4x^3$
$V_{8,4}(x)$	$x^8 - 5x^4 + 1$
$V_{9,4}(x)$	$x^9 - 6x^5 + 3x$
$V_{10,4}(x)$	$x^{10} - 7x^6 + 6x^2$
$V_{11,4}(x)$	$x^{11} - 8x^7 + 10x^3$

Tanım 3.1.1: $A = (a_{ij})$ matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ ve } j \text{ değerleri komşu} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.5)$$

olduğunda E birim matris ve x skaler bir değişken olmak üzere $P(x)$ karakteristik polinomu,

$$P(x) = \det(A + xE) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $P(x)$ için alternatif başka bir tanım da n matrisin mertebesi olduğunda,

$$P(x) = (-1)^n \det(A - xE)$$

şeklindedir (Hosoya 1973).

$$V_{n,m}(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, m-1 \quad \text{ve} \quad V_{m,m}(x) = x^m - 1, \quad n \geq m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

olduğunda $m=2$ için,

$$V_{n,m}(x) = xV_{n-1,m}(x) - V_{n-m,m}(x) = P(x) = \det(A + xE)$$

olur.

Buna göre $V_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunda $n = 2$ için,

$$V_{2,2}(x) = x^2 - 1$$

olup (3.5)' den

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

matrisi kullanılarak (3.6)' dan

$$\det \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} + x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \right] = \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}_{2 \times 2} = x^2 - 1$$

elde edilir.

$V_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunda $n = 3$ için,

$$V_{3,2}(x) = x^3 - 2x$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

matrisi kullanılarak,

$$\det \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} + x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \right] = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}_{3 \times 3} = x^3 - 2x$$

elde edilir.

3.2. Genelleştirilmiş $J_{n,m}(x)$ Jakobsthal ve $j_{n,m}(x)$ Jakobsthal Lucas Polinomları

Tanım 3.2.1: Genelleştirilmiş $J_{n,m}(x)$ Jakobsthal ve $j_{n,m}(x)$ Jakobsthal Lucas Polinomları sırasıyla;

başlangıç değerleri;

$$J_{0,m}(x) = 0, \quad J_{n,m}(x) = 1 \quad n = 1, 2, \dots, m-1$$

ve

$$j_{0,m}(x) = 2, \quad j_{n,m}(x) = 1 \quad n = 1, 2, \dots, m-1$$

olduğunda

$$J_{n,m}(x) = J_{n-1,m}(x) + 2x J_{n-m,m}(x), \quad n \geq m, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

ve

$$j_{n,m}(x) = j_{n-1,m}(x) + 2x j_{n-m,m}(x), \quad n \geq m, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır (Djordjevic 2009).

(3.7) ve (3.8) nin açık formülleri,

$$J_{n+1,m}(x) = \sum_{k=0}^{[n/m]} \binom{n-(m-1)k}{k} (2x)^k \quad (3.9)$$

$$j_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{[n/m]} \frac{n-(m-2)k}{n-(m-1)k} \binom{n-(m-1)k}{k} (2x)^k$$

şeklindedir.

3.3. Chebyshev ve Jacobsthal Polinomları

Bu bölümde $\Omega_{n,m}(x)$ ve $V_{n,m}(x)$ Chebyshev Polinomları ile $J_{n,m}(x)$ ve $j_{n,m}(x)$ Jacobsthal Polinomları arasındaki bağıntılar verilecek (Djordjevic 2000; Djordjevic and Srivastava 2005; Djordjevic 2007).

Teorem 3.3.1: Her $n \geq m$, $n, m \in \mathbb{N}$ için,

$$V_{n,m}(x) = x^n J_{n+1,m}(-(2x^m)^{-1}) \quad (3.10)$$

$$\Omega_{n,m}(x) = x^n j_{n,m}(-(2x^m)^{-1}) \quad (3.11)$$

olur (Djordjevic 2009).

İspat: (3.10) için

$$\begin{aligned}
x^n J_{n+1,m}(-(2x^m)^{-1}) &= x^n \sum_{k=0}^{[n/m]} \binom{n-(m-1)k}{k} (-2(2x^m)^{-1})^k \\
&= \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^k \binom{n-(m-1)k}{k} x^n 2^k 2^{-k} x^{-mk} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^k \binom{n-(m-1)k}{k} x^{n-mk} \\
&= V_{n,m}(x)
\end{aligned}$$

olur. (3.11) için,

$$\begin{aligned}
x^n j_{n,m}(-(2x^m)^{-1}) &= x^n \sum_{k=0}^{[n/m]} \frac{n-(m-2)k}{n-(m-1)k} \binom{n-(m-1)k}{k} (-2(2x^m)^{-1})^k \\
&= \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^k \frac{n-(m-2)k}{n-(m-1)k} \binom{n-(m-1)k}{k} x^{n-mk} \\
&= \Omega_{n,m}(x)
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.3.2: Her $n \geq m$, $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega_{2n+1,2m}(x) = x^{2n+1} j_{2n+1,2m}(-(2x^{2m})^{-1}) \quad (3.12)$$

$$\Omega_{2n,2m}(x) = x^{2n} j_{2n,2m}(-(2x^{2m})^{-1}) \quad (3.13)$$

$$V_{2n,2m}(x) = x^{2n} J_{2n+1,2m}(-(2x^{2m})^{-1}) \quad (3.14)$$

$$V_{2n+1,2m}(x) = x^{2n+1} J_{2n+2,2m}(-(2x^{2m})^{-1}) \quad (3.15)$$

(Djordjevic 2009).

İspat: (3.13) için;

$$\begin{aligned}
 x^{2n} j_{2n,2m}(-(2x^{2m})^{-1}) &= x^{2n} \sum_{k=0}^{[n/m]} \frac{2n - (2m-2)k}{2n - (2m-1)k} \binom{2n - (2m-1)k}{k} (-2(2x^{2m})^{-1})^k \\
 &= \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^k \frac{2n - (2m-2)k}{2n - (2m-1)k} \binom{2n - (2m-1)k}{k} x^{2n-2mk} \\
 &= \Omega_{2n,2m}(x)
 \end{aligned}$$

olur ve (3.15) için;

$$\begin{aligned}
 x^{2n+1} J_{2n+2,2m}(-(2x^{2m})^{-1}) &= x^{2n+1} \sum_{k=0}^{[n/m]} \binom{2n+1 - (2m-1)k}{k} (-2(2x^{2m})^{-1})^k \\
 &= \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^k \binom{2n+1 - (2m-1)k}{k} x^{2n+1} x^{-2mk} \\
 &= \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^k \binom{2n+1 - (2m-1)k}{k} x^{2n+1-2mk} \\
 &= V_{2n+1,2m}(x)
 \end{aligned}$$

olur.

3.4. $P_{n,m}(x)$ Polinomları ve Chebyshev Polinomları

Tanım 3.4.1: $P_{n,m}(x)$ polinomu;

$$P_{n,m}(x) = x P_{n-1,m}(x) + 2P_{n-m,m}(x) - P_{n-2m,m}(x), \quad n \geq 2m, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3.16)$$

şeklindedir (Djordjevic 2009). (3.4.1) de $m=1$ için;

$$P_n(x) = (x+2)P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

olup her $P \in \{b, B, c, C\}$ için;

$$b_0 = 1, \quad b_1 = x + 1, \quad (\text{Morgan} - \text{Voyce polinomları})$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = x + 2, \quad (\text{Morgan} - \text{Voyce polinomları})$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = x + 3, \quad (\text{Horadam polinomları})$$

$$C_0 = 2, \quad C_1 = x + 2, \quad (\text{Horadam polinomları})$$

olur.

Bu bölümde, $m = 3$ için $P_{n,m}(x)$ polinomunu (3.16)' dan,

$$P_{n,3}(x) = x P_{n-1,3}(x) + 2P_{n-3,3}(x) - P_{n-6,3}(x), \quad n \geq 6, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3.17)$$

olup,

$P_{n,3}(x) \in \{b_{n,3}, B_{n,3}, c_{n,3}, C_{n,3}\}$ için, başlangıç değerleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
b_{0,3}(x) &= 1, & b_{1,3}(x) &= x, & b_{2,3}(x) &= x^2, \\
b_{3,3}(x) &= x^3 + 1, & b_{4,3}(x) &= x^4 + 4x, & b_{5,3}(x) &= x^5 + 5x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{0,3}(x) &= 1, & B_{1,3}(x) &= x, & B_{2,3}(x) &= x^2, \\
B_{3,3}(x) &= x^3 + 2, & B_{4,3}(x) &= x^4 + 4x, & B_{5,3}(x) &= x^5 + 6x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{0,3}(x) &= 1, & c_{1,3}(x) &= x, & c_{2,3}(x) &= x^2, \\
c_{3,3}(x) &= x^3 + 3, & c_{4,3}(x) &= x^4 + 5x, & c_{5,3}(x) &= x^5 + 7x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{0,3}(x) &= 2, & C_{1,3}(x) &= x, & C_{2,3}(x) &= x^2, \\
C_{3,3}(x) &= x^3 + 2, & C_{4,3}(x) &= x^4 + 4x, & C_{5,3}(x) &= x^5 + 6x^2
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.1: Her $n \geq m$, $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$(-1)^n x c_{n,3}(-x^2) = \Omega_{2n+1,6}(x), \quad n \geq 0; \quad (3.18)$$

$$(-1)^n C_{n,3}(-x^2) = \Omega_{2n,6}(x), \quad n \geq 0; \quad (3.19)$$

$$(-1)^n b_{n,3}(-x^2) = V_{2n,6}(x), \quad n \geq 0; \quad (3.20)$$

$$(-1)^n x B_{n,3}(-x^2) = V_{2n+1,6}(x), \quad n \geq 0; \quad (3.21)$$

$$c_{n+3,3}(x) - c_{n,3}(x) = C_{n+3,3}(x), \quad n \geq 0; \quad (3.22)$$

$$b_{n+3,3}(x) + b_{n,3}(x) = C_{n+3,3}(x), \quad n \geq 0; \quad (3.23)$$

$$C_{n+3,3}(x) - C_{n,3}(x) = x c_{n+2,3}(x), \quad n \geq 0; \quad (3.24)$$

$$B_{n,3}(x) + B_{n-3,3}(x) = c_{n,3}(x), \quad n \geq 3; \quad (3.25)$$

$$B_{n,3}(x) - B_{n-6,3}(x) = C_{n,3}(x), \quad n \geq 6; \quad (3.26)$$

(Djordjevic 2009).

İspat : (3.20) için,

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} b_{n+1,3}(-x^2) &= (-1)^{n+1} (-x^2 b_{n,3}(-x^2) + 2b_{n-2,3}(-x^2) - b_{n-5,3}(-x^2)) \\ &= x^2 \left((-1)^n b_{n,3}(-x^2) \right) - 2(-1)^{n-2} b_{n-2,3}(-x^2) - (-1)^{n-5} b_{n-5,3}(-x^2) \\ &= x^2 V_{2n,6}(x) - 2 V_{2n-4,6}(x) - V_{2n-10,6}(x) \\ &= x \left(V_{2n+1,6}(x) + V_{2n-5,6}(x) \right) - 2 V_{2n-4,6}(x) + V_{2n-4,6}(x) - x V_{2n-5,6}(x) \\ &= x V_{2n+1,6}(x) - V_{2n-4,6}(x) = V_{2n+2,6}(x) \end{aligned}$$

olur.

3.5. Chebyshev Polinomlarının Karışık Konvolüsyonları

Bu bölümde $V_{n,m}(x)$ polinomlarının r . konvolüsyonları olan $V_{n,m}^r(x)$ polinomları ve $\Omega_{n,m}(x)$ polinomlarının s . konvolüsyonları olan $\Omega_{n,m}^s(x)$ polinomlarını incelenip sonra da r ve s negatif olmayan tam sayılar olmak üzere Chebyshev Polinomlarının karışık konvolüsyonları olan $\mathcal{V}_{n,m}^{r,s}(x)$ polinomu verilecek.

Burada $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ ve $r+s \geq 1$ olarak kabul edilmiştir. $V_{n,m}^r(x)$ polinomu,

$$nV_{n,m}^r(x) = x(r+n)V_{n-1,m}^r(x) - (n+mr)V_{n-m,m}^r(x) \quad (3.27)$$

şekline tanımlanmış olup geren fonksiyonu,

$$G_r^m(t) = (1 - xt + t^m)^{-(r+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{n,m}^r(x) t^n \quad (3.28)$$

ile ifade edilir.

$$G_r^m(t) = (1 - xt + t^m)^{-(r+1)}$$

eşitliğinde (2.11) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} G_r^m(t) &= (1 - xt + t^m)^{-(r+1)} = (1 - t(x - t^{m-1}))^{-(r+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-(r+1)}{n} (-t(x - t^{m-1}))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-(r+1)}{n} (-t)^n (x - t^{m-1})^n \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. (2.15) kullanılarak

$$\begin{aligned} \binom{-(r+1)}{n} &= \frac{-(r+1) \cdot -(r+2) \dots -(r+n)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(r+1) \cdot (r+2) \dots (r+n)}{n!} = (-1)^n \frac{(r+n)!}{r! n!} \end{aligned}$$

olur.

(2.8) ve (2.9) formülü de kullanarak;

$$= (-1)^n \frac{(r+1)_n}{n!}$$

elde edilir ve diğer taraftan (2.11)'de kullanılırsa,

$$(x - t^{m-1})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-t^{m-1})^k$$

elde edilmiş olur.

(3.29)'da yerine yazılırsa,

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-t^{m-1})^k t^n \quad (3.30)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^k \frac{(r+1)_{n-(m-1)k}}{k! (n-mk)!} x^{n-mk} t^n \quad (3.31)$$

olur.

Şimdi (3.31)'de aşağıdaki eşitlikleri kullanalım. Bunun için (2.12) formülünü $(r+1)_{n-(m-1)k}$ için açarsak;

$$(r+1)_{n-(m-1)k} = \frac{(-1)^{(m-1)k} (r+1)_n}{(1-r-1-n)_{(m-1)k}} = \frac{(-1)^{(m-1)k} (r+1)_n}{(-r-n)_{(m-1)k}}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.13) formülünü $(n - mk)!$ ifadesini açmak için kullanılırsa,

$$(n - mk)! = \frac{(-1)^{mk} n!}{(-n)_{mk}}$$

elde edilir. Bu ifadeler,

$$\frac{(-1)^k (r + 1)_{n-(m-1)k}}{(n - mk)!} \cdot \frac{(x^{-m})^k}{k!}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$= \frac{(-1)^k \cdot (-1)^{(m-1)k} \cdot (r + 1)_n \cdot (-n)_{mk}}{(-r - n)_{(m-1)k} \cdot (-1)^{mk} \cdot n!}$$

bulunur. (2.15) formülünü de bu adımda kullanırsak,

$$\begin{aligned} & \frac{(r + 1)_n m^{mk} \left(\frac{-n}{m}\right)_k \left(\frac{1-n}{m}\right)_k \cdots \left(\frac{m-1-n}{m}\right)_k}{n! (m-1)^{(m-1)k} \left(\frac{-r-n}{m-1}\right)_k \left(\frac{1-r-n}{m-1}\right)_k \cdots \left(\frac{m-2-r-n}{m-1}\right)_k} \cdot \frac{(x^{-m})^k}{k!} \\ &= \frac{(r + 1)_n}{n!} \cdot \frac{\left(\frac{-n}{m}\right)_k \left(\frac{1-n}{m}\right)_k \cdots \left(\frac{m-1-n}{m}\right)_k}{\left(\frac{-r-n}{m-1}\right)_k \left(\frac{1-r-n}{m-1}\right)_k \cdots \left(\frac{m-2-r-n}{m-1}\right)_k} \cdot \frac{\left(\frac{m^m}{(m-1)^{(m-1)}} x^{-m}\right)^k}{k!} \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. (3.29) – (3.31) formüllerden aşağıdaki formül,

$$V_{n,m}^r(x) = \frac{x^n (r + 1)_n}{n!} {}_mF_{m-1} \left[\begin{matrix} \frac{-n}{m}, & \frac{1-n}{m}, & \dots, & \frac{m-1-n}{m}; & \frac{x^{-m} m^m}{(m-1)^{(m-1)}} \\ \frac{-r-n}{m-1}, & \frac{1-r-n}{m-1}, & \dots, & \frac{m-2-r-n}{m-1} \end{matrix} \right] \quad (3.32)$$

elde edilir. Burada $m = 2$ ve $r = 0$ için;

$$V_n(x) = x^n {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n \\ \frac{1-n}{2}; \frac{4}{x^2} \end{matrix} \right]_{-n;} \quad (3.33)$$

olur. Böylece; $V_{n,2}^0(x) = V_n(x)$ olduğu görülür.

$\Omega_{n,m}^s(x)$ polinomunun s. konvolüsyonu

$$F_s^m(t) = (1 - t^m)(1 - xt + t^m)^{-(s+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{n,m}^s(x) t^n \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlanır.

$$n \Omega_{n,m}^s(x) = x(n+s)\Omega_{n-1,m}^s(x) - 2m(s+1)\Omega_{n-m,m}^s(x) \quad (3.35)$$

$$= x(s+1)(2m-n)\Omega_{n-1-m,m}^s(x) + (n-2m)\Omega_{n-2m,m}^s(x) \quad (3.36)$$

olur. Ayrıca (3.35)' den

$$\Omega_{n,m}^s(x) = \sum_{j=0}^{[n/m]} \binom{s+1}{j} V_{n-mj,m}^s(x) \quad (3.37)$$

yazılır. $v_{n,m}^{r,s}(x)$ karışık konvolüsyonu

$$S^m(t) = \frac{(1 - t^m)^{s+1}}{(1 - xt + t^m)^{r+s+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{n,m}^{r,s}(x) t^n \quad (3.38)$$

şeklinde tanımlanır. (3.38) formülünden,

$$\begin{aligned}
 S^m(t) &= \frac{(1-t^m)^{s+1}}{(1-xt+t^m)^{s+1}} \cdot \frac{1}{(1-xt+t^m)^{r+1}} \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{n,m}^s(x) t^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_{n,m}^r(x) t^n \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \Omega_{n-k,m}^s(x) V_{k,m}^r(x) \right) t^n
 \end{aligned}$$

yazılır. (3.38)'den

$$n v_{n,m}^{r,s}(x) = x(r+s+2)v_{n-1,m}^{r+1,s}(x) - m(s+1)v_{n-m,m}^{r+1,s-1}(x) - m(r+s+2)v_{n-m,m}^{r+1,s}(x)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{n,m}^{r,s}(x) t^n = (1-t^m)^{s+1} \sum_{n=1}^{\infty} V_{n,m}^{r+s+1}(x) t^n \quad (3.39)$$

yazılır. Diğer taraftan (3.39) da $r = s$ için,

$$v_{n,m}^{s,s}(x) = \sum_{k=1}^{[n/m]} (-1)^k \binom{s+1}{k} V_{n-mk,m}^{2s+1}(x) \quad (3.40)$$

ve $s = 0$ (ya da $r = 0$) için,

$$V_{n,m}(x) \text{ in r. konvolüsyon } v_{n,m}^{r,0}(x) = V_{n,m}^r(x) \quad (3.41)$$

$$\Omega_{n,m}(x) \text{ in s. konvolüsyon } v_{n,m}^{0,s}(x) = \Omega_{n,m}^s(x) \quad (3.42)$$

olur.

Böylece $m = 2$ için (3.41) ve (3.42) den

$$V_n(x) \text{ in r. konvolüsyonu } v_{n,2}^{r,0}(x) = V_n^r(x)$$

$$\Omega_n(x) \text{ in s. konvolüsyonu } v_{n,2}^{0,s}(x) = \Omega_n^s(x)$$

şeklinde ifade edilir.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomları

Tanım 4.1.1: $V_{n,m}(x)$ Vieta- Fibonnacci ve $\Omega_{n,m}(x)$ Vieta-Lucas diye de adlandırılan Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomları , x reel bir değişken olmak üzere sırasıyla,

$$V_{n,m}(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3 \dots, m-1$$

$$V_{m,m}(x) = x^m - 1$$

ve

$$\Omega_{n,m}(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3 \dots, m-1$$

$$\Omega_{m,m}(x) = x^m - 2$$

başlangıç şartları altında,

$$V_{n,m}(x) = xV_{n-1,m}(x) - V_{n-m,m}(x); \quad n \geq m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

ile ve

$$\Omega_{n,m}(x) = x\Omega_{n-1,m}(x) - \Omega_{n-m,m}(x); \quad n \geq m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanır. Burada, $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayılar kümesini gösterir.

$m = 1, 2, 3 \dots$ için ilk birkaç terimini,

$$\begin{aligned}
 V_{1,1}(x) &= x - 1 \\
 V_{2,1}(x) &= x^2 - 2x + 1 \\
 V_{3,1}(x) &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
 V_{4,1}(x) &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \\
 V_{5,1}(x) &= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 \\
 V_{6,1}(x) &= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 \\
 V_{7,1}(x) &= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1 \\
 V_{8,1}(x) &= x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{1,2}(x) &= x \\
 V_{2,2}(x) &= x^2 - 1 \\
 V_{3,2}(x) &= x^3 - 2x \\
 V_{4,2}(x) &= x^4 - 3x^2 + 1 \\
 V_{5,2}(x) &= x^5 - 4x^3 + 3x \\
 V_{6,2}(x) &= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1 \\
 V_{7,2}(x) &= x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{1,3}(x) &= x \\
V_{2,3}(x) &= x^2 \\
V_{3,3}(x) &= x^3 - 1 \\
V_{4,3}(x) &= x^4 - 2x \\
V_{5,3}(x) &= x^5 - 3x^2 \\
V_{6,3}(x) &= x^6 - 4x^3 + 1 \\
V_{7,3}(x) &= x^7 - 5x^4 + 3x
\end{aligned}$$

olur.

Görüldüğü gibi $V_{n,m}(x)$ Vieta-Fibonacci polinomunda m için yazılan polinomların yukarı çapraz bileşenlerinin toplamından oluşan polinomlardan $(m+1)$ için yazılan $V_{n,m+1}(x)$ polinomu elde edilir. Diğer taraftan, $\Omega_{m,m}(x)$ Vieta-Lucas polinomu içinde aynı şey geçerlidir.

4.2. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Tabloları

Tanım 4.2.1: $V_{n,m}(x)$ ve $\Omega_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının kombinasyonel formları sırasıyla;

$$B(n, j) = \binom{n-j-((m-2)j+1)}{j}, \quad \left(0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor \right)$$

ve

$$b(n, j) = \frac{n-(m-2)j}{n-(m-1)j} \binom{n-j-((m-2)j+1)}{j}, \quad \left(0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor \right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n \geq 1$ olmalıdır. $B(n, j)$ sıralamanın ilk birkaç terimi Çizelge 4.1’de ve $b(n, j)$ sıralamanın ilk birkaç terimi Çizelge 4.2’de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. $B(n, j)$ Vieta-Fibonacci polinom tablosu

$m = 1$ için,

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 36 21 7 1
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Çizelge 4.2. $b(n, j)$ Vieta-Lucas polinom tablosu

$m = 1$ için,

1
1 2
1 3 2
1 4 5 2
1 5 9 7 2
1 6 14 16 9 2
1 7 20 30 25 11 2
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Çizelge 4.1’deki Vieta- Fibonacci polinom tablosu ve Çizelge 4.2’deki Vieta- Lucas polinom tablosu olarak adlandırılır.

Bu tablolar m 'nin değerlerine göre değişecektir. Bunu şöyle genelleleyebiliriz:

$V_{n,m}(x)$ Vieta- Fibonnaci Polinomunun tablosu;

1. sütunda $\rightarrow 1, 1, 1, 1, 1 \dots$
2. sütunda $\rightarrow (m + 1)$. satırdan itibaren $\rightarrow 1, 2, 3, 4, \dots$
3. sütunda $\rightarrow (2m + 1)$. satırdan itibaren $\rightarrow 1, 3, 6, 10, 15, \dots$
- $\vdots$
- k . sütunda $\rightarrow ((k - 1)m + 1)$. satırdan itibaren tablonun elemanları yazılarak

elde edilir.

Chebyshev Polinom tabloları; bu polinomların bileşenlerinin baş katsayılarından oluşmaktadır. Yani; Chebyshev Polinom tabloları biliniyorsa, polinomların tanımlarını kullanmadan da Chebyshev Polinomlarını elde edebiliriz.

4.3. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Matris Gösterimi

Vieta-Fibonacci ve Vieta-Lucas şeklinde de adlandırılan $V_{n,m}(x)$ ve $\Omega_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarını matrisler yardımıyla da elde edebiliriz.

Teorem 4.3.1: $V_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev polinomu (Vieta-Fibonnaci Polinomu);

i) $n < m$ için;

$[A]_{n \times n}$ sıfır matrisi, $[E]_{n \times n}$ birim matris olmak üzere;

$$V_{n,m}(x) = \det[A + xE]$$

şeklindedir.

ii) $n \geq m$ için,

$$K = (a_{ij})_{(n-m+2) \times (n-m+2)} = \begin{cases} a_{12} = 1 & , \quad n = m \\ a_{12} = n - m & , \quad n \neq m \\ a_{k,k-1} = 0 & , \quad k \geq 4 \\ a_{k,k-1} = 1 & , \quad k < 4 \\ a_{k-1,k} = 1 & \\ 0 & , \text{diğer durum} \end{cases}$$

ve

$$L = (a_{ij})_{(n-m+2) \times (n-m+2)} = \begin{cases} a_{22} = x^{m-2} \\ a_{nn} = 1, & n \neq 2 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

matrisleri ile, yani açık olarak,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & n-m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n-m+2) \times (n-m+2)}$$

ve

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x^{m-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n-m+2) \times (n-m+2)}$$

şeklinde olmak üzere,

$$K + xL = \begin{pmatrix} x & n-m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x^{m-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}_{(n-m+2) \times (n-m+2)}$$

matrisi ile, ($n = m$ ise K ve $K+xL$ matrislerinde $a_{12} = 1$ dir.)

$$M = \begin{cases} \sum_{k=2} (-1)^k \binom{n-k(m-1)}{k} x^{n-km} & , \quad n-k(m-1) \geq k \\ 0 & , \quad n-k(m-1) < k \end{cases}$$

olduğunda,

$$V_{n,m}(x) = \det[K + xL] + M$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.2: $\Omega_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomu (Vieta-Lucas Polinomu),

i) $n < m$ için;

$[A]_{n \times n}$ sıfır matrisi, $[E]_{n \times n}$ birim matris olmak üzere,

$$\Omega_{n,m}(x) = \det[A + xE]$$

şeklinde olur.

ii) $n \geq m$ için,

$$P = (a_{ij})_{(n-m+2) \times (n-m+2)} = \begin{cases} a_{12} = 1 & , \quad n = m \\ a_{12} = n - m + 1 & , \quad n \neq m \\ a_{k,k-1} = 0 & , \quad k \geq 4 \\ a_{k,k-1} = 1 & , \quad k < 4 \\ a_{k-1,k} = 1 & \\ 0 & , \text{diğer durum} \end{cases}$$

ve

$$R = (a_{ij})_{(n-m+2) \times (n-m+2)} = \begin{cases} a_{22} = x^{m-2} \\ a_{nn} = 1, & n \neq 2 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

matrisleri ile yani açık olarak,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & n-m+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n-m+2) \times (n-m+2)}$$

ve

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x^{m-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n-m+2) \times (n-m+2)}$$

şeklinde olmak üzere,

$$P + xR = \begin{pmatrix} x & n-m+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x^{m-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}_{(n-m+2) \times (n-m+2)}$$

matrisi ile, ($n = m$ ise P ve $P+xR$ matrislerinde $a_{12} = 1$ dir.)

$$S = \begin{cases} \sum_{k=2} (-1)^k \frac{n-(m-2)k}{n-(m-1)k} \binom{n-k(m-1)}{k} x^{n-km} & , \quad n-k(m-1) \geq k \\ 0 & , \quad n-k(m-1) < k \end{cases}$$

olduğunda,

$$\Omega_{n,m}(x) = \det[P + xR] + S$$

şeklindedir.

İspat 4.3.1: $V_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun (Vieta-Fibonnaci Polinomu) matris ile karşılığının; $V_{n,m}(x) = \det[K + xL] + M$ eşitliğiyle elde edildiğini gösterelim.

Burada; $n = m$, $n < m$ ve $n > m$ için üç şartın sağladığını görmeliyiz.

i) $n \neq m$ ve $n = 1, 2, \dots, m-1$ yani $n < m$ olduğunda $V_{n,m}(x) = x^n$ olduğunu gösterelim. Tanımdan; $n < m$ için, $[A]_{n \times n}$ sıfır matrisi, $[E]_{n \times n}$ birim matris olmak üzere,

$$V_{n,m}(x) = \det[A + xE]$$

şeklinde elde edildiğinden $\det[A + xE] = x^n$ olduğuna göre, $V_{n,m}(x) = x^n$ olduğu açıktır.

ii) $n = m$ için, $V_{m,m}(x) = x^m - 1$ olduğunu gösterelim. Öncelikle, M 'yi bulmaya çalışalım. M 'deki $n - k(m-1)$ şartı için, $n = m$ olduğundan;

$$n - k(n-1) = n(1-k) + k$$

elde edilir. M formülünde k 'nın en küçük değeri 2 için dahil düşünüldüğünde,

$$n(1-2) + 2 = -n + 2$$

elde edilir ki, $n \geq 1$ olduğundan bu ifadenin 2'den küçük olacağı açıktır. O halde, $B = 0$ olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \det[K + xL] &= x \left[x^{m-1} \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-m-2)\text{ tane}} x^2 - \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-m-1)\text{ tane}} \right] - \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-m)\text{ tane}} \\ &= x \cdot x^{m-1} \cdot x^{m-m-2} \cdot x^2 - x^{m-m-1} \cdot x - 0 \end{aligned}$$

$$V_{m,m}(x) = x^m - 1$$

olduğu görülür.

Son olarak, $n \neq m$ ve $n > m$ için,

$$V_{n,m}(x) = x V_{n-1,m}(x) - V_{n-m,m}(x)$$

olduğunu gösterelim.

$V_{n,m}(x) = \det[K + xL] + M$ eşitliğinden $V_{n,m}(x)$ 'i bulalım.

$$\begin{aligned} \det[K + xL] &= x \left[x^{m-1} \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-m-2)\text{ tane}} x^2 - \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-m-1)\text{ tane}} \right] - (n-m) \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-m)\text{ tane}} \\ &= x \cdot x^{m-1} \cdot x^{n-m-2} \cdot x^2 - x^{n-m-1} \cdot x - (n-m)x^{n-m} \\ &= x^n - (n-m+1)x^{n-m} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$M = \binom{n-2(m-1)}{2} x^{n-2m} - \binom{n-3(m-1)}{3} x^{n-3m} + \binom{n-4(m-1)}{4} x^{n-4m} - \dots$$

şeklinde olup,

$$\begin{aligned} V_{n,m}(x) &= x^n - (n-m+1)x^{n-m} + \binom{n-2m+2}{2} x^{n-2m} - \binom{n-3m+3}{3} x^{n-3m} \\ &\quad + \binom{n-4m+4}{4} x^{n-4m} - \dots \end{aligned}$$

olur.

Aynı şekilde, $V_{n-1,m}(x) = \det[K + xL] + M$ eşitliğinden $V_{n-1,m}(x)$ ' i bulalım.

$$\begin{aligned} \det[K + xL] &= x \left[x^{m-1} \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-m-3)tane} x^2 - \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-m-2)tane} \right] - (n-m-1) \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-m-1)tane} \\ &= x \cdot x^{m-1} \cdot x^{n-m-3} \cdot x^2 - x^{n-m-2} \cdot x - (n-m-1)x^{n-m-1} \\ &= x^{n-1} - (n-m)x^{n-m-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} M &= \binom{n-1-2(m-1)}{2} x^{n-1-2m} - \binom{n-1-3(m-1)}{3} x^{n-1-3m} \\ &\quad + \binom{n-1-4(m-1)}{4} x^{n-1-4m} - \dots \end{aligned}$$

şeklinde olup,

$$\begin{aligned} V_{n-1,m}(x) &= x^{n-1} - (n-m)x^{n-m-1} + \binom{n-2m+1}{2} x^{n-2m-1} \\ &\quad - \binom{n-3m+2}{3} x^{n-3m-1} + \binom{n-4m+3}{4} x^{n-4m-1} - \dots \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Ve yine, $V_{n-m,m}(x) = \det[K + xL] + M$ eşitliğinden $V_{n-m,m}(x)$ 'i bulalım.

$$\begin{aligned} \det[K + xL] &= x \left[x^{m-1} \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-2m-2)tane} x^2 - \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-2m-1)tane} \right] - (n-2m) \underbrace{(x \cdot x \dots x)}_{(n-2m)tane} \\ &= x \cdot x^{m-1} \cdot x^{n-2m-2} \cdot x^2 - x^{n-2m-1} \cdot x - (n-2m)x^{n-2m} \end{aligned}$$

$$= x^{n-m} - (n - 2m + 1)x^{n-2m}$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} M = & \binom{n-m-2(m-1)}{2} x^{n-m-2m} - \binom{n-m-3(m-1)}{3} x^{n-m-3m} \\ & + \binom{n-m-4(m-1)}{4} x^{n-m-4m} - \dots \end{aligned}$$

şeklinde olup,

$$\begin{aligned} V_{n-m,m}(x) = & x^{n-m} - (n - 2m + 1)x^{n-2m} + \binom{n-3m+2}{2} x^{n-3m} \\ & - \binom{n-4m+3}{3} x^{n-4m} + \binom{n-5m+4}{4} x^{n-5m} - \dots \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

O halde şimdi, $x V_{n-1,m}(x) - V_{n-m,m}(x) = V_{n,m}(x)$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} x V_{n-1,m}(x) - V_{n-m,m}(x) &= x \left[x^{n-1} - (n-m)x^{n-m-1} + \binom{n-2m+1}{2} x^{n-2m-1} \right. \\ &\quad \left. - \binom{n-3m+2}{3} x^{n-3m-1} + \binom{n-4m+3}{4} x^{n-4m-1} - \dots \right] \\ &\quad - \left[x^{n-m} - (n-2m+1)x^{n-2m} + \binom{n-3m+2}{2} x^{n-3m} \right. \\ &\quad \left. - \binom{n-4m+3}{3} x^{n-4m} + \binom{n-5m+4}{4} x^{n-5m} - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^n - (n-m)x^{n-m} + \binom{n-2m+1}{2}x^{n-2m} - \binom{n-3m+2}{3}x^{n-3m} \\
&\quad + \binom{n-4m+3}{4}x^{n-4m} - \dots - x^{n-m} + (n-2m+1)x^{n-2m} \\
&\quad - \binom{n-3m+2}{2}x^{n-3m} + \binom{n-4m+3}{3}x^{n-4m} \\
&\quad - \binom{n-5m+4}{4}x^{n-5m} - \dots \\
&= x^n - (n-m+1)x^{n-m} + \left[\binom{n-2m+1}{1} + \binom{n-2m+1}{2} \right] x^{n-2m} \\
&\quad - \left[\binom{n-3m+2}{2} + \binom{n-3m+2}{3} \right] x^{n-3m} \\
&\quad + \left[\binom{n-4m+3}{3} + \binom{n-4m+3}{4} \right] x^{n-4m} - \dots \\
&= x^n - (n-m+1)x^{n-m} + \binom{n-2m+2}{2}x^{n-2m} - \binom{n-3m+3}{3}x^{n-3m} \\
&\quad + \binom{n-4m+4}{4}x^{n-4m} - \dots \\
&= V_{n,m}(x)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$\Omega_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev polinomunun (vieta-lucas polinomu) matris ile karşılığınının ispatıda benzer şekide elde edilir.

Örnek 4.3.1: $V_{4,2}(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ polinomunu matris yoluyla bulalım.

Matris $((n-m+2) \times (n-m+2)) = ((4-2+2) \times (4-2+2)) = (4 \times 4)$ tipinde olup

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 4-2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{2-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

ve

$$M = (-1)^2 \binom{4-2(2-1)}{2} x^{4-2.2} = 1 \cdot x^0 = 1$$

ifadelerinden

$$\begin{aligned} V_{4,2}(x) &= \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} + x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \right] + 1 \\ &= \det \begin{pmatrix} x & 2 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}_{4 \times 4} + 1 \\ &= \{x[x(x^2) - x] - 2(x^2)\} + 1 \\ &= x^4 - 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

olur.

Örnek 4.3.2: $\Omega_{6,2}(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$ polinomunu matris yardımıyla bulalım.

Matris $((n - m + 2) \times (n - m + 2)) = ((6 - 2 + 2) \times (6 - 2 + 2)) = (6 \times 6)$ tipinde olup,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 6-2+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{6 \times 6}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{2-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 6}$$

ve

$$\begin{aligned} S &= (-1)^2 \frac{6-2(2-2)}{6-2(2-1)} \binom{6-2(2-1)}{2} x^{6-2.2} \\ &\quad + (-1)^3 \frac{6-3(2-2)}{6-3(2-1)} \binom{6-3(2-1)}{3} x^{6-3.2} \\ &= \frac{6}{4} \binom{4}{2} x^2 - \frac{6}{3} \binom{3}{3} x^0 = 9x^2 - 2 \end{aligned}$$

ifadelerinden

$$\begin{aligned}
 \Omega_{6,2}(x) &= \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{6 \times 6} + x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 6} \right] + 9x^2 - 2 \\
 &= \det \begin{pmatrix} x & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}_{6 \times 6} + 9x^2 - 2 \\
 &= x\{x[x(x(x^2))]\} - [x(x^2)]\} - 5\{x[x(x^2)]\} + 9x^2 - 2 \\
 &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2
 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.4. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomunun Türev Polinomu

$V_{n,m}(x)$ ve $\Omega_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının $V'_{n,m}(x)$ ve $\Omega'_{n,m}(x)$ türev polinomlarını oluşturalım.

Tanım 4.4.1: $V'_{n,m}(x)$ Vieta- Fibonnacci türev polinomu; x bir reel değişken ve $n \geq 2m$ olmak üzere;

$$H(n, j) = \binom{n-2m+1}{j+1} A_j, \quad \left(1 \leq j \leq \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil \right)$$

ve (buradaki A_j de $j = 1$ iken $A_j = j$ ($A_1 = 1$) şartı altında,)

$$A_j = \frac{(n - (j + 1)m)(n - (j + 1)m + 1) \dots (n - (j + 1)m + j)}{\underbrace{(n - 2m + 1)(n - 2m)(n - 2m - 1) \dots}_{(j+1) \text{ tane}}} j, \quad j > 1$$

olmak üzere,

$$V'_{n,n}(x) = nx^{n-1} \quad \text{ve}$$

$$V'_{n,m}(x) = nx^{n-1} - 2 \binom{n-m+1}{2} x^{n-m-1}, \quad (n < 2m)$$

başlangıç şartları altında,

$$n - (j + 1)m - 1 \geq 0 \quad \text{olmak üzere;}$$

$$V'_{n,m}(x) = xV'_{n-1,m}(x) - 2V'_{n-m,m}(x) + x^{n-1} + \sum_{j=1} (-1)^j H(n,j) x^{n-(j+1)m-1}$$

şeklinde tanımlanır.

$H(n,j)$ için; $m = 1$ seçildiğinde,

1				
3	2			
6	8	3		
10	20	15	4	
15	40	45	25	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

şeklinde olup, $H(n,j)$ tablosu elde edilir.

Diğer taraftan, $V'_{n,m}(x)$ Genelleşmiş Chebyshev türev polinomunun açık formülü;

$$V'_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor} (-1)^k (n - (m-1)k) \binom{n-k-((m-2)k+1)}{k} x^{n-mk-1}$$

şeklindedir.

$m = 1, 2, 3$ için ilk birkaç terimini bulalım.

$$V'_{1,1}(x) = 1$$

$$V'_{2,1}(x) = 2x - 2$$

$$V'_{3,1}(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$V'_{4,1}(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$$

$$V'_{5,1}(x) = 5x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 20x + 5$$

$$V'_{6,1}(x) = 6x^5 - 30x^4 + 60x^3 - 60x^2 + 30x - 6$$

$$V'_{7,1}(x) = 7x^6 - 42x^5 + 105x^4 - 140x^3 + 105x^2 - 42x + 7$$

$$V'_{8,1}(x) = 8x^7 - 56x^6 + 168x^5 - 280x^4 + 280x^3 - 168x^2 + 56x - 8$$

$$V'_{1,2}(x) = 1 \nearrow$$

$$V'_{2,2}(x) = 2x \nearrow$$

$$V'_{3,2}(x) = 3x^2 - 2 \nearrow$$

$$V'_{4,2}(x) = 4x^3 - 6x \nearrow$$

$$V'_{5,2}(x) = 5x^4 - 12x^2 + 3 \nearrow$$

$$V'_{6,2}(x) = 6x^5 - 20x^3 + 12x \nearrow$$

$$V'_{7,2}(x) = 7x^6 - 30x^4 + 30x^2 - 4 \nearrow$$

$$V'_{8,2}(x) = 8x^7 - 42x^5 + 60x^3 - 20x \nearrow$$

$$V'_{9,2}(x) = 9x^8 - 56x^6 + 105x^4 - 60x^2 + 5$$

$$V'_{10,2}(x) = 10x^9 - 72x^7 + 168x^5 - 140x^3 + 30x$$

$$V'_{11,2}(x) = 11x^{10} - 90x^8 + 252x^6 - 280x^4 + 105x^2 - 6$$

$$V'_{1,3}(x) = 1 \nearrow$$

$$V'_{2,3}(x) = 2x \nearrow$$

$$V'_{3,3}(x) = 3x^2 \nearrow$$

$$V'_{4,3}(x) = 4x^3 - 2 \nearrow$$

$$V'_{5,3}(x) = 5x^4 - 6x \nearrow$$

$$V'_{6,3}(x) = 6x^5 - 12x^2 \nearrow$$

$$V'_{7,3}(x) = 7x^6 - 20x^3 + 3 \nearrow$$

$$V'_{8,3}(x) = 8x^7 - 30x^4 + 12x$$

$$V'_{9,3}(x) = 9x^8 - 42x^5 + 30x^2$$

$$V'_{10,3}(x) = 10x^9 - 56x^6 + 60x^3 - 4$$

$$V'_{11,3}(x) = 11x^{10} - 72x^7 + 105x^4 + 20x$$

$$V'_{12,3}(x) = 12x^{11} - 90x^8 + 168x^7 - 60x^2$$

$V'_{n,m}(x)$ polinomunun yukarı çapraz elemanlarıyla yazılan polinom $V'_{n,m+1}(x)$ polinomunu verir.

Tanım 4.4.2: $\Omega'_{n,m}(x)$ vieta- lucas polinomunun türev polinomu; x bir reel değişken ve $n \geq 2m$ olmak üzere;

$$h(n, j) = \binom{n-2m+1}{j+1} a_j, \quad \left(1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor \right)$$

ve (buradaki a_j de $j = 1$ iken $a_j = j$ ($a_1 = 1$) şartı altında) ;

$$a_j = ((n-m)j - (m-2)j^2 - 1) \frac{\overbrace{(n-2m-j)(n-2m-j-1) \dots}^{[m+(j-2)(m-1)-1] \text{ tane}}}{\underbrace{(n-m-(m-1)j)(n-m-(m-1)j+1) \dots}_{[m+(j-2)(m-1)] \text{ tane}}}, \quad j > 1$$

olmak üzere,

$$\Omega'_{n,n}(x) = nx^{n-1} \quad \text{ve}$$

$$\Omega'_{n,m}(x) = nx^{n-1} - \left[2 \binom{n-m+1}{2} + \binom{n-m}{1} \right] x^{n-m-1}, \quad (n < 2m)$$

başlangıç şartları altında,

$$n - (j + 1)m - 1 \geq 0 \text{ olmak üzere;}$$

$$\Omega'_{n,m}(x) = x\Omega'_{n-1,m}(x) - 2\Omega'_{n-m,m}(x) + x^{n-1} - x^{n-m-1} + \sum_{j=1} (-1)^j h(n,j)x^{n-(j+1)m-1}$$

şeklinde tanımlanır.

$h(n,j)$ için; $m = 1$ seçildiğinde,

1				
3	3			
6	11	5		
10	26	23	7	
15	50	65	39	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

şeklinde olup, $h(n,j)$ tablosu elde edilir.

Diğer taraftan, $\Omega'_{n,m}(x)$ Genelleşmiş Chebyshev türev polinomunun açık formülü,

$$\Omega'_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor} (-1)^k \frac{(n - (m-2)k)(n - mk)}{(n - (m-1)k)} \binom{n-k - ((m-2)k)}{k} x^{n-mk-1}$$

şeklindedir.

$m = 1, 2, 3$ için ilk birkaç terimini bulalım.

$$\begin{aligned}
 \Omega'_{1,1}(x) &= 1 \\
 \Omega'_{2,1}(x) &= 2x - 3 \\
 \Omega'_{3,1}(x) &= 3x^2 - 8x + 5 \\
 \Omega'_{4,1}(x) &= 4x^3 - 15x^2 + 18x - 7 \\
 \Omega'_{5,1}(x) &= 5x^4 - 24x^3 + 42x^2 - 32x + 9 \\
 \Omega'_{6,1}(x) &= 6x^5 - 35x^4 + 80x^3 - 90x^2 + 50x - 11 \\
 \Omega'_{7,1}(x) &= 7x^6 - 48x^5 + 135x^4 - 200x^3 + 165x^2 - 72x + 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega'_{1,2}(x) &= 1 \\
 \Omega'_{2,2}(x) &= 2x \\
 \Omega'_{3,2}(x) &= 3x^2 - 3 \\
 \Omega'_{4,2}(x) &= 4x^3 - 8x \\
 \Omega'_{5,2}(x) &= 5x^4 - 15x^2 + 5 \\
 \Omega'_{6,2}(x) &= 6x^5 - 24x^3 + 18x \\
 \Omega'_{7,2}(x) &= 7x^6 - 35x^4 + 42x^2 - 7 \\
 \Omega'_{8,2}(x) &= 8x^7 - 48x^5 + 80x^3 - 32x \\
 \Omega'_{9,2}(x) &= 9x^8 - 63x^6 + 135x^4 - 90x^2 + 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega'_{1,3}(x) &= 1 \\
\Omega'_{2,3}(x) &= 2x \\
\Omega'_{3,3}(x) &= 3x^2 \\
\Omega'_{4,3}(x) &= 4x^3 - 3 \\
\Omega'_{5,3}(x) &= 5x^4 - 8x \\
\Omega'_{6,3}(x) &= 6x^5 - 15x^2 \\
\Omega'_{7,3}(x) &= 7x^6 - 24x^3 + 5 \\
\Omega'_{8,3}(x) &= 8x^7 - 35x^4 + 18x \\
\Omega'_{9,3}(x) &= 9x^8 - 48x^5 + 42x^2 \\
\Omega'_{10,3}(x) &= 10x^9 - 63x^6 + 80x^3 - 7 \\
\Omega'_{11,3}(x) &= 11x^{10} - 80x^7 + 135x^4 + 32x
\end{aligned}$$

$\Omega'_{n,m}(x)$ polinomunun yukarı çapraz elemanlarıyla yazılan polinom $\Omega'_{n,m+1}(x)$ polinomunu verir.

Örnek 4. 4. 1: $V'_{10,3}(x)$ türev polinomunu bulalım.

$n < 2m$ olduğundan $V'_{3,3}(x)$, $V'_{4,3}(x)$, $V'_{5,3}(x)$ balangıç şartlarından,

$$V'_{3,3}(x) = 3x^2$$

$$V'_{4,3}(x) = 4x^3 - 2 \binom{4-3+1}{2} x^{4-3-1} = 4x^3 - 2$$

$$V'_{5,3}(x) = 5x^4 - 2 \binom{4-3+1}{2} x^{5-3-1} = 5x^4 - 6x$$

elde edilir. Diğer taraftan, $n \geq 2m$ için $V'_{n,m}(x)$ tanımından,

$$V'_{6,3}(x) = xV'_{5,3}(x) - 2V'_{3,3}(x) + x^5$$

$$= x(5x^4 - 6x) - 2(3x^2) + x^5 = 6x^5 - 12x^2$$

$$V'_{7,3}(x) = xV'_{6,3}(x) - 2V'_{4,3}(x) + x^6 + (-1)^1 \binom{7-6+1}{2} A_1 x^{7-6-1}$$

$$= x(6x^5 - 12x^2) - 2(4x^3 - 2) + x^6 - 1x^0 = 7x^6 - 20x^3 + 3$$

$$V'_{8,3}(x) = xV'_{7,3}(x) - 2V'_{5,3}(x) + x^7 + (-1)^1 \binom{8-6+1}{2} A_1 x^{8-6-1}$$

$$= x(7x^6 - 20x^3 + 3) - 2(5x^4 - 6x) + x^7 - 3x = 8x^7 - 30x^4 + 12x$$

$$V'_{9,3}(x) = xV'_{8,3}(x) - 2V'_{6,3}(x) + x^8 + (-1)^1 \binom{9-6+1}{2} A_1 x^{9-6-1}$$

$$= x(8x^7 - 30x^4 + 12x) - 2(6x^5 - 12x^2) + x^8 - 6x^2$$

$$= 9x^8 - 42x^5 + 30x^2$$

$$V'_{10,3}(x) = xV'_{9,3}(x) - 2V'_{7,3}(x) + x^9 + (-1)^1 \binom{10-6+1}{2} A_1 x^{10-6-1}$$

$$- (-1)^2 \binom{10-6+1}{3} A_2 x^{10-9-1}$$

$$\left(A_2 = \frac{(10-9)(10-9+1)(10-9+2)}{(10-6+1)(10-6)(10-6-1)} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot 2 = \frac{1}{5} \right)$$

$$= x(9x^8 - 42x^5 + 30x^2) - 2(7x^6 - 20x^3 + 3) + x^9 - 10x^3 + 10 \frac{1}{5} x^0$$

$$= 10x^9 - 56x^6 + 60x^3 - 4$$

elde edilir.

Örnek: 4.4.2. $V'_{10,3}(x)$ türev polinomunu açık formülünü kullanarak bulalım.

$$\begin{aligned}
 V'_{10,3}(x) &= \sum_{k=0}^3 (-1)^k (10 - (3-1)k) \binom{10-k-((3-2)k+1)}{k} x^{10-3k-1} \\
 &= (-1)^0 (10 - (3-1)0) \binom{10-0-((3-2)0+1)}{0} x^{10-3\cdot 0-1} \\
 &\quad + (-1)^1 (10 - (3-1)1) \binom{10-1-((3-2)1+1)}{1} x^{10-3\cdot 1-1} \\
 &\quad + (-1)^2 (10 - (3-1)2) \binom{10-2-((3-2)2+1)}{2} x^{10-3\cdot 2-1} \\
 &\quad + (-1)^3 (10 - (3-1)3) \binom{10-3-((3-2)3+1)}{3} x^{10-3\cdot 3-1} \\
 &= 10x^9 - 8.7x^6 + 6.10x^3 - 4.1x^0 \\
 &= 10x^9 - 56x^6 + 60x^3 - 4
 \end{aligned}$$

olur.

Örnek: 4.4.3. $\Omega'_{7,2}(x)$ türev polinomunu bulalım.

$n < 2m$ olduğundan , $\Omega'_{2,2}(x)$, $\Omega'_{3,2}(x)$, balangıç şartlarından,

$$\Omega'_{2,2}(x) = 2x$$

$$\Omega'_{3,2}(x) = 3x^2 - \left[2 \binom{3-2+1}{2} + \binom{3-2}{1} \right] x^{3-2-1} = 3x^2 - 3$$

elde edilir. Diğer taraftan; $n \geq 2m$ için $\Omega'_{n,m}(x)$ tanımından,

$$\Omega'_{4,2}(x) = x \Omega'_{3,2}(x) - 2 \Omega'_{2,2}(x) + x^3 - x$$

$$= x(3x^2 - 3) - 2(2x) + x^3 - x = 4x^3 - 8x$$

$$\Omega'_{5,2}(x) = x \Omega'_{4,2}(x) - 2 \Omega'_{3,2}(x) + x^4 - x^2 + (-1)^1 \binom{5-4+1}{2} a_1 x^{5-4-1}$$

$$= x(4x^3 - 8x) - 2(3x^2 - 3) + x^4 - x^2 - 1 = 5x^4 - 15x^2 + 5$$

$$\Omega'_{6,2}(x) = x \Omega'_{5,2}(x) - 2 \Omega'_{4,2}(x) + x^5 - x^3 + (-1)^1 \binom{6-4+1}{2} a_1 x^{6-4-1}$$

$$= x(5x^4 - 15x^2 + 5) - 2(4x^3 - 8x) + x^5 - x^3 - 3x = 6x^5 - 24x^3 + 18x$$

$$\Omega'_{7,2}(x) = x \Omega'_{6,2}(x) - 2 \Omega'_{5,2}(x) + x^6 - x^4 + (-1)^1 \binom{7-4+1}{2} a_1 x^{7-4-1}$$

$$+ (-1)^2 \binom{7-4+1}{3} a_2 x^{7-6-1}$$

$$\left(a_2 = (5.2 - (2-2)2^2 - 1) \frac{(5-2-2)}{(5-(2-1)2)(5-(2-1)2+1)} = 9 \cdot \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4} \right)$$

$$= x(6x^5 - 24x^3 + 18x) - 2(5x^4 - 15x^2 + 5) + x^6 - x^4 - 6x^2 + 4 \cdot \frac{3}{4} x$$

$$= 7x^6 - 35x^4 + 42x^2 - 7$$

elde edilir.

Örnek: 4.4.4. $\Omega'_{7,2}(x)$ türev polinomunu açık formülünü kullanarak bulalım.

$$\Omega'_{7,2}(x) = \sum_{k=0}^3 (-1)^k \frac{(7-(2-2)k)(7-2k)}{(7-(2-1)k)} \binom{7-k-((2-2)k)}{k} x^{7-2k-1}$$

$$= (-1)^0 \frac{(7-(2-2)0)(7-2.0)}{(7-(2-1)0)} \binom{7-0-((2-2)0)}{0} x^{7-2.0-1}$$

$$= (-1)^1 \frac{(7-(2-2)1)(7-2.1)}{(7-(2-1)1)} \binom{7-1-((2-2)1)}{1} x^{7-2.1-1}$$

$$= (-1)^2 \frac{(7-(2-2)2)(7-2.2)}{(7-(2-1)2)} \binom{7-2-((2-2)2)}{2} x^{7-2.2-1}$$

$$= (-1)^3 \frac{(7-(2-2)3)(7-2.3)}{(7-(2-1)3)} \binom{7-3-((2-2)3)}{3} x^{7-2.3-1}$$

$$= 7x^6 - \frac{35}{6} \binom{6}{1} x^4 + \frac{21}{5} \binom{5}{2} x^2 - \frac{7}{4} \binom{4}{3} x^0$$

$$= 7x^6 - 35x^4 + 42x^2 - 7$$

4.5. Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının Türev Polinomlarının Tabloları

Tanım 4.5.1: $V_{n,m}(x)$ ve $\Omega_{n,m}(x)$ Genelleştirilmiş Chebyshev Polinomlarının $V'_{n,m}(x)$ ve $\Omega'_{n,m}(x)$ Türev Polinomlarının kombinasyonel formları sırasıyla,

$$B'(n, j) = (n - (m - 1)j) \binom{n - j - ((m - 2)j + 1)}{j}, \quad \left(1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n - 1}{m} \right\rfloor \right)$$

ve

$$b'(n, j) = \frac{(n - (m - 2)j)(n - mj)}{(n - (m - 1)j)} \binom{n - j - (m - 2)j}{j}, \quad \left(1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n - 1}{m} \right\rfloor \right)$$

olur ($n \geq 1$).

$B'(n, j)$ sıralamasının ilk birkaç terimi Çizelge 4.3'de ve $b'(n, j)$ sıralamasının ilk birkaç terimi Çizelge 4.4'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.3. $B'(n, j)$ Vieta-Fibonacci Türev Polinom tablosu

$m = 1$ için,

1							
2	2						
3	6	3					
4	12	12	4				
5	20	30	20	5			
6	30	60	60	30	6		
7	42	105	140	105	42	7	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Çizelge 4.4. $b'(n, j)$ Vieta-Lucas Türev Polinom tablosu

$m = 1$ için,

1						
2	3					
3	8	5				
4	15	18	7			
5	24	42	32	9		
6	35	80	90	50	11	
7	48	135	200	165	72	13
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 4.3'deki $V'_{n,m}(x)$ Vieta-Fibonacci Türev Polinom tablosu ve Çizelge 4.4'deki $\Omega'_{n,m}(x)$ Vieta- Lucas Türev Polinom tablosu olarak adlandırılır.

Bu tablolar m 'nin değerlerine göre değişecektir. Genel olarak;

k . sütunda $\rightarrow ((k - 1)m + 1)$. satırdan itibaren tablonun elemanları yazılarak elde edilir.

Chebyshev Türev Polinom tabloları; bu polinomların bileşenlerinin baş katsayılarından oluşmaktadır. Yani; Chebyshev Türev Polinom tabloları biliniyorsa, polinomların tanımlarını kullanmadan da Chebyshev Türev Polinomlarını elde edebiliriz.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, $V_{n,m}(x)$ ve $\Omega_{n,m}(x)$ Genelleşmiş Chebyshev Polinomları matris yardımıyla elde edildi ve ispatlandı. Ayrıca bu polinomların türevleri için yeni bir indirgeme bağıntısı ve açık formülü tanımlandı ve bu polinomların türevlerinin kombinasyonel form yardımıyla tabloları oluşturuldu. Türev polinomlarının tablolar yardımıyla kolayca yazılabildiğini gösteren örnekler verildi.



KAYNAKLAR

- Anonim, 2016. Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/Pochhammer> symbol. Pochhammer Symbol.
- Djordjevic, G.B. ve Srivastava, H. M., 2005. Incomplete Generalized Jacobsthal and Jacobsthal- Lucas numbers, Mathematical and Computer Modeling, (42),1049-1056.
- Djordjevic, G.B., 2000. Generalized Jacobsthal polyomials, Fibonacci Quart, (38), 239-243
- Djordjevic, G.B., 2007. Mixed convolutions of the Jacobsthal type , Appl. Math. Comput. (186), 646-651.
- Djordjevic, G.B., 2009. Polynomials Related To Generalized Chebshev Polynomials. Filomat, 23(3), 279-290.
- Horadam, A.F., 2002. Vieta Polynomials, Fibonacci Quartcly, 223-232.
- Hosoya, H., 1973. Topological index and fibonacci numbers with relation to chemistry, Fibonacci Quartcly,11(3) , 255-265.
- Koshy. T.,1976. Fibonacci and Lucas Numbers withApplications. Framingham State College, .215-227, New York, U.S.A.
- Mason J.C., Handscomb D.C., 2003. Chebyshev Polynomials. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Rivlin T.J., 1990. Chebyshev Polynomials. From Approximation Theory to Algebra and Number Theory. Wiley, New York.
- Slater, L.J., 1966. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge University,1, London, England.
- Verner., E ve Hoggat, Jr., 1970. Convolution Triangles For Generalized Fibonacci Numbers, Fibonacci Quartcly, 8(2), 158.
- Vitula, R., ve Slota, D., 2006. On modified Chebyshev polynomials. J.Math. Anal. Appl.324, 321-343.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Erzurum’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzurum’da tamamladı. 2008 yılında kaydolduğu Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2012 yılında mezun oldu. 2013’de Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2014 yılında Milli Eğitim’de öğretmenliğe başladı. Hala öğretmenlik görevine ve lisansüstü eğitimine devam etmektedir.

