MATEMATİK ÖĞRETMENİ ve ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN BİLİŞSEL AÇIDAN İNCELENMESİ

Mesut ÖZTÜRK

Doktora Tezi
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Abdullah KAPLAN
2017
(Her Hakkı Saklıdır)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMENİ ve ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN BİLİŞSEL AÇIDAN İNCELENMESİ

(Investigation in terms of Cognitive of Service and Pre-Service Mathematics Teacher' Proving Process)

DOKTORA TEZİ

Mesut ÖZTÜRK

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KAPLAN

ERZURUM
Şubat, 2017

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Prof. Dr. Abdullah KAPLAN danışmanlığında, Mesut ÖZTÜRK tarafından hazırlanan "Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin Bilişsel Açıdan İncelenmesi" başlıklı çalışma 10/03/2017 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Yaşar AKKAN İmza: .....

Danışman : Prof. Dr. Abdullah KAPLAN İmza: .....

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Ali Sabri İPEK İmza: .....

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Alper Cihan KONYALIOĞLU İmza: .....

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Alper CİLTAŞ İmza: .....

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

21/03/2017

Prof. Dr. Mustafa SÖZBİLİR

Enstitü Müdürü

TEZ ETİK ve BİLDİRİM SAYFASI

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin Bilişsel Açısından İncelenmesi" başlıklı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve onurumla doğrularım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

10/03/2017

Mesut ÖZTÜRK

ÖNSÖZ

Matematiksel ispat öğrencilerin akıl yürütme, eleştirel düşünme ve yaratıcı düşünme gibi becerilerini önemli düzeyde etkilemektedir. Öğrencilere ispatlama becerilerinin kazandırılmasında öğretmenlerin ve geleceğin öğretmenleri olan öğretmen adaylarının ispat hakkındaki bilgi ve becerilerinin rol oynadığı açık bir gerçektir. Bu nedenle öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat süreçlerini bilgi ve beceri anlamında ortaya çıkaracak bilişsel süreçler bağlamında incelenmesi gerekmektedir. Bu çalışma ile matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının geometri ve cebir ispatı yapmadaki bilişsel süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

Doktora tez danışmanlığımı üstlenerek beni yönlendiren ve çalışmalarımın her aşamasında değerli fikirleriyle bana yol göstererek desteklerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah KAPLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımda görüş ve önerilerinden yararlandığım, yapıcı eleştirileri ile bana yol gösteren Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ ve Doç. Dr. Alper Cihan KONYALIOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Lisansüstü eğitimim boyunca bana zaman ayırıp çalışmalarımda görüş ve katkılarını benden esirgemeyen sayın hocalarım Doç. Dr. Yaşar AKKAN ve Prof. Dr. Mustafa SÖZBİLİR'e içtenlikle teşekkür ederim. Tez jürimde yer alarak fikirleriyle bana katkıda bulunan sayın hocam Doç. Dr. Ali Sabri İPEK'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım sırasında bana destek olan değerli meslektaşlarım Arş. Gör. İsmail SARİKAYA'ya ve Yrd. Doç. Dr. Elif AÇIL'a teşekkür ederim. Gönüllü olarak çalışmaya katılan tüm matematik öğretmenleri ve matematik öğretmeni adaylarına teşekkür ederim.

Sadece bu tez çalışması sürecinde değil, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan annem Nezahat ÖZTÜRK ve babam Ünal ÖZTÜRK'e, bu zorlu süreçte anlayış göstererek yanımda olan eşim Meryem ÖZTÜRK'e ve emeği geçen herkese minnet ve şükranlarımı sunarım.

Erzurum – 2017 **Mesut ÖZTÜRK**

ÖZET

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ÖĞRETMENİ ve ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN ÜSTBİLİŞSEL BECERİLER ve İSPAT ŞEMALARI AÇISINDAN İNCELENMESİ

Mesut ÖZTÜRK

2017, 374 sayfa

İspat yapma karmaşık zihinsel süreçleri gerektiren matematiksel bir beceridir. Ancak insan zihninin biyolojik yapısı bu karmaşık süreçleri anlayabilecek ve geliştirebilecek şekilde yaratılmıştır. Bu karmaşık süreçlerin anlaşılması zihindeki çoklu bilişsel yapıların işe koşulmasıyla mümkün olmaktadır. Bu bilişsel yapılardan ikisi bilişsel ve üst bilişsel becerilerdir. Bu bağlamda ispat yapma sürecindeki bilişsel yapıların bilişsel ve üst bilişsel beceriler boyutlarında ele alınarak incelenmesi ispat yapma sürecini anlama bakımından önemlidir. Bu çalışmanın amacı matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmen adaylarının geometri ve cebir ispatlarını yapma sürecindeki bilişsel yapılarının bilişsel ve üst bilişsel beceriler bağlamında incelenmesidir. Karma araştırma yöntemlerinden açıklayıcı ardışık desen kullanılarak yürütülen bu çalışmada 25 matematik öğretmenine ve farklı seviyedeki 48 matematik öğretmen adayına "İspat Yapma Becerisi Teşhis Testi" uygulanmış, bu katılımcılar içerisinden seçilen 6 matematik öğretmeni ve farklı seviyedeki 12 matematik öğretmen adayı ile sesli düşünme protokolü yürütülmüştür. Sesli düşünme protokolünde katılımcılardan etkinlik kartlarında yer alan dört farklı ispat yapma görevini yerine getirmeleri istenmiştir. Bu süreçte gözlem formu aracılığıyla katılımcılar sergilediği beceriler gözlemlenmiştir. Çalışmada toplanan nicel verilerin analizinde betimsel ve kestirimsel istatistik, nitel verilerin analizinde betimsel analiz ve içerik analizi kullanılmıştır. Nicel verilerin analizi sonucunda matematik öğretmenlerinin ve son sınıf matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma becerilerinin 1. sınıf matematik öğretmeni adaylarından anlamlı düzeyde farklı olduğu bulunmuştur. Nitel veri analizleri sonucunda katılımcıların sergilemiş olduğu bilişsel beceriler için yedi boyut –ispat önermesini okuma, şekil çizme, önermenin altını çizme, doğruluğunu değerlendirme, strateji belirleme, işlem süreci ve sezgisel kestirme yolları- üst bilişsel beceriler için

sekiz boyut –ispatı kolaylaştırma, sorgulama, farkındalık, planlama, strateji belirleme, analojik akıl yürütme, kontrol etme, ilişkilendirme- altında toplandığı belirlenmiştir. Ayrıca ispat yapma sürecinde sergilenen bilişsel ve üst bilişsel beceri sayısının gruplara göre değişiminin, ispat yapma becerisi teşhis testinden alınan puanların gruplara göre farklılaşması ile paralellik gösterdiği tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel İspat, İspatlama, Cebir İspatları, Geometri İspatları, Bilişsel Beceri, Üst Bilişsel Beceri, Matematik Öğretmeni ve Adayları

ABSTRACT

Ph. D. DISSERTATION

INVESTIGATION OF MATHEMATICS TEACHER AND PRE-SERVICE TEACHER' PROVING PROCESS IN TERMS OF METACOGNITIVE SKILLS AND PROOF SCHEMES

Mesut ÖZTÜRK

2017, 374 pages

Proving is a mathematical skill that requires complex mental processes. However, the biological structure of the human mind is handle in such a way that it can understand and develop these complex processes. The understanding of these complex processes is make possible by the manageable of multi-cognitive structures in the human mind. Two of these cognitive structures are cognitive and metacognitive skills. In this context, it is important to examine the cognitive structures in the proving process in the dimensions of cognitive and metacognitive skills in order to understand the proving process. The aim of this study is to examine the cognitive structures of mathematics teachers and pre-service mathematics teachers in the proving process of geometry and algebra in the context of cognitive and metacognitive skills. In this study conducted using the explanatory sequential design from mixed method research, "Proof Making Ability Diagnostic Test" was applied to 25 math teachers and 48 pre-service math teachers at different levels. 6 math teachers and 12 pre-service math teachers selected from these participants at different levels carried out a think aloud protocol. Participants were asked to perform four different proving tasks on the activity cards in the think aloud protocol. During this process, we was observe participants have exhibited skills through the observation form. Descriptive and inferential statistics were used in the analysis of quantitative data collected in the study; descriptive analysis and content analysis were used in the analysis of qualitative data. Result of the analysis of the quantitative data show that the ability of proving the mathematics teachers and the last grade pre-service math teachers were significantly higher than the grade year pre-service math teachers. The results of qualitative data analysis showed that there are seven dimensions -reading the proof, drawing the figure, underlining the suggestion, evaluating the correctness, determining the strategy, operation process and heuristic

shortcut thinking strategy- in cognitive skills and eight dimensions – facilitation the proof, questioning, awareness, planning, strategy determination, analogical reasoning, checking, relationship- in metacognitive skills. In addition, it was determined that the number of cognitive and metacognitive skills displayed in the proving process is in parallel with the “Proof Making Ability Diagnostic Test” scores.

Key Words: Mathematical Proof, Proving, Algebraic Proof, Geometric Proof, Cognitive Skill, Metacognitive Skills, Service and Pre-service Math Teacher

İÇİNDEKİLER

KABUL ve ONAY TUTANAĞI i
TEZ ETİK ve BİLDİRİM SAYFASI ii
ÖNSÖZ iii
ÖZET iv
ABSTRACT vi
TABLOLAR DİZİNİ xii
ŞEKİLLER DİZİNİ xxiv
KISALTMALAR DİZİNİ xxvi

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ 1
1.1. Araştırmanın Gerekçesi 4
1.2. Araştırma Konusu ve Problemi 6
1.3. Araştırmanın Amacı ve Önemi 7
1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları 8
1.5. Araştırmanın Varsayımları 8

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR 9
2.1. Matematiksel İspat ve İspatlama 9
2.1.1. İspat şemaları 10
2.2. Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme 13
2.2.1. Algoritma kullanma 14
2.2.2. Sezgi ve sezgisel kestirme yolları 14
2.2.3. İşlevsel değişmezlik 17
2.2.4. Algısal set oluşturma 18
2.2.5. İçgörü 18
2.2.6. Analojik akıl yürütme 18
2.2.7. Yaratıcı düşünme 20
2.2.8. Tümdengelimsel akıl yürütme 21
2.2.9. Tümevarımsal akıl yürütme 22

2.3. Biliş ve Üst biliş 23
2.3.1. Biliş 23
2.3.2. Üst biliş 23
2.3.3. Biliş ve üst biliş ayrımı 28
2.4. Alan yazın Derleme 29
2.4.1. İspatlamayla ilgili çalışmalar 29
2.4.2. Üst bilişle ilgili çalışmalar 34
2.4.3. İspatta üst bilişle ilgili çalışmalar 38

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM 41
3.1. Araştırma Modeli 41
3.2. Pilot Çalışma 42
3.3. Çalışma Grubu 43
3.4. Veri Toplama Araçları 45
3.4.1. İspat yapma becerisi teşhis testi 45
3.4.2. Sesli düşünme protokolü 51
3.4.3. Etkinlik kartı 52
3.4.4. Gözlem 55
3.5. Araştırmacı Rolü 56
3.6. Verilerin Toplanması ve Süreç 56
3.7. Veri Analizi 57
3.7.1. İspat yapma teşhis testine yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi 58
3.7.2. Nicel verilerin analizi 60
3.7.3. Nitel verilerin analizi 66
3.7.4. Nicel ve nitel verilerin ilişkilendirilmesi 68
3.8. Geçerlik ve Güvenirlik 68

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR 70
4.1. Nicel Verilerden Elde Edilen Bulgular 70

4.1.1. İspat yapma becerisi teşhis testinden elde edilen istatistiksel bulgular 70
4.1.2. Etkinlik kartındaki birinci sorunun istatistiksel bulguları 71
4.1.3. Etkinlik kartındaki ikinci sorunun istatistiksel bulguları 74
4.1.4. Etkinlik kartındaki üçüncü sorunun istatistiksel bulguları 77
4.1.5. Etkinlik Kartındaki Dördüncü Sorunun İstatistiksel Bulguları 79
4.2. Etkinlik Kartındaki Birinci Sorudan Elde Edilen Nitel Bulgular 82
4.2.1. Etkinlik kartındaki birinci sorudan bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular 82
4.2.2. Etkinlik kartındaki birinci sorudan üst biliş beceriler temasında elde edilen bulgular 103
4.3. Etkinlik Kartındaki İkinci Sorudan Elde Edilen Nitel Bulgular 130
4.3.1. Etkinlik kartındaki ikinci sorudan bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular 131
4.3.2. Etkinlik kartındaki ikinci sorudan üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular 143
4.4. Etkinlik Kartındaki Üçüncü Sorudan Elde Edilen Nitel Bulgular 168
4.4.1. Etkinlik kartındaki üçüncü sorudan bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular 168
4.4.2. Etkinlik kartındaki üçüncü sorudan üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular 185
4.5. Etkinlik Kartındaki Dördüncü Sorudan Elde Edilen Nitel Bulgular 197
4.5.1. Etkinlik kartındaki dördüncü sorudan bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular 197
4.5.2. Etkinlik kartındaki dördüncü sorudan üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular 215
4.6. Nitel Verilerin Genel Değerlendirmesine Yönelik Bulgular 227
4.6.1. Bilişsel beceriler temasında elde edilen kodların genel değerlendirmesine yönelik bulgular 227
4.6.2. Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen kodların genel değerlendirmesine yönelik bulgular 242

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER 259
5.1. Tartışma 259
5.1.1. Nicel bulgulara yönelik tartışma 259
5.1.2. Bilişsel beceriler temasında elde edilen becerilere yönelik tartışma 260
5.1.3. Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen becerilere yönelik tartışma ... 277
5.2. Sonuçlar 291
5.2.1. Bilişsel beceriler temasında elde edilen sonuçlar 291
5.2.2. Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen sonuçlar 298
5.2.3. Öğretmenlerin ispat becerileri öğretmen adaylarından yüksektir 306
5.3. Öneriler 307
5.3.1. İspatlama sürecindeki bilişsel becerilere yönelik öneriler 307
5.3.2. Benzer araştırma yürütmeyi planlayan araştırmacılara yönelik öneriler ... 309

KAYNAKLAR 311
EKLER 331
EK 1. İzin Belgeleri 331
EK 2. İnformal Görüşme Formları 335
EK 3. Etkinlik Kartı Örneği 341
EK 4. Gözlem Formu 345
ÖZGEÇMİŞ 346

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 2.1. Tümdengelimsel Akıl Yürütmeler 22
Tablo 2.2. Bölümler Bazında Alan Yazınla Mevcut Çalışmanın Karşılaştırılması 39
Tablo 3.1. Çalışmaya Katılan ve Katılacak Öğretmen-Öğretmen Adaylarının Dağılımı 44
Tablo 3.2. İspat Yapma Becerisi Teşhis Testinde Kullanılan Altı Soru İçin Hazırlanan Belirtke Tablosu 47
Tablo 3.3. Her Bir Soru İçin Hesaplanan Kapsam Geçerlik İndeksi (KGİ) 47
Tablo 3.4. Anti-imaj Korelasyon Matrisi Sonucu 48
Tablo 3.5. Maddelerin Her Biri İçin Faktör Yük Değerlerinin Dağılımı 49
Tablo 3.6. Maddelerin Her Biri İçin T Değerlerinin Dağılımı 50
Tablo 3.7. Her Madde İçin Hesaplanan Madde Güçlük Oranı 50
Tablo 3.8. Dereceli Puanlama Anahtarı 59
Tablo 4.1. İspat Yapma Teşhis Testi Puanlarına Yönelik Betimsel İstatistik Sonuçları 70
Tablo 4.2. Varyans Analizi Sonuçları 71
Tablo 4.3. Öğretmenlerin ve Öğretmen Adaylarının Geometrinin 1. Önermesinde İspatı Yapamayacaklarına Karar Verme Süreleri 73
Tablo 4.4. Birinci Soruda Elde Edilen Sürelere İlişkin Kruskal-Wallis H Testi Sonuçları 74
Tablo 4.5. Öğretmenlerin ve Öğretmen Adaylarının İkinci Önermenin İspatını Yapamayacaklarına Karar Verme Süreleri 76
Tablo 4.6. Birinci Soruda Elde Edilen Sürelere İlişkin Kruskal-Wallis H Testi Sonuçları 76
Tablo 4.7. Öğretmenlerin ve Öğretmen Adaylarının İspatı Yapamayacaklarına Karar Verme Süreleri 78
Tablo 4.8. Birinci Soruda Elde Edilen Sürelere İlişkin Kruskal-Wallis H Testi Sonuçları 79
Tablo 4.9. Öğretmenlerin ve Öğretmen Adaylarının İspatı Yapamayacaklarına Karar Verme Süreleri 81
Tablo 4.10. Birinci Soruda Elde Edilen Sürelere İlişkin Kruskal-Wallis H Testi Sonuçları 81

Tablo 4.11. "İspat Önermesini Adım Adım Okuyarak İlerler." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 83
Tablo 4.12. "İspatın Hipotez-Hüküm ve Amaçlarını (Hedeflerini) Belirler." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 84
Tablo 4.13. İspat Önermesini Okuma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 85
Tablo 4.14. "Önermeyi Anlamadığında Birkaç Kez Okur ve Verilenler Üzerine Düşünür" Kodu ile Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 86
Tablo 4.15. İspatın Hipotez-Hüküm ve Amaçlarını (Hedeflerini) Belirler Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 87
Tablo 4.16. "Geometri İspatında Şekil Çizmeyi Gereklilik Olarak Görür." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 88
Tablo 4.17. Şekil Çizme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 89
Tablo 4.18. Önermenin Altını Çizme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 91
Tablo 4.19. "İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 95
Tablo 4.20. Doğruluğunu Değerlendirme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 96
Tablo 4.21. "İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 97
Tablo 4.22. "Sözel Olarak Önermenin İspatını İfade Eder." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 98
Tablo 4.23. Strateji Belirleme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 99
Tablo 4.24. "Ezberlediği Yolla İspat Yapar." Kodu İle Grupları Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 99
Tablo 4.25. İşlem Süreci Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 101

Tablo 4.26. “Planına Uygun İspat Yapar.” Kodu İle Grupları Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları....101
Tablo 4.27. Kullandığı İspat Yöntemi Amaca Ulaşmada Yeterlidir Kodu İle Grupları Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları....102
Tablo 4.28. Seçtiği İspat Türüne Uygun İspat Yazabilir Kodu İle Grupları Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları....102
Tablo 4.29. “İspatın Anahtar Kavramlarını Belirler.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri....105
Tablo 4.30. İşlemleri Kolaylaştırma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı....106
Tablo 4.31. “İspatın Anahtar Kavramlarını Belirler.” Kodu İle Gruplara Göre Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları....106
Tablo 4.32. “İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Kendine Sorar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri....107
Tablo 4.33. “Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri....108
Tablo 4.34. Sorgulama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı....109
Tablo 4.35. “İspatın Nasıl Başladığını ve Sonuca Ulaştığını Kendine Sorar.” Kodu İle Gruplar Arasında İlişkiyi Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları....110
Tablo 4.36. “Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür.” Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları....110
Tablo 4.37. Farkındalık Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı....113
Tablo 4.38. “İspat Yapmada Kullandığı Stratejinin Farkındadır.” Kodu İle Gruplar Arasında İlişkiyi Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları....114
Tablo 4.39. “Hata Yaptığında Hangi Adımda Hata Yaptığını Fark Eder.” Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları....115
Tablo 4.40. Planlama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı....117
Tablo 4.41. “İspata Başlamadan Önce Neyi İspatlayacağına Karar Verir.” Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları....117

Tablo 4.42. "Soruyu Okurken Zihninde Şeklini Çizer." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 118
Tablo 4.43. "Iraksak Düşünme Yeteneğini Kullanır." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 119
Tablo 4.44. Strateji Belirleme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 120
Tablo 4.45. "İspat Türünü Doğru Seçebilir." Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 121
Tablo 4.46. Analojik Akıl Yürütme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 122
Tablo 4.47. "Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar." Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 122
Tablo 4.48. "Hedeflediği Sonuca Ulaşıp Ulaşamadığını Kontrol Eder." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 123
Tablo 4.49. "Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 124
Tablo 4.50. "Hata Yaptığında İşlem Adımlarını Tek Tek Kontrol Eder ve Son Olarak Önermenin Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 125
Tablo 4.51. Kontrol Etme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 126
Tablo 4.52. "Hedeflediği Sonuca Ulaşıp Ulaşamadığını Kontrol Eder." Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 127
Tablo 4.53. "Hedeflediği Sonuca Ulaşıp Ulaşamadığını Kontrol Eder." Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 127
Tablo 4.54. "İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 128
Tablo 4.55. İlişkilendirme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 129

Tablo 4.56. İspat Sürecinde Şekiller ve Semboller Arasındaki İlişkiyi Kurar Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 129
Tablo 4.57. İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 130
Tablo 4.58. İspat Önermesini Okuma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 131
Tablo 4.59. "Önermeyi Okuduktan Sonra Anlamak İçin Şekil Çizer." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 132
Tablo 4.60. Şekil Çizme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı 133
Tablo 4.61. "Önermeyi Okuduktan Sonra Anlamak İçin Şekil Çizer." Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 134
Tablo 4.62. Önermenin Altını Çizme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 135
Tablo 4.63. "Tümevarımsal İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 136
Tablo 4.64. "İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 137
Tablo 4.65. Doğruluğunu Değerlendirme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı 138
Tablo 4.66. "Ezberlediği Yolla İspat Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 139
Tablo 4.67. Strateji Belirleme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 140
Tablo 4.68. İşlem Süreci Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 142
Tablo 4.69. "Planına Uygun İspat Yapar." Kodu İle Gruplar Arasındaki İlişkiyi Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları 142
Tablo 4.70. "Değişken Sayısını Azaltarak İşlem Kolaylığı Sağlar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 143

Tablo 4.71. Şekil Çizmenin İspatı Kolaylaştırdığını Düşünür.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 145
Tablo 4.72. İşlemleri Kolaylaştırma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı..... 147
Tablo 4.73. “Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 148
Tablo 4.74. “Yaptığı İşlemleri Nedenleriyle Sorgular.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri..... 149
Tablo 4.75. Sorgulama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Kategorilere Göre Dağılımı..... 149
Tablo 4.76. İspat Yapmada Kullandığı Stratejinin Farkındadır.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 151
Tablo 4.77. Farkındalık Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı..... 153
Tablo 4.78. “İspatı Nasıl Yapacağına Yönelik Belli Bir Plan Yapar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 154
Tablo 4.79. Bir Sonraki Adıma Geçmeden O Adımda Ne Yapacağını Düşünür.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri..... 154
Tablo 4.80. Planlama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı..... 155
Tablo 4.81. Yakınsak ve Iraksak Düşünme Yeteneğine Göre Katılımcı Görüşleri..... 156
Tablo 4.82. “İspat Stratejisinin Doğru Olup Olmadığını Zihinsel Olarak Kontrol Eder.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri..... 157
Tablo 4.83. “Önermede Kullanılan Sembollerden Hareketle İspat Yöntemini Belirler.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 158
Tablo 4.84. Strateji Belirleme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı..... 159
Tablo 4.85. “Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri..... 160
Tablo 4.86. Analojik Akıl Yürütme Kategorisinde Elde Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı..... 163

Tablo 4.87. "Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 164
Tablo 4.88. Kontrol Etme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı 165
Tablo 4.89. "İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 166
Tablo 4.90. İlişkilendirme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı 167
Tablo 4.91. "Önermeyi Sembolik Olarak Yazar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 169
Tablo 4.92. "Önermeyi Anlamadığında Birkaç Kez Okur ve Verilenler Üzerine Düşünür." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 170
Tablo 4.93. İspat Önermesini Okuma Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 171
Tablo 4.94. Önermenin Altını Çizme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı 173
Tablo 4.95. "Dönüşümsel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Katılımcıların Görüşleri 174
Tablo 4.96. "Otoriter İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 175
Tablo 4.97. "Tümevarımsal İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 176
Tablo 4.98. "İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 177
Tablo 4.99. Doğruluğunu Değerlendirme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı 177
Tablo 4.100. "Ezberlediği Yolla İspat Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 179
Tablo 4.101. Strateji Belirleme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 179

Tablo 4.102. “Örüntü Genelleme Yapar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 181
Tablo 4.103. İşlem Süreci Kategorisinde Sergilendiği Belirlenen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı 183
Tablo 4.104. “Araç-Amaç Analizi Yapar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 184
Tablo 4.105. Sezgisel Kestirme Yolları Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 185
Tablo 4.106. “Değişken Değiştirerek İşlem Kolaylığı Sağlar.” Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 186
Tablo 4.107. İşlemleri Kolaylaştırma Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 187
Tablo 4.108. “Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür.” Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri 188
Tablo 4.109. Sorgulama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 189
Tablo 4.110. “Planlama İçin Kendine Soru Sorar.” Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri 189
Tablo 4.111. Planlama Kategorisinde Sergilendiği Belirlenen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 191
Tablo 4.112. Strateji Belirleme Kategorisinde Sergilendiği Belirlenen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 192
Tablo 4.113. “Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatının Doğruluğunu Değerlendirir.” Becerisini Sergileyen Katılımcıların Bazılarının Görüşleri 193
Tablo 4.114. Kontrol Etme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 194
Tablo 4.115. İlişkilendirme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 195
Tablo 4.116. “Kümenin Tümleyeninden Yararlanarak Analojik Akıl Yürütme Yapar.” Becerisini Sergileyen Katılımcıların Bazılarının Görüşleri 195

Tablo 4.117. "Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Bazılarının Görüşleri 196
Tablo 4.118. Analojik Akıl Yürütme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 196
Tablo 4.119. "Önermeyi Sembolik Olarak Yazar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 198
Tablo 4.120. "İspatın Anahtar Kavramların Belirler." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 199
Tablo 4.121. "İspatın Hipotez-Hüküm ve Amaçlarını (Hedeflerini) Belirler." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 200
Tablo 4.122. İspat Önermesini Okuma Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 201
Tablo 4.123. Önermenin Altını Çizme Kategorisinde Ulaşılan Kodun Katılımcılara Göre Dağılımı 202
Tablo 4.124. "Ritüel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 202
Tablo 4.125. "Sezgisel Olarak Önermenin Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 203
Tablo 4.126. "Dönüşümsel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 204
Tablo 4.127. "Sezgisel Olarak Doğruluğunu Hisseder Ancak Sembolik Olarak İspatlayamaz." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 205
Tablo 4.128. "İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 206
Tablo 4.129. Doğruluğunu Değerlendirme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 207
Tablo 4.130. Strateji Belirleme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 209

Tablo 4.131. "Olmadığına Örnek Vererek Önermeyi Reddeder." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 210
Tablo 4.132. İşlem Süreci Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 211
Tablo 4.133. "Her Zaman Amaca Doğru İlerler." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 211
Tablo 4.134. "Tepe Tırmanışı Yapar." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 213
Tablo 4.135. Sezgisel Kestirme Yolları Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 214
Tablo 4.136. "Değişken Sayısını Azaltarak İşlem Kolaylığı Sağlar." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 215
Tablo 4.137. İşlemleri Kolaylaştırma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 216
Tablo 4.138. "Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri 217
Tablo 4.139. "Yaptığı İşlemleri Nedenleriyle Açıklar." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri 218
Tablo 4.140. Sorgulama Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 218
Tablo 4.141. "Öz-Düşünüm Becerisini Sergiler." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri 219
Tablo 4.142. Farkındalık Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 220
Tablo 4.143. Planlama Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 221
Tablo 4.144. Kontrol Etme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 222
Tablo 4.145. "İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri 223
Tablo 4.146. "Sorular Sorarak İlişkilendirme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 224

Tablo 4.147. İlişkilendirme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 224
Tablo 4.148. "Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri 226
Tablo 4.149. Analojik Akıl Yürütme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı 226
Tablo 4.150. İspat Önermesini Okuma Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 228
Tablo 4.151. Şekil Çizme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 230
Tablo 4.152. Önermenin Altını Çizme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 232
Tablo 4.153. Doğruluğunu Değerlendirme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 234
Tablo 4.154. Strateji Belirleme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 237
Tablo 4.155. İşlem Süreci Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 239
Tablo 4.156. Sezgisel Kestirme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 241
Tablo 4.157. İşlemleri Kolaylaştırma Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 243
Tablo 4.158. Sorgulama Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 245
Tablo 4.159. Farkındalık Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 247
Tablo 4.160. Planlama Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 249
Tablo 4.161. Strateji Belirleme Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi 251

Tablo 4.162. Kontrol Etme Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi.....253
Tablo 4.163. İlişkilendirme Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi.....255
Tablo 4.164. Analojik Akıl Yürütme Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi.....257

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Harel ve Sowder'in (1998, s. 245) ispat şemaları kategori ve alt kategorileri 11
Şekil 2.2. Analojik akıl yürütme süreci 19
Şekil 2.3. Yaratıcı düşünme süreci ve aşamaları 21
Şekil 2.4. Üst bilişin bileşenleri 25
Şekil 3.1. Araştırma modeline göre çalışma süreci 42
Şekil 3.2. Normallik dağılımı için histogram grafiği 60
Şekil 3.3. Normal dağılım için oluşturulan P-P grafiği 61
Şekil 3.4. Normal dağılım için oluşturulan Q-Q grafiği 61
Şekil 3.5. Öğretmenlerin puanlarının dağılımı için histogram grafiği 63
Şekil 3.6. Son sınıf öğretmen adaylarının puanlarının dağılımı için histogram grafiği 63
Şekil 3.7. 1. sınıf öğretmen adaylarının puanlarının dağılımı için histogram grafiği 64
Şekil 3.8. Öğretmenlerin puanlarının dağılımı için oluşturulan P-P ve Q-Q grafikleri 64
Şekil 3.9. Son sınıf öğretmen adaylarının puanlarının dağılımı için oluşturulan P-P ve Q-Q grafikleri 65
Şekil 3.10. 1. sınıf öğretmen adaylarının puanlarının dağılımı için oluşturulan P-P ve Q-Q grafikleri 65
Şekil 3.11. Veri analizinin şematik açıklaması 67
Şekil 4.1. Geometrinin birinci önermesinde alınan puanlara ait betimsel istatistik grafiği 72
Şekil 4.2. İkinci soruya ait betimsel istatistik grafiği 75
Şekil 4.3. Üçüncü soruya ait betimsel istatistik grafiği 77
Şekil 4.4. Dördüncü soruya ait betimsel istatistik grafiği 80
Şekil 4.5. $ÖAS_{Ö1}$'in birinci soru için çizdiği şekil 88
Şekil 4.6. $ÖA1_{D2}$'nin birinci soruda çizdiği şekil 89
Şekil 4.7. $Ö_{Ö2}$'nin önermede yaptığı hatanın altını çizdiği bölüm 90
Şekil 4.8. $ÖA1_{İ2}$'nin önermede altını çizdiği bölümler 91
Şekil 4.9. $ÖAS_{İ1}$'in birinci önermedeki ispatından görünüm 93
Şekil 4.10. $Ö_{Ö2}$'nin birinci önermede yaptığı ispattan bir kesit 100

Şekil 4.11. $ÖAS_{D2}$'nin ispata başlamadan önce yazdığı hedef 116
Şekil 4.12. $ÖAS_{D1}$'in 1. soruya yönelik çözümünden kesit 120
Şekil 4.13. $Ö_{I2}$'nin önermede altını çizdiği bölümleri gösteren kesit 134
Şekil 4.14. $ÖAS_{I1}$'in çözüm sürecinden bir kesit 136
Şekil 4.15. $ÖAS_{I2}$'nin sözel olarak anlattığı ispat sürecinde yaptığı işlemler 139
Şekil 4.16. $Ö_{I1}$'nin etkinlik kartında ikinci sorudaki vektörel ispatı 140
Şekil 4.17. $Ö_{I2}$'nin etkinlik kartında ikinci sorudaki sentetik ispatı 141
Şekil 4.18. $ÖAS_{I1}$'in etkinlik kartında ikinci sorudaki analitik ispatı 141
Şekil 4.19. $ÖAS_{D2}$'nin ispat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır becerisini sergilediğini destekleyen ekran görüntüsü 151
Şekil 4.20. $ÖAS_{D1}$'in analojik akıl yürütme yaptığı bölümden kesit 161
Şekil 4.21. $Ö_{D2}$'nin önermeyi sembolik olarak ifade ettiğini gösteren ekran görüntüsü 169
Şekil 4.22. $ÖAS_{O2}$'nin etkinlik kartına ait ekran görüntüsü 182
Şekil 4.23. $Ö_{D2}$'nin etkinlik kartına ait ekran görüntüsü 182
Şekil 4.24. $ÖAS_{O2}$'nin sonuca yönelik tahminini gösteren ekran görüntüsü 190
Şekil 4.25. ÖO2'nin etkinlik kartına ait ekran görüntüsü 201
Şekil 4.26. Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamadığını gösteren ekran görüntüsü 206
Şekil 4.27. $Ö_{D2}$'nin sözel olarak önermenin ispatını ifade ettiğini gösteren ekran görüntüsü 208
Şekil 4.28. $Ö_{I2}$'nin planına uygun ispat yaptığını gösteren ekran görüntüsü 210
Şekil 4.29. $Ö_{D1}$'in ispatından bir kesit 212
Şekil 4.30. $ÖAS_{D2}$'nin etkinlik kartından görünüm 214

KISALTMALAR DİZİNİ

MEB : TC Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM : The National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

AFA : Açımlayıcı Faktör Analizi

MGO : Madde güçlük oranı

KGİ : Kapsam Geçerlik İndeksi

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Matematiksel ispat, matematiği diğer bilimlerden ayıran önemli bir kavramdır (Dede ve Karakuş, 2014). Çünkü diğer bilim dallarında verilerin doğruluğu gözlem, deney veya duyu yoluyla elde edilirken matematiksel bilgilerin doğruluğu mantıksal çıkarımlar ve ispatlarla elde edilir (Cevizci, 2005, s. 1134). İspat bir durumun doğru olduğunu söylemenin yanında, niçin doğru olduğunu açıklamayı gerekli kıldığından (Almeida, 2000; Güler, 2013; Uğurel, Moralı, Koyunkaya ve Karahan, 2016) ileri düzeyde bilişsel beceri kullanmayı gerektirerek (Fitzgerald, 1996; Senk, 1985); akıl yürütme, çıkarımda bulunma, derinlemesine anlama ve matematiksel ilişkileri kavrama gibi özellikleri geliştirir (Berggren, 1990; Solow, 2014). İspat matematiksel ifadelerin, formüllerin veya teoremlerin gerekçelerinin görülmesini sağlayarak matematiksel kavramların anlamlandırılmasını kolaylaştıracaktır (Berggren, 1990; Solow, 2014). Ayrıca ispat bireylerin zihinsel süreçlerini olumlu yönde etkileyerek matematiksel akıl yürütme ve analitik düşünme becerilerinin geliştirilmesine katkı sunacaktır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, s. 56; Rice, 2014). Dede (2013, s. 20) matematikte ispatın önemini;

1. Matematiksel bir varsayımın doğruluğunu göstermenin tek yolu olması,
2. Matematiksel düşünmeyi geliştirerek kavramların arkasında yatan gerçekleri anlamayı sağlaması
3. Tüm zamanlarda geçerliliğini sürdürmesi,
4. Doğruluğun nedenlerini açıklaması olarak

dört gerekçeyle ifade etmiştir.

Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar (2002) matematiksel ispatı, bireyin zihinsel süreçlerini merkeze alan mantıksal çıkarımları gerekli kılan süreç becerisi olarak ifade etmişlerdir. Bu nedenle matematiksel ispatlama süreci, matematiğin diğer aktivitelerine göre daha zor ve daha üst düzey bilişsel beceriler kullanmayı gerekli kılan

bir süreçtir (Duval, 1999, s. 23). Üst düzey bilişsel beceriler kullanarak doğru düşünebilen bireyler yetiştirilmesi matematik eğitimcileri için güç bir durumdur (Hamilton, Kelly ve Sloane, 2002, s. 508). Bu durumun aşılması cebir ve geometri gibi farklı matematiksel konu alanlarının bir arada kullanılmasıyla mümkün olacaktır (Dindyal, 2003). Ashline ve Quinn (2009, s. 206) ispat yapmada cebir ve geometriyi bir arada kullanmanın matematiksel anlamayı güçlendirerek, derinlemesine anlamayı sağlayacağını belirtmektedir. Cebir ve geometri üzerine beraber çalışılması sadece matematiğin öğrenilmesi ya da öğretilmesi bağlamında değil ileri matematiğin geliştirilmesi anlamında da önemlidir. Grek matematikçi Apollonius'un konikler üzerine yapmış olduğu çalışmayla, koordinat sistemini ortaya çıkarması bunun en önemli kanıtıdır (Tabak, 2004, s. 92).

Geometri matematiğin nokta, doğru, düzlem gibi kavramlarını ve bu kavramların birbiriyle olan ilişkilerini inceleyen; uzunluk, açı, alan gibi ölçüleri konu edinen dalıdır (Baykul, 2009, s. 354). Geometrinin gelişiminin temelinde birbirini izleyen önermeler yatmaktadır. Yani önce bir önermenin doğruluğu gösterilip, sonra bu önermeye dayalı yeni bilgilerin doğruluğu gösterilir (Altun, 2015, s. 394; Hızarcı, Kaplan, İpek, Işık ve Elmas, 2009, s. 3). Geometrinin temellerini atan Öklid, geometrik kavramların doğruluğunu ispatlama yoluna gitmiştir. Öklid bunu yaparken ilk olarak doğruluğu sezgisel olarak anlaşılabilen; ancak matematiksel olarak ispatlanamayan kavramları var olarak kabul etmiştir. Bu kavramları aksiyom ve postulat olarak isimlendirmiştir (Burton, 2006, s. 147). Öklid geometrideki teoremleri, bu aksiyom ve postulatlara dayandırarak oluşturmuştur (Doğan, 2013, s. 218). Aksiyomlar ve postulatların ispatlanan kavramlar değil, kabul edilen kavramlar olması ilerleyen dönemde üzerlerine yapılan tartışmaları yoğunlaştırmıştır. 19.yy'ın başlarında Öklid'in beşinci postulatının ispatlanması çabaları ve doğada karşılaşılan pek çok geometrik şeklin Öklid geometrisi ile açıklanamıyor olması Öklid dışı geometriyi ortaya çıkarmıştır (Güven, 2006; Lesh ve Zawojewski, 2007; Wolfe, 1945). Altun (2015, s. 356) günümüz geometrisinin tanımsız terimler, tanımlı terimler, postulatlar ve aksiyomlar olmak üzere dört öğeden oluştuğunu belirtmiştir. Buna karşın geometrik ilişkilerin anlaşılması ve ileri geometrinin gelişmesi ancak cebir ve notasyonların kullanımıyla mümkün olacaktır (Johnson, 1960, s. 1). Ayrıca geometrinin derinlemesine anlaşılmasına da cebir katkı sağlayabilir (Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013, p. 402).

Cebir matematiğin sayılarla ve harflerle ilgilenen, genel sayılar arası ilişkileri ve özelliklerini inceleyen, denklemleri konu edinen dalıdır (Kieran, 1992, s. 390). Cebirin ortaya çıkışı denklemleri çözmede genel bir kural ortaya koyma gereksinimine dayanmaktadır. Bu süreç üç aşamalı olarak ilerlemiştir: söz evresi, söz-sembol evresi, sembol evresi (Akkan, 2009). Söz evresi, cebirin ortaya çıkış evresidir. Bu evrede problemlerin çözümünde sembol kullanılmamış ve problemler sadece sözel olarak ifade edilmiştir (Merzbach ve Boyer, 2011, s. 212). İkinci evre söz-sembol evresidir. Bu evrede sözel ifadelerin kullanımıyla beraber ilk kez bilinmeyeni ifade edecek semboller kullanılmıştır (Cajori, 1930, s. 108). Son evre ise sembol evresidir. Bu evre bugün bilinen anlamıyla cebirin ilerlemesini sağlayan ve tamamen sembollerin kullanıldığı evredir. Bu evrede çeşitli cebirsel durumların ispatları yapılmaya başlanmıştır (Cajori, 1930, s. 109). Bu ispatların yapılmasında ve cebirin gelişiminde geometri önemli rol üstlenmiştir (Charbonneau, 1996, s. 15). İlk olarak Harezmi cebirsel kuralların geometrik ispatları üzerine çalışmıştır. Harezmi özdeşliklerin geometrik modelleri hakkında çalışmalar yapmıştır (Charbonneau, 1996, s. 26). Sonrasında cebirsel problemlere geometrik çözümlerin getirilmesiyle, fonksiyon kavramı gibi yeni kavramlar ortaya çıkmıştır (Kleiner, 1989, s. 1989).

Geometri ve cebir matematiğin birbirinden farklı iki dalı gibi görülse de, gerçekte matematiği oluşturan bir bütünün iki yarısı gibidirler. Yani cebirin öğrenilmesi geometrik bilginin anlaşılmasını kolaylaştırabileceği gibi; geometrinin bilinmesi ve kullanılması da cebiri anlaşılır kılacaktır. Nitekim Akkan (2009) aritmetikten cebire geçiş sürecinin tamamlanabilmesi ve cebirsel kavramların anlaşılabilmesi için geometri bilgisinin kullanılması gerektiğini ifade etmiştir. Cebire geçiş sürecinde geometri bilgisinin kullanımı cebire geçişi kolaylaştırmasına rağmen; bilinmeyen kullanımına geçişi engelleyen bir durum olarak belirlenmiştir (Filloy ve Rojano, 1989). Cebir ve geometri arasındaki bağın güçlü olması ilköğretimden yükseköğretime kadar her düzeydeki öğrenci için önemli olmakla birlikte (Dindyal, 2003); ispat yapma süreci için de oldukça önemlidir. Nitekim geometrik ispatlar bazen cebirsel yollarla yapılırken, bazen de cebirsel ispatlar geometrik yollarla yapılabilir. NCTM (2000, s. 56) raporunda ilköğretimden ortaöğretimin son kademesine kadar ispat öğretimine yapılan vurgu ve TC Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2011) öğretim programında ispat öğrenme alanına yönelik "İspat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar." kazanımı ortaöğretim

düzeyinde ispat öğretimini ön plana çıkarmaktadır. Ancak ispat sadece üst düzey başarılı liselerde öğretilebilmekte ve Öklid ispatlarıyla sınırlı kalmaktadır (Knuth, 2002). İspat öğretimi yapılırken öğrencilerin kendilerinin ispat yapabilmesini sağlamada; öğrencilerin sahip oldukları bilgiler arasındaki ilişkileri kurabilmeleri, farklı ispat yöntemlerini kullanabilmeleri, ispatta adımlar arası ilişkileri kurabilmeleri ve doğru strateji belirleyebilmeleri gereklidir.

1.1. Araştırmanın Gerekçesi

Öğrencilerin ispatı anlayabilmesi, onların ispatı öğrenebileceği olumlu sınıf ortamı oluşturmaktan geçmektedir (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Olumlu sınıf ortamının oluşturulmasında ise en önemli rol kuşkusuz öğretmenindir (Uğurel ve diğerleri, 2016). Bu nedenle öğrencilerin ispat yapma becerisini kazanmalarında öğretmenlerin önemli etkisi olduğunu söylenebilir (Furinghetti ve Morselli, 2011; Harel ve Sowder, 2007, s. 811). Öğretmenin öğreteceği konunun gerekliliğini ortaya koyması, neleri öğreteceğinin sınırlarını çizmesi kendi sahip olduğu bilginin derinliğiyle de ilişkili olan bir kavramdır (Shulman, 1986).

Matematik öğretmenlerinin ispata yönelik sahip olduğu bilgi ve inançları, başka bir ifadeyle ispata yönelik yaklaşımları, öğrencilerin ispatın doğasını, fonksiyonlarını ve rollerini anlamasını etkileyecektir (Knuth, 2002). Bu bağlamda matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının geometri ve cebir ispatlarını bilmelerinin bilgi derinliği oluşturmaları açısından önemli olduğu söylenebilir (İpek, 2010). Öğretmenlerin sınıf içi uygulamalarının öğrencilerin öğrenmesini etkilediği göz önüne alındığında sadece hizmet öncesi değil, hizmet içi dönemde de öğretmenlerin bilgi ve becerilerinin belirlenerek ihtiyaç duyulan eğitimlere tabi tutulmalarının gerekliği ortaya çıkmaktadır (Knowlton, 2015). Öğrencilere ispat yapma becerisini kazandırması beklenen öğretmenlerin, ispat yapmada ne derece yeterli olduklarının ve ispat yaparken ki bilişsel süreçlerinin nasıl işlediğinin belirlenmesi, ispat yapmadaki eksikliklerin giderilmesi ve ispat yapma becerisinin geliştirilmesi için gereklidir.

Yapılan çalışmalar öğrencilerin ve öğretmenlerin ispatı üst düzey bilgi ve beceriyi kullanarak değil; daha çok ezberleyerek yaptıklarını ve daha önce karşılaşmamış oldukları ispatları yapmakta zorluk çektiklerini ortaya koymuştur (Harel

ve Sowder, 1998, s. 252; Uğurel ve diğerleri, 2016). Durum böyle olmasına rağmen göz ardı edilemeyecek bir gerçek şudur ki; ispat, matematikte kurallı akıl yürütmenin yollarından biridir (NCTM, 2000, s. 56) ve matematiksel kavramların oluşturulmasında, bilginin organize edilmesinde önemli role sahiptir (Herbst, 2002; Uğurel ve diğerleri, 2016). Pek çok matematik öğretim programı da ispat yapmaya yer vererek önemine vurgu yapmıştır (Herbst, 2002). Bu vurgunun nedeni ispatın matematik öğretimi için önemli bir kavram olmasıdır.

Amerika Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi ispatın matematikte özel bir konu için değil, konuların tümü için kazandırılması gereken bir standart olduğuna işaret etmektedir (NCTM, 2000, s. 342). Ayrıca ispat standardını akıl yürütme ile ele alarak okul öncesi eğitimden ortaöğretime kadar tüm öğretim programlarına dâhil etmiştir (NCTM, 2000, s. 3). Ülkemizde ise ispat, ortaöğretim programında beş temel beceriden biri olan akıl yürütme becerisinin altında bir alan olarak ele alınmıştır (MEB, 2011, s. 11). İspat sürecinin ileri düzey bilgi ve üst düzey bilişsel beceri gerektiren bir süreç olduğu göz önüne alındığında, ispat yapmanın kolay olmadığı anlaşılmaktadır. İspat yapma için, kuramsal bilgi eksiği giderildikten sonra bireyin bilişsel ve üst bilişsel becerilerini işe koşması gerekmektedir (Zazkis, Weber ve Mejía-Ramos, 2015). Genellikle matematik problem çözme süreci içinde ele alınan ve önemli görülen üst biliş, matematiksel ispat yapma süreci içinde oldukça önemli bir kavramdır. Çünkü bir önermenin niçin doğru olduğuna karar verme, işlemleri neden yaptığını bilme, genellemeye ulaşıp ulaşamadığına karar verme gibi beceriler üst biliş stratejiler gerektirmektedir (Özsoy, 2008).

İspat sürecindeki bilişsel durumları ortaya koymak, ispat öğretiminde izlenecek yollar için de belirleyici faktör olacaktır (Harel ve Sowder, 2007, s. 806). Güler'de (2013) ispatın doğasını anlamak için ispat sürecini incelemenin gerekli olduğunu belirtmiştir. Matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarına daha iyi eğitim verilerek, öğretimin kalitesinin arttırılması ve ispatın doğasının daha detaylı açıklanabilmesi için ispat yapma süreçlerinin bilişsel boyutuyla derinlemesine incelenmesi gerekmektedir.

Alan yazın incelendiğinde matematik öğretmen adaylarının ispatlama süreçlerini inceleyen çalışmalar olduğu görülmektedir (Öztürk, Akkan, Kaleli-Yılmaz ve Kaplan, 2015). Ancak yapılan çalışmaların daha çok görüşleri belirlemeye yönelik (Güler, 2013;

Rice, 2014) veya ispatlama sürecindeki bilgi ve becerileri saptamaya yönelik (Doruk, 2016; Şahin, 2016; Yestness, 2012) olduğu anlaşılmaktadır. Oysa günümüzün popüler çalışma alanlarına bakıldığında problem çözme, matematiği anlama gibi alanlarda görüş belirleme veya bilgi-beceri tespit etmeye yönelik çalışmalardan uzaklaşılarak bilişsel açıdan incelemeye yoğunlaştığı görülmektedir (Kieran, 2017, s. 157). Hatta bu çalışmalar daha ileri taşınarak zihinsel açıdan (fMRI, PET gibi araçlarla) inceleme yollarına gidilmiştir (Krueger, ve diğerleri, 2008; Newman, Carpenter, Varma ve Just, 2003). Bu tür çalışmalar bireylerin düşünme süreçlerini ortaya koyması bakımından önemlidir (Kieran, 2017, s. 158). Çünkü bireyin bilişsel ve zihinsel süreçleri bilindiğinde öğrenmeye yönelik daha kapsamlı etkinlikler düzenlenebilir ve öğrenmesi kolaylaşabilir. Bu doğrultuda ispata yönelik bilişsel süreçlerin incelenmesinin ispatın öğrenilmesi, öğretilmesi ve zihinsel süreçlerin incelenebilmesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

1.2. Araştırma Konusu ve Problemi

Matematik kimine göre yaşamı anlamanın bir yolu, kimine göreyse okul yıllarında geçip kurtulması gereken bir derstir (Sertöz, 2013, s. 1). Bu durum kuşkusuz matematiğin nasıl algılandığı ile ilgilidir. Matematiği günlük yaşamda kullanılan, geleceği şekillendirmede bir araç olarak gören bireyler matematiği günlük yaşamı anlamanın bir yolu olarak görebilirken; matematiğin ezberlenerek öğrenilen problem-çözüm ve teorem-ispat yolu ile ilerleyen bir yapısı olduğunu düşünenler, matematiği sadece zorunlu bir ders olarak görebilirler. Eski bir matematik kitabını alıp, yapısını incelediğinizde kitabın $\text{Teorem} \rightarrow \text{Formül} \rightarrow \text{İspat}$ örgüsünde yazıldığını ve bazı bilgiler için bu bilgiler ezberlenecektir dediğini göreceksiniz (Sertöz, 2013, s. 2). Buna paralel olarak öğretim programlarının da $\text{"Tanım} \rightarrow \text{Teorem} \rightarrow \text{İspat} \rightarrow \text{Uygulamalar ve test"}$ adımlarını izleyerek ilerlediği bilinmektedir (MEB, 2011, s. 6). Yukarıda sözü geçen öğretim programları yaşamın merkezinde olan matematiğe gereken önemin verilmesinde yeterli olmamıştır. Bu durum ülkeleri yeni matematik öğretim programları arayışına yöneltmiştir. Arayışlar neticesinde pek çok ülke öğretim programını değiştirmiş veya geliştirmiştir. Yeni matematik öğretim programları süreç odaklı olarak tasarlanmışlardır. Bu programlar öğrencinin bilgiyi kendisinin oluşturmasını, matematiksel kuralları kendisinin bulmasını

ve matematiksel akıl yürütmeyi geliştirmesini sağlayacak şekilde tasarlanmıştır. Program öğrencilerin iletişim, günlük yaşamla ilişkilendirebilme, genelleme yapma ve sonuç çıkarma becerilerini geliştirmeye dayalıdır (MEB, 2011).

Bu gereklilikler doğrultusunda bu çalışma "Matematik öğretmeni ve öğretmeni adayları ispat yapma sürecinde ne tür bilişsel ve üst bilişsel beceriler sergilemektedir?" problemine yanıt aramak amacıyla yapılmıştır. Bu probleme yanıt bulmak için aşağıdaki sorular sorulmuştur:

1. Matematik öğretmeni ve öğretmeni adayları geometri ve cebir ispatı yapma sürecinde ne tür bilişsel beceriler sergilemektedir?
2. Matematik öğretmeni ve öğretmeni adayları geometri ve cebir ispatı yapma sürecinde ne tür üst bilişsel beceriler sergilemektedir?
3. Farklı seviyedeki matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının ispat yapma becerileri seviyelerine göre farklılaşmakta mıdır?

1.3. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Matematik eğitimi için ispat önemli bir kavramdır. Ancak ispatı anlayarak yapmak öğrenciler ve öğretmenler için oldukça zor görülmektedir (Aljaberi, 2014). Bu durum ispatın doğasıyla veya ispatın öğrenilmesiyle ilgili olabilir. Bu anlamda ispat yapma sürecindeki bilişsel süreçler incelenerek bireylerin ispatı ne düşünerek yaptıkları belirlenebilir. Nitekim Selden ve Selden (2015) ispatın iyi öğrenilmesi ve öğretilmesi için ilk olarak ispatlamadaki bilişsel faktörlerin belirlenmesi gerektiğini belirtmiştir. Böylece ispat öğretiminin yapılması için bir çerçeve oluşturulabilir. Çünkü bireylerin ispat yaparken önermeyi okumasından ispatını değerlendirmesine kadar ki sürecin ortaya konulması bu süreçte hangi becerilerin işe koşulduğunu ortaya koyacak, böylece ispatlama sürecinin anlaşılmasını ve geliştirilmesini sağlayacaktır.

Son yıllarda farklı düzeylerdeki matematik derslerinde ispat kavramına verilen önem artmıştır. Buna karşın ispat sürecinin yeterince bilinmemesi, ispat hakkında yeterli bilgiye sahip olunmaması, sembolik dilin kullanılamaması ve ispat yöntemlerinin yeterince bilinmemesi gibi nedenlerle ispat yapma sürecinde pek çok güçlük yaşanmaktadır (Uğurel ve diğerleri, 2016). Bu durumun nedenlerinden ilki öğretmenlerin kendi bilgi becerilerini kullanarak değil de ezberleyerek ispat yapması

ikincisi ise ispat yapma sürecinin net olarak ortaya konulamamış olmasıdır. Son dönemlerde ispat süreçlerini ortaya koyan çalışmalar incelendiğinde, çalışmaların geometri ve cebir alanında ayrı ayrı ilerlediği görülmektedir. Tarihsel gelişimleri ve öğretim süreçleri iç içe geçmiş olan bu iki alanda yapılacak ispat süreci inceleme çalışmalarıyla geometri ve cebir arasındaki bağ güçlendirilerek öğretim sürecinde bu iki alanın birbiriyle ilişkilendirilmesi sağlanacaktır.

Öne sürülen gerekçeler doğrultusunda bu çalışmanın amacı matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının geometri ve cebir ispatı yapma sürecinde sergilemiş olduğu becerileri bilişsel açıdan derinlemesine incelemektir.

1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat yapmadaki bilişsel süreçlerinin analizi etkinlik kartında yer alan sorularla sınırlıdır. Etkinlik kartında sorulan soruların ileri düzey bilgi gerektiren türde olması halinde bilişsel süreçlerin incelenmesi güçleşecektir. Bu nedenle sorular geometri için ek çizim ve lemma kullanmayı gerektirmeyen; cebir içinde ileri düzey bilgi gerektirmeyen türdedir.

Çalışmada Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi'nde okuyan ortaöğretim matematik öğretmen adayları ve Erzurum ilinde görev yapan öğretmenler ile yürütülmüştür. Çalışmada belirlenen bilişsel süreçler bu katılımcılarla sınırlıdır.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Araştırmanın varsayımları aşağıdaki şekilde aşağıdaki şekilde belirlenmiştir;

1. Etkinlik kartında sorulan önermelerin veri toplama açısından uygun olduğu varsayılmıştır.
2. Çalışmada kullanılan teşhis testini cevaplayan katılımcıların kendi performanslarını yansıtacak şekilde testi cevapladıkları kabul edilmiştir.
3. Sesli düşünme protokolüne katılan 6 öğretmen ve 12 öğretmen adayının düşüncelerini samimi bir şekilde ifade ettikleri varsayılmıştır.

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Çalışmanın bu bölümünde araştırmanın kuramsal çerçevesi; matematiksel ispat ve ispatlama, matematiksel düşünme ve akıl yürütme, biliş ve üst biliş hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca araştırmanın kuramsal çerçevesi ile ilgili olarak alan yazın derlemeye ve bazı çalışmalara yer verilmiştir.

2.1. Matematiksel İspat ve İspatlama

İspat kavramı matematik, adalet, istatistik, fen bilimleri, ekonomi ve matematik eğitimi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. İspat matematikte aritmetikten sonra ortaya çıkmış -ortaya çıkışı genellikle Thales'e atfedilir- ve eski çağlarda matematiğin merkezi haline gelmiştir. Thales'den sonra ispat kavramının gelişiminde sırasıyla Öklid ve Alexandria rol oynamıştır. Temeli aksiyomlara dayandırılan ispat kavramı matematikte başarının en üst noktası olarak görülmektedir. Günümüzde ise ispat matematiğin bir dalı olarak görülmektedir ve matematikte yeni teoremlerin doğruluğunun gösterilmesinde kullanılmaktadır (Bloch, 2011, s. 47).

Genel olarak bir yargının doğruluğunu gösterme olarak kullanılan ispat matematik eğitiminde biraz daha farklı ve derin bir anlama sahiptir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 66). Matematik eğitiminde ispat, doğruluğu daha önceden gösterilmiş olan önermelerin doğruluğuna veya yanlışlığına bireyleri ikna etmedir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 66; Bloch, 2011, s. 48). Gerstein (2012, s.2) ispat kavramını, bir durumun doğruluğunu değerlendirmede kullanılan kurallar bütünü olarak tanımlamıştır.

Matematiksel ispat yapma süreci ispatlama olarak adlandırılmaktadır (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 66). Yıldırım (2000, s. 102) ispatlamayı "Bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır." biçiminde tanımlamıştır. İspatlama süreci önerme, teorem, aksiyom, postulat ve lemma kavramlarını içermektedir.

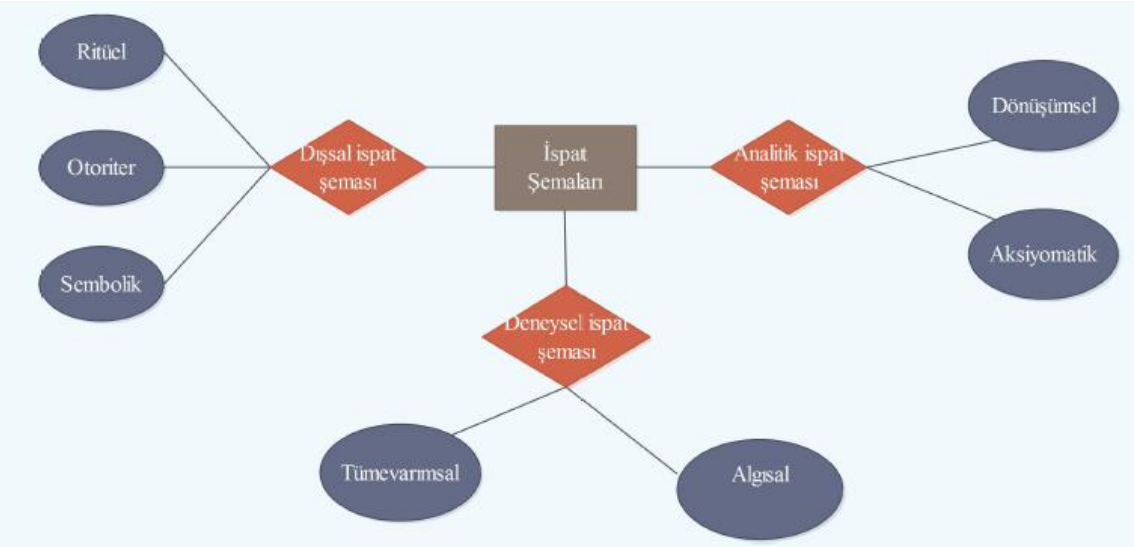
Doğru veya yanlış olduğu matematiksel bir sistem kullanılarak gösterilebilen ifadeler önerme olarak tanımlanmaktadır (Gerstein, 2012, s. 3). Doğru olduğu matematiksel olarak ispat edilebilen ifadelere ise teorem denir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2016, s. 59; Gerstein, 2012, s. 3). Doğru olduğu kabul edilen, matematiksel olarak ispat gerektirmeyen ifadeler aksiyom olarak adlandırılmaktadır (Gerstein, 2012, s. 2). Postulat kelimesi de genellikle aksiyom kelimesi ile aynı anlamda kullanılmaktadır. Ancak geometri ispatlarında genellikle postulat, cebir ispatlarında ise aksiyom ifadesi yer almaktadır (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2016, s. 58). Lemma, daha önceden doğruluğu ispat edilen ifadelerin, başka bir ispatın tamamlanmasında aracı olarak kullanılmasıdır. Lemma, yardımcı teorem olarak bilinmektedir (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2016, s. 59).

2.1.1. İspat şemaları

Matematikte herkesin bilgisi, akıl yürütmesi ve düşüncesi farklıdır. Bu nedenle bireylerin matematiksel ispatları yapmada kullandıkları yollar da farklılaşmaktadır. Bireylerin ispatlama sürecinde kullandığı farklı yollar genel olarak ispat şemaları olarak adlandırılmaktadır (Sowder ve Harel, 1998). İspat şeması, bir kişinin veya topluluğun bir durumun doğruluğuna neyle ikna edildiğidir (Harel ve Sowder, 2007, s.809). Aydoğdu-İskenderoğlu (2016, s. 67) ispat şemalarını bireylerin bir ispatın doğruluğunu veya yanlışlığı göstermede kullandığı düşünme biçimleri olarak açıklamıştır. Aydoğdu-İskenderoğlu (2016, s. 67) ispat şemalarının her zaman doğru sonuca ulaşmaya yönelik bir olgu olmadığını; düşünme sürecinde gerekçelendirme yapmaya dayalı doğru ve yanlış tüm becerileri kapsadığını belirtmiştir.

İspat şemaları uzun süredir matematik eğitiminde çalışılmaktadır. Pek çok araştırmacı belli ispat şemaları ortaya koymuşlardır (Liu ve Manouchehri, 2013). İspat şemalarından ilk olarak Bell (1976) söz etmiştir. Bell (1976) ispat şemalarını deneysel (emprical) ve tümdengelimsel (deductive) olarak ikiye ayırmıştır. İki şemanın birçok noktada benzerlik gösterdiğini belirten Bell, tümdengelimsel ispat şemasını genellemeye ulaştıktan sonra özel durumların sunulması olarak tanımlarken; deneysel ispat şemasını ise, belli durumların kontrol edilerek genellemeye ulaşılması anlamına gelmektedir (Bell, 1976). Balacheff (1988, s. 219) ispat şemalarını dört kategoride ele almıştır. Bu kategoriler saf deneysel (naive empricism), önemli deney (crucial experiment), jenerik örnek (generic example) ve yarı deneysel (thought experiment)

şeklinde sıralamıştır. Saf deneysel belli örnek durumların kontrol edilmesini içerir. Önemli deney kişinin belli sorular yardımıyla rasgele bir genellemeye ulaşmasını içerir. Jenerik örnek ise, ispat için genel durumların doğruluğunun gösterildiği; ancak önermedeki özel durumların gösterilemediği düzeydir. Yarı deneysel ise kişinin tümdengelimli mantıksal çıkarımlar yardımıyla önermenin doğruluğunu göstermedir (Balacheff, 1988, s.219). İspat şemalarında genel kabul göreni birçok kez teyit edileni Harel ve Sowder (1998, s. 244) tarafından yapılmıştır. Yazarlar ispat şemalarını üç kategoriye ve bu kategoriler altında alt kategorilere ayırmışlardır. Harel ve Sowder'in (1998, s. 245) ispat şemaları Şekil 2.1'de sunulmuştur.



Şekil 2.1. Harel ve Sowder'in (1998, s. 245) ispat şemaları kategori ve alt kategorileri

Dışsal İspat Şeması

Dışsal ispat şeması, bireylerin ispatının doğruluğunu bir öğretmen, kitap, okuduğu bir metin, duyduğu bir ifade veya arkadaşlarından öğrendiği bir bilgiye dayandırmasıdır. Dışsal ispat şeması; ritüel, otoriter ve sembolik ispat şeması olarak üçe ayrılmaktadır (Harel ve Sowder, 1998, s. 244).

Ritüel ispat şeması bireylerin bir akıl yürütme yaparak değil sadece önceden bildikleri formül ve kurallardan yararlanarak ispatı gerekçelendirmeleridir. Bu ispat şemasında ispatın doğruluğundan ziyade matematiksel ispatın formlarına uygunluğu değerlendirilir (Harel ve Sowder, 1998, s. 246). Ritüel ispat şemasına sahip olan bireyler genellikle matematiksel ispatın doğruluğundan ya da geçerliğinden emin

olamamaktadırlar (Dede ve Karakuş, 2014). Sembolik ifadeler ve matematiksel notasyonlar yönünden eksik olan bu ispat şeması matematiksel ispatın tamamlanması için yeterli değildir (Harel ve Sowder, 1998, s. 246). Martin ve Harel (1989) ise daha keskin bir dille ritüel gerekçelendirmenin doğru bir ispat gerekçelendirme şekli olmadığını dile getirmiştir.

Otoriter ispat şeması sorgulama gerektirmeyip, ders kitabı, öğretmen gibi bir otoriteye dayandırılarak ispatın gerekçelendirilmesidir (Dede ve Karakuş, 2014). Aydoğdu-İskenderoğlu (2016, s. 69) bu ispat şemasına sahip bireylerin daha çok kural veya formül uygulayan ezbere ispat yapan bireyler olduğunu belirtmiştir. Bu ispat şeması için Harel ve Sowder (1998, s. 247) ilköğretim öğrencileri arasında en sık tercih edilen ispat gerekçelendirme yöntemi olduğunu belirtmiştir.

Sembolik ispat şeması bireylerin sembolleri farkında olmadan kullandıkları ve kullandıkları sembollerin amacına uygun olmadığı gerekçelendirme türüdür (Harel ve Sowder, 1998, s. 250). Bu ispat şemasına sahip olan bireyler sembollerin olası anlamlarını düşünmeden sadece sembolik işlem yapmaya odaklanmaktadırlar (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 73).

Deneysel ispat şeması

Deneysel ispat şeması bireylerin bir ispatın doğruluğunu değerlendirmede fiziksel gerçekler veya duyusal deneyimlerden yararlanmasıdır. Deneysel ispat şemaları tümevarımsal ve algısal ispat şeması olarak ikiye ayrılmıştır (Harel ve Sowder, 1998, s. 252).

Tümevarımsal ispat şeması belli örnekler yardımıyla genellemeye ulaşmaya dayalı olan, sonucun doğruluğu hakkında netlik vermeyen (doğru ya da yanlış olabilir) gerekçelendirme türüdür (Harel ve Sowder, 1998, s. 252). Tümevarımsal ispat şemasına sahip bireyler, ispatlarını gerekçelendirirken sınırlı örneklerle beraber kümenin tümüne genelleme yapmaktadırlar (Dede ve Karakuş, 2014). Martin ve Harel (1989) öğretmen adaylarının genellikle tümevarımsal ispat şemasına uygun gerekçelendirme yaptıklarını belirlemiştir.

Algısal ispat şeması, bir ispatın doğruluğunun değerlendirilmesinde sezgilerin kullanımına dayalı gerekçelendirme türüdür (Harel ve Sowder, 1998, s. 255). Bu ispat

şemasına sahip bireyler ispatlarını gerekçelendirirken görsel unsurlardan, sezgilerden veya basit çizimlerden yararlanabilirler (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 75).

Analitik İspat Şeması

Analitik ispat şeması bireylerin bir durumun doğruluğunu gösterirken tümdengelimsel akıl yürütme yaptıkları, gerekçelendirmede matematiksel kavramlardan ve ilişkilerden yararlandıkları muhakeme sürecidir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 76). Analitik ispat şeması; dönüşümsel ve aksiyomatik ispat şeması olarak ikiye ayrılmaktadır.

Dönüşümsel ispat şeması belli örnekler yoluyla ispatın doğruluğunun değerlendirildiği ve ispat şemalarının farkında olmayı gerektiren ispat şeması türüdür (Dede ve Karakuş, 2014; Harel ve Sowder, 1998, s. 261). Bu ispat şemasına sahip bireyler sembolik ifade kullanmadan genellemeye ulaşmaktadırlar (Harel ve Sowder, 1998, s. 262). Bu ispat şemasında genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım olmak üzere üç özellik vardır (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 77). Bu ispat şeması dönüşümsel ispat şemasından farklı olarak sistematik örneklerle veya kritik örneklerle doğrulama yapmayı gerektirmektedir (Radford, 2008).

Aksiyomatik ispat şeması dönüşümsel ispat şemasının taşıdığı tüm özellikleri taşıyıp bunlara ek olarak tanımları, teoremleri, tahminleri ve sonuçları da içerir. Bu şemaya göre gerekçelendirme yapan bireyler yeni karşılaştıkları önerme ve ispatları da anlayıp, algılayabilirler. Bu ispat şeması diğer tüm ispat şemalarıyla karşılaştırıldığında en üstte yer alan ispat şeması olarak tanımlanabilir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 78). Aksiyomatik ispat şeması matematiksel akıl yürütmenin merkezinde yer almaktadır (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 80).

2.2. Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme

Bireyler karşılaştıkları bir problemi çözerken farklı düşünme yollarına başvurabilirler. Bu yollardan bazıları bireyi hedefe ulaştırırken bazıları da hedeften uzaklaştırarak sonuca ulaşmayı engeller. İnsanların belli bilgilerden yararlanarak bu bilgilerin ötesinde belli sonuçlara ulaşmalarına akıl yürütme denir (Goldstein, 2013, s. 608). Başka bir ifadeyle akıl yürütme, bireyde var olan bilgilerden yola çıkarak çıkarımlarda bulunmadır (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 412). Akıl yürütme, problem

çözme, soyutlama, muhakeme etme gibi becerileri içinde barındıran zihinsel temsil süreçleri düşünme olarak adlandırılır (Solso, Maclin ve Maclin, 2014, s. 500). Smith ve Kosslyn (2014, s. 412) düşünmeyi "Dünyanın bazı yönlerini zihinsel olarak temsil etme ve bu temsilleri, amacımıza uygun yeni temsiller üretebilmek için değiştirme süreci." olarak tanımlamıştır. Bu düşünme yollarından bazıları algoritma kullanma, sezgisel kestirme yolları, işlevsel değişmezlik, içgörü, analojik akıl yürütme, yaratıcı düşünme, tümevarımsal akıl yürütme, tümdengelimsel akıl yürütmedir.

2.2.1. Algoritma kullanma

Algoritma, doğru şekilde organize edildiğinde sonuca ulaşmayı garanti eden kurallardır (Plotnik, 2009, s. 308). Woolfolk-Hoy (2015, s. 576) algoritmayı bir amaca adım adım ulaşmayı sağlayan yönerge şeklinde tanımlamıştır. Bruning, Schraw ve Norby (2014, s. 166) algoritmaları bireylerin problemle karşılaştıklarında onu çözebilmeleri için biçimlendirdikleri stratejiler ya da kurallar olarak açıklamıştır. Bir problemin çözümünde algoritma kullanmak çözümü garanti edecektir. Ancak bireylerin problem çözmede algoritma kullanmak yerine deneme yanılma yoluyla çözüm aradıkları ifade edilmektedir (Woolfolk-Hoy, 2015, s. 576).

2.2.2. Sezgi ve sezgisel kestirme yolları

Sezgi kavramına yönelik farklı tanımlamalar yapılmıştır. Bu anlamda sezgiyi anlamlandırabilmek için ilk olarak sezgiyi bilişsel boyut ve üst bilişsel boyut olarak ikiye ayırmalıyız. Bilişsel boyut bağlamında değerlendirildiğinde genel olarak bir anda akla gelen düşünceler olarak ifade edilirken; üst bilişsel boyut bağlamında değerlendirildiğinde sezginin belli bir düşünme sürecinin sonucunda bir anda ortaya çıkan düşünceler olarak ifade edilebilir. Alan yazında bilişsel ve üst bilişsel şeklinde bir ayrıma gidilmemiş olmasına rağmen ifadeler incelendiğinde bilişsel ve üst bilişsel kavramlarıyla örtüştüğü anlaşılmaktadır. Bu kavrama değinen Selçioğlu-Demirsöz (2014) sezgisel bilginin üst bilişsel bilgi türlerinden biri olduğunu ifade etmiştir. Sezgi kavramını ilk boyutuyla tanımlayacak olursak Descartes'in görüşlerine bakmamız gerekir. Descartes'e göre sezgisel bilgi hakikate dayalıdır ve kaynağı her şeye gücü yeten yaratıcı tarafından insanlara verilmektedir (Mursell, 1919). Ancak matematik

bilgisinin inşa edilmesinde bu yeterli değildir. Bu bilgide insanların kendi deneyimlerini de kullanmaları gerekir (Mursell, 1919). Diğer görüşe göre ise sezgiler kendiliğinden ortaya çıkmamakta belli bir düşünme ve uğraşma sürecinin sonucundaki aydınlanma evresinde ortaya çıkan düşünme ürünleridir (Topçu, 1968, s. 47). Plotnik (2009, s. 308) bir bilginin doğruluğunu sezgisel olarak hissetmenin akıl yürütmeye dayalı yaratıcı bir beceri olduğunu belirtmiştir. Smith ve Kosslyn (2014, s. 417) sezgilerin problemlerin algoritmalar kullanılarak kesin sonuca ulaştırılamadığında kullanıldığını ifade etmiştir. Özdemir ve Sarı (2016, s. 658) farkında olunarak yapılan sezgisel akıl yürütmenin durumsal bilgi bağlamında üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Garofalo ve Lester (1985) sezgisel becerilerin bilgisinin ve farkındalığının üst bilişsel beceri olduğunu ve bireyin problem çözmesini kolaylaştırdığından söz etmiştir. Benzer ifadeleri kullanan başka araştırmacılarda vardır (MacDonald, 1973).

Problemin daha hızlı ve kolay çözümünü sağlamak için işlem sayısını azaltmaya yönelik yapılan işlemler ise sezgisel kestirme yolları olarak tanımlanır. Bu yollar karar verme ve sonuç çıkarmada sıklıkla kullanılır (Plotnik, 2009, s. 308). Ancak sonucu garanti etmezler hatta bazen sonuçtan uzaklaştırabilirler (Bruning ve diğerleri, 2014, s. 166). Plotnik (2009, s. 308) sezgisel kestirme yolunun akıl yürütmeye dayalı yaratıcı bir beceri olduğunu belirtmiştir. Sezgisel kestirme yolları; araç-amaç analizi yapma, deneme-yanılma (rasgele arama) yapma, tepe tırmanışı yapma ve her zaman amaca doğru ilerleme olarak dörde ayrılmaktadır. Bu yöntemleri cebirsel yapılarda gruplar üzerinde bir örnekle açıklayalım. Bunun için aşağıdaki soruyu inceleyelim:

"Tamsayılardan oluşan $G = \{6a + 14b : a, b \in Z\}$ kümesinin tamsayılardaki toplama işlemi üzerinde birleşme özelliğine sahip olduğunu gösteriniz."

Bu problemin çözümü için $\forall\, (6a_1 + 14b_1), (6a_2 + 14b_2), (6a_3 + 14b_{3)} \in G$ ise,

$$[(6a_1 + 14b_1) + (6a_2 + 14b_2)] + (6a_3 + 14b_3)$$

$$= (6a_1 + 14b_1) + [(6a_2 + 14b_2) + (6a_3 + 14b_3)]$$

eşitliğini yazdıktan sonra eşitliğin sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmesi gerekmektedir. Sezgisel kestirme yolları için bu soru her bir bileşende açıklanmıştır.

Araç-amaç analizi, alt hedeflere ayırma, çözümleme-birleşim gibi farklı adlarda kullanılan yöntem problemin algoritmalar kullanılarak çözüme ulaştırılamadığında kesin sonuç vermeyen sezgiler yoluyla çözüme ulaştırılmasında kullanılır (Plotnik, 2009, s. 309). Woolfolk-Hoy (2015, s. 577) araç-amaç analizini "bir hedefin alt hedeflere bölündüğü bulgulayıcı yaklaşım" olarak tanımlamış ve problemin algoritmalar kullanılarak çözüme ulaştırılamadığında kesin sonuç vermeyen sezgiler yoluyla çözüme ulaştırılmasında kullanılan bir yol olduğunu belirtmiştir. Bruning ve diğerleri (2014, s. 166) araç-amaç analizinin bireyi adım adım sonuca yaklaştıran yol olduğunu ifade etmiştir. Bilimsel bir görevi yerine getirmede hedefi alt hedeflere ayırarak birimler üzerinde işlem yapmayı daha sonra tekrar birleştirerek sonuca ulaşmayı amaçlayan akıl yürütme yoludur (Fersahoğlu, 2015, s. 519; Goldstein, 2013, s. 568). Ayrıca yapılan araştırmalarda bu becerinin sıklıkla kullanıldığı belirlenmiştir (Sağlam, Altun ve Aşkar, 2009; Karagöz ve Çakır, 2011). Bu yöntem diğer sezgisel kestirme yollarına göre doğru sonuca ulaşmada daha garanti olan bir yöntemdir. Bu durumu yukarıdaki örneğe getirilen çözüm ile açıklayalım. Öğrenci,

$$[(6a_1 + 14b_1) + (6a_2 + 14b_2)] = k \; ve \; (6a_3 + 14b_3) = l$$

$$(6a_1 + 14b_1) = m \; ve \; [(6a_2 + 14b_2) + (6a_3 + 14b_3)] = n$$

şeklinde parçalara ayırıp bu parçaların sonuçlarından yola çıkarak sonuca ulaşmaya çalışıyorsa araç-amaç analizi yapıyor demektir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta şudur ki; işlemleri ayrı parçalara ayırıp her birine değişken atamak çözümü kolaylaştırmamış aksine zorlaştırarak doğruluğunun gösterilmesi güç hale getirmiştir. Araç-amaç analizi algoritmadan ayırmada bu durum önemlidir.

Deneme yanılma yöntemi (rasgele arama) sezgisel kestirme yolları içinde en az etkili olanıdır. Çünkü herhangi bir plan dâhilinde yürütülmez. Genellikle insanların çoğu bir problemle karşılaştıklarında bu yöntemi dener, tecrübe kazandıktan sonra daha etkili yöntemlere geçerler (Bruning ve diğerleri, 2014, s. 166). Rasgele arama yapma amaca ulaşmadaki en basit ancak ulaşma garantisi en düşük olan yöntemdir (Gerşil ve Alkaya, 2011). Çünkü bu yolu kullanan bireylerin herhangi bir planı yoktur, kendiliğinden ilerleyen bir süreç içerinde işlem yaparlar (Bruning ve diğerleri, 2014, s. 166). Bu durumu yukarıdaki örneğe getirilen çözüm ile açıklayalım. Öğrenci,

$a + (b + c) = (a + b) + c$ olduğunu göstermeliyiz

$$a = 3, b = 2, c = 5\ için\ 6.(6.3 + 14.2) + 14.5 = 6.3 + 14.(6.2 + 14.5)$$

şeklinde bir yaklaşımda bulunması rasgele arama yoluyla probleme çözüm aradığını göstermektedir.

Her zaman amaca doğru ilerleme, bireyin sonucu gördüğünde sonuca ulaşmak için aradaki yolları göz ardı ederek son adıma kısa yoldan ulaşmasına dayalı sezgisel kestirme yoludur (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 417). Problemi uygun bir şekilde çözmede zorlanan bir öğrencinin, problemi daha basit düşünerek hedefte ulaşması gereken sonucu düşünüp;

$$\forall\ a, b, c \in Z\ için\ (a + b) + c = a + (b + c)$$

olup birleşme özelliğini sağlar şeklinde bir gösterimde bulunması öğrencinin aradaki işlemleri göz ardı ettiğini sadece sonuca odaklanarak doğru çözümden uzaklaştığını göstermektedir.

Tepe tırmanışı yöntemi hedefe ulaşmak için kullanılan yollardan doğru çözüm yoluna en yakın olan yanlış çözüm yolunu kullanmadır (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 418). Yukarıdaki problem üzerinden bu yönteme bir örnek vermek gerekirse,

$$(6a + 14b) + c = 6(6a + 14b) + 14c$$

şeklinde eşitlik kurarak doğru yola ulaşmadaki en yakın yolu kullanırsa tepe tırmanışı yapıyor demektir.

2.2.3. İşlevsel değişmezlik

İşlevsel değişmezlik bir nesnenin alışılagelmiş özelliğine odaklanılarak başka bir işlevi olduğunu düşünmemizi engelleyen zihinsel bir kalıptır (Plotnik, 2009, s. 309; Bruning ve diğerleri, 2014, s. 161). İşlevsel değişmezlik kavramını Woolfolk-Hoy (2015, s. 579) "yeni nesne veya araçları yeni bir şekilde kullanma konusundaki yetersizlik" olarak tanımlamaktadır. Problem çözme bağlamında değerlendirildiğinde ise, bir problemin çözüme ulaştırılmasının önündeki engeller olarak açıklanabilir (Goldstein, 2013, s. 562). Bu engellerin nedeni, problem çözümünde bir nesnenin tanıdık yönüne odaklanıp diğer yönlerinin farkında olamamaktır (Goldstein, 2013, s. 562; Solso ve diğerleri, 2014, s. 544).

2.2.4. Algısal set oluşturma

Set, problem çözme sürecinde düşünme ve algılama öncesindeki her türlü bilişsel faaliyettir (Solso ve diğerleri, 2014, s. 544). Set bir sonraki aşamaya geçmeden önceki adımda sonraki adımda, ne yapacağını düşünmeyi sağladığından algı veya düşüncenin kalitesini arttırabilir (Solso ve diğerleri, 2014, s. 544). Yapılan araştırmalar bilginin temsilinin kullanılmasının algısal set oluşturmayı kolaylaştırdığını ortaya koymuştur. Bilginin temsili, tarifi verilen bir durum ya da nesnenin adının kullanılması olarak açıklanabilir (Solso ve diğerleri, 2014).

2.2.5. İçgörü

Gestalt psikologları tarafından ortaya atılan içgörü kavramı, bir problemin çözümünde aniden ortaya çıkan çözüm yolu anlamında kullanılmaktadır (Goldstein, 2013, s. 559). Plotnik (2009, s. 309) iç görüyü, bir problemin üzerine bir süre düşündükten ve uğraş verdikten sonra problemin çözümünün aniden bulunması olarak tanımlamıştır. İçgörünün nasıl ortaya çıktığına dair iki görüş vardır. Bunlardan ilki bir deneyim sonucu, problemin sonucunun bir anda ortaya çıktığıdır (Goldstein, 2013, s. 559; Smith ve Kosslyn, 2014, s. 414). Başka bir ifadeyle uzun süre üzerine zihin yorulan bir görevin aniden açığa çıkan algı sonucunda tamamlanmasıdır (Fersahoğlu, 2015, s. 207). Diğer görüş ise içgörü için bir deneyime gerek olmadığını aniden ortaya çıkan bir durum olduğunu savunmaktadır (Goldstein, 2013, s. 559).

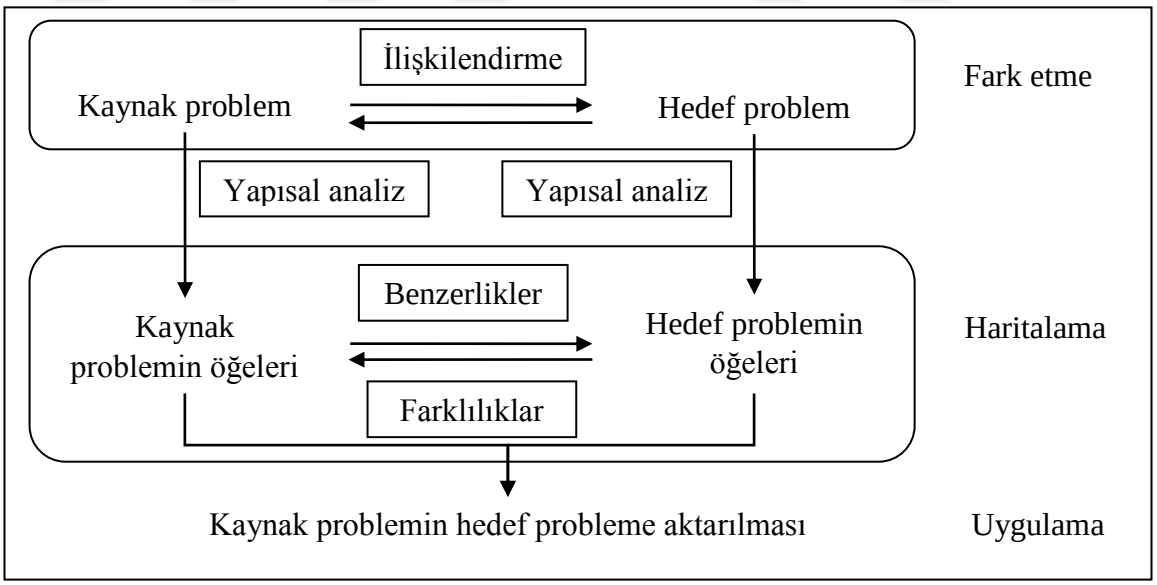
Yapılan araştırmalar problemleri içgörü bağlamında ikiye ayırmışlardır. Birinci grup içgörüye dayalı problemler, diğeri ise içgörüsüz problemlerdir. İçgörüye dayalı problemlerin çözümleri aniden ortaya çıktığı için bu tür problemlerin çözüm yolundaki düşünme süreçlerinin incelenmesinin mümkün olmadığı bu nedenle düşünme süreçlerini incelemeye yönelik yapılan çalışmalarda içgörüsüz problem kullanılması gerektiği belirtilmektedir (Goldstein, 2013, s. 560).

2.2.6. Analojik akıl yürütme

Benzer problemler arasındaki bağlantıları fark ederek, bilinen bir çözüm yolunu yeni problemlere aktarmaya analoji yöntemi denir (Goldstein, 2013, s. 578). Plotnik (2009, s. 309) analojik akıl yürütmeyi eskiden kullanılan ve sonuca ulaşan çözüm

yolunun yeni karşılaşılan bir problemin çözüm yolu olarak uyarlanması şeklinde tanımlamıştır. Başka bir ifadeyle birkaç özellik bakımından benzerlik gösteren çözüm yollarının benzerliğinden yararlanıp bilinenden yola çıkarak bilinmeyene ulaşmadır (Fersahoğlu, 2015, s. 520). Yaşanan deneyimler bireyleri analojik akıl yürütmede daha başarılı hale getirir (Plotnik, 2009, s. 309).

Analojik akıl yürütmede iki problem söz konusudur: Bunların birisi kaynak problem, diğeri ise hedef problemdir. Kaynak problem daha önceden çözülmüş ve doğru sonuca ulaşılmış problem, hedef problem ise çözümü henüz bilinmeyen eski çözüm yolunun uygulanmasının amaçlandığı problemdir (Goldstein, 2013, s. 580). Analojik akıl yürütme farklı araştırmacılar tarafından farklı aşamalardan oluşturulmuştur. Goldstein (2013, s. 582) üç aşamalı bir yapıdan söz etmektedir: Fark etme, haritalama ve uygulama. Fark etme, kaynak ve hedef problem arasındaki ilişkilerin görüldüğü aşamadır. Haritalama, kaynak ve hedef problemlerin yapı bakımından benzerliklerinin ve farklılıklarının keşfedilmesidir. Uygulama; kaynak problemin çözüm yolunun, hedef probleme aktarılması ya da genellemesidir (Goldstein, 2013, s. 582). Analojik akıl yürütme süreci Şekil 2.2'de modellenmiştir.



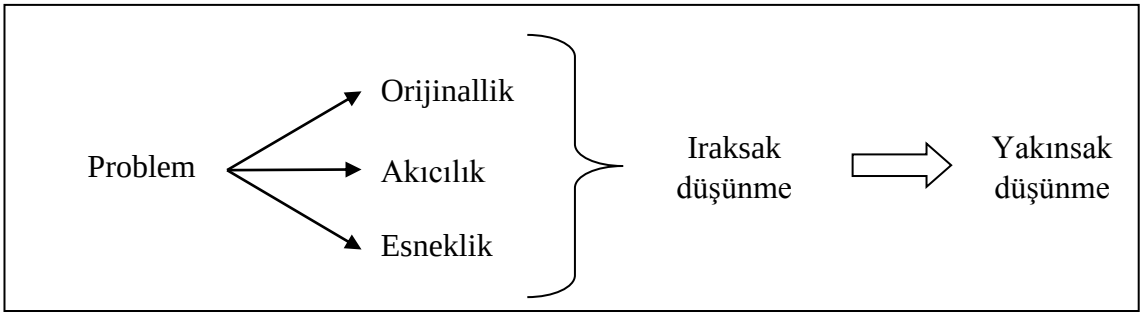
Şekil 2.2. Analojik akıl yürütme süreci

Analojik akıl yürütmede bireylerin genellikle yüzeysel özelliklere takılarak yapısal özellikleri göz ardı ettiği bu nedenle analojik akıl yürütmeyi tamamlayamadığı

ifade edilmektedir (Goldstein, 2013, s. 582; Smith ve Kosslyn, 2014, s. 425). Çelik (2016) analojik akıl yürütmeyi matematiksel düşünmenin temeli olarak açıklamıştır. Örneğin; "Grupta, grup işlemine göre eşitliklerde soldan sadeleştirme yapılabilir." Teoreminin ispatını daha önce doğru ve geçerli biçimde ispatlamış olan bir bireyin, daha önce karşılaşmadığı "Grupta, grup işlemine göre eşitliklerde sağdan sadeleştirme yapılabilir." Teoremini önceki teoremden yola çıkarak ispatlayabilmesi onun analojik akıl yürütme yaptığını göstermektedir.

2.2.7. Yaratıcı düşünme

Yaratıcı düşünme; yenilikçi fikirler üretip, alışılmışın dışında çözümler getirerek bilgilerin yeniden organize edilmesidir (Sternberg, 2000). Başka bir ifadeyle yaratıcı düşünme; yenilikçi düşünme, yeni fikirler üretme ya da yeni bir şey yaratmak için var olan fikirler arasında yeni bağlantılar kurma" (Goldstein, 2013, s. 592) olarak açıklanabilir. Goldstein (2013, s. 594) yaratıcı düşünmenin genellikle bir analojik akıl yürütme sonucunda ortaya çıktığını savunurken; Solso ve diğerleri (2014, s. 580) yaratıcı düşünmenin içgörü sonrası ortaya çıktığını savunmuştur. Yaratıcı düşünme ıraksak ve yakınsak düşünme olarak ikiye ayrılmaktadır. Iraksak düşünme çok sayıda çözüm yolu veya fikir üretme olarak açıklanabilir (Woolfolk-Hoy, 2015, s. 589). Iraksak düşünme bir noktadan başlayıp çözüm yollarının arttırılması olarak açıklanırken, yakınsak düşünme çoğaltılmış çözüm yollarının teke düşürülmesi biçiminde açıklanabilir (Plotnik, 2009, s. 310). Yakınsak düşünme çözüm yollarının veya fikirlerin tek sonuca indirilmesidir (Woolfolk-Hoy, 2015, s. 589). Goldstein (2013, s. 592) yaratıcı düşünmenin daha çok ıraksak düşünmeyle bağdaştırıldığını, ıraksak düşünmenin de doğru düşünmeye yakınsamayı sağladığı ve yakınsak düşünmeyle karşılaştırıldığını belirtmiştir. Woolfolk-Hoy (2015, s. 589) yaratıcı düşünmenin ıraksak düşünmenin üç temel özelliği olan orijinallik, akıcılık ve esneklik ile örtüştüğünü ifade etmiştir. Yaratıcı düşünme süreci ve aşamaları Şekil 2.3'de sunulmuştur.



Şekil 2.3. Yaratıcı düşünme süreci ve aşamaları

2.2.8. Tümdengelimsel akıl yürütme

Genel olan durumlardan özele indirmeye dayalı akıl yürütme türüdür (Fersahoğlu, 2015, s. 518). Sözlükte ise "Genel ilkelerden özel olay veya olgulara inen bir mantıklı akıl yürütme biçimi; kanıtlardan, doğru ve kaçınılmaz hükümler çıkarma yolu; yasalardan olaylara, nedenlerden sonuçlara, kurallardan örneklere, etkileyenden etkilenene giderek sonuç çıkarma; biçimsel (formel) ispatlama yolu" (Alaylıoğlu ve Oğuzkan, 1976, s. 315) olarak tanımlanmaktadır. Solso ve diğerleri (2014, s. 565) ise tümdengelimsel akıl yürütmeyi, belirli öncüllerden yola çıkarak mantıksal çıkarımda bulunma şeklinde ifade etmiştir. Tümdengelimsel akıl yürütmede iki öncül önerme ve bir sonuç önermesi söz konusudur (Goldstein, 2013, s. 609).

Tümdengelimsel akıl yürütmede geçen kavramlar bizi ispat kavramına taşımaktadır. Matematikçiler ispatın geçerliğini veya doğruluğunu sürekli tartışmaktadır. Yani bir ispat geçerliyse doğru mudur? Doğruysa geçerli midir? Yoksa bu iki kavram aynı anlama mı gelmektedir? Eğer aralarında bir ayrım varsa nasıl bir farklılık vardır? Tüm bu soruların cevapları tümdengelimsel akıl yürütmede saklıdır. Bunun için Tablo 2.1'de verilen üç önermeyi inceleyelim.

Tablo 2.1.

Tümdengelimsel Akıl Yürütmeler (Goldstein, 2013, s. 610)

Akıl yürütme 1	**Akıl yürütme 2**	**Akıl yürütme 3**
1. Öncül: Bütün kuşlar hayvandır. 2. Öncül: Bütün hayvanlar dört bacaklıdır. Sonuç: Bütün kuşlar dört bacaklıdır.	1. Öncül: Bütün öğrenciler yorgun. 2. Öncül: Bazı yorgun insanlar sinirlidir. Sonuç: Bazı öğrenciler sinirlidir.	1. Öncül: Bütün kuşlar hayvandır. 2. Öncül: Bütün hayvanlar yemekle beslenir. Sonuç: Bütün kuşlar yemekle beslenir.

Tablo 2.1'deki akıl yürütmeler incelendiğinde 1. akıl yürütmenin geçerli olduğu görülmektedir. Ancak 2. öncüle bakıldığında öncülün yanlış olduğu bu nedenle ulaşılan sonucun doğru olmadığı görülmektedir. Yani akıl yürütme geçerlidir ancak doğru değildir. 2. akıl yürütmenin ise doğru olduğu ancak geçerli olmadığı görülmektedir. Burada 2. öncül akıl yürütme sürecine uygun kurulmamıştır (Bazı kelimesi öncülün geçerliğini kaldırmıştır). 3. akıl yürütmenin ise hem geçerli hem de doğru olduğu görülmektedir (Goldstein, 2013, s. 610). Yani bir önerme geçerli olup doğru olmayabilir, doğru olup geçerli olmayabilir veya hem geçerli hem de doğru olabilir.

2.2.9. Tümevarımsal akıl yürütme

Bireylerin deneyimlerinden yola çıkarak genel kural ve kaidelere ulaşması tümevarım olarak adlandırılmaktadır (Fersahoğlu, 2015, s. 518). Tümevarım bireyin bir veya daha fazla özel örnekten yola çıkarak genel ifadeye ulaşmasıdır (Goldstein, 2013, s. 622). Tümevarımsal akıl yürütme bireyin deneyimlerinden yararlanarak çıkarımda bulunmasını gerektirir (Solso ve diğerleri, 2014, s. 518). Tümevarımsal akıl yürütmede tümdengelimsel akıl yürütmede olduğu gibi geçerlilik durumu değil argümanın zayıflığı veya güçlülüğü söz konusudur (Goldstein, 2013, s. 623). Tümevarım bireyi ezberden uzaklaştırarak zihnin kullanılmasını ve aktif olmasını sağlar (Fersahoğlu, 2015, s. 518). Goldstein (2013, s. 624) tümevarımsal akıl yürütmenin genellikle farkında olmadan yapılan bir beceri olduğunu ifade etmiştir. Bunun aksine Smith ve Kosslyn (2014, s. 429) bu akıl yürütme türünün bilinçli olarak gerçekleştiğini savunmuşlardır. Araştırmacılar tümevarımsal akıl yürütmenin iki çeşit olabileceğini belirtmişlerdir. İlki

bilinen bir durumdan yola çıkıp tüm durumlara genelleme (genel tümevarım olarak adlandırmışlar); ikincisi bir kümedeki bazı elemanlardan çıkıp kümenin tümüne genellemedir (belirli tümevarım olarak adlandırmışlardır).

2.3. Biliş ve Üst biliş

Biliş ve üst biliş birbirine çok yakın iki kavramdır. Bu kavramları birbirinden ayrı düşünmek kavramların anlaşılmasını zorlaştırabilir. Üst biliş, "biliş hakkındaki üst düzey biliş" olarak ifade edilmektedir. Başka bir ifadeyle üst biliş, bilişsel işlemlerin kendiliğinden ilerlemesinden ziyade bilişsel süreçleri kontrol eden ve yöneten üst düzey biliştir. Bu anlamda biliş ve üst bilişi hem teorik hem de gerçek hayatta ayrı düşünmek pek mümkün değildir (Veenman, Hout-Wolters ve Afflerbach, 2006). Aşağıda biliş ve üst biliş kavramları "biliş", "üst biliş" ve "biliş ve üst biliş ayrımı" başlıklarında detaylandırılmıştır.

2.3.1. Biliş

Biliş, bireyin belli görevleri yerine getirirken kullandığı -zihinsel süreçleri içeren- bilgi ve faaliyetlerdir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 656). Forrest-Pressley ve Gillies (1983, s. 134) bilişi, okuyucu tarafından kullanılan beceriler ve stratejiler olarak belirtmiştir. Goldstein'de (2013, s. 668) bilişi, "algı dikkat, bellek, dil, problem çözme, akıl yürütme ve karar vermede rol oynayan bilişsel süreçler" olarak tanımlamıştır. Başka bir ifadeyle bir görevi tamamlamada okuyucu tarafından kullanılan süreçleri ve stratejileri ifade eder. Örneğin bireyin sahip olduğu bir bilgiyi hatırlayıp ifade etmesi biliş olarak açıklanabilir (Forrest-Pressley ve Waller, 1984, s. 6).

2.3.2. Üst biliş

Üst biliş kavramı, bu kavram üzerine çalışan pek çok araştırmacı tarafından tanımlanmıştır. Ancak bu tanımlardan ilki ve en fazla kabul göreni Amerikalı Gelişim Psikoloğu John H. Flavell tarafından yapılmıştır. Flavell (1976, s. 232) üst bilişi bireyin bir görevle uğraşma sürecindeki bilişsel işlemlerin, çıktıların veya bunlarla ilgili durumların farkında olması şeklinde açıklamıştır. Forrest-Pressley ve Waller'de (1984, s. 6) üst bilişi iki aşamalı olarak açıklamıştır; ilki bireyin bilişi hakkındaki bilgisi

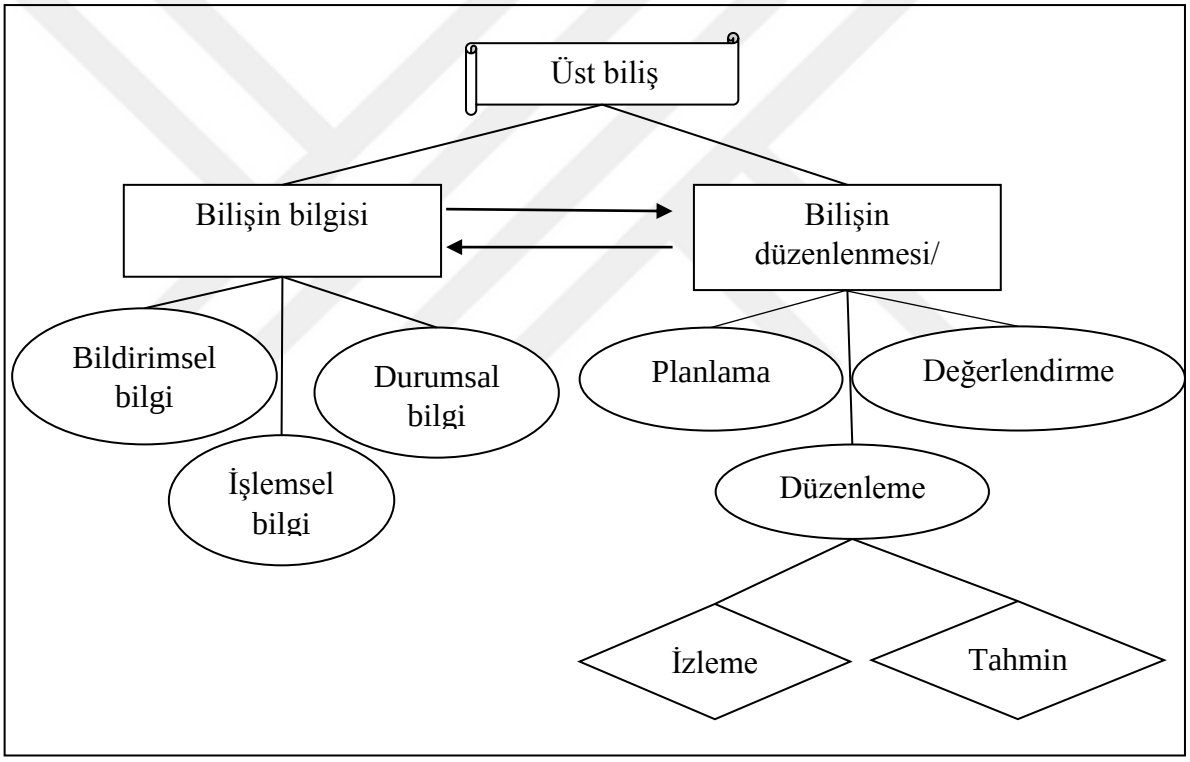
(süreçlerin farkında olma), ikincisi ise bilişsel süreçleri kontrol etme kabiliyetini içeren (görevler arasında seçim yapma, planlama ve izleme) yapıdır. Akın (2013, s. 117) ise üst bilişi bireylerin öğrenme sürecinin farkında olarak düşünmesi ve bilişlerini düzenlenmesi şeklinde tanımlamıştır. Bruning ve diğerlerine (2014, s. 79) göre üst biliş bireyin kendi düşünme süreçleri hakkındaki bilgileridir. Başka bir ifadeyle bilişsel sistemin görev kontrol merkezidir. Ormrod (2015, s. 352) üst bilişi "insanların kendilerine ait düşünce ve öğrenme süreçleri hakkındaki farkındalığı ve anlayışlar ve bu süreçleri hafızayı geliştirmek ve öğrenme için düzenlemeleri" olarak tanımlamıştır.

Üst biliş kişinin herhangi bir görevi yerine getirmesinin (problem çözme, okuma, ispat yapma gibi) veya kendi öğrenmesini düzenlemesinin bir bölümüdür (Paris ve Winograd, 1998). Mesela öğrencilerin isimlerini aklında tutamadığını bilen bir öğretmenin öğrencilerden kâğıda isimlerini yazıp yakalarına asmalarını istemesi üst bilişe sahip olduğunu göstermektedir (Bruning ve diğerleri, 2014, s. 79). Üst biliş, matematik öğrenmede ve problem çözmede zekâ ile birlikte en önemli yordayıcılardan birisi olarak belirlenmiştir (Van der Stel, Veenman, Deelen ve Haenen, 2010). Özdemir ve Sarı (2016, s. 671) üst bilişin iyi kullanıldığı zaman zeka faktörünü bile ortadan kaldırabilecek bir yapı olduğunu belirtmiştir. Yazarlar bu durumu tutum üzerine yapılan çalışmalarla desteklemişlerdir. Yani matematik tutumu düşük olan öğrencilerin üst bilişsel becerileri geliştirildiğinde yine iyi problem çözücü olabileceklerini ifade etmiştir. Ayrıca üst biliş; bireylerin öz-yeterliğini, öz-düzenlemelerini, öz-farkındalıklarını, bilinçliliğini ve formel işlem yapma becerisini de etkilemektedir (Akın, 2013, s. 120).

Üst biliş performansı, başarıyı, öğrenme sürecini ve düşünmeyi geliştirmektedir. Çünkü üst biliş bireyin ne yaptığının farkında olarak yapması anlamına gelmektedir. Bu durum bireyin öğrenme sürecini de organize etmesini sağlamaktadır. Bir üniversite öğrencisi için ise üst biliş akademik başarı için çok önemlidir. Çünkü üniversite öğrencisinin çalışabileceği materyal sayısı oldukça fazladır. Onun hangi materyali seçeceği, hangi bölümlerine çalışacağı ve nasıl çalışacağını bilmesi öğrenmesini sağlaması için önemlidir (Akın, 2013, s. 128). Yukarıda açıklandığı gibi bir materyale çalışma veya okumada üst biliş ön plana çıkmaktadır. Ancak yapılan çalışmalar bireyin okuma sürecinde üst bilişi genellikle kullanmadığını ortaya koymuştur (McKeown ve Beck, 2009, s. 8).

Üst bilişin bileşenleri

Alan yazın incelendiğinde üst bilişin bileşenleri olarak farklı yapılar görülmektedir. Bunlardan ilk ve en sık kullanılanı üst bilişi; biliş bilgisi ve bilişin düzenlemesi/izlenmesi olarak ayıran modeldir (Brown, 1987, s. 65; Schraw, 1998). Bu modeli Paris ve Winograd (1998) öz-değerlendirme ve öz-yönetim olarak isimlendirmişlerdir. Bazı araştırmacılar bu bileşenlerin birbiriyle bağlantılı olduklarını ifade etmişlerdir (Brown, 1987, s. 67; Paris ve Winograd, 1998). Bu bağlantı iki yönlü olarak yani hem bilişin bilgisinin bilişin düzenlemesini etkilediği hem de bilişin düzenlenmesinin bilişin bilgisini etkilediği yönündedir (Brown, 1987, s. 67; Paris & Winograd, 1998). Sözü geçen model Şekil 2.4'de sunulmuştur.



Şekil 2.4. Üst bilişin bileşenleri

Biliş bilgisi; bireyin bir görevi yerine getirmesi için gerekli olan bilgi ve becerileridir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 657). Brown (1987, s. 65) biliş bilgisini bireyin sahip olduğu bilgi, beceri ve yeteneğin farkında olması şeklinde açıklamıştır. Biliş bilgisi, bireyin neyi bilmesi geretiği hakkındaki bilgisidir (Akın, 2013, s. 146). Schraw'da (1998) biliş bilgisini bireyin kendi düşünme süreçlerini anlaması olarak açıklamaktadır. Paris ve Winograd'da (1998) öz-değerlendirme olarak isimlendirdiği bu

bileşenin kişinin kendi yapabileceklerinin ve bildiklerinin farkında olması olarak ifade etmiştir. Biliş bilgisi kendi içerisinde üçe ayrılmaktadır: bildirimsel (açıklayıcı) bilgi, işlemsel (prosedürel) bilgi, durumsal bilgi.

Bildirimsel (açıklayıcı) bilgi, bireylerin sahip oldukları bilgi ve inançları hakkındaki bilgisidir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 657). Schraw ve Dennison'a (1994) göre bu bilgi birey ve stratejiler hakkındaki bilgidir. Mesela bir kişinin cebir konularını iyi bildiğinin farkında olması bu bilgi türüne örnek verilebilir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 657). Bilginin farkında olma, bilgiyi hatırlama (geri çağırma) ve açıklama bu beceri türünde ele alınabilir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 658).

İşlemsel bilgi, bireylerin bir görevi yerine getirmek için gerekli olan bilgilere sahip olmasıdır (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 658). Schraw ve Dennison (1994) bu bilgi türünü stratejilerin nasıl kullanılacağı hakkındaki bilgi olarak açıklamaktadır. Bu bilgi türü bir görevin tamamlanması için nelerin zorlaştırıcı etki yaptığının nelerin kolay olduğunun bilinmesini ve görevi tamamlayıp tamamlayamayacağının farkında olmasını içerir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 658). Buna bir örnek vermek gerekirse; cebir problemlerinde değişken sayısının artmasının işlemleri zorlaştıracağını bilme işlemsel bilgidir.

Durumsal bilgi, bir görevi tamamlamak için etkili olacak stratejinin seçilmesini ve uygulanmasını içerir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 658). Strateji bilgisi olarak da bilinen bu bilgi türü algoritma ve sezgilere dayalı akıl yürütme yapılmasını sağlar (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 658). Bu bilgi türü bireylerin farkında olarak verilen görevi anlamasını, gerekli verileri düzenlemesini, çözüm yollarını belirlemesini, planlama yapmasını, planlarını gerçekleştirmesini ve ulaştığı sonucu kontrol etmesini içerir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 658). Bu bilgi stratejilerin ne zaman ve nasıl kullanılacağı hakkındaki bilgi olarak açıklanmaktadır (Schraw ve Dennison, 1994). Örneğin, değişken sayısının artmasının işlemleri zorlaştırdığını bilen birinin, işlemleri zorlaştırmamak için az sayıda değişken kullanmayı planlaması durumsal bilgidir.

Bilişin düzenlenmesi/ izlenmesi; bir görevin yerine getirilmesi için gerekli olan -bilişsel sürecin izlenmesi, kontrol edilmesi veya karar alınması gibi- stratejik faaliyetlerdir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 659). Brown (1987, s. 65) bilişin düzenlenmesini, bireyin bir görevi yerine getirmede kullandığı öz-düzenleyici beceriler

olarak tanımlamaktadır. Ayrıca bu boyutun üst bilişin işlem boyutu olduğunu belirtmiştir. Bilişin düzenlenmesi neyi nasıl yapacağını, nasıl ve ne zaman kullanacağını bilmeyi ifade eder (Akın, 2013, s. 147). Paris ve Winograd (1998) bu bileşeni bir görevi yerine getirmede eylem halindeki üst biliş olarak ifade eder. Akın (2013, s. 148) bu bileşenin daha çok bireye kolay veya orta güçlükte gelen görevlerde kullanılabileceğini, zor görevlerde ise genellikle terk edildiğini ifade etmiştir. Bilişin düzenlenmesinin üç temel bileşeni olduğu belirtilmektedir; planlama, düzenleme (izleme ve tahmin), değerlendirme/ kontrol.

Planlama bir görevi yerine getirme sürecinde stratejinin belirlenmesi sürecindeki gerekli bilgileri hatırlama, sonuca yönelik tahminde bulunma, stratejiyi seçme gibi beceri içerir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 660; Brown, 1987, s. 68). Planlama bilişsel bir araca ulaşmak için kullanacağı araçların seçimini ve koordine edilmesini içerir (Paris ve Winograd, 1998). Planlama bir görevi yerine getirme sürecinde zamanı nasıl kullanacağını, nasıl başlayıp sonuca ulaşacağını, kullanacağı stratejiyi seçmeye ve nasıl bir yol izleyeceğine karar vermektir (Woolfolk-Hoy, 2015, s. 552). Planlama matematik eğitimi ve problem çözme için oldukça önemli bir kavramdır. Bu nedenle planlamaya yönelik yapılan çalışmalar fizyoloji biliminde de özellikle beyin üzerine yoğunlaşmıştır. Araştırmalar planlamanın beynin Prefrontal Korteks denilen Frontal lobda yani beynin ön bölgesinde gerçekleştiğini ortaya koymuştur (Goldstein, 2013, s. 647). Yapılan araştırmalarda Prefrontal Korteks bölgesinde hasar oluşan bireylerin problem çözmede zorluk çektiklerini göstermiştir. Bu zorluğun nedeni de planlama yapamamalarından kaynaklanmaktadır (Aler, Borrajo ve Isasi, 2001; Tschentscher ve Hauk, 2016; Tschentscher ve Hauk, 2017). Sözü geçen çalışmalardan planlamanın problem çözme ya da ispat gibi görevleri yerine getirmede çok önemli olduğu anlaşılmaktadır.

İzleme, bir görevi yerine getirmede bireyin kendi yaptıklarını anlaması, farkında olması ve işlemlerinin doğruluğunu değerlendirmesidir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 660). Bu aşamada bireyler stratejilerini izleyebilir, test edebilir ve düzenleyebilirler (Brown, 1987, s. 68). Bireyin yaptığı işlemlerin anlamlılığını değerlendirmesi, sergilediği performansı değerlendirmeye yönelik kendilerini sorgulamayı ve harcadığı çabayı değerlendirmeyi içerir (Woolfolk-Hoy, 2015, s. 552). İzleme becerisi bireyde en geç gelişen becerilerden biridir. Ortaokul hatta lise öğrencilerinde bile bu becerinin yeteri kadar sergilenmediği ifade edilmektedir (Akın ve Abacı, 2011, s. 89).

Tahmin, bireyin bir göreve yönelik zorluğun farkında olmasıdır (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 659). Yazarlar bu becerinin, kişinin bir görevin zorluk veya kolaylığın farkında olarak buna göre işlem yapması için kullanılabileceğini ifade etmişlerdir. Woolfolk-Hoy (2015, s. 578) problemin anlaşılıp olası çözümlerin sunulduktan sonra sonuca yönelik tahminde bulunma olarak tanımlamaktadır.

Değerlendirme/kontrol bir görevin sonucuna yönelik çıktıların değerlendirilmesidir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 660). Brown (1987, s. 68) değerlendirmeyi, etkililik ve verimlilik ölçütlerine göre ulaşılan sonuçların değerlendirilmesi olarak açıklamaktadır. Bir görevi yerine getirmede performansı etkileyen durumların farkında olarak kişisel becerisini değerlendirmeyi içerir (Paris ve Winograd, 1998). "Bu stratejileri değiştirmeli miyim? Yardım almalı mıyım? Şimdilik vaz mı geçmeliyim? Görevi tamamladım mı?" (Woolfolk-Hoy, 2015, s. 552) soruları, değerlendirmeye yönelik sorulardır.

2.3.3. Biliş ve üst biliş ayrımı

Biliş ve üst biliş ayrımı, bilginin nasıl kullanıldığı ile ilgilidir (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 659). Bir görevin tamamlanabilmesi için gerekli olan beceriler (stratejileri bilmek, temsilleri kullanmak gibi) bilişselken; bu becerilerin farkındalığı üst bilişseldir (Okçu ve Kahyaoğlu, 2007; Özdemir ve Sarı, 2016, s. 659). Weinert (1987, s. 8) biliş ve üst bilişi ayırmak için üst bilişi ikinci derece biliş olarak yani düşünme hakkında düşünme olarak açıklamıştır. Bir konuya çalışırken veya bir görevi yerine getirirken not tutma, yapılan işlem hatalarını fark etme ve hedef ile ulaşılan sonucu karşılaştırma üst bilişsel olarak değerlendirilmektedir. Aynı görevi yerine getirirken not tutmak yerine kopya etmek, ezberlediği hazır bir formülü doğrudan kullanmak gibi beceriler ise bilişsel olarak değerlendirilmektedir. Bu beceriler üst bilişsel ve bilişsel beceri ayrımını yapmada bir yol sağlamaktadır. Bu ayrım şöyle açıklanabilir; üst bilişsel beceriler farkındalık veya eleştirel düşünme gerektirirken, bilişsel beceriler buna benzer herhangi bir beceri kullanmayı gerektirmeden görevi yerine getirmede kullanılır (Akın, 2013, s. 123).

Akın (2013, s. 124) üst bilişin bilişten içerik ve işlev olarak ayrıldığını ifade etmiştir. İçerik açısından ele alındığında biliş zihinsel dünya ile ilişkili iken; üst biliş ise

hem gerçek dünya hem de zihisel dünya ile ilgilidir. Yani içerik açısından değerlendirildiğinde bilginin kaynağına bakılması gerektiğini ifade etmiştir. İşlev açısından değerlendirildiğinde ise biliş bir görevi tamamlamaya çalışma iken; üst biliş bir görevi yerine getirme sürecinin izlenmesi, düzenlenmesi veya farkında olunmasıdır.

Bireyler bir beceriyi gerçekleştirirken her zaman neden yaptıklarının farkında olmazlar. Mesela küçük bir çocuğa bir soru sorulduğunda çocuk, soruyu nasıl yaptığını düşünme veya süreci değerlendirme yerine sonuca ulaşmaya çalışacaktır. Ancak ilerleyen yaşlarda birey sadece sonuca ulaşmakla yetinmeyip nasıl yaptığının farkına varabilecektir. Yapılan çalışmalar üst bilişsel farkındalığın 5-7 yaş döneminde ortaya çıkmaya başladığını göstermiştir (Woolfolk-Hoy, 2015, s. 553; Annevirta ve Vauras, 2001). Üst bilişsel farkındalığın her bireyde aynı olması beklenemez. Bireylerin yaşı, olgunluğu, başarısı, bireysel farklılıklara neden olan biyolojik durumlar ve öğrenme deneyimleri bireylerin üst bilişsel farkındalıklarının farklı olmasına neden olabilir (Woolfolk-Hoy, 2015, s. 553).

2.4. Alan yazın Derleme

Bu bölümde alan yazında ispat ve üst bilişle ilgili yapılan çalışmaların sentezine yer verilmiştir. İlk olarak ispatlamayla ilgili yapılan çalışmalara, ardından üst bilişle ilgili yapılan çalışmalara son olarak ispatta üst bilişle ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

2.4.1. İspatlamayla ilgili çalışmalar

İspata yönelik çalışmalar incelendiğinde yapılan çalışmaların ispatı anlama, ispat süreçlerini inceleme ve ispat öğretimi olarak üç temada ele alındığı söylenebilir. Bu çalışma ispat sürecini incelemeye yönelik yapılmış olup ilgili alan yazında bu temaya yönelik yapılan çalışmalar ispatın geçerliğini değerlendirme (Ceylan, 2012; Harel ve Sowder, 1998; Varghese, 2011; Zaimoğlu, 2012), ispatı gerekçelendirme (Alcock, 2010; Alcock ve Weber, 2005; Stylianides ve Stylianides, 2009) ve ispat sürecindeki becerileri inceleme amacıyla yapılmıştır. Bu çalışma ispat sürecindeki becerileri bilişsel açıdan incelemeye yöneliktir. İspat sürecini incelemeye yönelik yapılan çalışmalarda katılımcıların ispatı farklı şekillerde okudukları (Yang ve Lin, 2008) şekil çizerek ispatı

kolaylaştırmaya çalıştıkları (Karpuz, Koparan ve Güven, 2014; Senk, 1985; Yestness, 2012), sembolik ifade kullandıkları (Fukawa-Connelly, 2012), ispat sürecinde örüntü genelleme yaptıkları (Krutetskii, 1976, s. 54) belirlenmiştir. Ayrıca çalışmalarda katılımcıların teoremlerin ispatını mantıksal olarak anlamadıkları, bunun yerine ezberleyerek ispat yaptıkları tespit edilmiştir (Güven, Çelik ve Karataş, 2005; Hoffer, 1981; Uğurel ve diğerleri, 2016). Yapılan bazı çalışmalarda ise sembolik ifade ve notasyonların yeterince kullanılmadığı (Arslan ve Yıldız, 2010; Doruk ve Kaplan, 2015), doğru ispat stratejisinin seçilemediği (Doruk ve Kaplan, 2015) ve seçilen stratejiye uygun ispat yapılamadığı (Doruk ve Kaplan, 2015) belirlenmiştir. Güler ve Ekmekci'de (2016) yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının ispat önermesini reddederken zayıf gerekçeler sunduğunu belirlemiştir. Čadež ve Kolar (2015) genellemenin deneyim gerektirmeyen formel yollarla yürütülen tümdengelimsel akıl yürütme olduğunu ifade etmiştir. Tanışlı ve Özdaş (2009) örüntü genellemenin cebirsel düşünmeyi sağlayabileceğini, ancak örüntü genellemenin sınırlı elemana sahip küme üzerinde yapıldığını ifade etmiştir.

İmamoğlu (2010) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği ile matematik bölümü programlarında okuyan birinci ve son sınıf öğrencileriyle ispat becerilerini incelemeye yönelik çalışma yapmıştır. Çalışmada son sınıf öğrencilerinin ispat başarı puanlarının birinci sınıflardan anlamlı düzeyde yüksek olduğunu belirlemiştir. Buna ek olarak araştırmacı birinci sınıf öğrencilerinin daha çok tümevarımsal akıl yürütme kullandıklarını belirtirken; son sınıf öğrencilerinin çoğunlukla tümdengelimsel yöntemler kullanmaya çalıştıklarını belirtmiştir.

Zaimoğlu (2012) sekizinci sınıf öğrencilerinin ispat ve akıl yürütme sürecini tümevarımsal ve tümdengelimsel akıl yürütme doğrultusunda incelemiştir. Nicel olarak yürütülen çalışmaya 154 sekizinci sınıf öğrencisi katılmıştır. Açık uçlu sorular yardımıyla verilerin toplandığı çalışmanın sonucunda, öğrencilerin bir ifadenin doğrulamasını yapabildikleri ancak ters örnek bulma ve çelişki bulma yöntemlerini bilmedikleri; sayısal örnekleme ve görsel ispatı kullanırken cebirsel ispatı çok az kullandıkları tespit edilmiştir.

Ceylan (2012) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini ve sahip oldukları ispat şemalarını tespit etmeye yönelik altı öğretmen

adayıyla nitel çalışma yürütmüştür. Mülakatlar ve doküman analizleri yoluyla veri toplamışlar ve çalışmanın sonucunda çalışmaya katılan öğretmen adaylarının, 18 ispatın dokuzunu deneysel gerekçelendirmeler kullanarak, diğer dokuzunu ise tümdengelimsel gerekçeler kullanarak yaptıkları tespit edilmiştir.

Yestness (2012) matematik öğretmen adaylarının soyut cebir ispat yazmalarında diyagram kullanımlarını araştırmıştır. 16 öğretmen adayının katıldığı nitel çalışmada veriler gözlem, görüşme ve öğrenci çalışma yapraklarıyla toplanmıştır. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının soyut cebir ispatlarında diyagram kullanmalarının anlamalarını kolaylaştırdığı belirlenmiştir.

Rice (2014) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat ve argümantasyon hakkındaki görüşlerini ve becerilerini ortaya çıkarmaya yönelik çalışma yürütmüştür. Dört öğretmen adayının katıldığı çalışma nitel araştırma yöntemiyle yürütülmüştür. Etkinlik temelli mülakatlar ve klinik mülakatlar yoluyla toplanan veriler sonucunda öğretmen adaylarının değişkenleri yazmada başarılı oldukları; ancak ispatlamada güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının ispat yapmada ilk olarak sembolik dünyayı düşündükleri belirlenmiştir.

Şahin (2016) matematik öğretmen adaylarının cebir ispatı yapma sürecini incelemiştir. Nitel araştırma desenlerinden durum çalışması yöntemiyle yürüttüğü çalışmaya 29 matematik öğretmenliği son sınıf öğrencisi katılmıştır. Çalışmanın sonucunda belli beceriler ortaya koymuştur. Bu becerilerden bazıları şöyledir:

- İspat önermesini adım adım okuyarak verileri düzenlemektedirler,
- Bölünebilme ispatlarını yaparken ispatın anahtar kavramlarını belirlemektedirler,
- İspatın doğruluğunu örnekler yoluyla kontrol etmektedirler,
- İspat sürecinin doğruluğunu araştırmacıya sormaktadırlar
- Cebir ispatlarını ezberleyerek yapmışlardır,
- Önermenin ispatını sözel olarak ifade etmektedirler,
- Deneme-yanılma yoluyla ispat yapmaya çalışmaktadırlar
- Bilgiyi kavramsal olarak anlayabilmektedirler,
- Örneklerle beraber hipotezin doğruluğunu test etmektedirler.

Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow ve Molina (2016) yaptıkları çalışmada Öklid Geometri sistemindeki varlık ispatlarının gösterge bilimsel analizini yapmışlardır. Çalışmayı iki amaçla yürütmüşlerdir. İlki geometri ispatlarını yapmada öğrencilerin kavramsallaştırmasını incelemek, ikincisi ise öğretmenlerin teorem ispatlarını öğretirken izledikleri yolları belirlemektir. Çalışmanın sonucunda ispat yapma sürecinin kendiliğinden gerçekleşen bir süreç olduğunu ve öğrencilerin rasgele yolla ispat yapmaya çalıştıklarını belirlemişlerdir. Ayrıca öğrencilerin ispat yaparken bilişsel karmaşa yaşayarak ispatın arkasında yatan nedenleri anlayamadıklarını tespit etmişlerdir. Elde ettikleri bir başka sonuçta ispat öğreticilerinin, ispatı öğrencilerin kendilerinin düşünüp anlamalarını beklemeden ispatı açıklamalarıdır.

Zazkis, Weber ve Mejía-Ramos (2016) şekilsel ispat ve sözel-sembolik ispat yapma arasındaki bağı inceleme amacıyla çalışma yürütmüşlerdir. Çalışmaya Reel Analiz dersine giren matematikçileri dâhil etmişler ve analiz dersinde ispat yapmadaki yedi durumu gözlemlemişlerdir. Çalışmada öğrencilerin ispat yapma sürecinde ürettikleri şekilsel argümanlar ve bu argümanları sözel-sembolik ispata doğru aktarılmasına katkıda bulunan üç durumu incelemişlerdir. Bu üç durum açıklama, sözdizimsel ve doğruluğunu garanti etmedir. Çalışmada katılımcıların açıklama durumuna yönelik ilk olarak; ispat için bir başlangıç noktası belirlediklerini tespit etmişlerdir. Ardından sözdizimsel durumunda katılımcıların şekilsel ifadelerden sözel-sembolik ifadelere geçiş yaptıklarını belirlemişlerdir. Eğer bu aşamayı başarılı olarak atlatırlarsa ifadelerini argümanlarla desteklediklerini ifade etmişlerdir. Son aşamada doğruluğunu garanti etme durumunun gerçekleştiğini ve bu aşamada katılımcıların sözel-sembolik ifadelerle şekilsel ifadeleri yorumladıklarını ifade etmiştir.

Doruk (2016) matematik öğretmeni adaylarının argümantasyon ve ispat süreçlerini belirlemeye yönelik çalışma yapmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini ve analiz dersindeki temel tanımları anlama şekillerini incelemiştir. Sekiz öğretmen adayı ile yürüttüğü çalışmada etkinlik temelli klinik görüşmeler kullanmıştır. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının çoğunun ispata yönelik olumlu görüşlere sahip olduklarını, bazılarınınsa ispatın faydalı olmadığını düşündüklerini belirlemiştir. Ayrıca çalışmaya katılan öğretmen adaylarının informel yollarla ispatın doğruluğunu değerlendirdiklerini, ispatlarının doğruluğunu değerlendirirken dışsal, referanssız, deneysel, görsel ve tümdengelimsel ispat şemalarını

kullandığını belirlemiştir. Araştırmacı son olarak, ispat sürecinin kendiliğinden gerçekleşen (kontrollü değil) bir süreç olduğunu belirtmiştir.

Komatsu (2016) ortaöğretim matematik öğretmenleri ve öğrencileriyle yürüttüğü çalışmada öğrencilerin şekil içeren geometri ispatlarını yapma sürecini incelemek amacıyla çalışma yürütmüştür. Sınıf temelli uygulamaların yürütüldüğü çalışmada araştırmacı dört göre hazırlamış ve bu görevleri yerine getirmek için sınıf ortamında altı öğretim deneyimi hazırlamıştır. Video analiz yöntemini kullanarak yaptığı analizi üç aşamada tamamlamıştır. İlk aşamada video verilerini transkript ederek parçalara ayırmış ve kodlama yapmıştır. İkinci aşamada kodlamaları kontrol ederek bazı kodları birleştirmiş bazılarını değiştirmiş ve gerçek kodlamayı oluşturmuştur. Son aşamada ise öğretmenlerden ve öğrencilerden elde ettiği verileri ilişkilendirmiştir. Yapmış olduğu çalışmanın sonucunda sınıf temelli uygulamalarda şekil içeren ispat problemlerinin uygulanmasının ve öğretmenin rolünün, öğrencilerin ispatı reddetmesinde veya gerekli değişiklikleri yapmasında önemli rolü olduğunu belirlemiştir. Ayrıca öğrencilerin ispat önermesini reddetmesinde veya doğruluğunu kabul etmesinde çizdiği şeklin önemli rol oynadığını ancak eğer varsayımlar şekil çizme için uygun değilse veya şekil çizmeyi zorlaştırıyorsa şekil çizmenin ispat yapmayı güçleştirdiğini belirlemiştir.

Demiray ve Işıksal-Bostan (2017) ortaokul öğretmen adaylarıyla yürüttükleri çalışmada öğretmen adaylarının aksine örnek vererek reddetme yapacakları önermeler sunmuş ve öğretmen adaylarının doğru yapma düzeyleri ile yanlış yapma gerekçelerini değerlendirmiştir. Çalışmaya 115 öğretmen adayı katılmıştır. Çalışmanın verilerinin analizinde betimsel istatistik ve madde temelli analiz yöntemi kullanılmıştır. Çalışmanın sonuçları öğretmen adaylarının, aksine örnek vererek önermeyi reddetmede başarılı olduklarını göstermiştir. Düzeylerine göre karşılaştırıldığında ise 2. sınıf öğretmen adaylarının diğer öğretmen adaylarına göre genelde daha az başarılı olduklarını belirlemişlerdir. Çalışmada sunulan görevlere göre incelediğinde ise birinci görev için en başarılı grubun 1. sınıf öğretmen adayları, ikinci görev için en başarılı grubun son sınıf öğretmen adayları olduğunu belirlemişlerdir. İspatı reddetmeyi başaramayan öğretmen adaylarının varsayımları yanlış anladığı ve ispatı anlayamadığı için yanlış yaptıkları belirlenmiştir.

2.4.2. Üst bilişle ilgili çalışmalar

Alan yazın incelendiğinde üst bilişle ilgili yapılan çalışmaların üst bilişin öğretimi ve üst bilişsel bilgi/beceri olarak iki temada ele alındığı söylenebilir. Bu çalışma üst bilişsel bilgi/beceri bağlamında yapılmış olup ilgili alan yazında bu temaya yönelik yapılan çalışmalar üzerinde durulacaktır. Üst bilişsel bilgi/beceri üzerine yapılan çalışmaların problem çözme sürecinde üst bilişsel beceriler, okumada üst bilişsel beceriler ve ölçek geliştirme -korelasyonel ve betimsel araştırmalar- üzerine yoğunlaştığı belirlenmiştir. Problem çözme üzerine yapılan çalışmalarda katılımcıların problemi kendi cümleleriyle yazdıkları (Aydemir ve Kubanç, 2014), gerekli bilgileri seçtikleri (Öztürk, Akkan ve Kaplan, 2014; Yildiz, Baltaci ve Güven, 2011), amaca ulaşmak için hedef belirledikleri (Aydemir ve Kubanç, 2014; Schraw, 1998), planlama yaptıkları (Lesseig, 2016; Schraw ve Dennison, 1994; Özdemir ve Sarı, 2016, s. 658), planına uygun işlem yaptıkları (Garofalo ve Lester, 1985; Kanadlı ve Sağlam, 2013), amaca ulaşamadıklarında işlemleri tekrar kontrol ettikleri (Antonietti, Ignazi ve Perego, 2000; Bondy, 1984; Kaplan ve Duran, 2015; Özkaya ve İşleyen, 2012; Öztürk ve diğerleri, 2014), gerekiyorsa planını değiştirdikleri (Özdemir ve Sarı, 2016, s. 660) tahminde bulundukları (Artz ve Armour-Thomas, 1992; Aydemir ve Kubanç, 2014; Cozza ve Oreshkina, 2013; Kaplan ve Duran, 2015; Özdemir ve Sarı, 2016, s. 660; Pativisan, 2006; Schraw, 1998) belirlenmiştir. Bunlara ek olarak çalışmalarda problem çözmede adımlar arasında ilişkilendirme yapmanın (Cozza ve Oreshkina, 2013), şekil ve semboller arasında ilişki kurmanın (Fischbein, 1993; Karpuz ve diğerleri, 2014; Kaplan ve Öztürk, 2014) ve sorgulamanın (Bondy, 1984; Desoete, Roeyers ve Buysse, 2001; Jiang, Ma ve Gao, 2016; Kleitman ve Stankov, 2007; Marca, 2014; Pintrich ve Groot, 1990; Woolfolk-Hoy, 2015, s. 578) üst bilişsel beceri olduğu belirtilmiştir. Özsoy (2008) soru sorma ve ilişkilendirme yapma becerilerinin bilginin içselleştirilmesi için önemli olduğunu belirtmiştir. Strateji belirlemeye yönelik bulgular incelendiğinde çözümü önce zihinde yapıp sonra kâğıda aktarma (Yildiz ve diğerleri, 2011), stratejiyi belirledikten sonra kontrol etme (Fang ve Cox, 1999; Öztürk ve diğerleri, 2014), sembolik olarak verilen ifadelerden formülleri belirleyebilme (Akkan ve Çakıroğlu, 2012) becerilerinin üst bilişsel olarak sergilendiği saptanmıştır. Sorgulama becerisine yönelik becerilerin detaylı incelenmesinde Desoete ve diğerleri (2001) bir bilginin nasıl doğru olduğunu sorma bildirimsel, neden ya da niçin doğru olduğunu sorgulama ise

durumsal bilgi bağlamında üst bilişsel olduğunu belirlemiştir. Garofalo ve Lester (1985) sezgisel becerilerin bilgisinin ve farkındalığının üst bilişsel beceri olduğunu ve bireyin problem çözmesini kolaylaştırdığını ifade etmiştir. Yaptıkları çalışmada katılımcıların problem çözmede anahtar kavramların farkında olarak belirlemelerinin problemi çözüme ulaştıracağını ifade etmişlerdir. Selçioğlu-Demirsöz (2014) de sezgisel bilginin üst bilişsel bilgi türlerinden biri olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca yapılan çalışmalarda deneme yanılma yoluyla problem çözme (Cozza ve Oreshkina, 2013; Artz ve Armour-Thomas, 1992) gibi bazı becerilerin üst bilişsel olmadığı belirlenmiştir. Bu beceriler çalışmalarda bilişsel beceri olarak ifade edilmiştir. Veenman ve diğerleri (2006) uygun stratejiyi belirleyerek bu stratejiye uygun çözüm yapma becerisini belirlemiş, ancak bu becerinin problem çözme adımlarını sıralamayı içermediğinde üst bilişsel olarak değerlendirilemeyeceğini belirtmiştir. Adebule ve diğerleri (2016) de planını uygulama sürecinin işlemsel beceri gerektiren bir süreç olduğunu ifade etmiştir. Okumaya yönelik üst bilişsel beceriler incelendiğinde ise katılımcıların metni anlamadıklarında tekrar okumalarını (Cozza ve Oreshkina, 2013; Yimer ve Ellerton, 2006), kendilerine sorular sormalarını (Talebinezhad ve Negari, 2007) ve okuma sürecinde kişinin kendini izleyerek hatalarını fark edip düzeltmesi (Erdem, 2005) üst bilişsel beceri olarak tespit edilmiştir. Ölçek çalışmalarını da kendi içerisinde üç gruba ayırmak mümkündür: ölçek geliştirme, betimsel çalışmalar ve ilişkisel araştırmalar. Ölçek geliştirme çalışmalarında sorgulamaya yönelik beceriler (Aydın ve Ubuz, 2010; Schraw ve Dennison, 1994; Yang, 2012; Pintrich, Smith, Garcia ve McKeachie, 1991) üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Yapılan betimsel araştırmaların ise fizyoloji, psikoloji ve eğitim alanlarında bir arada ilerlediği görülmüştür. Bu araştırmalarda üst bilişle ilgili üzerinde durulan husus özdüşünüm becerisidir (Genç, Barut, Aydın ve Başol, 2016; Kitsantas ve Zimmerman, 2006). İlişkisel araştırmalara yönelik yapılan çalışmalar incelendiğinde bilinçli deneyim olarak ispatın süreç olduğunu düşünmenin (Carciofo, Song, Du, Wang ve Zhang, 2017) üst bilişsel olduğu belirtilmiştir. Velzen (2016) üst bilişsel bilginin problem çözmeyi önemli düzeyde etkilediğini belirtmiştir. Arani ve Mobarakeh (2012) matematiksel zekâ ile üst bilişsel farkındalık arasında anlamlı düzeyde ilişki olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca üst bilişle akademik başarı arasında (Demircioğlu, Argün ve Bulut, 2010), zekâ arasında (Allon, Gutkin ve Bruning, 1994; Veenman, Wilhelm ve Beishuizen, 2004) ilişki olmadığına yönelik sonuçlar alan yazında mevcuttur. Bondy

(1984) ve Ormrod (2015, s. 353) kişinin kendi anlamasının farkında olmasının da üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Özdemir ve Sarı (2016, s. 672) matematikte üst bilişin problem çözme ile ilgili olan yönünün oldukça fazla çalışıldığını ancak matematiğin bunun dışındaki alanlarında çalışmaların yeterli olmadığını belirtmiştir. Bu nedenle matematiğin diğer alanlarında da çalışmalar yapılmasını gerekli görmektedir. Alan yazındaki çalışmalardan bazıları aşağıda paragraflar halinde sunulmuştur.

Schraw ve Dennison (1994) yetişkinler için üst bilişsel farkındalık envanteri geliştirmişlerdir. Envanterde sıraladığı üst bilişsel becerilerden bazıları şöyledir: okuduktan sonra kendi cümleleriyle yazma, anlamak için şekil veya diyagram çizme, görevi nasıl sonuca ulaştırılacağını düzenli olarak sorgulama, yazdığı işlemlerin doğruluğunu sorgulama, kendine sorular sorarak ilerleme, tüm durumları düşünüp düşünmediğini sorgulama, anlamak için sorular sorma, kullandığı stratejinin farkında olma, nasıl yapacağına yönelik plan yapma, birkaç çözüm yolunun düşünülerek en uygun olanı seçme, hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol etme veya sorgulama, ilişkilendirme yapmak için değerlendirme yapma, daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapma.

Tüysüz, Karakuyu ve Bilgin (2008) sınıf öğretmeni adaylarının üst biliş yeteneklerinin sınıf düzeylerine göre değişimini incelemek amacıyla çalışma yürütmüşlerdir. 871 öğretmen adayının katıldığını çalışmada nicel araştırma yöntemlerinden tarama modeli kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda sınıf düzeyinin artışına bağlı olarak üst biliş düzeyinin de arttığını belirlemişlerdir.

Van der Stel ve diğerleri (2010) ortaöğretim öğrencilerinin sözel matematik problemi çözerken sergiledikleri üst bilişsel becerilerin yaş düzeyine göre değişimini incelemişlerdir. Çalışmada üst bilişsel becerilerin belirlenmesinde sesli düşünme protokolünden yararlanılmıştır. Çalışmanın sonucunda, yaş düzeyinin artmasına bağlı olarak özellikle planlama ve değerlendirme alanlarında üst bilişsel beceri sayısının arttığını belirlemişlerdir.

Demircioğlu ve diğerleri (2010) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının problem çözme sürecinde sergiledikleri üst bilişsel becerileri incelemiştir. Altı matematik öğretmen adayının katıldığı çalışmada durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Çalışmanın verileri sesli düşünme protokolü yoluyla toplanmıştır.

Çalışmanın sonucunda üst bilişsel becerilerin sıklığı ve akademik başarı arasında ilişki olmadığını belirlemişlerdir.

Özsoy ve Günindi (2011) okulöncesi öğretmen adaylarının üst bilişsel farkındalıklarının sınıf düzeylerine göre nasıl farklılaştığını incelemek amacıyla nicel çalışma yapmıştır. Çalışmada 1-4. Sınıf düzeyinden 183 öğretmen adayı yer almıştır. Çalışmanın sonucunda üst bilişsel farkındalık puanlarının 4. sınıf öğretmen adayları lehine farklılaştığı ancak cinsiyet ve mezun oldukları lise türüne göre farklılaşmanın olmadığı sonucuna ulaşmışlardır.

Nool (2012) matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecindeki üst bilişsel becerilerini incelemiştir. Nitel araştırma yöntemini kullandığı çalışmaya 18'i ilköğretim 15'i ortaöğretim olmak üzere toplam 33 matematik öğretmeni adayı katılmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarına ilk olarak problem çözdürmüş, problem çözümlerine göre katılımcıları başarılı ve başarısız problem çözücüler olarak öğretmen iki gruba ayırmıştır. Ardından bu öğretmen adaylarına bir anket uygulamış ve üst bilişsel farkındalıklarını incelemiştir. Çalışmanın sonucunda genel olarak bilişsel süreçleri izlemede çok az katılımcının başarılı olduğunu belirlemiştir. Problem çözme sürecinde katılımcıların deneme yanılma yöntemini kullandıkları, formüllerden yararlandıklarını ve ortalamaya göre işlem yaptıklarını belirlemiştir. Problem çözme öğretmen adaylarının kullandığı üst bilişsel becerilere yönelik de öğretmen adaylarının problemi anlamak için sorular sorduklarını, sonuca ulaşamadıklarında tekrar çözüm yaptıklarını, hata yaptıklarında adım adım kontrol ettiklerini veya stratejilerini kontrol ettiklerini, sonuca ulaşmakta güçlük yaşadıklarında çözümü sözel olarak ifade ettiklerini tespit etmiştir.

Demir (2013) yüksek ve düşük başarılı sınıf öğretmeni adaylarının ders çalışma sürecindeki üst bilişsel becerilerine yönelik görüşlerini incelemiştir. 30 sınıf öğretmeni adayının katıldığı çalışmada veriler yarı yapılandırılmış görüşme formuyla toplanmıştır. Çalışmanın sonucunda yüksek başarılı öğretmen adaylarının düşük başarılı öğretmen adaylarına göre daha fazla olumlu görüşe sahip olduğunu bulmuştur. Çalışmasında belirlemiş olduğu üst bilişsel becerilerden bazıları ise önemli yerlerin altını çizme, ilişki kurma, benzer ve farklılıkları belirleme, ön bilgileri hatırlama gözden geçirme, kendine

soru sorma, hedefe ulaşma durumunu değerlendirme, zihinde canlandırma, el yazısıyla yazma ve anahtar kelimeleri belirleme becerilerinin sergilendiğini tespit etmiştir.

2.4.3. İspatta bilişsel yapı ile ilgili çalışmalar

İspatta üst bilişe yönelik çalışmalar incelendiğinde ulusal ve uluslararası düzeyde yeterince çalışma olmadığı belirlenmiştir. Bu konu üzerine yapılan çalışmalardan birisi Barnard ve Tall'un (1997) matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencileriyle yaptığı çalışma diğeri ise Yang'ın (2012) lise öğrencileriyle yaptığı çalışmadır.

Barnard ve Tall (1997) yaptıkları çalışmada öğrencilerden $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu göstermelerini istemiştir. Daha sonra ispat yöntemlerini genelleyerek $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu göstermelerini istemiştir. Çalışmada katılımcılardan aldığı görüşler doğrultusunda katılımcıların önerme ifadesini reddettiklerini, sözel ifadelerden cebirsel ifadelere geçişte güçlük yaşadıklarını, aşina oldukları cebirsel ifadeleri kullandıklarını, cebirsel ifadelerle sözel temsiller arasında ilişki kurmakta güçlük yaşadıklarını, farklı türde gerekçelendirme yaptıklarını ve önceki önermenin ispatının yeni önermenin ispatına genelleyebildiklerini (Analojik akıl yürütme) belirlemişlerdir.

Yang (2012) yaptığı çalışmada öğrencilerin bilişsel okumaları, üst bilişsel okumaları ve geometri ispatlarını okuyup anlama becerilerini yapısal eşitlik modellemesi ile incelemiştir. Bunun için bir ölçek geliştirmiştir. Ölçekte beceriler bilişsel ve üst bilişsel olarak ayrılmıştır. Araştırmacının belirttiği bilişsel becerilerden bazıları şunlardır: ispat önermesini ilk kez okuma, önemli yerlerini belirlemek için altını çizme, önermeyi anlamak için şekil çizme. Araştırmacı ispat önermesini adım adım okuma, verilenler üzerine düşünme, ispatın anahtar kavramını belirleme, ispatın nasıl başlayıp sonuca ulaştığını kendine sorma, hata yaptığında hata yaptığı bölümü belirleme, ispat adımlarında ne yapacağını düşünme ve kontrol etmeyi üst bilişsel olarak ele almıştır.

Yukarıda açıklanan alan yazın doğrultusunda yapılan çalışmaların genel özelliklerinden yararlanarak mevcut çalışmanın alan yazınla karşılaştırılması Tablo 2.2'de sunulmuştur.

Tablo 2.2.

Bölümler Bazında Alan Yazınla Mevcut Çalışmanın Karşılaştırılması

Bölüm	Alan yazın	Mevcut çalışma
Yöntem	Alan yazında yapılan çalışmalar genellikle sadece nicel veya sadece nitel yöntem içermektedir. Nicel çalışmalar genellikle ölçek geliştirme, betimsel araştırma ve ilişkisel araştırma boyutunda incelenmiştir. Nitel araştırmalar ise görüş incelemeye yönelik veya ispat sürecindeki bilgi ve becerileri incelemeye yönelik yürütülmüştür.	Bu çalışmada nitel ve nicel yöntemler kullanılarak karma araştırma yöntemi kullanılmıştır. Bu durum daha geniş örneklemden analitik genelleme yapmaya imkân sağlayacaktır. Ayrıca bu çalışma katılımcıların düşünme süreçlerine odaklanarak ispat sürecini bilişsel açıdan incelemesi bakımından önceki çalışmalardan ayrılmaktadır.
Örneklem	Ayrıca yapılan çalışmaların daha çok sadece öğrenciler, sadece öğretmen adayları, öğrenci ve öğretmenleri ile yürütüldüğü belirlenmiştir.	Çalışma örneklem bakımından da diğer çalışmalardan ayrılmaktadır. Çalışmanın katılımcıları öğretmen ve öğretmen adayları olduğu için gelişimsel açıdan da inceleme olanağı bulmuştur.
Konu seçimi	Alan yazındaki araştırma konuları incelendiğinde çalışmaların sadece cebir (Analiz, Lineer Cebir, Sayılar Teorisi, Soyut Cebir) veya sadece geometri alanına yoğunlaştığı belirlenmiştir.	Bu çalışma cebir ve geometri alanlarını içinde barındırması bakımından diğer çalışmalardan ayrılmaktadır. Çalışmada geometri ve cebir alanlarından sorular kullanılmıştır.

Tablo 2.2. *(Devamı)*

Veri toplama araçları	Alan yazında ispata yönelik yapılan çalışmalarda veri toplama aracı olarak görüş belirlemeye yönelik ölçekler, görüşme ve gözlem formları kullanılmıştır. Üst bilişe yönelik yapılan çalışmalarda ise daha çok sesli düşünme protokolü kullanılmıştır.	Bu çalışmada ispat yapma sürecindeki üst bilişsel beceriler bilişsel açıdan incelendiğinden çalışmada sesli düşünme protokolü, etkinlik kartları ve gözlem formu kullanılmıştır. Bunların yanı sıra ispat yapma becerisi teşhis testine de yer verilmiştir.
Verilerin analizi	Alan yazında çalışmalarda elde edilen nicel verilerin analizinde betimsel ve kestirimsel istatistik kullanılmıştır. Nitel verilerin analizinde ise daha çok betimsel analiz yapılarak var olan durumlar sunulmuştur.	Mevcut çalışmanın nicel kısmının analizi alan yazında ki çalışmalarda olduğu gibi betimsel ve kestirimsel istatistik kullanılarak yapılmıştır. Nitel kısmında ise içerik analizi uygulanarak veriler katılımcıların seviyelerine göre karşılaştırılmıştır. Ayrıca tüm soruları içine alan karşılaştırma tabloları sunulmuştur. Son olarak nitel ve nicel veri ilişkilendirilmiştir.

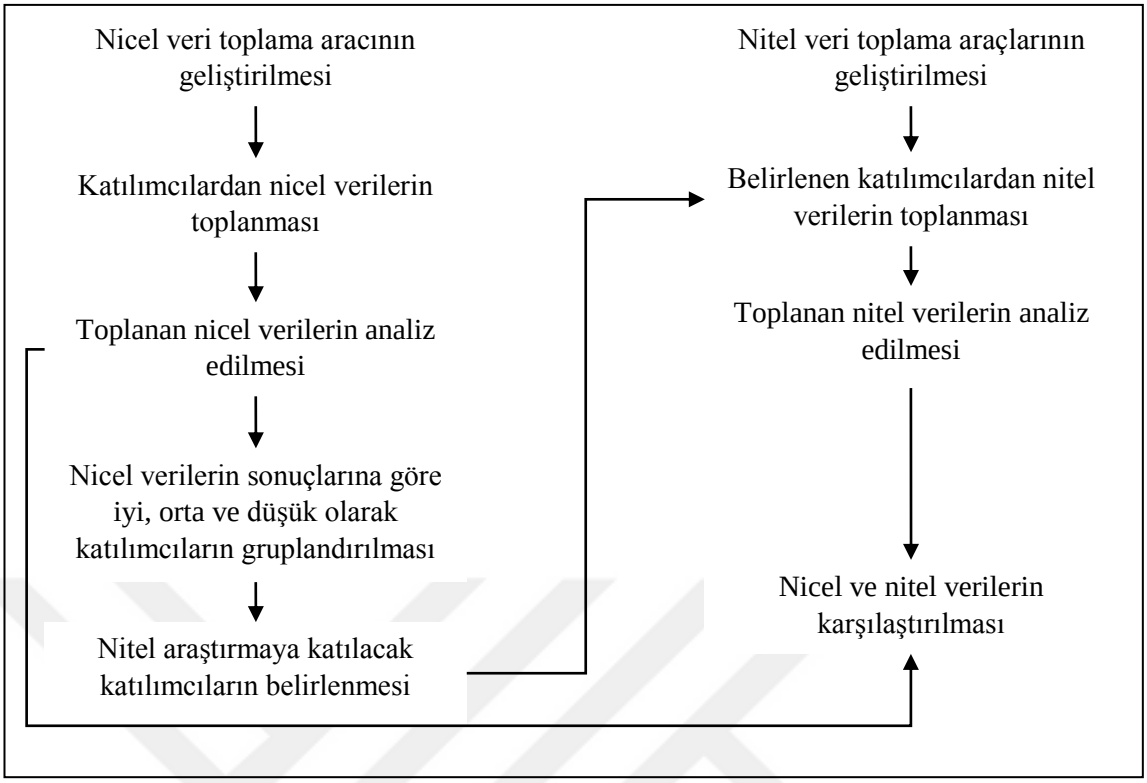
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

Çalışmanın bu bölümünde "araştırma modeli", "pilot çalışma", "çalışma grubu", "veri toplama araçları", "araştırmacı rolü", "verilerin toplanması ve süreç", "veri analizi" ve "geçerlik ve güvenirlik" hakkında bilgi verilecektir.

3.1. Araştırma Modeli

Çalışmada karma araştırma yöntemlerinden açıklayıcı ardışık desen kullanılmıştır. Açıklayıcı ardışık desenin amacı nicel çalışma ile başlayıp bu aşamada elde edilen sonuçları nitel çalışmalarla açıklamaktır (Creswell, 2017, s. 39). Bu desen nicel verilerin toplanması ile başlar. Ardından toplanan nicel veriler analiz edilir ve nitel araştırmanın katılımcıları belirlenir. Sonraki aşamada nitel veriler toplanıp analiz edilir ve son olarak nicel ve nitel veriler ilişkilendirilir (Creswell, 2017, s. 39; Hesse-Biber, 2010). Bu çalışmada açıklayıcı ardışık desen kullanılmasının nedeni; öğretmenler ve öğretmen adayları için ulaşılan sonuçları daha genel biçimde sunabilme adına toplanan nitel verilerde maksimum çeşitliliği sağlayacak yöntem olmasıdır. Bu nedenle toplanan nicel veriler ile öğretmenler ve öğretmen adayları iyi, orta ve düşük olarak sınıflandırılmış ve her gruptan, grubu temsil edecek belli sayıda katılımcı belirlenerek çalışmanın nitel verileri toplanmıştır. Çalışmada kullanılan araştırma modeli Şekil 3.1'de sunulmuştur.



Şekil 3.1. Araştırma modeline göre çalışma süreci

3.2. Pilot Çalışma

Bu araştırmanın pilot çalışması Bayburt ve Gümüşhane illerinde görev yapan ortaöğretim matematik öğretmenleriyle yürütülmüştür. Pilot çalışmanın öğretmenlerle yürütülmesinin nedeni; öğretmenlere yönelik geliştirilen testlerin öğretmen adaylarına da uygulanabilir olmasıdır. Çünkü hazırlanan ispat sorularının tamamı öğretmenlerin hizmet öncesi dönemde almış oldukları derslerin içeriğiyle ilgilidir. Bu bağlamda öğretmenlerden elde edilen verilerin daha güvenilir olduğu söylenebilir. Pilot çalışmanın ilk olarak Bayburt ilinde yürütülmesi amaçlanmıştır. Pilot çalışma için Bayburt ilinin seçilmesinin nedeni bu ilin eğitim seviyesi ve sosyal-kültürel açıdan Erzurum'a yakın olması ve araştırmacının bu ilde görev yapıyor olmasıdır. Ancak Bayburt'ta görevli ortaöğretim matematik öğretmeni sayısının ölçme aracı geliştirme için yetersiz olması nedeniyle pilot çalışmaya Gümüşhane ilinde görevli ortaöğretim matematik öğretmenleri de dahil edilmiştir. Gümüşhane ili eğitim seviyesi, sosyal kültürel ve mesafe açısından Bayburt'a yakın olmasından dolayı seçilmiştir. Pilot çalışmaya 80 ortaöğretim matematik öğretmeni katılmıştır. Öğretmenlerin yarısı Bayburt'ta yarısı Gümüşhane'de görevlidir. Öğretmenlerin %54'ü kadın %46'sı

erkektir. Katılımcıların 32'si Fen Fakültesi, 48'i Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü mezunudur. Matematik öğretmenlerinin %4'ü özel kolejde, %5'i İmam-Hatip Lisesinde, %6'sı Çok Programlı Lisede, %8'i Düz Lisede, %10'u Sosyal Bilimler Lisesinde, %11'i Fen Lisesinde, %24'ü Mesleki Teknik Lisesinde ve %32'si Anadolu Lisesinde görev yapmaktadır. Öğretmenlerin 32'si 0-5 yıl, 28'i 6-10 yıl, 16'sı 11-15 yıl 4'ü 16 yıl ve üzeri deneyime sahiptir.

3.3. Çalışma Grubu

Bu araştırmaya 2015-2016 akademik yılında Erzurum ilinde görev yapan ortaöğretim matematik öğretmenleri ile aynı ilde öğrenim gören ortaöğretim matematik öğretmeni adayları katılmıştır. Çalışmaya hem matematik öğretmenlerinin hem de matematik öğretmeni adaylarının katılmasının nedeni; öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin durumlarını görerek gruplar arasında farklılık olup olmadığını incelemektir. Başka bir ifadeyle katılımcıların ispat yapma becerilerinin ve ispatlama sürecinde sergilenen bilişsel/üst bilişsel becerilerin gelişimsel boyutuyla karşılaştırılması amaçlanmıştır. Çalışmanın yürütülmesi için Milli Eğitim Bakanlığından ve Atatürk Üniversitesinden gerekli izinler alınmış (Ek-1) ve katılımcıların seçiminde gönüllülük ilkesi esas alınmıştır. Araştırmanın çalışma grubunun oluşturulmasında iki aşamalı örneklem seçim yöntemi kullanılmıştır. Creswell ve Plano-Clark (2014, s. 198) açıklayıcı desenin kullanıldığı çalışmalarda nicel ve nitel aşamalar için iki aşamalı örneklem seçiminin daha uygun olduğunu ifade etmiştir. Çalışmanın her iki örnekleminde aynı bireyler yer almıştır. Çalışmanın nitel kısmına katılan bireyler nicel kısmına katılan bireyler arasından seçilmiştir. Çalışmanın nicel kısmı için örneklemin seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden tipik durum örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Tipik durum örnekleme yöntemi bir durumu temsil edecek ortalama bireylerin seçimine dayanır. Yani istatistiksel olarak düşünüldüğünde mod değeri veya çevresinde yer alan bireylerin seçimine dayanmaktadır (Gürsakal, 2013, s. 7).

Çalışmaya katılan öğretmen adayları Erzurum ilinden seçildiği için öğretmen adaylarının öğretmenlerle karşılaştırılmasının uygunluğu açısından öğretmenler de Erzurum ilinden seçilmişlerdir. Çalışmanın nitel bölümünde ise yine amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Maksimum

çeşitlilik örnekleme yöntemi bir durumdaki farklı düşünceleri belirlemeyi amaçlar ve bu örnekleme türünde geniş çaplı durumlar ortaya konulabilir (Patton, 2014, s. 243). Bu doğrultuda çalışmada nicel araştırma sonucundaki başarı puanlarına göre öğretmenler ve öğretmen adayları iyi, orta ve düşük kategorilerine ayrılmıştır. Bu kategorilerde yer alan öğretmenlerden ve öğretmen adaylarından çözümleri doğrultusunda katılımcılar belirlenmiştir. Çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adaylarının dağılımı Tablo 3.1'de sunulmuştur.

Tablo 3.1.

Çalışmaya Katılan ve Katılacak Öğretmen-Öğretmen Adaylarının Dağılımı

Katılımcı grubu	Katılımcı sayısı				
	İspat yapma becerisi teşhis testi	Sesli düşünme protokolü Başarı Düzeyi			
		İyi	Orta	Düşük	Toplam
1. sınıf matematik öğretmeni adayı	19	2	2	2	6
Son sınıf matematik öğretmeni adayı	29	2	2	2	6
Matematik Öğretmeni	25	2	2	2	6
Toplam	73	6	6	6	18

Çalışmanın nicel bölümüne 73 kişi katılmıştır. Katılımcıların 25'i ortaöğretim matematik öğretmeni, 29'u son sınıf matematik öğretmeni adayı, 19'u ise 1. sınıf matematik öğretmen adayıdır. Katılımcıların 31'i kadın 42'si erkektir. Katılımcılar 18-55 yaş aralığındadır. Katılımcıların tamamı Türk vatandaşı olup, anadilleri Türkçe'dir. Katılımcı öğretmenlerin mesleki kıdemleri 2-23 yıl aralığındadır. Öğretmenlerin 7'si kadın, 18'i erkektir ve öğretmenlerin %56'sı Fen Fakültesi Matematik Bölümü, %44'ü Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü mezunudur. Katılımcı öğretmenlerin 15'i lisans mezunu, 7'si yüksek lisans mezunu, 3'ü doktora öğrencisidir. Öğretmenlerden 2'si Fen Lisesi, 2'si özel okul, 5'i Mesleki ve Teknik Lise, 6'sı İmam-Hatip Lisesi, 10'u Anadolu Lisesinde görev yapmaktadır. Çalışmaya katılan son sınıf matematik öğretmen adaylarının ise 15'i kadın, 14'ü erkektir. Katılımcı son sınıf öğretmen adaylarının 4'ünün ekonomik düzeyi yüksek, 9'unun ekonomik düzeyi düşük ve 16'sının ekonomik düzeyi orta seviyededir. Son sınıf öğretmen adaylarının %41'i matematik dersi verme deneyimine sahip olup, %59'u bu deneyime sahip değildir. Çalışmaya katılan son sınıf öğretmen adaylarının tamamı Düzlem Geometri I-II, Soyut

Cebir ve Sayılar Teorisi I-II derslerini almışlardır. Çalışmaya katılan 1. sınıf matematik öğretmen adaylarının 9'u kadın, 10'u erkektir. 1. sınıf öğretmen adaylarının 3'ünün ekonomik düzeyi düşük, 4'ünün ekonomik düzeyi yüksek ve 12'sinin ekonomik düzeyi orta seviyededir. 1. sınıf öğretmen adaylarının 3'ü herhangi bir yerde matematik dersi verme deneyimine sahipken, diğer öğretmen adayları herhangi bir yerde ders verme deneyimine sahip değillerdir. Çalışmaya katılan 1. sınıf öğretmen adaylarının tamamı Düzlem Geometri-I dersini almışlardır. Düzlem Geometri-II ile Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I-II derslerini ise henüz almamışlardır.

3.4. Veri Toplama Araçları

Çalışmada veri toplama aracı olarak ispat yapma becerisi teşhis testi, sesli düşünme protokolü, etkinlik kartı ve gözlem formu kullanılmıştır. Çalışmada kullanılan veri toplama araçları aşağıda açıklanmıştır.

3.4.1. İspat yapma becerisi teşhis testi

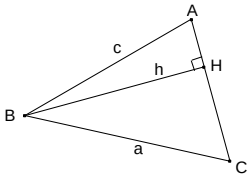
İspat yapma becerisi teşhis testinin oluşturulmasında ilk olarak geometri ve cebir ispat sorularını içeren bir soru havuzu oluşturulmuştur. Oluşturulan soru havuzundan farklı türde soruların seçilmesiyle üç farklı informal mülakat formu hazırlanmıştır (Form Ek-2'de sunulmuştur). İnformal mülakat formlarında; aynı kazanımı ölçmeye yönelik sorular aynı soru numarasına sahip olacak şekilde hazırlanmıştır. Her bir formdaki soru farklı şekilde sorularak mülakat formlarına yerleştirilmiştir. Mülakat formundaki her soru farklı kazanımlara ait hazırlanmıştır. Örneğin, formun birinde sorunun biri sözel olarak sorulmuş, diğerinde şekil ile sorulmuş, üçüncü formda ise aynı kazanıma yönelik benzer bir soru sorulmuştur. Çalışmada seçilen geometri önermelerinin ispatında detaylı ek çizimler yapmaya ihtiyaç duyulmamakta ve ispatı tamamlamak için lemma kullanmayı gerektirmemektedir. Cebir önermeleri de soyut matematik ve sayılar teorisi kitaplarında çok sık rastlanan ve ileri düzey bilgi gerektirmeyen türden seçilmiştir. Oluşturulan her bir informal mülakat formu 10 soru içermektedir. Oluşturulan form ilk olarak matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesine sunulmuş ve alınan görüşler doğrultusunda ikinci formdaki yedinci soru düzeltilmiştir. Ardından form matematik eğitimi alanında uzman ikinci bir öğretim

üyesine sunulmuş ve soruların uygun olduğu belirlenmiştir. Son olarak yine matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesine sunulmuş ve uygun olduğuna dair görüş alınmıştır. Formlara son hali verilerek her form iki ortaöğretim matematik öğretmenine sunulmuştur. Toplamda altı ortaöğretim matematik öğretmeniyle yapılandırılmamış görüşme yürütülmüştür. Bu görüşmelerde öğretmenlerden soruları çözmeleri ve çalışmanın amaçlarıyla soruların uygunluğunu değerlendirmeleri istenmiştir. Öğretmenlerin önerileri alınmış ve hangi tür ispat yaptıkları incelenmiştir. Süreçte öğretmenlere düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak sorular da sorularak gözlem formunun hazırlanması için temel oluşturulmuştur. Ayrıca öğretmenlerle yapılan görüşmelerde geometrinin üçüncü sorusu olan Pisagor bağıntısı sorusunda öğretmenlerden beşinin soruyu Kosinüs teoremi yardımıyla çözdükleri ve bu çözümde sürece dair veri alınamadığı belirlenmiştir. Bu nedenle soruya "Kosinüs Teoremini kullanmadan" şeklinde bir öncül eklenmiştir. Öğretmenlerden alınan görüşler doğrultusunda başarı testinde kullanılacak olan sekiz soru seçilmiştir. Seçilen sekiz sorunun pilot çalışmada uygulanmasında ortalama 60 dakikalık sürenin gerekli olduğu saptanmıştır. Katılımcıların süreyi uzun bulup son soruları yapmaktan kaçındıkları belirlenmiştir. Öğretmenler genellikle iki ders arasında boş ders saatleri yer aldığında bu süreyi çalışmaya katılmak için değerlendirdiklerinden sorular için 45 dakikalık süre ayrılması uygun görülmüştür. Soru başına düşen ortalama süre 7,5 dakika olarak hesaplandığından ispat yapma becerisi teşhis testindeki soru sayısının 6 olması uygun görülmüştür. Bu bağlamda çalışmanın hedefleri dikkate alındığında madde ayırt ediciliği en düşük olan bir soru ile madde güçlük oranı en düşük olan birer soru formdan çıkarılmıştır. Formun son halinde 6 soruya yer verilmiştir.

Elde edilen görüşmeler sonucunda pilot çalışma için oluşturulan altı soru ve kazanımlarını içeren belirtke tablosu Tablo 3.2'de sunulmuştur.

Tablo 3.2.

İspat Yapma Becerisi Teşhis Testinde Kullanılan Altı Soru İçin Hazırlanan Belirtke Tablosu

No		Önerme	Kazanım
1	Geometri	"Bir üçgende iki iç açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü üçüncü açının ölçüsünün yarısının 90° fazlasıdır." önermesinin doğruluğunu gösteriniz.	➢ Üçgenin temel ve yardımcı elemanlarını çizerek ispatta kullanır.
2	Geometri	 Şekildeki gibi bir ABC üçgeninde $\|AB\| = c$, $\|BC\| = a$,$\|AC\| = b$ ve $\|BH\| \perp \|AC\|$ dir. O halde $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$ olduğunu gösteriniz. (Kosinüs Teoremi)	➢ Öklid geometrisindeki temel teoremlerin ispatını yapar.
3	Geometri	Kosinüs teoremini <u>kullanmadan</u>, Pisagor Teoremini ispatlayınız.	➢ Üçgende alan ve kenar arasındaki ilişkileri kurar. ➢ Öklid geometrisindeki temel teoremlerin ispatını yapar.
4	**Cebir**	$\forall x \in R\ için\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$olduğunu ispatlayınız.	➢ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ biçimindeki özdeşliğin doğruluğunu ispat yöntemlerini kullanarak gösterir.
5	**Cebir**	*"Tamsayılar kümesi üzerinde 3 ve 4 ile bölünebilen her sayı 12 ile bölünebilir."* İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.	➢ Tamsayılarda bazı bölünebilme kurallarının doğruluğunu farklı ispat yöntemleriyle gösterir.
6	**Cebir**	*"İki tek sayının çarpımı yine bir tek sayıdır"* Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.	➢ Sayılar teorisinin önemli ispatlarını yapar.

Hazırlanan belirtke tablosu ilk olarak iki ölçme-değerlendirme uzmanına sunulup kazanım ifadelerini değerlendirmeleri için görüşleri alınmıştır. Uzmanlar kazanım ifadelerinin uygun olduğunu ifade etmiştir. Ardından beşi matematik öğretmeni, dokuzu matematik eğitimi alanında doktora yapmış, altısı da fen fakültesi matematik alanında doktora yapmış 20 uzmana sunulmuştur. Her bir madde için kapsam geçerlik indeksi hesaplanmış ve Tablo 3.3'de sunulmuştur.

Tablo 3.3.

Her Bir Soru İçin Hesaplanan Kapsam Geçerlik İndeksi (KGİ)

	Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Soru 5	Soru 6
KGİ	1	.50	.60	.60	.80	.80

Tablo 5 incelendiğinde KGİ değerlerinin .50-1.00 aralığında değiştiği belirlenmiştir. 6 soru için ortalama KGİ değeri .72 olarak hesaplanmıştır. Bu değer kapsam geçerliği için yeterli görülmektedir (Lawshe, 1975). Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda uygun değil ifadesini kullanan uzmanlarla araştırmacı, kazanımlar üzerine tartışmalar yürüterek kazanımları yeniden belirlemişlerdir.

Hazırlanan altı soruluk ispat başarı testi 80 öğretmene uygulanarak analizleri yapılmıştır. Ölçeğe ilk olarak açımlayıcı faktör analizi yapılarak ölçeğin yapısı hakkında bilgi edinilmiştir. Örneklem büyüklüğünün analiz için yeterliğini gösteren KMO değeri .70 olarak bulunmuştur. Seçer (2013, s. 119) .70 ve üzerinin örneklem büyüklüğü için kabul edilebilir değer olduğunu belirtmiştir. Bu değer örneklem büyüklüğünün yeterli olduğunu göstermektedir. Verilerin normallik varsayımlarının sağlanabilirliğini gösteren Barlett testi sonuçlarının da anlamlı olduğu saptanmıştır ($x^2 = 171.961, sd = 28, p < .01$).Bu değerler Çokluk, Şekercioğlu ve Büyüköztürk'e (2014, s. 219) göre açımlayıcı faktör analizinin varsayımlarının karşılandığını göstermektedir. Durmuş, Yurtkoru ve Çinko (2013, s. 81) KMO değerinin yapının bütününe ait uygunluğu ölçtüğünü belirtirken, MSA (Measures of Sampling Adequacy) değerinin de her bir sorunun faktör analizine uygunluğunu gösterdiğini ifade etmiştir. MSA değerlerini gösteren Anti-imaj matrisi Tablo 3.4'de sunulmuştur.

Tablo 3.4.

Anti-imaj Korelasyon Matrisi Sonucu

	1	2	3	4	5	6
Soru 1	.580[a]	-	-	-	-	-
Soru 2	-.150	.820[a]	-	-	-	-
Soru 3	-.418	-.122	.701[a]	-	-	-
Soru 4	-.184	-.120	-.002	.808[a]	-	-
Soru 5	-.168	-.195	-.104	-.179	.781[a]	-
Soru 6	.337	-.165	-.223	-.125	-.249	.525[a]

Elde edilen değerler incelendiğinde tüm değerlerin .50'nin üzerinde değer aldığı yani Açımlayıcı Faktör Analizi (AFA) için uygun olduğu belirlenmiştir. Yapı tek faktörlü tasarlandığı için, döndürme işlemi yapılmamıştır. Çokluk ve diğerleri (2014, s.

222) tek faktörlü olarak geliştirilen testlerde döndürme işleminin yapılmayacağını belirtmektedir. Uygulanan açımlayıcı faktör analizi sonucunda tek faktörlü yapının her bir maddesinin faktör yük değerinin .30'un üzerinde olduğu belirlenmiştir. Maddelerin her birinin faktör yük değerleri Tablo 3.5'de sunulmuştur.

Tablo 3.5.

Maddelerin Her Biri İçin Faktör Yük Değerlerinin Dağılımı

Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Soru 5	Soru 6
.62	.70	.71	.62	.73	.46

Tablo 3.5 incelendiğinde, tek faktörlü yapının her bir maddesinin faktör yük değerlerinin $.46 - .73$ aralığında olduğu belirlenmiştir. Seçer (2013, s. 129) madde faktör yük değerlerinin .30 ve üzerinde olması gerektiğini ifade etmektedir. Bir faktörleştirme sonucunda altı maddelik yapının toplam varyansın %41.41'ini açıkladığı bulunmuştur. Çokluk ve diğerleri (2014, s. 227) tek faktörlü desenlerde toplam varyansın %30'unu açıklanmasını yeterli görmektedirler. Yapılan analizler sonucunda ispat başarı testinin altı sorudan ve tek faktörden oluşan bir yapıda olduğu belirlenmiştir.

Oluşan başarı testine tek faktörlü yapılar için Klasik Test Teorisine dayalı madde analizleri yapılmıştır. Test açık uçlu olduğu için madde ayırt edicilik (Madde geçerliği) ve madde güçlük oranı (Madde onaylanma oranı) ile güvenirlik değerleri hesaplanmıştır. Madde ayırt ediciliğinin hesaplanmasında "maddenin içinde bulunduğu ölçek ya da alt ölçek toplam puanları açısından alt ve üst %27'lik grupların o madde için karşılaştırılmasına dayanan teknik" (Erkuş, 2012, s. 141) kullanılmıştır. Bu teknikle madde ayırt edicilik indeksleri hesaplanırken, elde edilen verilerden 22'si alt grup, 22'si üst grup olarak ayrılmış ve alt grupla üst grup arasındaki farka t testi ile bakılmıştır. Maddelerin her biri için t değerleri ve anlamlılığı Tablo 3.6' da verilmiştir.

Tablo 3.6.

Maddelerin Her Biri İçin T Değerlerinin Dağılımı

Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Soru 5	Soru 6
6.10**	4.86**	9.05**	5.07**	7.16**	3.17**

** .01 düzeyinde anlamlılık

Tablo 3.6. incelendiğinde üst grupla alt grup arasında her maddenin anlamlı düzeyde ayırt edici olduğu belirlenmiştir.

Madde güçlük oranının (MGO) hesaplanmasında aşağıdaki formül kullanılmıştır.

$$\text{MGO} = \frac{\text{Maddenin ortalaması}}{\text{Maddeden alınabilecek maksimum puan}}$$

Bu formüle göre her bir madde için madde güçlük oranı hesaplanmış ve Tablo 3.7 de sunulmuştur.

Tablo 3.7.

Her Madde İçin Hesaplanan Madde Güçlük Oranı

Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Soru 5	Soru 6
0.65	0.72	0.48	0.73	0.52	0.80

Tablo 3.7 incelendiğinde madde güçlük oranının .48-.80 aralığında olduğu görülmektedir. Kubiszyn ve Borich (2013, s. 264) .20 ile .80 arasında hesaplanan değerlerin madde güçlüğü için yeterli olduğunu; ancak .50 civarında bulunmasının en ideal değer olduğuna işaret etmiştir. Hesaplanan değerlerin madde güçlük oranı için uygun olduğu belirlenmiştir.

Hazırlanan başarı testinin güvenirliğini belirlemek için testin duyarlılığı ve tutarlılığı incelenmiştir. Testin duyarlığı her bir maddeden alınacak puanların hangi değer aralığında olacağı ile ilgilidir (Baykul, 2015, s. 138). Testin duyarlılığını sağlayabilmek için her bir madde 0-5 puan aralığında derecelendirilerek değerlendirilmiştir. Tutarlık hesabında, her bir maddenin testin bütünüyle olan

tutarlığına bakılır. Testin iç tutarlığını sağlamak için Cronbach Alpha güvenirlik katsayısı hesaplanmıştır. Hesaplanan değer .77 olarak bulunmuştur. Field (2009, s. 58) başarı testleri için .65 ve üstünün yeterli olduğunu belirtmektedir. Bu değer altı sorudan oluşan başarı testinin güvenilir olduğunu göstermektedir. Teste yönelik dereceli puanlama anahtarı veri analizi bölümünde açıklanmıştır.

3.4.2. Sesli düşünme protokolü

Sesli düşünme protokolü problem çözme sürecini incelemede kullanılan yollardan biridir. 1970'lerde geliştirilen bu yöntem problem çözme sürecindeki düşünme sürecinin analiz edilmesini sağlar. Bu yöntemde problem çözücü hem görüntülü hem de sözel olarak kayda alınır (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 419). Bu yöntem kişilerin iç dünyasında gerçekleşen durumu derinlemesine ortaya koyabilmek amacıyla kullanılır (Kaplan ve Simon, 1990). Sesli düşünme protokolünde katılımcıların ne yaptıklarından ziyade ne düşündükleri önemlidir. Bu nedenle protokolde katılımcılara ne yaptıkları değil ne düşündükleri nedenleriyle birlikte sorulur (Goldstein, 2013). Sesli düşünme protokolünde katılımcıya bir görev verilir (etkinlik kartı) ve bu görev sürecine yönelik sorular sorulur (Vandevelde, Keer, Schellings ve Hout-Wolters, 2015).

Sesli düşünme protokolünün uygulanma sürecinde ilk olarak katılımcıya sesli düşünme protokolü hakkında bilgi verilmiştir. Sesli düşünme protokolünde katılımcıya görüşmelerin kayıt altına alınacağı ve çalışmanın amacı hakkında bilgi verilmiş, süreçte düşündüklerinin hepsini sesli olarak ifade etmesi gerektiği belirtilmiştir. Katılımcıdan sesli düşünme protokolünde ne yaptığından ziyade, ne düşündüğünü ifade etmesi istendiği vurgulanmış, ardından katılımcının etkinlik kartında bulunan görevi yerine getirmesi istenmiştir. Çalışmada 4 farklı etkinlik kartı kullanılmış olup, her etkinlik kartında bir ispat önermesinin yapılması istenen görev vardır. Katılımcılara etkinlik kartları sırayla sunulmuştur. Süreç boyunca katılımcıya yaptığı işlemlerin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında herhangi bir bilgi verilmemiştir.

3.4.3. Etkinlik kartı

Etkinlik kartlarının oluşturulmasında ispat yapma teşhis testindeki sorularla örtüşen iki geometri ve iki cebir sorusu hazırlanmıştır.

Hazırlanan ilk etkinlik kartı geometri önermesini içermektedir. Bu kartta yer alan soru üçgende açı bağıntılarıyla ilgili olup ispat yapma teşhis testindeki birinci soruyla ilişkilidir. Bu sorunun seçilmesinin temel nedeni eğitim ortamının her kademesinde karşılaşılması muhtemel bir önerme olmasıdır. Bunun yanı sıra bu önerme ispat yapma sürecini incelemede veri elde etmek için uygundur. Çünkü önerme geometri bilgisini cebirsel işlemlerle birleştirmeyi gerektirmektedir. Soruda katılımcıların temel geometri bilgilerini kullanmaları yeterli olup derinlemesine bir bilgiye ihtiyaç duyulmamaktadır. Ayrıca önerme katılımcıların ek çizim yapmasını gerektirmemektedir. Bu durum önermeyi içgörü problemi olmaktan çıkarmıştır. İçgörü problemleri ani bir kavrayışla ortaya çıkıp kişinin "Hah buldum!" diyebildiği problemlerdir (Goldstein, 2013, s. 559). Süreç incelemeye yönelik yapılan çalışmalarda içgörü problemlerinin kullanılması uygun değildir. Çünkü bu tür problemler çözüm için bir süreç kullanmayı gerektirmezler (Goldstein, 2013, s. 560). Bu sorunun seçilme süreci informal görüşmelerle başlamaktadır. İnformal görüşmelerde kullanılan bu soruya öğretmenlerin verdiği cevaplar incelendiğinde sorunun çözümünde şekil çizimini gerektirdiği görülmüştür. Öğretmenlerle yapılan görüşmede iç açıortaya ilişkin önermeye daha aşina oldukları ve zihinlerinde bulunan şekliyle ispat yaptıkları belirlenmiştir. Bu durum göz önüne alındığında düşünme becerilerini daha fazla kullanmayı gerektiren dış açıortay önermesinin tercih edilmesi uygun bulunmuştur. Önermenin bilişsel açıdan ispat yapma sürecini ne derece ortaya koyabileceğine yönelik görüş almak amacıyla form bir matematik eğitimi bir de bilişsel psikoloji alanında uzman öğretim üyesine sunulmuştur. Öğretim üyelerinden alınan görüşler doğrultusunda sorunun bilişsel süreci incelemek için uygun olacağı belirlenmiştir. Hazırlanan etkinlik kartı dört öğretmene uygulanmış ve sorunun dilinin yeterince anlaşılır olmadığı belirlenmiştir. Öğretmenlerden alınan görüş doğrultusunda sorunun dil düzeltmesi yapılmış ve etkinlik kartında kullanılmak üzere soruya son şekli verilmiştir.

İkinci etkinlik kartındaki soru da geometri önermesidir. Bu soru ispat yapma teşhis testindeki ikinci soru ile ilişkilidir. Bu sorunun seçilmesinin temel nedeni önermenin analitik, sentetik ve vektörel olarak ispatının kolaylıkla yapılabilmesidir. Önermenin özel bir teorem ismine sahip olması (Kosinüs Teoremi) bu önermeyi diğer geometri sorusundan ayırmaktadır. Ancak soruda teoremin ismi kullanılmayarak önerme açık biçimde yazılmıştır. Bu soru katılımcıların ezberleyerek ispat yapabilecekleri gibi düşünme süreçlerini kullanarak da yapabilecekleri bir ispat önermesidir. Önerme içgörü problemi türünde olmayıp süreci inceleme açısından uygun olduğu düşünülmektedir. Sorunun seçimi informal görüşmelere dayanmaktadır. İnformal görüşmeler doğrultusuna soru için şekil verilmiş, ancak ipucu ve bilginin temsili olan teoremin ismi verilmemiştir. Bunun nedeni, öğretmenlerle yapılan görüşmelere dayanmaktadır. Görüşmeler sırasında etkinlik kartında sorulması için hazırlanan soruda ipucunun ve teoremin isminin verilmesinin önermenin ispatındaki çeşitliliği azaltarak çözümleri tekdüzeliğe yönlendirdiği belirlenmiştir. Önermenin bilişsel açıdan ispat yapma sürecini incelemek için uygunluğunu belirlemek amacıyla bir matematik eğitimcisi bir de bilişsel psikoloji alanında uzman öğretim üyesinin görüşü alınmıştır. Öğretim üyeleri sorunun bilişsel süreci inceleme açısından uygun olduğunu belirtmişlerdir. Hazırlanan etkinlik kartı dört öğretmene uygulanmış ve sorunun dilinin yeterince anlaşılır olduğu belirlenmiştir.

Üçüncü etkinlik kartında yer alan önerme cebir ile ilgilidir. Bu sorunun seçilmesinin temel nedeni hem önermenin hem de ispatının eğitim ortamının her kademesinde karşılaşılması muhtemel olmasıdır. Ayrıca bu soru ispat kavramının anlamını ortaya koyan bir sorudur. Bu önerme; eşitlik içeren bir ispat sorusudur. Eşitliğin ikinci tarafı verildiğinde önermenin doğruluğu tümevarım yoluyla kolaylıkla ispatlanabilirken; eşitliğin ikinci tarafı verilmediğinde tümevarım yöntemiyle ispat yapılması uygun olmamaktadır. Önerme hem üst düzey bilgi hem de temel bilgi ve düşünme gerektirmektedir. Bu bağlamda, önermenin ispatı belli stratejilerle tamamlanacak olup, içgörü problemi tarzında değildir. Bu sorunun seçimi informal görüşmelere dayanmaktadır. İnformal görüşmelerde sorunun genellikle tümevarım yöntemiyle çözüldüğü ve süreçte becerilerin yeterince tespit edilemediği görülmüştür. Sorunun tümevarım yöntemiyle doğruluğunun gösterimini engellemek için, soru eşitlik formundan çıkarılmıştır. Önermenin bilişsel açıdan ispat yapma sürecini ne derece

ortaya koyabileceğine yönelik bir matematik eğitimcisi bir de bilişsel psikoloji uzmanı öğretim üyesinin görüşlerine başvurulmuştur. Öğretim üyelerinden alınan görüşler doğrultusunda sorunun bilişsel süreci incelemek için uygun olduğu belirlenmiştir. Hazırlanan etkinlik kartı dört öğretmene uygulanmış ve sorunun dilinin yeterince anlaşılır olduğu belirlenmiştir.

Dördüncü etkinlik kartında yer alan önermede cebir ile ilgilidir. Bu önerme katılımcıların sezgisel olarak veya birkaç örnekle beraber doğruluğunu kolaylıkla fark edebileceği; ancak sembolik olarak ifade etmede güçlük yaşayabilecekleri bir önermedir. Önerme, ispat adımlarından en sonuncuya gelinceye kadar cebirsel işlemlerle birlikte kolayca ilerlemektedir. Ancak son adımda ispatın tamamlanabilmesi için bölünebilme için temel olan başka bir teoremin –"Sıfırdan farklı iki doğal sayının her ortak böleni, ortak bölenlerin en büyüğünün de bölenidir."- lemmasının bilinmesi gerekmektedir. Önerme içgörü problemi tarzında olmayıp bölünebilmenin tanımı ve bir yardımcı teorem (lemma) kullanılarak ispatlanabilmektedir. Bu sorunun seçimi informal görüşmelere dayanmaktadır. İnformal görüşmelerde katılımcıların bu önermeyi ispatlamada zorlanmayacakları ve ispatını yapabileceklerini düşündükleri; ancak ispatın son aşamasına gelindiğinde sadece sözel olarak ifade edebildikleri, sembolik dili kullanamadıkları saptanmıştır. O halde bu önermenin etkinlik kartında yer almasının mevcut durumu ortaya çıkarma açısından gerekli olduğu düşünülmüştür. Önermenin bilişsel açıdan ispat yapma sürecini ne derece ortaya koyabileceğine yönelik bir matematik eğitimcisi bir de bilişsel psikoloji uzmanı öğretim üyesinin görüşlerine başvurulmuştur. Öğretim üyelerinden alınan görüşler doğrultusunda sorunun bilişsel süreci incelemek için uygun olduğu belirlenmiştir. Hazırlanan etkinlik kartı dört öğretmene uygulanmış ve sorunun dilinin anlaşılır olduğu belirlenmiştir.

Yukarıda açıklanan dört etkinlik kartı katılımcılara sesli düşünme protokolünde verilmiştir. Katılımcılardan etkinlik kartında yer alan önermelerin ispatlarıyla meşgul olmaları ve düşündüklerini sesli olarak ifade etmeleri istenmiştir. Bu araştırmada etkinlik kartlarından sesli düşünme protokolünü desteklemek amacıyla da yararlanılmıştır. Çalışmada kullanılan etkinlik kartı örneği Ek-3'de sunulmuştur.

3.4.4. Gözlem

Gözlem, çalışmanın amacı doğrultusunda araştırmacının gerek duyduğu verileri yalın gözle izleyerek kaydettiği veri toplama tekniğidir (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2012, s. 140). Gözlem araştırmacının bir durumu doğrudan gözlemlemesini ve kaydetmesini sağladığı için araştırmacının verileri yorumlamasını kolaylaştırır. Ayrıca görüşmelerde sözel yolla tespit edilemeyen bazı verilerin gözlemler vasıtasıyla tespit edilebildiği de bilinmektedir (Merriam, 2013, s. 113). Gözlem tek başına bir veri toplama aracı olarak kullanılabileceği gibi görüşme ve dokümanı destekleyici bir araç olarak da kullanılabilir (Sart, 2015, s. 220). Bu çalışmada sesli düşünme protokolünde öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının süreçte sergilediği becerileri incelemek amacıyla araştırmacı tarafından gözlem yapılmıştır. Bu çalışmada gözlemlerin kullanılmasının asıl amacı ise sesli düşünme protokolünde görüşmelerde tespit edilemeyen bazı becerilerin saptanmasıdır. Ayrıca gözlem verileri görüşme ve doküman verilerini desteklemek amacıyla da kullanılmıştır. Çalışmada gözlemlerin kaydedilmesinde yarı yapılandırılmış gözlem formu kullanılmıştır.

Gözlem formunun hazırlanma sürecinde informal görüşmelerden yararlanılmıştır. İnformal görüşmeler için ilk olarak yapılandırılmamış gözlem yapılmıştır. Bu aşamada öğretmenlere sorulan sorular yardımıyla öğretmenlerin sergilediği beceriler not alınmıştır. Alınan notlardan ve alan yazından faydalanılarak, gözlem formu oluşturulmuştur. Gözlem formu iki bölümden oluşmaktadır. Formun bir bölümü öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının süreçte sergilemiş olduğu becerileri incelemek amacıyla likert olarak tasarlanmıştır. Diğer bölümü ise süreçte ortaya çıkabilecek ancak likert bölümde yer almayan becerileri not etmeyi içeren bir bölüm olarak tasarlanmıştır. Formun likert bölümü kendi içinde cebir ve geometri olarak ikiye ayrılmıştır. Bu bölümler üçlü likert tipinde tasarlanmış olup, değerlendirme ölçütleri "0, 1, 2" şeklinde derecelendirilmiştir. Katılımcı; gözlem formunun ilgili maddesinde yer alan beceriyi hiçbir soruda sergilemezse "0", soruların birinde sergilerse "1", soruların ikisinde sergilerse "2" seçeneği işaretlenmiştir. "1" seçeneği işaretlendiğinde seçeneğin yanına becerinin hangi soruda sergilendiği yazılmıştır. Becerilerle ilgili açıklama gerektiren bir durum olduğunda, formun açıklama bölümünde kayıt altına alınmıştır. Son aşamada öğretmenlerin ispat yapma sürecinde sergilemiş olduğu becerilere uygun

olarak gözlem formu yarı yapılandırılmış forma dönüştürülmüştür. Çalışmada kullanılan gözlem formu EK-4'de sunulmuştur.

3.5. Araştırmacı Rolü

Gözlemin veri toplama aracı olarak kullanıldığı çalışmalarda araştırmacı dört farklı gözlem rolünde bulunabilir. Bunlar; araştırmacının gözlem yaptığı ortama tamamen uyum sağladığı, gözlemcilerle sıkı ilişki içinde olduğu, araştırmacı rolünü neredeyse bir kenara bırakıp katılımcı rolünü ön plana çıkardığı tam katılımcı; gözlem yaptığı ortama dahil olduğu ancak katılımcı rolünün gözlemci rolüne göre biraz daha ön planda olduğu gözlemci olarak katılımcı; katılımcının ortama dahil olmadan sadece gözlem yaptığı katılımcı olmayan gözlemci; gözlemcinin araştırmacılar tarafından görülmediği ve gözlemcinin ortama dahil olmadığı tam gözlemci rolüdür (Creswell, 2013, s. 166).

Bu çalışmada araştırmacı katılımcı olmayan gözlemci rolündedir. Araştırmacı sesli düşünme protokolünde katılımcının görüşlerini ortaya çıkaracak sorular sormuş; ancak katılımcıların verdikleri cevaplara hiçbir şekilde müdahil olmamıştır. Araştırmacı çalışmanın katılımcılarıyla ortama uyum sağlamak için herhangi bir girişimde bulunmamıştır. Çalışmada katılımcılardan gözlem için izin alınmış olup, katılımcılar gözlemlendiklerinin farkındadırlar.

3.6. Verilerin Toplanması ve Süreç

Çalışmanın verilerinin toplanmasında ilk olarak resmi kurumlardan yasal izinler alınmıştır. Ardından örnekleme dâhil edilen illerdeki öğretmenlere araştırmacı tarafından ulaşılmış ve yüz yüze görüşmeler yapılarak gönüllü katılımcılar belirlenmiştir. Öğretmenlerden uygun oldukları günler öğrenilmiş ve buna göre çalışma planı hazırlanmıştır. Öğretmenlerle informal görüşmeler görev yaptıkları okulların öğretmenler odasında yürütülmüştür. Katılımcılara ilk olarak çalışmanın amacından bahsedilmiş ve verilerin bilimsel amaçlar dışında kullanılmayacağı kimseyle paylaşılmayacağı garantisi verilmiştir.

Çalışmanın asıl uygulamasına katılan öğretmen ve öğretmen adaylarının çalışmaya dâhil edilmesinde, pilot çalışmanın katılımcılarının belirlenmesinde izlenen

yol izlenmiştir. Çalışmada geliştirilen ispat yapma becerisi teşhis testinin katılımcılara uygulanması sürecinde, katılımcılara çalışma hakkında bilgi verilmiş ve çalışmanın iki aşamalı olduğu, seçilen katılımcıların ikinci aşamaya da katılması gerektiği belirtilmiştir. İkinci aşamaya katılamayacağını ifade eden katılımcılar çalışma grubundan çıkarılmıştır. İspat yapma becerisi teşhis testi katılımcı öğretmenlere görev yaptıkları okulun öğretmenler odasında araştırmacı gözetiminde, öğretmen adaylarına ise derslikte yine araştırmacı gözetiminde uygulanmıştır. Test için katılımcılara 40dk süre verilmiş, tamamlayamayanlar için ek süre verilmemiştir.

Çalışmanın ikinci aşamasına seçilen katılımcılarla yürütülen sesli düşünme protokolünde katılımcılardan ses kaydı için izin alınmıştır. Katılımcıların tamamı ses kaydı yapılmasına izin vermişlerdir. Süreçte katılımcılara dört farklı etkinlik kartı verilmiş ve düşüncelerini ortaya çıkarmaya yönelik sorular yöneltilmiştir. Bu çalışmalarda yine öğretmenlerin görev yaptıkları okulların öğretmenler odasında ve ders süreleri dışında yürütülmüştür. Öğretmenlerin her biriyle yürütülen görüşmeler farklı günlerde yapılmıştır. Öğretmen adaylarıyla görüşmeler ise Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi misafir öğretim elemanı odasında yürütülmüştür. Öğretmen adaylarıyla yürütülen görüşmeler de ders süreleri dışında uygun oldukları zaman diliminde tamamlanmıştır. Öğretmen adaylarıyla yürütülen görüşmeler; son sınıf öğretmen adaylarıyla iki günde 1. sınıf öğretmen adaylarıyla üç günde yürütülmüştür. 1. sınıf öğretmen adayları ile ortalama 20dk 19sn; son sınıf öğretmen adaylarıyla ortalama 31dk 52sn ve öğretmenlerle ortalama 27dk 38sn görüşmeler yapılmıştır.

3.7. Veri Analizi

Creswell ve Plano-Clark (2014, s. 221) karma yöntem araştırmalarında veri analizinin belirlenen araştırma modeline göre yapılacağını belirtmektedir. Açımlayıcı model dikkate alındığında veri analizinin "nicel veri analizi → nitel veri analizi → nicel ve nitel verilerin ilişkilendirilmesi" şeklinde ilerlemesi gerektiğini ifade etmektedir. Bu süreçte nicel verilerin analizi betimsel istatistikten kestirimsel istatistiğe doğru yürütülmüştür. Nitel verilerin analizinde ise kodlama sürecini içeren içerik analizi yapılmıştır. Ardından nicel ve nitel sonuçların ilişkilendirmesi yapılmıştır.

Bu çalışmada ilk olarak nicel verilere yönelik analizler yürütülmüştür. Ardından nitel verilerin analizi yapılmıştır. Nitel verilerin analizinde ilk olarak veriler transkript edilerek kodlanmıştır. Başka bir ifadeyle ispat yapma sürecinde sergilenen beceriler tespit edilmiştir. Ardından kodların ortak özelliklerine göre elde edilen beceriler kategorilendirilmiştir. Oluşan kategoriler temalar altında birleştirilmiştir. Temalar düşünme sürecine göre bilişsel ve üst bilişsel olarak belirlenmiştir. Son olarak toplanan nicel veriler nitel verilerle ilişkilendirilmiştir. Çalışmada elde edilen verilerin sunumunda öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının görüşlerinden doğrudan aktarmalar yapılmış ve etkinlik kartlarından görüntüler sunulmuştur. Katılımcılardan yapılan doğrudan aktarmalarda katılımcılar için kod isimler kullanılmıştır. Kod isimlerin oluşturulmasında a_{ij} matris kodlamasından yararlanılmıştır. Bu kodlamada a:Öğretmen=Ö, Son sınıf öğretmen adayı=$ÖA_S$, 1.sınıf öğretmen adayı=$ÖA_1$; i:İyi başarı puanı=İ, Orta başarı puanı=O, Düşük başarı puanı=D; j: Erkek=1, Bayan=2 şeklinde belirlenmiştir. Örneğin $Ö_{İ1}$: İyi başarı puanına sahip erkek öğretmeni temsil etmektedir.

3.7.1. İspat yapma teşhis testine yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi

Alan yazın göz önünde bulundurularak (Doruk ve Kaplan, 2015; Güler ve Dikici, 2014; Güven ve diğerleri, 2005; Senk, 1985) dereceli puanlama anahtarı için önermeyi anlama, sembolik ifade kullanma, sezgisel ispatlama ve ispatı eksiksiz tamamlama olarak dört ölçüt belirlenmiştir. Belirlenen ölçütler ve testin duyarlılığı da göz önünde bulundurularak bu çalışmada dereceli puanlama anahtarı için altı düzey oluşturulmuştur: "Soruyu cevaplayamama", "önermeyi anlayabilme ama ispatı yapamama", "sezgisel ispat yapma", "sembolik ifade kullanmama", "ispatı tamamlayamama" ve "hatalı sembolik ifade kullanma ve ispatı eksiksiz tamamlama". Yapılan uygulamalar neticesinde öğretmenlerin verdiği farklı cevaplar için en yüksek düzeyden başlayarak beklentiler belirlenmiştir. Hazırlanan dereceli puanlama anahtarı Tablo 3.8'de sunulmuştur.

Tablo 3.8.

Dereceli Puanlama Anahtarı

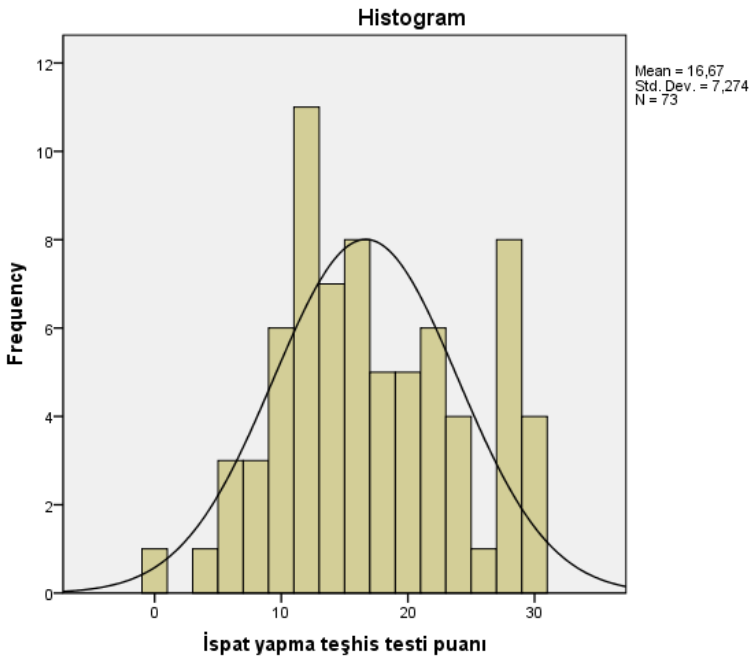
Puanı	Açıklama
5	➢ İspatı eksiksiz olarak tamamlar.
4	➢ İspatı tamamlar ancak sembolik gösterimlerde hata vardır. ➢ Tanım kümesini yazmaz veya ispatın son aşamasını yeterince açıklamaz. ➢ İspatını tamamlar ancak işlemlerin gerekçesini (dayandırdığı teoremleri) yazmaz.
3	➢ Ardı ardına birkaç mantıksal çıkarımda bulunarak sembolik ifade kullanır. Ancak sonuca ulaşmak için yeterli değildir. ➢ İspatı yapar ancak matematiksel dilden (notasyonlardan) uzaktır. ➢ İspatı anlar, doğru strateji seçer; ancak stratejiyi yanlış uygular.
2	➢ İspatı anlamak için gerekli çıkarımları yapar. Ancak sembolik ifade kullanmaz. ➢ İspatı anlar; ancak yanlış strateji seçerek sonuca ulaşır. ➢ Örnekler yardımıyla genelleme yapar. ➢ İspatın doğruluğunu anlatır (Sezgisel ispat yapar).
1	➢ İspatı anlamaya yönelik farklı işlemler yapar (Doğru şekil çizme gibi). ➢ Verilenleri ve istenenleri yazar (Hipotez-Hüküm). ➢ İspatı yarım bırakır (Sadece tanımları veya sonucu yazar). ➢ Tanım kümesini eksik veya yanlış yazarak ispata başlar ve ispatı tamamlar.
0	➢ Soruyu cevaplamaz veya cevaplayamaz. ➢ Sadece verilenleri yazar. ➢ Önerme ile ilgisiz ifadeler kullanır veya verileri ve işlemleri rastgele kullanır. ➢ Önermenin karşıtının doğru olduğunu gösterir.

Hazırlanan dereceli puanlama anahtarının ispat yapma becerisi teşhis testine uygunluğunu test etmek amacıyla form, matematik eğitimi alanında lisansüstü eğitim gören 25 öğrenciye sunulmuştur. Bu lisansüstü eğitim öğrencilerine çalışmanın amacı, kapsamı, ölçülmek istenen özellikler ve verilen önermeler için yapılan farklı ispatlar hakkında bir saatlik seminer verilmiştir. Lisansüstü öğrencilerinden dereceli puanlama anahtarını sorulara uygunluğu açısından "uygun-uygun değil" biçiminde değerlendirmeleri istenmiştir. Lisansüstü öğrencilerinden alınan görüşler doğrultusunda her bir soru için uygunluk oranının .56-.92 aralığında olduğu saptanmıştır. Lawshe'ye (1975) göre 20 kişi için bu değer .05 düzeyinde anlamlıdır.

3.7.2. Nicel verilerin analizi

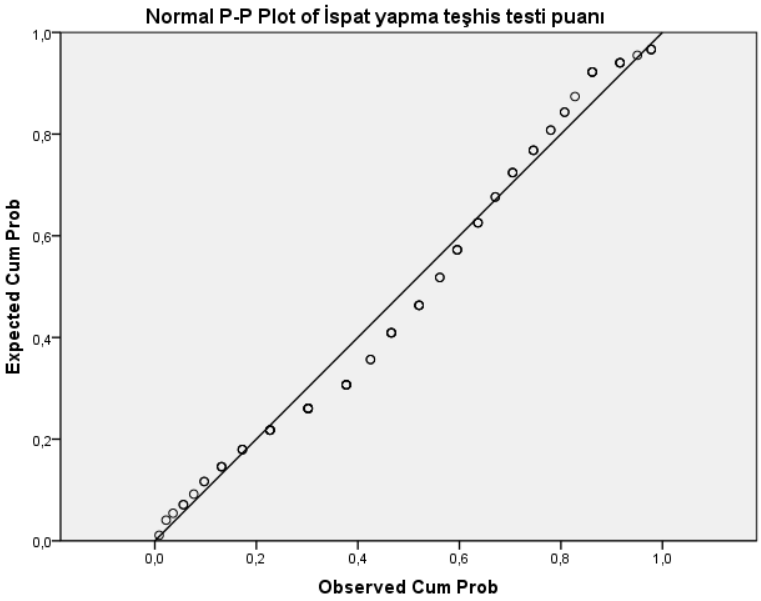
Nicel verilerin analizinde sırasıyla betimsel istatistik ve kestirimsel istatistik yapılmıştır. Betimsel istatistik ile grupların ispat başarı düzeyleri arasındaki genel duruma bakılmış olup; kestirimsel istatistik ile gruplar arası anlamlı farklılık olup olmadığına bakılmıştır. Çalışmada kestirimsel istatistik için kullanılacak analiz türünü belirlemeye yönelik normallik testleri yapılmıştır.

Normallik analizlerinde ilk olarak Kolmogorov-Smirnov testi yapılmıştır. Kolmogorov-Smirnov testinin örneklem sayısının 50 veya üzerinde olduğu durumlarda kullanılması önerilmektedir (Seçer, 2013, s. 24). Test sonuçlarına bakıldığında p=.049 olduğu görülmüştür. Bu durum verilerin normal dağılmadığını göstermiş ancak bu test tek başına normalliğe bakmada yeterli görülmemiştir. Ayrıca değerin .50 civarında olması da bu istatistiğin normallik hakkında yeterince bilgi vermeyeceğini göstermiştir. Normallik göstergesindeki diğer ölçütlerden basıklık ve çarpıklık değerlerine bakıldığında değerlerin ∓ 1 aralığında bulunduğu (çarpıklık .182; basıklık -.758) belirlenmiştir. Ayrıca ortalama ve ortanca değerlerinin birbirine çok yakın olduğu saptanmıştır ($\bar{x} = 16.67, Mdn = 16.00$). Bu değerler aslında verilerin normal dağıldığına işaret etmektedir. Normalliğin bir diğer göstergesi olan histogram grafiği Şekil 3.2'de sunulmuştur.

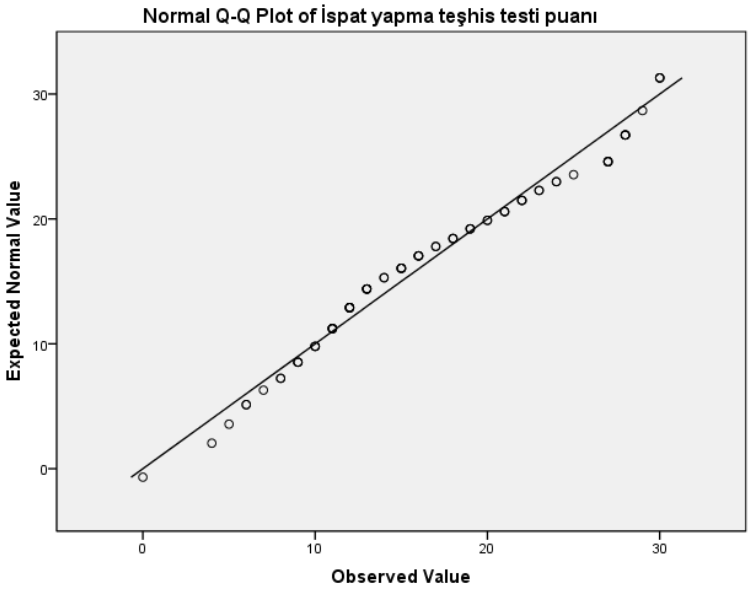


Şekil 3.2. Normallik dağılımı için histogram grafiği

Şekil 3.2'deki histogram grafiğinde verilerin ortalama ve ortanca değerlerinin grafiğin alt ve üst yanına eşit olarak yerleşmesi, verilerin normal dağıldığını göstermektedir. Normalliği teyit etmek amacıyla oluşturulan P-P grafiği Şekil 3.3 ve Q-Q grafiği Şekil 3.4'da sunulmuştur.



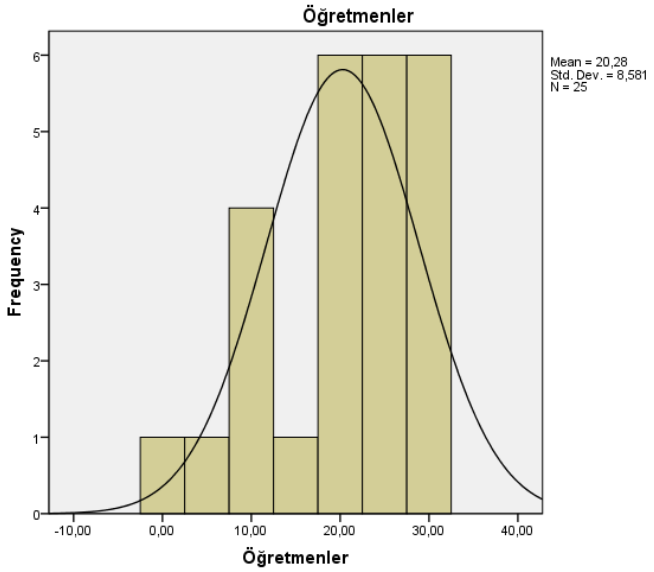
Şekil 3.3. Normal dağılım için oluşturulan P-P grafiği



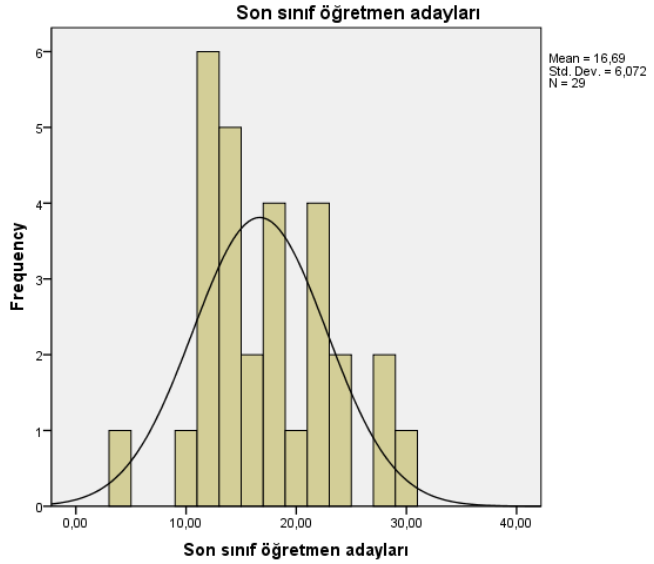
Şekil 3.4. Normal dağılım için oluşturulan Q-Q grafiği

Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 incelendiğinde verilerin normallik doğrusunun üzerinde yoğunlaştığı ve normallikten sapmaların fazla olmadığı görülmektedir. Bu nedenle verilerin normal dağılım gösterdiği söylenebilir.

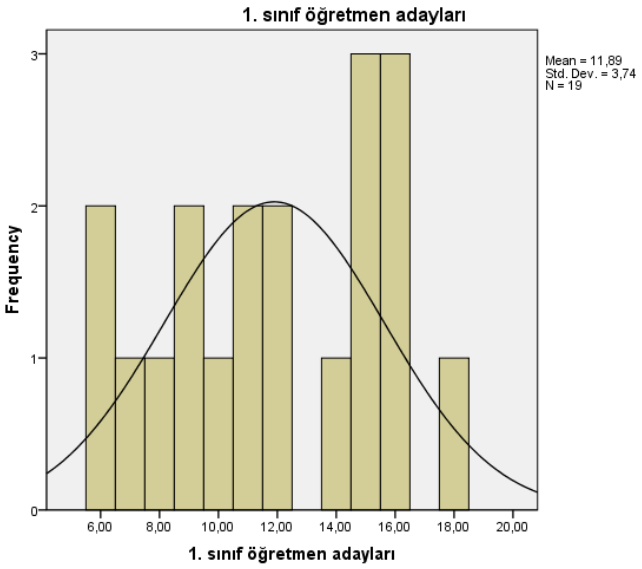
Veriler normal dağılım gösterdiğinden, bir bağımsız değişkenin bir bağımlı değişken üzerine etkisini incelemek amacıyla parametrik testlerden tek yönlü varyans analizi (ANOVA) tercih edilmiştir. Bunun için ANOVA'nın varsayımları sınanmıştır. Varsayımlardan ilki normal dağılımdır (Field, 2009, s. 359) ve bu varsayım yukarıda sınanmıştır. Ancak ANOVA ile ilgili varsayımların sağlanabilmesi için gruplar içi normal dağılımın olması gerekmektedir. Bu bağlamda öğretmenler, son sınıf öğretmen adayları ve 1. sınıf öğretmen adaylarından elde edilen verilerin normalliğine yönelik sınama yapılmıştır. Bunun için öncelikle Shapiro-Wilk testi sonuçlarına bakılmıştır. Shapiro-Wilk testinin örneklem sayısının 50'nin altında olduğu durumlarda kullanılması önerilmektedir (Seçer, 2013, s. 24). Test sonuçlarına bakıldığında değerin öğretmenler için p=.112, son sınıf öğretmen adayları için p=.307 ve 1. sınıf öğretmen adayları için p=.258 olduğu görülmüştür. Bu sonuçlara göre veriler normal dağılım göstermektedir. Ancak bu testler normallik varsayımları için yeterli değildir. Basıklık ve çarpıklık değerleri incelendiğinde 1. sınıf öğretmen adaylarının basıklık değeri hariç, diğer değerlerin ∓ 1 aralığında olduğu belirlenmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının ispat yapma teşhis testi için basıklık değeri -1.228 olarak belirlenmiştir. Field (2009, s. 139) böyle bir durumda dağılımın normalliğine karar vermek için basıklık değerlerinin standartlaştırılması gerektiğini belirtmiştir. Bu nedenle basıklık değeri, basıklığın standart hatası değerine bölünerek standartlaştırılmış ve basıklık değeri 1.211 olarak hesaplanmıştır. Değerin $p < .05$ için z-puanı karşılığı 1.96 olarak tespit edilmiştir (Field, 2009, s. 800). Hesaplanan değer bu değerden küçük olduğu için verilerin basıklık değerinin normal olduğu söylenebilir. Ayrıca ortalama ve ortanca değerlerinin de birbirine çok yakın olduğu saptanmıştır ($\bar{x}_{Ö} = 20.28, Mdn_{Ö} = 21.00$; $\bar{x}_{ÖAS} = 16.69, Mdn_{ÖAS} = 16.00$; $\bar{x}_{ÖA1} = 11.90, Mdn_{ÖA1} = 12.00$). Bu değerler verilerin normal dağıldığına işaret etmektedir. Normalliğin bir diğer göstergesi olan histogram grafikleri ise, öğretmenler için Şekil 3.5'de, son sınıf öğretmen adayları için Şekil 3.6'de ve 1. sınıf öğretmen adayları için Şekil 3.7'de sunulmuştur.



Şekil 3.5. Öğretmenlerin puanlarının dağılımı için histogram grafiği

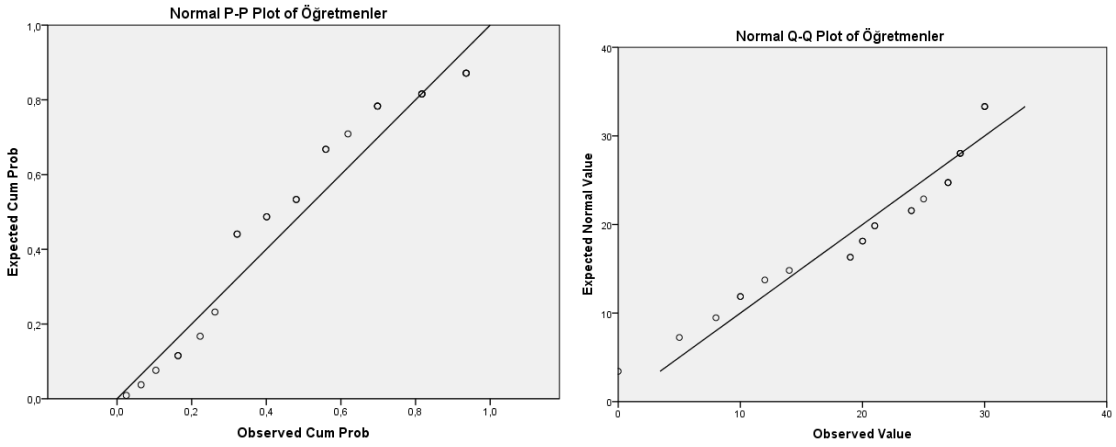


Şekil 3.6. Son sınıf öğretmen adaylarının puanlarının dağılımı için histogram grafiği

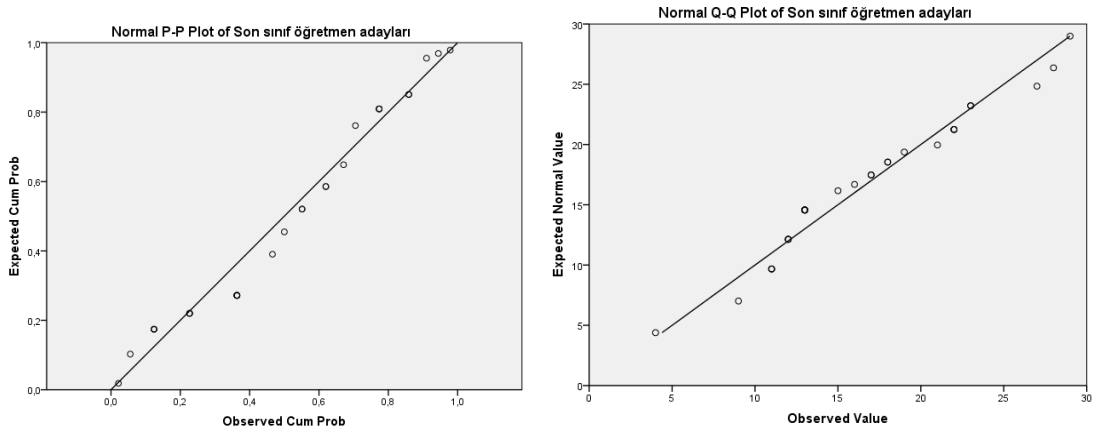


Şekil 3.7. 1. sınıf öğretmen adaylarının puanlarının dağılımı için histogram grafiği

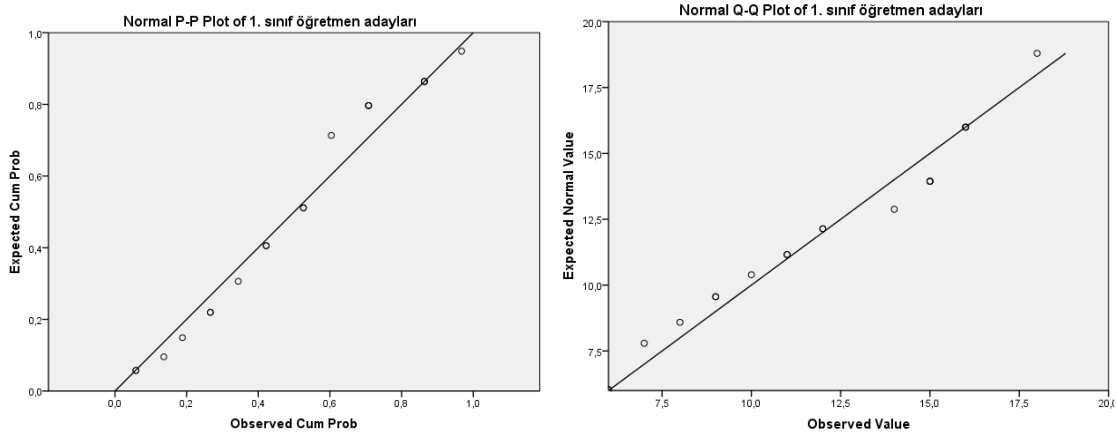
Şekil 3.5'deki histogram grafiğine bakıldığında öğretmenlerin puanları, Şekil 3.6'dakine bakıldığında son sınıf öğretmen adaylarının puanları ve Şekil 3.7'dakine bakıldığında 1. sınıf öğretmen adaylarının puanları ortalama ve ortanca değerlerinin grafiğin alt ve üst yanına eşit olarak yerleştiği tespit edilmiş ve bu nedenle verilerin normal dağılım gösterdiği anlaşılmaktadır. Normalliği teyit etmek amacıyla oluşturulan P-P ve Q-Q grafikleri öğretmenler için Şekil 3.8'de, son sınıf öğretmen adayları için Şekil 3.9'da ve 1. sınıf öğretmen adayları için Şekil 3.10'da sunulmuştur.



Şekil 3.8. Öğretmenlerin puanlarının dağılımı için oluşturulan P-P ve Q-Q grafikleri



Şekil 3.9. Son sınıf öğretmen adaylarının puanlarının dağılımı için oluşturulan P-P ve Q-Q grafikleri



Şekil 3.10. 1. sınıf öğretmen adaylarının puanlarının dağılımı için oluşturulan P-P ve Q-Q grafikleri

Şekil 3.8 incelendiğinde öğretmenlerden elde edilen puanların, Şekil 3.9 incelendiğinde son sınıf öğretmen adaylarından elde edilen puanların ve Şekil 3.10 incelendiğinde 1. sınıf öğretmen adaylarından elde edilen puanların normallik doğrularının üzerinde yoğunlaştığı ve normallikten sapmaların fazla olmadığı görülmektedir. Bu nedenle öğretmenlerden, son sınıf öğretmen adaylarından ve 1. sınıf öğretmen adaylarından elde edilen verilerin normal dağılım gösterdiği söylenebilir.

ANOVA'nın varsayımlarından diğeri ise varyansların homojenliğidir (Field, 2009, s. 359; Seçer, 2013, s. 51). Varyansların homojenliği testi sonuçlarına göre, varyansların homojen olmadığı tespit edilmiştir ($p < .05$). Varsayım sağlanmamış

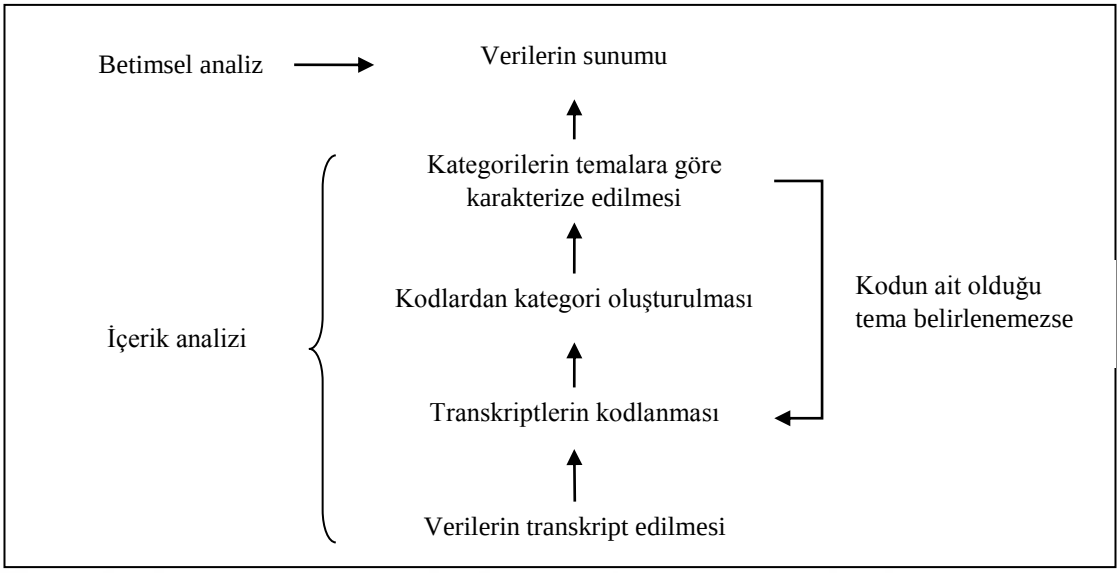
olmasına karşın Field (2009, s. 360) ANOVA'nın kaba (robust) bir test olduğunu ve varyanslar homojen dağılmasa da yapılabileceğini belirtmiştir.

Bir diğer varsayım ise örneklemlerin bağımsızlığıdır (Field, 2009, s. 359; Seçer, 2013, s. 51). Veriler farklı örneklemlerden toplandığı için verilerin bağımsız olduğu açıktır.

Tüm varsayımlar yerine getirilmiş olup, kestirimsel istatistik için tek yönlü varyans analizi kullanılmıştır. Anlamlı farklılık bulunan gruplar arasında ise varyansların eşit olmadığı durumda kullanılan Games-Howell testi kullanılmıştır. Bu test küçük örneklemli gruplar arasında yapılan testler içinde en güçlü olanıdır (Field, 2009, s. 374).

3.7.3. Nitel verilerin analizi

Çalışmada elde edilen nitel verilere betimsel analiz ve içerik analizi uygulanmıştır. Bu süreçte ilk olarak sesli düşünme protokolünde toplanan veriler kodlanmıştır. Kodlamalar matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesine sunulmuş ve ondan "uygun/uygun değil" şeklinde görüş belirtmesi istenmiştir. Öğretim üyesi araştırmacının belirttiği verilerin %40'ı için bu değerlendirme işlemini yapmıştır. Ardından kodlayıcılar arası güvenirlik Cohen Kappa formülü ile hesaplanmıştır. Kodlayıcılar arası güvenirlik .84 olarak bulunmuştur. "Uygun değil" biçiminde ifade edilen kodlarda araştırmacı ve uzman bir araya gelmiş; kodun kalması, değiştirilmesi veya çıkarılması durumlarını tartışmışlardır ve bir karara varmışlardır. Daha sonra yapılan kodlamalar sonucunda kategoriler oluşturulmuştur. Sesli düşünme protokolünün kodlanmasının ardından gözlem formları ve etkinlik kartları (doküman) incelenerek sesli düşünme protokolünde tespit edilemeyen verilerden ekstra kodlama yapılmıştır. Veri analizi süreci Şekil 3.11'de sunulmuştur.



Şekil 3.11. Veri analizinin şematik açıklaması

Şekil 3.11'de görüldüğü gibi bir becerinin temalarla uyumuna (bilişsel ya da üst bilişsel olduğuna) karar verilemediği durumlarda kodlama aşamasına tekrar dönülerek, katılımcının görüşü incelenmiştir. İnceleme sonrasında katılımcının beceriyi "bilişsel" mi? Yoksa "üst bilişsel" mi sergilediğine karar verilmiştir. Akın (2013, s. 123) bilişsel ve üst bilişsel beceri ayrımının yapılmasının oldukça güç olduğunu ifade etmiştir. Ancak bu becerileri ayırt etmede belli ayırt edici özellikler vardır. Bu ayırt ediciliği bilgi ve düzenleme bağlamında ayırıp incelemek en doğrusu olacaktır. Çünkü biliş/üst biliş ayrımında ağırlıklı olarak bu ayrım üzerinde durulmuştur (Brown, 1987; Schraw, 1998; Woolfolk-Hoy, 2015, s. 551). Üst biliş bilgi bağlamında değerlendirildiğinde biliş/üst biliş ayrımında beceri otomatikleşmiş ve bilinçsiz gerçekleşiyorsa bilişsel; kontrollü, dikkat isteyen ve farkındalık gerektiriyorsa üst bilişseldir (Akın, 2013, s. 123). Üst biliş düzenleme bağlamında değerlendirildiğinde ise bilişle yapılan becerileri yürütmeye yardımcı olacak (planlama, izleme, tahmin, kontrol gibi), kolaylaştıracak (farkındalık gibi) beceriler üst biliş bağlamında değerlendirilmiştir (Woolfolk-Hoy, 2015, s. 552). Bu becerileri günlük yaşamdan birer örnekle açıklayacak olursak; bir kişinin araç kullanmayı yeni öğrendiğinde direksiyona yaklaşarak yola dikkatle bakıp araç kullanması bilgi bağlamında üst bilişsel beceri iken; bir süre sonra araç kullanmayı tam olarak öğrendikten sonra vites geçişlerinin otomatikleşmesi bilişsel beceridir. Bu bireyin vites geçişlerinde vitese baktığında kaza yapabileceğini düşünerek vites geçişlerinde vitese bakmamaya çalışması ise düzenleme bağlamında üst bilişsel

beceridir. Bu durumu matematiksel ispata yönelik bir örnekle açıklamak gerekirse, bir kişinin ispatı tamamlamak için gerekli olan ispat yöntemleri bilgisine sahip olması bilgi bağlamında bilişsel beceri; ispata nereden başlaması gerektiğine dair bir çıkarımda bulunması yani ispatın anahtar kavramını belirleyebilmesi ise üst bilişsel beceridir. Düzenleme bağlamında değerlendirildiğinde ise bireyin ispat sürecine dair "İspata nasıl başlamalıyım?" gibi sorular sorması veya ispat sürecini planlaması üst bilişsel beceridir.

3.7.4. Nicel ve nitel verilerin ilişkilendirilmesi

Çalışmada nicel verilerin nitel verilerle ilişkilendirilmesi iki durumda gerçekleşmiştir. Bunlardan ilki, nitel araştırmanın katılımcılarının seçilmesidir ki bu ilişkilendirme çalışma grubu bölümünde (bkz. s. 42) açıklanmıştır. İkincisi ise katılımcıların ispat yapma başarı düzeylerine ve üst bilişsel beceri türlerine göre karşılaştırmalarının yapılmasıdır. Bu aşamada matematik öğretmenlerinin, son sınıf matematik öğretmen adaylarının ve 1. sınıf matematik öğretmen adaylarının başarılarının nicel karşılaştırması ile üst bilişsel becerilerinin karşılaştırılması beraber incelenmiştir. Karşılaştırmada nicel veri için başarılar arasında varyans analizi, süreler arasında Kruskall-Wallis testi ile nitel veri için içerik analizi kullanılmıştır.

3.8. Geçerlik ve Güvenirlik

Çalışmanın geçerliği ve güvenirliği için dış geçerlik, iç geçerlik, dış güvenirlik ve iç güvenirlik sağlanmıştır. Dış geçerlik, çalışmanın aktarılabilirliği, transfer edilebilirliği ya da uygunluğu anlamında kullanılmaktadır. Çalışmada elde edilen sonuçların tekrarlanabilirliği ya da ne derece genellenebilirliği ile ilgilidir (Cho ve Trent, 2006; Miles ve Huberman, 2015, s. 279). Dış geçerlik örneklemin iyi tanımlanması ve farklı veri toplama araçlarıyla toplanan araştırma verilerinin doğrudan alıntılarla sunulması yoluyla sağlanabilir (Patton, 2014, s. 545). İç geçerlik çalışmanın kendi içerisindeki tutarlığı, inanırlığı ya da özgünlüğü anlamında kullanılmaktadır (Miles ve Huberman, 2015, s. 278). İç geçerliğin sağlanmasında veri toplama araçlarının çeşitlenmesi (Metodolojik çeşitleme), katılımcı kontrolü, veri toplama sürecinin uygunluğu ve uzman incelemesi (Araştırmacı çeşitlemesi) yapılabilir (Güler, Halıcıoğlu ve Taşğın, 2013, s. 338; Merriam, 2013, s. 207). Dış güvenirlik ise araştırma

bulgularının mümkün olduğunca araştırmacının görüşlerinden bağımsız tutulması veya araştırmacının görüşleriyle sınırlandırılmaması olarak açıklanabilir. Bu kavrama çalışmanın nesnelliği de denilebilir (Gibson ve Brown, 2009, s. 193). İç güvenirlik araştırma bulgularının ve veri analizinin güvenilebilirliği ve çalışmanın kendi içindeki tutarlılığını ifade eder. İç güvenirliği yükseltmenin yolları olarak uzman görüşü alma, kodlamaları başka araştırmacıya kontrol ettirme, veri toplama süreci-veri toplama araçları-yorumların tutarlılığını sağlamadır (Gibson ve Brown, 2009, s. 193; Merriam, 2013, s. 213).

Bu çalışmada dış geçerliği sağlamak için örneklem detaylı biçimde tanımlanmış ve katılımcı özellikleri tüm detaylarıyla ortaya konulmuştur. Bunun yanı sıra veri toplamada farklı veri toplama araçları bir arada kullanılmış ve katılımcıların görüşleri ile etkinlik kartlarından görsellere yer verilmiştir. İç geçerliğin sağlanmasında üç yöntem kullanılmıştır. Bunların ilki metodolojik çeşitleme yapılmasıdır. Çalışmada sesli düşünme protokolü, gözlem ve etkinlik kartı birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Bu şekilde üç veri toplama aracının örtüşen ve farklı olan kısımları ortaya konulmaya çalışılmıştır. İkincisi katılımcı doğrulamasıdır. Bunun için kodlama sonrasında katılımcılarla tekrar görüşülerek sesli düşünme protokolünde kurduğu cümlelerden çıkarılan kodlar kendilerine sunularak doğruluğunu uygun/ uygun değil şeklinde değerlendirmeleri istenmiştir. Katılımcıların tamamı kodlamaların uygun olduğu yönünde görüş belirtmişlerdir. Üçüncüsü araştırmacı çeşitlemesidir. Bunun için veri toplama süreci ayrıntılı biçimde betimlenmiş ve çalışma sürecinin tamamı alanında uzman bir öğretim üyesine kontrol ettirilerek ilerlenmiştir. Çalışmanın dış güvenirliğini sağlamak amacıyla veri toplama sürecinde yapılan görüşmeler ses kayıt cihazıyla kayıt altına alınmıştır. Ayrıca doğrudan aktarmaların sunumunda görüşme süresi ve transkriptte ifadenin geçtiği satırın numarasına yer verilmiştir. İç güvenirliği sağlamak için araştırma problemine uygun araştırma modeli kullanılmış, seçilen araştırma modeline uygun olarak katılımcılar ve veri toplama araçları belirlenmiştir. Toplanan veriler de araştırma problemine uygun olarak analiz edilmiştir. Ayrıca çalışmanın genellenebilirliğini arttırmak amacıyla karma araştırma yöntemi belirlenmiştir. Buna rağmen araştırma sonuçlarında genellemeler yapılmamış sadece analitik genellemelere yer verilmiştir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR

Matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarından elde edilen verilerin sunumunda ilk olarak nicel verilerin sunumu yapılmış ardından nitel veriler soru bazlı olarak sunulmuştur. Sunumlarda ilk olarak sorulara yönelik betimsel istatistik verilerine yer verilmiştir. Devamında sesli düşünme protokolünden, etkinlik kartlarından ve gözlemlerden elde edilen veriler bilişsel ve üst bilişsel temalarına göre sunulmuştur. Temalara göre sunumlarda, kategori ve kodlara yönelik doğrudan alıntılara yer verilerek, bu veriler gözlem ve etkinlik kartlarından kesitlerle desteklenmiştir. Yapılan nitel sunumun ardından kod ve kategoriler ile öğretmenlere ve öğretmen adaylarına göre dağılımları içeren tablolar sunulmuştur. Kodların sıklıklarına göre gruplar arasında dikkat çekici farklılıklar olduğunda Ki-Kare testi yapılarak kodların gruplarla (öğretmen, son sınıf öğretmen adayı, birinci sınıf öğretmen adayı) veya düzeylerle (İyi, orta, düşük) bağlantılı olup olmadığı incelenmiştir.

4.1. Nicel Verilerden Elde Edilen Bulgular

4.1.1. İspat yapma becerisi teşhis testinden elde edilen istatistiksel bulgular

Çalışmanın bu bölümünde nicel verilerden elde edilen bulgulara göre sunum yapılmıştır. Betimsel istatistik bulguları Tablo 4.1'de sunulmuştur.

Tablo 4.1.

İspat Yapma Teşhis Testi Puanlarına Yönelik Betimsel İstatistik Sonuçları

	N	$\bar{X}$	SS	Alt ve Üst Sınır
Öğretmen	25	20.28	8.58	[16.74, 23.82]
Son sınıf öğretmen adayı	29	16.69	6.07	[14.38, 19.00]
1. sınıf öğretmen adayı	19	11.89	3.74	[10.09, 13.70]
Toplam	73	16.67	7.27	[14.97, 18.37]

Tablo 4.1 incelendiğinde ortalama puanların en yüksek olduğu grubun öğretmenler ($\bar{X} = 20.28$), sonra son sınıf öğretmen adayları ($\bar{X} = 16.69$) ve en düşük ortalamanın da 1. sınıf öğretmen adaylarında ($\bar{X} = 11.89$) olduğu belirlenmiştir. Varyans analizi sonuçları Tablo 4.2'de sunulmuştur.

Tablo 4.2.

Varyans Analizi Sonuçları

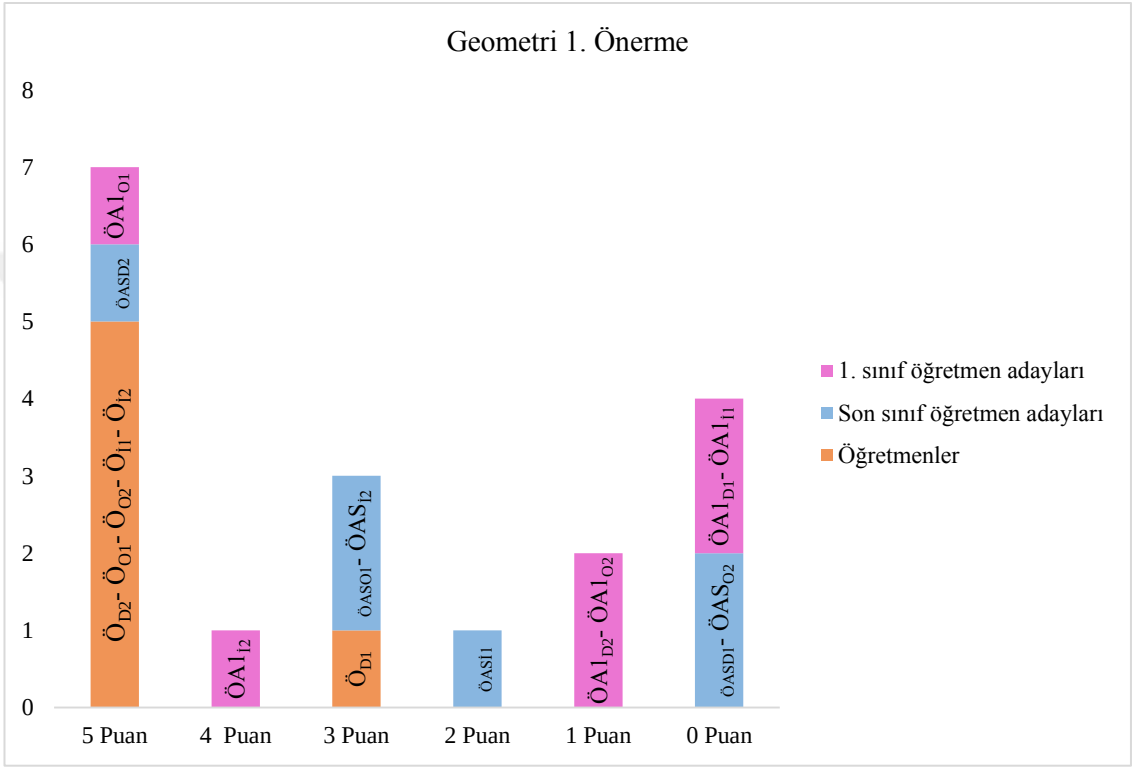
	Kareler toplamı	sd	Kareler ortalaması	F	p	η^2	Anlamlı fark
Gruplar arası	759.073	2	379.54				Ö-$ÖA_1$
Grup içi	3051.036	70	43.59	8.708	.000	.45	ÖAS-$ÖA_1$
Toplam	3810.110	72					

İspat yapma teşhis testi puanlarının gruplara göre farklılaşıp farklılaşmadığını ortaya çıkarmaya yönelik yapılan tek faktörlü varyans analizi sonucunda gruplar arasındaki farkın anlamlı olduğu belirlenmiştir ($F(2,70) = 8.71, p < .05, \eta^2 = .45$). Games-Howell testi sonucunda öğretmenler ile 1. sınıf öğretmen adayları ve son sınıf öğretmen adayları ile 1. sınıf öğretmen adayları arasındaki farklılığın anlamlı düzeyde olduğu belirlenmiştir. Buna göre hem öğretmenlerin hem de son sınıf öğretmen adaylarının ispat yapma teşhis testi başarı puanı ortalamalarının 1. sınıf öğretmen adaylarından anlamlı düzeyde yüksek olduğu; öğretmenler ile son sınıf öğretmen adayları arasındaki farklılığın ise anlamlı düzeyde olmadığı belirlenmiştir.

4.1.2. Birinci etkinlik kartındaki sorunun istatistiksel bulguları

Çalışmanın bu bölümünde çalışmaya katılan matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının birinci soruya yönelik çözümleri veri analizinde açıklanan ölçütlere göre değerlendirilmiştir. Değerlendirme 5-li derecelendirmeye dayalı olarak yürütülmüş olup cevaplar sadece sonuca yönelik değerlendirilmemiş, ispat süreci göz önünde bulundurularak derecelendirme yapılmıştır. Katılımcılardan alınan cevaplar doğrultusunda her bir puan için frekans değerleri ile soruyu çözemeyen ya da çözemeyeceğine karar veren katılımcıların karar verme süreleri değerlendirilmiştir. Karar verme sürelerinin incelenmesinde betimsel istatistik değerleri sunulmuş olup,

öğretmenler, son sınıf öğretmen adayları ve 1. sınıf öğretmen adayları arasında anlamlı farklılık olup olmadığına Kruskal-Wallis H testi ile bakılmıştır. Puanlamalar Şekil 4.1' deki frekans grafiğinde sunularak öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının karşılaştırılması yapılmıştır. Grafikte her bir sütunda doğru yapan katılımcıların kod isimleri yazılarak katılımcıların tamamının görülmesi amaçlanmıştır.



Şekil 4.1. Geometrinin birinci önermesinde alınan puanlara ait betimsel istatistik grafiği

Şekil 4.1 incelendiğinde çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adaylarının yedisinin verilen önermeyi tam olarak -eksiksiz biçimde yapabildiği- ve yeterince açıklayabildiği belirlenmiştir. Önermeyi tam olarak ispatlayan yani 5 puan alan katılımcılardan beşinin öğretmen, birinin son sınıf öğretmen adayı ve birinin de 1. sınıf öğretmen adayı olduğu görülmektedir. Soruda 4 puan alan öğretmen ve son sınıf öğretmen adayı bulunmazken sadece bir 1. sınıf öğretmen adayının 4 puan aldığı saptanmıştır. 3 puan alanlar incelendiğinde ise birinin öğretmen ikisinin son sınıf öğretmen adayı olduğu görülmektedir. Bu grupta 1. sınıf öğretmen adayı bulunmamaktadır. 2 puan alan öğretmen ve 1. sınıf öğretmen adayı bulunmazken; son sınıf öğretmen adaylarından birinin bu grupta yer aldığı söylenebilir. 1 puan alan

katılımcılar ise, son sınıftan iki öğretmen adayıdır. Bu soruda 0 puan alan öğretmen bulunmamaktadır. İki son sınıf iki de 1. sınıf öğretmen adayının sorudan 0 puan aldığı grafikten görülmektedir.

Öğretmenlerin puanları incelendiğinde sadece düşük puan ortalamasına sahip olan $Ö_{D1}$ öğretmeninin önermeyi tam olarak ispatlayamadığı bunun dışındaki tüm öğretmenlerin önermeyi ispatlayabildiği görülmektedir. Öğretmen adaylarına bakıldığında ise düşük ve yüksek kategorisinde yer alan öğretmen adaylarının soruyu cevaplama puanlarının sistematik değil rastgele dağıldığı söylenebilir. Önermeyi tam olarak ispatlayan katılımcıların tamamının sentetik ispat yaptığı görülmüştür. Çalışmaya katılan öğretmenlerin tamamının, ispatının geçerli olduğunu düşündükleri saptanmıştır. Öğretmen adaylarının birinci önermenin ispatını yapamayacaklarına karar verme sürelerine dair betimsel istatistik sonuçları Tablo 4.3'de sunulmuştur.

Tablo 4.3.

Öğretmenlerin ve Öğretmen Adaylarının Geometrinin 1. Önermesinde İspatı Yapamayacaklarına Karar Verme Süreleri

	Öğretmenler						**Son Sınıf Öğretmen Adayları**						**1. Sınıf Öğretmen Adayları**					
	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
SÜRE	✓	✓	✓	✓	✓	✓	13.54	✓	✓	00.05	✓	✓	05.33	03.14	✓	04.40	01.35	12.10

✓ **Soruyu Doğru Yaptığını Düşünen Katılımcıyı İfade Etmektedir.**

Tablo 4.3 incelendiğinde öğretmenlerin tamamının ispatı doğru yapabildiğini düşündüğü görülmektedir. Son sınıf öğretmen adaylarından dördü önermeyi doğru olarak ispatlayabildiğini düşünürken, 1. sınıf öğretmen adaylarından sadece biri önermeyi tam olarak ispatlayabildiğini düşünmektedir. Önermenin ispatını yapamayacağını düşünen son sınıf iki öğretmen adayının ispatı yapamayacağına karar verme süreleri ortalaması 7 dakika olarak hesaplanırken; 1. sınıf öğretmen adaylarının 5 dakika olarak hesaplanmıştır. Sürelerin tamamı saniyeye çevrilerek yapılan Kruskal-Wallis H testi sonuçları Tablo 4.4'de sunulmuştur.

Tablo 4.4.

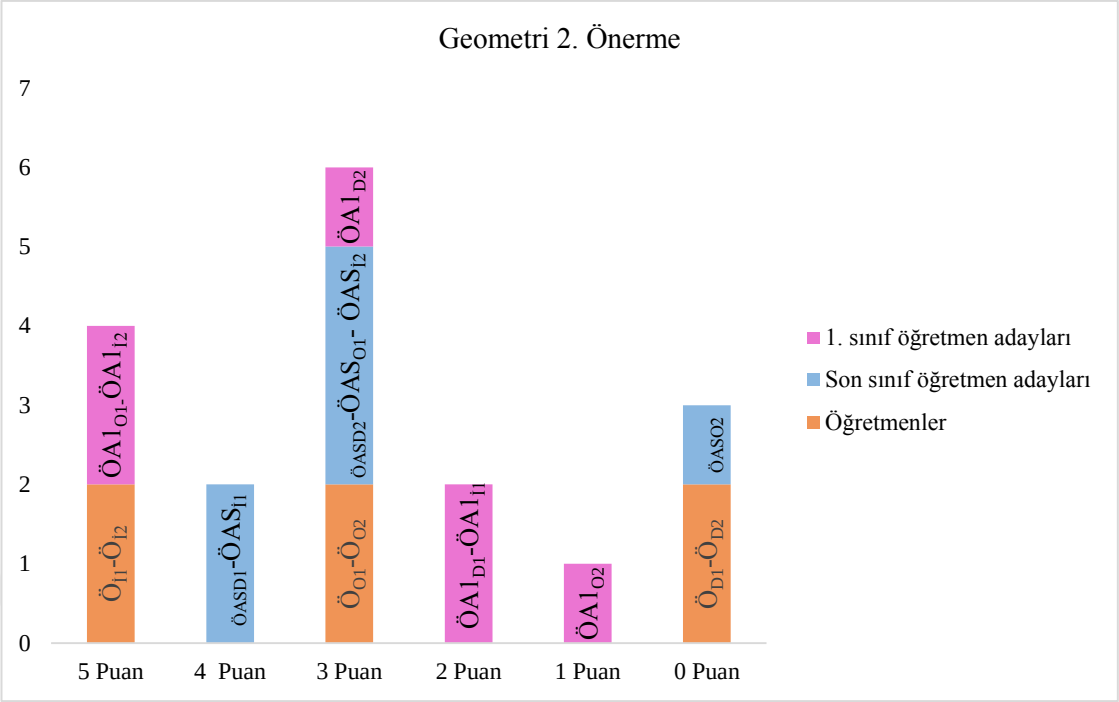
Birinci Soruda Elde Edilen Sürelere İlişkin Kruskal-Wallis H Testi Sonuçları

Gruplar	n	$Sıra\ ort.$	sd	X^2	p
Öğretmen	6	6.00			
Son Sınıf Öğretmen Adayı	6	9.00	2	7.762	.021
1. Sınıf Öğretmen Adayı	6	13.50			

Öğretmenlerin, son sınıf öğretmen adaylarının ve 1. sınıf öğretmen adaylarının ispatı yapamayacaklarına karar verme sürelerini karşılaştırmak amacıyla yapılan Kruskal-Wallis H testi sonucunda gruplar arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olduğu belirlenmiştir $({X^2}_{(2)} = 7.76, p < .05)$. Buna göre karar verme sürelerinin öğretmenler, son sınıf öğretmen adayları ve 1. sınıf öğretmen adaylarına göre farklılık gösterdiği söylenebilir. Ayrıca Jonckheere-Terpstra testi ile değişimin öğretmenlerden 1. sınıf öğretmen adaylarına doğru sistemli bir şekilde ilerlediği saptanmıştır. Hangi gruplar arasında farklılık olup olmadığını belirlemek için yapılan Mann-Whitney testinde öğretmenler ile 1. sınıf öğretmen adayları arasındaki farklılığın anlamlı düzeyde olduğu belirlenirken $(U = 3.00, z = -2.678, p < .05)$; diğer gruplar arasındaki farklılığın anlamlı düzeyde olmadığı tespit edilmiştir.

4.1.3. İkinci etkinlik kartındaki sorunun istatistiksel bulguları

Bu bölümde katılımcıların ikinci soruya yönelik çözümleri 5-li derecelendirmeye dayalı olarak değerlendirilmiştir. Öğretmenlerden ve öğretmen adaylarından alınan cevaplar doğrultusunda her bir puanın frekansı ve o puanda yer alan katılımcılar Şekil 4.2'deki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Geometrinin ikinci önermesinde alınan puanlara ait betimsel istatistik grafiği

Şekil 4.2 incelendiğinde çalışmaya katılanlardan dördünün verilen önermeyi tam olarak, eksiksiz biçimde yapabildiği ve yeterince açıklayabildiği görülmektedir. Önermeyi tam olarak yapanlardan ikisinin öğretmen, ikisinin son sınıf öğretmen adayı olduğu görülmektedir. Önermeyi tam olarak ispatlayabilen 1. sınıf öğretmen adayı bulunmamaktadır. Soruda 4 puan alan öğretmen ve 1. sınıf öğretmen adayı bulunmazken iki son sınıf öğretmen adayının 4 puan aldığı saptanmıştır. 3 puan frekansı en yüksek olan puan kategorisidir. Bu kategori incelendiğinde üç son sınıf öğretmen adayı, iki öğretmen ve bir 1. sınıf öğretmen adayı olduğu görülmektedir. 2 puan ve 1 puan alan öğretmen ve son sınıf öğretmen adayı bulunmazken; 1. sınıf öğretmen adaylarından ikisinin 2 puan, birinin 1 puan aldığı görülmektedir. 0 puan alan 1. sınıf öğretmen adayı bulunmazken; iki öğretmen ve bir son sınıf öğretmen adayının bu kategoride yer aldığı belirlenmiştir. Öğretmenlerin puanları incelendiğinde başarı düzeylerine göre iyi grubunda yer alan öğretmenlerin tam puan aldığı, orta grubunda yer alan öğretmenlerin 3 puan aldığı ve düşük grubunda yer alan öğretmenlerin 0 puan aldığı görülmektedir. Öğretmen adayları için ise sistematik bir dağılım olmadığı anlaşılmaktadır. Soruyu eksiksiz yapanların üçünün iyi, birinin orta başarı düzeyinde olması ve soruda 0 puan alanların ikisinin düşük, birinin orta başarı düzeyinde olması dikkat çekicidir.

Puanlara göre dağılımdan sonra, soruyu çözemeyen ya da çözemeyeceğine karar veren katılımcıların karar verme süreleri değerlendirilmiştir. Karar verme sürelerinin incelenmesinde ilk olarak betimsel istatistik değerleri sunulmuştur. Ardından öğretmenler, son sınıf öğretmen adayları ve 1. sınıf öğretmen adayları arasında anlamlı farklılık olup olmadığına Kruskal-Wallis H testi ile bakılmıştır. Öğretmen adaylarının önermenin ispatını yapamayacaklarına karar verme sürelerine dair betimsel istatistik sonuçları Tablo 4.5'de sunulmuştur.

Tablo 4.5.

Öğretmenlerin ve Öğretmen Adaylarının İkinci Önermenin İspatını Yapamayacaklarına Karar Verme Süreleri

	Öğretmenler						**Son Sınıf Öğretmen Adayları**						**1.Sınıf Öğretmen Adayları**					
	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
SÜRE	03.44	00.59	07.25	08.20	✓	✓	14.04	✓	06.57	00.05	06.05	07.05	04.17	07.12	✓	04.12	07.53	✓

✓ **Soruyu doğru yaptığını düşünen öğretmen veya öğretmen adayını ifade etmektedir.**

Tablo 4.5 incelendiğinde öğretmenlerin ikisinin, son sınıf öğretmen adaylarının birinin ve 1. sınıf öğretmen adaylarının ikisinin ispatı doğru yaptığını düşündüğü belirlenmiştir. İspatı yapamayacağına karar veren öğretmenlerin karar verme süreleri ortalaması 5 dakika; son sınıf öğretmen adaylarının karar verme süreleri ortalaması 7 dakika ve 1. Sınıf öğretmen adaylarının karar verme süreleri ortalaması 6 dakika olarak hesaplanmıştır. Sürelerin tamamı saniyeye çevrilerek yapılan Kruskal-Wallis H testi sonuçları Tablo 4.6'da sunulmuştur.

Tablo 4.6.

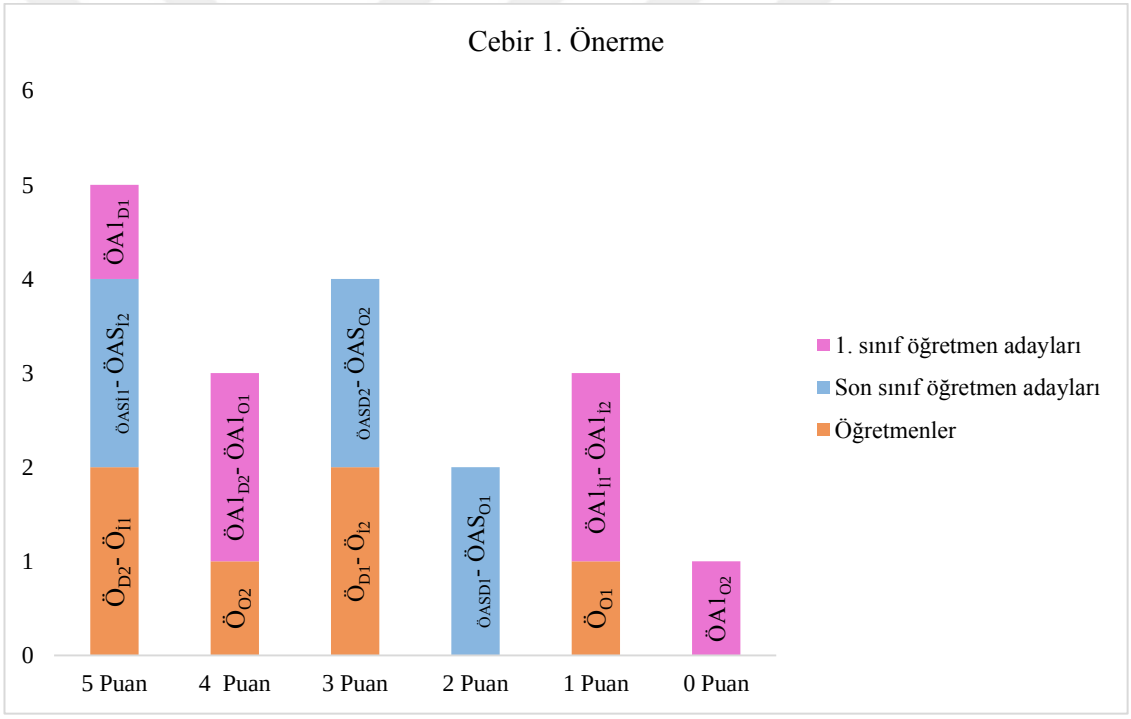
Geometrinin İkinci Önermesinde Elde Edilen Sürelere İlişkin Kruskal-Wallis H Testi Sonuçları

Gruplar	n	$Sıra\ ort.$	sd	X^2	p
Öğretmen	6	8.83			
Son Sınıf Öğretmen Adayı	6	10.50	2	.334	.846
1. Sınıf Öğretmen Adayı	6	9.17			

Öğretmenlerin, son sınıf öğretmen adaylarının ve 1. sınıf öğretmen adaylarının ispatı yapamayacaklarına karar verme sürelerini karşılaştırmak amacıyla yapılan Kruskal-Wallis H testi sonucunda gruplar arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olmadığı belirlenmiştir ($X^2_{(2)} = .33, p > .05$). Buna göre karar verme sürelerinin öğretmenler, son sınıf öğretmen adayları ve 1. sınıf öğretmen adaylarına göre farklılık göstermediği söylenebilir.

4.1.4. Üçüncü etkinlik kartındaki sorunun istatistiksel bulguları

Çalışmanın üçüncü etkinlik kartındaki önermesinde katılımcıların sorudan aldıkları puanların dağılımı Şekil 4.3'deki grafikte sunulmuştur.



Şekil 4.3. Cebirin 1. önermesinde alınan puanlara ait betimsel istatistik grafiği

Şekil 4.3 incelendiğinde çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adaylarının beşinin verilen önermeyi tam olarak, eksiksiz biçimde yapabildiği ve yeterince açıklayabildiği belirlenmiştir. Önermeyi tam olarak yapanlardan ikisinin öğretmen, ikisinin son sınıf öğretmen adayı ve 1'inin de birinci sınıf öğretmen adayı olduğu görülmektedir. Soruda 4 puan alan son sınıf öğretmen adayı bulunmazken bir öğretmen ve iki 1. sınıf öğretmen adayı vardır. Katılımcılardan 3 puan alanlar incelendiğinde, 1.

sınıf öğretmen adayı bulunmazken ikişer öğretmen ve son sınıf öğretmen adayı bulunmaktadır. 2 puan alan öğretmen ve birinci sınıf öğretmen adayı bulunmazken; son sınıf öğretmen adaylarından ikisinin bu grupta yer aldığı söylenebilir. 1 puan kategorisinde ise son sınıf öğretmen adayı bulunmazken bir öğretmen ve iki 1. sınıf öğretmen adayı bulunmaktadır. Bu soruda 0 puan alan öğretmen ve son sınıf öğretmen adayı bulunmamaktadır. Bir son sınıf öğretmen adayının sorudan 0 puan aldığı görülmektedir.

Öğretmen adaylarının önermenin ispatını yapamayacaklarına karar verme sürelerine dair betimsel istatistik sonuçları Tablo 4.7'de sunulmuştur.

Tablo 4.7.

Öğretmenlerin ve Öğretmen Adaylarının Cebir 1. Önermenin İspatı Yapamayacaklarına Karar Verme Süreleri

	Öğretmenler						**Son Sınıf Öğretmen Adayları**						**1. Sınıf Öğretmen Adayları**					
	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$ÖA1_{İ2}$
SÜRE	↘	↘	04.30	↘	↘	↘	↘	08.52	07.07	04.59	↘	↘	↘	05.34	03.52	↘	↘	↘

✓ **Soruyu doğru yaptığını düşünen öğretmen veya öğretmen adayını ifade etmektedir.**

Tablo 4.7 incelendiğinde Çalışmaya katılan öğretmenlerden $Ö_{O1}$'in; son sınıf öğretmen adaylarından $ÖAS_{D2}$, $ÖAS_{O1}$ ve $ÖAS_{O2}$'nin; 1. sınıf öğretmen adaylarından ise $ÖA1_{D2}$ ve $ÖA1_{O1}$'in ispatı tamamlayamadıklarını düşündükleri anlaşılmaktadır. Bunların dışındaki katılımcıların tamamının ispatının geçerli olduğunu düşündükleri saptanmıştır. Önermenin ispatını yapamayacağını düşünen öğretmenin ispatı yapamayacağına karar verme süresi yaklaşık 5 dakika; son sınıf üç öğretmen adayının ispatı yapamayacağına karar verme süreleri ortalaması 7 dakika; 1. sınıf öğretmen adaylarının 5 dakika olarak hesaplanmıştır. Sürelerin tamamı saniyeye çevrilerek yapılan Kruskal-Wallis H testi sonuçları Tablo 4.8.'de sunulmuştur.

Tablo 4.8.

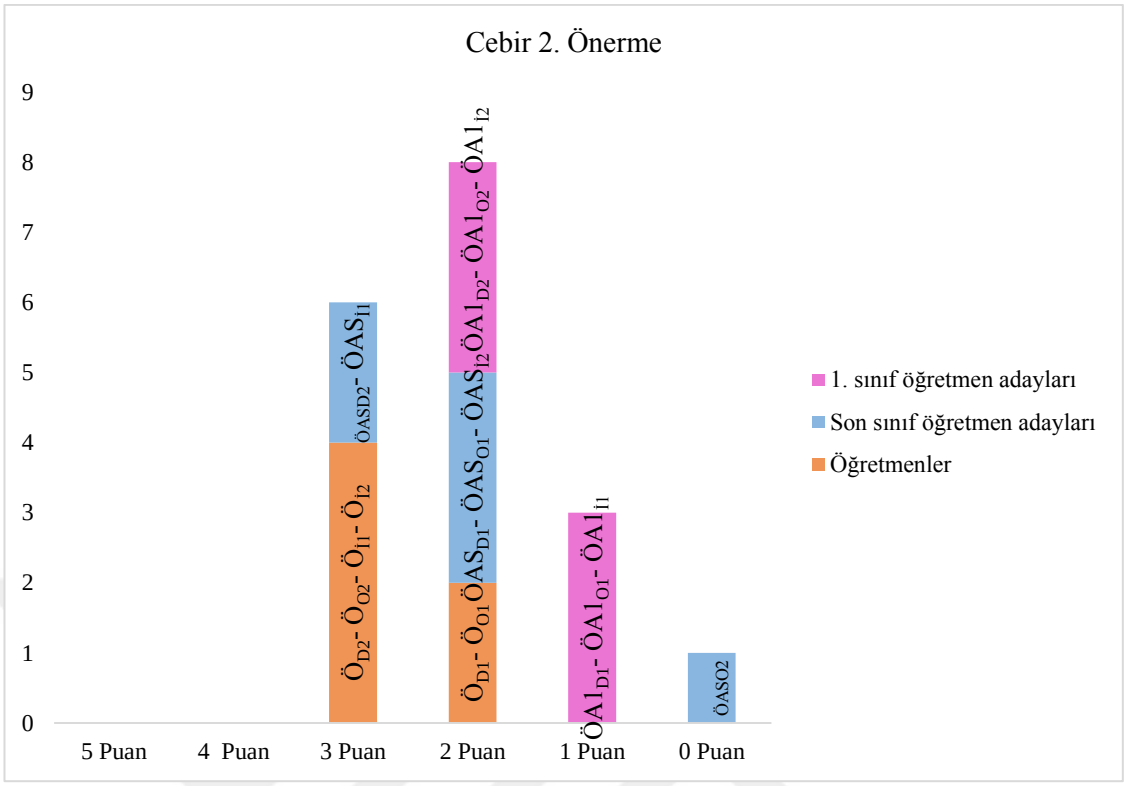
Cebir 1. Önermede Elde Edilen Sürelere İlişkin Kruskal-Wallis H Testi Sonuçları

Gruplar	n	$Sıra\ ort.$	sd	X^2	p
Öğretmen	6	7.75			
Son Sınıf Öğretmen Adayı	6	11.58	2	2.244	.326
1. Sınıf Öğretmen Adayı	6	9.17			

Öğretmenlerin, son sınıf öğretmen adaylarının ve 1. sınıf öğretmen adaylarının ispatı yapamayacaklarına karar verme sürelerini karşılaştırmak amacıyla yapılan Kruskal-Wallis H testi sonucunda gruplar arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olmadığı belirlenmiştir $(X^2{}_{(2)} = 2.24, p > .05)$. Buna göre karar verme sürelerinin öğretmenler, son sınıf öğretmen adayları ve 1. sınıf öğretmen adaylarına göre farklılık göstermediği söylenebilir.

4.1.5. Dördüncü etkinlik kartındaki sorunun istatistiksel bulguları

Çalışmanın bu bölümünde çalışmaya katılan matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının dördüncü etkinlik kartında yer alan soruya yönelik çözümleri veri analizinde açıklanan ölçütlere göre değerlendirilmiştir. Değerlendirme 5-li derecelendirmeye dayalı olarak yürütülmüş olup cevaplar sadece sonuca yönelik değerlendirilmemiş, ispat süreci göz önünde bulundurularak derecelendirme yapılmıştır. Öğretmenlerden ve öğretmen adaylarından alınan cevaplar doğrultusunda puanlara göre frekanslar ile soruyu çözemeyen ya da çözemeyeceğine karar veren katılımcıların karar verme süreleri değerlendirilmiştir. Karar verme sürelerinin incelenmesinde betimsel istatistik değerleri sunulmuş olup, öğretmenler, son sınıf öğretmen adayları ve 1. sınıf öğretmen adayları arasında anlamlı farklılık olup olmadığına Kruskal-Wallis H testi ile bakılmıştır. Puanlamalar Şekil 4.4'deki frekans grafiğinde sunularak öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının karşılaştırılması amaçlanıştır. Grafikte her bir sütunda doğru yapan katılımcıların kod isimleri yazılarak katılımcıların tamamının görülmesi amaçlanmıştır.



Şekil 4.4. Cebirin 2. önermesinde alınan puanlara ait betimsel istatistik grafiği

Şekil 4.4 incelendiğinde katılımcılarının hiç birinin 5 puan ve 4 puan kategorisinde bulunmadığı görülmektedir. Bununla birlikte 0 puan alan katılımcının da sadece son sınıf öğretmen adaylarından birisi olduğu görülmektedir. Öğretmenler sadece 3 puan ve 2 puan kategorisinde yer alırken 1. sınıf öğretmen adayları sadece 2 puan ve 1 puan kategorisinde yer almıştır. 3 puan alan altı katılımcının dördü öğretmen iken; ikisi son sınıf öğretmen adayıdır. 2 puan alan katılımcıların ikisi öğretmen, üçü son sınıf öğretmen adayı ve üçü de 1. sınıf öğretmen adayıdır. 1 puan alan katılımcılarınsa tamamı 1. sınıf öğretmen adayıdır. Çalışmaya katılan öğretmenlerden birinin, son sınıf öğretmen adaylarında ikisinin ve 1. sınıf öğretmen adaylarından dördünün ispatlarının geçerli olduğunu düşündükleri belirlenmiştir. Önermeyi tamamlayamayacağına karar veren katılımcıların karar verme sürelerine dair betimsel istatistik sonuçları Tablo 4.9'da sunulmuştur.

Tablo 4.9.

Öğretmenlerin ve Öğretmen Adaylarının Cebir 2. Önermede İspatı Yapamayacaklarına Karar Verme Süreleri

	Öğretmenler						**Son Sınıf Öğretmen Adayları**						**1. Sınıf Öğretmen Adayları**					
	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Süre	05.54	✓	08.01	11.49	04.09	11.09	✓	06.35	16.22	01.21	12.10	✓	05.12	✓	03.09	✓	✓	✓

✓ Soruyu doğru yaptığını düşünen öğretmen veya öğretmen adayını ifade etmektedir.

Tablo 4.9 incelendiğinde öğretmenlerden yalnızca birinin ispatı doğru yapabildiğini düşündüğü görülmektedir. Son sınıf öğretmen adaylarından ikisi önermeyi doğru olarak ispatlayabildiğini düşünürken, 1. Sınıf öğretmen adaylarının dördü önermeyi tam olarak ispatlayabildiğini düşünmektedir. Önermenin ispatını yapamayacağını düşünen öğretmenlerin ispatı tamamlayamayacaklarına karar verme süreleri ortalama 8 dk; son sınıf öğretmen adaylarının ispatı yapamayacağına karar verme süreleri ortalaması 9 dakika olarak hesaplanırken; 1. sınıf öğretmen adaylarının 4 dakika olarak hesaplanmıştır. Sürelerin tamamı saniyeye çevrilerek yapılan Kruskal-Wallis H testi sonuçları Tablo 4.10'da sunulmuştur.

Tablo 4.10.

Cebir 2. Önermede Elde Edilen Sürelere İlişkin Kruskal-Wallis H Testi Sonuçları

Gruplar	n	$Sıra\ ort.$	sd	X^2	p
Öğretmen	6	6.00			
Son Sınıf Öğretmen Adayı	6	9.00	2	4.258	.119
1. Sınıf Öğretmen Adayı	6	13.50			

Öğretmenlerin, son sınıf öğretmen adaylarının ve 1. sınıf öğretmen adaylarının ispatı yapamayacaklarına karar verme sürelerini karşılaştırmak amacıyla yapılan Kruskal-Wallis H testi sonucunda gruplar arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olmadığı belirlenmiştir $(X^2{}_{(2)} = 4.26, p > .05)$. Buna göre karar verme sürelerinin

öğretmenler, son sınıf öğretmen adayları ve 1. sınıf öğretmen adaylarına göre farklılık göstermediği söylenebilir.

4.2. Birinci Etkinlik Kartındaki Sorudan Elde Edilen Nitel Bulgular

Yapılan içerik analizi sonucunda "Bilişsel beceri" ve "Üst bilişsel beceri" olarak iki tema elde edilmiş ve verilerin sunumu bu temalara göre yapılmıştır.

4.2.1. Birinci etkinlik kartındaki sorudan bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular

Bilişsel beceriler teması altında ispat önermesini okuma, şekil çizme, önermenin altını çizme, doğruluğunu değerlendirme, strateji belirleme, işlem süreci olarak altı kategori ve bu kategoriler altında 26 koda ulaşılmıştır.

Çalışmaya katılan öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde sergiledikleri bilişsel becerilere yönelik oluşan ilk kategori "ispat önermesini okuma" dır. İspat önermesini okuma kategorisinde "İspat önermesini ilk kez okur.", "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler.", "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür.", "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler.", "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder." kodları elde edilmiştir. Çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adaylarının çoğu "İspat önermesini ilk kez okur." becerisini sergilemişlerdir. Başka bir deyişle önermeyi duraksamadan bütün bir şekilde okumuşlardır. "İspat önermesini ilk kez okur." becerisi görüşme ve gözlem verilerinden elde edilmiştir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılar önermeyi bütün olarak okudukları için katılımcıların bu bölümde katılımcıların ifadelerine yer verilmemiştir. Bunun aksine çalışmaya katılan bazı öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." becerisini sergilediği bulunmuştur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların bazılarının görüşleri Tablo 4.11'de sunulmuştur.

Tablo 4.11.

"İspat Önermesini Adım Adım Okuyarak İlerler." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O1}$	"[01.38] Tam olarak ne istediğini anlamak için adım adım okuyorum. Önce bir üçgende iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü dediği için buraya baktım, sonra bu dış açılara komşu olmayan iç açının ölçüsünün yarısı dediği için buraya baktım. Yani doğru yere doğru şekli çizebilmek için ayrı ayrı okudum. (Satır, 17-19)"
$ÖAS_{D2}$	"[02.51] Sorunun ilk bölümünü hallettiğimi düşünüyorum. Yani sorunun virgülden önceki kısmını şekle döktüm. (Satır, 23-24)."

Tablo 4.11 incelendiğinde katılımcıların "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." becerisinin sergilendiği anlaşılmaktadır.

Çalışmaya katılan matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerisini sergilediği görülmüştür. $Ö_{I1}$ öğretmeninin önermeyi okuduktan sonraki, *"* [00.53] *Bir daha okuyayım cümle çok uzundu. Bir üçgende iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının…* (Satır, 6)*"* ifadesi öğretmenin önermeyi anlamadığında tekrar okuduğunun göstergesidir. $Ö_{I2}$ öğretmeninin de *"*[01.02] *Neden iki defa okuduk. Soruyu daha iyi anlamak için hocam. İlkinde tam oturmadı.* (Satır, 10)*"* cümleleri soruyu tekrar okuduğunun göstergesi olarak değerlendirilebilir. Yine etkinlik temelli görüşmeler sırasında araştırmacının $ÖAS_{D1}$ öğretmen adayına sorduğu *"*[03.11] *Şu an önermeyi tekrar okuyorsunuz, tekrar okumanızdaki amaç nedir?* (Satır, 21)*"* sorunun ardından öğretmen adayının *"*[03.15] *Kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsünü kavrayamadığım için soruyu tekrardan okuyorum…* [Sessiz düşünmektedir] (Satır, 22-23)*"* şeklinde cevap verdikten sonra düşünmesi, "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." Becerisini sergilediğinin göstergesidir. "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." becerisi bu çalışmada ispat önermesini okumaya yönelik elde edilen başka bir bulgudur. Bu bulgunun tespit edildiği katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.12'de sunulmuştur.

Tablo 4.12.

"İspatın Hipotez-Hüküm ve Amaçlarını (Hedeflerini) Belirler." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ2}$	"[00.21] Bir üçgende iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü… Bu dış açılara komşu olmayan iç açının ölçüsünün yarısının 90 dereceden çıkarılmasıyla elde edilir, ifadesinin doğruluğunu gösteriniz... Tezimiz şu $\alpha, \beta, 90-\beta, \frac{\beta}{2}, \alpha = 90-\frac{\beta}{2}$ (Satır, 6-8)"
$ÖAS_{İ2}$	"[05.49] Bizden istenilen B açısının yarısından 90'dan çıkardığımızda D açısını bulmamız. Yani D açısına eşit olması isteniyor… Öyle olduğunu göstermemizi istiyor. Dış açıortayın yarısına x, x ve y, y diyelim. Buradan B açısının x ve y cinsinden değerini bulup, bu açının yarısından 90 derece çıkartılınca D açısı elde ediliyor mu ona bakmak gerekir. (Satır, 26-29)."
$ÖAS_{D2}$	"[02.52] Sorunun virgülden önceki kısmını şekle döktüm. Bundan sonraki kısım biraz daha yorum ve benden istenilen şey… Kesişimleri bu nokta. Bu noktada oluşan açı burası [y-açısını göstermektedir]. Bu açının yani komşu olmayan iç açının yarısının 90'dan çıkarılmasıyla elde edilir diyor. Ben şu tepedeki açıya x açısı diyeceğim. Benden istediği şey, dış açıortayların kesişim noktasındaki y açısının 90 derecenin $x/2$ kadar eksiği olduğunu göstermem. Şuradaki y açısının $90-x/2$ olduğunu göstermemi istiyor…"

Katılımcıların Tablo 4.12'deki görüşleri incelendiğinde "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Çalışmaya katılan öğretmenler ve öğretmen adaylarının "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder." becerisini sergilediği ortaya çıkarılmıştır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen öğretmen adaylarından $ÖA1_{İ2}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 71-77):

> [07.46] $ÖA1_{İ2}$: İnşallah doğru görüyorumdur şu an ama doğruluğundan çok da emin olamıyorum. Şu tarafa göndereyim ben bunu. $(2x+a)$'ya eşit oldu. Sonuç çıkmadı, bir yerlerde hata yaptım ama işlem bana çok mantıklı geldi.
>
> [08.22] A: Şimdi ne yapmayı düşünüyorsunuz?

[08.37] $ÖA1_{İ2}$: Şekil üzerinde bütün işlemlerimi kontrol ediyorum. Baştan alayım [Soruyu tekrar okur] $x + \alpha + \beta = 180, \alpha + \beta = 180 - x, 360 - 2\alpha - 2\beta + a = 180$, burada hata yapmışım ben.

Yukarıdaki diyalogdan "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder." becerisini sergilediği görülmektedir. Yine $Ö_{D2}$ öğretmeninin etkinlik temelli görüşmede kullandığı *"*[07.12] *Burada yanlış yaptık işlemi. Sil baştan mı başlasak… Bu sefer çözeceğim. Bir üçgende iki dış açıortayın kesişimlerinin ölçüsü…* (Satır, 24-25)*"* cümleleri "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder." becerisini sergilediğini göstermektedir. İspat önermesini okuma kategorisinde ulaşılan kodlar Tablo 4.13'de sunulmuştur.

Tablo 4.13.

İspat Önermesini Okuma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$ÖA1_{İ2}$
İspat Önermesini İlk Kez Okur.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
İspat Önermesini Adım Adım Okuyarak İlerler.			✓		✓			✓										
Önermeyi Anlamadığında Birkaç Kez Okur ve Verilenler Üzerine Düşünür		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓		✓	✓
İspatın Hipotez-Hüküm ve Amaçlarını (Hedeflerini) Belirler.		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓			✓		✓	
Sonuca Ulaşamadığında Önermeyi Tekrar Okuyarak İşlemlerinin Doğruluğunu Kontrol Eder.		✓																✓

Tablo 4.13 incelendiğinde ispat önermesini okuma kategorisinde en fazla tekrarlanan kod "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerisidir. Katılımcılardan 13'ünün bu beceriyi bilişsel olarak sergilediği belirlenmiştir. Bu katılımcılarının dördünün öğretmen, dördünün son sınıf öğretmen adayı, beşinin ise 1. sınıf öğretmen adayı olduğu da tablodan çıkarılabilen bir başka bulgudur. Ayrıca puan ortalamasına göre iyi kategorisinde bulunan öğretmen ve öğretmen adaylarından beşinin bu bilişsel beceriyi sergilemiş olması dikkat çekicidir.

İyi kategorisinde yer alıp bu beceriyi sergilemeyen tek kişi $ÖAS_{İ2}$'dir. Dikkat çekici olan bu durumun istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemek için başarı düzeylerine göre gruplar (iyi, orta, düşük) ile "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." kodu arasında Ki-Kare testi yapılmıştır. Yapılan Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.14'de sunulmuştur.

Tablo 4.14.

"Önermeyi Anlamadığında Birkaç Kez Okur ve Verilenler Üzerine Düşünür" Kodu ile Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür		Toplam	X^2	sd	p
		Yapamaz	Yapabilir				
Başarı	İyi	1	5	6			
Durumu	Orta	3	3	6	2.215	2	.330
	Düşük	1	5	6			
Toplam		5	13	18			

Tablo 4.14 incelendiğinde önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür kodu ile başarı durumları arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir bağlantı olmadığı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 2.215, p > .05$). Yani bu durum başarı durumları arası farklılığın önermeyi anlamadığında birkaç kez okuma ve verilenler üzerine düşünmeyi etkilemediğini göstermektedir. Bu kategoride en sık sergilenen üçüncü kod olarak da "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." becerisi belirlenmiştir. Bu kod 11 katılımcı tarafından sergilenmiştir. Yine bir önceki kodda olduğu gibi bu kodda da iyi kategorisinde yer alanlardan 5 kişinin bu beceriyi sergiliyor olması önemlidir. İyi kategorisinde yer alıp bu beceriyi sergilemeyen tek kişi $ÖA1_{İ2}$'dir. Bu farklılığın istatistiksel olarak bir anlam ifade edip etmediğini belirlemek için Ki-Kare testi yapılmıştır. Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.15'de sunulmuştur.

Tablo 4.15.

İspatın Hipotez-Hüküm ve Amaçlarını (Hedeflerini) Belirler Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler		Toplam	X^2	sd	p
		Yapamaz	Yapabilir				
Başarı Durumu	İyi	1	5	6	3.273	2	.195
	Orta	2	4	6			
	Düşük	4	2	6			
Toplam		7	11	18			

Tablo 4.15 incelendiğinde "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." kodu ile başarı durumları arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir bağlantı olmadığı bulunmuştur ($X^2{}_{(2)} = 3.273, p > .05$). Yani bu durum başarı durumları arası farklılığın ispatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirlemeyi etkilemediğini göstermektedir. Bu kategoride en az sergilenen bilişsel beceriler ise sırasıyla "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder." ($n = 2$) ve "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." ($n = 3$) becerileridir.

Çalışmanın birinci sorusunun bilişsel beceriler temasında oluşan ikinci kategori "şekil çizme" dir. Bu kategori altında "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer.", "Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür.", "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." ve "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." kodları bulunmuştur.

"Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." becerisini sergileyen $ÖAS_{D2}$'nin *"*[00.40] *İki dış açıortayın kesişimleri diyor. Ben bunu… Öncelikle düşündüğüm şeyi kâğıda dökmeye çalışacağım, geometrik olarak… Çünkü geometri sorularında özellikle okuduğum şeyi şekillendirmek, kâğıda dökmek anlamama daha çok yardımcı oluyor.* (Satır, 6-10)*"* ifadeleri bu beceriyi sergilediğine işaret etmektedir.

Bir diğer kod "Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.16'da sunulmuştur.

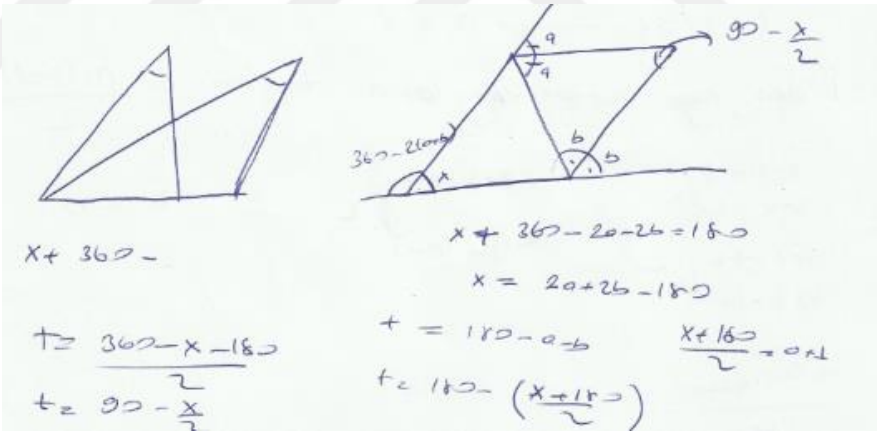
Tablo 4.16.

"Geometri İspatında Şekil Çizmeyi Gereklilik Olarak Görür." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

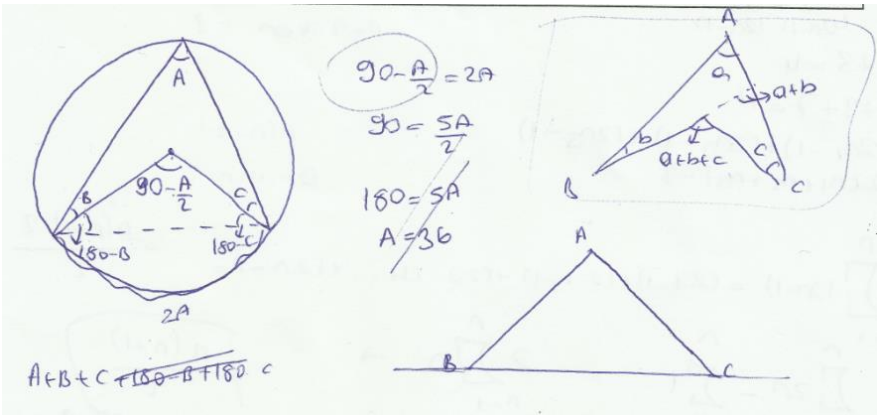
Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[00.23] Geometride ispat şekilsiz olmaz. (Satır, 4)"
$Ö_{İ1}$	"[01.37] Yani sonuçta geometrik bir şeyden bahsettiği için çizme ihtiyacı hissettim… Çizersem daha iyi ifade edebileceğimi düşündüm. (Satır, 12-13)"

Tablo 4.16 incelendiğinde katılımcıların ifadeleri "Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür." becerisini sergilediklerine işaret etmektedir.

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarından bazılarının "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." becerisini sergilediği belirlenmiştir. $ÖAS_{O1}$'in birinci önermedeki çizimi Şekil 4.5'de ve $ÖA1_{D2}$'nin çizdiği şekiller Şekil 4.6'da sunulmuştur.



Şekil 4.5. $ÖAS_{O1}$'in birinci soru için çizdiği şekil



Şekil 4.6. ÖA1$_{D2}$'nin birinci soruda çizdiği şekil

Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 incelendiğinde katılımcıların "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Şekil çizme kategorisinde elde edilen bir başka kod "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." becerisidir. Bu bulguya yönelik Ö$_{I2}$ öğretmeninin, araştırmacının sorduğu *"*[01.27] *Neden hemen şekil çizdiniz?* (Satır, 11)*"* sorusuna verdiği *"*[01.36] *Zihnimde daha iyi canlandırmak, görmek için…* (Satır, 12)*"* cevabı öğretmenin bu beceriyi sergilediğinin göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Benzer şekilde araştırmacının ÖAS$_{I2}$'ye sorduğu *"*[06.46] *...Hemen şekil çiziyorsunuz. Şekil çizmekteki amacınız nedir?* (Satır, 31-32)*"* sorusuna öğretmen adayının verdiği *"[07.03] Görsele dökmek için, daha doğrusu daha net görebilmek için.* (Satır, 34)*"* cevabı öğretmen adayının "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." Becerisini sergilediğinin göstergesidir. Şekil çizme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.17'de sunulmuştur.

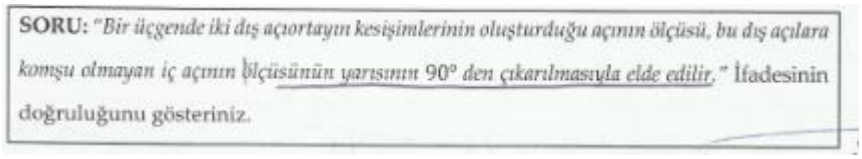
Tablo 4.17.

Şekil Çizme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	Ö$_{D1}$	Ö$_{D2}$	Ö$_{O1}$	Ö$_{O2}$	Ö$_{I1}$	Ö$_{I2}$	ÖAS	ÖAS	ÖAS	ÖAS	ÖAS$_{İ}$	ÖAS$_{İ}$	ÖA1	ÖA1	ÖA1	ÖA1	ÖA1$_{İ}$	OA1$_{İ}$
Önermeyi Okuduktan Sonra Anlamak İçin Şekil Çizer	✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Geometri İspatında Şekil Çizmeyi Gereklilik Olarak Görür	✓			✓	✓		✓										✓	✓
Önermede Verilen Şekli Değil Ezberinde Var Olan Şekli Çizer									✓					✓			✓	
Somutlaştırma Amacıyla Şekil Çizer				✓		✓						✓					✓	

Tablo 4.17 incelendiğinde şekil çizme kategorisinde en fazla sergilenen bilişsel beceri olarak "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." becerisi belirlenmiştir. Katılımcıların 15'inin bu beceriyi sergilediği belirlenmiştir. Bu beceriyi sergileyen katılımcılar arasında dağılım rastgele olduğundan Ki-Kare testi yapılmamıştır. Bu kategoride sergilenen diğer bilişsel beceriler sıklıklarına göre sırasıyla; "Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür." $(n = 6)$, "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." $(n = 4)$ ve "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." $(n = 3)$ becerileridir.

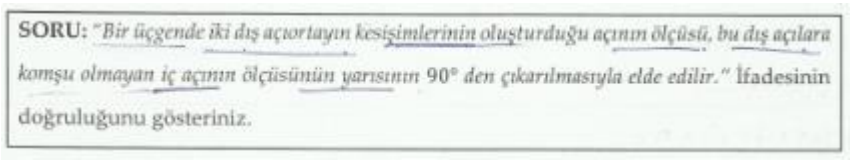
Birinci soruda bilişsel beceri teması altında elde edilen üçüncü kategori "Önermenin altını çizme" kategorisidir. Bu kategori altında "Önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer.", "Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer." ve "Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." kodları bulunmuştur. $Ö_{O2}$ öğretmeninin "Önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer." becerisini saptanmıştır. Araştırmacının öğretmene sorduğu *"*[07.42] *Neden bir bölümünün altını çizdiniz?* (Satır, 45)*"* sorusuna cevap olarak öğretmenin *"*[07.46] *Çünkü teyit ettim. Hatamı gördüm. Hatam şuydu:* $\alpha = \beta/2 + 90$ *değil de* $\alpha = 90 - \beta/2$ *idi ki benim aradığım cevapta buydu zaten* [Önermede altını çizdiği bölümü gösterir]. *Burada hata yaptığım yeri gördüm.* (Satır, 46-47)*"* ifadelerini kullanması "Önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer." becerisini sergilediğinin göstergesidir. Öğretmenin kâğıdından kesit Şekil 4.7'de sunulmuştur.


SORU: *"Bir üçgende iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü, bu dış açılara komşu olmayan iç açının ölçüsünün yarısının 90° den çıkarılmasıyla elde edilir."* İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

Şekil 4.7. $Ö_{O2}$'nin önermede yaptığı hatanın altını çizdiği bölüm

Çalışmaya katılan 1. sınıf öğretmen adaylarından birisi de ($ÖA1_{I2}$) "Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer." becerisidir. Öğretmen adayının *"*[02.46] *Şekilde göstereceğim yerlerin -şekil için gerekli olan yerlerin- altını çizdim. İki tane dış açıortay dedi. Dış açıortayı şekil üzerinde çizmem gerekiyor. Bu nedenle iki dış açıortay yazan bölümün altını çizdim.* (Satır, 19-21)*"* cümleleri bu

beceriyi sergilediğinin göstergesidir. Öğretmen adayının etkinlik temelli görüşme formundan bir kesit Şekil 4.8'de sunulmuştur.


SORU: "Bir üçgende iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü, bu dış açılara komşu olmayan iç açının ölçüsünün yarısının 90° den çıkarılmasıyla elde edilir." İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

Şekil 4.8. $ÖA1_{I2}$'nin önermede altını çizdiği bölümler

"Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." becerisi sesli düşünme protokolünde yapılan gözlemlerden elde edilen bir beceridir. Önermenin altını çizme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.18'de sunulmuştur.

Tablo 4.18.

Önermenin Altını Çizme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D}$	$ÖAS_{D}$	$ÖAS_{O}$	$ÖAS_{O}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Önermeye Bağlı Hata Yaptığında Hata Yaptığı Bölümün Altını Çizer				✓														
Çizeceği Şekle Bağlı Olarak Önermede Bazı Bölümlerin Altını Çizer																		✓
Önermede Önemli Gördüğü Yerlerin Altını Çizer			✓				✓											

Tablo 4.18 incelendiğinde önermenin altını çizme kategorisinde "Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." becerisinin sıklığı iki iken, "Önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer." ve "Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer." becerilerinin sıklıkları bir olarak bulunmuştur.

Birinci soruda elde edilen bir diğer bilişsel beceri kategorisi ispatın gerekçelendirilmesi ile ilgili olan "doğruluğunu değerlendirme" kategorisidir. Bu kategoride "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "Otoriter ispat

şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir.", "İspatı tamamladıktan sonra en başa dönerek doğruluğunu kontrol eder.", "Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder." ve "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." kodları bulunmuştur. "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği belirlenen $Ö_{O1}$'in *"*[07.18] *Ben önermeyi zaten daha önceden biliyordum. Yaptığım ispatın sonucuyla daha önce doğruluğunu bildiğim önermenin aynı olması ispatımın doğru olduğunu düşünmem için önemlidir.* (Satır, 45-46)*"* cümlelerinden öğretmenin, "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği sonucuna ulaşılmıştır. Yine bu ispat şemasına göre ispat yaptığı düşünülen $ÖAS_{D1}$ öğretmen adayı ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 81-95):

[11.08] $ÖAS_{D1}$: …Hocam ben $x + y = 90 - \alpha$ dedim.

[11.53] A: Bir sonuca ulaşmış oldunuz. Ulaştığınız sonuç doğru mu?

[11.56] $ÖAS_{D1}$: Sonucum doğru mu? Yani eksik diyelim.

[12.00] A: Neden eksik olduğunu düşünüyorsunuz?

[12.02] $ÖAS_{D1}$: Çünkü kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsünü bulamadım. Bir mantığa oturtturamadığım için eksik dedim.

[12.08] A: Bu haliyle ispat geçerli olur mu?

[12.12] $ÖAS_{D1}$: Hayır.

[12.14] A: Neden ispatın geçerli olmayacağını düşünüyorsunuz?

[12.20] $ÖAS_{D1}$: Hocam bazı ispatların birden fazla yolu vardır. Ben bu önermenin ispatında iç açıları kullanarak gittim. İç açıların bir noktada birleşeceğini düşündüm ama kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsünü bir noktada birleştirerek yapmadığım için ispatım yanlış. Ama ispatın tek bir doğru yöntemi yok. Birden farklı yolla yapılabileceği için sonuç böyle çıktı.

Diyalog incelendiğinde bu öğretmen adayının ispatın doğruluğu hakkında kendine güvenemediği ve yaptığı işlemlerin doğruluğundan emin olamadığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle öğretmen adayının "Ritüel ispat şemasına göre ispatını gerekçelendirir." Becerisini sergilediği söylenebilir. $ÖAS_{D2}$ öğretmen adayının da aynı şekilde ispatını gerekçelendirdiği bulunmuştur. Öğretmen adayıyla araştırmacı arasında geçen aşağıdaki diyalogdan da bu öğretmen adayının "Ritüel ispat şemasına göre ispatını gerekçelendirir." becerisini sergilediği sonucuna ulaşılabilir:

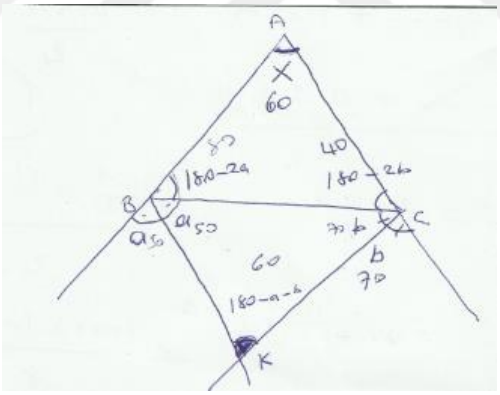
[09.08] A: İspatınız geçerli midir?

[09.13] $ÖAS_{D2}$: Evet geçerlidir. Şöyle söyleyeyim şimdi soru benden y nin $90 - x/2$ olduğunu göstermemi istedi. Ben bu ispatın kısmen doğru olduğunu düşünüyorum.

[09.34] A: Neden kısmen doğru olduğunu düşünüyorsunuz?

[09.37] $ÖAS_{D2}$: Hâlâ aslında içten içe düşünme aşamasındayım. Bu yüzden kısmen dedim. Benden istenilen şeyi bulurken aklımda oluşturduğum şekil içerisindeki dörtgenden ve üçgenden yararlandım. Açıortayların getirdiği üçgenlerden…

Diyalog incelendiğinde öğretmen adayının ispatın doğruluğuna tam olarak karar veremediği veya matematiksel ifade kullanım düzeyini yeterli görmediği anlaşılmaktadır. Bu nedenle öğretmen adayının "Ritüel ispat şemasına göre ispatını gerekçelendirir." becerisini sergilediği söylenebilir. Gözlemlerden ve etkinlik kartlarından elde edilen verilere göre $ÖAS_{İ1}$'in de "Ritüel ispat şemasına göre ispatını gerekçelendirir." becerisini sergilediği belirlenmiştir. Öğretmen adayının yaptığı ispattan görünüm Şekil 4.9'da sunulmuştur.



Şekil 4.9. $ÖAS_{İ1}$'in birinci önermedeki ispatından görünüm

Şekil 4.9 incelendiğinde öğretmen adayının rastgele örneklerle ilerlediği görülmektedir.

Bu kategoride elde edilen bir başka kod "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. $ÖAS_{İ2}$'nin aşağıdaki cümlelerinden "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği saptanmıştır (Satır, 32-38):

> [04.42] Şöyle; değer vererek doğru olup olmadığına bir baksak önce… Önce bir değer verelim. Şu a dediğim yerler $50-50$ olsun. Şu b dediğim yerlerde $70-70$ olsun. İçeriye 80'e 40 kalıyor. Şurası 60 oluyor. O zaman şurası da 60 oluyor. O zaman bu teorem doğru olmuyor sanki. $50, 50, 100, 80$ olur. $70-70, 140$ olur. Doğru olmuyor sanki. Değer verdim sağlamıyor. Bu nedenle doğru olmadığını düşünüyorum. Yanlış mı acaba, $50-50$ desek şu şeye diğeri de açıortay olduğu için 50 olur. Toplamı 100 şuraya 80 kalıyor. $70-70$ versem içeriye 40 kalıyor, burası 120 olup şuraya 60 kalıyor. Burası da 120 burada 60 oluyor. 90'dan çıkarıp 2'ye böldüğümüzde 15 geliyor.

Öğretmen adayının cümlelerinden örnekleri sistematik bir şekilde değil rastgele verdiği belirlenmiştir. Bu nedenle öğretmen adayının "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği söylenebilir.

Bununla birlikte çalışmaya katılan birinci sınıf öğretmen adaylarından birinin ($ÖA1_{İ2}$) ispatını gerekçelendirirken "Otoriter ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği saptanmıştır. $ÖA1_{İ2}$ ile araştırmacı arasında geçen diyaloğun bir bölümü şöyledir (Satır, 91-97):

> [12.03] $ÖA1_{İ2}$: Sonuç çıkmadı
>
> [12.04] A: Peki bu önermenin doğru olduğu kesin mi, bu önermenin doğru olup olmadığına nasıl karar veriyorsunuz?
>
> [12.13] $ÖA1_{İ2}$: Bu yıllardır bildiğimiz bir kural olduğundan doğru olduğunu düşünüyorum.
>
> [12.20] A: Yani böyle bir kural olduğunu biliyorsunuz.
>
> [12.21] $ÖA1_{İ2}$: Evet, bu nedenle sonucunda böyle çıkmaması gerektiğini düşünüyorum. Yani yanlış yaptığımı düşünüyorum.

Öğretmen adayıyla yapılan görüşmeden öğretmen adayının ispatının doğruluğunu değerlendirirken daha önceden karşılaştığı bir kaynağa göre değerlendirme yaptığı anlaşılmıştır. Bu nedenle "Otoriter ispat şemasına göre ispatını gerekçelendirir" becerisini sergilediği belirlenmiştir.

Bu kategori altında bulunan diğer bir beceri "İspatı tamamladıktan sonra en başa dönerek doğruluğunu kontrol eder." kodudur. $Ö_{O2}$ öğretmeninin *"*[05.03] *α buysa ve bunlar birbirine eşitse ben direkt α'yı bulmuş olurum. İşlemlerimi kontrol edeceğim. Dolayısıyla sorunun en başına dönüyorum.* (Satır, 30-31)*"* cümlelerinden bilişsel olarak yukarıda ifade edilen beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır.

$ÖAS_{O1}$ katılımcısının sesli düşünme protokolünde kullandığı cümlelerden "Ezberindeki bilgiye dayalı olarak önermenin doğruluğunu kontrol eder." becerisini sergilediği belirlenmiştir. Bu öğretmen adayı ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 5-7):

> [00.37] $ÖAS_{O1}$: … Ben bu önermeyi hatırlıyorum hocam. KPSS'ye çalışıyorum şu sıralar. Böyleydi diye hatırlıyorum.
>
> [01.17] A: KPSS'ye çalıştığın için mi hatırlıyorsun?
>
> [01.19] $ÖAS_{O1}$: Evet hocam, yani şuradaki açı $90 - a/2$ diye hatırlıyorum. Bu nedenle önermenin doğru olduğunu düşünüyorum.

Öğretmen adayının cümlelerinden "Ezberinde var olan bilgiye göre önermenin doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Yine $ÖAS_{İ2}$' nin kullandığı *"*[01.24] *Bunu ben geometride üçgenle ilgili bir kural olarak hatırlıyorum. 90'dan çıkartıyorsun, 90'a ekliyorsun yarısını.* (Satır, 9-10)*"* ifadelerden bu beceriyi sergilediği sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışmaya katılan öğretmenler ve öğretmen adaylarından bazılarının ise "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisini sergilediği belirlenmiştir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.19'da sunulmuştur.

Tablo 4.19.

"İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ2}$	"[09.50] … İspatım geçerlidir ama ispat sürecine baktığımızda tam olarak ispat mı değil mi onu bilemeyeceğim. Onu siz daha iyi bilirsiniz. (Satır, 42-43)"
$ÖAS_{D1}$	"[01.45] … Hocam hangisini çizeceğimiz önemli mi? Dış açıortayı ben buraya çizsem olur değil mi? (Satır, 18)"
$ÖAS_{İ1}$	"[02.37] … Bu teorem doğru mu? Yani yanlış olma ihtimali de var mı? (Satır, 30)"
$ÖAS_{İ2}$	"[01.36] … Bunu hocam şeyden gösterebilmek mümkün mü? (Satır, 14-15)"
$ÖA1_{İ2}$	"[04.13] … Üçgenin iç açıları toplamından mı yapsam acaba, buradan bir sonuca ulaşabilir miyim? (Satır, 41-42)"

Katılımcıların Tablo 4.19'daki görüşleri incelendiğinde "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.20'de sunulmuştur.

Tablo 4.20.

Doğruluğunu Değerlendirme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Ritüel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.			✓				✓	✓		✓		✓						
Dönüşümsel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.											✓			✓		✓		
Otoriter İspat Şemasına Göre İspatının Doğruluğunu Değerlendirir.																		✓
İspatı Tamamladıktan Sonra En Başa Dönerek Doğruluğunu Kontrol Eder.				✓														
Ezberindeki Bilgiye Dayanarak Önermenin Doğruluğunu Kontrol Eder.									✓			✓						✓
İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar.						✓	✓				✓	✓			✓		✓	✓

Tablo 4.20 incelendiğinde bilişsel beceriler temasının doğruluğunu değerlendirme kategorisinde en fazla sergilenen beceri "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." $(n = 7)$ olarak belirlenmiştir. Bu bilişsel beceriyi sergileyen katılımcıların beşinin iyi kategorisinde yer alan katılımcılar olması dikkat çekidir. İyi kategorisinde yer alıp bu bilişsel beceriyi sergilemeyen tek kişinin $Ö_{I1}$ olduğu saptanmıştır. Bu dikkat çekici durumun anlamlı olup olmadığına bakmak için Ki-Kare testi yapılmıştır. Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.21'de sunulmuştur.

Tablo 4.21.

"İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar		Toplam	X^2	sd	p
		Sormaz	Sorar				
Başarı Durumu	İyi	1	5	6	7.481	2	.024
	Orta	5	1	6			
	Düşük	5	1	6			
Toplam		11	7	18			

Tablo 4.21 incelendiğinde "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." kodu ile başarı durumları arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir bağlantı olduğu bulunmuştur $(X^2{}_{(2)} = 7.481, p < .05)$. Yani bu durum başarı düzeyleri arasındaki farklılığın "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." kodunu etkilediğini göstermektedir. Bu etkileşim, başarı durumu düşük veya orta düzeyde olan katılımcıların ispat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sormadığını; başarı durumu iyi olan katılımcıların ise ispat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorduğu şeklinde açıklanabilir. Bu beceriden sonra öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının en fazla sergiledikleri ikinci becerinin "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." $(n = 5)$ olduğu ortaya çıkarılmıştır. En sık sergilenen üçüncü sıradaki beceriler "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." ve "Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder." becerileridir $(n = 3)$. Bu kategoride en az sergilendiği tespit edilen bilişsel beceriler ise "Otoriter ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir." ve "İspatı tamamladıktan sonra en başa dönerek doğruluğunu kontrol eder." kodlarıdır (sadece birer katılımcının sergilediği belirlenmiştir).

Çalışmada bulunan bir başka kategori de "strateji belirleme" kategorisidir. Bu kategoride bulunan kodlar "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.", "Ezberlediği yolla ispat yapar.", "İspat yöntemlerini gözden geçirir." ve "Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar." becerileridir.

"Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.22'de sunulmuştur.

Tablo 4.22.

"Sözel Olarak Önermenin İspatını İfade Eder." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{D1}$	"[11.08] Bazı şeyler ezber olur ya; 'şunun olduğunu ben biliyorum' gibi. Bu da öyle bir şey. (Satır, 78-79)"
	"[13.20] Ben buraya yansıtamadım ama şöyle diyeyim; şunların kesişimlerinin bir doğru tam doğru var ya he şöyle bir şey olacağını tahmin edebiliyorum ama şekil olarak çizemedim, yapamadım yani. (Satır, 101-103)"
$ÖAS_{O2}$	"[00.05] Şu ikisi hakkında (Geometri soruları) görüşüm yok yani bilmiyorum, hatırlayamadım şu an. (Satır, 3)"

Tablo 4.22 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Çalışmaya katılan öğretmenlerden birisinin $Ö_{O1}$'in "İspat yöntemlerini gözden geçirir." becerisini sergilediği belirlenmiştir. *"*[05.14] *Üniversitede gördüğüm ispat yöntemlerini hatırlamaya çalışıyorum. Özellikle geometri ispatlarında ispat yöntemleri önemlidir…* (Satır, 30-31)*"* cümlelerinden $Ö_{O1}$'in bu beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır.

Çalışmaya katılan bazı öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının "Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar." Becerisini sergilediği gözlemlerden tespit edilmiştir. Strateji belirleme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.23'de sunulmuştur.

Tablo 4.23.

Strateji Belirleme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Sözel Olarak Önermenin İspatını İfade Eder.							✓											
Ezberlediği Yolla İspat Yapar.				✓			✓			✓	✓	✓		✓		✓	✓	
İspat Yöntemlerini Gözden Geçirir.			✓															
Deneme-Yanılma Yoluyla İspat Yapar.		✓		✓			✓							✓				✓

Tablo 4.23 incelendiğinde strateji belirleme kategorisinde ise en fazla tekrarlandığı belirlenen bilişsel beceri "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisidir ($n = 8$). Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların yedisinin öğretmen adayı olması, öğretmenlerden ise yalnız birinin "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisini sergilemesi dikkat çekidir. Bu farklılığın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığına Ki-Kare testi ile bakılmıştır. Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.24'de sunulmuştur.

Tablo 4.24.

"Ezberlediği Yolla İspat Yapar." Kodu İle Grupları Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Ezberlediği yolla ispat yapar		Toplam	X^2	sd	p
		Yapmaz	Yapar				
Gruplar	Öğretmen	5	1	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	2	4	6	3.150	2	.207
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	3	3	6			
Toplam		10	8	18			

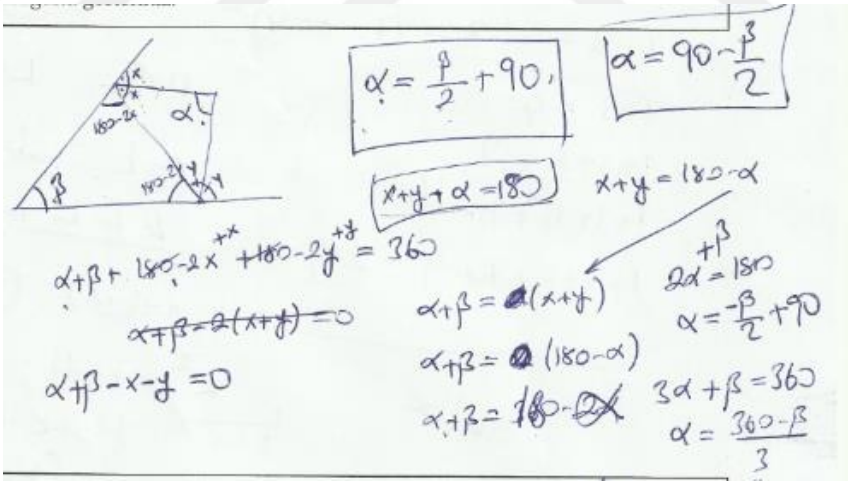
Tablo 4.24 incelendiğinde "Ezberlediği yolla ispat yapar." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir bağlantı olmadığı belirlenmiştir ($X^2_{(2)} = 3.150, p > .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisini etkilemediğini göstermektedir. En yüksek ikinci sıklığa sahip olan "Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar." bilişsel becerisi ise beş katılımcı tarafından sergilenmiştir. Bu kategorideki "İspat yöntemlerini gözden geçirir." ve "Sözel olarak

önermenin ispatını ifade eder.” bilişsel becerileri ise yalnızca birer katılımcı tarafından sergilenmiştir.

Çalışmada oluşan bir başka kategori de “işlem süreci” kategorisidir. İşlem süreci kategorisinde “İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür.”, “Planına uygun ispat yapar.”, “Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir.” ve “Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir.” kodları bulunmuştur.

“İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür.” becerisini sergilediği belirlenen $ÖA1_{D2}$ *“*[02.03] *Ben burada sadece sonuç buldum. Cebirsel işlemleri içeren bir süreç yok.* (Satır, 11)*”* cümleleriyle ispatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak gördüğünü anlatmıştır.

Ayrıca çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adaylarının bazılarının “Planına uygun ispat yapar.”, “Kullandığı ispat türünün amaca ulaşmada yeterlidir.” ve “Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir.” gözlemlerden ve etkinlik kartlarından elde edilmiştir. Bu becerileri sergilediği belirlenen $Ö_{O2}$’nin birinci önermede yaptığı ispat Şekil 4.10’da sunulmuştur.



Şekil 4.10. $Ö_{O2}$'nin birinci önermede yaptığı ispattan bir kesit

Şekil 4.10 incelendiğinde öğretmenin hedefini belirleyerek sözü geçen üç beceriyi sergilediği görülebilir. İşlem süreci kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.25’de sunulmuştur.

Tablo 4.25.

İşlem Süreci Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
İspatta Cebirsel İşlem Yapmayı Zorunluluk Olarak Görür.														✓				
Planına Uygun İspat Yapar.	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓			✓			
Kullandığı İspat Yöntemi Amaca Ulaşmada Yeterlidir.	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓			✓			✓			
Seçtiği İspat Türüne Uygun İspat Yazabilir.	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓							✓			✓

Tablo 4.25 incelendiğinde işlem süreci kategorisinde en fazla tekrarlanan bilişsel becerinin "Planına uygun ispat yapar." kodu olduğu saptanmıştır ($n = 11$). Bu bilişsel becerinin gözlenme sıklığının öğretmenden 1. sınıf öğretmen adayına gidildikçe sistematik azalması dikkat çekidir. Sistematik azalmanın anlamlı olup olmadığını incelemek amacıyla Ki-Kare testi yapılmıştır. Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.26'da sunulmuştur.

Tablo 4.26.

"Planına Uygun İspat Yapar." Kodu İle Grupları Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Planına uygun ispat yapar		Toplam	X^2	sd	p
		Yapamaz	Yapar				
Gruplar	Öğretmen	0	6	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	2	4	6	8.883	2	.012
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
Toplam		7	11	18			

Tablo 4.26 incelendiğinde "Planına uygun ispat yapar." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir bağlantı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 8.883, p < .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "Planına uygun ispat yapar." becerisini etkilediğini göstermektedir. Bu etkililik öğretmenlerin planına uygun ispat yaparken, son sınıf öğretmen adaylarının genellikle planına uygun ispat yaptığı, 1. sınıf öğretmen adaylarının ise çoğunlukla planına uygun ispat yapamadığı biçiminde yorumlanabilir. İşlem süreci kategorisinde az tekrarlanan bilişsel beceriler "Kullandığı ispat yöntemi

amaca ulaşmada yeterlidir." ve "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." kodlarıdır ($n = 9$). Yine bu becerilerin her ikisi için de öğretmenler son sınıf öğretmen adayları ve 1. Sınıf öğretmen adayları arasında farklılık olduğu ve bu farklılığın dikkat çekici olduğu saptanmıştır. Bu becerilerde bir önceki beceri de olduğu gibi hem sistematik hem de uygun-uygun değil, yapabilir-yapamaz tarzında olup istatistiksel analiz için uygundur. Bu kodlar için yapılan Ki-Kare testi sonuçları kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir kodu için Tablo 4.27'de, seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir kodu içinde Tablo 4.28'de sunulmuştur.

Tablo 4.27.

Kullandığı İspat Yöntemi Amaca Ulaşmada Yeterlidir Kodu İle Grupları Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir		Toplam	X^2	sd	p
		Yeterli değildir	Yeterlidir				
Gruplar	Öğretmen	1	5	6	5.333	2	.069
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	3	3	6			
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
Toplam		6	6	18			

Tablo 4.28.

Seçtiği İspat Türüne Uygun İspat Yazabilir Kodu İle Grupları Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir		Toplam	X^2	sd	p
		Yapamaz	Yapabilir				
Gruplar	Öğretmen	0	6	6	9.333	2	.009
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	4	2	6			
Toplam		9	9	18			

Tablo 4.27 incelendiğinde kullandığı "İspat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir bağlantı olmadığı saptanmıştır ($X^2_{(2)} = 5.333, p > .05$). Yani gruplar arası farklılığın kullandığı "İspat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." kodu ile ilgisi olmadığı biçiminde yorumlanabilir. Tablo 4.28 incelendiğinde "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olduğu görülmektedir ($X^2_{(2)} = 9.333, p < .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." becerisini etkilediğini göstermektedir. İşlem süreci kategorisinde en az sergilenen bilişsel beceri ise ispatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görmedir ($n = 1$).

4.2.2. Birinci etkinlik kartındaki sorudan üst biliş beceriler temasında elde edilen bulgular

Üst bilişsel beceriler teması altında "İşlemleri kolaylaştırma", "Sorgulama", "Farkındalık", "Planlama", Strateji belirleme", "Analojik akıl yürütme", "Kontrol etme" ve "İlişkilendirme" olarak sekiz kategori ve bu kategoriler altında 29 koda ulaşılmıştır.

Çalışmaya katılan matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarından elde edilen bulgulardan üst bilişsel beceriler temasında oluşan ilk kategori "ispatı kolaylaştırma" kategorisidir. Bu kategori altında "İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır.", "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar.", "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür.", "İspatın anahtar kavramlarını belirler." ve "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır." kodları bulunmuştur.

"İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır." becerisini sergilediği belirlenen $Ö_{D1}$ öğretmeni ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır 4-7):

[00.25] $Ö_{D1}$: Burası $2a$, burası $2b$ burası $2c$ olsun.

[00.31] A: Neden her biri için 2 katsayısını kullandınız?

[00.33] $Ö_{D1}$: Açıortay olduğu için kullandım. Sonraki işlemlerimde bölme yaparken daha kolay olacağını düşündüm. Burası $a + b$; burası $a + b, b + c, b + c \ldots$ Şimdi $2(a + b + c) = 180$ olup, $a + b + c = 90$ olur değil mi?

Diyalog incelendiğinde $Ö_{D1}$'in bu beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır. Benzer şekilde $ÖAS_{D1}$'in sesli düşünme protokolünde kullandığı "[05.20] *Şimdi şuraya* $x - x$, $y - y$, $2a$ *diyelim…* [05.31] *Çünkü* $2a/2 = a$ *olup, sonuç tam çıkar. Yani tam çıkması için* $2a$ *yazdım.* (Satır, 33-34)*"* cümlelerinden "İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır." becerisini sergilediği belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarından $ÖAS_{O1}$'in ise "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar." becerisini sergilediği saptanmıştır. Sesli düşünme protokolünde öğretmenin kullandığı *"*[06.23] *Fazla değişken kullanınca çözümü zorlaştırmış olacağım. Birbiri cinsinden yazarak, buraya* y *deseydim* x *cinsinden bir şeye benzetemezdim diye düşündüm. Ama* $180 - ab$ *deyince hepsi* a, b *cinsinden oldu."* cümleleri "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar." becerisini sergilediğinin göstergesidir.

$ÖA1_{D2}$ öğretmen adayı şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşündüğü için şekil çizdiğini belirtmiştir. Öğretmenin ifadelerinden "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür." becerisini sergilediği anlaşılmıştır. Öğretmen adayıyla araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir:

[00.58] A: Burada neden çember çizdiniz?

[01.01] $ÖA1_{D2}$: Bunu [A açısı] çevre açı olarak düşündüm. Bunu da merkez açı olarak düşündüm. Buradan gitmeye çalışıyorum; ama burada A çıkmıyor.

[01.09] A: Neden böyle düşündünüz?

[01.13] $ÖA1_{D2}$: Bence geometride çember çizildiği zaman ispatlamak daha kolay oluyor.

Diyalog incelendiğinde öğretmen adayının çember çizmenin geometri ispatlarını yapmayı kolaylaştırdığını düşündüğü görülmektedir.

Bu kategoride elde edilen bir başka üst bilişsel kod "İspatın anahtar kavramlarını belirler." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği tespit edilen katılımcıların bazılarının görüşleri Tablo 4.29'da sunulmuştur.

Tablo 4.29.

"İspatın Anahtar Kavramlarını Belirler." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O1}$	"[02.34] İspatı nasıl yapacağımı nereden başlamam gerektiğini düşünüyorum. (Satır, 24)"
$ÖAS_{D1}$	"[00.39] Soruda iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsünü sorduğu için ben ilk önce soruya oradan başladım. (Satır, 7-8)"

Tablo 4.29 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "İspatın anahtar kavramlarını belirler." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Bu beceride belirlenen bir başka üst bilişsel beceri de "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır." kodudur. Sesli düşünme protokolünde $ÖAS_{I1}$ ile araştırmacı arasında geçen şu diyalogdan öğretmen adayının sezgisel kestirme yollarını kullandığı anlaşılmaktadır:

[00.25] $ÖAS_{I1}$: …Şöyle bir ABC üçgeni çizelim. İki dış açıortayın kesişimi… O zaman şu AB ile AC kenarlarını uzatalım ki dış açıortay oluşsun.
[01.09] A: Neden diğer kenarları değil de bunları uzatıyorsunuz?
[01.10] $ÖAS_{I1}$: Şuradan dış açıortayları elde edebilmek için.
[01.13] A: Diğerlerini uzatsaydınız dış açıortay elde edemez miydiniz?
[01.16] $ÖAS_{I1}$: Sıkıntı yok. Herhangi ikisi olabilirdi. Yani özel bir tercih değil. Sadece burası benim için daha kolay olduğu için buradan uzattım.

Öğretmen adayının bu beceriyi sergilemesinin nedeni, bu yolu bilmesi ve süreci kolaylaştıracağını düşünmesi olduğundan bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.30'da sunulmuştur.

Tablo 4.30.

İşlemleri Kolaylaştırma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖAl_{D1}$	$ÖAl_{D2}$	$ÖAl_{O1}$	$ÖAl_{O2}$	$ÖAl_{I1}$	$ÖAl_{I2}$
İşlem Kolaylığı İçin Kesirli İfadelerden Kaçınır.	✓						✓											
Değişken Sayısını Azaltarak İşlem Kolaylığı Sağlamayı Amaçlar.								✓										
Şekil Çizmenin İspatı Kolaylaştırdığını Düşünür.														✓				
İspatın Anahtar Kavramlarını Belirler.			✓	✓	✓	✓	✓		✓									
İspatı Kolaylaştırmak İçin Sezgisel Kestirme Yollarını Kullanır.		✓									✓							

Tablo 4.30 incelendiğinde işlemleri kolaylaştırma kategorisinde en fazla sergilenen üst bilişsel becerinin "İspatın anahtar kavramlarını belirler." kodu olduğu görülmüştür $(n = 6)$. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların daha çok öğretmenler olduğu, öğretmenlerin dışında son sınıf öğretmen adaylarından iki kişinin bu üst bilişsel beceriyi sergilediği bulunmuştur. Gruplar arasındaki farklılık dikkat çekici olduğu için farkın anlamlılığına Ki-Kare testi ile bakılmıştır. Ki-kare testi sonuçları Tablo 4.31'de sunulmuştur.

Tablo 4.31.

"İspatın Anahtar Kavramlarını Belirler." Kodu İle Gruplara Göre Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		İspatın anahtar kavramlarını belirler		Toplam	X^2	sd	p
		Yapamaz	Yapabilir				
Gruplar	Öğretmen	2	4	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	4	2	6	6.000	2	.050
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	6	0	6			
Toplam		12	6				

Tablo 4.31 incelendiğinde ispatın anahtar kavramlarını belirleme ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir bağlantı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 6.000, p \leq .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "İspatın anahtar kavramlarını belirler." becerisini etkilediğini göstermektedir. Bu farklılığın yorumlanmasında öğretmenlerin çoğunun ve son sınıf öğretmen adaylarının bir kısmının ispatın anahtar kavramını belirlediği; 1. sınıf öğretmen adaylarının ise ispatın anahtar kavramını belirlemediği söylenebilir. Bu kategorideki diğer üst bilişsel becerilerin ise oldukça az katılımcı tarafından sergilendiği bulunmuştur. Detaylı incelendiğinde "İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır." ve "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır." kodları ikişer katılımcı tarafından sergilenirken "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar." ve "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır." kodları birer katılımcı tarafından sergilenmiştir.

Matematik öğretmeni ve matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma süreçlerinden elde edilen bir başka üst bilişsel beceri kategorisi "Sorgulama" kategorisidir. Sorgulama kategorisi altında "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendine sorar.", "İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar.", "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." ve "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." kodlarına ulaşılmıştır.

Çalışmada elde edilen bir başka üst bilişsel beceri olan "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendine sorar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.32'de sunulmuştur.

Tablo 4.32.

"İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Kendine Sorar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[00.33] … Burası $a + b$ burası $a + b, b + c, b + c$… Şimdi $2(a + b + c) = 180, a + b + c = 90$ olur değil mi? (Satır, 6-7)"
$Ö_{D2}$	"[00.02] Ne yapar o zaman? ... Ne oldu burada? … 2 ye bölersek $a + b - 90$… Ne diyor? Kesişimlerinin mi? (Satır, 8-9)"
$ÖA1_{İ2}$	"[05.27] … $360 + 2x$ şurası, şurada a var 180 var. İşlem hatası mı yaptım? (Satır, 52)"

Tablo 4.32 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendine sorar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Çalışmada elde edilen "İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar." koduna sesli düşünme protokolü sürecindeki gözlemlerden ulaşılmıştır.

Bu kategoride elde edilen başka bir kodda "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisidir. Bu koda yönelik öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ifadelerinden örnekler Tablo 4.33'de sunulmuştur.

Tablo 4.33.

"Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O1}$	"[11.04] … Dik üçgenler mi oluşturmam gerekir, çembere mi dönsem, çember üzerinden mi ispat yapsam? Diye düşünüyorum. (Satır, 75-76)"
$ÖAS_{D1}$	"[01.45] … Şöyle iki tane açıortay çizdim dış açıortay. Kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü şimdi bu iki tane dış açıortayın kesişimleri, onun kesişimlerini nasıl bulacağım, bunu birleştirsem… (Satır, 19-20)"
$ÖAS_{İ1}$	"[01.16] … Şu şöyle açıortay olsun. Kesiştikleri noktaya da K diyelim. Şimdi bize ne diyor? (Satır, 15-16)"
$ÖA1_{D1}$	"[02.09] Bir üçgende iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü bu dış açılara komşu olmayan, şimdi ilk önce açıyı nasıl kesiştireceğiz? (Satır, 9-10)"

Tablo 4.33 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Bu kategoride elde edilen bir başka üst bilişsel beceri olarak "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." koduna ulaşılmıştır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen tek katılımcı olan $Ö_{İ1}$'in şu ifadeleri;

> "[01.37] … Ben burada üçgenin iç açılarını kullanarak gideceğim. Mesela ABC üçgenini ifade edeceğim. ABC üçgeni için bir ifade yazacağım. Çünkü ABC üçgeninde A açısı geçiyor. İstenen açı geçiyor burada. Bir de şu kesişim yerine de E diyeyim, BEC' yi ifade edeyim. Çünkü burada da E geçiyor. Bu üçgenleri bundan dolayı seçiyorum. $180-2\alpha, 180-2\theta'$ ları yazıyorum. A açısını da A diye göstermiş olayım. Şimdi ABC üçgeninde $a+\ 180-2\alpha, 180-2\theta\ = 180$ buradan a ve 180 leri atayım. $a = 2\alpha + 2\theta - 180$ kalsın. BEC'yi de yazarsam $x + \alpha + \theta = 180\ldots$ α, θ tabi bizim göstereceğimiz şeyde yok. x ve a arasında bağıntı bulmam lazım. Bu nedenle $\alpha + \theta$'yı yok edeceğim. $x = 180 - (\alpha + \theta)$ bunu da yukarıda yerine yazayım: $x = \ 2\alpha, 2\theta$ şöyle diyeyim $\alpha + \theta = 180 - x, 2\alpha + 2\theta = 360 - 2x, a = 360 - 2x - 180,$ buradan x'i yalnız bırakırsam $x = (180 - a)/2$ yani $(90 - a)/2$'yi ispatlamış oluruz. (Satır, 18-26)"

öğretmenin "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." becerisini sergilediğini göstermektedir. Sorgulama kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.34'de sunulmuştur.

Tablo 4.34.

Sorgulama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Kendine Sorar.	✓	✓																✓
İspatın Nasıl Başladığını ve Sonuca Ulaştığını Kendine Sorar.		✓			✓	✓		✓			✓	✓			✓			
Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür.	✓	✓	✓				✓				✓		✓					✓
Yaptığı İşlemleri Nedenleriyle Açıklar.					✓													

Tablo 4.34 incelendiğinde "Sorgulama" kategorisinde en fazla sergilenen üst bilişsel becerilerin "İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar." ve "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." kodları olduğu bulunmuştur $(n = 7)$. "İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar." kodu incelendiğinde öğretmenlerin üçü, son sınıf öğretmen adaylarının üçü ve 1. sınıf

öğretmen adaylarının birinin bu beceriyi sergilediği belirlenmiştir. Gruplarla, ilgili kod arasında ilişki olup olmadığını incelemek amacıyla yapılan Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.35'de sunulmuştur.

Tablo 4.35.

"İspatın Nasıl Başladığını ve Sonuca Ulaştığını Kendine Sorar." Kodu İle Gruplar Arasında İlişkiyi Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar		Toplam	X^2	sd	p
		Sormaz	Sorar				
Gruplar	Öğretmen	3	3	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	3	3	6	1.870	2	.393
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
Toplam		11	7	18			

Tablo 4.35 incelendiğinde "İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olmadığı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 1.870, p > .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar." becerisini etkilemediğini göstermektedir. "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." kodu incelendiğinde başarı düzeylerine göre düşük grubunda yer alan katılımcıların bu beceriyi daha fazla sergilediği saptanmıştır. Bu durumun istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını incelemek için yapılan Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.36'da sunulmuştur.

Tablo 4.36.

"Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür." Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür		Toplam	X^2	sd	p
		Sormaz	Sorar				
Başarı Durumu	İyi	4	2	6			
	Orta	5	1	6	3.273	2	.195
	Düşük	2	4	6			
Toplam		11	7	18			

Tablo 4.36 incelendiğinde "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." kodu ile başarı durumları arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olmadığı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 3.273, p > .05$). Yani bu durum başarı durumları arası farklılığın "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisini etkilemediğini göstermektedir. Bu kategoride en fazla sergilenen üçüncü beceri olarak "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendine sorar." kodu elde edilmiştir ($n = 3$). Bu kod başarı durumuna göre düşük grubunda yer alan iki öğretmen ve iyi grubunda yer alan bir 1. sınıf öğretmen adayı tarafından sergilenmiştir. Sorgulama kategorisinde en az tekrarlanan kod olarak "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." becerisi belirlenmiştir. Bu beceriyi sadece başarı durumuna göre iyi grubunda yer alan bir öğretmenin sergilediği saptanmıştır.

Birinci soru için katılımcıların düşüncelerinden elde edilen bir başka kategori de "Farkındalık" kategorisidir. Bu kategori altında "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.", "İspatın süreç olduğunun farkındadır.", "İspatı anlayarak yapar." ve "Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder." üst bilişsel becerilerine ulaşılmıştır.

Bu kategoride belirlenen ilk kod olan "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." becerisi daha çok katılımcıların gözlenmesinden elde edilmiştir. Ancak Öİ1'in şu cümleleri birkaç farklı yöntemi bilip, bu ispatı yapmada kullandığı stratejinin farkında olduğu biçiminde yorumlanabilir:

> "[06.04] Sonuçta bu bir açı sorusu. İç açılar toplamının 180° olduğunu bilen biri için sentetik ispatla kolayca yapılabilir. Ama bir alternatif yöntem düşünecek olsam… Bunu ilk defa deneyeceğim açıkçası. Aklımda olan bir şey değil. Şöyle ABC diyeyim. Şöyle θ, θ diyeyim, α,α diyeyim. Acaba şu E noktası, Acaba bir paralellik çeksem bunlar arasında bir şey bulur muyum? [Paralelleri çizer]… Belki de bulunabilir yani. Şöyle E'den bir paralel çekeyim. A'dan da bir paralel çekeyim. M kuralları falan oluşsun mesela… Yani biraz kurcalamak lazım ama bu [BE'yi gösterir] paralel değil… Acaba vektörel olarak çözülebilir mi? Yani açı istediği için vektör olarak kafamda bir şey oluşmuyor. Ekleme çıkarma yapsak, vektörel toplam fark. Yani buradan nasıl diyeyim. Vektörlerle yapma konusunda aklımda pek bir şey belirmedi. (Satır, 44-52)"

Öğretmenin ifadelerinden sorunun çözümünü sentetik ve vektörel olarak düşündüğü, uygulamada ise sentetik ispat yöntemini kullandığı anlaşılmaktadır. Bu

ispat yönteminin önerme için uygun olduğunun farkında olması nedeniyle bu beceri üst bilişsel olarak ifade edilmiştir.

Bu kategoride elde edilen bir başka üst bilişsel beceri "İspatın süreç olduğunun farkındadır." kodudur. Bu üst bilişsel beceriyi sergileyen $ÖAS_{D2}$'nin *"*[02.08] *Hayır, sadece sonuç bulunduğunda ispat olmaz. Bir süreç olması lazım ispat için.* (Satır, 13)*"* cümleleri "İspatın süreç olduğunun farkında olduğunun farkındadır." becerisini sergilediğinin göstergesidir.

Çalışmaya katılan öğretmenlerden $Ö_{İ1}$'in "İspatı anlayarak yapar." becerisini sergilediği saptanmıştır. Sesli düşünme protokolünde öğretmen ile araştırmacı arasında geçen diyaloğun bir bölümü şöyledir (Satır, 35-39):

> [05.28] $Ö_{İ1}$: Bu ispatla ben daha önce karşılaşmadım. Ama bu ispatı kendim anlayabiliyorum.
>
> [05.32] A: Yani ispatı ezberleyerek mi yapmadınız, değil mi?
>
> [05.33] $Ö_{İ1}$: Yok ezberleyerek yapmadım. Sadece ispatın nereden geldiğini biliyorum. Derste anlatırken de öğrencilere neyin nereden geldiğini söylüyorum. Buradan formül çıkıyor diye anlatıyorum. Mantığını nereden geldiğini vermeye çalışıyorum.

Diyalog incelendiğinde öğretmenin "İspatı anlayarak yapar." becerisini sergilediği söylenebilir. Öğretmenin mantıksal çıkarımlar yapması ve yaptığı bu çıkarımların farkında olmasından dolayı "İspatı anlayarak yapar." becerisi üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Çalışmaya katılan bazı öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının "Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder." becerisini sergilediği saptanmıştır. Sesli düşünme protokolünde $ÖAS_{D2}$'nin hata yaptığını belirtmesi üzerine araştırmacının hata yaptığını nasıl fark ettiğini sorması üzerine öğretmen adayının verdiği *"*[05.26] *Şöyle fark ettim. Aslında dalgınlığıma geldi. İç açı sadece şurası oluyor:* $180 - 2a$*. Ben şuradaki dörtgenden bahsediyorsam eğer dörtgenin şurasında oluşan açı* $180 - 2a + a$ *olmalıydı. Dolayısıyla* $180 - a$ *olacaktı elimde.* (Satır, 36-37)*"* cevaptan bu üst bilişsel beceriyi sergilediği tespit edilmiştir. Bir başka öğretmen adayı $ÖA1_{İ2}$'nin de "Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığı fark eder." becerisini sergilediği araştırmacıyla arasında geçen şu diyalogdan tespit edilmiştir (Satır, 59-68):

[06.38] $ÖA1_{İ2}$: Son adıma ulaştığımı düşünüyorum. Yoksa 4'e bölecek miyim? Yok, bir saniye hocam. $360 + 2x$, işlem hatası da yapmamışım.

[06.56] A: Nasıl karar verdiniz işlem hatası yapıp yapmadığınıza?

[06.58] $ÖA1_{İ2}$: İşlemlerimi kontrol ettim.

[06.59] A: İşlemlerinizi nasıl kontrol ettiniz? Bunu sıralı bir süreç olarak mı yaptınız? Yani Baştan başlayıp sona doğru işlem hatası var mı diye kontrol mü ediyorsunuz? Yoksa sondan başlayıp başa doğru mu geliyorsunuz? Ya da direkt ortadan herhangi bir yere mi bakıyorsunuz?

[07.11] $ÖA1_{İ2}$: Şurada x değeri var. Burada $\alpha + \beta$ olduğu için $\alpha + \beta$'yı işlemden çıkarmalıydım. $\alpha + \beta$' yı işlemden çıkarmaya çalıştım. $180 - x$ buldum. Bunu götürmek için de $\alpha + \beta$'yı yerine yazdım. Bu yüzden sadece şuradan itibaren baktım işlem hatası yapıp yapmadığıma.

Diyalogdan öğretmen adayının hata yaptığı bölümün farkına varabildiği anlaşılmaktadır. Bu nedenle beceri üst bilişsel olarak yorumlanmıştır. Farkındalık kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.37'de sunulmuştur.

Tablo 4.37.

Farkındalık Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$ÖA1_{İ2}$
İspat Yapmada Kullandığı Stratejinin Farkındadır.	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓			✓	✓			✓			
İspatın Süreç Olduğunun Farkındadır.														✓				
İspatı Anlayarak Yapar.					✓													✓
Hata Yaptığında Hangi Adımda Hata Yaptığını Fark Eder.						✓		✓	✓					✓	✓			✓

Tablo 4.37 incelendiğinde farkındalık kategorisine bakıldığında en fazla tekrarlanan kodun "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." becerisi olduğu görülmektedir $(n = 10)$. Kodun sıklığının öğretmen ve öğretmen adaylarına göre dağılımı incelendiğinde öğretmenlerin tamamının, son sınıf öğretmen adaylarının

üçünün ve 1. sınıf öğretmen adaylarından bir kişinin beceriyi sergilediği tespit edilmiştir. İlgili kodun gruplarla anlamlı düzeyde ilişkili olup olmadığını incelemek amacıyla yapılan Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.38'de sunulmuştur.

Tablo 4.38.

"İspat Yapmada Kullandığı Stratejinin Farkındadır." Kodu İle Gruplar Arasında İlişkiyi Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır		Toplam	X^2	sd	p
		Farkında değildir	Farkındadır				
Gruplar	Öğretmen	0	6	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	3	3	6	8.550	2	.014
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
Toplam		8	10	18			

Tablo 4.38 incelendiğinde "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir ilişki olduğu bulunmuştur ($X^2{}_{(2)} = 8.550, p < .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." becerisini etkilediğini göstermektedir. Öğretmenlerin tamamı "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." becerisini sergilemekte iken, son sınıf öğretmen adaylarından üçü "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır" becerisini sergilemiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının ise genellikle bu beceriyi sergilemediği tespit edilmiştir. Bu kategoride en sık tekrarlanan ikinci üst bilişsel beceri ise "Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder." kodudur ($n = 6$). Kodun sıklığının öğretmenlere ve öğretmen adaylarına göre dağılımı incelendiğinde öğretmenlerden birinin, son sınıf öğretmen adaylarından ikisinin, 1. sınıf öğretmen adaylarından ise üçünün bu üst bilişsel beceriyi sergilediği söylenebilir. Dağılımın istatistiksel olarak ilişkili olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.39'da sunulmuştur.

Tablo 4.39.

"Hata Yaptığında Hangi Adımda Hata Yaptığını Fark Eder." Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder		Toplam	X^2	sd	p
		Farkında değildir	Farkındadır				
Gruplar	Öğretmen	5	1	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	4	2	6	1.500	2	.472
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	3	3	6			
Toplam		12	6	18			

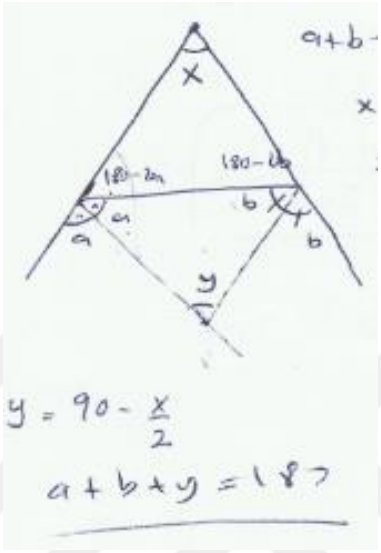
Tablo 4.39 incelendiğinde "Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olmadığı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 1.500, p > .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder." becerisini etkilemediğini göstermektedir. Bu kategori de en az sergilenen ikinci beceri "İspatı anlayarak yapar." becerisidir ($n = 2$). Bu beceriyi başarı durumuna göre iyi grubunda yer alan bir öğretmen ve bir 1. sınıf öğretmen adayının sergilediği belirlenmiştir. Bu kategoride en az sergilenen üst bilişsel beceri ise "İspatın süreç olduğunun farkındadır." kodudur ($n = 1$).

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarından elde edilen üst bilişsel beceriler temasındaki bir başka kategori de "planlama" kategorisidir. Bu kategori altında "İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar.", "Sonuca yönelik tahminde bulunur.", "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." ve "Hedefini şekil üzerinde belirler ve ulaşmak istediği hükmü yazar." kodları elde edilmiştir.

"İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar." becerisini sergilediği belirlenen $ÖA1_{I2}$'nin *"*[04.39] *Açılardan bir şey bulmaya çalışacağım. Şu a ile ilgili bir şey bulmaya çalışacağım. Sonra a'yı da x'e bağlamaya çalışacağım ama çıkar mı bilmiyorum…* (Satır, 44-45)*"* ifadesi, öğretmen adayının bu beceriyi sergilediğini göstermektedir.

"Sonuca yönelik tahminde bulunur." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{D2}$'nin "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." becerisinde kullandığı ifadeden sonuca yönelik tahminde bulunduğu anlaşılmaktadır.

Bu kategori de elde edilen bir başka üst bilişsel beceri "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." kodudur. Bu beceriye yönelik veriler daha çok gözlemlerden elde edilmiştir. Ancak $ÖAS_{D2}$'nin etkinlik kartından elde edilen bilgiden öğretmen adayının ulaşmak istediği hedefi yazdığı belirlenmiştir. Öğretmen adayının etkinlik kartında hedefini yazdığı bölümü içeren kesit Şekil 4.11'de sunulmuştur.



Şekil 4.11. $ÖAS_{D2}$'nin ispata başlamadan önce yazdığı hedef

Şekil 4.11 incelendiğinde öğretmen adayının ispata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verdiği ve hedefini yazdığı görülebilir. Başka bir ifadeyle "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." becerisini sergilediği söylenebilir.

Planlama kategorisinde ulaşılan bir başka üst bilişsel beceri de "Hedefini şekil üzerinde belirler ve ulaşmak istediği hükmü yazar." kodudur. Bu üst bilişsel becerinin sadece bir öğretmen ($Ö_{O2}$) tarafından sergilendiği saptanmıştır. Sesli düşünme protokolünde öğretmenin kullandığı (Satır, 14-17);

> "[01.08] …Bu dış açılara komşu olmayan iç açı demiş, o zaman bir tane üçgen çizmemi istiyor. Çizdim. Bir tane de dış açıortay çizdim. Oluşturduğu açıya α dedim. Bu dış açılara komşu olmayan iç açının ölçüsünün yarısının 90'dan çıkarılmasıyla elde edilir. O zaman şuraya β dersem ölçüsünün yarısı $\alpha = \beta/2 + 90$ olup göstermiş olurum."

Cümlelerinden öğretmenin hedefini şekil üzerinde belirlediği ve ulaşmak istediği hükmü yazdığı belirlenmiştir. Planlama kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.40'da sunulmuştur.

Tablo 4.40.

Planlama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖAI_{D1}$	$ÖAI_{D2}$	$ÖAI_{O1}$	$ÖAI_{O2}$	$ÖAI_{I1}$	$ÖAI_{I2}$
İspatı Nasıl Yapacağına Yönelik Belli Bir Plan Yapar.																		✓
Sonuca Yönelik Tahminde Bulunur.		✓						✓	✓									
İspata Başlamadan Önce Neyi İspatlayacağına Karar Verir			✓	✓	✓	✓		✓			✓				✓			
Hedefini Şekil Üzerinde Belirler Ve Ulaşmak İstediği Hükmü Yazar.				✓														

Tablo 4.40 incelendiğinde planlama kategorisinde en fazla sergilendiği belirlenen üst bilişsel beceri "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir" $(n = 7)$ becerisidir. "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." kodunu sergileyenlerin dördünün öğretmen, ikisinin son sınıf öğretmen adayı, birinin 1. sınıf öğretmen adayı olduğu belirlenmiştir. Bu değişimin istatistiksel olarak anlamlılığını incelemek amacıyla yapılan Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.41'de sunulmuştur.

Tablo 4.41.

"İspata Başlamadan Önce Neyi İspatlayacağına Karar Verir." Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir		Toplam	X^2	sd	p
		Yapamaz	Yapar				
Gruplar	Öğretmen	2	4	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	4	2	6	3.273	2	.195
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
Toplam		11	7	18			

Tablo 4.41 incelendiğinde "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olmadığı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 3.273, p > .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." becerisini sergilemeyi etkilemediğini göstermektedir. Bu kategoride en sık tekrarlanan üçüncü üst bilişsel beceri ise "Sonuca yönelik tahminde bulunur." kodudur ($n = 3$). En az sergilenen üst bilişsel beceriler ise "İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar." ve "Hedefini şekil üzerinde belirler ve ulaşmak istediği hükmü yazar." kodlarıdır ($n = 1$).

Matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının 1. soruda sergilemiş olduğu becerilerden elde edilen bir başka kategori de "strateji belirleme" kategorisidir. Bu kategori "Altında ispat türünü doğru seçebilir.", "Soruyu okurken zihninde şekil çizer.", "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." ve "Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır." kodları bulunmuştur.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen becerilerin ilki "İspat türünü doğru seçebilir." kodudur. Becerinin sergilendiği öğretmenlerden ve öğretmen adaylarından gözlemler yoluyla elde edilmiştir.

Bu kategori de elde edilen ikinci üst bilişsel beceri "Soruyu okurken zihninde şeklini çizer." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.42'de sunulmuştur.

Tablo 4.42.

"Soruyu Okurken Zihninde Şeklini Çizer." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[00.55] Şu iki dış açıortayın derken kafamda üçgenin iki dış açıortayını kafamdan çizmeye çalışıyordum. Bu yüzden soruyu bir daha okuma gereksinimi duydum. (Satır, 11-12)"
$ÖAS_{D2}$	"[05.53] … Aslında ben soruyu yazarken kafamda bu şekil vardı. Yani ben buranın zaten 180 − a buranın zaten 180 − b olduğunu biliyordum. (Satır, 40-41)"

Tablo 4.42 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Soruyu okurken zihninde şeklini çizer." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

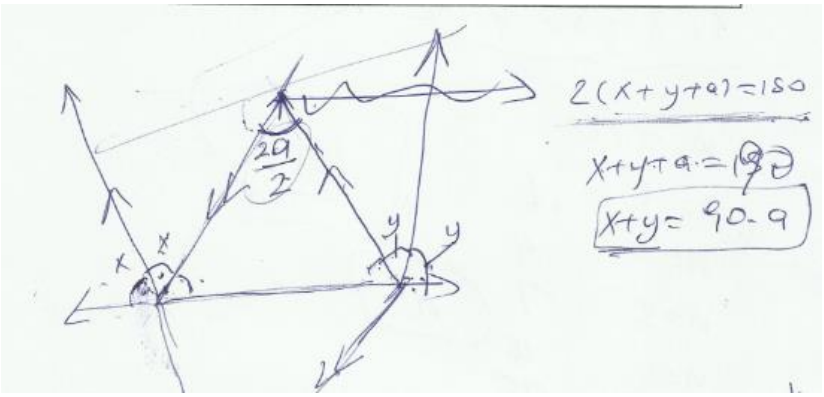
Strateji belirleme kategorisinde elde edilen diğer iki kod ise yaratıcı düşünmenin aşamalarıyla ilgilidir. Bu aşamalardan ilki "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." kodudur. Çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adaylarından "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." becerisini sergileyenlerin ifadeleri Tablo 4.43'de sunulmuştur.

Tablo 4.43.

"Iraksak Düşünme Yeteneğini Kullanır." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ1}$	"[05.43] … Daha önce kullanmadım ama şimdi aklıma geldi belki biraz da farklı olacak ama doğruda açılara kayarak da belki çözülebilir bu soru… (Satır, 41-42)"
$Ö_{O2}$	"[02.02] … Biz burada bir dörtgende kullanabiliriz, bir üçgenin iç açılarını da kullanabiliriz... (Satır, 20-21)"
$ÖAS_{D1}$	"[00.39] … Soruda iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsünü sorduğu için ben geometrik çözebilirim…(Satır, 7-8). Vektörlerle de çözebilirim… (Satır, 11). Üçgen kapalı bir şekildir. Bu yüzden üçgende bir vektördür bence. O yüzden de bu vektörlerle çözülebilir… (Satır, 13-14)".

Tablo 4.43 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen $ÖAS_{D1}$'in önce "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." becerisini sergilediği sonra da "Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır." becerisini sergileyerek çözüm yollarını teke düşürdüğü ve çözümünü vektörel olarak yapmaya çalıştığı belirlenmiştir. Öğretmen adayının ispatından kesit Şekil 4.12'de sunulmuştur.



Şekil 4.12. $ÖAS_{D1}$'in 1. soruya yönelik çözümünden kesit

Şekil 4.12 incelendiğinde öğretmenin vektörel olarak ispatı yapmaya çalıştığı, ancak bu yolla sonuca ulaşamayınca sentetik ispatı denemeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Strateji belirleme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.44'de sunulmuştur.

Tablo 4.44.

Strateji Belirleme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
İspat Türünü Doğru Seçebilir.	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓			✓	✓		✓
Soruyu Okurken Zihninde Şekil Çizer.				✓				✓										
Iraksak Düşünme Yeteneğini Kullanır.				✓	✓		✓											
Yakınsak Düşünme Yeteneğini Kullanır.			✓	✓	✓		✓							✓				

Tablo 4.44 incelendiğinde strateji belirleme kategorisinde en sık rastlanan üst bilişsel beceri kodu "ispat türünü doğru seçebilir." becerisidir ($n = 13$). Bu kodun dağılımı incelendiğinde ise başarı düzeylerine göre düşük kategorisinde yer alan katılımcıların sadece ikisinin bu beceriyi sergiliyor olması dikkat çekicidir. Bu durumun istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını incelemek için yapılan Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.45'de sunulmuştur.

Tablo 4.45.

"İspat Türünü Doğru Seçebilir." Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		İspat türünü doğru seçebilir		Toplam	X^2	sd	p
		Seçemez	Seçebilir				
Başarı	İyi	1	5	6			
Durumu	Orta	1	5	6	2.215	2	.330
	Düşük	3	3	6			
Toplam		5	13				

Tablo 4.45 incelendiğinde "İspat türünü doğru seçebilir." kodu ile başarı durumları arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir ilişki olmadığı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 2.215, p > .05$). Yani bu durum başarı durumları arası farklılığın "İspat türünü doğru seçebilir." becerisini sergilemeyi etkilemediğini göstermektedir. Bu kategoride en sık tekrarlanan ikinci üst bilişsel becerinin "Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır." olduğu görülmektedir ($n = 5$). Bu beceriyi sergileyenlerin üçü öğretmen, biri son sınıf öğretmen adayı ve biri 1. sınıf öğretmen adayıdır. Bu kategoride en sık sergilenen üçüncü üst bilişsel beceri "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." kodudur ($n = 3$). Bu beceriyi iki öğretmenin, bir son sınıf öğretmen adayının sergilediği saptanmıştır. Bu kategoride en az sergilenen üst bilişsel beceri ise "Soruyu okurken zihninde şekil çizer." kodudur ($n = 2$).

Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bir başka kategori analojik akıl yürütme kategorisidir. Bu kategori altında bir tek becerinin sergilendiği belirlenmiştir: "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." Bu beceriyi sergilediği belirlenen $ÖA1_{I1}$'in *"*[01.03] *Daha önce çözdüğüm soru aklıma geldi. Aynı yolla bunu da çözebileceğimi düşündüm.* (Satır, 12)*"* cümlelerinden öğretmen adayının ispat sürecinde analojik akıl yürüttüğü belirlenmiştir. Analojik akıl yürütme kategorisinde ulaşılan kodun katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.46'da sunulmuştur.

Tablo 4.46.

Analojik Akıl Yürütme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar.	✓			✓		✓									✓	✓	✓	✓

Tablo 4.46 incelendiğinde analojik akıl yürütme kategorisi sergilendiği belirlenen tek becerinin "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." kodu olduğu belirlenmiştir. $(n = 7)$. "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." kodu incelendiğinde, bu kodun iki öğretmen, bir son sınıf öğretmen adayı ve dört 1. sınıf öğretmen adayı tarafından sergilendiği saptanmıştır. Bu dağılımın istatistiksel olarak anlamlılığını incelemek amacıyla yapılan Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.47'de sunulmuştur.

Tablo 4.47.

"Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar." Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		"Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar."		Toplam	X^2	sd	p
		Yapamaz	Yapar				
Gruplar	Öğretmen	4	2	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6	3.273	2	.195
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	2	4	6			
Toplam		11	7	18			

Tablo 4.47 incelendiğinde "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde bir ilişki olmadığı bulunmuştur $(X^2{}_{(2)} = 3.273, p > .05)$. Yani bu durum gruplar arası farklılığın analojik akıl yürütmeyi etkilemediğini göstermektedir.

Bu çalışmada ulaşılan bir başka üst bilişsel beceriler kategorisi ise "kontrol etme" dir. Bu kategori altında; "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder.", "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir.", "Bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder.", "Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir" ve "Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar." kodları bulunmuştur.

Kontrol etme kategorisinde "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." üst bilişsel becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.48'de sunulmuştur.

Tablo 4.48.

"Hedeflediği Sonuca Ulaşıp Ulaşamadığını Kontrol Eder." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[05.03] Şu an ulaşmak istediğimle son bulduğum sonucun birbirine eşit olup olmama durumunu düşünüyorum. (Satır, 29-30)"
$Ö_{D2}$	"[12.07] …İstenilen sonuca yani başta belirlediğim hedefime ulaşmış oldum. (Satır, 37)"

Tablo 4.48 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

"Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği belirlenen katılımcıların ifadeleri Tablo 4.49'da sunulmuştur.

Tablo 4.49.

"Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ1}$	"[04.55] …Geçerli olduğundan eminim. Yani sonuçta temel bilgileri kullandım. Üçgenin iç açıları toplamı 180° kesin bir bilgi olduğu için, iki üçgeni de ayrı ayrı değerlendirip ortak çözümler yapınca çıkan ifadenin kesin sağlaması gerekir. (Satır, 28-30)"
$Ö_{İ2}$	"[09.50] Hocam ispatın geçerli olabilmesi için her durumda sağlamalıdır. Biz burada α ve β'ya bir sayı vermedik. Her durum için yaptık. Şu anda cebirsel olarak işlemlerimde de bir hata yok. O halde ispatım geçerlidir… (Satır, 41-42)"
$Ö_{O2}$	"[09.20] Tabi ki ispat geçerlidir. Bir üçgenin iç açıları toplamının 180° olması gerçeği, bir dörtgenin iç açıları toplamının 360° olması gerçeğiyle yola çıkıp sonuca ulaştığım için sonucumun kesin doğru olduğunu garanti edebilirim. Çünkü matematiksel işlem yaptım, numerik işlem. Herhangi bir özel α açısı vermedim. Herhangi bir özel dörtgen kullanmadım. Herhangi bir özel üçgen kullanmadım. Bunlar beni doğru sonuca götürür. Ya da ispatın geçerliliğini saptar. (Satır, 56-60)"
$ÖAS_{O1}$	"[08.38] Çünkü burada direkt şöyle düşünmedim. x'i alıp burada yazmadım, $90 - x/2$'de yazmadım. x'i a ve b cinsinden buldum, ondan sonra bu açıya t dedim. Yani doğrudan bir şeyden yazmadım x ve $90 - x/2$ yerine. (Satır, 26-28)"
$ÖA1_{O1}$	"[03.25] Yani yanlış bir şey yapmadım diye düşünüyorum. Yazıdan anladığımız şekle döktüm açıortay olduğu için şunlar eşit olacak zaten sonra üçgenin iç açılar toplamından iki üçgeni birleştirdiğimizde diğerini de yerine yazdığımızda aynı sonucu veriyor. (Satır, 16-18)"

Tablo 4.49 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Katılımcıların sesli düşünme protokolündeki ifadeleri incelendiğinde tümdengelimli çıkarımlarla formel bir ispat yürüterek sonuca ulaştıkları görülmüştür.

Bu nedenle kod "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." şeklinde isimlendirilmiştir. Bu beceri tümdengelimli çıkarım yapmayı gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Çalışmada kontrol etme kategorisinde elde edilen bir başka beceri "Bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder." kodudur. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarından $ÖAS_{İ1}$'in "Bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder." becerisini sergilediği belirlenmiştir. Öğretmen adayının *"*[02.37] ... *Şuraya ben değer versem daha kolay olur aslında. Şu* a *açısı* x *olsun. Buradan* $360 + x - 2a - 2b = 180$ *ve* $2a + 2b - x = 180$ *derece olur. Bize aslında şurada bir* 90 *lazım.* $2a + 2b$ *ama 90 yok.* (Satır, 28-30)*"* cümlelerinden bu beceriyi sergilediği anlaşılmıştır.

Çalışmada elde edilen bir başka üst bilişsel beceri de "Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." kodudur. Bu becerinin elde edildiği katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.50'de sunulmuştur.

Tablo 4.50.

"Hata Yaptığında İşlem Adımlarını Tek Tek Kontrol Eder ve Son Olarak Önermenin Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ2}$	"[10.53] Yani yanlış yaptığımı kontrol ederken sondan başa doğru giderek adımları kontrol ediyorum. (Satır, 52)"
$Ö_{O2}$	"[08.25] Birincide şu oldu. Yanlış bulduğum sonucun işlem hatasından kaynaklandığını düşünüp sorunun tekrar çözümüne döndüm. Hipoteze dönmedim. Fakat daha sonra gittiğimde sonucumun doğru olabileceğini düşünüp doğru olması gerektiğini düşünüp hipoteze döndüğümde, hipotezi aslında yanlış yorumladığımı fark ettim. Dolayısıyla şu an doğru sonuca ulaşmış oldum. (Satır, 51-54)"

Tablo 4.50 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Öğretmenin cümlelerinden işlem adımlarını tek tek kontrol ederek kurduğu hipoteze kadar ulaştığı anlaşılmaktadır.

Bu kategoride elde edilen bir diğer kod "Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar." becerisidir. $Ö_{D2}$ öğretmeninin "Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar." becerisini sergilediği saptanmıştır. Öğretmenin kurduğu *"*[07.10] *Benim amacım x in değerini a ve b cinsinden yazmaktı. O halde burası… Burada yanlış yaptık işlemi. Sil baştan mı başlasak… Bu sefer çözeceğim.* (Satır, 23-24)*"* cümlesi bu beceriyi sergilediği şeklinde yorumlanmıştır. Kontrol etme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.51'de sunulmuştur.

Tablo 4.51.

Kontrol Etme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Hedeflediği Sonuca Ulaşıp Ulaşamadığını Kontrol Eder.		✓	✓	✓	✓			✓	✓			✓			✓			
Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.	✓	✓		✓	✓	✓			✓						✓			✓
Bazı Örneklerle Hipotez Ve Hükmün Doğruluğunu Kontrol Eder.											✓							
Hata Yaptığında İşlem Adımlarını Tek Tek Kontrol Eder Ve Son Olarak Önermenin Doğruluğunu Değerlendirir.			✓			✓												
Yanlış Bir İşlem Yaptığında Sorunun En Başına Dönerek Tekrar Çözüm Yapar.		✓																

Tablo 4.51 incelendiğinde kontrol etme kategorisinde en fazla sergilenen beceriler; "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." ve "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." kodlarıdır $(n = 8)$. "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." kodu incelendiğinde öğretmenlerin dördünün, son sınıf öğretmen adaylarından üçünün ve 1. sınıf öğretmen adaylarından birinin bu beceriyi sergilediği belirlenmiştir. Gruplara göre farklılığın anlamlı olup olmadığına yönelik yapılan Ki-Kare Testi sonuçları Tablo 4.52'de sunulmuştur.

Tablo 4.52.

"Hedeflediği Sonuca Ulaşıp Ulaşamadığını Kontrol Eder." Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder		Toplam	X^2	sd	p
		Etmez	Eder				
Gruplar	Öğretmen	2	4	6	3.150	2	.207
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	3	3	6			
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
Toplam		10	8	18			

Tablo 4.52 incelendiğinde "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olmadığı bulunmuştur $(X^2{}_{(2)} = 3.150, p > .05)$. Yani bu durum gruplar arası farklılığın "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." becerisini etkilemediğini göstermektedir. "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." kodu incelendiğinde öğretmenlerin beşi, son sınıf öğretmen adaylarının biri ve 1. sınıf öğretmen adaylarının ikisinin bu üst bilişsel beceriyi sergilediği söylenebilir. Bu farklılığın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığına Ki-Kare Testi ile bakılmış ve sonuçlar Tablo 4.53'de sunulmuştur.

Tablo 4.53.

"Hedeflediği Sonuca Ulaşıp Ulaşamadığını Kontrol Eder." Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir		Toplam	X^2	sd	p
		Yapmaz	Yapar				
Gruplar	Öğretmen	1	5	6	5.850	2	.054
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	4	2	6			
Toplam		10	8	18			

Tablo 4.53 incelendiğinde "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı

düzeyde ilişki olmadığı bulunmuştur ($X^2{}_{(2)} = 5.850, p > .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini etkilemediğini göstermektedir. Yukarıdaki iki beceriden sonra bu kategoride en fazla sergilenen üst bilişsel beceriler "Bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder." ve "Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." kodlarıdır ($n = 2$). Bu kategoride en az sergilenen üst bilişsel beceri ise "Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar." kodudur ($n = 1$).

Çalışmanın birinci sorusunda üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bir başka kategori "ilişkilendirme" kategorisidir. Bu kategori altında "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." ve "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." kodları elde edilmiştir.

"İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." kodu daha çok gözlemler yoluyla elde edilmiştir. Gözlemlerde öğretmenlerin şekil çizdiği, çizdikleri şekli göz önüne alarak işlemler yaptıkları, hipotez-hüküm belirledikleri saptanmıştır. İlişkilendirme yapılması kişinin birkaç düşünme sürecini içinde barındıran bir yapı olduğundan üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Elde edilen bir diğer kod olan "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisine yönelik katılımcıların düşünceleri Tablo 4.54'de sunulmuştur.

Tablo 4.54.

"İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{D2}$	"[08.09] Şu an bulduğum denklemle benden istenen denklem arasında benzerlik var. Birisi artı, diğeri eksi oluyor. Diğer düşündüğüm şey ise bir tarafta y, diğer tarafta $a + b$ var. y ile $a + b$ arasında bağlantı kurabilirim. Şöyle yazayım; $a + b$ yerine ben $180 - y$ yazayım. Çıktı evet. Küçük üçgenden dolayı $a + b$ yerine $180 - y$ yazdım. Bunun yerine bunu yazdım. Şimdi ben şu y'yi bu tarafa, bu denklemi komple bu tarafa aldım. $y = 90 - x/2$ çıktı. Bunun bu olduğunu göstermiş oldum. (Satır, 50-54)"
$ÖAS_{O1}$	"[06.00] Acaba dedim hani şurayla direk bulduğum x arasında bir bağlantı kurabilir miyim? Sonuçta 180-ab olacak bu açı. (Satır, 16-17)"

Tablo 4.54 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. İlişkilendirme kategorisinde elde edilen becerilerin kodlara göre dağılımı Tablo 4.55'de sunulmuştur.

Tablo 4.55.

İlişkilendirme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
İspat Sürecinde Şekiller Ve Semboller Arasında İlişki Kurar.	✓	✓	✓	✓	✓	✓					✓	✓						✓
İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar.		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓			✓						✓

Tablo 4.55 incelendiğinde üst bilişsel beceriler temasının son kategorisi olan ilişkilendirme kategorisinde elde edilen her iki kodda aynı sıklıkla sergilenmektedir $(n = 9)$. "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." kodunu çalışmaya katılan öğretmenlerin tamamının, son sınıf öğretmen adaylarından ikisinin ve birinci sınıf öğretmen adaylarından birinin sergilediği bulunmuştur. Bu farklılığın istatistiksel olarak anlamlılığını incelemek amacıyla yapılan Ki-Kare Testi sonuçları Tablo 4.56'da sunulmuştur.

Tablo 4.56.

İspat Sürecinde Şekiller ve Semboller Arasındaki İlişkiyi Kurar Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		İspat sürecinde şekiller ve semboller arasındaki ilişkiyi kurar		Toplam	X^2	sd	p
		Yapmaz	Yapar				
Gruplar	Öğretmen	0	6	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	4	2	6	9.333	2	.009
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
Toplam		9	9	18			

Tablo 4.56 incelendiğinde ispat sürecinde "Şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olduğu bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 9.333, p < .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." becerisini etkilediğini göstermektedir. Bu durum katılımcıların "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." becerisini sergilediğini, öğretmen adaylarının ise genellikle bu beceriyi sergilemediği şeklinde yorumlanabilir. "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." kodunun ise öğretmenlerin beşi, son sınıf öğretmen adaylarının üçü ve 1. sınıf öğretmen adaylarının biri tarafından sergilendiği belirlenmiştir. Bu farklılığın istatistiksel olarak anlamlılığına Ki-Kare Testi ile bakılmıştır. İstatistik sonuçları Tablo 4.57'de sunulmuştur.

Tablo 4.57.

İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar Kodu İle Gruplar Arasında Dağılımı Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar		Toplam	X^2	sd	p
		Yapmaz	Yapar				
Gruplar	Öğretmen	1	5	6			
	Son Sınıf Öğretmen Adayı	3	3	6	5.333	2	.069
	1. Sınıf Öğretmen Adayı	5	1	6			
Toplam		9	9	18			

Tablo 4.57 incelendiğinde "İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olmadığı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 5.333, p > .05$). Yani bu durum gruplar arası farklılığın "İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar." becerisini etkilemediğini göstermektedir.

4.3. İkinci Etkinlik Kartındaki Sorudan Elde Edilen Nitel Bulgular

Yapılan içerik analizi sonucunda "Bilişsel beceri" ve "Üst bilişsel beceri" olarak iki tema elde edilmiş ve verilerin sunumu bu temalara göre yapılmıştır.

4.3.1. İkinci etkinlik kartındaki sorudan bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular

Bilişsel teması altında "İspat önermesini okuma", "Şekil çizme", "Önermenin altını çizme", "Doğruluğunu değerlendirme", "Strateji belirleme", "İşlem süreci" ve "Sezgisel kestirme yolları" olarak yedi kategori ve bu kategoriler altında 16 koda ulaşılmıştır.

Çalışmaya katılan öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde sergiledikleri becerilere yönelik bilişsel beceriler temasında oluşan ilk kategori "ispat önermesini okuma" kategorisidir. İspat önermesini okuma kategorisinde "İspat önermesini ilk kez okur." ve "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." kodları elde edilmiştir.

Çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adaylarının tamamı "İspat önermesini ilk kez okur." becerisini sergilemişlerdir. Katılımcıların bu beceriyi sergilediği sesli düşünme protokolünde yapılan gözlemlerden elde edilmiştir.

"Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerisini sergilediği belirlenen $Ö_{O1}$ öğretmeninin araştırmacıya sorduğu *"*[10.46] *Süre sınırlaması var mıydı?* (Satır, 70)*"* sorusundan sonra kullandığı *"*[11.00] *O zaman, soruya tekrar bakayım. Biraz daha düşüneceğim.* (Satır, 72)*"* ifadesinden öğretmen adayının bu beceriyi sergilediği anlaşılmıştır. İspat önermesini okuma kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.58'de sunulmuştur.

Tablo 4.58.

İspat Önermesini Okuma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖAI_{D1}$	$ÖAI_{D2}$	$ÖAI_{O1}$	$ÖAI_{O2}$	$ÖAI_{I1}$	$ÖAI_{I2}$
İspat Önermesini İlk Kez Okur.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Önermeyi Anlamadığında Birkaç Kez Okur ve Verilenler Üzerine Düşünür.			✓															

Tablo 4.58 incelendiğinde ispat önermesini okuma kategorisinde katılımcıların en fazla sergilediği bilişsel beceri "İspat önermesini ilk kez okur." kodudur ($n = 16$). Bu becerinin sadece 1. sınıf öğretmen adaylarından başarı düzeylerine göre iyi kategorisinde yer alan iki katılımcı tarafından sergilenmediği saptanmıştır. Bu kategorideki diğer kod olan "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." kodu ise sadece bir öğretmen tarafından sergilenmiştir.

Çalışmanın ikinci sorusunun bilişsel beceriler temasında oluşan ikinci kategori "şekil çizme" dir. Bu kategori altında "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer.", "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." ve "İspat sürecinin aşaması olarak şekil çizer." kodları bulunmuştur.

Bu kategorideki ilk beceri olan "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." Becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının düşünceleri Tablo 4.59'da sunulmuştur.

Tablo 4.59.

"Önermeyi Okuduktan Sonra Anlamak İçin Şekil Çizer." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O1}$	"[08.55] … Hemen bir tane ABC üçgeni çizeceğiz… Anlamak için. (Satır, 66)"
$Ö_{İ2}$	"[11.01] …En başta bir üçgen çizdik (Satır, 55)… Anlamak için ilk önce şekli oluşturacağım. (Satır, 57)"
$ÖAS_{D2}$	"[11.21] …Ben bir ABC üçgenini temsili olarak çizeceğim. Daha rahat anlayabilmek için çiziyorum. (Satır, 75-76)"

Tablo 4.59 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Şekil çizme becerisi sergileyen katılımcıların şekil çizme amaçlarından bir diğeri "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen öğretmenlerden $Ö_{O1}$ *"[09.14] Önemli olan olayı somutlaştırmak görselleştirmek. Yani kafanızda bir şey oluşsa bile çizip onu daha anlaşılır daha somut hale getirmek önemli.*

(Satır, 68-69)*”* cümleleriyle “Somutlaştırma amacıyla şekil çizer.” becerisini sergilediğini göstermiştir.

“İspat yapma sürecinin aşaması olarak şekil çizer.” becerisini sergilediği belirlenen $ÖA1_{İ1}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 21-24):

[02.56] $ÖA1_{İ1}$: Bu önermenin ispatı için şekil çizmek gerekiyor.
[03.00] A: Neden şekil çizmek gerekiyor?
[03.05] $ÖA1_{İ1}$: Kosinüs oluşturmak için şekil çizmeye ihtiyacımız var. Yani şekil olmadan bunu göstermemiz mümkün değil.

Yukarıdaki diyalog incelendiğinde öğretmen adayının bu ispatı yapabilmek için şekle ihtiyaç duyduğu ve şekil çizmeyi ispat yapma sürecinin aşaması olarak gördüğü söylenebilir. Bu nedenle katılımcının “İspat yapma sürecinin aşaması olarak şekil çizer.” becerisini sergilediği anlaşılmıştır. Şekil çizme kategorisinde elde edilen kodların kategorilere göre dağılımı Tablo 4.60’da sunulmuştur.

Tablo 4.60.

Şekil Çizme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$ÖA1_{İ2}$
Önermeyi Okuduktan Sonra Anlamak İçin Şekil Çizer.			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓		
İspat Sürecinin Aşaması Olarak Şekil Çizer.														✓			✓	
Somutlaştırma Amacıyla Şekil Çizer.			✓					✓										

Tablo 4.60 incelendiğinde şekil çizme kategorisinde en fazla tekrarlandığı tespit edilen becerinin “Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer.” kodu olduğu görülmüştür. Bu beceriyi sergilemeyen katılımcılardan üçünün düşük başarı düzeyinde yer alan bireyler olması dikkat çekidir. Bu dikkat çekici durumun anlamlı olup olmadığına bakmak için Ki-Kare testi yapılmıştır. Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.61’de sunulmuştur.

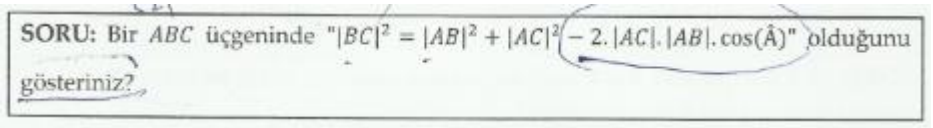
Tablo 4.61.

"Önermeyi Okuduktan Sonra Anlamak İçin Şekil Çizer." Kodu İle Başarı Durumlarını Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer		Toplam	X^2	sd	p
		Çizmez	Çizer				
Başarı	İyi	2	4	6			
Durumu	Orta	1	5	6	1.500	2	.472
	Düşük	3	3	6			
Toplam		6	12	18			

Tablo 4.61 incelendiğinde "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." kodu ile başarı durumları arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olmadığı bulunmuştur ($X^2{}_{(2)} = 1.500, p > .05$). Yani bu durum başarı durumları arası farklılığın "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." becerisini etkilemediğini göstermektedir. Bu kategoride sergilenen diğer beceriler "İspat sürecinin aşaması olarak şekil çizer." ve "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." kodları ise eşit sayıda katılımcı tarafından sergilenmişlerdir ($n = 2$).

İkinci soruda bilişsel beceriler temasında ulaşılan üçüncü kategori "Önermenin altını çizme" kategorisidir. Bu kategoride sadece "Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." kodu bulunmuştur. "Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." kodunun elde edildiği öğretmenlerden biri olan $Ö_{I2}$'ye sorulan *"[12.24] Önermede 'gösteriniz' denilen yerin altını çizdiniz. Nedenini öğrenebilir miyiz?* (Satır, 61)*"* sorusuna öğretmenin verdiği *"*[12.28] *Hocam sorularda ne isteniyor genelde olumlu mu olumsuz mu bunu belirlemek için, sorunun ne istediğini. Bunu sorunun son ifadesi belirliyor, bu nedenle bunları belirlemek benim sürekli yaptığım bir şeydir...* (Satır, 62-64)*"* cevaptan "Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Öğretmenin etkinlik kartına ait görüntü Şekil 4.13' de sunulmuştur.


SORU: Bir ABC üçgeninde "$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2.|AC|.|AB|.\cos(\hat{A})$" olduğunu gösteriniz?

Şekil 4.13. $Ö_{I2}$'nin önermede altını çizdiği bölümleri gösteren kesit

Şekil 4.13 incelendiğinde öğretmenin ilgili beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır. Önermenin altını çizme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.62'de sunulmuştur.

Tablo 4.62.

Önermenin Altını Çizme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Önermede Önemli Gördüğü Yerlerin Altını Çizer.						✓	✓											

Tablo 4.62 incelendiğinde önermenin altını çizme kategorisinde sergilenen tek bilişsel becerinin -"Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer."- iki katılımcı tarafından sergilendiği görülmektedir.

İkinci soruda elde edilen bir başka kategori de "doğruluğunu değerlendirme" kategorisidir. Bu kategori altında "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." ve "Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder." kodlarına ulaşılmıştır.

"Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D2}$ sesli düşünme protokolünde şu cümleleri kullanmıştır (Satır, 140-145):

> [26.16] İspatın geçerliliğinden kasıt nedir bilmiyorum; ama ispatımın doğru olduğunu düşünüyorum… Yani kesinlikle doğrudur diyemiyorum; ama hani bu bilinen bir şey. Aslında bunun doğru olduğunu sorunun başında söylemem gerekirdi. Şunun şöyle olduğunu kabul edelim gibi. Yani doğruluğunu kabul edelim gibi bir şey söylemem lazımdı. Acaba $(z+t)^2$ bizim bildiğimiz denklemin açılımına uygun olacak mı diye soruya başlamam lazımdı. O halde bu açılım bunu sağlıyorsa bizim bildiğimiz kural ise bu ispata doğrudur derim.

Bu ifadelerden öğretmen adayının ispatının doğruluğu hakkında kesin bir kanıya ulaşamadığı tespit edilmiştir. Bu durum öğretmen adayının "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

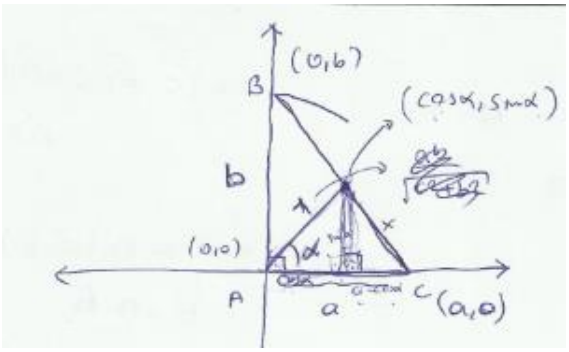
Bu kategorideki bir diğer beceri "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.63'de sunulmuştur.

Tablo 4.63.

"Tümevarımsal İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖA1_{D2}$	"[08.36] …Ben burada bir sayı olarak versem, mesela derece olarak düşünsem Kosinüste 1 çıkması için ya 0 olması gerekiyor ya da 180 derece olması gerekiyor. Üçgende de bunların 0 veya 180 derece olması imkânsız. (Satır, 24-27)"
$ÖAS_{İ1}$	"[08.18] … Aslında bunu 90° alınca doğrudan Pisagor Bağıntısı çıkıyor. O zaman daha özel bir şey lazım. Pisagor'un daha özel hali. O zaman daha küçük bir şey alınacaktı kosinüs. Daha küçük bir açı olmalı. Şurası (0,b) noktası şuradan bir tane doğru çizip (0,0)'ın doğruya olan uzaklığına baksak… (Satır, 53-56)"

Tablo 4.63 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Öğretmen adaylarının sistematik örneklerle beraber önermenin doğruluğunu göstermeye çalıştığı görülmektedir. ÖASİ1 Öğretmen adayının yukarıda anlattığı durumu gösteren etkinlik kartı görüntüsü Şekil 4.14'de sunulmuştur.



Şekil 4.14. $ÖAS_{İ1}$'in çözüm sürecinden bir kesit

Şekil 4.14 incelendiğinde öğretmen adayının sistematik örneklerle ilerlemeye çalıştığı görülmektedir. Bu nedenle katılımcının ifadeleri "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." Becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

Bu kategoride ulaşılan bir başka bilişsel beceri "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.64'de sunulmuştur.

Tablo 4.64.

"İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{D1}$	"[14.12] Bir ABC üçgeninde cos α… Üçgen çizelim; ama dik üçgen falan değil, değil mi hocam? (Satır, 111)"
$Ö_{İ2}$	"[16.23] …Yerine yazdığımızda, $\|AC\|^2 - 2.\|AC\|.\|AB\|.\cos\alpha + \|AB\|^2$ ifadesini buluruz. Tamamlanmış mıdır hocam, geçebilir miyiz? (Satır, 71-72)"

Tablo 4.64 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Bu kategoride sergilenen bir başka bilişsel beceri "Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder." kodudur. Bu beceriyi sergileyen öğretmenlerden $Ö_{İ2}$'nin *"*[14.52] *Buradaki önermeler bizim önceden bildiğimiz, yaptığımız şeyler olduğu için doğru olduğunu biliyoruz. Ama hiç görmediğim bir şeyse evet sorgularız…* (Satır, 66-67)*"* ifadelerinden "Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder." becerisini sergilediği çıkarılmıştır. Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.65'de sunulmuştur.

Tablo 4.65.

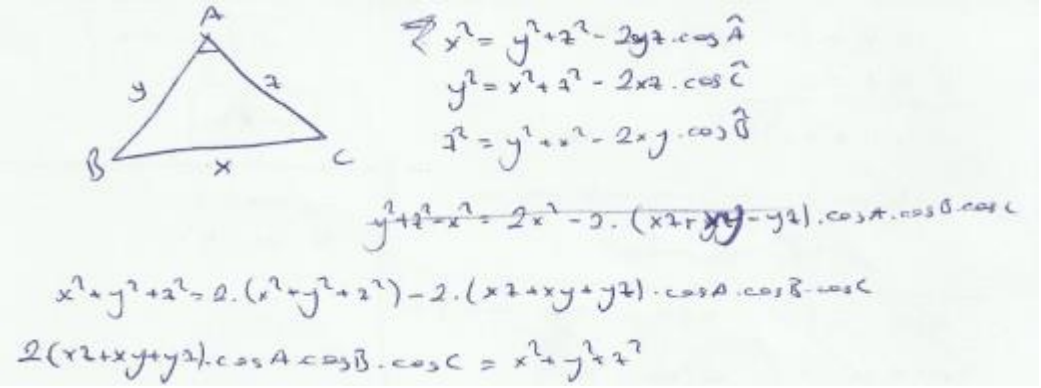
Doğruluğunu Değerlendirme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_D$	$ÖAS_D$	$ÖAS_O$	$ÖAS_O$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Ritüel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.								✓										
Tümevarımsal İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.											✓			✓				
Ezberindeki Bilgiye Dayanarak Önermenin Doğruluğunu Kontrol Eder.			✓															
İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar.						✓	✓											

Tablo 4.65 incelendiğinde doğruluğunu değerlendirme kategorisinde tespit edilen bilişsel becerilerin az sayıda katılımcı tarafından sergilendiği belirlenmiştir. Bu becerilerden "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." ve "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." kodları daha sık sergilenirken $(n = 2)$; "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." ve "Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder." kodlarının daha az sergilendiği bulunmuştur $(n = 1)$.

İkinci soruda biliş beceriler temasında elde edilen bir başka kategori "Strateji belirleme" kategorisidir. Bu kategori altında "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.", "Ezberlediği yolla ispat yapar." ve "Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar." kodları bulunmuştur.

"Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." becerisini sergilediği belirlenen $ÖAS_{I2}$'nin *"*[07.03] *...Bu önermenin ispatını şöyle hatırlıyorum: Her kenar için kenara bağlı eşitliği yazıyorduk. Sonra taraf tarafa toplayıp çıkarıyorduk.* (Satır, 34-35)*"* cümlelerinden sözel olarak önermenin ispatını ifade edebildiği saptanmıştır. Öğretmenin etkinlik kartında yaptığı işlemler Şekil 4.15'de gösterilmiştir.



Şekil 4.15. $ÖAS_{İ2}$'nin sözel olarak anlattığı ispat sürecinde yaptığı işlemler

Çalışmada katılımcılardan bazılarının "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisini sergilediği tespit edilmiştir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.66'da sunulmuştur.

Tablo 4.66.

"Ezberlediği Yolla İspat Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D2}$	"[12.30] Kosinüs teoremini epeydir kullanmadığım için ispatını hatırlamıyorum. İspatı hatırıma gelmiyor. (Satır, 40-41)"
$ÖAS_{O1}$	"[14.23] …İspatın böyle yapıldığını hatırlıyorum. a'dan |BC|'ye dik indiriyorduk. Ama ben hatırlayıp yapamayacağım. (Satır, 43-44)"
$ÖA1_{O2}$	"[12.43] Çünkü bunun ispatı böyle yapılıyor diye hatırlıyorum... Yok, ben yapamayacağım. (Satır, 48)"

Tablo 4.66 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Strateji belirleme kategorisinde elde edilen becerilerin kodlara göre dağılımı Tablo 4.67'de sunulmuştur.

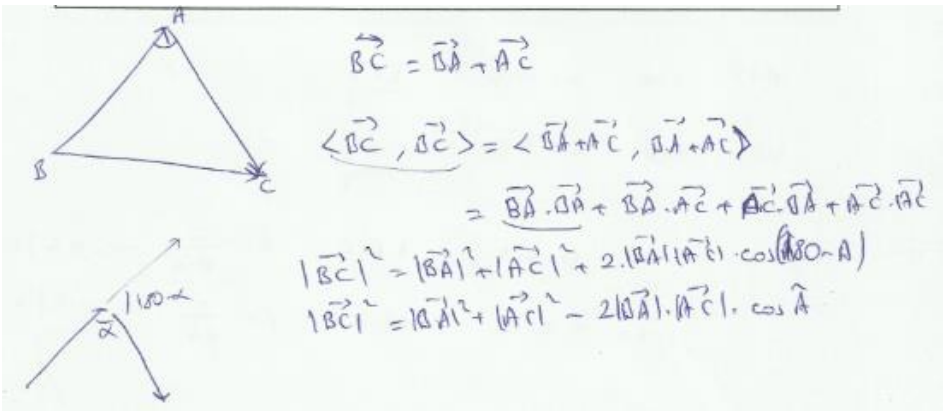
Tablo 4.67.

Strateji Belirleme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖAl_{D1}$	$ÖAl_{D2}$	$ÖAl_{O1}$	$ÖAl_{O2}$	$ÖAl_{İ1}$	$ÖAl_{İ2}$
Sözel Olarak Önermenin İspatını İfade Eder.												✓						
Ezberlediği Yolla İspat Yapar.		✓				✓			✓		✓			✓				✓

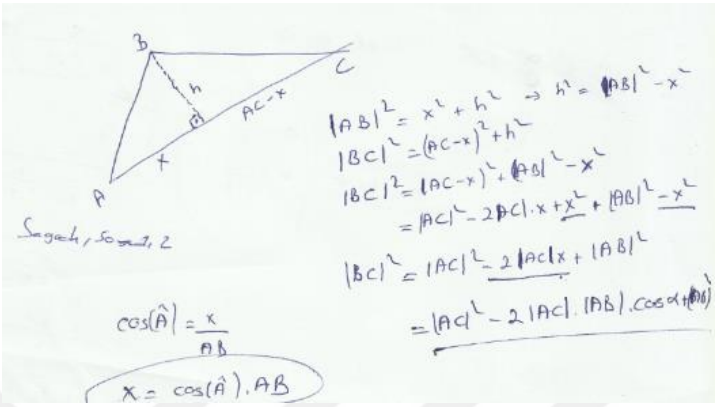
Tablo 4.67 incelendiğinde strateji belirleme kategorisinde ise en sık sergilendiği tespit edilen beceri "Ezberlediği yolla ispat yapar." kodudur ($n = 6$). Ancak bu kod için katılımcıların gruplara göre veya başarı düzeylerine dikkat çekici bir dağılımı olmadığı saptanmıştır. Bu kategoride daha az sergilendiği tespit edilen beceri ise "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." kodudur.

İkinci sorudaki bilişsel beceriler temasında elde edilen bir başka kategori işlem süreci kategorisidir. Sesli düşünme protokolü, katılımcının daha çok düşüncesini ortaya çıkarmaya yönelik olduğundan bu bölümde elde edilen beceriler daha çok gözlemlerden elde edilmiş ve etkinlik kartına dayalı olarak sunulmuştur. Bu kategoride elde edilen üç kod "Planına uygun ispat yapar.", "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." ve "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." becerileridir. Gözlemlerden elde edilen ilk üç beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan vektörel ispat yapan $Ö_{İ1}$'in ispatı Şekil 4.16'da sunulmuştur.



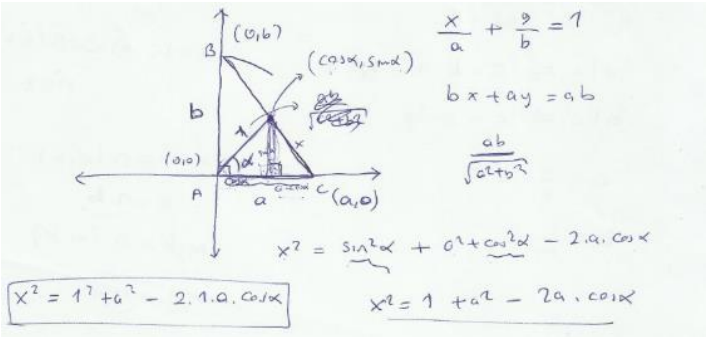
Şekil 4.16. $Ö_{İ1}$'nin etkinlik kartında ikinci sorudaki vektörel ispatı

Şekil 4.16 incelendiğinde öğretmenin vektörel olarak "Planına uygun ispat yapar.", "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." ve "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." görülmektedir. Katılımcılardan $Ö_{I2}$'nin sentetik olarak yaptığı ispat ise, Şekil 4.17'de sunulmuştur.



Şekil 4.17. $Ö_{I2}$'nin etkinlik kartında ikinci sorudaki sentetik ispatı

Şekil 4.17 incelendiğinde öğretmenin sentetik olarak "Planına uygun ispat yapar.", "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." ve "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." becerisini sergilediği görülmektedir. Katılımcılardan $ÖAS_{I1}$'nin analitik olarak yaptığı ispat Şekil 4.18'de sunulmuştur.



Şekil 4.18. $ÖAS_{I1}$'in etkinlik kartında ikinci sorudaki analitik ispatı

Şekil 4.18 incelendiğinde öğretmenin analitik olarak "Planına uygun ispat yapar.", "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." ve "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." becerilerini sergilediği görülmektedir. İşlem süreci kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre Tablo 4.68'de sunulmuştur.

Tablo 4.68.

İşlem Süreci Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Planına Uygun İspat Yapar.				✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓			✓			
Kullandığı İspat Yöntemi Amaca Ulaşmada Yeterlidir.				✓	✓	✓		✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓		✓
Seçtiği İspat Türüne Uygun İspat Yazabilir.					✓	✓		✓	✓		✓			✓	✓			✓

Tablo 4.68 incelendiğinde işlem süreci kategorisi incelendiğinde en sık sergilenen bilişsel beceri olarak "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." koduna ulaşılmıştır ($n = 11$). Bu kodun dağılımına bakıldığında ne başarı düzeylerine göre ne de gruplara göre dikkat çekici bir dağılım olmadığı görülmektedir. Bu kategoride sergilenme sıklığına göre ikinci sırada "Planına uygun ispat yapar." bilişsel becerisi bulunmaktadır ($n = 9$). Bu beceriyi sergileyenlerin beşinin öğretmen adayı, üçünün öğretmen ve birinin 1. sınıf öğretmen adayı olması dikkat çekicidir. Bu farklılığın anlamlı olup olmadığını belirlemeye yönelik yapılan Ki-Kare testi sonuçları Tablo 4.69'da sunulmuştur.

Tablo 4.69.

"Planına Uygun İspat Yapar." Kodu İle Gruplar Arasındaki İlişkiyi Gösteren Ki-Kare Testi Sonuçları

		Planına uygun ispat yapar		Toplam	X^2	sd	p
		Yapamaz	Yapar				
Grup	Öğretmen	3	3	6			
	Son sınıf öğretmen adayı	1	5	6	5.333	2	.069
	1. sınıf öğretmen adayı	5	1	6			
Toplam		9	9	18			

Tablo 4.69 incelendiğinde "Planına uygun ispat yapar." kodu ile gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı düzeyde ilişki olmadığı bulunmuştur ($X^2_{(2)} = 5.333, p > .05$). Yani bu durum grupların farklılığının "Planına uygun ispat yapar." becerisini

etkilemediğini göstermektedir. Bu kategoride sıklık derecesinde göre en az sergilendiği belirlenen bilişsel beceri "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." kodudur ($n = 8$). Bu becerinin dağılımı incelendiğinde herhangi bir grup ya da başarı düzeyine göre bir yığılma olmadığı görülmektedir.

4.3.2. İkinci etkinlik kartındaki sorudan üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular

Üst bilişsel teması altında "İşlemleri kolaylaştırma.", "Sorgulama.", "Farkındalık", "Planlama", "Strateji belirleme", "Analojik akıl yürütme", "Kontrol etme" ve "İlişkilendirme" olarak yedi kategori ve bu kategoriler altında 20 koda ulaşılmıştır.

Bu temada elde edilen ilk kategori "işlemleri kolaylaştırma" kategorisidir. İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlar.", "Bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür.", "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür.", "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır." ve "İspatın anahtar kavramını belirler." kodlarına ulaşılmıştır.

"Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.70'da sunulmuştur.

Tablo 4.70.

"Değişken Sayısını Azaltarak İşlem Kolaylığı Sağlar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[03.07] Köşelerin karşısında olduğunu göstermek için. İşlem yaparken BC, AB yazmak zor oluyor. İşlemleri kolaylaştırmak için öyle yazdım. (Satır 26-27)"
$ÖA1_{D2}$	"[06.02] Ö: Şurada hata yaptım, y dedim. Çok fazla değişken katmış oldum. İşlemleri daha rahat yapabilmem için değişken sayısını azaltmak istiyorum. (Satır, 21-22)"

Tablo 4.70 incelendiğinde katılımcıların kullandıkları ifadelerden "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Bu beceriler bireyin yaptığı işlemin ispatı yapmayı kolaylaştıracağını düşünmesini sağladığından üst bilişsel beceriler olarak değerlendirilmiştir.

"Bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür." becerisini sergilediği belirlenen öğretmenlerden $Ö_{i1}$ *"*[07.51] *Şimdi bir ABC üçgeninde* $|BC|$*'nin karesi eşittir* $|AB|$*'nin karesi artı* $|AC|$*'nin karesi eksi iki* $|AC|$ *çarpı* $|AB|$ *çarpı* $\cos a$ *olduğunu gösteriniz. Kosinüs teoremini ispatlayın diyor yani.* (Satır, 55-56)*"* cümleleriyle "Bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür." becerisini sergilediğini göstermiştir. Bilginin temsilini kullanmanın ispatı kolaylaştırdığını düşünen katılımcılardan $ÖA1_{i2}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda sunulmuştur (Satır, 102-111):

[12.46] $ÖA1_{i2}$: … Bir ABC üçgeninde... Bu galiba Kosinüs teoremi oluyor.

[13.03] A: Kosinüs teoremi olması bir şeyi değiştiriyor mu? Yani bunun Kosinüs teoremi olduğunu tespit etmen.

[13.10] $ÖA1_{i2}$: $\cos a$ dediği için bir de hani genel geçerli ezbere dayalı bir düşüncem olduğundan $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos a$ olduğunda Kosinüs teoremi olduğunu düşündüm.

[13.25] A: Yani bunun Kosinüs teoremi olduğunu düşünmeniz size ne sağlıyor? Kosinüs teoremi adını söylememiş olsanız farklı olur mu?

[13.34] $ÖA1_{i2}$: İşimizi kolaylaştırıyor. Biraz da ezber var o nedenle olabilir.

[13.38] A: Yani ismini kullandığınız zaman ezberlediğiniz şeyi kolayca görebiliyorsunuz.

[13.41] $ÖA1_{i2}$: Evet.

Diyalog incelendiğinde katılımcının teoremin ismini kullanması yani bilginin temsilini kullanmasının ispatı kolaylaştırdığını düşündüğü görülmektedir. Bireyin farkında olarak ispat yapmayı kolaylaştıran bir eylemi gerçekleştirmesi nedeniyle bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Çalışmanın katılımcılarından bazılarının "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür." becerisini sergiledikleri tespit edilmiştir. Bu düşünceye sahip olan katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.71'de sunulmuştur.

Tablo 4.71.

Şekil Çizmenin İspatı Kolaylaştırdığını Düşünür." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[02.36] Geometride çizim olmadan ispatlaması çok zor oluyor. Çizim ispatı kolaylaştırıyor. (Satır, 21)"
$ÖAS_{D1}$	"[26.56] Hocam uzunluk olarak çıkaramadım. Ama aynı vektör, yani ben öyle biliyorum hatta şurada şekil üzerinde yapalım hocam bu biraz karıştı. Bu, ispatı biraz daha kolaylaştıracaktır. (Satır, 171-172)"
$ÖAS_{O1}$	"[10.16] Görsele dökmeye çalışıyorum. Görsele dökünce biraz daha kolaylaşıyor. Görsel olarak daha iyi yapabiliyorum. (Satır, 35)."

Tablo 4.71 incelendiğinde katılımcıların "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri katılımcıların ispatı kolaylaştırmaya yönelik farkında olarak yaptığı bir beceri olduğundan üst bilişsel olarak ele alınmıştır.

Bu kategoride tespit edilen bir başka kod "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır." becerisidir. Bu beceriyi sergileyen $Ö_{O2}$ öğretmenine sorulan *"*[10.25] *Neden ispatı vektörlerden yapmayı düşündünüz hocam?* (Satır, 65)*"* sorusuna öğretmenin verdiği cevap şöyledir (Satır, 66-72):

> "[10.28] Vektörlerle daha kısa olur. Çünkü $|BC|$ uzunluğunu bir vektörün uzunluğunu açıyla arasındaki ilişkiyi bilmem kolay. Niye kolay? Çünkü başlangıç noktası aynı olan yani 0 noktası olan iki vektör $|\overrightarrow{0A}|$ ile $|\overrightarrow{0B}|$ arasındaki açıyı vektörlerin uzunluklarını kullanarak belirleyebiliyorum. Bunu da iç çarpım işlemiyle kolaylıkla görebilirim. Mesela başlangıç noktası aynı olan iki vektörün oluşturduğu açının kosinüsü bu iki vektörün iç çarpımıyla normlarının yani yukarıda soruda görülen mutlak değerlerinin çarpımı şeklinde yazıldığını biliyorum …"

Öğretmenin ifadeleri incelendiğinde en kısa yoldan sonuca ulaşmaya çalıştığı söylenebilir. Bu beceri katılımcıların ispatı kolaylaştırmak için sergilediği beceri olduğundan üst bilişsel olarak ele alınmıştır.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen bir başka üst bilişsel beceri "İspatın anahtar kavramlarını belirler." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D2}$'nin düşüncesini dile getirdiği diyalog şöyledir (Satır, 81-91):

[12.19] $ÖAS_{D2}$: …Bir tepe noktası belirledim kendime.

[12.44] A: Bir önceki soruda da bir tepe noktası belirlemiştiniz. Tepe noktası sizin için belirleyici mi? Bir referans mı?

[12.48] $ÖAS_{D2}$: Aslında soruya göre değişiyor. Sorusuna göre referans oluyor. Şimdi bir ABC üçgeni var. BC uzunluğundan bahsediyor. İki kenarın karelerinden bahsediyor. Sonra diğer iki kenarın çarpımından bahsediyor. Demek ki bu sorunun kendisinde benden istenilen şey BC kenarını bulmam. BC kenarını gören daha doğrusu BC'yi sağlayan bir kenar gerekiyor. Yani sorunun çözümü için bir başlangıç noktası gerekiyor bana. Bu belki sadece benim için böyledir ama soruya başlayabilmem için bakış açımın bir başlangıç noktasının merkezi gerekiyor. O merkezi de belirlediğim bir nokta oluyor. Benim için bir referans yani. Tabi bu referans amacıma ulaşamazsam değişkenlik gösterebilir.

Diyalog incelendiğinde öğretmen adayının ispatın anahtar kavramını belirleyerek ispatını kolaylaştırmaya çalıştığı anlaşılmaktadır. Yine sesli düşünme protokolünün başka bir bölümünde bu öğretmen adayının kullandığı *"*[14.18] *...Ben şu kısmı bir yok etmek istiyorum. Buradan indirdiğim dikmenin benim sorumun çözümü için en önemli adım olduğunu düşünüyorum.* (Satır, 107-109)*"* ifadelerinden ispatın anahtar kavramlarını belirlemeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Bir durumun farkında olup amacına yönelik onu kullanmak üst bilişsel olarak değerlendirildiğinden bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. İspatı kolaylaştırma kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.72'de sunulmuştur.

Tablo 4.72.

İşlemleri Kolaylaştırma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
Değişken Sayısını Azaltarak İşlem Kolaylığı Sağlamayı Amaçlar.	✓													✓				
Bilginin Temsilini Kullanarak İspatı Kolaylaştırdığını Düşünür.					✓				✓		✓							✓
Şekil Çizmenin İspatı Kolaylaştırdığını Düşünür.	✓						✓		✓									
İspatı Kolaylaştırmak İçin Sezgisel Kestirme Yollarını Kullanır.					✓	✓		✓	✓		✓			✓	✓			✓
İspatın Anahtar Kavramlarını Belirler.				✓	✓	✓	✓	✓	✓						✓			

Tablo 4.72 incelendiğinde işlemleri kolaylaştırma kategorisinde en fazla sergilendiği belirlenen becerinin "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır." kodu olduğu görülmektedir ($n = 8$). Ancak becerilerin katılımcılara göre dağılımda bir sistematiklik görülmemiş olup dağılım rasgele olduğundan Ki-Kare testi yapılmamıştır. Sıklıkta ikinci sırada sergilendiği belirlenen beceri "İspatın anahtar kavramlarını belirler." kodudur ($n = 7$). Bir önceki kodda olduğu gibi bu kod da katılımcılara göre sistematik dağılım göstermemiştir. Sıklık bakımından üçüncü ve dördüncü sırada yer alan beceriler sırasıyla "Bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür." ($n = 4$) ve "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür." ($n = 3$) kodlarıdır. İlgili kategoride en az tekrar ettiği belirlenen bilişsel beceri ise "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar." kodudur ($n = 1$).

İkinci soruda elde edilen bir başka üst bilişsel beceri kategorisi "sorgulama" kategorisidir. Sorgulama kategorisinde "Nerede hata yaptığı kendine sorar.", "Kendisine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür.", "İspatın doğrulamasını yaparken tüm

durumları düşünüp düşünmediğini sorgular." ve "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." kodları bulunmuştur.

"Nerede hata yaptığını kendine sorar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcı $ÖA1_{D2}$'nin kullandığı *"*[08.36] *İşte sonuca kadar yaklaştım. Ama bir yerde bir eksik var. Acaba nerede hata yaptım?* (Satır, 24)*"* cümlelerinden katılımcının nerede hata yaptığını kendine sorduğu belirlenmiştir. Katılımcının kendine sorular sorması sorgulamayı gerektirdiğinden bu beceri üst bilişsel temasında değerlendirilmiştir.

Bu kategoride bulunan bir başka beceri "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.73'de sunulmuştur.

Tablo 4.73.

"Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{D1}$	"[15.29] …Şimdi ben bunun uzunluğuna nasıl gidebilirim? Bir paralelkenarın uzunluğunu biliyorum, onu nasıl yapıyorduk? Şurası $a - b - c$ şurası da α. Şimdi bunun alanını ben nasıl çözebilirim? (Satır, 121-123)"
	"[22.04] Hocam alfabetik sayarsak a vektörü başa $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ şimdi bu $\overrightarrow{BC}$ vektörüne biz, $\overrightarrow{AB}$ vektörü eksi $\overrightarrow{AC}$ vektörü diyebilir miyiz? Diyebiliriz. (Satır, 139-140)"
	"[22.55] Aynen böyle hocam. $u^2 + v^2 - 2.u.v$ olur mu? Olur. (Satır, 143)"
$ÖAS_{İ2}$	"[09.03] Nereden gidebileceğimi düşünüyorum şu an. Bu bilindik bir kural ama kurala nasıl ulaşabilirim? (Satır, 37)"
$ÖAS_{D2}$	"[14.18] Peki ben burada şöyle bir şey yapabilir miyim? (Satır, 104-105)"

Tablo 4.73 incelendiğinde katılımcıların "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürme kişinin sorgulama becerisini gerektirdiği için üst bilişsel teması altında değerlendirilmiştir.

Bu kategoride elde edilen bir başka beceri "Yaptığı işlemleri nedenleriyle sorgular." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.74'de sunulmuştur.

Tablo 4.74.

"Yaptığı İşlemleri Nedenleriyle Sorgular." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖA1_{İ2}$	"[14.58] Buradan bir tane dik çizeceğim. Neden buradan çizdiğimi soracak olursanız söyleyeyim, çünkü cos a'yı istiyor yani a kenarı kesinlikle boşta kalacak, c den de çizebilirdik; ama Kosinüs, komşu bölü hipotenüs ya bu nedenle a kenarını boşta bıraktım. (Satır, 127-129)"
$Ö_{İ1}$	"[08.13] …Önce bir ABC üçgenini oluşturup… Şunları tasarlamam lazım: Ne ile neyin toplamı neyi veriyor. Şimdi BC eşittir BA+AC diyebilirim mesela. Şöyle diyeyim BC= BA+AC buradan da BC'nin karesini elde etmem için BC ile BC yi çarpmam lazım. (Satır, 67-68)"

Tablo 4.74 incelendiğinde katılımcıların "Yaptığı işlemleri nedenleriyle sorgular." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri kişinin kendisini sorgulamasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Sorgulama kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.75'de sunulmuştur.

Tablo 4.75.

Sorgulama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Kategorilere Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$ÖA1_{İ2}$
Nerede Hata Yaptığını Kendine Sorar.														✓				
Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür.							✓	✓				✓						
Yaptığı İşlemleri Nedenleriyle Açıklar.				✓	✓			✓						✓				✓

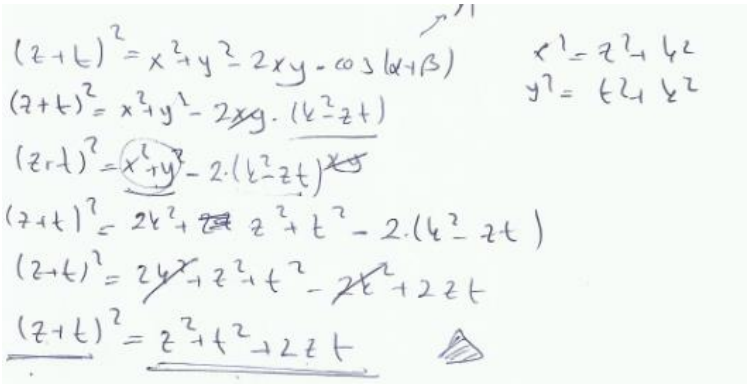
Tablo 4.75 incelendiğinde sorgulama kategorisinde en fazla sergilendiği belirlenen becerinin "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." kodu olduğu belirlenmiştir ($n = 5$). Kodun katılımcılara göre dağılımı rastgele olduğu için Ki-Kare testi yapılmamıştır. Sergilenme sıklığına göre ikinci sırada yer alan beceri "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisidir ($n = 3$). Bu kategoride en az sergilendiği belirlenen beceri ise "Nerede hata yaptığını kendine sorar." becerisidir.

İkinci soruda üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bir başka kategori "farkındalık" kategorisidir. Bu kategori altında "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.", "İspatı öğretici cümleler kurar." ve "Öz-düşünüm becerisi sergiler." kodlarına ulaşılmıştır.

Daha çok gözlem verilerinden elde edilen "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D2}$'nin aşağıdaki cümlelerinden sentetik ispat yaptığı ve kendisini bu ispata yönlendiren anahtar kavramların farkında olduğu anlaşılmıştır (Satır, 91-95):

> "[13.51] Daha önce söylediğim gibi verdiği üçgen üzerinde şu uzunluğun karesi var (BC yi gösterir), yan uzunlukların kareleri var. Yan uzunlukların çarpımları var. Şimdi ben üçgen özel üçgen olmadığı için bir eşitlik kuramıyorum ya da bana bir eşitlik verisi gerekiyor. Bunun için bana bir dik üçgen gerekiyor. Bu yüzden bana hem BC'yi alacak hem bunları alacak bir dikme indirdim. A noktasından BC doğru parçasına."

Katılımcının ifadeleri incelendiğinde dik üçgen oluşturduğu ve buradan sentetik ispat yapmaya çalıştığı anlaşılmaktadır. Öğretmen adayında bu becerinin üst bilişsel olarak sergilendiğinin belirlenmesinde öğretmen adayının ilk olarak ispatı cebirsel olarak yapmaya çalışıp sonuca ulaşamayacağının farkına varıp Şekil 4.19'daki çözümü yapması da etkili olmuştur.



Şekil 4.19. $ÖAS_{D2}$'nin ispat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır becerisini sergilediğini destekleyen ekran görüntüsü

Aynı katılımcının ispatı yazarken birkaç kez *"Bu yazdığım bende neyi değiştirecek?"* sorusunu sorduğu ve ne yazdığının farkında olarak ilerlediği gözlemlenmiştir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen diğer katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.76'da sunulmuştur.

Tablo 4.76.

"İspat Yapmada Kullandığı Stratejinin Farkındadır." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{İ1}$	"[07.19] Analitik göstermek daha kolay oluyor aslında. Şöyle düşünürsek analitik geometri de… (Satır, 50)"
$ÖAS_{İ2}$	*"*[13.17] *Sentetik olarak denedim ispatı tamamlayamadım, her kenar için tek tek denklem bulup cebirsel çözmeye çalışıyorum.* (Satır 43-44)*"*

Tablo 4.76 incelendiğinde katılımcıların "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri kişinin yaptığı işlemlerin farkında olmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen bir başka üst bilişsel beceri "İspatı öğretici cümleler kurar." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{O1}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda sunulmuştur:

[07.38] $Ö_{O1}$: Bir ABC üçgeninde BC'nin karesi yani BC doğru parçasının karesi eşittir AB doğru parçasının karesi artı AC doğru parçasının karesi eksi 2

çarpı AC doğru parçası çarpı AB doğru parçası çarpı $\cos a$ olduğunu gösteriniz.

[07.55] A: Hocam neden okurken açık açık okudunuz?

[08.00] $Ö_{O1}$: Şimdi biz öğrencilere anlatırken bu ifadeleri öncelikle BC falan dediğimiz zaman, biz öğrenciye niye anlatıyoruz bunu fark olduğunu göstermek için. Yani ışın, doğru, doğru parçası arasındaki farkı anlatıyoruz dolayısıyla kullanırken de bunu doğru kullanmak gerekiyor. Biz bunu doğru kullanmazsak anlattığımız öğrencinin bunu doğru kullanması veya bilmesi mümkün olmaz. İkinci bir husus bunu vurguladığımız zaman öğrencide bir algı oluşturmakta önemlidir. Ben böyle kullandığım zaman öğrenci de sizin gibi bunu düşünecektir. Neden BC demiyor da BC doğru parçası diyor? Çünkü bunu söylemesi daha zordur. Bunu ısrarla söylememin öğrenciye katkı sağlayacağını düşünüyorum. BC'nin karesi, AC'nin karesi diyebilirdik ama farklı bir algı yaratmak gerekiyor.

[08.52] A: Peki uzun uzun söylediğimiz zaman ispatı anlayacak yapacak bütünlüğü yakalayabiliyor musunuz?

[08.55] $Ö_{O1}$: O konuda çok bir fikrim yok ama çok bir şey değişeceğini düşünmüyorum açıkçası. Uzun söylemem çok bir şey değiştirmez diye düşünüyorum. Burada çünkü sonuçta neyi kastettiğimi biliyorum.

Diyalog incelendiğinde katılımcının ispat yapma sürecinde ispatı öğretici cümleler kurmasının öğrencilerin anlamasını sağlaması bakımından önemli olduğu bu nedenle ispatı öğretici cümleler kurarak ispatı yazmayı sürdürdüğü anlaşılmaktadır. Bu nedenle bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen son beceri "Öz-düşünüm becerisi sergiler." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{I1}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda sunulmuştur (Satır, 84-92):

[13.44] A: Hocam ispatı ilk olarak vektörel yaptınız, neden?

[13.51] Ö: Aslında vektörel ispat bence daha karizmatik.

[13.56] A: İspat için kullanılan güzel ispat, karizmatik ispat kavramları sizce nedir?

[14.05] Ö: Yani şöyle; ispat deyince hani böyle nasıl diyelim… Yani şimdi nasıl ifade edeyim bilemedim ki. Hani ispat deyince böyle bir daha ağır bir şey bekliyor insanlar karmaşık bir yapı. Şimdi öbür türlü ne kadar basitmiş falan

> hani… Basit demeyeyim de tatmin edici bir şey olmuyor yani bir geometrik ispatta daha doğrusu sentetik ispatta aldığım tatla vektörel ispat da aldığım tat aynı değil bunu daha çok tat alıyorum ispat yaptım hissediyorum. Tatmin ediyor beni. Bir şey ispatladım gibi hissediyorum. Bu böyleymiş falan gibi geliyor bana bana öyle geliyor açıkçası.

Diyalog incelendiğinde öğretmenin ispatta estetik kavramı aradığı anlaşılmaktadır. Bu durum öğretmenin ispatı değerlendirip kendi düşüncesini ifade etmeyi içerdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Farkındalık kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.77'de sunulmuştur.

Tablo 4.77.

Farkındalık Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
İspat Yapmada Kullandığı Stratejinin Farkındadır.								✓			✓	✓						
İspatı Öğretici Cümleler Kurar.			✓															
Öz-Düşünüm Becerisi Sergiler.					✓													✓

Tablo 4.77 incelendiğinde farkındalık kategorisinde elde edilen becerilerden en fazla sergilenen becerinin "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." kodu olduğu belirlenmiştir $(n = 3)$. Bu beceriyi "Öz-düşünüm becerisi sergiler." kodu izlemiştir $(n = 2)$. Bu kategoride en az sergilenen becerinin ise "İspatı öğretici cümleler kurar." kodu olduğu görülmektedir.

İkinci soruda üst bilişsel beceriler kategorisinde ulaşılan bir başka kategori "planlama" kategorisidir. Bu kategoride "İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar.", "Bir sonraki adıma geçmeden o adımda ne yapacağını düşünür." ve "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." kodlarına ulaşılmıştır.

"İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{O1}$ *"*[11.04] *Şu an nerden ispat yapmam gerektiğini düşünüyorum. Yani ispata başlayacağım yeri belirlemeye çalışıyorum.* (Satır, 74-75)*"* cümleleriyle ispata yönelik bir plan yapmaya çalıştığını göstermiştir. Katılımcıya yönelik gözlem formu incelendiğinde de gözlem formunun açıklama bölümünde "öğretmen planlama aşamasında nereden başlaması gerektiğine karar veriyor" notu yer

almaktadır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen diğer katılımcılardan bazılarının görüşleri de Tablo 4.78'de sunulmuştur.

Tablo 4.78.

"İspatı Nasıl Yapacağına Yönelik Belli Bir Plan Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{İ1}$	"[28.28] Mesela $\alpha°$ bir açı alınca, şuranın yani şu kestiği noktanın $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ noktası olduğunu düşünüyorum. Ben $\sin\alpha$ ve $\cos\alpha$' nın karelerinin toplamının 1 yaptığını biliyorum. Bu nedenle şu uzunluğun 1 olacağını düşünüyorum. Şurası $\sin\alpha$, şurası da $a - \cos\alpha$ olur. Yine bir dik üçgen var. Çok mu uzar acaba şurada bir kare alsak bunların eşitliğini yazsak olabilir galiba. (Satır, 132-135)"
$ÖA1_{İ1}$	"[02.08] Düşüneyim biraz hocam, önce kafamda taslağı oluşturayım. (Satır, 15)"

Tablo 4.78 incelendiğinde katılımcıların "İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategorideki bir diğer kod "Bir sonraki adıma geçmeden o adımda ne yapacağını düşünür." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.79'da sunulmuştur.

Tablo 4.79.

Bir Sonraki Adıma Geçmeden O Adımda Ne Yapacağını Düşünür." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[12.11] …Bunu bir sonraki adımda nasıl kullanacağımı düşünüyorum. (Satır, 80-81)"
$ÖAS_{D1}$	"[21.12] Hocam vektörlerden gideyim ben. Şimdi $\overrightarrow{AB}$ vektörü böyle, $\overrightarrow{AC}$ vektörü böyle, $\overrightarrow{BC}$ vektörü böyle, şimdi ne yapmam gerekiyor? [Kendine soruyor] (Satır, 136-137)"
$ÖAS_{D2}$	"[14.18] …Bunları birleştirebilirsem BC'yi elde edebilir miyim acaba? Aslında beni şu anda bu ilgilendirmiyor. Benim bu aşamada bunun bu olduğunu göstermem gerekiyor. (Satır, 101-102)"
$ÖAS_{İ1}$	"[28.28] …Şurayı çekince sin, cos ve şuranın tamamı a olduğu için şurası da $a - \cos\alpha$ çıkıyor. Şurada bir hipotenüs yani Pisagor uygularsak bizden istediğini bulmuş oluruz... (Satır, 138-140)"

Tablo 4.79 incelendiğinde katılımcıların "Bir sonraki adıma geçmeden o adımda ne yapacağını düşünür." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen bir başka üst bilişsel beceri "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{O2}$ *"*[10.08] *...*$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2.|AC|.|AB|.\cos A$ *olduğunu göstermemiz gerekiyor. Biz bunu vektörlerden yapabiliriz.* (Satır, 63-64)*"* cümleleriyle düşüncesini ifade etmiştir. Planlama kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.80'de sunulmuştur.

Tablo 4.80.

Planlama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
İspatı Nasıl Yapacağına Yönelik Belli Bir Plan Yapar.			✓								✓						✓	
Bir Sonraki Adıma Geçmeden O Adımda Ne Yapacağını Düşünür.				✓			✓	✓			✓							
İspata Başlamadan Önce Neyi İspatlayacağına Karar Verir.			✓	✓			✓				✓	✓						

Tablo 4.80 incelendiğinde planlama kategorisinde en sık sergilendiği belirlenen becerinin "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." becerisi olduğu belirlenmiştir $(n = 5)$. Beceriyi sergileyen katılımcıların sistematik dağılmadığı belirlendiğinden Ki-Kare testi yapılmamıştır. Bu beceriden sonra en fazla tekrarlandığı belirlenen beceri "Bir sonraki adıma geçmeden o adımda ne yapacağını düşünür." kodudur $(n = 4)$. Planlama kategorisinde en az tekrar ettiği belirlenen beceri ise "İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar." kodudur $(n = 3)$.

Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bir başka kategori "strateji belirleme" kategorisidir. Bu kategori altında "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır.", "Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır.", "Tümdengelimsel akıl yürütür.", "Yazılı çözümden önce zihinde çözüm yapar.", "İspat stratejisinin doğru olup olmadığını zihninde kontrol

eder.” ve “Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler.” kodlarına ulaşılmıştır.

Yaratıcı düşünmenin iki alt basamağı olan “Iraksak düşünme yeteneğini kullanır.” ve “Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır.” kodlarına ait veriler bir arada sunulmuştur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların düşünme becerilerine göre ifadeleri Tablo 4.81’de sunulmuştur.

Tablo 4.81.

Yakınsak ve Iraksak Düşünme Yeteneğine Göre Katılımcı Görüşleri

Katılımcı	Iraksak düşünme yeteneğini kullanır	Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır
$Ö_{O1}$	“[11.30] Çember bu konuda benim için çok kullanışlı oluyor. En rahatı o oluyor benim için. Ama cebirsel olarak da çözülebilir. Genelde çemberle ispat etmek daha çok işime geliyor… (Satır, 78-79)”	“[11.30] … Cebirselden ziyade geometrik ispatlar benim için rahat oluyor. Bilmiyorum belki geometri görsel zeka diğer cebirsel olan matematiksel zeka daha iyi olabilir. (Satır, 79-81)”
$Ö_{İ1}$	“[07.51] …Bu ispatın analitik, sentetik ve vektörel olarak farklı yolları var... (Satır, 57)”	“[07.51] …Ben vektörel olanı kullanacağım. (Satır, 57-58)”
$ÖAS_{İ1}$	“[07.09] …Bunu üçgenle mi (sentetik) göstereyim yoksa analitik mi göstereyim? (Satır, 47)”	“[07.19] Analitik göstermek daha kolay oluyor aslında… (Satır, 50)”

Tablo 4.81 incelendiğinde katılımcıların “Iraksak düşünme yeteneğini kullanır.” ve “Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır.” becerilerini sergilediği görülmektedir. Bu beceriler yaratıcı düşünme sürecinin parçaları olduğundan üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Bu kategoride ulaşılan bir başka beceri “Tümdengelimsel akıl yürütür.” kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen $ÖAS_{D2}$ *“*[14.18] *...|BC|’nin karesi buymuş. Ben buradan burayı göstereceğime diğer tarafı doğru kabul edip ‘acaba bu mudur?’ diyerekten ilerleyebilir miyim soruda. Ya da bu ispat sayılır mı? Yani A’dan B’ye, B’den C’ye ise A’dan C’ye durumunu sağlamış olacak* (Satır, 105-107)*”* cümlelerini

kullanmıştır. Bu cümlelerden öğretmen adayının önermenin tersini kullanarak genel bir durum oluşturmaya çalıştığı anlaşılmaktadır. Katılımcının tarifi tümdengelimsel akıl yürütmeyi açıklamasına karşın yaptığı tümdengelimsel akıl yürütme geçerli değildir. Ancak öğretmen adayının tümdengelimsel akıl yürütmede bulunduğu söylenebilir. Akıl yürütmenin bir türü olan tümdengelimsel akıl yürütme üst düzey bilişsel görevler gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Bu kategoride elde edilen bir başka üst bilişsel beceri "İspat stratejisinin doğru olup olmadığını zihinsel olarak kontrol eder." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.82'de sunulmuştur.

Tablo 4.82.

"İspat Stratejisinin Doğru Olup Olmadığını Zihinsel Olarak Kontrol Eder." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[12.11] Genelde kendime şöyle soru soruyorum. Buradan gidersem nereye giderim? Diğer taraftan gidersem nereye ulaşırım? Hatta şu var. Sonuca gideceğim yerlere ulaşmaya çalışırım genelde. (Satır, 74-75)"
$ÖAS_{D1}$	"[14.30] Dik üçgene göre işlem yapabilirdim de daha basit olur diye, Pisagor kullanarak istesem kullanabilirdim, ama üçgen olduğu için kullanamıyorum. Şimdi hocam B den AC'ye ben bir diklik indireyim… Bir dakika hocam, ben bunun vektörlerle yapıldığını biliyorum. Sanırım bu yolla sonuca ulaşabilirim. (Satır, 113-116)"

Tablo 4.82 incelendiğinde katılımcıların "İspat stratejisinin doğru olup olmadığını zihinsel olarak kontrol eder." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Öğretmen adayının ifadelerinden bu beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır. Bu kategoride bulunan son kod ise "Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının ifadeleri Tablo 4.83'de sunulmuştur.

Tablo 4.83.

"Önermede Kullanılan Sembollerden Hareketle İspat Yöntemini Belirler." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[10.28] …Başlangıç noktası aynı olan 0 noktası olan iki vektör $\overrightarrow{OA}$ ile $\overrightarrow{OB}$ arasındaki açıyı, vektörlerin uzunluklarını kullanarak belirleyebiliyorum. Bunu da iç çarpım işlemiyle kolaylıkla görebilirim. Mesela başlangıç noktası aynı olan iki vektörün oluşturduğu açının kosinüsü bu iki vektörün iç çarpımıyla normlarının yani yukarıda soruda görülen mutlak değerlerinin çarpımı şeklinde yazıldığını biliyorum. (Satır, 67-71)"
$Ö_{İ1}$	"[08.13] …Kosinüs teoreminin vektörel çıktığını, yani vektörel bir iç çarpımla geldiğini biliyordum. Yani bu ispatta oradan geleceğini düşünüyorum. Hani birde ne var mesela şimdi diyelim ki uzunluğun karesi, bir vektörün kendisiyle iç çarpımından geliyor. BC için, AC için, AB için. Bunların kareleri. Yine sonuçta üçgen oluşacak. AC ile AB'nin iç çarpımından da zaten cos A geliyor. Çünkü vektörel çarpımda öyle bir durum var. İç çarpım daha doğrusu vektörel çarpım. Yani bunlar bütünleşince iç çarpım çıkıyor ortaya. (Satır, 61-66)"
$Ö_{İ2}$	"[11.57] Hocam kareler varsa işin içinde Pisagor'dan çıkacağını düşünüyorum. (Satır, 59)"
$ÖAS_{D2}$	"[14.18] Şimdi bana verilen soruda BC nin karesinden bahsediyor. Şimdi ben ABC üçgeni herhangi bir özel üçgen değil. Herhangi bir uzunluğu açısı verilmemiş, direkt olarak BC ye ulaşamıyorum. Dolayısıyla AB yi ve AC yi kapsayacak ve şurada temsili açılar oluşturabileceğim bir dikme indirdim. Ki hem burada açı verebileyim hem burada Pisagor bağıntısında AB ve AC yi kullanabileceğim denklemler bulayım. (Satır, 97-101)"

Tablo 4.83 incelendiğinde katılımcıların "Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Aynı beceriyi

sergilediği belirlenen $ÖA1_{İ1}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog da aşağıda sunulmuştur (Satır, 21-29):

[02.56] $ÖA1_{İ1}$: Bu önermenin ispatı için şekil çizmek gerekiyor.

[03.00] A: Neden şekil çizmemiz gerekiyor?

[03.05] $ÖA1_{İ1}$: Kosinüs oluşturmak için şekil çizmeye ihtiyacımız var. Yani şekil olmadan bunu göstermemiz mümkün değil.

[04.25] A: Neden dik çizmeye karar verdiniz?

[04.27] $ÖA1_{İ1}$: Hocam hani cos α oradan bulurum sonra oradan işte kare falan var. Kareler olduğu için genelde hocam Pisagor bağıntısını uygularım.

[04.40] A: Kare olduğu için Pisagor bağıntısını uyguluyorsunuz.

[04.43] $ÖA1_{İ1}$: Evet, çağrışım oradan geldi.

Katılımcılardan alınan görüşler incelendiğinde katılımcıların "Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler." becerisini sergilediği söylenebilir. Strateji belirleme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.84'de sunulmuştur.

Tablo 4.84.

Strateji Belirleme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$ÖA1_{İ2}$
Yakınsak Düşünme Yeteneğini Kullanır.			✓		✓						✓							
Iraksak Düşünme Yeteneğini Kullanır.			✓		✓						✓							
Tümdengelimsel Akıl Yürütür.								✓									✓	
İspat Stratejisinin Doğru Olup Olmadığını Zihinsel Olarak Kontrol Eder.				✓			✓				✓			✓	✓			
Önermede Kullanılan Sembollerden Hareketle İspat Yöntemini Belirler.				✓	✓	✓		✓									✓	

Tablo 4.84 incelendiğinde strateji belirleme kategorisinde en fazla sergilendiği belirlenen becerilerin "İspat stratejisinin doğru olup olmadığını zihinsel olarak kontrol eder." ve "Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler."

becerileri olduğu belirlenmiştir ($n = 5$). Bu becerilerden sonra sergilenme sıklığına göre üçüncü sırada yer alan becerilerin "Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır." ve "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." becerileri yer almıştır ($n = 3$). En az sergilendiği belirlenen beceri ise "Tümdengelimsel akıl yürütür." becerisidir.

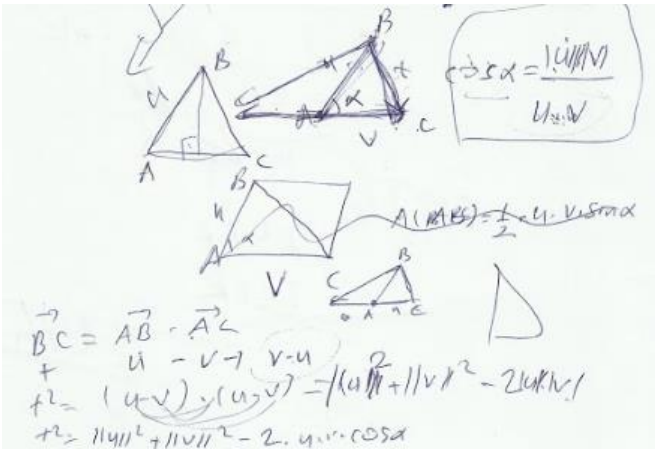
Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen diğer bir kategori "analojik akıl yürütme" kategorisidir. Bu kategoride sadece bir becerinin -"Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar."- sergilendiği tespit edilmiştir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının düşünceleri Tablo 4.85' de sunulmuştur.

Tablo 4.85.

"Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ2}$	"[11.57] …Bir de Kosinüs Teoreminin ispatı da Pisagor Bağıntısında ki gibi çıkıyor. Buna uyarlayabiliriz. Şuraya x dersek … (Satır, 59-60)"
$ÖAS_{D1}$	"[15.29] İki vektör arasındaki açı; b, a, c için yani $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ arasındaki açıya α diyelim. $\cos\alpha$, bu teorem yani bu ispat başka bir ispat olduğu için başka bir teoremden yapabiliyoruz diye biliyorum. Bu yüzden burada sadece formülden faydalanabiliriz… (Satır, 118-120)"

Tablo 4.85 incelendiğinde katılımcıların "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Ayrıca $Ö_{İ2}$'nin ifadesinden öğretmenin önermede verilen Kosinüs Teoreminin ispatını yaparken Pisagor Teoreminin ispatından yararlanıp aynı mantığı Kosinüs Teoremine aktarmaya çalışmıştır. Benzer şekilde $ÖAS_{D1}$ katılımcısı da iki vektör arasındaki açıyı Kosinüs Teoremine uyarlamaya çalışmıştır. Öğretmen adayının etkinlik kartından görünüm Şekil 4.20'de sunulmuştur.



Şekil 4.20. ÖAS$_{D1}$'in analojik akıl yürütme yaptığı bölümden kesit

Şekil 4.20 incelendiğinde katılımcının ifade ettiği gibi bir formülden yola çıkarak Kosinüs Teoremini ispatlamaya çalıştığı görülmektedir. Yine katılımcılardan ÖA1$_{İ2}$ ile yürütülen sesli düşünme protokolünde katılımcının bilişsel süreçlerini tam olarak belirleyebilmek için Kosinüs Teoremi ispatı farklı şekilde sorulmuştur. İspatta alışılmış olan dar açılı üçgen yerine geniş açılı üçgen verilmiş ve öğretmen adayından bu ispatı yapması istenmiştir. Katılımcı ile araştırmacı arasındaki diyalog şöyledir (Satır, 154-192):

[19.14] A: Eğer soru şöyle olmuş olsaydı; geniş açılı yani indirdiğiniz dikme şurada kalıyor. Şimdi Kosinüs teoremi ne olurdu yine ben ABC üçgeni diyeyim sizin dediğiniz gibi. ABC üçgeni olsun şurası H noktası olsun.

[19.58] ÖA1$_{İ2}$: Kosinüs teoremini buradan mı çıkarmamı istiyorsunuz?

[20.00] A: Evet

[20.08] ÖA1$_{İ2}$: Neden buradan dik indirdik. Şuradan indirsek olmaz mıydı?

[20.12] A: Geniş açılı üçgen olduğu için a kenarına ait yani geniş açıya ait kosinüs teoremini istiyoruz. Yani şu $|BC|$ uzunluğunu istiyor, hani $|BC|$'nin karesi diye vermişiz ya onu. Şöyle ifade ediyorum A açısı geniş açı olursa ne olur?

[20.45] ÖA1$_{İ2}$: Burası yine B, burası C şurası H olsa burası da x olsa.

[21.01] A: Ya da değişen bir şey olur mu yani aynı ispat mı geçerli olur?

[21.06] ÖA1$_{İ2}$: Burada da yine üçgenlerden gideceğim; ama şuralardan çıkar mı bilmiyorum. $x^2 + h^2, c^2$ ye eşittir. $x + b$ nin karesi a^2 ye eşit. Burada $b - x$ di burada $b + x$ olacak, ama yine sonuç çıkar mı bilmiyorum. Deneyerek yaparım ancak bunu.

[21.42] A: Bir deneyelim o zaman

[21.44] ÖA1$_{i2}$: Yine iki üçgenden Pisagor yapacağım. Şöyle çizeyim karışmasın diye... Olmadı galiba.

[22.56] A: Peki burada x ne oluyor?

[22.58] ÖA1$_{i2}$: Şuan onu düşünüyorum. Şuradaki açıdan yapsam şey olur; şuraya bir değer α diyeyim buraya olur mu? Şurası da $a - \alpha$ olsun.

[23.26] A: Bu açının değerini zaten biliyorsun a olarak, neden bu $a - \alpha$ oldu?

[23.31] ÖA1$_{i2}$: Toplamı a olsun diye düşündüm. Zaten buraya birşey demicem şimdi ben şurası α olsun onu dönüştürcem de ben şuan ikisini bir düşünemedim. $\cos\alpha$ neye eşit olur? Komşu bölü c ye eşit olur. Şimdi geniş açı olduğu için bu - ile çarpılıyor diye düşünüyorum

[23.55] A: Neden eksiyle çarpıldığını düşünüyorsunuz?

[23.57] ÖA1$_{i2}$: 180 den çıkarıldığı için.

[24.00] A: 180 den çıkınca ne oluyor?

[24.04] ÖA1$_{i2}$: α,180-α burası, bu o yüzden $\cos(180 - \alpha) - x/c$ olur dedim.

[24.18] A: (-) olduğuna nasıl karar verdiniz? Neden (-) olduğunu düşünüyorsun? Yani $\cos\alpha - \frac{x}{c}$ demenizin nedeni nedir?

[24.30] ÖA1$_{i2}$: Trigonometride gördüğüm ve hatırladığım kadarıyla bunu söylüyorum. Şimdi şöyle bir koordinat düzlemi düşünelim. Şurası α olsun, burası dar açı burası geniş açı. Burası dar açılı üçgende artıydı. Sinüs artı, diğerleri eksiydi. Kosinüs eksi oluyor. Burada geniş açılı olduğu için eksi olduğunu düşündüm. Yani eksiyle çarpılacağını düşündüm. α'dan bunu çıkardık ya, şurayı 180 den α'yı çıkardık. Şurası kaldı burası da Kosinüs için eksili değer alır diye düşündüm. Bu yüzden eksiyle çarptım.

[25.20] A: Tamam devam edelim

[25.24] ÖA1$_{i2}$: Buradan x değerimiz $-c.cos(180 - \alpha)$ çıkar. Şura dediğimiz zaten a açısı $180 - \alpha$ a açısı yani $x = -c.cosa$ olur. Burada yerine yazarsam $a^2 = c^2 + b^2 - 2.b.c.\cos a$ olur.

Diyalog incelendiğinde katılımcının dar açılı üçgende kullandığı akıl yürütmeyi gerekli değişiklikleri yaparak geniş açılı üçgene taşıyabildiği dolayısıyla analojik akıl yürütme yapabildiği belirlenmiştir. "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." kodu üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Çünkü burada katılımcılar belli bir durumdan yola çıkıp, iki formül arasındaki farklılığı dikkate alarak

o durumu yeni duruma adapte etmektedirler. Bu durum üst bilişin biliş bilgisi olarak ifade edilen bir durum olup durumsal bilgi bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmesi uygun bulunmuştur. Analojik akıl yürütme kategorisinde elde edilen kodun katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.86'da sunulmuştur.

Tablo 4.86.

Analojik Akıl Yürütme Kategorisinde Elde Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$ÖA1_{İ2}$
Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar.					✓	✓	✓											✓

Tablo 4.86 incelendiğinde analojik akıl yürütme kategorisinde katılımcılardan dördünün "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisini sergilediği görülmektedir.

Üst bilişsel beceriler kategorisinde elde edilen bir başka kategori "kontrol etme" kategorisidir. Bu kategori altında "İspatlama sürecinde işlemlerin doğruluğunu adım adım kontrol eder.", "Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." ve "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." kodları bulunmuştur.

"İspatlama sürecinde işlemlerin doğruluğunu adım adım kontrol eder." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{İ1}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 71-78):

[11.58] $Ö_{İ1}$: Bir yerde hata yaptım.

[11.59] A: Neden hata yaptığınızı düşünüyorsunuz?

[12.01] $Ö_{İ1}$: Eksi gelmesi gerekiyordu yaptığım ispatta. Biraz böyle aceleci davrandım. Şimdi $|AC|.|BA|$ demişim. Yazıma bakayım bir. Kötü yazdım ya. $|AC|.|BA|$ demişim. $|BA|.|AC|$ tamam aynı şeylerdi zaten. Şimdi buradan normalde iç çarpımda; şöyle göstereyim BA, AC. Onun için normalde vektörlerin başlangıç ve bitim noktalarının aynı yere gelmesi gerekir. BA'yı taşırsam şöyle burası $(180 - \alpha)$ olacak. Daha doğrusu 180 eksi alacak, şuraya kosinüs $(180 - \alpha)$ diyelim. Burada

$-2.|BA|.|AC|$. Kosinüs olarak gelince ispat tamamlamış olur. Biraz aceleci davranınca o gözümden kaçtı.

Diyalog incelendiğinde öğretmenin hata yaptığının farkına vardığı, işlemlerin doğruluğunu adım adım kontrol ederek hatayı belirlemiştir. Öğretmenin hatayı tespit etmeye yönelik becerisi durumsal bilgi bağlamında üst bilişsel olarak ifade edilebilir.

Bu kategoride ulaşılan bir diğer kod "Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan ÖA1_{O1} ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 26-30):

[07.52] A: Şu hatadan sonra tekrar başa döndünüz. Burada hata yaptığınızı fark edip tekrar baştan mı başladınız işlemleri yapmaya?

[07.58] ÖA1_{O1}: Evet hocam.

[07.59] A: En baştan mı başladınız?

[08.02] ÖA1_{O1}: Yok en baştan değil. Yani şuraya kadar doğru yaptım. aa ben şekli yanlış çizmişim...

Diyalog incelendiğinde öğretmen adayının hata yaptığında işlem adımlarını kontrol ettiği ancak kontrol etmeye en baştan değil doğru yaptığına emin olduğu yerden sonra başladığı anlaşılmaktadır. Katılımcının bu becerisi öz-farkındalık bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Bu kategoride ulaşılan bir başka kod ise "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.87'de sunulmuştur.

Tablo 4.87.

"Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$\text{Ö}_{\text{İ1}}$	"[13.15] Yani ispat geçerli çünkü dışarıdan hiçbir bilgi katmadım yine var olan bir şeyi kullandım iç çarpım yani dışarıdan da kendine de bir şey katmadığım için şüphelenecek bir durum yok diye düşünüyorum. (Satır, 80-82)"
$\text{ÖA1}_{\text{İ2}}$	"[18.51] Bu geçerli ispattır. Pisagor'dan elimizde hiçbir şey yokken sadece Pisagor'dan sonuca istenilene ulaştık. (Satır, 150-151)."

Tablo 4.87 incelendiğinde katılımcıların ispatlarını sembollere dayandırdığından ve ispatlarını formel olarak yürüttüklerinden bu becerinin aksiyomatik ispat şemasına göre gerekçelendirme olduğu başka bir ifadeyle "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği tespit edilmiştir. Sembolik ifade kullanmanın ispat için gerekli olduğunun farkında olmaları ve bunun için sembolik ifade kullanmaları öz-düzenleme anlamında üst bilişsel olarak değerlendirilebilir. Kontrol etme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.88'de sunulmuştur.

Tablo 4.88.

Kontrol Etme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$ÖA1_{I2}$
İspatlama Sürecinde İşlemlerin Doğruluğunu Adım Adım Kontrol Eder.					✓										✓			✓
Hata Yaptığında İşlem Adımlarını Tek Tek Kontrol Eder Ve Son Olarak Önermenin Doğruluğunu Değerlendirir.															✓			
Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.				✓	✓	✓		✓	✓		✓				✓			✓

Tablo 4.88 incelendiğinde kontrol etme kategorisinde en sık sergilendiği belirlenen becerinin "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisi olduğu belirlenmiştir ($n = 8$). Kontrol etme kategorisinde bu beceriden sonra en sık sergilendiği belirlenen beceri "İspatlama sürecinde işlemlerin doğruluğunu adım adım kontrol eder." becerisidir ($n = 3$). Bu kategoride en az sergilendiği belirlenen beceri "Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." becerisidir ($n = 1$).

Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bir başka kategori "ilişkilendirme" kategorisidir. Bu kategoride "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." ve "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." kodlarına ulaşılmıştır.

"İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.89'da sunulmuştur.

Tablo 4.89.

"İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[14.05] Şu an formülle bulacağım kısmın gidiş yolumla arasındaki ilişkiyi kurmaya çalışıyorum. Elimde bir iç çarpım fonksiyonu var. Vektörel bir işlem yapmaya çalışıyorum, $\cos\theta$ belli. Buradan sonuca gitmem için şu BC uzunluğunun karesiyle ilgili bir ilişkilendirme yapmam lazım. (Satır, 83-85)"
$ÖAS_{D1}$	"[22.55] …Şimdi ben bununla bunu ilişkilendirmeye çalışacağım. Şimdi biz u.v yerine ne dedik?... (Satır, 143-144)"
$ÖAS_{D2}$	"[14.18] …Dolayısıyla $\|AB\|$'yi ve $\|AC\|$'yi kapsayacak ve şurada temsili açılar oluşturabileceğim bir dikme indirdim ki hem burada açı verebileyim hem burada Pisagor bağıntısında AB ve AC yi kullanabileceğim denklemler bulayım. Bunları birleştirebilirsem… (Satır, 99-101)"
$ÖA1_{O1}$	"[04.43] Çünkü $\cos\alpha$'yı bulup ilişkilendirmem gerekiyor. $\cos\alpha$ trigonometrik oran o da dik üçgenlerde oluyor. Şunu indirdiğimiz dikmeye h dersek $\|AH\|$'ye b dediğimiz zaman $\|AH\|$'ye b-x kalıyor. Her iki tarafta şuraya da h dersek her iki üçgende de Pisagor yazacağız [içinden çözüyor] (Satır, 23-25)"

Tablo 4.89 incelendiğinde katılımcıların "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği saptanmıştır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖA1_{İ1}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 35-41):

[08.46] A: Şuan ne düşünüyorsunuz?

[08.50] $ÖA1_{İ1}$: Yani hocam eşitliği sağlamaya çalışıyorum şuan.

[09.02] A: Hangi eşitliği çıkarmaya çalışıyorsunuz?

[09.09] $ÖA1_{İ1}$: İlk başladığımla sonuç arasındaki ilişkiye bakıyorum. Hani ilk önce α'ya bir dik çizdim. Pisagor uyguladım. Bunları tek tek yerine yazdım hocam. Şimdi eşitliğine bakıyorum.

[09.24] A: Eşitliği sağladığı zaman bu ispat tamamlanmış mı olacak?

[09.28] $ÖA1_{İ1}$: Yani ilişkilendirmeyi yapabilirsem evet olacak.

Öğretmen adayının düşünceleri incelendiğinde "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. İlişkilendirme becerisi üst düzey bir bilişsel beceri olduğundan üst bilişsel beceriler bağlamında değerlendirilmiştir.

Bu kategoride elde edilen bir başka üst bilişsel beceri "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." becerisidir. Bu beceriye bu soruda gözlemler sonucunda ulaşılmıştır. İlişkilendirme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.90'da sunulmuştur.

Tablo 4.90.

İlişkilendirme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$ÖA1_{İ2}$
İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar.				✓	✓	✓	✓	✓			✓				✓		✓	
İspat Sürecinde Şekiller ve Semboller Arasında İlişki Kurar.				✓	✓	✓		✓			✓				✓			

Tablo 4.90 incelendiğinde ilişkilendirme kategorisinde "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." kodunun daha fazla sergilendiği "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." kodunun ise daha az sergilendiği belirlenmiştir. Ancak her iki kodun da katılımcılara göre dağılımı sistematik değildir. Bu nedenle Ki-Kare testi yapılmamıştır.

4.4. Üçüncü Etkinlik Kartındaki Sorudan Elde Edilen Nitel Bulgular

Yapılan içerik analizi sonucunda cebir önermesini içeren üçüncü soruda "Bilişsel beceri" ve "Üst bilişsel beceri" olarak iki tema elde edilmiş ve verilerin sunumu bu temalara göre yapılmıştır.

4.4.1. Üçüncü etkinlik kartındaki sorudan bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular

Bilişsel beceriler teması altında "İspat önermesini okuma", "Önermenin altını çizme", "Doğruluğunu değerlendirme", "Strateji belirleme", "İşlem süreci" ve "Sezgisel kestirme yolları" olarak altı kategori ve bu kategoriler altında 25 koda ulaşılmıştır.

Çalışmaya katılan öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde sergiledikleri bilişsel becerilere yönelik oluşan ilk kategori "ispat önermesini okuma" kategorisidir. İspat önermesini okuma kategorisinde "İspat önermesini ilk kez okur.", "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler.", "Önermeyi sembolik olarak yazar.", "Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür.", "Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder.", "Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder.", "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." ve "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." kodları elde edilmiştir.

Bu kategoride elde edilen ilk kod "İspat önermesini ilk kez okur." becerisidir. Bu beceri katılımcılar önermeyi ilk okumayı bütün bir şekilde yaptığı anlamına gelmektedir. Katılımcılardan ÖD1'in *"*[04.20] *Birden başlayarak n'ye kadar olan n-tek sayı ardışık tek sayıların toplamını veren formül bulunuz…* (Satır, 32-33)*"* ifadesi bu duruma örnek olarak verilebilir.

Bu kategoride elde edilen bir başka bilişsel beceri "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." kodudur. Bu kodu sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{O1}$'in soruyu okurken kullandığı *"*[16.23] *1 den başlayarak n'ye kadar, bu daha önce yaptığımıza benziyor, n-tek sayı ardışık tek sayıların toplamını veren…* (Satır, 46-47)*"* ifadelerinden "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." becerisini sergilediği bulunmuştur.

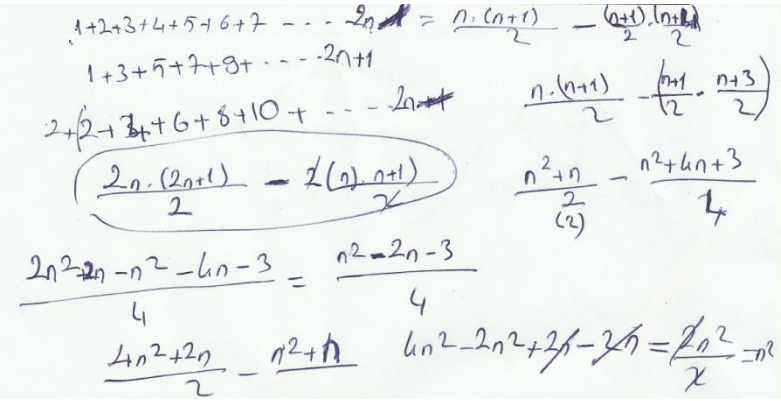
Bu kategoride elde edilen bir diğer beceri "Önermeyi sembolik olarak yazar." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.91' de sunulmuştur.

Tablo 4.91.

"Önermeyi Sembolik Olarak Yazar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{D2}$	"[02.44] Hocam şöyle 1, 1+3=4, 2'nin karesi şeklinde, 9; 3'ün karesi şeklinde, 16 işte 4'ün karesi şeklinde 2n-1 şeklinde olur buradan işte n, n'nin karesi şeklinde olur hani burada koyarlarsa 2n-1 =7, 8 oradan 4 olur. (Satır, 23-25)"
$ÖAS_{İ2}$	"[14.20] …1+3+5...n buradaki n ye ilk başta 2t+1 desem tek sayı olduğunu göstermek için. (Satır, 48)"

Tablo 4.91 incelendiğinde katılımcıların "Önermeyi sembolik olarak yazar." becerisini sergilediği saptanmıştır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{D2}$'nin etkinlik kartı ve süreçte yapılan gözlemler bu öğretmeninde "Önermeyi sembolik olarak yazar." beceriyi sergilediğini göstermektedir. Öğretmenin etkinlik kartına ilişkin görüntü şekil 4.21'de sunulmuştur.



Şekil 4.21. $Ö_{D2}$'nin önermeyi sembolik olarak ifade ettiğini gösteren ekran görüntüsü

Şekil 4.21 incelendiğinde öğretmenin "Önermeyi sembolik olarak yazar." becerisini sergilediği görülmektedir.

Bu kategorideki bir başka bilişsel beceri "Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen $Ö_{O2}$'nin *"*[18.30] *...1-3-5-7 ve n de tek sayıdır. Ardışık tek sayıların toplamını veren formülü bulunuz.* (Satır, 104)*"* ifadesinden önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürdüğü saptanmıştır.

Bilişsel becerilerdeki bir başka kod olan "Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder." kodunu sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D2}$ *"*[27.21] *Birden başlıyormuş n ye kadarmış n tek sayıymış ardışık doğal sayıların toplamını istiyormuş...* (Satır, 151-152)*"* ifadeleriyle bu beceriyi sergilediğini göstermiştir.

Bir başka kod ise "Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D2}$'nin bir önceki kodda belirlenen becerinin devamında ifade ettiği *"[27.21] ...Birkaç deneme yapmak istiyorum. (Birkaç deneme yapar)... 1'in karesi, 2'nin karesi, 3'ün karesi diye devam edecek. Belli ki bundan sonrakiler içinde böyle devam edecek. Yani terim sayısının karesi olarak devam edecek. Böyle olduğunu hissediyorum. (Satır, 156-158)"* cümlelerden bu beceriyi sergilediği anlaşılmıştır.

Bu kategoride sergilenen bir başka kod "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.92'de sunulmuştur.

Tablo 4.92.

"Önermeyi Anlamadığında Birkaç Kez Okur ve Verilenler Üzerine Düşünür." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{İ1}$	"[10.49] 1'den başlayarak n'e kadar olan n-tek sayı… 1'den başlıyor 1+3+…+n n en son tek sayı… (Satır, 60-61)" "[14.28] …1'den işte şu sayıya n'e kadar olan sayıların toplamı… (Satır, 77)"
$ÖAS_{O1}$	"[16.23] 1 den başlayarak n ye kadar… (Satır, 46); [16.30] …1 den n ye kadar olan sayıların toplamı… (Satır, 48-49)"

Tablo 4.92 incelendiğinde katılımcıların "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerisini sergilediği saptanmıştır.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen bir başka bilişsel beceri "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D2}$'nin bu beceriyi sergilediğine aşağıdaki cümlelerinden ulaşılmıştır (Satır, 152-154):

> "[27.21] …1 den başlarsa ardışıksa; 1 dir, 3 tür, 5 tir, 7 dir, 9 dur, 11 dir, 13 tür ve en son n dir. Burada n tekmiş. Tek sayı. Şimdi bu toplamı veren formülü bulmalıyız. n işlem basamağının son adımı gözümün önünde bulunması iyi olacak."

Yukarıdaki cümleler incelendiğinde katılımcın "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. İspat önermesini okuma kategorisinde ulaşılan kodların kategorilere göre dağılımı Tablo 4.93'de sunulmuştur.

Tablo 4.93.

İspat Önermesini Okuma Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Önermeyi Sembolik Olarak Yazar.		✓	✓	✓		✓		✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
İspat Önermesini İlk Kez Okur.	✓	✓	✓		✓	✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Önerme İfadesini Tutarsız Forma Dönüştürür.				✓														
Önermeyi Anlamak İçin Kendi Cümleleriyle İfade Eder.								✓										
Önermenin Doğruluğunu Sezgisel Olarak Hisseder.								✓										
İspat Önermesini Adım Adım Okuyarak İlerler.				✓			✓		✓									
Önermeyi Anlamadığında Birkaç Kez Okur Ve Verilenler Üzerine Düşünür.			✓						✓		✓							
İspatın Hipotez-Hüküm Ve Amaçlarını (Hedeflerini) Belirler								✓			✓							

Tablo 4.93 incelendiğinde ispat önermesini okum kategorisinde en sık sergilendiği belirlenen beceri "İspat önermesini ilk kez okur." becerisidir ($n = 14$). Sıklıkta bu beceriyi "Önermeyi sembolik olarak yazar." becerisi takip etmektedir ($n = 13$). Bu kategoride en fazla sergilenen üçüncü beceriler "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." ve "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerileridir ($n = 3$). Bu becerileri de "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." becerisi izlemektedir ($n = 2$). Bu kategoride en az sıklıkta sergilendiği belirlenen beceriler ise "Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür.", "Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder." ve "Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder." becerileridir.

Bilişsel beceriler temasında ulaşılan ikinci kategori "Önermenin altını çime" kategorisidir. Bu kategoride sadece bir becerinin –"İspatın hipotez ve hükmünü belirlemek için önermenin altını çizer."- sergilendiği tespit edilmiştir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{İ2}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 79-83):

> [18.43] A: Bu soruda da önermenin altını çizdiniz hocam. Neden?
>
> [18.45] $Ö_{İ2}$: Yine sonunu yuvarlak içine aldım hocam. Bizden ne istediğini belirtmek içi yapıyorum. Buraları çizmemin sebebi de n'ye kadar olan n tane tek sayı diyor yani soruların kaçar tane olduğunu anlamak için.
>
> [19.02] A: Yani yuvarlak içine aldığınız yer daha önemli bir yer, altını çizdiğiniz yer önemli bir yer öyle mi?
>
> [19.04] $Ö_{İ2}$: Yani öyle de söylenebilir ama daha çok hipotez hüküm gibi de düşünebiliriz.

Diyalog incelendiğinde katılımcının "İspatın hipotez ve hükmünü belirlemek için önermenin altını çizer." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Önermenin altını çizme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.94'de sunulmuştur.

Tablo 4.94.

Önermenin Altını Çizme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
İspatın Hipotez Ve Hükmünü Belirlemek İçin Önermenin Altını Çizer.						✓												

Tablo 4.94 incelendiğinde önermenin altını çizme kategorisinde ulaşılan tek kod olan "İspatın hipotez ve hükmünü belirlemek için önermenin altını çizer." becerisinin sadece $Ö_{I2}$ katılımcısı tarafından sergilendiği görülmektedir.

Bilişsel beceriler temasında elde edilen diğer bir kategori "doğruluğunu değerlendirme" kategorisidir. Bu kategori altında "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "İşlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirir.", "Dönüşümsel İspat Şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "Otoriter ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir.", "İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz.", "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." ve "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." kodlarına ulaşılmıştır.

"Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖA1_{O1}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 48-53):

[12.39] A: Sizce yaptığınız ispat geçerli midir?

[12.41] $ÖA1_{O1}$: Buna pek ispat denemez.

[12.43] A: Neden ispat denilemeyeceğini düşünüyorsunuz?

[12.46] $ÖA1_{O1}$: Bilmiyorum pek bir şeyler yaptığımı zannetmiyorum.

[12.52] A: Neden pek bir şeyler yaptığınızı düşünmüyorsunuz?

[12.56] $ÖA1_{O1}$: Kafamda bunu kurdum ama o da ne kadar doğru bilmiyorum

Diyalog incelendiğinde katılımcının yaptığı ispattan emin olamadığı yani "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

"İşlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{D1}$ ile araştırmacı arasındaki diyalog şöyledir (Satır, 39-41):

[06.41] $Ö_{D1}$: …[İşlemleri yaparak anlatmaktadır]… Daha formülü bulamadık.
[08.05] A: Neden bulamadığınızı düşünüyorsunuz?
[08.11] $Ö_{D1}$: Çünkü bu doğru bir şey değil. Bu formül ona eşit mi acaba?... [İşlemleri tekrar baştan yapmaktadır]…

Diyalog incelendiğinde öğretmenin formülün eşitlini kontrol etmek için "İşlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği söylenebilir.

Bu kategoride elde edilen bir başka beceri ise "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının ifadeleri Tablo 4.95'de sunulmuştur.

Tablo 4.95.

"Dönüşümsel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D2}$	"[14.57] Mesela bir örnekle inceleyelim. 7 ye kadar olan sayıların toplamını deneyelim. Evet çıkıyor. Bir tane daha deneyelim… O da sağlıyor. Evet, hepsinde sağlar. Doğrudur… (Satır, 52-53)"
$Ö_{İ2}$	"[18.00] … n=3 ise 1-3-5 olur… (Satır, 75)"
	"[18.18] Örneklerle beraber anlamaya çalışıyorum hocam. Yani örnek olmadan, çünkü n tek sayı soruyu anlamam gerekiyor. (Satır, 77-78)."
$ÖAS_{İ1}$	"[17.25] Önerme doğru değil çünkü 3 yazdım çıkmadı. Yok çıktı. 3 yazarsak 2/2'den… (Satır, 86)."
$ÖA1_{D2}$	"[10.36] Bir artı üç, 4 yapar. 1+3+5, 9 yapar… (Satır, 33)"
	"[11.09] Evet, yani sayılardan çıkarmaya çalışıyorum… (Satır, 35)"
	"[11.19] Sayılardan ispatlanabilir. Sayılardan bir yere ulaştığımda bir formül çıkarabilirim… (Satır, 37)."
$ÖA1_{O1}$	"[10.19] … Mesela şöyle, 1-3-5-7 desek. Yani günlük hayatta olduğu gibi 7+1=8 deyip 5+3=8 deyip öyle de yapabiliriz… (Satır, 36-37)"

Tablo 4.95'deki katılımcıların görüşleri incelendiğinde düzenli örneklerle değil düzensiz örneklerle (rasgele örneklerle) beraber önermenin doğruluğunu göstermeye çalıştıkları görülmektedir. Bu nedenle bu görüşler doğrultusunda katılımcıların "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği anlaşılmıştır.

Bu kategoride ulaşılan bir başka kod ise "Otoriter ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.96'da sunulmuştur.

Tablo 4.96.

"Otoriter İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[11.05] İspatın geçerli olabilmesi için,1'den n'e kadar olanların toplamının doğru olduğunu göstermek gerekir. Ben bunu o teoreme dayandırarak ispatladığım için sıkıntı yok. (Satır, 48-49)"
$Ö_{İ2}$	"[22.42] …Bunun üzerinden devam ettim hocam, o teorem doğruysa bu a doğrudur ki bu teoremin ispatı kabul görmüştür bence… (Satır, 104-105)"

Tablo 4.96 incelendiğinde katılımcıların bir otoriteye dayandırarak ispatlarını gerekçelendirdikleri görülmektedir. Bu bağlamda bu becerinin üst bilişsel beceri gerektirmediği düşünüldüğünden beceri bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Bu kategoride elde edilen bir başka kod olan "İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu bilişsel beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{İ2}$'nin ifadeleri şöyledir (Satır, 65-69):

> [18.58] İşlemlerimi bir daha kontrol edeyim. 1'den $2t + 1$ gibi herhangi bir tek sayıya kadar olan sayıların toplamına a dedim. O aradaki çift sayılara da b dedim. b de 2 parantezine alıp şu formülü biliyordum. 1 den n'ye kadar olan sayıların toplamını bildiğimi kabul ettim. Tabi o zaman b burdan $t^2 + t$ geliyor. Denklemde $a + b$ de topladığımda yerine yazarsam burdan a yı $(t + 1)^2$ buluyorum. En başta n ye $2t + 1$ demiştim o zaman $t + 1$ de $(n + 1)/2$ olur. Dönüştürdüğüm şeye tekrar ulaştım.

Katılımcının görüşleri incelendiğinde "İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategorideki bir diğer kod ise "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D2}$'nin düşünceleri aşağıda verilmiştir (Satır, 165-168):

> "[33.44] Hocam aslında burada bir ilişki kuramadım. $(Son\ terim - ilk\ terim)/artış\ miktarı + 1$ idi galiba formül. En azından 1'den n'e kadar olan terim sayım buydu benim. Ya ben n'in kaçıncı n olduğunu yani $1 - 3 - 5 - 7 - 9$ olduğunu buraya yazdığımda bir şey oluşuyor, hani nasıl söyleyeyim bunu da pek ifade edemiyorum ama toplamı hep bir şey."

Katılımcının görüşleri incelendiğinde "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategoride sergilenen bir başka bilişsel beceri ise "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazıların görüşleri Tablo 4.97'de sunulmuştur.

Tablo 4.97.

"Tümevarımsal İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖA1_{D1}$	"[11.11] Bundan sonra sırasıyla değer verip denerim tek tek. (Satır, 27)"
$ÖA1_{O2}$	"[00.51] Sadece formülü yazdığım zaman ispat olmaz. (Satır, 6)"
	"[00.58] Değer vererek en fazla ispatlayabilirim. (Satır, 8)"
	"[01.02] Mesela 1'den n'ye kadar demiş. 1'i verdiğimiz zaman 2-1 den 1 olur. Sonra 2'yi verirsek 4-1 den 3 olur. Mesela 15'i versek 30-1=29 bu şekilde olur. (Satır, 10-11)"

Tablo 4.97 incelendiğinde katılımcıların "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergiledikleri çıkarılmıştır. Bu beceri üst bilişsel aktivite gerektirmediğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir.

Bu kategoride elde edilen son kod ise "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.98'de sunulmuştur.

Tablo 4.98.

"İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ2}$	"[18.18] Doğru anladım değil mi hocam, n'ye kadar olan ardışık tek sayıların… Birden başlayıp. (Satır, 78)"
$ÖAS_{D1}$	"[20.40] 1den k ya kadar, onda da bir formül bilmek gerekmez mi hocam? (Satır, 57)"
$ÖAS_{İ1}$	"[17.25] … Ben bu şekilde gider diye düşünüyorum. Doğru mu acaba? (Satır, 92-93)"

Tablo 4.98 incelendiğinde katılımcıların "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.99'da sunulmuştur.

Tablo 4.99.

Doğruluğunu Değerlendirme Kategorisinde Elde Edilen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$ÖA1_{İ2}$
Ritüel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.															✓			
İşlemlerini Kontrol Ederek Doğruluğunu Değerlendirir.	✓																	
Dönüşümsel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.		✓				✓				✓	✓			✓	✓			
Otoriter İspat Şemasına Göre İspatının Doğruluğunu Değerlendirir.	✓			✓		✓												✓
İşlemlerin Tamamını Tekrar Yaparak İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.												✓						
Sezgisel Olarak Doğruluğunu Hisseder Ancak Sembolik Olarak İspatlayamaz.								✓										
Tümevarımsal İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.													✓			✓		
İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar.						✓			✓		✓							

Tablo 4.99 incelendiğinde doğruluğunu değerlendirme kategorisinde en sık sergilendiği belirlenen beceri "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisi $(n = 6)$ olduğu görülmektedir. Bu beceriyi "Otoriter ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisi izlemektedir $(n = 4)$. Bu kategoride en fazla sergilenen üçüncü beceri "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisidir $(n = 3)$. Bu becerileri sıklık bakımından "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisi takip etmektedir $(n = 2)$. Bu kategoride en az sergilenen beceriler ise "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "İşlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirir.", "İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir." ve "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz." becerileridir.

Bilişsel beceriler temasında elde edilen bir başka kategori ise "strateji belirleme" kategorisidir. Bu kategoride "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.", "İspatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünür." ve "Ezberlediği yolla ispat yapar." kodları bulunmuştur.

"Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." becerisini sergileyen $ÖA1_{O1}$'in düşünceleri şöyledir (Satır, 37-41):

> [10.19] $1 + 3 + 5 + .. + n$ ye kadar olsa mesela bunun terim sayısını bulsak son terim-ilk terim/ artış miktarı artış miktarı 2 oluyor +1 mesela bunu getirip son terimle ilk terimi toplamının yarısını şey yapsak n+1/2, şurada da aynısını yapıyoruz. Son terimle ilk terimi topluyoruz ama toplam terim sayısının yarısı oluyor. O zaman şunu da 2 ye bölsek formülü belki bu şekilde elde edebilirim.

Katılımcının ifadeleri incelendiğinde "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." becerisini sergilediği açıkça görülmektedir.

Bu kategoride ulaşılan bir başka bilişsel beceri "İspatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünür." kodudur. Bu kodun elde edildiği katılımcılardan $ÖAS_{O1}$'in aşağıdaki cümleleri bu düşünceyi sergilediğini göstermektedir (Satır, 57-59):

> "[20.40] …Yani onda da sonuçta şu n.(n+1)/2 gibi bir formülü bir genellemeyi bilmek zorundayız. 1 den k'ya kadar olan sayıların toplamını veren formül. O formülden k'yı yaz k+1 için yaz. Yine de hani bu ispat yöntemi

kalıbını ezbere bilmek zorundayız."

Diyalog incelendiğinde öğretmen adayının "İspatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünür." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategoride elde edilen bir başka bilişsel beceri de "Ezberlediği yolla ispat yapar." kodudur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.100'de sunulmuştur.

Tablo 4.100.

"Ezberlediği Yolla İspat Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D2}$	"[13.29] Ardışık tek sayıların toplamını veren formül vardı. Terimler toplamı= Terim sayısı. Ortanca terim… Terim sayısı son ter.-ilk ter./artış mik. +1 diğeride son terim+1/2 olup çarpacaktık. Yani bunu veren formül (n+1)/2'nin karesi olur. (Satır, 48-50)"
$ÖA1_{D2}$	"[26.21] …1'den başlıyormuş ardışık tek sayı dediği için 2, 2 ekleyeceğim. 1+3+5+7 diye gidiyor n ye kadar. Bunun formülü ezbere dayalı neydi hatırlamıyorum. (Satır, 198-199)"

Tablo 4.100 incelendiğinde katılımcıların "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Strateji belirleme kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.101'de sunulmuştur.

Tablo 4.101.

Strateji Belirleme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Sözel Olarak Önermenin İspatını İfade Eder.															✓			
İspatı Ezberlemek Zorunda Olduğunu Düşünmektedir.									✓	✓								
Ezberlediği Yolla İspat Yapar.	✓	✓								✓	✓							✓

Tablo 4.101 incelendiğinde strateji belirleme kategorisindeki becerilerden en sık sergilendiği belirlenen becerinin "Ezberlediği yolla ispat yapar." Beceri olduğu bulunmuştur $(n = 5)$. Sıklık bakımından bu beceriyi "İspatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünmektedir." becerisi izlemektedir $(n = 2)$. Bu kategoride en az tekrar ettiği belirlenen beceri "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." becerisidir.

Bilişsel beceriler kategorisinde elde edilen bir başka kategori de "işlem süreci" kategorisidir. Bu kategoride "İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür.", "Örüntü genelleme yapar.", "Planına uygun ispat yapar.", "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." ve "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." kodlarına ulaşılmıştır.

"İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür." becerisini sergilediği belirlenen katılımcı $Ö_{İ2}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda sunulmuştur (Satır, 100-104):

[22.40] $Ö_{İ2}$: Bu ispat değildir hocam.

[22.41] A: Neden hocam?

[22.42] $Ö_{İ2}$: Çünkü ben şurada bir kabulden yola çıktım hocam. Gerçi teoremlerde de biz bazen şunu yapıyoruz; Öklid'de de bazı postulatları kabul ediyoruz. Onun üzerine gidiyoruz ama herhalde bunu da açıklamam gerekirdi en temelde. Yani ben bu teoremi bilerek başladım.

Diyalog incelendiğinde öğretmenin yapılan her ispat için o ispatta geçen önermenin (lemmaların) ispatının yapılması gerektiğini düşündüğü anlaşılmaktadır.

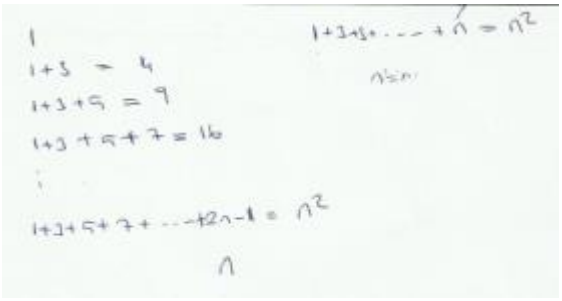
Bu kategoride elde edilen bir başka kod "Örüntü genelleme yapar." bilişsel becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının sesli düşünme protokolündeki ifadeleri Tablo 4.102'de sunulmuştur.

Tablo 4.102.

"Örüntü Genelleme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{D1}$	"[28.16] …Ben bu formülü şöyle yaparım hocam. Yani mantıken hani ilk önce mesela ilk dört terim toplamı nedir? 16. n'li bir terimi kullanarak sonucu 16 ya formülü genelleştirmeye çalışalım. Ezberde tutamıyorum zaten ne olabilir şimdi? Şimdi n=1 için 1, n=2 için 4, n=3 için 9, n=4 için 16. O zaman n^2 oluyor hocam. Bu yüzden de n^2'dir. (Satır, 183-186)" "[29.48] İspatın geçerli olması için bir hesap makinesi lazım, ben şöyle yaptım hocam ezbere yapmayayım dedim. n=1 için 1,n=2 için 1+3den 4, n=3 için 9, n=4 içinde 16 e o zamanda hep n2 oluyor hatta bir daha yapalım n=5 için sağlamasını yapalım 16, 9 daha 25 yine karesi oluyor. O yüzden de n^2 genelde ben hocam hani formül bilmediğim zamanda 1. terim 2. terim 3. terim derim ondan sonra bir genelleme yapmaya çalışırım her zamanda doğru olacak diye bir şart yok yani ama bunda buldum. (Satır, 188-192)"
$ÖAS_{D2}$	"[33.44] … Bir sonraki sayıyı eklediğimde bir sonrakinin karesi oluyor ve böyle devam ediyor. Bu aynen binomda olduğu gibi katlı bir şekilde ilerliyor. 1 den 3, 1-3 den 5'e ve her eklediğim sayı başka bir şeyin karesini getiriyor. Bu benim karesini getiren toplamlarım 1 den başlıyor ve devam eden her sayı başka bir sayının karesini getiriyor. Dolayısıyla ben diyeceğim ki bir formül istiyorsa benden bu örüntü devam edecektir ve n^2 olarak genellenecektir. (Satır, 169-173)"

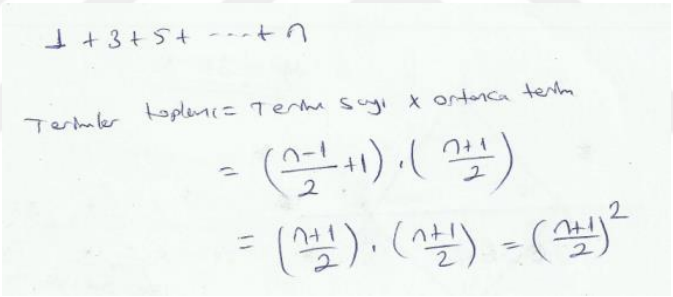
Tablo 4.102 incelendiğinde katılımcıların "Örüntü genelleme yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Katılımcının ifadeleri incelendiğinde "Örüntü genelleme yapar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. "Örüntü genelleme yapar." becerisini sergilediği belirlenen bir başka katılımcı ise $ÖAS_{O2}$'dir. Katılımcının etkinlik kartına ait ekran görüntüsü Şekil 4.22'de sunulmuştur.



Şekil 4.22. $ÖAS_{O2}$'nin etkinlik kartına ait ekran görüntüsü

Şekil 4.22 incelendiğinde katılımcının "Örüntü genelleme yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategoride elde edilen diğer kodlar "Planına uygun ispat yapar.", "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." ve "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." becerileridir. Bu beceriler etkinlik kartlarından ve sesli düşünme protokolünde yapılan gözlemlerden tespit edilmiştir. Bu becerileri sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{D2}$'nin etkinlik kartına ait görünüm Şekil 4.23'de sunulmuştur.



Şekil 4.23. $Ö_{D2}$'nin etkinlik kartına ait ekran görüntüsü

Şekil 4.23 incelendiğinde katılımcının "Planına uygun ispat yapar.", "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." ve "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." becerilerini sergilediği anlaşılmaktadır. İşlem süreci kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.103'de sunulmuştur.

Tablo 4.103.

İşlem Süreci Kategorisinde Sergilendiği Belirlenen Becerilerin Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
İspat Sürecinde Lemmaların da İspatlanması Gerektiğini Düşünür.						✓												
Örüntü Genelleme Yapar.							✓	✓		✓								
Planına Uygun İspat Yapar.		✓			✓						✓							
Kullandığı İspat Yöntemi Amaca Ulaşmada Yeterlidir.		✓			✓						✓							
Seçtiği İspat Türüne Uygun İspat Yazabilir.		✓			✓						✓							

Tablo 4.103 incelendiğinde işlem süreci kategorisinde en sık sergilendiği belirlenen becerilerin "Örüntü genelleme yapar.", "Planına uygun ispat yapar.", "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." ve "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." becerileridir $(n = 3)$. Az sergilendiği belirlenen beceri ise "İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür." becerisidir.

Bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir başka kategori ise "sezgisel kestirme yolları" kategorisidir. Bu kategori altında "Araç-amaç analizi yapar.", "Tepe tırmanışı yapar." ve "Rasgele arama yapar." kodlarıdır.

"Araç-amaç analizi yapar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.104'de sunulmuştur.

Tablo 4.104.

"Araç-Amaç Analizi Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[09.45] Bir daha yapıyorum hocam. $(4n^2 + 2n) : 2 - n$ ne yapar? $4n^2 - 2n^2 + 2n - 2n$… Şunların ikisi gitti. $(2n^2 : 2).n^2$'yi buldum hocam. 1'den n'e kadar olanları aldım. Onlardan tek sayıların toplamını bulmak istiyordum ya 1'den $2n$'e kadar olanları çıkardım. Sonuçta n^2 buldum. İspat tamamlamış oldu. (Satır, 43-46)"
$ÖAS_{O1}$	"[21.14] …Ben şöyle düşündüm 1 ile 3'ün toplamıyla 2 ile 4'ün toplamının arasındaki fark hani böyle bölüm düşündüm ama bilmiyorum. Yani, 1 ile 3'ün toplamı 4, 2 ile 4'ün toplamı 6, 5+7= 12, 6+8=14. Aslında aldığım ardışık 4 sayı şeklinde düşündüm hocam ben ama sürekli teklerle o ardışık çiftlerin toplamı arasındaki fark 2 oluyor. Yani 1+3 ile 2+4 hep 2 fark. O zaman $(n - 2) + n$ ile şuradaki arasındaki fark da 2 olacak. Ama bu sefer burayı bilmiyoruz. $n - 1 + n + 1$ bunun arasındaki fark da 2 olacak. (Satır, 62-67)"

Tablo 4.104 incelendiğinde katılımcıların "Araç-amaç analizi yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Öğretmen adaylarının ifadeleri incelendiğinde hem yaptığı işlemlerden hem de kendi ifadesinden önermeyi parçalara ayırarak ispat yapmaya çalıştıkları anlaşılmaktadır. Bu bağlamda katılımcıların "Araç-amaç analizi yapar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Bir başka kod olan "Tepe tırmanışı yapar." becerisini sergilediği belirlenen $ÖA1_{D1}$'in "[11.27] *Yok bence değildir. Yani ben ilk aklıma gelen bu olduğu için bunu yaptım.* (Satır, 41)" ifadelerinden de anlaşılacağı üzere en kısa yolu tercih ederek yanlış yapmaktadır. Bu durum katılımcının "Tepe tırmanışı yapar." becerisini sergilediği göstermektedir.

Bu kategoride ulaşılan bir başka bilişsel beceride "Rasgele arama yapar." becerisidir. Bu beceri gözlem verilerinden elde edilmiştir. Sezgisel kestirme yolları kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımları Tablo 4.105'de sunulmuştur.

Tablo 4.105.

Sezgisel Kestirme Yolları Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖAI_{D1}$	$ÖAI_{D2}$	$ÖAI_{O1}$	$ÖAI_{O2}$	$ÖAI_{I1}$	OAI_{I2}
Araç-Amaç Analizi Yapar.	✓								✓									
Tepe Tırmanışı Yapar.													✓					
Rasegele Arama Yapar.	✓																	

Tablo 4.105 incelendiğinde sezgisel kestirme yolları kategorisinde daha fazla sergilendiği belirlenen becerinin "Araç-amaç analizi yapar." becerisi olduğu belirlenmiştir ($n = 2$). Az sergilendiği belirlenen beceriler ise "Tepe tırmanışı yapar." ve "Rasgele arama yapar." becerileridir ($n = 1$).

4.4.2. Üçüncü etkinlik kartındaki sorudan üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular

Üçüncü soruda sesli düşünme protokolünde üst bilişsel beceriler temasında "İşlemleri kolaylaştırma", "Sorgulama", "Planlama", "Strateji belirleme", "Kontrol etme", "İlişkilendirme" ve "Analojik akıl yürütme" olarak yedi kategori ve 18 koda ulaşılmıştır.

İşlemleri kolaylaştırma kategorisi altında tek bir üst bilişsel becerinin –" Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar."- sergilendiği tespit edilmiştir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının düşünceleri Tablo 4.106'da sunulmuştur.

Tablo 4.106.

"Değişken Değiştirerek İşlem Kolaylığı Sağlar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ1}$	"[18.49] Burada k'yı kendimiz tanımladık. Hani n'i kolay ifade edebilmek için. Ya şöyle bir şey var. Burada n'e kadar diyor ama, soruda bana sorduğunda bir tek sayı verecek. Biz burada tek sayıyı daha kolay ifade edebilmek için k kullandık. Ben bunu n'e de çevirsem yine terim sayısı (k+1) çıkacak. Sonuçta bir şey değişmeyecek. Burada (2n+1)'e kadar demediği için verdiği ifadede n'i de tek sayı olarak söylemiş. Ama hani orayı tek sayı formatında derse daha rahat ifade ederdik. Bende yeni bir şey tanımlamazdım yani. Burada şimdi n yazacağım orada bakan belki unutacak tek olduğunu. 2k+1 veya 2k-1 yazınca tek sayı formatına daha açık ve net gözüküyor. Hani n'e de çevrilebilir. k'yı çeker yerine koyarız farkeden bir şey olmaz. Yani k'yı çektik mesela, (n-1):2 şimdi bakayım ne geliyor? Şimdi k yerine (n-1):2 yazdık. (n-1):2+1. O da ne geldi (n+1):2'nin karesi geldi. O da az önce söylemiş olduğum hesaba geldi. Yani (son terim + ilk terim): 2 geldi. Yani ortalamanın karesi geliyor. Aritmetik olduğu için sonuçta baştan birinci terim ile sonuncu terim, ikinci terimle sondan bir önceki terim, hepsinin ortalamasını alsak zaten sonuçta aynı hesaba çıkacak. n'e de bağlasak aynı şey gelecek. (Satır, 124-136)"
$ÖAS_{İ2}$	"[14.48] Değişken değiştirmezsem, işlemlerim karışabilir. t'ye dönüştürüp ondan sonra n ye çevirecektim. (Satır, 50-51)"

Tablo 4.106 incelendiğinde katılımcıların "Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Katılımcıların düşünceleri incelendiğinde değişken değiştirerek işlemlerini kolaylaştırmayı amaçladıkları görülmektedir. Bu bağlamda katılımcının bu beceriyi üst bilişsel olarak sergilediği anlaşılmaktadır. İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.107'de sunulmuştur.

Tablo 4.107.

İşlemleri Kolaylaştırma Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Değişken Değiştirerek İşlem Kolaylığı Sağlar.					✓							✓						

Tablo 4.107 incelendiğinde işlemleri kolaylaştırma kategorisinde tek kod elde edildiği görülmektedir. Bu kategoride sergilenen tek beceri olan "Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar." Kodu iki katılımcı tarafından sergilenmiştir.

Bu temada elde edilen bir diğer kategori "sorgulama" kategorisidir. Bu kategoride "Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar.", "İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar.", "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür.", "Önermeyi anlamak için sorular sorar." ve "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." kodlarına ulaşılmıştır.

"Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar." kodunu sergilediği belirlenen $Ö_{O2}$'nin "[20.16] ... *Ben şunu göstereceğim: Acaba n=k+1 tane tek sayının toplamı da* $(k+1)^2$ *midir?* $(k+1)$ *tane tek sayının toplamı da* $(k+1)^2$ *midir?* (Satır, 116-117)" ifadeleri bu beceriyi sergilediğini göstermektedir. Sorgulamaya dayalı beceri olduğundan bu kod üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Bu kategorideki bir başka kod ise "İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{D1}$'in *"*[08.11] *...*$2n^2, 2n, 4n^2$*... Şurada bir yerde yanlışlık mı yaptım ben acaba?* (Satır, 41-42)*"* ifadelerinden "İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri sorgulamaya dayalı beceri olduğundan üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

"Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisi ise bu kategoride ulaşılan bir başka üst bilişsel beceridir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.108'de sunulmuştur.

Tablo 4.108.

"Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[04.20] … Şimdi bunun sonucu nedir?... (Satır, 35)"
$Ö_{İ1}$	"[18.16] … 1'den mesela ne dedik 55'e kadar mı?... (Satır, 119)"
$ÖAS_{O2}$	"[05.59] … n=1 için 1, sağlıyor. n=2 için toplamı 4 oluyor, n=(n+1) için doğru olduğunu kabul edip n=(n+2) için doğru olduğunu gösterebilir miyiz? (Satır, 44-45)"
$ÖAS_{İ1}$	"[14.28] … Getirip şuradan çıkarmamız lazım. (n^2+n)/2 şurası da ne yapıyor?... (Satır, 80-81)"

Tablo 4.108 incelendiğinde "Katılımcıların kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri katılımcıların sorgulama yapmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Bu kategoride bulunan bir başka kod "Önermeyi anlamak için sorular sorar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{D2}$'nin *"*[13.29] *n'yi neden tek sayı olarak vermiş ve vurgulamış? Ne anlatmak istemiş? ...* (Satır, 47)*"* ifadelerinden "Önermeyi anlamak için sorular sorar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri sorgulamaya dayalı olduğundan üst bilişsel olarak ele alınmıştır.

Bu kategoride ulaşılan son kod ise "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{İ1}$'in *"*[18.16] *Terim sayısının karesi ya da şöyle yapabilir: Dizi aritmetik bir dizi olduğu için şöyle yapabilirim…* (Satır, 118-119)*"* ifadelerinden "Yaptığı işlemleri nedeniyle açıklar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bir durumun farkında olup kişinin kendisini sorguladığını gösteren bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Sorgulama kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.109'da sunulmuştur.

Tablo 4.109.

Sorgulama Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$OA1_{İ2}$
Hedefini Belirlemeye Yönelik Sorular Sorar.				✓														
İşlem Hatası Olup Olmadığını Kendine Sorar.	✓																	
Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür.	✓				✓		✓			✓	✓							
Önermeyi Anlamak İçin Sorular Sorar.		✓																
Yaptığı İşlemleri Nedenleriyle Açıklar.					✓													

Tablo 4.109 incelendiğinde sorgulama kategorisinde en fazla sergilenen kodun "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisi olduğu görülmektedir ($n = 5$). Bu kategorideki diğer becerilerin tamamı yalnızca birer katılımcı da tespit edilmiştir.

Üst bilişsel beceriler temasında bulunan bir başka kategori "planlama" kategorisidir. Bu kategori altında "Planlama için kendine soru sorar.", "Algısal set oluşturur." ve "Sonuca yönelik tahminde bulunur." kodları belirlenmiştir.

"Planlama için kendine soru sorar." üst bilişsel becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.110'da sunulmuştur.

Tablo 4.110.

"Planlama İçin Kendine Soru Sorar." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[04.20] …1-3-5-7-9...n, n kareydi. Şimdi biz bunu nasıl yapabiliriz? (Satır, 33)"
$ÖAS_{İ1}$	"[10.49] … En son terim $2n - 1$ olduğu zaman n^2 oluyor. Ama bunu nasıl çıkarabilirim?... (Satır, 61-62)"

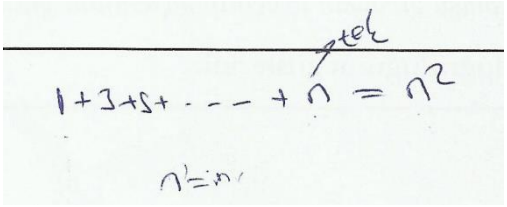
Tablo 4.110 incelendiğinde “Planlama için kendine soru sorar.” becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri katılımcıların sorgulama yapmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Sorgulama becerisi üst düzey bilişsel beceri gerektirdiğinden ilgili beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Bu kategorideki bir diğer kod olan “Algısal set oluşturur.” becerisini sergilediği belirlenen $Ö_{I2}$’nin aşağıdaki cümlelerinden bu beceriyi sergilediği anlaşılmıştır (Satır, 85-89):

> “[19.04] … Şimdi bu türlü sorularda ilk olarak n=1 için bakarız, sonra n=2 için genel kabul deriz. Ama veren formülü istiyor. Yani formül verip ispatını istemiyor. Formülü de çıkarmamızı istiyor. Daha önce bu önermenin doğruluğunu kontrol ediyorduk, ama bu soruda formülü oluşturmamız isteniyor. İspat mı yapacağım hocam, normal bulsam da olur mu?”

Öğretmenin ifadelerinden işleve takılmadan sıyrılıp algısal set oluşturduğu belirlenmiştir. Algısal set oluşturma olarak adlandırılan bu beceri üst düzey düşünme gerektirdiğinden “Algısal set oluşturur.” becerisi üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Bu kategoride elde edilen bir başka kod ise “Sonuca yönelik tahminde bulunur.” becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{O2}$’nin daha önce bildiği formülü yazarak hedef olarak belirlediği daha sonra da bu ifadeyi doğrulamaya çalıştığı görülmüştür. Katılımcının “Sonuca yönelik tahminde bulunur.” becerisini sergilediği etkinlik kartı görüntüsü Şekil 4.24’de sunulmuştur.



Şekil 4.24. $ÖAS_{O2}$'nin sonuca yönelik tahminini gösteren ekran görüntüsü

Şekil 4.24 incelendiğinde katılımcının sonuçta neye ulaşacağını tahmin ettiği görülmektedir. Bu nedenle “Sonuca yönelik tahminde bulunur.” becerisini sergilediği belirlenmiştir. Planlama kategorisinde sergilendiği belirlenen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.111’de sunulmuştur.

Tablo 4.111.

Planlama Kategorisinde Sergilendiği Belirlenen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Planlama İçin Kendine Soru Sorar.	✓										✓							
Algısal Set Oluşturur.						✓												
Sonuca Yönelik Tahminde Bulunur.										✓								

Tablo 4.111 incelendiğinde planlama kategorisinde en fazla sergilendiği belirlenen kod "Planlama için kendine soru sorar." becerisidir ($n = 2$). Bu kategoride yer alan diğer kodlar yalnızca birer kez sergilenmiştir.

Bu temada elde edilen bir başka kategori "strateji belirleme" kategorisidir. Bu kategoride ulaşılan kodlar yaratıcı düşünmenin aşamaları olan "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." ve "Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır." becerileri ile "Ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder." becerisidir.

Yaratıcı düşünmenin aşamaları olan "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." ve "Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır." becerilerini sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{O1}$'in *"*[18.26] *Birkaç ispat yöntemini düşünüp bunlardan birini seçeceğim…* (Satır, 93)*"* ifadesinden strateji belirlemede önce ıraksak düşünme yeteneğini sonra yakınsak düşünme yeteneğini kullandığını göstermektedir. Aynı katılımcının *"*[18.26] *…Şimdi iki üç tane yöntem düşünüyorum. Sonra bunlara olur-olmaz gibi bakıyorum. Olur, gibi görürsem işleme döküyorum. Olmazsa başka bir yönteme bakıyorum tekrar…* (Satır, 93-95)*"* ifadelerinden ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder becerisini sergilediği anlaşılmıştır. Öğretmenin ifadeleri incelendiğinde hem "Iraksak düşünme yeteneğini kullanır." ve "Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır." hem de "Ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder." becerilerinde strateji belirleme sürecinin farkında olduğu anlaşılmaktadır. Öğretmenin farkındalığından dolayı bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Ardışık tarama yöntemiyle hipotezini test ettiği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{I1}$ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 65-73):

[12.07] $ÖAS_{İ1}$: Yani bu tarz sorular genelde tümevarımla ispatlanıyor. n=1 için doğru olduğunu gösteriyor, n=k için kabul edip n=k+1 için doğru olduğunu gösteriyoruz.

[12.20] A: Bu soruda da tümevarımla ispatı kullanabilir miyiz?

[12.23] $ÖAS_{İ1}$: Şöyle bir şey var. Bunun toplamını bilmem lazım. Şu an onu fark ettim. Yani o zaman yaramaz. Yani işte toplamın n^2 olduğunu biliyorum, gerçi n^2 de değil çünkü son terim $2n-1$ değil. Tümevarım bu önermede işe yaramaz. Çünkü şunun toplamının eşitini mesela $n.(n+1)/2$ gösterin dediği zaman tümevarım kullanılır diye düşünüyorum. Burada işe yaramaz. Toplamını veren formülü bulunuz.

[14.27] A: Neden çift sayıları eklemeyi düşündünüz?

[14.28] $ÖAS_{İ1}$: Sonuçta tek ve çift sayıların beraber toplamlarını biliyoruz. Gausstan kolayca ispatlanabilir.

Diyalog incelendiğinde katılımcının önce tümevarım yoluyla ispatı düşündüğü daha sonra ise tümevarımın bu ispatta geçerli olamayacağını fark ederek yöntemini değiştirip doğrudan ispat yoluyla (Gauss yasalarına göre) ispatını yürüttüğü görülmektedir. Öğretmen adayının farkındalığı ve buna yönelik farklı çözüm yolu geliştirmesi öz-düzenleme bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Strateji belirleme kategorisinde sergilendiği belirlenen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.112'de sunulmuştur.

Tablo 4.112.

Strateji Belirleme Kategorisinde Sergilendiği Belirlenen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖAl_{D1}$	$ÖAl_{D2}$	$ÖAl_{O1}$	$ÖAl_{O2}$	$ÖAl_{İ1}$	$OAl_{İ2}$
Yakınsak Düşünme Yeteneğini Kullanır.			✓								✓							
Iraksak Düşünme Yeteneğini Kullanır.			✓								✓							
Ardışık Tarama Yoluyla Hipotezini Test Eder.			✓								✓							

Tablo 4.112 incelendiğinde strateji belirleme kategorisindeki becerilerin tamamı eşit sayıda ve aynı katılımcılar tarafından sergilendiği ($n = 3$) görülmektedir.

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir başka kategori "kontrol etme" kategorisidir. Bu kategoride "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." ve "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir." kodlarına ulaşılmıştır.

"Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{İ1}$'in hedefini belirlediği "[14.28] *Şunların biri giderse* $(n-1)^2$ *olur.* $(n-1)^2 : 4$ *bu da herhalde en son* $(n-1) : 2^2$ *olarak bulunuyor.* (Satır, 81-82)" sözlerinden anlaşılmaktadır. İlerleyen süreçte kullandığı "[17.25] *...Onların bir fazlasını aldım. Şurada yanlış yaptım. Sonu +1 olacaktı. Tamam, şuan doğru çıkıyor galiba.* (Satır, 89-90)" ifadelerinden de hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol ettiği anlaşılmaktadır. Sonuca yönelik hedefini kontrol etme kişinin işlemlerinin ve hedefinin farkında olmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

"Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği belirlenen katılımcıların bazılarının görüşleri Tablo 4.113' de sunulmuştur.

Tablo 4.113.

"Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatının Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[23.26] Evet, ispatım doğrudur. Öncelikle formülü basit yöntemlerle görmeye çalıştım. Daha sonra oluşan formülü de tümevarım yöntemiyle göstermeye çalıştım. Tümevarım ispat yöntemi bana doğruyu gösteriyor. (Satır, 128-129)"
$ÖAS_{İ1}$	"[11.01] Aslında bence yanlış yapmadığımı düşünüyorum ama belki işlemlerde yanlışım olabilir. Çiftleri ekledik $n.(n+1) \div 2\,a + b$ oldu. Sonra $a + b$'yi bulmaya çalıştım. 2 parantezine aldım. 1'den $(n-1) \div 2$ ye kadar olan sayıların toplamı… (Satır, 86-89). Yani bu soruyu doğru yaptığımı düşünüyorum (Satır, 92)"

Tablo 4.113 incelendiğinde katılımcıların sembolik ifade kullanarak ispatı yaptıkları için ispatın doğru olduğunu düşündükleri anlaşılmaktadır. Bu bağlamda Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir." becerisi kişinin öz-farkındalığını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Kontrol etme kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.114'de sunulmuştur.

Tablo 4.114.

Kontrol Etme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Hedeflediği Sonuca Ulaşıp Ulaşamadığını Kontrol Eder.											✓							
Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.				✓		✓			✓		✓	✓						

Tablo 4.114 incelendiğinde kontrol etme kategorisinde daha fazla sergilendiği belirlenen kodun "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir." becerisi olduğu görülmektedir ($n = 5$). Az sergilendiği belirlenen kod ise "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." becerisidir.

Bu tema altında elde edilen bir başka kategori "ilişkilendirme" kategorisidir. İlişkilendirme kategorisi altında "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." ve "İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar." kodlarına ulaşılmıştır.

"Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{O2}$'nin kurduğu *"*[20.16] *Şimdi benim burada dikkat etmem gereken şu: $k^2 + k + 1$'de bir tane k sayısının eksik olması. Bu k sayısını nereden getireceğim?* (Satır, 119-121)*"* cümlelerden "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Diğer kod olan "İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{I1}$'in *"*[14.47] … *Eşitliğin diğer tarafı da $2a$ yaptı. Şimdi $2k + 2$ sayısı terim sayısı ile alakalı. Terim sayısına geçmem gerekiyor…* (Satır, 105-106)*"* ifadelerinden "İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. İlişkilendirme kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.115'de sunulmuştur.

Tablo 4.115.

İlişkilendirme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$OA1_{İ2}$
Sorular Sorarak İlişkilendirme Yapar.				✓							✓							
İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar.					✓													

Tablo 4.115 incelendiğinde ilişkilendirme kategorisinde fazla sergilenen becerinin "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." $(n = 2)$ kodu iken az sergilenen becerinin "İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar." $(n = 1)$ kodu olduğu bulunmuştur.

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan son kategori ise "Analojik akıl yürütme" kategorisidir. Bu kategori altında "Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." ve "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." kodlarına ulaşılmıştır.

"Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcıların düşünceleri Tablo 4.116'da sunulmuştur.

Tablo 4.116.

"Kümenin Tümleyeninden Yararlanarak Analojik Akıl Yürütme Yapar." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[04.20] … Bunların çift olduğu zaman toplamları nasıldı? $2 + 4 + 6 + 8 + 10$'un nasıl oluyordu?...$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots n +$ 1'e kadar gitsin. Şimdi bunun sonucu nedir? $(n.(n + 1))/2$. Şimdi bundan çift sayıların toplamını çıkaracağım… (Satır, 33-36)"
$ÖA1_{İ2}$	"[30.50] Evet, şeyden çalıştım bu terim toplamından çift sayılarınkini hatırlarsam ardışık çift sayılarınkini hatırlarsam farkını alırsam tek sayılarınki çıkar dedim ama çift sayılarınkinden de emin değilim. (Satır, 216-218)"

Tablo 4.116 incelendiğinde katılımcıların "Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. $Ö_{D1}$ öğretmenin ifadeleri incelendiğinde çift sayılardan yola çıkıp tek sayıların toplamına ulaştığı yani kümenin tümleyeninden yola çıkarak önermenin ispatını yapmaya çalıştığı anlaşılmaktadır.

Bu kategorideki bir başka kod "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.117'de sunulmuştur.

Tablo 4.117.

"Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ1}$	"[14.47] … Bir de diziyi tersten yazayım aslında bunu daha önceden ispatlamadım. 1'den n'e kadar sayıların toplamından kullandığım mantığı kullanacağım. (Satır, 101-102)"
$ÖAS_{İ1}$	"[11.01] … n'ye kadar olsaydı kolaydı aslında. Hemen n^2 derdik. (Satır, 62-63)"

Tablo 4.117 incelendiğinde katılımcıların analojik akıl yürütme yaptıkları anlaşılmaktadır. Analojik akıl yürütme becerisi bireyin bir bilgiyi değiştirerek yeni bilgi üreterek çözüm yoluna ulaşmasını gerekli kıldığından üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Analojik akıl yürütme kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.118'de sunulmuştur.

Tablo 4.118.

Analojik Akıl Yürütme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D}$	$ÖAS_{D}$	$ÖAS_{O}$	$ÖAS_{O}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$OA1_{İ2}$
Kümenin Tümleyeninden Yararlanarak Analojik Akıl Yürütme Yapar.	✓																	✓
Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar.					✓	✓				✓	✓							

Tablo 4.118 incelendiğinde analojik akıl yürütme kategorisinde daha sık sergilendiği belirlenen kodun "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisi $(n = 4)$ olduğu bulunmuştur. Az sergilenen beceri ise "Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." kodudur.

4.5. Dördüncü Etkinlik Kartındaki Sorudan Elde Edilen Nitel Bulgular

Cebir önermesini içeren dördüncü soruda katılımcılardan elde edilen veriler "Bilişsel beceri" ve "Üst bilişsel beceri" olarak iki tema altında toplanmıştır.

4.5.1. Dördüncü etkinlik kartındaki sorudan bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular

Bilişsel beceriler teması altında "İspat önermesini okuma", "Önermenin altını çizme", "Doğruluğunu değerlendirme", "Strateji belirleme", "İşlem süreci" ve "Sezgisel kestirme yolları" olarak altı kategori ve bu kategoriler altında 21 koda ulaşılmıştır.

Çalışmaya katılan öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde sergiledikleri bilişsel becerilere yönelik oluşan ilk kategori "ispat önermesini okuma" kategorisidir. İspat önermesini okuma kategorisinde "İspat önermesini ilk kez okur.", "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler.", "Önermeyi sembolik olarak yazar.", "İspatın anahtar kavramlarını belirler.", "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." ve "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür" kodları elde edilmiştir.

Bu kategoride elde edilen ilk kod "İspat önermesini ilk kez okur." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılar ilk okuma önermeyi bütün olarak yapmaktadırlar. Bu beceriyi sergilediği belirlenen becerilerden bir örnek olarak $Ö_{D1}$'in *"*[11.30] *a ve b pozitif tamsayı aile b arasında asal olmak üzere a böler c'yi ve b böler c'yi ise a.b böler c'yi…* (Satır, 52-53)*"* cümleleri verilebilir. Ayrıca sesli düşünme protokolünde önermenin ilk okumasını bütün bir şekilde yapan $Ö_{O2}$ katılımcısına neden bütün okuduğuna yönelik sorulan soruya katılımcının verdiği *"*[24.14] *Bilinen bir metot bu. Bilinen bir gerçek diyeyim. Bu sürekli karşımıza çıkan bir ifade. Fakat bir önceki açıortay sürekli karşımıza çıkan bir durum değildi. Çok özel bir durumdu. Fakat bu*

soru çok özel bir durum olmadığı için bütün okudum. (Satır, 138-141)*"* cevaptan önermeyi ilk kez bütün şekilde okuduğu ve gerekçesi anlaşılmaktadır.

Bu kategoride bulunan bir başka kod ise "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D1}$'in önermeyi okuma süreci şöyledir: *"*[30.39] *a ve b pozitif tam sayı ve aralarında asal…* (Satır, 195), [30.49] *…a ile b aralarında asal…* (Satır, 197), [30.49] *…a, c'yi bölüyorsa…* (Satır, 200), [31.39] *… c, b'yi de bölüyorsa…* (Satır, 203), [32.49] *… a.b, c'yi* $2k^2$*'yi böler mi? Diyor...* (Satır 212)*"*. $ÖAS_{D1}$'in ifadeleri incelendiğinde "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Bu kategorideki bir diğer kod ise "Önermeyi sembolik olarak yazar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.119'da sunulmuştur.

Tablo 4.119.

"Önermeyi Sembolik Olarak Yazar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O1}$	"[19.36] Yani c=a.k diyebiliriz. Aynı şekilde b böler c'yi ise c yine b'nin bir katıdır. Buna da c=b.n… (Satır, 100-101)"
$Ö_{O2}$	"[24.14] … Şunu görüyorum a,c'yi böler ve b de c'yi böler ise şunu yazabilirim: a,c'yi böler ise c=a.k olacak şekilde bir k tamsayısı vardır… (Satır, 143-144)"
$Ö_{İ1}$	"[20.39] a böler c ise, şöyle diyeyim a böler c ise demek ki c = a.k olmalıdır. Yani bir çarpmadır ama a, c'nin bir çarpanı olur. k'da yine bir tamsayı olmalıdır. Yine b böler c ise c'nin içinde bir b çarpanı olmalıdır. b.m diyeyim. m tamsayı olmalı. (Satır, 141-143)."
$Ö_{İ2}$	"[24.45] Tamam, o zaman şöyle yaparız hocam a böler c ise c/a k gibi bir tamsayıya eşit. Yine b, c'yi bölüyorsa c/b=t∈Z olur. (Satır, 117-118)" "[32.43] Önermede hata olup olmadığına şu şekilde karar verdim. A ve b aralarında asal diyor. 3 ve 5 gibi pozitif tamsayı tamam. 3'ün böldüğü ve 5'in böldüğü en küçük ne var? 15. c'de en küçük 15 olur. E zaten bunların ikisinin çarpımı da c'yi böler. (Satır, 139-141)"
$ÖAS_{D2}$	"[36.33] a böler c yi, b böler c yi, a.b böler c yi imiş… [Tekrar yazar] (Satır, 183)"
$ÖA1_{O1}$	"[19.19] …Bu da herhalde şöyle gösteriliyordu (a,b)=1… (Satır, 98)"

Tablo 4.119'daki katılımcıların ifadeleri incelendiğinde "Önermeyi sembolik olarak yazar." Becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen bir başka beceri ise "İspatın anahtar kavramlarını belirler." kodudur. Beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{D2}$ ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 55-59):

[15.55] $Ö_{D2}$: a, c yi böler, b de c'yi böler. O halde a.b'de c'yi böler diyor. Değil mi? … a ile b aralarında asal olduğuna göre onların OBEB'leri 1 OKEK'leri de sayıların çarpımlarına eşittir.

[17.25] A: Neden OBEB ve OKEK'den hareket ettiniz?

[17.28] $Ö_{D2}$: Aralarında asal verdiğinde OBEB ve OKEK çağrıştırdı bana. Buradan yola çıktığımızda OBEB'leri 1'e OBEB'leri de sayıların çarpımıdır. a, c'yi bölüyorsa b de c'yi bölüyorsa c bu sayıların ortak katı demektir.

Diyalog incelendiğinde öğretmenin OBEB ve OKEK kavramlarını ispatın anahtar kavramları olarak belirlediği anlaşılmaktadır. İlgili beceriyi sergilediği belirlenen diğer katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.120'de sunulmuştur.

Tablo 4.120.

"İspatın Anahtar Kavramların Belirler." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[24.14] … a ve b aralarında asal olmak üzere, o zaman a ve b'nin EBOB'u 1'dir… (Satır, 141)"
$ÖAS_{İ2}$	"[22.55] … Bu mantıktaki işte "ise" den yapmaya çalışıyorum… (Satır, 78)"

Tablo 4.120 incelendiğinde katılımcıların ispatın anahtar kavramlarını belirlediği anlaşılmaktadır.

Bu kategoride bulunan bir başka kod ise "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.121'de sunulmuştur.

Tablo 4.121.

"İspatın Hipotez-Hüküm ve Amaçlarını (Hedeflerini) Belirler." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[24.14] … Ben şunu göstereceğim: acaba a.b, c'yi böler mi? Yani şunu gösterebilirsem c=a.b.m olacak şekilde en az bir tane m eleman tamsayı olduğunu gösterebilirsem eşitliğimi doğrulamış olurum. (Satır, 145-147)"
$ÖAS_{D1}$	"[30.49] Hocam ilk önce zaten bu pozitif tamsayı a ile b aralarında asal, aralarında asal demek a'nın da b'nin de asal demek anlamına gelmiyor bu 1. öncülümüz. Aralarında asal mesela 2 ile 3 asal ya da şöyle 3 ile 4 aralarında asal ama 4 asal değil bunu bilmemiz lazım bu soruyu çözmemiz için… (Satır, 197-199)"
$ÖAS_{D2}$	"[22.55] İlk gerek şartı aldığımda a.k k herhangi bir tam sayı olmak üzere a.k=c gibi bir sayı b.t t'de aynı şekilde tamsayıdır. b.t=c şeklinde bize önememizin bir kısmını vermiş. Buradan a.b herhangi bir tam sayının c'ye eşit olduğunu göstermemizi istiyor. (Satır, 78-80)"

Tablo 4.121 incelendiğinde katılımcıların "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

İspat önermesini okuma kategorisinde elde edilen bir başka kod "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen $ÖAS_{O1}$'in beceriyi sergilediği, süreçte kullandığı şu cümlelerden anlaşılmıştır: *"*[23.34] *a ile b aralarında asal olmak üzere a böler c ve b böler c ise a.b önermesinin doğru olduğunu gösteriniz…* (Satır, 70-71)*;* [27.04] [İçinden düşünmektedir] *…a böler c, b böler c, a.b böler c şeklinde…* (Satır, 78)*."* Öğretmen adayının cümleleri incelendiğinde önermeyi tekrar okuduğu ve gözlem notuna bakıldığında içinden düşündüğü anlaşılmaktadır. İspat önermesini okuma kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.122'de sunulmuştur.

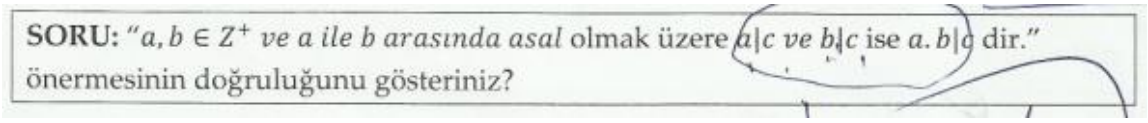
Tablo 4.122.

İspat Önermesini Okuma Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Önermeyi Sembolik Olarak Yazar.			✓	✓	✓	✓		✓			✓							
İspat Önermesini İlk Kez Okur.	✓	✓	✓		✓					✓	✓							
İspatın Anahtar Kavramlarını Belirler.		✓	✓	✓								✓						
İspatın Hipotez-Hüküm ve Amaçlarını (Hedeflerini) Belirler.		✓		✓		✓	✓				✓	✓						
İspat Önermesini Adım Adım Okuyarak İlerler.				✓			✓		✓									
Önermeyi Anlamadığında Birkaç Kez Okur ve Verilenler Üzerine Düşünür.			✓						✓		✓			✓				

Tablo 4.122 incelendiğinde ispat önermesini okuma kategorisinde en fazla sergilendiği belirlenen beceriler "Önermeyi sembolik yazar.", "İspat önermesini ilk kez okur." ve "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." kodlarıdır $(n = 6)$. Bu becerilerden sonra ilgili kategoride en sık sergilendiği belirlenen diğer kodlar "İspatın anahtar kavramını belirler." ve "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerileridir $(n = 4)$. Bu kategoride en az sergilendiği belirlenen beceri ise "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." $(n = 3)$ becerisidir.

Dördüncü soruda bilişsel beceriler temasında ulaşılan diğer kategori "Önermenin altını çizme" kategorisidir. Bu kategoride sergilendiği belirlenen tek becerinin "İspatın hipotez ve hükmünü belirlemek için önermenin altını çizer." kodu olduğu bulunmuştur. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{O2}$'nin etkinlik kartına ait ekran görüntüsü Şekil 4.25'de sunulmuştur.


SORU: "$a, b \in Z^+$ *ve a ile b arasında asal* olmak üzere $a|c$ *ve* $b|c$ ise $a.b|c$ dir." önermesinin doğruluğunu gösteriniz?

Şekil 4.25. ÖO2'nin etkinlik kartına ait ekran görüntüsü

Şekil 4.25 incelendiğinde öğretmenin hipotez ve hükmün yer aldığı bölümün altını çizdiği anlaşılmaktadır. Önermenin altını çizme kategorisinde elde edilen

becerilerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.123'de sunulmuştur.

Tablo 4.123.

Önermenin Altını Çizme Kategorisinde Ulaşılan Kodun Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
İspatın Hipotez ve Hükmünü Belirlemek İçin Önermenin Altını Çizer.				✓														

Tablo 4.123 incelendiğinde önermenin altını çizme kategorisinde ulaşılan tek kod olan "İspatın hipotez ve hükmünü belirlemek için önermenin altını çizer." becerisinin sadece $Ö_{O2}$ katılımcısı tarafından sergilendiği görülmüştür.

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan ikinci kategori "doğruluğunu değerlendirme" kategorisidir. Bu kategori altında "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir.", "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.", "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz." ve "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." kodları bulunmuştur.

"Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşü Tablo 4.124'de sunulmuştur.

Tablo 4.124.

"Ritüel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D2}$	"[21.15] Doğru ama geçerli midir bilmem. Geçerliğini alandaki uzman kişiler bilebilir. (Satır, 69)"
$ÖAS_{D1}$	"[34.14] Bence ispatım doğru ama şöyle bir şey var hocam. Bu bir ispat mı değil mi karar veremedim. Bir şeyler sağlayıp sağlamadığına bakarım genelde ama ne kadar doğru olur bilmiyorum… (Satır, 218-219)"
$ÖAS_{D2}$	"[42.41] Ö: Geçerli değildir. Yani bir şeylerin doğruluğunu sembolik olarak gösterdim ama bunu matematiksel anlamda yazamadım galiba. (Satır, 202-203)"

Tablo 4.124 incelendiğinde katılımcıların yaptığı ispattan emin olamadıkları anlaşılmaktadır. Bu nedenle katılımcıların "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen bir başka kod ise "Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.125'de sunulmuştur.

Tablo 4.125.

"Sezgisel Olarak Önermenin Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[11.30] …Evet, böyle olduğunu biliyorum ama ispat edeceğim... (Satır, 53)"
$Ö_{O1}$	"[23.13] Şimdi hem a hem de b, c'yi bölüyorsa ve a ile b aralarında asalsa demek ki c'nin a ve b olarak iki tane çarpanı olmak zorundadır. Dolayısıyla c'nin a ve b gibi en az iki çarpanı varsa a.b'nin de c'yi vermesi zorunludur. Ama bunu ispat etmemiz lazım. (Satır, 105-107)"
$Ö_{O2}$	"[33.55] …Sezgisel olarak fark ediyorum; ama yani en kötü ihtimal değer vererek… (Satır, 192-193)"
$Ö_{İ2}$	"[32.43] …Eee zaten bunların ikisinin çarpımı da c'yi böler. Yani a ve b,c sayısının asal çarpanları. Bu nedenle bölmesi gerekecek. Ama işte bunu ben gösteremiyorum… (Satır, 140-142)"
$ÖA1_{O2}$	"[03.55] Asal olduğuna göre öyle olmak zorunda, yani tek sadece verilenleri yazdım şuan. c nin asal olduğunu söylememiş o zaman mesela a'yı tam bölüyorsa b'yi de tam bölüyorsa bunu da tam bölmek zorunda onu görüyorum ama nasıl ispatlayacağım. (Satır, 26-28)"
$ÖA1_{İ1}$	"[16.13] Yani a ve b aralarında asal olduğu için bir böleni yok. c'nin ikisini de bölme gibi bir şeyi yok hocam. Mantıken o yüzden çarpımını da bölemez, yani ben öyle düşünüyorum. (Satır, 61-62)"

Tablo 4.125 incelendiğinde katılımcıların "Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde elde edilen bir başka kod "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.126'da sunulmuştur.

Tablo 4.126.

"Dönüşümsel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O1}$	"[21.50] Evet, şu an birkaç örnek vererek zihnimde doğrulamasını yapıyorum… (Satır, 104)"
$Ö_{O2}$	"[33.55] … Mesela a ve b ye 3 ve 5 vererek, hem 3'ün hem de 5'in böldüğü aralarında asal en küçük sayı olarak 15'in de bunu böldüğünü biliyorum… (Satır, 193-194)"
$Ö_{İ2}$	"[24.32] Aralarında asal demek, yine örnek vereceğim: 3 ile 5. İkisinin de 1'den başka ortak böleni olmaması demektir. (Satır, 114-115)"
$ÖAS_{O1}$	"[23.34] …Şey olarak düşündüm hocam a ile b aralarında asal ise biraz özelleştireyim dedim. a mesela x ise b x+1 olsun hani ardışık iki sayı aralarında asal olacağı için şimdi c dediğimiz sayı x in bir katı ve x+1 inde bir katı olacak bir sayı hem x in hem de x+1 in katıysa o zaman çarpımlarının da katı olmak zorunda sonuçta 2 ve 3 ün bir katı olan sayı mutlaka mesela 6, 12 çarpımlarının da katı olacak… (Satır, 71-74)"
$ÖAS_{O2}$	"[06.43] Bunu şöyle, yani sayı vererek katı şeklinde yaparak doğruluğunu gösteririm de ispat olur mu? Yani şöyle c'ye, mesela a'ya 2k derim yada 3k derim. c'ye 3 şeklinde derim mesela buna 4k derim… (Satır, 48-50)"
$ÖAS_{İ1}$	[21.38] …Kontrol edelim doğru mu değil mi diye. 2 ile 5 i alsak mesela 10'u böler ikisi de o zaman çarpımları da böler. Bir tane örnekle doğruluğunu gösteremeyiz aslında ama en azından bir şey oluyor burada… (Satır, 105-107)"
ÖA1D1	"[14.00] Sayılar vererek doğruluğunu göstermeye çalışıyorum. (Satır, 41)"
$ÖA1_{D2}$	"[16.32] a'ya 5 desek, b'ye 7 desek, 5/c, 7/c … (Satır, 49)"
$ÖA1_{O2}$	"[03.55] …Örnek alalım mesela c, 15; a, 3; b de 5 olsun. O zaman ne olur? 15/3 den bunu tam böldü, 15/5 den aynı şekilde tam böldü, o zaman bunların çarpımı da bunu tam bölecek. Yine deneme yanılma yoluyla yaptım. (Satır, 28-30)"
$ÖA1_{İ2}$	"[31.43] Bu böleri evet yeni gördük ama bu şeyden yapmamıştık bu tahmin ettiğim kadarıyla bu verdiğiniz kağıtta (ispat yapma becerisi teşhis testi) vardı. 12, 3 ve 4 sayısıyla bölünebiliyorsa 12 ile de bölünebilirden aklıma geldi ondan gitsem olur mu? (Satır, 225-227)"

Tablo 4.126 incelendiğinde katılımcıların örneklerden yola çıkarak önermenin doğruluğunu değerlendirmeye çalıştıkları anlaşılmaktadır. Bu durum katılımcıların "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisini sergilediği şeklinde yorumlanmıştır.

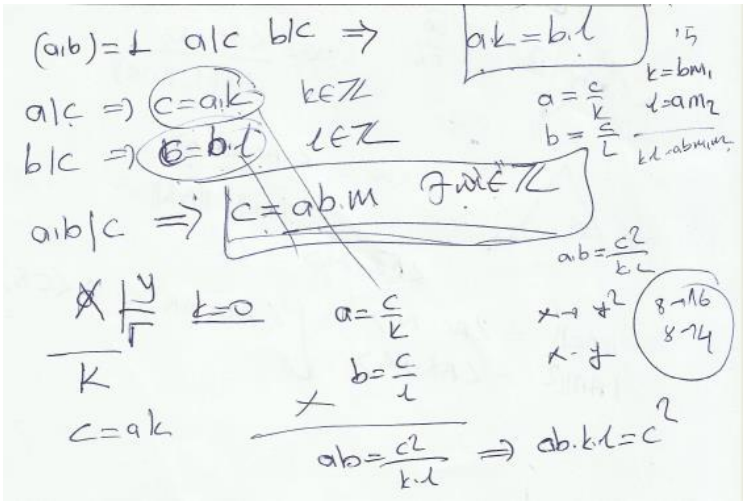
Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde ulaşılan bir başka kod "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.127'de sunulmuştur.

Tablo 4.127.

"Sezgisel Olarak Doğruluğunu Hisseder Ancak Sembolik Olarak İspatlayamaz." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{O1}$	"[39.46] Şunu anlıyorum aslında: iki asal sayının çarpımının, iki asal sayı bir sayıyı bölüyorsa çarpımının da böleceğini. Aslında şuradan anlıyorum, k yerine x+1 yazdığımda c, a.b'nin bir katı geliyor. Aynı şekilde f'de x'in katı olduğu için c yine a.b'nin bir katı olmak zorunda. Ama bunları yazıya dökemiyorum hocam. (Satır, 98-101)"
$ÖAS_{İ2}$	"[31.44] Şöyle bakınca mantığıma çok yatıyor şu kural da, çıkartamıyorum hocam. (Satır, 103)"

Tablo 4.127 incelendiğinde katılımcıların "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Diyalog incelendiğin katılımcıların ifadelerinden sezgisel olarak doğruluğunu hissettiği ancak sembolik olarak ifade edemediği anlaşılmaktadır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{O2}$'nin etkinlik kartına ait görüntü Şekil 4.26'da sunulmuştur.



Şekil 4.26. Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamadığını gösteren ekran görüntüsü

Şekil 4.26 incelendiğinde öğretmenin işlemi son adıma kadar getirdiği, ancak bu adımda lemma kullanarak ispatı tamamlaması gerekirken işlemleri yürütemediği anlaşılmaktadır. Bu noktada öğretmen sezgisel kestirme yollarına yönelerek sonuçtan uzaklaşmaktadır. Bu bağlamda katılımcının "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz." becerisini sergilediği söylenebilir.

Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde ulaşılan son kod "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.128'de sunulmuştur.

Tablo 4.128.

"İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ2}$	"[32.07] Hocam en son noktada (k.t)/c mi geldi? Doğru mu hocam?... (Satır, 135)"
$ÖAS_{İ1}$	"[19.19] …Aslında şu olması lazım işte a.b böler c olması için c nin n yeni bir tamsayı olsun c= n.a.b olacak şekilde bir n∈Z olmalı. Değil mi, hocam? (Satır, 100-101)"
$ÖAS_{İ2}$	"[28.42] …Şunu doğru hatırlıyorum değil mi hocam? Burada c a'dan büyük ya da eşit olması gerekiyor tersi değil. (Satır, 95-96)"

Tablo 4.128'de ki katılımcı görüşleri incelendiğinde katılımcıların "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.129'da sunulmuştur.

Tablo 4.129.

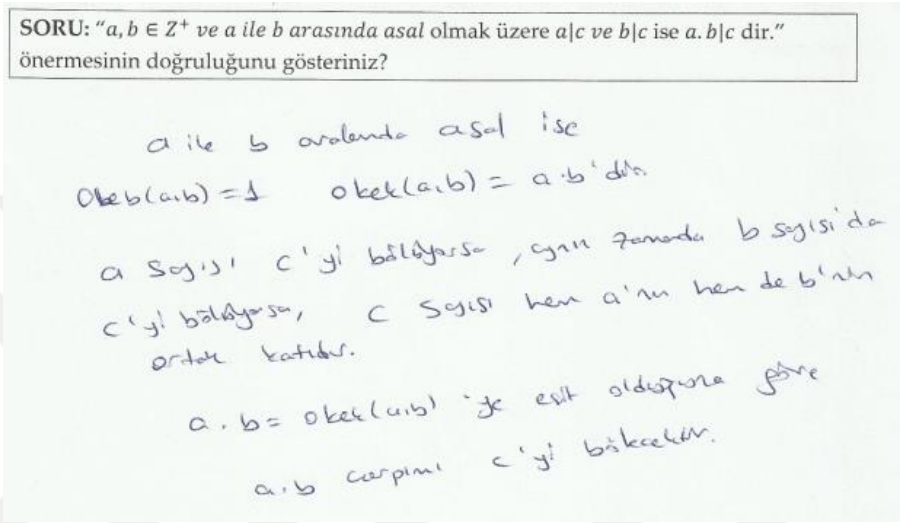
Doğruluğunu Değerlendirme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Ritüel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.		✓					✓	✓										
Sezgisel Olarak Önermenin Doğruluğunu Değerlendirir.	✓		✓	✓		✓										✓	✓	
Dönüşümsel İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.			✓	✓		✓			✓	✓	✓		✓	✓		✓		✓
Sezgisel Olarak Doğruluğunu Hisseder Ancak Sembolik Olarak İspatlayamaz.				✓					✓			✓						
İspat Sürecinde Yazdığı İşlemlerin Doğruluğunu Araştırmacıya Sorar.						✓	✓				✓	✓						

Tablo 4.129 incelendiğinde doğruluğunu değerlendirme kategorisinde en sık sergilendiği belirlenen becerinin "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." kodu olduğu bulunmuştur ($n = 10$). Ancak becerinin katılımcılara göre dağılımı rastgele olduğu için Ki-Kare testi yapılmamıştır. En sık sergilenen ikinci beceri ise "Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." becerisidir ($n = 6$). Sergilenme sıklığına göre üçüncü sırada yer alan beceri "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisidir ($n = 4$). Bu kategoride en az sergilenen beceriler ise "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." ve "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz." becerileridir ($n = 3$).

Bilişsel beceriler temasındaki bir başka kategori "strateji belirleme" kategorisidir. Bu kategoride "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.", "İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir." ve "Ezberlediği yolla ispat yapar." kodlarına ulaşılmıştır.

"Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." becerisini sergilediği belirlenen $Ö_{D2}$'nin etkinlik kartından görünüm Şekil 4.27'de sunulmuştur.



Şekil 4.27. $Ö_{D2}$'nin sözel olarak önermenin ispatını ifade ettiğini gösteren ekran görüntüsü

Şekil 4.27 incelendiğinde öğretmenin ifadeyi sözel olarak yazdığı başka bir ifadeyle "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." becerisini sergilediği görülmektedir.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen bir başka kod "İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{O1}$'in *"*[27.04] *Doğrudan olmayana ergi kullansam. Onu da çok yapabileceğimi düşünmüyorum açıkçası olmayana ergiden.* (Satır, 77-78)*"* ifadelerinden ispat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahip olduğu anlaşılmaktadır.

Strateji belirleme kategorisinde ulaşılan son kod ise "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{İ1}$'in *"*[24.39] *Yine b'de vardır şey m'de vardır. Burada zaten onun varlığını gösteriyoruz; ama çok mu kabul oluyor bilmiyorum. Bunun güzel bir ispatı vardı; ama şu an aklıma*

gelmiyor… (Satır, 115-116)*"* ifadelerinden bu beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır. Strateji belirleme kategorisinde sergilendiği belirlenen becerilerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.130'da sunulmuştur.

Tablo 4.130.

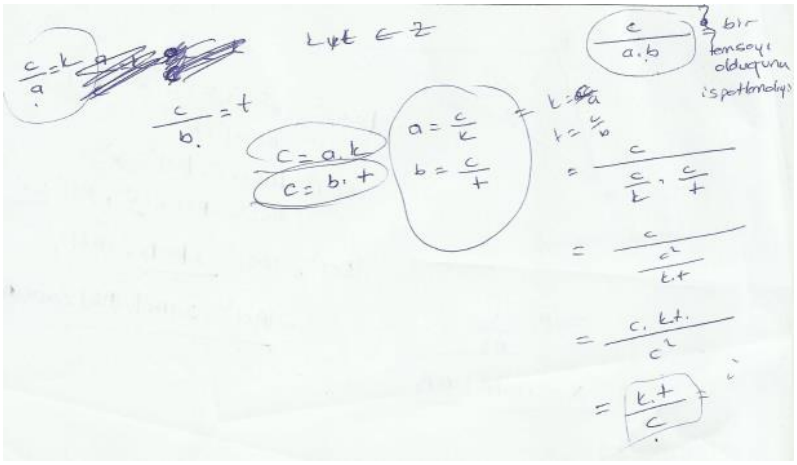
Strateji Belirleme Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖAl_{D1}$	$ÖAl_{D2}$	$ÖAl_{O1}$	$ÖAl_{O2}$	$ÖAl_{I1}$	OAl_{I2}
Sözel Olarak Önermenin İspatını İfade Eder.		✓																
İspat Stratejisini Uygulamada Düşük Öz-Yeterliğe Sahiptir.									✓									
Ezberlediği Yolla İspat Yapar.											✓					✓		

Tablo 4.130 incelendiğinde strateji belirleme kategorisinde en sık sergilenen becerinin "Ezberlediği yolla ispat yapar." kodu olduğu görülmektedir $(n = 2)$. Bu kategoride az sergilenen beceriler "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." ve "İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir." kodlarıdır $(n = 1)$.

Bilişsel beceriler temasında oluşan bir başka kategori "işlem süreci" kategorisidir. Bu kategoride sergilendiği belirlenen kodlar "Planına uygun ispat yapar." ve "Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder" becerileridir.

"Planına uygun ispat yapar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{I2}$'in sesli düşünme protokolünde belirlediği plana *"[24.45] … Şimdi biz neyi ispatlayacağız? c/(a.b)'nin de bir tamsayı olduğu ispatlayacağız. (Satır, 118-119)"* göre yaptığı ispat Şekil 4.28'de sunulmuştur.



Şekil 4.28. $Ö_{İ2}$'nin planına uygun ispat yaptığını gösteren ekran görüntüsü

Şekil 4.28 ve öğretmenin görüşleri incelendiğinde planına uygun ispat yaptığı anlaşılmaktadır.

Bu kategoride ulaşılan bir başka kod "Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.131'de sunulmuştur.

Tablo 4.131.

"Olmadığına Örnek Vererek Önermeyi Reddeder." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖA1_{D2}$	"[19.14] Mesela bu a ile b'yi aralarında asal diye kabul ediyorum. Bu tek sayı oluyor (a yı gösterir), bu çift sayı oluyor (c yi gösterir). Bu da tek sayı oluyor (b'yi gösterir). Bunda olmuyor. a ile c'yi eşit kabul ettim onda oluyor. Bir tane olmayan örnek verdiğimiz için yeterli oluyor. (Satır, 64-66)"
$ÖA1_{İ1}$	"[15.39] Sadece c ye 3 diyelim 14/3 bölünmüyor yani bence bu önerme yanlış. (Satır, 59)" "[16.49] 14'e 3 verdiğimiz zaman a 3'ü bölmüyor mesela. 2 dediğimiz zaman c'ye, 9'u da c bölmüyor. Çünkü 14 ile 9 aralarında asal o şekilde bence doğru değil önerme. (Satır, 66-67)"

Tablo 4.131 incelendiğinde katılımcıların "Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. İşlem süreci kategorisinde

sergilendiği belirlenen becerilerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.132'de sunulmuştur.

Tablo 4.132.

İşlem Süreci Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$OA1_{İ2}$
Planına Uygun İspat Yapar.					✓	✓												
Olmadığına Örnek Vererek Önermeyi Reddeder.														✓			✓	

Tablo 4.132 incelendiğinde işlem süreci kategorisinde yer alan hem "Planına uygun ispat yapar." hem de "olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder." becerileri eşit sayıda katılımcı tarafından $(n = 2)$ sergilendiği belirlenmiştir.

Bilişsel beceriler temasında ulaşılan son kategori "sezgisel kestirme yolları" kategorisidir. Bu kategori altında "Her zaman amaca doğru ilerler.", "Araç-amaç analizi yapar.", "Tepe tırmanışı yapar." ve "Rasgele arama yapar." kodları bulunmuştur.

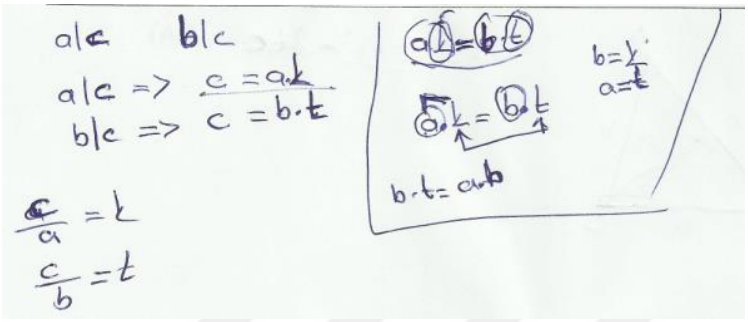
"Her zaman amaca doğru ilerler." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.133'de sunulmuştur.

Tablo 4.133.

"Her Zaman Amaca Doğru İlerler." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{D1}$	"[14.08] Şimdi a.k, b.t'ye eşit ya a ile b aralarında asal. Şimdi a ile b'nin birbirine eşit olma durumu söz konusu değil dolayısıyla. Ee..bunların çarpımları aynı eşit bir sayı edecekse, k.t'de aralarında asal olacak. Aralarında asal olmasında ziyade bir de bunların çarpımları da aynı olduğuna göre, ben buradan b=k, a=t demem gerekir (Satır, 61-64)"
$ÖA1_{İ1}$	"[29.28] …c'yi böldüğünü söyleyebilir miyim? Evet, bunu buradan söylerim. Eğer bir sayı bir sayının karesini bölüyorsa kendisini böler diye söyleyebilir miyim? Karesini bölüyorsa kendisini hay da hay da böler. (Satır, 177-179)"

Tablo 4.133 incelendiğinde katılımcıların sezgisel kestirme yollarından "Her zaman amaca doğru ilerler." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır. İşlem adımlarını yürütürken başka bir önermeden yararlanması gereken $Ö_{D1}$ bu süreçte farklı değişkenleri birbirine eşitleyerek amaca ilerlemeye çalışmaktadır. Öğretmenin etkinlik kartından görünüm Şekil 4.29'da sunulmuştur.



Şekil 4.29. $Ö_{D1}$'in ispatından bir kesit

Sezgisel kestirme yolları kategorisinde ulaşılan bir başka kod "Araç-amaç analizi yapar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{O1}$ sesli düşünme protokolünde etkinlikle meşgul olurken *"*[34.22] ... *Bunu da x.(x+1) diye parçaladığımda x'ler zaten birbirini bölüyor. Sadece (x+1) k'yı böler mi oldu. (x+1) de b'ydi. Şimdi b böler k mı oldu? Aslında k, b'nin bir katı olmak zorunda yani buradan onu anlıyorum.* (Satır, 91-93)*"* ifadelerini kullanmıştır. Katılımcının ifadeleri incelendiğinde, ispatı parçalayarak yürüttüğü ve ayrı parçalar halinde yaptığı anlaşılmaktadır.

Sezgisel kestirme yolları kategorisinde ulaşılan bir başka kod ise "Tepe tırmanışı yapar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.134'de sunulmuştur.

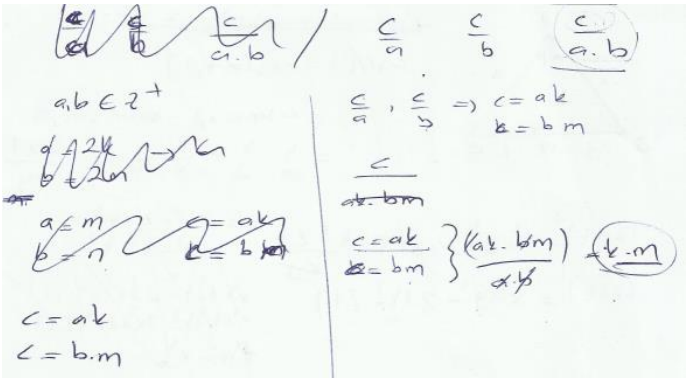
Tablo 4.134.

"Tepe Tırmanışı Yapar." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ2}$	"[27.18] …Şimdi kontrol edeceğiz şunun sonucunun tamsayı olup olmadığını. Şuraya bir soru işareti koyalım. c/[(c/k).(c/t)] şeklinde ifade ettik. Buradan (k.t)/c olur. c yerine a.k yazarsak; k gider. t/a kalır… (Satır, 127-128)"
$ÖAS_{D2}$	[41.31] Hayır bu c'nin ta kendisidir. Şimdi şöyle: a ile b aralarında asal. b, c'nin böleniyse c, a'dan ve b'den büyük bir sayıdır. Toplama şartı bu büyüklüğü sağlamayacağına göre a.k ve b.k'nın çarpımı; yani her ikisinin de ortak çarpımı durumunu sağlayacaktır (Satır, 195-197)"
$ÖAS_{İ2}$	"[24.30] n'in c'yi böldüğünü bilmiyorum. Böldüğünü göstermek istiyorum; ama şöyle diyebiliriz a.b.n=c^2 ise yani n, c^2'ye bölünebilir demektir. n, c^2'ye bölünebiliyorsa n'in c'yi böldüğünü söyleyebiliriz herhalde. (Satır, 85-86)"

Tablo 4.134 incelendiğinde $Ö_{İ2}$'nin kolay yoldan işlem yaparak sadeleştirme yaptığı ve amaçtan uzaklaştığı anlaşılmaktadır. Benzer şekilde $ÖAS_{D2}$'nin sonuca ulaşamadığında kendisine kolay gelen yoldan sonuca ilerlemeye çalışarak yanlış yapmaktadır. $ÖAS_{İ2}$ de ifadenin karesini bölen sayının kendisini de böldüğünü söyleyerek kısa yoldan sonuca ulaşmaya çalışmaktadır. Bu bağlamda katılımcıların "Tepe tırmanışı yapar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Sezgisel kestirme yolları kategorisinde ulaşılan bir diğer kod "Rasgele arama yapar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan ÖİŞ2'nin sesli düşünme protokolünde kullandığı *"*[34.00] *a'yı b türünden yazamaz mıyım? k yerine bu sefer, biraz daha değiştireceğim hocam bakalım nasıl olacak? a.c yazdık, t yerine de c/b* ... (Satır, 142-143)*"* ifadelerden bu beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D2}$'nin etkinlik kartından görünüm Şekil 4.30'da sunulmuştur.



Şekil 4.30. $ÖAS_{D2}$'nin etkinlik kartından görünüm

Şekil 4.30'daki etkinlik kartı görüntüsü incelendiğinde katılımcının farklı yöntemlere belirli bir sistematik olmadan ispat yapmayı denediği bu nedenle rasgele arama yöntemini kullandığı anlaşılmıştır. Sezgisel kestirme yolları kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımları Tablo 4.135'de sunulmuştur.

Tablo 4.135.

Sezgisel Kestirme Yolları Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Her Zaman Amaca Doğru İlerler.	✓			✓							✓							
Araç-Amaç Analizi Yapar.									✓									
Tepe Tırmanışı Yapar.						✓		✓				✓						
Rasgele Arama Yapar.						✓		✓	✓									

Tablo 4.135 incelendiğinde sezgisel kestirme yolları kategorisinde en sık sergilenen kodlar "Her zaman amaca doğru ilerler.", "Tepe tırmanışı yapar." ve "Rasgele arama yapar." kodlarıdır $(n = 3)$. Az sergilenen kod ise "Araç-amaç analizi yapar." becerisidir $(n = 1)$.

4.5.2. Dördüncü etkinlik kartındaki sorudan üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bulgular

Dördüncü soruda üst bilişsel beceriler teması altında "İşlemleri kolaylaştırma", "Sorgulama", "Farkındalık", "Planlama", "Kontrol etme", "İlişkilendirme" ve "Analojik akıl yürütme" olarak yedi kategori ve bu kategoriler altında 20 koda ulaşılmıştır.

İşlemleri kolaylaştırma kategorisi altında "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlar.", "İşlem kolaylığı sağlamak için kesirli ifadelerden kaçınır." ve "İspatın anahtar kavramını belirler." kodları belirlenmiştir.

"Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.136'da sunulmuştur.

Tablo 4.136.

"Değişken Sayısını Azaltarak İşlem Kolaylığı Sağlar." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ2}$	"[27.18] … Burada a'ları ve b'leri c cinsinden yazarak işlemleri kolaylaştıralım olur mu? a=c/k, b=c/t'dir. a ve b'yi c türünden yazdım… (Satır, 126-127)"
$ÖAS_{D2}$	"[37.07] Ben aralarında asal iki tane sayı seçeyim c=a.k ve c=b.m. Aslında buna hiç gerek yok. Bu denklemde sadece harf kalabalığı yapıyor. Aralarında asal a, c yi böler. Yani c, a'nın bir katı. c, b'yi böler. c, b'nin de bir katı. a.b'nin bunun doğru olduğunu gösterelim. (Satır, 186-189)"

Tablo 4.136 incelendiğinde katılımcıların "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlar." becerisini sergiledikleri anlaşılmaktadır.

İşlem kolaylığı sağlama kategorisinde ulaşılan bir diğer kod "İşlem kolaylığı sağlamak için kesirli ifadelerden kaçınır." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{D1}$'in *"*[31.39] *a'ya hatta 2k diyelim. Eğer c, a'yı bölüyorsa c, 4k'dır. Şimdi c, b'yi de bölüyorsa o zaman c , 4k ise o zaman b de 4k dır.* (Satır, 203-204)*"* ifadelerinden sonra araştırmacının sorduğu *"*[32.47] *Neden 2k, 4k şeklinde ifadeler kullandınız?* (Satır, 209)*"* soruya verdiği *"*[32.49] *...2 diyemem k mesela 5 olur*

olmaz yani ortaklarda birleştirmem lazım böler sorularını… (Satır, 210-211)*"* cevaptan "İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

İşlem kolaylığı sağlama kategorisinde ulaşılan son kod "İspatın anahtar kavramlarını belirler." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{I1}$'in *"*[19.19] *...asalsa bunların EKOK'ları1 oluyor. Yok, EBOB'ları evet EBOB'ları 1 oluyor.* (Satır, 97-98)*"* ifadelerinden EBOB'larının 1 olmasını anahtar kavram olarak belirlediği anlaşılmaktadır. İşlemleri kolaylaştırmaya yönelik yapılan beceriler katılımcıların bir durumun farkında olup o durumu aşmaya yönelik bir süreç olduğundan öz-düzenleme bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde elde edilen üst bilişsel becerilerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.137'de sunulmuştur.

Tablo 4.137.

İşlemleri Kolaylaştırma Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Değişken Değiştirerek İşlem Kolaylığı Sağlar						✓		✓	✓									
İşlem Kolaylığı İçin Kesirli İfadelerden Kaçınır							✓											
İspatın Anahtar Kavramını Belirler.					✓						✓							

Tablo 4.137 incelendiğinde işlemleri kolaylaştırma kategorisinde en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar." kodu iken $(n = 3)$, bunu "İspatın anahtar kavramını belirler." kodu $(n = 2)$ takip etmiştir. Bu kategoride en az sergilendiği belirlenen beceri ise "İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır." becerisidir $(n = 1)$.

Üst bilişsel beceriler temasının sorgulama kategorisinde "İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar.", "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." ve "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." kodları bulunmuştur.

"İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{İ1}$'in *"*[18.16] *...1'den mesela ne dedik 55'e kadar mı? 1 ile k+1 arasında bir şeydir.* (Satır, 119)*"* ifadelerinden ilgili beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır. Öğretmenin bu becerisi kendini izlemeye yönelik sorgulama gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Sorgulama kategorisinde ulaşılan bir başka kod "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.138'de sunulmuştur.

Tablo 4.138.

"Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[29.28] … Her iki tarafın karekökünü almayayım da taraf tarafa çarpmak peki buradan ben şu şeyi söyleyebilir miyim? a.b'nin c'yi böldüğünü söyleyebilir miyim? Evet … (Satır, 176-177)"
$ÖAS_{D1}$	"[32.49] …hocam b, c'yi böldüğü için b'de c'nin bir katı olması lazım, k olması lazım. Şimdi diyor ki a.b, c'yi $2k^2$'yi böler mi, diyor? k'yı şimdi hocam 2k, k'yı böler mi? Tabii ki böler. (Satır, 211-213)"
$ÖAS_{O1}$	"[34.22] Şimdi k'yı böler mi? k dediğimiz şey de a yerine x yazmıştım. Yani $(x^2 + x)$, k.x'i böler mi? (Satır, 91)"

Tablo 4.138 incelendiğinde katılımcıların "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Katılımcıların bu becerisi kendilerini izlemeye yönelik bir beceri olduğundan üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Sorgulama kategorisinde ulaşılan son kod "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.139'da sunulmuştur.

Tablo 4.139.

"Yaptığı İşlemleri Nedenleriyle Açıklar." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[29.28] …a ve b'nin EBOB'u 1'dir. Bu ne demek? Bunların en büyük ortak böleni 1'dir demek.… (Satır, 141-142)"
$ÖAS_{D1}$	" [32.49] a, c'yi bölmesi için k ortak sadece k' sı var çünkü… (Satır, 210)"

Tablo 4.139 incelendiğinde katılımcıların "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri kişinin kendisini sorgulamasını gerektiren bir beceri olduğundan üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Sorgulama kategorisinde ulaşılan kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.140'da sunulmuştur.

Tablo 4.140.

Sorgulama Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
İşlemlerin Doğruluğunu Kontrol Etmek İçin Kendine Sorular Sorar					✓													
Kendine Sorular Sorarak İspat Adımlarını Sürdürür.				✓			✓		✓									
Yaptığı İşlemleri Nedenleriyle Açıklar.				✓			✓											

Tablo 4.140 incelendiğinde sorgulama kategorisinde en fazla sergilenen beceri "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." kodudur (n=3). En az sergilendiği belirlenen beceriler ise "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." kodu $(n = 2)$ ve "İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar." kodudur $(n = 1)$.

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir başka kategori "Farkındalık" kategorisidir. Bu kategori altında "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.", "Önermede yer alan tüm verilerin ispatta kullanılacağının farkındadır." ve "Öz-düşünüm becerisi sergiler." kodlarına ulaşılmıştır.

"İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan $ÖAS_{O1}$'in *"*[32.41] *Hocam çiftlerin toplamını hatırlayamadım, hatırlayabilsem söylediğim yöntemden sonucun çıkacağını biliyorum.* (Satır, 81-82)*"* ifadelerinden "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Farkındalık kategorisinde sergilendiği belirlenen "Önermede yer alan tüm verilerin ispatta kullanılacağının farkındadır." becerisini sergilediği belirlenen $ÖAS_{İ2}$'nin *"*[30.27] *Normalde gidiyorum ama şeyi kullanmıyorum aralarında asal olmasını kullanmıyorum hiç oradan büyük ihtimalle çıkacak. a.m=c b.n=c a ile b aralarında asaldır.* (Satır, 100-101)*"* ifadelerinden önermede yer alan tüm verilerin ispatta kullanılacağının farkındadır becerisini sergilediği anlaşılmaktadır.

Farkındalık kategorisinde yer alan son kod olan "Öz-düşünüm becerisi sergiler." becerisini sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.141'de sunulmuştur.

Tablo 4.141.

"Öz-Düşünüm Becerisini Sergiler." Becerisini Sergileyen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O1}$	"[23.13] …Aslında zihinsel olarak doğruluğunu fark edebiliyorum ama işlemle gösteremiyorum. (Satır, 141-142)"
$ÖAS_{İ1}$	"[25.05] Yani matematiksel sembollerin kullandığı bir ispat şuan biraz uydurma gibi oluyor. Aralarında asalı hiç kullanmamış oluyorum. Vermişlerse kullanmak lazım. Aralarında asal a ve b. (Satır, 118-119)"

$Ö_{O1}$'in Tablo 4.141'deki ifadeleri incelendiğinde bilişsel becerilerde elde edilen sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz becerisine yakın bir ifade olduğu anlaşılmaktadır. Ancak bu beceri kişinin kendini değerlendirip yapabileceğinin farkında olmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. $ÖAS_{İ1}$'in ifadelerinden kendini değerlendirerek ispatında eksiklik olduğunun farkında olduğu yani "Öz-düşünüm becerisi sergiler." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Kişinin kendi ispatını değerlendirmesini gerektiren bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Farkındalık kategorisinde elde edilen üst bilişsel becerilerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.142'de sunulmuştur.

Tablo 4.142.

Farkındalık Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖAl_{D1}$	$ÖAl_{D2}$	$ÖAl_{O1}$	$ÖAl_{O2}$	$ÖAl_{I1}$	OAl_{I2}
İspat Yapmada Kullandığı Stratejinin Farkındadır.									✓									
Önermede Yer Alan Tüm Verilerin İspatta Kullanılacağının Farkındadır.												✓						
Öz-Düşünüm Becerisi Sergiler.			✓								✓							

Tablo 4.142 incelendiğinde farkındalık kategorisinde daha fazla sergilenen beceri "Öz-düşünüm becerisi sergiler." kodu iken ($n = 2$), daha az sergilenen beceriler "İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır." ve "Önermede yer alan tüm verilerin ispatta kullanılacağının farkındadır." kodlarıdır ($n = 1$).

Üst bilişsel temasında elde edilen bir başka kategori "planlama" kategorisidir. Planlama kategorisinde sergilendiği belirlenen kodlar "İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker.", "Soru sorarak hedefini belirler." ve "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." becerileridir.

"İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker." becerisini sergilediği belirlenen $Ö_{O2}$ *"*[29.00] *Şimdi şöyle. Zihnimde tasarlayıp doğruluğunu gördüğüm bir ifadeyi kâğıda döküp doğruluğunu görürsem devamını getiriyorum. Eğer işlemleri yaparken, zihnimde tasarladığımı kâğıda dökerken bir yerde bir hata görürsem bu sefer o zihnimdeki ifadeleri bırakıp olaya farklı yönden bakmaya çalışıyorum.* (Satır, 165-168)*"* ifadelerini kullanmıştır. Öğretmenin ifadeleri incelendiğinde ispatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri üst düzey düşünme becerisi gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Planlama kategorisinde bulunan bir başka kod "Soru sorarak hedefini belirler." becerisidir. "Soru sorarak hedefini belirler." becerisini sergilediği belirlenen $Ö_{I2}$'nin *"*[24.45] *Şimdi biz neyi ispatlayacağız? c/(a.b)'nin de bir tamsayı olduğu ispatlayacağız.* (Satır, 118-119)*"* ifadelerinden "Soru sorarak hedefini belirler." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri bireyin sorgulama becerisini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Planlama kategorisinde bulunan bir başka kod "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen $Ö_{O1}$'in *"*[24.16] *Nasıl ispat etmem gerektiğini düşünüyorum. İspat için başlangıç noktası bulmaya ve neyi ispatlayacağımı belirlemeye çalışıyorum. Şimdi söylediğim şeyin matematiksel ispatını yapmam gerekiyor. Matematikte aldığımız verdiğimiz her şeyin bir ispatı olması lazım…* (Satır, 111-113)*"* ifadelerinden neyi ispatlayacağına karar verir becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri kişinin hedefe yönelik planlama yapmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Planlama kategorisinde elde edilen üst bilişsel becerilerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.143'de sunulmuştur.

Tablo 4.143.

Planlama Kategorisinde Ulaşılan Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
İspatı Önce Zihninde Yapıp Sonra Kâğıda Döker.				✓														
Soru Sorarak Hedefini Belirler.				✓		✓												
İspata Başlamadan Önce Neyi İspatlayacağına Karar Verir.			✓															

Tablo 4.143 incelendiğinde planlama kategorisinde daha fazla sergilenen becerinin "Soru sorarak hedefini belirler." kodu olduğu belirlenmiştir $(n = 2)$. Az sergilenen beceriler "İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker." ve "İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir." kodlarıdır $(n = 1)$.

Üst bilişsel temasında ulaşılan bir başka kategori "Kontrol etme" kategorisidir. Kontrol etme kategorisinde "Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder.", "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." ve "Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar." kodlarına ulaşılmıştır.

"Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder." becerisini sergilediği belirlenen $Ö_{I2}$'nin *"*[31.56] *İlk başta bu yolda bir hata yaptım mı, yapmadım mı onu kontrol etmeye çalışıyorum. Eğer hata varsa başka bir strateji denerim.* (Satır, 132-133)*"*

ifadelerinden bu beceriyi sergilediği anlaşılmıştır. Bu beceri kişinin seçtiği ispat stratejisinin farkında olmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Kontrol etme kategorisinde sergilendiği belirlenen bir başka kod "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{I1}$'in *"*[24.44] *Yani tamsayılarda ispat geçerli olur. Sonuçta a ile b aralarında asal olduğu için bağımsız birbirinden. Ortak bölenleri yok. Bir sayının içinde nasıl diyeyim çarpan olarak ayrı ayrı geçiyorlarsa ortak geçtiklerine bölünürler. Ayrı ayrı geçtiklerinde bölünüyorlarsa c'nin içinde ikisini de barındırdığını gösteriyor.* (Satır, 157-160)*"* ifadelerinden bu beceriyi sergilediği anlaşılmaktadır.

Kontrol etme kategorisinde sergilendiği belirlenen son kod "Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen $Ö_{O2}$'nin *"*[33.55] *Şu an sonuca gitmeye çalışıyorum. Bir yeri göremiyorum, bunun farkındayım. Tekrar soruya dönüyorum.* (Satır, 187-188)*"* ifadelerinden yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Katılımcının cümlesinde de geçtiği gibi farkındalık gerektiren bir durum olan bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Kontrol etme kategorisinde ulaşılan üst bilişsel becerilerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.144'de sunulmuştur.

Tablo 4.144.

Kontrol Etme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{I1}$	$Ö_{I2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{I1}$	$ÖAS_{I2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{I1}$	$OA1_{I2}$
Hata Yaptığında İspat Stratejisini Kontrol Eder.						✓												
Aksiyomatik İspat Şemasına Göre İspatın Doğruluğunu Değerlendirir.					✓													
Yanlış Bir İşlem Yaptığında Sorunun En Başına Dönerek Tekrar Çözüm Yapar.				✓														

Tablo 4.144 incelendiğinde kontrol etme kategorisindeki becerilerin tamamı eşit sayıda katılımcı tarafından sergilendiği görülmektedir ($n = 1$).

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir diğer kategori "ilişkilendirme" kategorisidir. Bu kategoride "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar.", "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." ve "İlişkilendirme yapmak için düşünür." kodları bulunmuştur.

"İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 4.145'de sunulmuştur.

Tablo 4.145.

"İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar." Becerisini Sergileyen Katılımcılardan Bazılarının Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{İ1}$	"[20.39] …a ve b aralarında asal olduğu için bunların ortak çarpanı yok. Dolayısıyla c'nin içinde a varsa başka ekstradan bir b çarpanı olmak zorunda. Ya da b, c'yi bölüyorsa ekstradan bir a çarpanı da olmak zorunda. Yani a ve b kesinlikle ayrı ayrı bulunmak zorunda c'nin içinde. (Satır, 144-147)"
$ÖAS_{İ2}$	"[28.42] Yazdığım ifade ispat için pek bir şey ifade eder gibi görünmüyor. İfade yardımcı olmaz gibi geldi. Ama benim bulmak istediğim şey c'nin m'ye tam olarak bölündüğü mü? Yukarıdakinde c'nin m'ye tam olarak bölündüğünü bulmak istiyorum. Onu bulursam ispatı tamamlamış olacağım o yüzden böyle bir şey yaptım. (Satır, 92-95) "

Tablo 4.145 incelendiğinde katılımcıların "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri kişinin ilişkilendirme yapmasını gerekli kıldığından üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

İlişkilendirme kategorisinde ulaşılan bir başka kod "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların görüşleri Tablo 4.146'da sunulmuştur.

Tablo 4.146.

"Sorular Sorarak İlişkilendirme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$Ö_{O2}$	"[26.15] …Göstermek istediğim bu en son elimde olan a.k=b.l bir şey daha biliyorum, a ile b'nin ortak katlarının 1 olması… (Satır, 154-155) k ve l hakkında ne söyleyebilirim? (Satır, 156)"
$ÖAS_{İ1}$	"[21.38] …Burada ne yapıyorduk? Şimdi a.b, a ile b aralarında asal şuradan a'yı çeksek a=c/k, b'yi çeksek b=c/m olur... (Satır, 107-108)"

Tablo 4.146 incelendiğinde katılımcıların "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri kişinin sorgulamasını ve ilişkilendirme yapmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

İlişkilendirme kategorisinde ulaşılan son kod "İlişkilendirme yapmak için düşünür." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılardan $Ö_{O2}$'nin *"*[28.25] *Şu an şunu düşünüyorum. Şu eşitlikten elimde olan eşitlikten sonuçta ulaşmak istediğim eşitlik arasındaki bağlantıyı düşünüyorum. Yani oradaki k ve l ifadesini çıkarıp yerine bir m sayısını koyabilecek bir düzenleme yapmaya çalışıyorum.* (Satır, 158-160)*"* ifadelerinden ilişkilendirme yapmak için düşünür becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Bu beceri ilişkilendirme yaparak üst düzey düşünmeyi gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. İlişkilendirme kategorisinde elde edilen üst bilişsel becerilerin katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.147'de sunulmuştur.

Tablo 4.147.

İlişkilendirme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D1}$	$ÖAS_{D2}$	$ÖAS_{O1}$	$ÖAS_{O2}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$OA1_{İ2}$
İspat Sürecinde Adımlar Arası İlişkilendirme Yapar.				✓	✓							✓						
Sorular Sorarak İlişkilendirme Yapar.				✓							✓							
İlişkilendirme Yapmak İçin Düşünür.				✓														

Tablo 4.147 incelendiğinde ilişkilendirme kategorisinde en fazla sergilenen beceriler sırasıyla "İspat sürecinde adımlar arasındaki ilişkilendirme yapar." ($n = 3$) ve "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." becerileridir ($n = 2$). Bu kategoride en az sergilenen beceri ise "İlişkilendirme yapmak için düşünür." kodudur ($n = 1$).

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan son kategori ise "analojik akıl yürütme" kategorisidir. Bu beceri altında "Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." ve "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." kodlarına ulaşılmıştır.

"Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." becerisini sergilediği belirlenen $Ö_{I2}$'nin aşağıdaki ifadelerinden bu beceriyi sergilediği anlaşılmıştır (Satır, 162-166):

> "[25.17] Böyle bir önerme yani evet hani onda aslında şöyle diyeyim. Daha çok tersini kullanıyoruz mesela ne diyoruz işte bir sayı 12 ile bölünebiliyorsa 3 ve 4 ile de bölünebilir. Daha çok kullandığımız bu lise düzeyinde. İşte 24 ile bölünüyorsa 8 ve 3 ile bölünür. Aslında daha çok kullandığımız bu. Ama yani mantıken de akla yatıyor yani; parça parça bölünüyorsa bütününde bölünmesi gerekir yani."

Öğretmenin ifadeleri incelendiğinde önermenin tersinden yola çıkarak önermenin doğruluğunu göstermeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Bu beceri kişinin üst düzey düşünmesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Analojik akıl yürütme kategorisinde ulaşılan diğer kod ise "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisidir. Bu beceriyi sergileyen katılımcıların görüşleri Tablo 4.148'de sunulmuştur.

Tablo 4.148.

"Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar." Becerisini Sergilediği Belirlenen Katılımcıların Görüşleri

Katılımcı	Görüşü
$ÖAS_{O1}$	"[32.50] Şunu denedim hocam ardışık toplamları çift ve tekten ama bu sefer de hani sonuçta her 4 tane sayı aldığımda, önceki sorduğunuzda bunu yapmıştım ama yine böyle 2k, 2k+2 gibi bir şey vermiştim öyle hatırlıyorum. Yani onu buna uyarlıyorum. (Satır, 84-86)"
$ÖA1_{İ2}$	"[30.50] Evet, şeyden çalıştım bu terim toplamından çift sayılarınkini hatırlarsam ardışık çift sayılarınkini hatırlarsam farkını alırsam tek sayılarınki çıkar dedim ama çift sayılarınkinden de emin değilim. (Satır, 216-218)"

Tablo 4.148 incelendiğinde katılımcıların "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisini sergilediği anlaşılmaktadır. Katılımcıların ifadeleri incelendiğinde daha önce kullanmış olduğu bir yöntemi değiştirerek bu önermenin ispatını yürüttüğü ve analojik akıl yürütme yaptığı anlaşılmaktadır. Bu beceri bireyin bir durumun farkında olup düzenlemesini gerektirdiğinden öz-düzenleme bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Analojik akıl yürütme kategorisinde elde edilen üst bilişsel becerinin katılımcılara göre dağılımı Tablo 4.149'da sunulmuştur.

Tablo 4.149.

Analojik Akıl Yürütme Kategorisinde Elde Edilen Kodların Katılımcılara Göre Dağılımı

KODLAR	$Ö_{D1}$	$Ö_{D2}$	$Ö_{O1}$	$Ö_{O2}$	$Ö_{İ1}$	$Ö_{İ2}$	$ÖAS_{D}$	$ÖAS_{D}$	$ÖAS_{O}$	$ÖAS_{O}$	$ÖAS_{İ1}$	$ÖAS_{İ2}$	$ÖA1_{D1}$	$ÖA1_{D2}$	$ÖA1_{O1}$	$ÖA1_{O2}$	$ÖA1_{İ1}$	$OA1_{İ2}$
Önermenin Tersinden Yararlanarak Analojik Akıl Yürütür.					✓													
Daha Önce Kullanmış Olduğu Stratejiyi Değiştirerek Analojik Akıl Yürütme Yapar.									✓									✓

Tablo 4.149 incelendiğinde analojik akıl yürütme kategorisinde "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisi daha fazla sergilenirken $(n = 2)$; "Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütür." becerisi daha az sergilenmiştir.

4.6. Nitel Verilerin Genel Değerlendirmesine Yönelik Bulgular

Çalışmanın bu bölümünde dört sorudan elde edilen bulgular kategoriler bağlamında ele alınıp soru ve katılımcılara göre analiz edilmiştir. Bulgular temalar göz önüne alınarak iki başlık altında değerlendirilmiştir.

4.6.1. Bilişsel beceriler temasında elde edilen kodların genel değerlendirmesine yönelik bulgular

Bu bölümde "İspat önermesini okuma", "Şekil çizme", "Önermenin altını çizme", "Doğruluğunu değerlendirme", "Strateji belirleme", "İşlem süreci" ve "Sezgisel kestirme yolları" kategorilere ait değerlendirmeler sunulmuştur. İspat önermesini okuma kategorisine yönelik elde edilen genel değerlendirme Tablo 4.150'de sunulmuştur.

Tablo 4.150.

İspat Önermesini Okuma Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
İspat Önermesini Okuma	Önermeyi sembolik olarak yazar	2	3.S (Cebir)	4	$Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ2}$	6	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{D2}$-$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{O2}$-$ÖA1_{İ1}$- $ÖA1_{İ2}$
			4.S (Cebir)	4	$Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ1}$	-	-
	İspat önermesini ilk kez okur	4	1.S (Geometri)	6	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	6	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$-$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	6	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{D2}$-$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{O2}$-$ÖA1_{İ1}$- $ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	6	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	6	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$-$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	4	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{O2}$-
			3.S (Cebir)	5	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	6	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{D2}$-$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{O2}$-$ÖA1_{İ1}$- $ÖA1_{İ2}$
			4.S (Cebir)	4	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{İ1}$	2	$ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$	-	-
	İspatın anahtar kavramlarını belirler	1	4.S (Cebir)	3	$Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$	1	$ÖAS_{İ2}$	-	-
	Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	-	-	-	-
	Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder	1	3.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{D2}$	-	-
	Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder	1	3.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{D2}$	-	-
	İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler	3	1.S (Geometri)	2	$Ö_{O1}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{D2}$	-	-
			3.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	2	$ÖAS_{D1}$-$ÖAS_{O1}$	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	2	$ÖAS_{D1}$-$ÖAS_{O1}$	-	-
	Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür	4	1.S (Geometri)	4	$Ö_{D2}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	4	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$	5	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ1}$- $ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	1	$Ö_{O1}$	-	-	-	-
			3.S (Cebir)	1	$Ö_{O1}$	2	$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O1}$	2	$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$	1	$ÖA1_{D2}$
	İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını belirler	3	1.S (Geometri)	5	$Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	4	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	2	$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ1}$
			3.S (Cebir)	-	-	2	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ1}$	-	-
			4.S (Cebir)	3	$Ö_{D2}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	-	-
	Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerin doğruluğunu kontrol eder	1	1.S (Geometri)	1	$Ö_{D2}$	-	-	1	$ÖA1_{İ2}$

Tablo 4.150 incelendiğinde ispat önermesini okuma kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde "İspat önermesini ilk kez okur." ve "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerilerinin soruların tamamında sergilendiği belirlenmiştir. "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." ve "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını belirler." becerileri ise geometrinin ikinci sorusundaki önerme dışında tüm önermelerde sergilendiği belirlenmiştir. "Önermeyi sembolik olarak yazar." becerisi ise geometri önermelerini içeren iki soruda sergilenmeyip, iki cebir sorusunda sergilenmiştir. "İspatın anahtar kavramlarını belirler.", "Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür.", "Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder." ve "Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder." becerileri sadece bir cebir önermesinde sergilenmiştir. "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerin doğruluğunu kontrol eder" becerisi ise yalnızca bir geometri önermesinde sergilenmiştir. İspat önermesini okuma kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "İspat önermesini ilk kez okur." becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise "Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür.", "Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder." ve "Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder." becerileridir. Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "İspat önermesini ilk kez okur." becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise "Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür." ve "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerin doğruluğunu kontrol eder." becerileridir. Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin "İspat önermesini ilk kez okur." becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerilerin ise "İspatın anahtar kavramlarını belirler.", "Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder" ve "Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder" beceri olduğu tespit edilmiştir. İspat önermesini okuma kategorisi 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin "İspat önermesini ilk kez okur." becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen becerinin ise "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerin doğruluğunu kontrol eder". becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Şekil çizme kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.151'de sunulmuştur.

Tablo 4.151.

Şekil Çizme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Şekil Çizme	Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer	2	1.S (Geometri)	4	$Ö_{D1}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ2}$	5	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$-$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	6	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{O2}$- $ÖA1_{İ1}$- $ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	4	$Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	5	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$-$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	3	$ÖA1_{D1}$-$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{O2}$
	İspat sürecinin bir aşaması olarak şekil çizer	1	2.S (Geometri)	-	-	-	-	2	$ÖA1_{D2}$-$ÖA1_{İ1}$
	Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür	1	1.S (Geometri)	3	$Ö_{D1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{D1}$	2	$ÖA1_{İ1}$- $ÖA1_{İ2}$
	Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer	1	1.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{O2}$	2	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{İ1}$
	Somutlaştırma amacıyla şekil çizer	2	1.S (Geometri)	2	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ2}$	1	$ÖAS_{İ1}$	1	$ÖA1_{İ1}$
			2.S (Geometri)	1	$Ö_{O1}$	1	$ÖAS_{D1}$	-	-

Tablo 4.151 incelendiğinde şekil çizme kategorisinin sadece geometri sorularında sergilendiği, cebir sorularında ise bu kategorinin sergilenmediği görülmektedir. Şekil çizme kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." ve "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." becerilerinin geometri sorularının her ikisinde de sergilendiği belirlenmiştir. "İspat sürecinin bir aşaması olarak şekil çizer.", "Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür." ve "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." becerileri sadece bir geometri önermesinde sergilenmiştir.

Şekil çizme kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceri ise "İspat sürecinin bir aşaması olarak şekil çizer." becerisidir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise "Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür." ve "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." becerileridir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerilerin ise "Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür." ve "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." becerileri olduğu tespit edilmiştir.

Şekil çizme kategorisi 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen becerinin ise "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Önermenin altını çizme kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.152'de sunulmuştur.

Tablo 4.152.

Önermenin Altını Çizme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Önermenin Altını Çizme	Önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer	1	1.S (Geometri)	1	$Ö_{O2}$	-	-	-	-
	İspatın hipotez-hükmünü anlamak için önermenin altını çizer	2	3.S (Cebir)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	-	-	-	-
	Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer	1	1.S (Geometri)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{İ2}$
	Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer	2	1.S (Geometri)	1	$Ö_{O1}$	1	$ÖAS_{D1}$	-	-
			2.S (Geometri)	1	$Ö_{İ2}$	1	$ÖAS_{D1}$	-	-

Tablo 4.152 incelendiğinde önermenin altını çizme kategorisinde elde edilen becerilerin geometri ve cebir alanında amaçlara göre farklılaştığı görülmektedir. Yani geometri alanında sergilenen beceriler cebir alanında sergilenmemekte; cebir alanında sergilenen beceriler ise geometri alanında sergilenmemektedir. Soru bazlı değerlendirme yapıldığında "Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." becerisinin her iki geometri sorusunda da sergilendiği belirlenmiştir. "İspatın hipotez-hükmünü anlamak için önermenin altını çizer." becerisinin ise her iki cebir sorusunda da sergilendiği görülmektedir.

Önermenin altını çizme kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise "Önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer." ve "Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer." becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceriler "İspatın hipotez-hükmünü anlamak için önermenin altını çizer." ve "Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." becerileridir. En az sergilendiği belirlenen beceri ise "Önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer." becerisidir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında bu kategoride sadece bir becerinin - Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." sergilendiği görülmektedir. Bu beceri iki katılımcı tarafından sergilenmiştir.

Önermenin altını çizme kategorisi 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde sadece bir becerinin sergilendiği görülmüştür. "Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer." becerisi olarak adlandırılan bu beceri sadece bir katılımcı tarafından sergilenmiştir.

Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.153'de sunulmuştur.

Tablo 4.153.

Doğruluğunu Değerlendirme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen Birinci Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Doğruluğunu Değerlendirme	Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir	4	1.S (Geometri)	1	$Ö_{O2}$	4	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$-$ÖAS_{O2}$-$ÖAS_{İ2}$	-	-
			2.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{D2}$	-	-
			3.S (Cebir)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{O2}$
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{D2}$	2	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$	-	-
	Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir	1	4.S (Cebir)	4	$Ö_{D1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{O2}$-$Ö_{İ2}$	-	-	2	$ÖA1_{O2}$- $ÖA1_{İ1}$
	Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir	3	1.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{İ1}$	2	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O2}$
			3.S (Cebir)	2	$Ö_{D2}$-$Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$	2	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$
			4.S (Cebir)	3	$Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{O1}$-$ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$	4	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O2}$-$ÖA1_{İ2}$
	Otoriter ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir	2	1.S (Geometri)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{İ2}$
			3.S (Cebir)	3	$Ö_{D1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ2}$	-	-	1	$ÖA1_{İ2}$
	Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir	2	2.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{İ1}$	1	$ÖA1_{D2}$
			3.S (Cebir)	-	-	-	-	2	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{O2}$
	İspatı tamamladıktan sonra en başa dönerek doğruluğunu kontrol eder	1	1.S (Geometri)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	-	-
	Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz	2	3.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{D2}$	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	2	$ÖAS_{O1}$-$ÖAS_{İ2}$	-	-
	Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder	2	1.S (Geometri)	-	-	2	$ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	1	$Ö_{O2}$	-	-	-	-
	İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar	4	1.S (Geometri)	1	$Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D1}$-$ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	3	$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ1}$- $ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	1	$Ö_{İ2}$	1	$ÖAS_{D1}$	-	-
			3.S (Cebir)	1	$Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D1}$-$ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	-	-
	İşlemlerini kontrol ederek doğruluğu değerlendirir	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{D1}$	-	-	-	-
	İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir	1	3.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{İ2}$	-	-

Tablo 4.153 incelendiğinde doğruluğunu değerlendirme kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde “Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” ve “İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar.” becerilerinin soruların tamamında sergilendiği belirlenmiştir. “Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” becerisinin ise geometrinin ikinci sorusundaki önerme dışında tüm önermelerde sergilendiği belirlenmiştir. “Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir.”, “Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz.”, “İşlemlerini kontrol ederek doğruluğu değerlendirir.” ve “İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir.” becerileri sadece cebir önermelerinde sergilenirken; “İspatı tamamladıktan sonra en başa dönerek doğruluğunu kontrol eder.” ve “Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder.” becerileri sadece geometri sorularında sergilenmiştir.

İspat önermesini okuma kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri “Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise “İşlemlerini kontrol ederek doğruluğu değerlendirir.” ve “İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir.” becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri “Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise “İspatı tamamladıktan sonra en başa dönerek doğruluğunu kontrol eder.”, “Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz.”, “Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder” ve “İşlemlerini kontrol ederek doğruluğu değerlendirir.” becerileridir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin “İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar.” becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerilerin ise “Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir.” ve “İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir” becerileri olduğu tespit edilmiştir.

Doğruluğunu değerlendirme kategorisi 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen becerilerin ise "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir" ve "Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder." becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Strateji belirleme kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.154'de sunulmuştur.

Tablo 4.154.

Strateji Belirleme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Strateji Belirleme	Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder	4	1.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{D1}$	-	-
			2.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{İ2}$	-	-
			3.S (Cebir)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{O1}$
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{D2}$	-	-	-	-
	Ezberlediği yolla ispat yapar	4	1.S (Geometri)	1	$Ö_{i2}$	4	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	3	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{O2}$- $ÖA1_{İ1}$
			2.S (Geometri)	2	$Ö_{D2}$- $Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$	2	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{İ1}$
			3.S (Cebir)	2	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$	2	$ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{İ2}$
			4.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{İ1}$	1	$ÖA1_{O2}$
	İspat yöntemlerini gözden geçirir	1	1.S (Geometri)	1	$Ö_{O1}$	-	-	-	-
	Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar	1	1.S (Geometri)	2	$Ö_{D2}$- $Ö_{O2}$	1	$ÖAS_{D1}$	2	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{İ2}$
	İspatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünmektedir	1	3.S (Cebir)	-	-	2	$ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$	-	-
	İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir	1	4.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{O1}$	-	-

Tablo 4.154 incelendiğinde doğruluğunu değerlendirme kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." ve "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerilerinin soruların tamamında sergilendiği belirlenmiştir. Bu beceriler dışındaki tüm becerilerin sadece birer soruda sergilendiği görülmektedir. "İspat yöntemlerini gözden geçirir." ve "Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar." becerileri sadece geometri önermelerinde sergilenirken; "İspatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünmektedir." ve "İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir." becerileri sadece cebir sorularında sergilenmiştir.

Strateji belirleme kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise "İspat yöntemlerini gözden geçirir.", "Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar.", "İspatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünmektedir." ve "İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir." becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." ve "İspat yöntemlerini gözden geçirir." becerileridir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerilerin ise "Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar." ve "İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir." becerileri olduğu tespit edilmiştir.

Strateji belirleme kategorisi 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen becerinin ise "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." becerisi olduğu tespit edilmiştir.

İşlem süreci kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.155'de sunulmuştur.

Tablo 4.155.

İşlem Süreci Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen Birinci Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
İşlem Süreci	İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür	1	1.S (Geometri)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{D2}$
	Planına uygun ispat yapar	4	1.S (Geometri)	6	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	4	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$-$ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{O1}$
			2.S (Geometri)	3	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	5	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$-$ÖASO_1$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{O1}$
			3.S (Cebir)	2	$Ö_{D2}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
			4.S (Cebir)	2	$Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	-	-	-	-
	Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir	3	1.S (Geometri)	5	$Ö_{D1}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$ - $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{O1}$
			2.S (Geometri)	3	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$-$ÖASO_1$- $ÖAS_{İ1}$	5	$ÖA1_{D1}$ -$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{O2}$- $ÖA1_{İ2}$
			3.S (Cebir)	2	$Ö_{D2}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir	3	1.S (Geometri)	6	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	1	$ÖAS_{D2}$	2	$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	2	$Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$-$ÖASO_1$- $ÖAS_{İ1}$	3	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$-$ÖA1_{İ2}$
			3.S (Cebir)	2	$Ö_{D2}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{İ2}$	-	-	-	-
	Örüntü genelleme yapar	1	3.S (Cebir)	-	-	3	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$-$ÖAS_{O2}$	-	-
	Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder	1	4.S (Cebir)	-	-	-	-	2	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{İ1}$

Tablo 4.155 incelendiğinde işlem süreci kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde “Planına uygun ispat yapar.” becerisinin soruların tamamında sergilendiği belirlenmiştir. “Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir.” ve “Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir.” becerileri ise cebir önermesini içeren dördüncü soru hariç tüm sorularda sergilenmiştir. “İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür.” becerisinin sadece geometri önermelerinde sergilendiği görülmektedir. “İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür.”, “Örüntü genelleme yapar.” ve “Olmadığına örnek vererek ispatı reddeder.” becerilerinin sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenmiştir.

İşlem süreci kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri “Planına uygun ispat yapar.” becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise “İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür.” ve “İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür.” becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri “Planına uygun ispat yapar.” becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceri ise “İspat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşünür.” becerisidir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin “Planına uygun ispat yapar.” becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerinin ise “Örüntü genelleme yapar.” becerisi olduğu tespit edilmiştir.

İşlem süreci kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin “Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir.” becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen becerinin ise “İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür.” becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Sezgisel kestirme yolları kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.156’da sunulmuştur.

Tablo 4.156.

Sezgisel Kestirme Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Sezgisel Kestirme	Her zaman amaca doğru ilerler	1	4.S (Cebir)	2	$Ö_{D2}$-$Ö_{O2}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	Araç-amaç analizi yapar	2	3.S (Cebir)	1	$Ö_{D1}$	1	$ÖAS_{O1}$	-	-
			4.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{O1}$	-	-
	Tepe tırmanışı yapar	2	3.S (Cebir)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{İ2}$
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ2}$	-	-
	Rasgele arama yapar	2	3.S (Cebir)	1	$Ö_{D1}$	-	-	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$	-	-

Tablo 4.156 incelendiğinde sezgisel kestirme yolları kategorisinin sadece cebir sorularında sergilendiği, geometri sorularında ise bu kategorinin sergilenmediği görülmektedir. Sezgisel kestirme yolları kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde "Araç-amaç analizi yapar.", "Tepe tırmanışı yapar." ve "Rasgele arama yapar." becerilerinin cebir sorularının her ikisinde de sergilendiği belirlenmiştir. "Her zaman amaca doğru ilerler." becerisi sadece bir cebir önermesinde sergilenmiştir.

Sezgisel kestirme yolları kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceriler "Tepe tırmanışı yapar." ve "Rasgele arama yapar." becerileridir. Daha az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise "Her zaman amaca doğru ilerler." ve "Araç-amaç analizi yapar." becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceriler "Her zaman amaca doğru ilerler." ve "Rasgele arama yapar." becerileridir. Daha az sergilendiği belirlenen beceriler ise "Araç-amaç analizi yapar." ve "Tepe tırmanışı yapar." becerileridir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerilerin "Araç-amaç analizi yapar.", "Tepe tırmanışı yapar." ve "Rasgele arama yapar." becerileri olduğu görülmektedir. Az sergilendiği belirlenen beceri ise "Her zaman amaca doğru ilerler." becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Sezgisel kestirme yollar kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde sadece "Tepe tırmanışı yapar." becerisinin olduğu tespit edilmiştir. Bu becerinin yalnızca bir katılımcı tarafından sergilendiği bulunmuştur.

4.6.2. Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen kodların genel değerlendirmesine yönelik bulgular

Bu bölümde "İşlemleri kolaylaştırma", "Sorgulama", "Farkındalık", "Planlama", "Kontrol etme", "Strateji belirleme", "İlişkilendirme" ve "Analojik akıl yürütme" kategorilerine ait değerlendirmeler sunulmuştur. İşlemleri kolaylaştırma kategorisine yönelik elde edilen genel değerlendirme Tablo 4.157'de sunulmuştur.

Tablo 4.157.

İşlemleri Kolaylaştırma Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
İşlemleri kolaylaştırma	İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır	2	1.S (Geometri)	1	$Ö_{D1}$	1	$ÖAS_{D1}$	-	-
			4.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{D1}$	-	-
	Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar	2	1.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{D2}$	-	-
			2.S (Geometri)	1	$Ö_{D1}$	-	-	1	$ÖA1_{D2}$
	Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür	2	1.S (Geometri)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{D2}$
			2.S (Geometri)	1	$Ö_{D1}$	2	$ÖAS_{D1}$-$ÖAS_{O1}$	-	-
	İspatın anahtar kavramlarını belirler	3	1.S (Geometri)	4	$Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{D1}$-$ÖAS_{O1}$	-	-
			2.S (Geometri)	3	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$	1	$ÖA1_{O1}$
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır	2	1.S (Geometri)	1	$Ö_{D2}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
			2.S (Geometri)	2	$Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$	3	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ2}$
	Bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür	1	2.S (Geometri)	1	$Ö_{İ1}$	2	$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$	1	$ÖA1_{İ2}$
	Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar	2	3.S (Cebir)	1	$Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{İ2}$	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$	-	-

Tablo 4.157 incelendiğinde işlemleri kolaylaştırma kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde tüm sorularda sergilenen ortak bir beceri olmadığı görülmektedir. Bu kategoride "İspatın anahtar kavramlarını belirler." kodu üçüncü soru hariç (cebir önermesi) tüm sorularda sergilenmiştir. "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar.", "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür.", "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır." ve "Bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür." becerilerinin sadece geometri önermelerinde sergilendiği görülmektedir. "Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar." becerisinin sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenmiştir. İşlem süreci kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "İspatın anahtar kavramlarını belirler." becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise "İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır." ve "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar." becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "İspatın anahtar kavramlarını belirler." becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise "İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır.", "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar.", "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür." ve "Bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür." becerileridir. Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin "İspatın anahtar kavramlarını belirler." becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerinin ise "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar." becerisi olduğu tespit edilmiştir. İşlemleri kolaylaştırma kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır." becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen becerinin ise "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamayı amaçlar.", "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür.", "İspatın anahtar kavramlarını belirler." ve "Bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür." becerileri olduğu tespit edilmiştir.

Sorgulama kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.158'de sunulmuştur.

Tablo 4.158.

Sorgulama Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Sorgulama	İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendine sorar	1	1.S (Geometri)	2	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$	-	-	1	$ÖA1_{İ2}$
	İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar	1	1.S (Geometri)	3	$Ö_{D2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{O1}$
	Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür	4	1.S (Geometri)	3	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$	2	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{İ1}$	2	$ÖA1_{D1}$- $ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	-	-	3	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ2}$	-	-
			3.S (Cebir)	2	$Ö_{D1}$- $Ö_{İ1}$	3	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	2	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{O1}$	-	-
	Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar	4	1.S (Geometri)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	-	-
			2.S (Geometri)	2	$Ö_{O2}$ – $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{D1}$	2	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{İ2}$
			3.S (Cebir)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	1	$ÖAS_{D1}$		
	Nerede hata yaptığını kendine sorar	1	2.S (Geometri)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{D2}$
	Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	-	-	-	-
	İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{D1}$	-	-	-	-
	Önermeyi anlamak için sorular sorar	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{D2}$	-	-	-	-
	İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar	1	4.S (Cebir)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	-	-

Tablo 4.158 incelendiğinde sorgulama kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." ve "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." Becerilerinin tüm sorularda sergilendiği görülmektedir. "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendine sorar.", "İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar.", ve "Nerede hata yaptığını kendine sorar." becerilerinin sadece geometri önermelerinde sergilendiği görülmektedir. "Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar.", "İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar.", "Önermeyi anlamak için sorular sorar." ve "İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar." becerilerinin sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenmiştir. İşlem süreci kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise "Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar.", "İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar.", "Önermeyi anlamak için sorular sorar." ve "İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar." becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise "Hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar.", "İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar.", "Önermeyi anlamak için sorular sorar." ve "İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar." becerileridir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerinin ise "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Sorgulama kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerilerin "Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür." ve "Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar." becerileri olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen becerilerin ise "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendine sorar.", "İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar." ve "Nerede hata yaptığını kendine sorar." becerileri olduğu tespit edilmiştir. Farkındalık kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.159'da sunulmuştur.

Tablo 4.159.

Farkındalık Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen Birinci Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Farkındalık	İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır	3	1.S (Geometri)	6	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{O1}$
			2.S (Geometri)	-	-	3	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	-	-
			4.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{O1}$	-	-
	İspatın süreç olduğunun farkındadır	1	1.S (Geometri)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{D1}$
	İspatı anlayarak yapar	1	1.S (Geometri)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	1	$ÖA1_{İ2}$
	İspatı öğretici cümleler kurar	1	2.S (Geometri)	1	$Ö_{O1}$	-	-	1	$ÖA1_{D2}$
	Öz-düşünüm becerisi sergiler	2	2.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{D2}$	2	$ÖA1_{İ1}$- $ÖA1_{İ2}$
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	Önermede yer alan tüm ifadelerin ispatta kullanılacağının farkındadır	1	4.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{İ2}$	-	-
	Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder	2	1.S (Geometri)	1	$Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$	3	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ2}$

Tablo 4.159 incelendiğinde farkındalık kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde soruların tümünde sergilenen ortak bir beceri olmadığı görülmektedir. “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.” becerisi üçüncü cebir sorusu hariç tüm sorularda sergilenmektedir. “İspatın süreç olduğunun farkındadır.”, “İspatı anlayarak yapar.”, “Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder.” ve “İspatı öğretici cümleler kurar.” becerilerinin sadece geometri önermelerinde sergilendiği görülmektedir. “Önermede yer alan tüm ifadelerin ispatta kullanılacağının farkındadır.” becerisinin sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenmiştir.

İşlem süreci kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.” becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise “İspatın süreç olduğunun farkındadır.”, “İspatı öğretici cümleler kurar.” ve “Öz-düşünüm becerisi sergiler.” becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.” becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise “İspatı anlayarak yapar.”, “Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder.” ve “İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar.” becerileridir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.” becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerinin ise “Önermede yer alan tüm ifadelerin ispatta kullanılacağının farkındadır.” becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Farkındalık kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin “Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder.” becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen becerilerin ise “İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır.”, “İspatın süreç olduğunun farkındadır.”, “İspatı anlayarak yapar.” ve “İspatı öğretici cümleler kurar.” becerileri olduğu tespit edilmiştir.

Planlama kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.160’da sunulmuştur.

Tablo 4.160.

Planlama Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen Birinci Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Planlama	İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar	2	1.S (Geometri)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	1	$Ö_{O1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	1	$ÖA1_{İ1}$
	Sonuca yönelik tahminde bulunur	2	1.S (Geometri)	1	$Ö_{D2}$	2	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$	-	-
			3.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{O2}$	-	-
	İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir	3	1.S (Geometri)	4	$Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ1}$	1	$ÖA1_{O1}$
			2.S (Geometri)	2	$Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$	2	$ÖAS_{D1}$ - $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O1}$	-	-	-	-
	Hedefini şekil üzerinde belirler ve ulaşmak istediği hükmü yazar	1	1.S (Geometri)	1	$Ö_{O2}$	-	-	-	-
	Bir sonraki adıma geçmeden o adımda ne yapacağını düşünür	1	2.S (Geometri)	1	$Ö_{O2}$	2	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ1}$	-	-
	Planlama için kendine soru sorar	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{D1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	Algısal set oluşturur	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{İ2}$	-	-	-	-
	Soru sorarak hedefini belirler	1	4.S (Cebir)	2	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ2}$	-	-	-	-
	İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker	1	4.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	-	-	-	-

Tablo 4.160 incelendiğinde planlama kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde soruların tümünde sergilenen ortak bir beceri olmadığı görülmektedir. “İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir.” becerisi üçüncü cebir sorusu hariç tüm sorularda sergilenmektedir. “İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar.”, “Hedefini şekil üzerinde belirler ve ulaşmak istediği hükmü yazar.” ve “Bir sonraki adıma geçmeden o adımda ne yapacağını düşünür.” becerilerinin sadece geometri önermelerinde sergilendiği görülmektedir. “Planlama için kendine soru sorar.”, “Algısal set oluşturur.”, “Soru sorarak hedefini belirler.” ve “İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker.” becerisinin sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenmiştir. Planlama kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri “İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir.” becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise “Hedefini şekil üzerinde belirler ve ulaşmak istediği hükmü yazar.”, “Algısal set oluşturur.” ve “İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker.” becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri “İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir.” becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise “İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar.”, “Sonuca yönelik tahminde bulunur.”, “Hedefini şekil üzerinde belirler ve ulaşmak istediği hükmü yazar.”, “Algısal set oluşturur.” ve “İspatı önce zihninde yapıp sonra kâğıda döker.” becerileridir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin “İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir.” becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerinin ise “İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar.” becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Planlama kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin “İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar.” becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen becerileri ise “İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir.” becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Strateji belirleme kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.161’de sunulmuştur.

Tablo 4.161.

Strateji Belirleme Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Strateji Belirleme	İspat türünü doğru olarak seçebilir	1	1.S (Geometri)	6	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	4	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	3	$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{O2}$- $ÖA1_{İ2}$
	Soruyu okurken zihninde şekil çizer	1	1.S (Geometri)	1	$Ö_{O2}$	1	$ÖAS_{D2}$	-	-
	Iraksak düşünme yeteneğini kullanır	3	1.S (Geometri)	2	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{D1}$	-	-
			2.S (Geometri)	2	$Ö_{O1}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
			3.S (Cebir)	1	$Ö_{O1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır	3	1.S (Geometri)	3	$Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{D1}$	1	$ÖA1_{D2}$
			2.S (Geometri)	2	$Ö_{O1}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
			3.S (Cebir)	1	$Ö_{O1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	Tümdengelimsel akıl yürütür	1	2.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{D2}$	1	$ÖA1_{İ1}$
	İspat stratejisinin doğru olup olmadığını zihinsel olarak kontrol eder	1	2.S (Geometri)	1	$Ö_{O2}$	2	$ÖAS_{D1}$- $ÖAS_{İ1}$	2	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$
	Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler	1	2.S (Geometri)	3	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	1	$ÖAS_{D2}$	1	$ÖA1_{İ1}$
	Ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{O1}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-

Tablo 4.161 incelendiğinde strateji belirleme kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde soruların tümünde sergilenen ortak bir beceri olmadığı görülmektedir. “Iraksak düşünme yeteneğini kullanır.” ve “Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır.” becerileri dördüncü cebir sorusu hariç tüm sorularda sergilenmektedir. “İspat türünü doğru olarak seçebilir.”, “Soruyu okurken zihninde şekil çizer.”, “İspat stratejisinin doğru olup olmadığını zihinsel olarak kontrol eder.”, “Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler.” ve “Tümdengelimsel akıl yürütür.” becerilerinin sadece geometri önermelerinde sergilendiği görülmektedir. “Ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder.” becerisinin sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenmiştir. Strateji belirleme kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri “İspat türünü doğru olarak seçebilir.” becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise “Soruyu okurken zihninde şekil çizer.”, “Tümdengelimsel akıl yürütür.” ve “Ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder.” becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceriler “İspat türünü doğru olarak seçebilir.” ve “Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır.” becerileridir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise “Soruyu okurken zihninde şekil çizer.”, “İspat stratejisinin doğru olup olmadığını zihinsel olarak kontrol eder.” ve “Ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder.” becerileridir. Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin “İspat türünü doğru olarak seçebilir.” becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerilerin ise “Soruyu okurken zihninde şekil çizer.”, “Tümdengelimsel akıl yürütür”, “Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler.” ve “Ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder.” becerileri olduğu tespit edilmiştir. Strateji belirleme kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin “İspat türünü doğru olarak seçebilir.” becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen beceriler ise “Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır.”, “Tümdengelimsel akıl yürütür” ve “Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler.” becerileri olduğu tespit edilmiştir.

Kontrol etme kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.162’de sunulmuştur.

Tablo 4.162.

Kontrol Etme Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Kontrol etme	Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir	4	1.S (Geometri)	5	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	1	$ÖAS_{O1}$	2	$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	3	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$	2	$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ2}$
			3.S (Cebir)	2	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	-	-
	Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder	2	1.S (Geometri)	4	$Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$	3	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$- $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{O1}$
			3.S (Cebir)	-	-	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	Bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder	1	1.S (Geometri)	-	-	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir	2	1.S (Geometri)	2	$Ö_{O1}$- $Ö_{İ2}$	-	-	-	-
			2.S (Geometri)	-	-	-	-	1	$ÖA1_{O1}$
	Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başında dönerek tekrar çözüm yapar.	2	1.S (Geometri)	1	$Ö_{D2}$	-	-	-	
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	-	-	-	-
	İspatlama sürecinde işlemlerin doğruluğunu adım adım kontrol eder.	1	1.S (Geometri)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	2	$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ2}$
	Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder	1	4.S (Cebir)	1	$Ö_{İ2}$	-	-	-	-

Tablo 4.162 incelendiğinde kontrol etme kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde soruların tümünde sergilenen tek ortak becerinin "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisi olduğu görülmektedir. "Bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder.", "Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." ve "İspatlama sürecinde işlemlerin doğruluğunu adım adım kontrol eder." becerilerinin sadece geometri önermelerinde sergilendiği görülmektedir. "Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder." becerisinin sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenmiştir. Kontrol etme kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise "Bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder." ve "Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder." becerileridir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceriler ise "İspatlama sürecinde işlemlerin doğruluğunu adım adım kontrol eder." ve "Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder." becerileridir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerinin ise "Bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder." becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Kontrol etme kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin "Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen beceriler ise "Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder." ve "Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." becerileri olduğu tespit edilmiştir.

İlişkilendirme kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.163'de sunulmuştur.

Tablo 4.163.

İlişkilendirme Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen Birinci Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
İlişkilendirme	İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar	2	1.S (Geometri)	6	$Ö_{D1}$- $Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{İ1}$- $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	3	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ1}$	1	$ÖA1_{O1}$
	İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar	4	1.S (Geometri)	5	$Ö_{D2}$- $Ö_{O1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{O1}$ - $ÖAS_{İ2}$	1	$ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	3	$Ö_{O2}$- $Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D1}$-$ÖAS_{D2}$- $ÖAS_{İ1}$	2	$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{İ1}$
			3.S (Cebir)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	-	-
			4.S (Cebir)	2	$Ö_{O1}$- $Ö_{İ1}$	1	$ÖAS_{İ2}$	-	-
	Sorular sorarak ilişkilendirme yapar	3	2.S (Geometri)	2	$Ö_{İ1}$ -$Ö_{İ2}$	3	$ÖAS_{D2}$-$ÖASO_{1}$- $ÖAS_{İ1}$	3	$ÖA1_{D2}$- $ÖA1_{O1}$-$ÖA1_{İ2}$
			3.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	1	$ÖAS_{İ1}$	-	-
			4.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	-	$ÖAS_{İ1}$	-	-
	İlişkilendirme yapmak için düşünür	1	4.S (Cebir)	1	$Ö_{O2}$	-	-	-	-

Tablo 4.163 incelendiğinde ilişkilendirme kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde soruların tümünde sergilenen tek ortak becerinin "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisi olduğu görülmektedir. "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." becerisinin sadece geometri önermelerinde sergilendiği görülmektedir. "İlişkilendirme yapmak için düşünür." becerisinin sadece cebir önermelerinde sergilendiği belirlenmiştir.

İlişkilendirme kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceriler ise "İlişkilendirme yapmak için düşünür." becerisidir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisidir. En az sergilendiği belirlenen beceri ise "İlişkilendirme yapmak için düşünür." becerisidir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında en fazla sergilenen becerinin "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." becerisi olduğu görülmektedir. En az sergilendiği belirlenen becerilerin ise "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." ve "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." becerileri olduğu tespit edilmiştir.

İlişkilendirme kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerilerin "İspat sürecinde adımlar arası ilişkilendirme yapar." ve "Sorular sorarak ilişkilendirme yapar." becerileri olduğu görülmektedir. Bu kategoride en az sergilenen beceri ise "İspat sürecinde şekiller ve semboller arasında ilişki kurar." becerisi olduğu tespit edilmiştir.

Analojik akıl yürütme kategorisinde elde edilen becerilerin genel değerlendirmesi Tablo 4.164'de sunulmuştur.

Tablo 4.164.

Analojik Akıl Yürütme Üst Bilişsel Becerisine İlişkin Bulguların Sorular ve Katılımcılar Bağlamında Analizi

Kategori	Kod	Becerinin Sergilendiği Sorular		Beceriyi Sergileyen Öğretmenler		Beceriyi Sergileyen Son Sınıf Öğretmen Adayları		Beceriyi Sergileyen 1. Sınıf Öğretmen Adayları	
		f	Sorular	f	Öğretmenler	f	Öğretmen Adayları	f	Öğretmen Adayları
Analojik akıl yürütme	Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar	4	1.S (Geometri)	3	$Ö_{D1}$- $Ö_{O2}$- $Ö_{İ2}$	-	-	4	$ÖA1_{O1}$- $ÖA1_{O2}$- $ÖA1_{İ1}$- $ÖA1_{İ2}$
			2.S (Geometri)	2	$Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	1	$ÖAS_{D1}$	1	$ÖA1_{İ2}$
			3.S (Cebir)	2	$Ö_{İ1}$- $Ö_{İ2}$	2	$ÖAS_{O2}$- $ÖAS_{İ1}$	-	-
			4.S (Cebir)	-	-	2	$ÖAS_{O1}$	1	$ÖA1_{İ2}$
	Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar	1	3.S (Cebir)	1	$Ö_{D1}$	-	-	1	$ÖA1_{İ2}$
	Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar	1	4.S (Cebir)	1	$Ö_{İ1}$	-	-	-	-

Tablo 4.164 incelendiğinde analojik akıl yürütme kategorisinde elde edilen beceriler soru bazlı değerlendirildiğinde soruların tümünde sergilenen tek ortak becerinin "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisi olduğu görülmektedir. "Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." ve "Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." becerilerinin sadece cebir önermelerinde sergilendiği belirlenmiştir.

Analojik akıl yürütme kategorisinde çalışmanın bütününde sayıca en fazla sergilendiği belirlenen beceri "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisidir. En az tekrar ettiği belirlenen beceri ise "Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." becerisidir.

Öğretmenlere göre değerlendirildiğinde sayıca daha fazla sergilendiği belirlenen beceri "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisidir. Az sergilendiği belirlenen beceriler ise "Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." ve "Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." becerileridir.

Son sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirme yapıldığında sergilenen tek becerinin "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisi olduğu tespit edilmiştir.

İlişkilendirme kategorisi, 1. sınıf öğretmen adaylarına göre değerlendirildiğinde en fazla sergilenen becerinin "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisi olduğu görülmektedir. Bu kategoride az sergilenen becerinin "Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar." becerisi olduğu tespit edilmiştir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Tartışma

Çalışmada elde edilen bulgular incelendiğinde matematik öğretmenlerinin ve son sınıf öğretmen adaylarının ispatlama becerileri ile bilişsel ve üst bilişsel beceri sayılarının 1. sınıf öğretmen adaylarından daha yüksek olduğu belirlenmiştir. Ayrıca alan yazın incelendiğinde bilişsel açıdan incelemede genellikle bilişsel ve üst bilişsel olarak iki yapının olduğunu görülmektedir (Artz ve Armour-Thomas, 1992; Cozza ve Oreshkina, 2013; Yang, 2012). Bu çalışmada elde edilen kodlar ve kategoriler incelendiğinde oluşan temaların bilişsel ve üst bilişsel olarak adlandırılmasının uygun olacağı belirlenmiştir.

5.1.1. Nicel bulgulara yönelik tartışma

Düzeylere göre yapılan karşılaştırma sonucunda matematik öğretmenlerinin ve son sınıf öğretmen adaylarının ispat yapma teşhis testi puanlarının 1. sınıf öğretmen adaylarından anlamlı düzeyde yüksek olduğu bulunmuştur. İmamoğlu (2010) matematik öğretmenliği ve fen fakültesi matematik bölümünde okuyan birinci ve son sınıf öğrencilerinin ispat başarılarını karşılaştırmaya yönelik yaptığı çalışmada son sınıf öğrencilerinin ispat başarı puanlarının birinci sınıf öğrencilerinden anlamlı düzeyde yüksek olduğunu belirlemiştir. Bu doğrultuda öğretmenlerin ve son sınıf öğretmen adaylarının ispat başarılarının 1. sınıf öğretmen adaylarından yüksek olmasının alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Yukarıdakine benzer bir durum üst bilişsel becerilerin sayısında elde edilmiştir. Yani öğretmenlerin ve son sınıf öğretmen adaylarının sergilemiş olduğu üst bilişsel beceri sayısının birinci sınıf öğretmen adaylarından daha fazla olduğu belirlenmiştir. Özsoy ve Günindi (2011) yaptıkları çalışmada okulöncesi öğretmen adaylarının üst bilişsel farkındalıklarının 4. sınıf öğretmen adayları lehine anlamlı düzeyde

farklılaştığını belirlemiştir. Tüysüz ve diğerleri (2008) sınıf öğretmeni adaylarının üst biliş düzeylerinin sınıf düzeyinin yükselmesine bağlı olarak arttığını belirlemişlerdir. Van der Stel ve diğerleri (2010) ortaöğretim öğrencileriyle yaptıkları çalışmada problem çözme sürecinde sergilenen üst bilişsel becerilerin yaşla orantılı olarak arttığını belirlemiştir. Bu bağlamda üst bilişsel beceri sayısının öğretmenler ve son sınıf öğretmen adaylarında 1. sınıf öğretmen adaylarından daha fazla olmasının alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Elde edilen bulgular incelendiğinde ispat yapmada sergilenen üst bilişsel beceri sayısının ispat başarısıyla benzerlik gösterdiği söylenebilir. Bu bulgunun aksine Demircioğlu ve diğerleri (2010) öğretmen adaylarının problem çözme başarısı ile üst bilişsel beceri sayıları arasında ilişki olmadığını belirlemiştir.

5.1.2. Bilişsel beceriler temasında elde edilen becerilere yönelik tartışma

Bilişsel beceriler temasında elde edilen kategorilerden ilki ispat önermesini okumadır. Bu bölümde elde edilen beceriler geometri ve cebir alanlarına göre ayrıştırılarak alan yazınla tartışılmıştır.

Çalışmada ulaşılan bilişsel kategorilerden ilki "ispat önermesini okuma" kategorisidir. Hem geometri hem de cebir ispatlarında sergilendiği belirlenen becerilerden birisi ispat önermesini ilk kez okur becerisidir. İspat önermesini ilk kez okuma üst düzey bilişsel bir beceri gerektirmediğinden bu beceri çalışmada bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Yang (2012) lise öğrencileriyle yaptığı çalışmada ispat önermesini ilk kez okumayı bilişsel beceri olarak belirtmiştir. McKeown ve Beck'de (2009, s. 8) okuma sürecinde bireylerin genellikle üst bilişsel beceri kullanmadıklarını ifade etmiştir. Bu bağlamda ispat önermesini okumanın bilişsel beceri olarak belirlenmesi ilgili çalışmanın sonuçları ile örtüşmektedir.

Her iki alanda da sergilendiği belirlenen bir başka bilişsel beceri "ispat önermesini adım adım okuyarak ilerler" becerisidir. Katılımcılar ile yapılan görüşmelerde katılımcıların "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." becerisini sergilemelerinin farkındalık gerektiren değil otomatikleşmiş bir beceri olduğu anlaşılmıştır. Bu nedenle çalışmada "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." becerisi bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Yang (2012) çalışmasında ispat önermesini

adım adım okur becerisini üst bilişsel olarak belirtmiştir. Bu anlamda elde edilen bulgunun sözü geçen çalışmanın sonuçlarıyla çeliştiği görülmektedir. Ancak ilgili becerinin bu çalışmanın katılımcıları tarafından otomatikleşmiş olarak sergilendiği belirlendiğinden beceri bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Şahin'de (2016) matematik öğretmen adaylarının ispat önermesini okurken adım adım okuyarak verileri düzenlediğini belirlemiştir.

Geometri ve cebir alanlarının her ikisinde de sergilendiği belirlenen bir başka bilişsel beceri "önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür" becerisidir. Bu beceri katılımcıların üst düzey düşünmesini gerektirmediğinden (katılımcılar dikkat eksikliğinden dolayı tekrar okumuşlardır veya anlayamadıklarını düşündükleri için bir süre düşünmüşlerdir) bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Yang (2012) verilenler üzerine düşünmenin planlama anlamında üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Bu becerinin bilişsel olarak değerlendirilmesi ilgili çalışmanın sonuçlarıyla çelişmektedir. Ancak çalışmada bu becerinin üst bellek aktivitesi olmadığı anlaşıldığından bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir.

Her iki alanda da sergilendiği belirlenen bir başka bilişsel beceri "ispatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler" becerisidir. Çalışmada elde edilen bu beceri formel ispat için genellikle yapılan otomatikleşmiş bir beceri olup üst düzey düşünme becerisi gerektirmediğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Kaplan ve Duran (2015) ortaokul öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada hedef ve alt hedeflerin belirlenmesini üst bilişsel beceri olarak değerlendirmiştir. Sözü geçen çalışmanın sonuçları bu çalışmayla örtüşmemektedir. Ancak farklılığın çalışma grubundan kaynaklandığı söylenebilir. Yani bu beceri ortaokul öğrencileri için üst bilişsel, öğretmen ve öğretmen adayları için bilişsel olabilir.

Sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen bir beceri "sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder" becerisidir. Bu beceri katılımcıların ispatı sonuca ulaştıramadıklarında yaptıkları otomatikleşmiş beceri olarak saptanmıştır. Bu anlamda çalışmada beceri bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Yimer ve Ellerton (2006) öğretmen adaylarıyla problem çözmeye yönelik yürüttüğü çalışmada, öğretmen adaylarının çözemediklerinde problemi tekrar okumalarının üst bilişsel beceri olduğunu belirtmişlerdir. Araştırmacıların bu beceriyi

üst bilişsel olarak değerlendirmelerinin nedeni, Çalışmanın katılımcıların bu beceriyi kontrol etme amacıyla sergilemiş olmalarından kaynaklanmıştır. Kaplan ve Duran'da (2015) yaptıkları çalışmada bu beceriyi üst bilişsel olarak ele almışlardır. Ormrod'da (2015, s. 364) metni tekrar okumanın izleme bağlamında üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder becerisinin bilişsel olarak belirlenmesi sözü geçen çalışmayla çelişmektedir. Sonuçların çelişmesi çalışmaların katılımcılarının beceriyi sergileme amaçlarının farklı olmasından veya katılımcı grubunun özelliklerinden kaynaklanmış olabilir.

Sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerden ilki "önermeyi sembolik olarak yazar." becerisidir. Bu beceri katılımcıların önermeyi okuma sürecinde sergiledikleri ve cebir ispatları için gerekli bir beceri olup üst düzey bilişsel beceriler gerektiremediğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Hanna (1995) ve Fukawa-Connelly (2012) formel ispat için sembolik ifadenin bilgi bağlamında temel bir beceri olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda "Önermeyi sembolik yazar." becerisinin bilişsel beceri olarak belirlenmesinin ilgili çalışma tarafından desteklendiği söylenebilir.

Sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen bir başka bilişsel beceri "önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür" becerisidir. Önermeyi tutarsız forma dönüştürme önermeyi daha karmaşık bir yapıya getirmektedir. Bu bağlamda bu beceri bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Bruning ve diğerleri (2014, s. 313) de problem çözmede soruları tutarsız forma dönüştürmenin anlamayı zorlaştırdığını ve dil ile ilgili sorunlar yaşanmasına neden olabileceğini ifade etmiştir. Bu anlamda önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür becerisinin bilişsel olarak değerlendirilmiş olmasının ilgili çalışma tarafından desteklendiği söylenebilir.

Sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen bir başka bilişsel beceri "Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder." becerisidir. Bu beceri herhangi bir üst bilişsel aktivite gerektirmediğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Aydemir ve Kubanç (2014) ilkokul öğrencilerinin problemi kendi cümleleriyle yazmalarının üst bilişsel olduğunu tespit etmişlerdir. Cozza ve Oreshkina (2013) 10 yaş çocuklarıyla yaptıkları kültürler arası çalışmasında problemi anlamak için kendi cümleleriyle yazmanın üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Schraw ve Dennison'da (1994) önermeyi

okuduktan sonra kendi cümleleriyle yazma ifadesinin üst bilişsel beceri olduğunu belirtmiştir. Demir'de (2013) sınıf öğretmeni adaylarının ders çalışma sürecinde bir bilgiyi kendi el yazılarıyla yazmalarının üst bilişsel olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda "Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder." becerisinin bilişsel olarak belirlenmesi sözü geçen çalışmanın sonuçlarıyla çelişmektedir. Ancak bir beceri bir kişi için bilişsel iken başka bir kişi için üst bilişsel olabilir. Bu anlamda ilgili beceri sözü geçen çalışmalarda üst bilişsel olmasına karşın bu çalışmada bilişsel olarak sergilenmiştir.

Sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerden bir diğeri "Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder." becerisidir. Bu beceri sezgilere dayalı bir beceri olup, üst düzey bilişsel beceri gerektirmemektedir. Bu nedenle bu beceri bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Smith ve Kosslyn (2014, s. 166) sezgilerin problemlerin algoritmalar kullanılarak kesin sonuca ulaştırılamadığında kullanıldığını ifade etmiştir. Bu nedenle bu ifadenin çalışmada elde edilen bulguyu desteklediği söylenebilir. Selçioğlu-Demirsöz (2014) sezgisel bilginin üst bilişsel bilgi türlerinden biri olduğunu ifade etmiştir. Plotnik (2009, s. 308) sezgisel olarak doğruluğunu hissetmenin akıl yürütmeye dayalı yaratıcı bir beceri olduğunu belirtmiştir. Özdemir ve Sarı (2016, s. 658) farkında olunarak yapılan sezgisel akıl yürütmenin durumsal bilgi bağlamında üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Bu bulgular çalışmada önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder becerisinin bilişsel olarak değerlendirilmesiyle çelişiyor gibi görünmektedir. Ancak yazarların ifadeleri incelendiğinde akıl yürütme veya farkında olmaya vurgu yaptıkları anlaşılmaktadır. Bu nedenle söz konusu durum çelişki olarak düşünülmemelidir. Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder becerisinin bilişsel olarak elde edildiğinin belirlenmesi ilgili yazarın ifadesi ile çelişmektedir. Araştırmacı bu çıkarımı alan yazına dayalı olarak yapmış; ancak herhangi bir uygulama bulgusuna dayandırmamıştır. Bu anlamda çalışmada önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder becerisini sergileyen katılımcıların üst düzey bilişsel beceri kullanmamış olması bu becerinin bilişsel olmasını desteklemektedir. Garofalo ve Lester (1985) sezgisel becerilerin bilgisinin ve farkındalığının üst bilişsel beceri olduğunu ve bireyin problem çözmesini kolaylaştırdığını ifade etmiştir. Ancak sezgisel olarak doğruluğunu hissetme sezgisel beceri bilgisini ve farkındalığını içermediğinden bu durumda çalışmada elde edilen sonuç için bir çelişki olarak görülmemelidir.

Sadece cebir alanında bilişsel olarak sergilendiği belirlenen bir diğer beceri "İspatın anahtar kavramlarını belirler." becerisidir. Bu beceri çalışmada genel olarak üst bilişsel olarak tespit edilmişken; sadece cebir sorularının ilkinde bilişsel olarak sergilendiği belirlenmiştir. Şahin'de (2016) matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yaparken ispatın anahtar kavramlarını belirlediklerini saptamıştır. Bruning ve diğerleri (2014, s. 166) anahtar kavramları belirlemenin alışılagelmişin dışında tarzda sorulan sorularda bireyi hata yapmaya yönelteceğini ifade etmiştir. Nitekim cebirin ilk önermesinde böyle olmuş ve katılımcıların beceriyi bilişsel olarak sergiledikleri anlaşılmıştır. Ayrıca Raman (2003) ispatın anahtar kavramını belirlemenin sezgisel bir durum olduğunu ifade etmiştir. Bu anlamda ispatın anahtar kavramını belirler becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesinin Raman'ın (2003) çalışması ile desteklendiği söylenebilir.

Sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerden sonuncusu "ispatın hipotez ve hükmünü belirlemek için önermenin altını çizer" becerisidir. Çalışmada bu becerinin sergilendiği diyalogda katılımcının beceriyi otomatikleşmiş bir beceri olarak gerçekleştirdiği anlaşıldığından beceri bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Erdem (2005) metni okurken altın çizmenin hedefleri belirleme açısından önemli olduğunu; ancak bu becerinin otomatikleşmiş beceri haline getirildiğinde gerekli olmayan bölümlerinde altının çizilebildiğini ifade etmiştir. Çalışmada "İspatın hipotez ve hükmünü belirlemek için önermenin altını çizer." becerisinin bilişsel olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışma ile örtüştüğü söylenebilir.

Çalışmada bilişsel beceriler temasında ulaşılan ikinci kategori "önermenin altını çizme" kategorisidir. Bu kategori geometri alanında tespit edilmiş olup, cebir alanında sergilenmediği belirlenmiştir. Bu kategoride yer alan kodlardan birisi cebir sorularının ikincisinde sergilenmekte olup, ilgili kodu sergileyen katılımcının sergilediği beceri ispat önermesini okuma ile daha yakından ilgili olduğundan ispat önermesini okuma kategorisinde değerlendirilmiştir. Ancak ilgili kodun tartışması bu bölümde yer almaktadır.

Bu kategoride sadece geometri önermelerinde sergilendiği belirlenen becerilerden ilki "Önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer" becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların beceriyi sergilerken üst

düzey bilişsel beceri kullanmadıkları belirlendiğinden bilişsel beceri bağlamında değerlendirilmiştir. Arslan ve Senemoğlu (1998) metin üzerinde tekrar çalışma yapılması için altını çizmenin önemli olduğunu ve bunun bilişsel bir süreç olduğunu ifade etmişlerdir. Hata yaptığı bölümün altının çizilmesi önerme üzerinde tekrar çalışmayı gerektirdiğinden önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer becerisinin bilişsel beceri olarak belirlenmesini dolaylı olarak desteklemektedir.

Sadece geometri önermelerinde sergilendiği belirlenen bir diğer beceri "Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer" kodudur. Bu beceri katılımcılar için otomatikleşmiş bir beceri olduğundan bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Arslan ve Senemoğlu (1998) belli bilgilerin seçilmesinde altını çizmenin başarıya ulaşmada önemli bir bilişsel beceri olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer becerisinin bilişsel beceri olarak belirlenmesinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Hem geometri hem de cebir sorularında sergilendiği belirlenen becerilerden birisi "önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer" becerisidir. Bu beceri katılımcılar için otomatikleşmiş bir beceri olduğundan bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Somuncuoğlu ve Yıldırım (1998) metindeki bilgiyi okurken önemli bilginin altını çizmenin yüzeysel anlamda bilişsel beceri olduğunu belirtmiştir. Yang'da (2012) ispatın önemli yerlerini belirlemek için altını çizmenin bilişsel beceri olduğunu belirtmiştir. Çalışmada önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer becerisinin bilişsel beceri olarak belirlenmesi sözü geçen çalışma tarafından desteklenmektedir. Demir (2013) ise sınıf öğretmeni adaylarının ders çalışma sürecinde önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizmelerinin üst bilişsel beceri olduğunu belirlemiştir. "Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer." becerisinin bilişsel olarak değerlendirilmesinin bu çalışmanın sonuçlarıyla çeliştiği söylenebilir.

Çalışmada bilişsel beceriler temasında ulaşılan üçüncü kategori "şekil çizme" kategorisidir. Bu kategori sadece geometri alanında tespit edilmiştir.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen becerilerden ilki "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." becerisidir. Bu beceri geometri sorularının çözümü için gerekli olup katılımcılar tarafından otomatikleşmiş beceri olarak gerçekleştirilmiştir. Bu nedenle bu beceri bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Yang (2012) önermeyi anlamak

için şekil çizmenin açıklama bağlamında bilişsel beceri olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer becerisinin bilişsel beceri olması sözü geçen çalışmayla örtüşmektedir. Ormrod (2015, s. 354) ve Schraw ve Dennison (1994) ise anlamak için şekil veya diyagram çizmeyi üst bilişsel beceri olarak değerlendirmişlerdir. Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışma ile çeliştiği söylenebilir. Bu çelişkinin nedeni yazarların çalışmayı nicel ölçek üzerinden yapmasından kaynaklanıyor olabilir.

Elde edilen bir diğer beceri ise "Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür." becerisidir. Beceri derinlemesine düşünme gerektirmediğinden bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Türnüklü, Gündoğdu-Alaylı ve Akkaş'da (2013) öğretmen adaylarının dörtgenler konusundaki şekil çizme becerilerini incelediği çalışmada katılımcıların tanımlara uygun olarak şekil çizmede güçlük yaşadıklarını belirlemişlerdir. Bu bağlamda geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesi ilgili çalışmalarla desteklenmektedir.

Bu kategoride geometrinin her iki önermesinde de sergilendiği belirlenen beceri "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." becerisidir. Bu beceri katılımcıların önermeyi anlaması için otomatikleşmiş bir beceri olduğundan bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. van Garderen (2006, s. 81) problem çözme sürecinde şekil çizmenin temel amaçlarından birinin soruyu anlaşılır hale getirerek hayal etmeyi kolaylaştırmak olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle ilgili beceri şekil çizmenin amaçlarında beklenen bir beceri olup üst düzey bilişsel beceriyi gerektirmemektedir. Somutlaştırma amacıyla şekil çizer becerisinin bilişsel olarak değerlendirilmesinin ilgili çalışma ile desteklendiği söylenebilir. Aksine Demir (2013) şekil çizerek zihninde canlandırmanın üst bilişsel beceri olduğunu ifade etmiştir.

Şekil çizme kategorisinde sadece ilk soruda sergilendiği belirlenen beceri "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." becerisidir. Bu beceri bireylerin otomatikleşmiş becerisinin bir ürünü olup bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Altun ve Arslan (2006) problem çözme öğretimi üzerine yaptıkları çalışmada katılımcılardan bazılarının şekil çizdiği ancak şekli çözüm sürecinde kullanmadığını tespit etmişlerdir. Zazkis ve diğerleri (2015) ispat yapmada şekil

çizmenin öğrencilerin farkında olmadan sergilediği bir beceri olduğunu belirtmişlerdir. Bu bağlamda önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer becerisinin ilgili çalışmanın sonuçlarıyla örtüştüğü söylenebilir. Komatsu (2016) önermenin varsayımlarının şekil çizme için uygun olmadığı durumlarda şekil çizme uğraşının ispat yapmayı güçleştirdiğini belirlemiştir. Bu bağlamda "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." becerisinin bilişsel beceri olarak ele alınmasının da alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Şekil çizme kategorisinde sadece ikinci soruda sergilendiği belirlenen beceri "İspat sürecinin aşaması olarak şekil çizer." becerisidir. Bu beceride katılımcıların şekil çizmeyi ispat sürecinin bir adımı olarak gördüklerini ve otomatikleşmiş beceri olarak sergilenmiştir. Bu nedenle beceri bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Shigematsu ve Sowder (1994) şekil çizmenin sözel problem çözme için bir çözüm stratejisi olabileceğini ifade etmiştir. Bu bağlamda ispat sürecinin aşaması olarak şekil çizer becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilebilmesi alan yazınla örtüşmektedir.

Çalışmada bilişsel beceriler temasında ulaşılan diğer kategori "doğruluğunu değerlendirme" kategorisidir. Bu kategori hem geometri hem de cebir alanında tespit edilmiştir.

Bu kategoride hem geometri hem de cebir önermelerinde sergilendiği belirlenen becerilerden ilki "Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceri katılımcıların bir karasızlık durumunu simgelediğinden yani kendilerine yeterince güvenmedikleri ve yaptıklarından emin olmadıklarını gösterdiğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Dede ve Karakuş (2014) ritüel ispat şemasına sahip olan öğrencilerin matematiksel ispatın doğruluğundan ya da geçerliğinden emin olamadıklarını belirtmiştir. Doruk (2016) ilköğretim matematik öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışmada katılımcıların ritüel ispat şemasına göre gerekçelendirme yaptıklarını belirlemiştir. Harel ve Sowder (1998, s. 246) sembolik ifadeler ve matematiksel notasyonlar yönünden eksik olan bu ispat şeması matematiksel ispatın tamamlanması için yeterli olmadığını ifade etmiştir. Martin ve Harel (1989) ise daha keskin bir dille ritüel ispatı yanlış ispat olarak belirtmişlerdir. Doruk ve Kaplan (2015) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının ispat yaparken matematiksel dil ve sembolleri kullanmaktan uzak olduklarını ifade etmiştir. Bu bağlamda ritüel ispat

şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir becerisinin bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Hem geometri hem de cebir ispatlarında sergilendiği belirlenen bir başka bilişsel beceri "Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. İlgili beceri katılımcıların rasgele verdikleri birkaç örnekle önermenin sınanmasına dayalı olduğu için bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Şahin (2016) öğretmen adaylarıyla yürüttüğü çalışmada öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yaparken örnekler yoluyla doğrulama yaptığını belirlemiştir. Alan yazında ispat şemalarını incelemeye yönelik yapılan çalışmalarda dönüşümsel ispat şemasının ispat şemalarının farkında olunmasını gerektirdiği belirtilmiştir (Dede ve Karakuş, 2014; Harel ve Sowder, 1998, s. 261). Bu bağlamda dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir becerisinin sözü geçen çalışmalarla çeliştiği söylenebilir. Ancak Harel ve Sowder (1998, s. 262) bu ispat şemasına sahip olan bireylerin sembolik ifade kullanmadan genellemeye ulaştıklarını ifade etmiştir. Bu durum ispat için yeterli olmadığından becerinin bilişsel olarak değerlendirilmesi daha uygun olacaktır.

Geometri ve cebir önermelerinde sergilendiği belirlenen bir başka beceri "Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceri dönüşümsel ispat şemasından farklı olarak sistematik örneklerle veya kritik örneklerle doğrulama yapmayı gerektirmektedir (Radford, 2008). Dede ve Karakuş (2014) tümevarımsal ispat şemasına göre ispatını gerekçelendiren bireylerin sınırlı örneklerle beraber kümenin tümüne genelleme yaptıklarını belirtmiştir. Smith ve Kosslyn (2014, s. 429) tümevarımsal akıl yürütmenin bilginin doğruluğu hakkında kesin bir sonuç vermediğini; ancak genel bir öngörü oluşturabileceğini ifade etmiştir. Goldstein (2013, s. 624) tümevarımsal akıl yürütmenin genellikle farkında olmadan yapılan bir beceri olduğunu ifade etmiştir. Martin ve Harel (1989) öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmada öğretmen adaylarının yoğun bir şekilde bu beceriyi sergilediklerini belirlemiştir. Bu doğrultuda elde edilen becerinin bilişsel olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışmalarca desteklendiği söylenebilir. Solso ve diğerleri (2014, s. 518) ise bireyin tümevarımsal akıl yürütme yapmak için geçmiş deneyimlerinden yararlanarak akıl yürütme ve çıkarım yapmasını gerektiğini belirtmiştir. Bu anlamda sözü geçen çalışmanın tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir becerisinin bilişsel olarak değerlendirilmesi ile çeliştiği söylenebilir.

Hem geometri hem de cebir önermelerinde sergilendiği belirlenen bir diğer bilişsel beceri "Otoriter ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceri kişinin üst düzey akıl yürütme becerisini gerektirmeyip bir otoriteye dayalı değerlendirme yapmayı gerektirdiğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Nool (2012) matematik öğretmen adaylarının rutin olmayan problemleri çözme sürecinde formül ve kurallardan yararlanarak çözüme gitmeye çalıştıklarını belirlemiştir. Dede ve Karakuş (2014) bu becerinin sorgulama yapmayı gerektirmediği katılımcıların ders kitabı veya öğretmenin ifadesine dayandırarak değerlendirme yaptığını belirtmiştir. Aydoğdu-İskenderoğlu (2016, s. 69) bu ispat şemasına sahip bireylerin daha çok kural veya formül uygulayan ezbere ispat yapan bireyler olduğunu belirtmiştir. Bu anlamda ilgili becerinin bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir. Ancak Harel ve Sowder (1998, s. 247) ilköğretim öğrencileriyle yaptığı çalışmada bu ispat şemasının en sık sergilenen beceri olduğunu ifade etmişlerdir. Bu çalışmada ise otoriter ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir becerisinin çok sık sergilenmediği belirlenmiştir.

Bu kategoride geometri ve cebirde ortak olarak sergilendiği belirlenen son bilişsel beceri "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar." becerisidir. Bu beceri kişinin kendini değerlendirmesi, sorgulama yapması gibi değerlendirme yöntemlerini içermediğinden bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Şahin'de (2016) matematik öğretmeni adaylarının ispat sürecinin doğruluğunu araştırmacıya sorduğunu belirlemiştir. Bu anlamda ispat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar becerisinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde sadece geometri ispatlarında sergilendiği belirlenen becerilerden ilki "İspatı tamamladıktan sonra en başa dönerek doğruluğunu kontrol eder." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcının beceriyi kendini izleme amacıyla yapmadığı, aksine otomatikleşmiş bir beceri olduğu için bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Antonietti ve diğerleri (2000) problem çözme süreci için çözümü tamamlayıp kontrol etmenin üst bilişsel beceri olduğunu ifade etmiştir. İspatı tamamladıktan sonra en başa dönerek doğruluğunu kontrol eder becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesi alan yazınla çelişmektedir. Ancak bu çalışmada beceriyi sergileyen katılımcı otomatikleşmiş beceri olarak sergilediği için becerinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesi uygun görülmüştür.

Bu kategoride sadece geometri ispatlarında sergilendiği belirlenen bir diğer bilişsel beceri "Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder." becerisidir. Bu bilgi katılımcılar için otomatikleşmiş beceri olduğundan bilişsel beceridir. Dede ve Karakuş (2014) öğrencilerin bilginin doğrulamasını yaparken ezberlediği formüllere dayandırarak doğrulama yapabileceğini ancak bunun eğitimsel açıdan bir anlam ifade etmediğini belirtmiştir. Bu bağlamda ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğrulunu kontrol eder becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışma ile desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenen ilk bilişsel beceri "İşlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu beceriyi sergileyen katılımcıların otomatikleşmiş beceri olarak işlemlerini kontrol ettiği ve doğruluğunu/yanlışlığını değerlendirdiği görülmüştür. Öztürk ve diğerleri (2014) üstün yetenekli öğrencilerle problem çözmeye yönelik yaptıkları çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin değerlendirme sürecinde işlemlerini kontrol ettiklerini belirlemiş ve bu becerinin üst bilişsel olduğunu ifade etmişlerdir. Bu anlamda işlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirir becerisinin bilişsel beceri olarak ele alınmasının ilgili çalışmanın sonuçlarıyla çeliştiği söylenebilir. Bu beceri üstün yetenekli öğrenciler için üst bilişsel olsa da öğretmenler için bilişsel olarak belirlenmiştir.

Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenen bir başka bilişsel beceri "İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir." becerisidir. Bu becerinin katılımcılar için üst düzey düşünme becerisi gerektirmediği belirlendiğinden bilişsel beceri kapsamında değerlendirilmiştir. Özkaya ve İşleyen (2012) yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda problem çözerken işlemlerini tekrar yaparak doğruluğunu değerlendirdiğini belirlemiştir. Ancak yazarlar becerinin hangi düzeyde olduğuna dair bir açıklamaya ulaşmamışlardır. Bu nedenle işlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir becerisinin sergilenmesinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Bu kategoride sadece cebir sorularında sergilendiği belirlenen birbirine çok yakın olan bilişsel becerilerin ikisi "Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir." ve "Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak

ispatlayamaz.” becerileridir. Bu beceriler matematiksel ispatın geçerliğini sağlamadığından ve üst düzey düşünme becerisi gerektirmeyip sadece iç sezilere dayalı olduğundan bilişsel olarak ele alınmıştır. Samper ve diğerleri (2016) yaptıkları çalışmada katılımcıların sezgisel olarak ispat yapmaya çalıştıklarını belirlemiştir. MacDonald (1973) sezgisel ispatın hafife alındığı kadar kolay olmadığını belirtmiş ancak bu ispat türünün öğretici bir rol üstlenmesine karşın gerçek anlamda bir ispat niteliği taşımadığını belirtmiştir. Bu doğrultuda sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir becerisinin bilişsel beceri olarak nitelendirilmesinin sözü geçen çalışmayla desteklendiği görülmektedir.

Çalışmada bilişsel beceriler temasında ulaşılan diğer kategori “strateji belirleme” kategorisidir. Bu kategori hem geometri hem de cebir alanında tespit edilmiştir.

Bu kategoride sergilendiği belirlenen becerilerden ilki “Ezberlediği yolla ispat yapar.” becerisidir. Bu beceri hem geometri hem de cebir önermelerinde sergilenmektedir. Bu beceri bireyin hafızasına dayalı bir beceri olup, katılımcıların hatırlayabildikleri kadarıyla yapabileceklerini göstermektedir. Bu nedenle beceri bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Hoffer (1981) ve Güven ve diğerleri (2005) geometri ispatlarında öğrencilerin teoremlerin ispatlarını mantıksal anlamadıklarını, bunun yerine ders geçmek için ezberlediklerini tespit etmişlerdir. Şahin’de (2016) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının cebir ispatlarını ezberleyerek yaptığını belirlemişlerdir. Bu anlamda ezberlediği yolla ispat yapar becerisinin bilişsel beceri olmasının alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Bu kategorideki bir başka bilişsel beceri “Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.” becerisidir. Bu beceri hem geometri hem de cebir önermelerinde sergilenmiştir. Sözel olarak önermenin ispatını ifade etme, matematiksel ispatın doğrulanması için bir anlam ifade etmediğinden bu beceri bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Şahin (2016) öğretmen adaylarıyla yürüttüğü çalışmada katılımcıların sözel olarak önermenin ispatını ifade ettiklerini belirlemiştir. Nool (2012) matematik öğretmen adaylarının rutin olmayan problem çözme sürecinde problemi sonuca ulaştıramadıklarında sözel olarak çözüm yolunu açıkladıklarını belirlemiş ve bu becerinin üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Arslan ve Yıldız (2010) 11. sınıf öğrencileriyle yaptıkları çalışmada katılımcıların varsayımda bulunurken sözel olarak ifade edebildiklerini ancak sembolik

dilden uzak olduklarını belirlemiştir. Bu anlamda sözel olarak önermenin ispatını ifade eder becerisinin sözü geçen çalışmalarla desteklendiği söylenebilir.

Strateji belirleme kategorisinde sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen bilişsel becerilerin ilki "İspat yöntemlerini gözden geçirir." becerisidir. Bu beceriyi sergileyen katılımcıların beceriyi otomatikleşmiş olarak sergiledikleri anlaşıldığından bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Özdemir ve Sarı (2016, s. 659) stratejileri bilmenin bilişsel beceri olduğunu ifade etmiştir. Elde edilen bu bulgunun bahsi geçen yazarların ifadesiyle örtüştüğü söylenebilir. Öztürk ve diğeri (2014) yaptıkları çalışmada öğrencilerin ispat yöntemlerini kontrol ettiklerini belirlemiş ancak bu beceriyi üst bilişsel kontrol olarak değerlendirmişlerdir. Bulunan sonuç sözü geçen çalışmanın sonuçlarıyla çelişmektedir. Bu çelişki katılımcı düzeyinin farklılığından kaynaklanmış olabilir.

Bu kategoride sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen son beceri "Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılar önce bir yolu denemekte, sonuca ulaşamazsa başka bir yolu deneyerek sonuca ulaşmaya çalışmaktadır. Bu nedenle bu beceri bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Şahin (2016) matematik öğretmen adaylarının cebir ispatlarını yaparken deneme-yanılma yoluyla çözmeye çalıştıklarını belirlemiştir. Nool (2012) matematik öğretmen adaylarının rutin olmayan problem çözme süreçlerinde deneme-yanılma yoluyla ispat yaptıklarını belirlemiştir. Artz ve Armour-Thomas (1992) ve Cozza ve Oreshkina (2013) problem çözme üzerine yaptıkları çalışmada deneme yanılma yöntemini problem çözme sürecindeki bilişsel beceri olarak ele almışlardır. Bruning ve diğerleri (2014, s. 166) deneme-yanılma yönteminin problemlerin algoritmalar kullanılarak sonuca ulaştırılamadığında kullanılan sezgisel bir yol olduğunu belirtmişlerdir. Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışmalarla örtüştüğü söylenebilir. Demircioğlu ve diğerleri (2010) ise deneme yanılmanın problem çözme için üst bilişsel bir beceri olduğunu ifade etmişlerdir. Bu sonucun ise çalışmamızda elde edilen bulgu ile çeliştiği söylenebilir.

Strateji belirleme kategorisinde sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerden ilki "İspatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünmektedir." becerisidir. Bu

beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların beceriyi ezberlemek zorunda olduklarını düşündükleri anlaşıldığından beceri bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Güven ve diğerleri (2005) lise öğrencilerinin ispatı ezberleyerek yapmaları gerektiğini düşündüklerini belirlemiştir. Çalışmada elde edilen bu koda benzeyen diğer kod ezberlediği yolla ispat yapar kodu da bilişsel beceri olarak ele alınmıştır. Nitekim alan yazındaki çalışmalar incelendiğinde bu bulgunun bilişsel beceri olarak değerlendirilmesinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Strateji belirleme kategorisinde sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen diğer beceri "İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir." becerisidir. Öz-yeterlik bir görevle daha uzun süre meşgul olmayı ve matematikte bir problemi çözemediğinde daha uzun süre üzerine çalışmayı sağlamaktadır (Bruning ve diğerleri, 2014, s. 328). Bu beceri düşük öz-yeterlik içerdiğinden bireylerin önermeyle meşgul olma veya yapamadığında önermeyle ilgilenme süresini kısaltacaktır. Bu nedenle düşük öz-yeterlik üst bilişsel aktivite gerektirmeyip bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Ormrod (2015, s. 437) düşük öz-yeterliğe sahip olan bireylerin problemlerle uğraşmaya fazla zaman ayırmadıklarından başarılı olamadıklarını belirtmiştir. Öztürk, Akkan ve Kaplan (2014) yaptıkları çalışmada öğrencilerin çok azının problem çözümünde kendilerine güvendiklerini belirlemişlerdir. Bu doğrultuda ispat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesi sözü geçen çalışmalarla desteklenmektedir.

Çalışmada bilişsel beceriler temasında hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenen son kategori "işlem süreci" kategorisidir. Bu kategori hem geometri hem de cebir alanında tespit edilmiştir.

Bu kategoride hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerden ilki "Planına uygun ispat yapar." beceridir. Planına uygun ispat yapma becerisini sergilediği belirlenen katılımcıların bu beceriyi otomatikleşmiş beceri olarak sergiledikleri belirlendiğinden beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Veenman ve diğerleri (2006) uygun stratejiyi belirleyerek bu stratejiye uygun çözüm yapmanın üst bilişsel olduğunu ifade etmiş, ancak bu becerinin problem çözme adımlarını sıralamayı içermediğinde üst bilişsel olarak değerlendirilemeyeceğini belirtmiştir. Adebule ve diğerleri (2016) planını uygulama sürecinin işlemsel beceri gerektiren bir süreç

olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda planına uygun ispat yapar becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesinin ilgili çalışmalarla desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerden diğeri "Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir." becerisidir. Bu beceri işlemsel beceri olup üst düzey bilişsel aktivite gerektirmediğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Garofalo ve Lester (1985) ve Kanadlı ve Sağlam (2013) uygun ispat yöntemi seçtikten sonra planı uygulamanın üst bilişsel beceri olduğunu ifade etmiştir. Yazarlar bu durumu şöyle açıklamışlardır: bilişsel aktivitelerin yerine getirilmesi üst bilişsel beceridir. Bu doğrultuda doğru stratejinin seçilip uygulanması da üst bilişsel olarak değerlendirilebilir. Ancak yazarlar bu yoruma bir çalışma sonucunda değil literatür ışığında ulaşmışlardır. Bu çalışma da ise bu beceri katılımcıların sergilediği becerilerden elde edilmiştir.

İşlem süreci kategorisinde ulaşılan hem geometri hem de cebir sorularında sergilendiği belirlenen son bilişsel beceri "Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir." becerisidir. Bu beceri katılımcının seçtiği ve uyguladığı ispat yönteminin doğruluğu ile ilgili bir durumdur. Sözü geçen beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların beceriyi değerlendirmesi gerekmeyip, doğruluğuna araştırmacı tarafından karar verildiğinden bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Bu beceriyi öğretmenlerin öğretmen adaylarından daha fazla sergilediği saptanmıştır. Bruning ve diğerleri (2014, s. 167) doğru çözüm yolunu belirlemenin problemi çözüme ulaştırma için önemli olduğunu ve bu becerinin deneyimli öğretmenlerce genellikle düşünmeden sergilenirken göreve yeni başlayan öğretmenlerin düşünerek sergilendiği belirlenmiştir. Doruk ve Kaplan'da (2015) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde doğru ispat stratejisi seçip uygulamada yeterli olmadıklarını belirtmiştir. Bu bağlamda kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir becerisinin bilişsel olmasının ve öğretmenlerde öğretmen adaylarından daha fazla sergilenmesinin alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

İşlem süreci kategorisinde sadece geometri önermelerinde sergilendiği belirlenen beceri "İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür." becerisidir. Bu beceri katılımcıların ispata yönelik görüşlerini belirttiği bir kod olup, katılımcının geçmiş deneyimlerinden ulaşmış olduğu genel bir kanı durumunu içermektedir. Bu nedenle bu

beceri bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazın incelendiğinde yazarlar bireylerin belirli bir veya birkaç örnekten yola çıkarak genel bir kanıya ulaşmalarının üst düzey akıl yürütme gerektirmediğini ifade etmişlerdir (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 432; Solso ve diğerleri, 2014, s. 518). İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görme becerisinin bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

İşlem süreci kategorisinde sadece cebir önermelerinde sergilendiği belirlenen becerilerden ilki "İspat sürecinde lemmalarında ispatlanması gerektiğini düşünür." becerisidir. Bu beceri bireylerin ispat kavramına yönelik görüşlerini ifade eden bir düşünce olup üst bellek aktivitesi gerektirmediğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Dede ve Karakuş (2014) üniversite düzeyinde yapılan ispatlarda önceki teoremlerin kullanılmasının gerekli olduğunu ifade etmiştir. Bu görüşü çalışmada elde edilen sonucu destekler gibi görünse de arada küçük bir fark vardır. Bu fark çalışmadaki katılımcının ispatta geçen her teoremin ispatının yürütülen ispatın içerisinde yapılması gerektiğini düşünmesidir.

Bu kategoride cebir önermelerinde sergilenip geometri önermelerinde sergilenmeyen diğer beceri "Örüntü genelleme yapar." becerisidir. Örüntü genelleme bir ispat ifade etmeyip durumun doğruluğunu garanti etmeyeceğinden bilişsel beceri olarak ele alınmıştır. Tanışlı ve Özdaş (2009) örüntü genellemenin cebirsel düşünmeyi sağlayabileceğini, ancak örüntü genellemenin sınırlı elemana sahip küme üzerinde yapıldığını ifade etmiştir. Čadež ve Kolar (2015) genellemenin deneyim gerektirmeyen formel yollarla yürütülen tümdengelimsel akıl yürütme olduğunu ifade etmiştir. Bu anlamda örüntü genelleme yapmanın bilişsel beceri olarak belirlenmesinin sözü geçen çalışmalarla desteklendiği söylenebilir. Krutetskii (1976, s. 54) ise örüntü genellemenin üst düzey bilişsel beceri olduğunu ifade etmiştir. Bu bulgu sözü geçen çalışmanın sonuçlarıyla çelişmektedir.

Bu kategoride cebir önermelerinde sergilenip geometri önermelerinde sergilenmeyen son beceri "Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder." becerisidir. Bu beceri çalışmada bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Çünkü çalışmada katılımcılara verilen etkinliklerde yer alan önermeler doğrudur ve doğruluğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılar genellikle önermeyi yanlış anlamışlar veya yanlış işlem yapmışlardır. Barnard ve Tall'da (1997) matematik

öğretmenliği 1. sınıf öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada katılımcıların doğru önermelerde ispat önermesini yanlış olduğu gerekçesiyle reddettiklerini belirlemişlerdir. Güler ve Ekmekci (2016) yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının ispat önermesini reddederken zayıf gerekçeler sunduğunu belirlemiştir. Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder becerisinin bilişsel olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışmalarla desteklendiği söylenebilir.

Bu çalışmada ulaşılan son kategori "sezgisel kestirme yolları" kategorisidir. Bu kategori sadece cebir ispatlarında belirlenmiş olup, geometri ispatlarında tespit edilememiştir.

Bu kategoride ulaşılan ilk bilişsel beceri "Araç-amaç analizi yapar" becerisidir. Bu beceriyi sergileyen katılımcılar ispatı analitik düşünme yoluyla yapıp sonuçta birleştirmeye çalışmaktadırlar. Bu beceriyi sergileyen katılımcılar otomatikleşmiş beceri olarak yapmakta olup üst düzey düşünme becerisi kullanmamışlardır. Sağlam ve diğerleri (2009) öğretmen adaylarıyla yürüttüğü çalışmada katılımcıların bu stratejiyi kullandıklarını belirlemişlerdir. Ancak araştırmacılar araç-amaç analizi stratejisi kullanılarak yapılan problem çözümünün sonuca ulaştırılabilmesi için sürekli sorgulama becerisinin yapılması gerektiğini ifade etmiştir (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 419). Karagöz ve Çakır (2011) üniversite öğrencileriyle yaptıkları çalışmada katılımcıların problemi anlama sürecinde araç-amaç analizi yöntemini kullandıklarını belirlemiştir. Ancak yazarlar bu becerinin tahmine yönelik beceri olduğunu ifade etmişlerdir. Tahmin becerisinin üst bilişsel olduğu göz önüne alındığında çalışmada elde edilen bulgunun sözü geçen çalışma ile çeliştiği söylenebilir. Bruning ve diğerleri (2014, s. 166), Plotnik (2009, s. 309) ve Woolfolk-Hoy (2015, s. 577) araç-amaç analizinin problemin algoritmalar kullanılarak çözüme ulaştırılamadığında kesin sonuç vermeyen sezgiler yoluyla çözüme ulaştırılmasında kullanılan bir yol olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmanın katılımcıları araç-amaç analizini kullanırken herhangi bir sorgulama veya üst biliş becerisini kullanmadıklarından bilişsel beceri olarak ele alınmıştır.

Sezgisel kestirme yolları kategorisinde ulaşılan bir başka bilişsel beceri "Tepe tırmanışı yapar" becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların üst düzey akıl yürütme yapmadıkları bunun yerine en kısa yoldan hedefe ulaşmaya çalıştıkları bunu yaparken de genellikle doğru çözümden uzaklaştıkları saptanmıştır. Bu nedenle bu

beceri bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Smith ve Kosslyn (2014, s. 418) tepe tırmanışının her zaman amaca ulaştırabilen bir yol olmadığını ve bu yöntemde bireyin hedefe kısa yoldan ulaşmaya yönelebileceği böylece yanlış yapabileceğini belirtmiştir. Tepe tırmanışı yapar becerisinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışmalarla desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride her iki önermede de sergilendiği belirlenen son bilişsel beceri "Rasgele arama yapar." becerisidir. Bu beceri de hata yapma olasılığı yüksek olduğu için ve üst düzey akıl yürütme gerektirmediği için bilişsel beceri olarak değerlendirilmiştir. Samper ve diğerleri (2016) yaptıkları çalışmada öğrencilerin ispat yaparken kendiliğinden ilerleyen bir süreç içerisinde rasgele arama yaptıklarını belirlemiştir. Gerşil ve Alkaya (2011) rasgele arama yapar becerisinin amaca doğru ulaşmadaki en basit ancak amaca ulaşma garantisi en düşük olan yöntem olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca bu çözüm yolunun çok fazla zaman alacağına değinmiştir. Zamanın planlanması konusunda yetersiz olan bu stratejinin bilişsel beceri olarak değerlendirilmesinin bu anlamda sözü geçen çalışmayla desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride ulaşılan son bilişsel beceri "Her zaman amaca doğru ilerler." becerisidir. Bu becerinin sadece cebir önermelerinin ikincisinde sergilendiği belirlenmiştir. Beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların en kısa yoldan sonuca ulaşmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Bu beceri katılımcıların hedefi gördüklerinde kısa yoldan hedefe gitmelerini sağladığından arada yapılması gereken işlemlerin göz ardı edilmesine ve yanlış yapılmasına sebebiyet verebilir (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 417). Bu bağlamda her zaman amaca doğru ilerler becerisinin sözü geçen çalışma ile desteklendiği anlaşılmaktadır.

5.1.3. Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen becerilere yönelik tartışma

Üst bilişsel beceriler temasında hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerden oluşan kategorilerin ilki "işlemleri kolaylaştırma" kategorisidir.

Bu kategoride hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenen "İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır." ve "Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlar." becerileri ile sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel beceri "Değişken değiştirerek işlem kolaylığı sağlar." becerisidir. Bu beceri kişinin

sahip olduğu bilginin farkında olarak onu kolaylaştırmaya yönelik bir beceri olduğundan öz-düzenleme bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Bruning ve diğerleri (2014, s. 7) bireyin kendi becerisinin farkında olup bu becerileri düzenlemesini üst bilişsel öz-düzenleme olarak açıklamaktadır. Yüksel (2004, s. 334) bireyin hedefine ulaşmak için kendi becerilerini düzenlemesini öz-düzenleme olarak ifade etmiştir. Bu anlamda işlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır ve değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlar becerilerinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışmalarla desteklendiği söylenebilir.

İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde ulaşılan bir diğer üst bilişsel beceri "İspatın anahtar kavramını belirler." becerisidir. Çalışmada bu becerinin bilişsel ve üst bilişsel olarak sergilendiği belirlenmiştir. Bilişsel beceri olarak değerlendirilmesi önceki bölümde açıklanmış ve tartışılmıştır. Bu bölümde üst bilişsel olarak değerlendirilmesi tartışılmıştır. Alan yazında pek çok çalışmada anahtar kavramı belirleme becerisinin üst bilişsel olarak sergilendiği saptanmıştır (de Bruin, Kok, Lobbestael ve de Grip 2017; Demir, 2013; Katz ve Starbird, 2013, s. 96; Yang, 2012). Garofalo ve Lester (1985) yaptıkları çalışmada katılımcıların problem çözmede anahtar kavramların farkında olarak belirlemelerinin problemi çözüme ulaştıracağını ifade etmiştir. Yazarlar doğrudan üst biliş kavramına yer vermemiş olsalar da farkındalık ifadelerinden anahtar kavramı belirlemede üst biliş kavramını kastettikleri anlaşılmaktadır. Bu bağlamda katılımcıların üst bilişsel olarak ispatın anahtar kavramını belirler becerisini sergilemeleri sonucunun alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerin ilki "Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür." becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcıların bu beceriyi ispatı kolaylaştırmada bir unsur olarak gördükleri tespit edildiğinden beceri üst bilişsel temasına yerleştirilmiştir. Komatsu (2016) yapmış olduğu deneye dayalı çalışmanın sonucunda şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını, ispatı kabul etme veya reddetmeyi sağladığını belirtmiştir. Karpuz ve diğerleri de (2014) lise öğrencilerinin şekil çizerek ispatı kolaylaştırmaya çalıştıklarını belirlemiştir.

İşlemleri kolaylaştırma kategorisinde ulaşılan sadece geometri önermelerinde üst bilişsel olarak sergilendiği belirlenen beceri "İspatı kolaylaştırmak için sezgisel

kestirme yollarını kullanır" becerisidir. Aynı beceri bilişsel beceriler temasında da belirlenmiş ve o bölümde tartışılmıştır. Ancak alan yazında bu becerinin bilişsel beceri olduğuna yönelik ifadeler kullanılmıştır (Eysenck ve Keane, 2005, s. 441; Smyth ve McCabe, 2016). Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcının ispatı kolaylaştıracağını düşündüğü için İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır becerisini sergilediği belirlendiğinden beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır.

Bu kategoride sadece geometri sorularında sergilendiği belirlenen son üst bilişsel beceri "bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür" becerisidir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılar bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırmayı amaçladığından beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Solso ve diğerleri (2014, s. 553) bilginin temsilinin kullanılmasının bireyi ezbere yönelterek bireyin planlama ve tahmin gibi üst biliş aktivitelerini göz ardı edebileceğini ifade etmiştir. Bu nedenle bu becerinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla desteklenmediği anlaşılmaktadır. Ancak bu çalışmada katılımcılar ispatı kolaylaştırma amacıyla bu beceriyi sergilediğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir.

Üst bilişsel beceriler temasında sergilendiği belirlenen ikinci kategori "sorgulama" kategorisidir. Bu kategori hem geometri hem de cebir alanında belirlenmiştir.

Sorgulama kategorisinde geometri ve cebir alanların her ikisinde de sergilendiği belirlenen becerilerden ilki "ispatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar" becerisidir. Bu becerinin bir benzeri de sadece cebir alanında belirlenmiş olan "hedefini belirlemeye yönelik sorular sorar" becerisidir. Sorgulamaya dayalı olan bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Yang'da (2012) ispatın nasıl başlayıp sonuca ulaştığını bireyin kendine sormasının izleme bağlamında üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Aydın ve Ubuz (2010), Griffin, Wiley ve Salas (2013, s. 22) ve Schraw ve Dennison'da (1994) ispatın nasıl sonuca ulaştırılacağını düzenli olarak sorgulamanın üst bilişsel beceri olduğunu belirtmiştir.

Bu kategoride hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenen bir başka üst bilişsel beceri "İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendine sorar." becerisidir. Sorgulamaya dayalı olan bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazında yaptığı işlemlerin doğruluğunu kendisine sorma becerisinin üst bilişsel

olduğuna yönelik bulgular mevcuttur (Demir, 2013; Jiang ve diğerleri, 2016; Kleitman ve Stankov, 2007; Pintrich ve Groot, 1990; Schraw ve Dennison, 1994; Topçu, 2005). Bu nedenle ispat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendisine sorar becerisinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla desteklendiği ifade edilebilir.

Sorgulama kategorisinde geometri ve cebir alanlarında sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerden bir diğeri "yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar" becerisidir. Bu beceri yaptığı işlemlerin neden ve niçin doğru olduğunu sorgulamasına dayalı olduğundan üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Bir bilginin nasıl doğru olduğunu sorma bildirimsel, neden ya da niçin doğru olduğunu sorgulama ise durumsal bilgi bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir (Desoete ve diğerleri, 2001). Woolfolk-Hoy (2015, s. 578) Bir bilginin nasılını, nedenini ve niçinini değerlendirmenin problem çözmeyi sağlayabileceğini belirtmiştir. Bu anlamda yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar becerisinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Bu kategoride her iki alanda da sergilendiği belirlenen başka bir üst bilişsel beceri "kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür" becerisidir. Bu beceri sorgulamaya dayalı bir beceri olup kişinin kendi ispat sürecini izlemesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Aydın ve Ubuz (2010), Jiang ve diğerleri (2016) ve Schraw ve Dennison'da (1994) periyodik olarak kendine sorular sorarak ilerlemenin üst bilişsel beceri olduğunu belirtmiştir.

Sorgulama kategorisinde sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen üst becerilerin ilki "ispatın doğrulamasını yaparken tüm durumları düşünüp düşünmediğini sorgular" becerisidir. Bu beceride katılımcının farkında olarak sorgulama yapmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Alan yazında bu becerinin üst bilişsel olduğuna yönelik bulgular mevcuttur (Schraw ve Dennison, 1994; Aydın ve Ubuz, 2010). Bu bağlamda ilgili becerinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla örtüştüğü anlaşılmaktadır.

Sorgulama kategorisinde sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen son üst bilişsel beceri "nerede hata yaptığı kendine sorar" becerisidir. Bu becerinin benzeri bir beceri de cebir alanında saptanmıştır. "İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar" olarak isimlendirilen bu beceriyi geometrideki beceriden ayıran olup olmadığına

yönelik bir karara varılmasıdır. Yani cebir alanında hata olup olmadığına yönelik sorgulama yapılırken, geometri alanında hatanın nerede yapıldığı sorgulanmaktadır. Bu beceriler de sorgulamaya dayalı olduğundan üst bilişsel beceriler kapsamında ele alınmıştır. Bondy'de (1984) bir amaca ulaşılamadığında nerede hata yaptığını sormanın üst bilişsel kontrol olduğunu belirtmiştir.

Sorgulama kategorisinde sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel beceri "Önermeyi anlamak için sorular sorar." becerisidir. Önermeyi anlamaya yönelik sorgulama yapmayı gerektiren bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Nool (2012) matematik öğretmen adaylarının rutin olmayan problem çözme sürecinde problemi anlamak için kendilerine sorular sorduğunu belirlemiştir. Bu becerinin üst bilişsel olduğunu da vurgulamıştır. Alan yazın incelendiğinde yapılan çalışmalarda anlamak için kendisine sorular sormasının üst bilişsel beceri olduğu anlaşılmaktadır (Pintrich ve diğerleri, 1991, s. 24; Schraw ve Dennison, 1994; Talebinezhad ve Negari, 2007; Yang, 2012). Bu anlamda önermeyi anlamak için sorular sorar becerisinin üst bilişsel olduğunun alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride sadece cebir alanında sergilendiği becerilerin sonuncusu "işlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar" becerisidir. Bu beceri kişinin kendine sorular sorarak doğruluğunu kontrol etmesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Marca'da (2014) bireyin kendi yaptığı işlemlerin doğruluğunu sorgulamasının bilişin düzenlenmesi anlamında üst bilişsel beceri olduğunu belirtmiştir.

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir diğer kategori "farkındalık" kategorisidir. Bu kategori hem geometri hem de cebir önermelerinden elde edilen becerilerde saptanmıştır.

Farkındalık kategorisinde geometri ve cebir alanlarının her ikisinde de sergilendiği belirlenen becerilerin ilki "ispat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır" becerisidir. Bu beceri durumsal bilgi bağlamında üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazın incelendiğinde bir stratejiyi nasıl ve ne zaman kullanacağının farkında olmanın üst bilişsel beceri olduğunu belirten çalışmalar mevcuttur (Akın, 2013, s. 146; Mokhtari ve Reichard, 2002; Schraw ve Dennison, 1994). Mokhtari ve Reichard (2002)

stratejinin farkında olmanın üst bilişsel olmasına karşın sonuca ulaşmayı garanti etmeyeceğini ifade etmiştir.

Her iki alanda da sergilendiği belirlenen becerilerin diğeri "hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder" becerisidir. Bu beceri kişinin süreci izlemesi ve farkında olmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Yang (2012) hata yaptığında hata yaptığı bölümün belirlenmesinin üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Bondy (1984) çalışmasında üst bilişsel kontrol sürecinde nerede hata yaptığını kendine sorar becerisinin sergilendiğini belirlemiştir. Erdem (2005) kişinin bilişsel izlemesi olarak hatalarını fark edip düzeltme becerisi sergilediğini belirtmiştir. Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder becerisinin alan yazınla desteklendiği anlaşılmaktadır.

Geometri ve cebir alanlarının her ikisinde de sergilendiği belirlenen becerilerden bir diğeri "ispatın süreç olduğunun farkındadır" becerisidir. Katılımcıların mevcut önemli bir bilgiyi bildiklerinin farkında oldukları belirlenen bu katılımcıların üst bilişsel olarak beceriyi sergiledikleri yorumlanmıştır. Bruning ve diğerlerinin (2014, s. 7) öz-farkındalık olarak adlandırdığı bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmektedir. Carciofo ve diğerleri de (2017) bilinçli deneyim olarak adlandırdığı bu beceriyi üst bilişsel olarak ele almışlardır.

Her iki alanda sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerden bir diğeri "ispatı anlayarak yapar" becerisidir. Bu beceri de kişinin sahip olduğu bilginin farkında olmasını gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Şahin'de (2016) matematik öğretmen adaylarının cebir ispatlarını yaparken bilgiyi kavramsal olarak anlayabildiklerini belirlemiştir. Bondy (1984) ve Ormrod (2015, s. 353) kişinin kendi anlamasının farkında olmanın üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Bu anlamda ispatı anlayarak yapar becerisinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Farkındalık kategorisinde hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerin sonuncusu "Özdüşünüm becerisi sergiler"dir. Kişinin kendini değerlendirmesini gerekli kılan bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Alan yazında özdüşünüm becerisinin üst bilişsel olduğuna yönelik çalışmalar mevcuttur

(Genç ve diğerleri, 2016; Kitsantas ve Zimmerman, 2006). Özdüşünüm becerisi sergilerin üst bilişsel beceri olarak elde edilmesinin alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Bu kategoride sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerin ilki "İspatı öğretici cümleler kurar." becerisidir. İspatı öğretici cümleler kurması öğretmenin öğretimsel becerilerin farkında olduğunu göstermektedir. Bu nedenle beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Samper ve diğerleri (2016) yaptıkları çalışmada ispat öğreticilerinin öğretim sürecinde öğrencilerin ispat üzerinde düşünmesini beklemeden ispatı açıkladıklarını belirlemiştir. Yang ve Lin (2008) yaptıkları çalışmada matematik öğretmenlerinin öğrencilerin ispatı anlayabilmesi için ispatı okumayı öğrenmesi ve ispatta kullanılan terimlerle cümleleri anlaması gerektiğini belirtmiştir. İspatı öğretici cümleler kurar becerisinin sözü geçen çalışmayla desteklendiği söylenebilir.

Farkındalık kategorisinde belirlenen bir başka üst bilişsel beceri "Genelleme yaparken neden doğru olduğuna yönelik, onu doğru yapan durumları nedenleriyle sorgular." becerisidir. Bu beceri sadece geometri önermelerinde tespit edilmiştir. Katılımcıların doğruluk nedeninin farkında olmasını gerektiren bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Alan yazında yaptığı işlemlerin nedenlerini sorgulamanın üst bilişsel olduğunu ifade eden çalışmalar mevcuttur (Desoete ve diğerleri, 2001; Woolfolk-Hoy, 2015, s. 578). İlgili bulgunun alan yazınla örtüştüğü söylenebilir.

Bu kategoride sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel beceri "önermede yer alan tüm verilerin ispatta kullanılacağının farkındadır" becerisidir. Bireyin ispatın geçerli olabilmesi için gerekli olan bir durumun farkında olmasını gerektiren bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Öztürk ve diğerleri (2014) ve Yildiz ve diğerleri (2011) problem çözme sürecinde gerekli bilgilerin seçilmesinin üst bilişsel olduğunu ifade etmiştir. Özdemir ve Sarı'da (2016, s. 658) bir görevde verilen bilgilerin farkında olunarak düzenlenmesinin üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Bu bağlamda önermede yer alan tüm verilerin ispatta kullanılacağının farkındadır becerisinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin sözü geçen çalışmalarla desteklendiği ifade edilebilir.

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir başka kategori "planlama" kategorisidir. Bu kategorinin de hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenmiştir.

Bu kategoride hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerin ilki "sonuca yönelik tahminde bulunur" becerisidir. Tahminde bulunmaya dayalı olan bu beceri kişinin hedefini belirlemesini gerektirip üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Alan yazında sonuca yönelik tahminde bulunmanın üst bilişsel beceri olduğunu gösteren pek çok çalışma mevcuttur (Artz ve Armour-Thomas, 1992; Cozza ve Oreshkina, 2013; Kaplan ve Duran, 2015; Özdemir ve Sarı, 2016, s. 660; Pativisan, 2006). Sonuca yönelik tahminde bulunma becerisinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla desteklendiği anlaşılmaktadır.

Planlama kategorisinde her iki alanda da sergilendiği belirlenen bir başka üst bilişsel beceri "ispata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir" becerisidir. Bu beceri de katılımcıların hedefini belirlemesine yönelik bir beceri olup üst düzey bilişsel beceri kullanmasını gerektirmektedir. Bu nedenle üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Zazkis ve diğerleri (2016) matematikçilerin ispat yapma süreçlerini incelemeye yönelik yürüttükleri çalışmada katılımcıların ispat için başlangıç noktası seçtiklerini belirlemiştir. Aydemir ve Kubanç (2014) ve Schraw (1998) problem çözme sürecinde ne yapacağına yönelik hedef belirleyerek tahminde bulunmanın üst bilişsel beceri olduğunu belirtmiştir. İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir becerisinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla desteklendiği anlaşılmıştır.

Bu kategoride her iki alanda da sergilendiği belirlenen başka bir üst bilişsel beceri "ispatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar" becerisidir. Bu beceriye benzer başka bir üst bilişsel beceri "hedefini şekil üzerinde belirler ve ulaşmak istediği hükmü yazar" becerisidir. Planlamaya yönelik olan bu beceriler üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazında bir göreve başlamadan önce belli bir plan yapar becerisinin üst bilişsel olduğuna yönelik çalışmalar mevcuttur (Lesseig, 2016; Özdemir ve Sarı, 2016, s. 658; Schraw ve Dennison, 1994). Sözü geçen becerilerin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Planlama kategorisinde sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen becerilerin ilki "bir sonraki adıma geçmeden o adımda ne yapacağını düşünür" becerisidir. Süreci kontrol etmeyi ve izlemeyi gerektiren bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Yang'da (2012) ispat sürecinde bireylerin üst bilişsel olarak ispat adımlarında ne yapacağını düşündüğünü ve kontrol ettiğini belirlemiştir.

Planlama kategorisinde sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerin ilki "Planlama için kendine soru sorar" becerisidir. Bu beceriye yakın bir diğer beceride "soru sorarak hedefini belirler" becerisidir. Bu beceriler planlama ve hedef belirleme için sorgulama yapmayı gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Schraw ve Dennison (1994) kendini sorgulamaya yönelik bu tip soruların üst bilişsel beceriye yönelik sorular olduğunu ifade etmektedir.

Bu kategorideki bir diğer üst bilişsel beceri de "algısal set oluşturur" becerisidir. Algısal set oluşturma bir adımda çalışırken kendinden sonra gelecek adımları da tasarlama düşüncesini içerdiğinden ileri düzey akıl yürütme gerektirdiği düşünülmüştür. Bu nedenle beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Solso ve diğerleri (2014, s. 544) set oluşturmanın algıların netleşmesini ve düşünme becerisinin daha nitelikli olacağını belirtmiştir. Ormrod (2015, s. 415) algısal set oluşturmanın yeni yöntem kullanmada ya da bilgi oluşturmada etkili olduğunu ve problem çözmeyi kolaylaştıracağını belirtmiştir.

Bu kategoride sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen becerilerin sonuncusu "İspatı önce zihninde yapıp sonra kağıda döker" becerisidir. Bu beceri de zihni aktif olarak kullanıp, zihinsel olarak doğruluğunu kontrol etmeyi gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Yildiz ve diğerleri de (2011) zihinde çözüm yapıp, daha sonra kâğıda aktarılmasının üst bilişsel beceri olduğunu belirlemişlerdir.

Üst bilişsel beceriler temasında ulaşılan bir başka kategori "strateji belirleme" kategorisidir. Bu kategorinin hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği ortaya konulmuştur.

Strateji belirleme kategorisinde ulaşılan üst bilişsel becerilerin ilki "ispat türünü doğru olarak seçebilir" becerisidir. Bireyin üst düzey zihinsel beceri kullanmasını gerekli kılan bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazında stratejiyi doğru seçmenin üst bilişsel beceri olduğunu ortaya koyan çalışmalar mevcuttur

(Ormrod, 2015, s. 408; Öztürk ve diğerleri, 2014; Pativisan, 2006). İspat türünü doğru olarak seçer becerisinin üst bilişsel olmasının alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride ortaya çıkarılan yaratıcı düşünmenin süreci olan iki beceri "ıraksak düşünme yeteneğini kullanır" ve "yakınsak düşünme yeteneğini kullanır" üst bilişsel olarak bulunmuştur. Yaratıcı düşünme sürecinin aşamaları olarak tanımlanan bu iki beceri üst düzey düşünme becerisi gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Goldstein (2013, s. 592) yaratıcı düşünmenin daha çok ıraksak düşünmeyle bağdaştırıldığını, ıraksak düşünmenin de doğru düşünmeye yakınsamayı sağladığı ve yakınsak düşünmeyle karşılaştırıldığını belirtmiştir. Plotnik (2009, s. 310) ve Woolfolk-Hoy (2015, s. 976) yakınsak ve ıraksak soruların analiz, sentez ve değerlendirme gerektiren sorular olduğunu belirtmiştir. Schraw ve Dennison (1994) birkaç çözüm yolunun düşünülerek en uygun olanın seçilmesini üst bilişsel olarak açıklamıştır.

Strateji belirleme kategorisinde sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerden ilki "tümdengelimli akıl yürütür" becerisidir. Bireyin muhakeme yaparak sonuç çıkarmasını gerektiren bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Bu becerinin üst düzey akıl yürütme gerektiren bir beceri olduğuna yönelik alan yazında çalışmalar bulunmaktadır (Goldstein, 2013, s. 609; Woolfolk-Hoy, 2015, s. 977; Plotnik, 2009, s. 318). Smith ve Kosslyn (2014, s. 441) tümdengelimli akıl yürütmenin hatalara yol açabileceğini belirtmiştir. Bu durum sözü geçen bulgunun üst bilişsel olmasının ilgili yazarın ifadeleriyle çeliştiği seklinde yorumlanabilir.

Bu kategoride ulaşılan diğer üst bilişsel beceriler "Yazılı çözümden önce zihninde çözüm yapar.", "Soruyu okurken zihninde şeklini çizer." ve "İspat stratejisinin doğru olup olmadığını zihinsel olarak kontrol eder." becerileridir. Bu becerilerinde sadece geometri alanında sergilendiği belirlenmiştir. Bu beceri de bireyin üst düzey akıl yürütmesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Yildiz ve diğerleri de (2011) bu becerilerin üst bilişsel olduğuna yönelik bulgular elde etmiştir. Özdemir ve Sarı'da (2016, s. 658) seçtiği ispat stratejisinin farkında olarak doğruluğunu kontrol etmesinin üst bilişsel olduğunu belirtmiştir. Nool'da (2012) matematik öğretmeni adaylarının rutin olmayan problem çözme sürecinde problemi sonuca ulaştıramadığında stratejisini kontrol ettiğini belirlemiş ve bu becerinin üst bilişsel olduğunu belirtmiştir.

Strateji belirleme kategorisinde bulunan bir başka üst bilişsel beceri "Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler." becerisidir. Üst düzey akıl yürütmeye dayalı olan bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Barnard ve Tall (1997) ispat sürecinde bireylerin aşina oldukları sembolik ifadeleri kullanabildiklerini belirlemiştir. Akkan ve Çakıroğlu'da (2012) sembolik olarak verilen ifadelerde sembolik formüllere ulaşabildiklerini belirlemiştir.

Bu kategoride ulaşılan bir başka üst bilişsel beceri "Ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder." becerisidir. Bu beceri bireyin sistematik akıl yürütmesini sağladığından üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Solso ve diğerleri (2014, s. 504) bu yöntem için katılımcıların ilk olarak bir hipotez belirlendiğini, eğer hipotez çalışmazsa başka hipotezlerin belirlenip test edildiğini belirtmiştir. Smith ve Kosslyn (2014, s. 431) bu becerinin tümevarımsal akıl yürütme gerektiren bir beceri olduğunu belirtmiştir.

Çalışmada üst bilişsel beceriler temasında elde edilen bir başka kategori "kontrol etme" kategorisidir. Bu kategorinin hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenmiştir.

Kontrol etme kategorisinde geometri ve cebir alanlarında sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerin ilki "hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder" becerisidir. Bireyin koyduğu hedefe ulaşıp ulaşamadığını kontrol etmesine dayalı olan bu beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Schraw & Dennison'da (1994) hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol etmenin veya sorgulamanın üst bilişsel olduğunu belirlemiştir. Kaplan ve Duran'da (2015) öğrencilerin hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadıklarını kontrol ettiklerini belirlemiş ve beceriyi üst bilişsel olarak değerlendirmiştir.

Bu kategoride tespit edilen bir başka üst bilişsel beceri "aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir" becerisidir. Bu beceri de geometri ve cebir sorularının her ikisinde de sergilenmiştir. Bireylerin ispatı sembolik ifade etmesi ve yeterli gerekçelendirme yapmasına dayalı olan bu beceri üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Dede ve Karakuş (2014) bu ispat şemasının tümdengelimsel akıl yürütme gerektiren beceri olduğunu ifade etmişlerdir. Bu şemaya göre gerekçelendirme yapan bireyler yeni karşılaştıkları önerme ve ispatları da anlayıp, algılayabilirler. Bu nedenle diğer tüm ispat şemalarıyla karşılaştırıldığında en üstte yer alan ispat şeması olarak

tanımlanabilir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016, s. 78). Bu bağlamda aksiyomatik ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirmenin üst bilişsel olmasının alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Kontrol etme kategorisinde hem geometri hem de cebir alanında ulaşılan bir başka üst bilişsel beceri "bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder" becerisidir. Bu beceri kişinin belirlemiş olduğu hipotez ve hükmü kontrol etmeye yönelik beceri olduğundan üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Şahin'de (2016) matematik öğretmeni adaylarının cebir ispatlarını yaparken örneklerle beraber hipotezin doğruluğunu test ettiklerini belirlemiştir.

Bu kategoride ulaşılan bir başka üst bilişsel beceri "hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir" becerisidir. Becerinin hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenmiştir. Bu beceri kişinin ispat yapma sürecini izlemesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Kaplan ve Duran (2015) ortaokul öğrencileriyle yaptıkları çalışmada, öğrencilerin problem çözerken yanlış bir işlem yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol ettiğini belirlemiştir. Ayrıca becerinin üst bilişsel olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda sözü geçen becerinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Kontrol etme kategorisinde ulaşılan bir başka üst bilişsel beceri de "Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar." becerisidir. Hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenen beceri, çözüm sürecinin izlenmesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Nool (2012) matematik öğretmen adaylarının rutin olmayan problem çözme sürecinde problemi çözüme ulaştıramadıklarında en başa dönerek tekrar çözüm yaptıklarını belirlemiştir. Kaplan ve Duran'da (2015) ortaokul öğrencilerinin de işlemlerini kontrol etmek için üst bilişsel beceri olarak en baştan tekrar çözüm yaptığını belirlemiştir.

Kontrol etme kategorisinde sadece geometri alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerden birisi "İspatlama sürecinde işlemlerin doğruluğunu adım adım kontrol eder" becerisidir. Bu beceri de kişinin kendi ispat sürecini incelemesini içerdiğinden üst bilişsel beceri olarak ele alınmıştır. Kaplan ve Duran (2015) ortaokul

öğrencilerinin problem çözme sürecinde yazdığı işlemlerin her birini kontrol ederek ilerlediğini ve becerinin üst bilişsel olarak sergilendiğini belirlemiştir.

Kontrol etme kategorisinde sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel beceri ise "hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder" becerisidir. Bu beceri kişinin ispat sürecini kontrol etmesini ve izlemesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Fang ve Cox'da (1999) ispat stratejisinin belirlendikten sonra kontrol edilmesinin üst bilişsel beceri olduğunu belirlemiştir. Ormrod'da (2015, s. 408) problem çözme sürecinde kişinin kendini izleyerek gerektiğinde stratejisini değiştirmesinin üst bilişsel olduğunu ifade etmiştir.

Üst bilişsel beceri temasında geometri ve cebir alanlarının her ikisinde de belirlenen bir başka kategori "ilişkilendirme" kategorisidir.

İlişkilendirme kategorisinde sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerin ilki "ispat sürecinde şekiller ve semboller arasındaki ilişkiyi kurar" becerisidir. Becerinin hem geometri hem de cebir alanında sergilendiği belirlenmiştir. Bu beceri kişinin üst düzey akıl yürütmesini gerekli kıldığından üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Zazkis ve diğerleri (2016) de matematikçilerin ispat yapma sürecini incelemek amacıyla yürüttükleri çalışmada katılımcıların şekiller ve semboller arası bağlantı kurduklarını belirlemiştir. Alan yazın incelendiğinde şekil ve semboller arasında ilişki kurmanın üst düzey bilişsel beceri kullanımını gerektirdiğini belirten çalışmaların mevcut olduğu görülmektedir (Demir, 2013; Fischbein, 1993; Kaplan ve Öztürk, 2014; Karpuz ve diğerleri, 2014). Bu nedenle ilgili becerinin üst bilişsel olarak değerlendirilmesinin alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride ulaşılan bir başka üst bilişsel beceri "ispat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar" becerisidir. Geometri ve cebir alanlarının her ikisinde de sergilendiği belirlenen bu beceri de, bireyin üst düzey akıl yürütme becerisini gerektirmektedir. Ayrıca bireyin süreci izleyip takip etmesini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Alan yazında adımlar arasında ilişkilendirme yapmanın üst bilişsel beceri olduğunu gösteren pek çok çalışma mevcuttur (Artz ve Armour-Thomas, 1992; Cozza ve Oreshkina, 2013; Yang, 2012;). Bu doğrultuda ispat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar becerisinin üst bilişsel olmasının alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerin ilki "sorular sorarak ilişkilendirme yapar" becerisidir. Bu beceri sorgulama yapma ve akıl yürütmeyi gerektirdiğinden üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Özsoy (2008) soru sorma ve ilişkilendirme yapma becerilerinin bilginin içselleştirilmesi için önemli olduğunu belirtmiştir.

İlişkilendirme kategorisinde sadece cebir alanında sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerden diğeri "ilişkilendirme yapmak için düşünür" becerisidir. Beceri kişinin muhakeme yapma ve ilişkilendirme becerisini gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Schraw ve Dennison'da (1994) ilişkilendirme yapmak için değerlendirme yapmanın üst bilişsel olduğunu belirtmiştir.

Üst bilişsel beceriler temasında sadece cebir alanında belirlenen kategori "analojik akıl yürütme" kategorisidir. Bu kategori geometri sorularında sadece bir beceri olarak değerlendirilmiştir. Ancak cebir alanında analojik akıl yürütmenin farklı türleri de sergilendiğinden kategori oluşmuştur.

Analojik akıl yürütme kategorisinde her iki önermede de sergilendiği belirlenen üst bilişsel becerilerin ilki "Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar." becerisidir. Bu beceri kişinin daha önce kullanmış olduğu bir yöntemi yeni probleme uyarlamasını gerektirdiğinden muhakeme yapma ve ilişkilendirme becerilerini gerektirdiği anlaşılmaktadır. Bu nedenle üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Barnard ve Tall (1997) matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin ispat yaparken daha önce gördükleri ispat yöntemini yeni önermelerin ispatına genelleyebildiklerini belirlemiştir. Alan yazında daha önce deneyip çözüme ulaştığı çözüm yolunu yeni problemde kullanır becerisini üst bilişsel olarak ele alan çalışmalar mevcuttur (Schraw ve Dennison, 1994; Ormrod, 2015, s. 411). Demir'de (2013) sınıf öğretmeni adaylarının ders çalışma sürecinde önceki konu ile benzerlik ve farklılıklarını belirlediğini tespit etmiş ve sözü geçen çalışmanın üst bilişsel olduğunu ifade etmiştir. Bu beceri bireyin daha önce kullanmış olduğu bir çözüm yolunu yeni çözüm yoluna uyarlamasını içerdiğinden (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 427) bireyin ileri düzey akıl yürütme yaptığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle sözü geçen beceri üst bilişsel olarak değerlendirilmiştir. Alan yazın incelendiğinde analojik akıl yürütmenin üst düzey akıl yürütme gerektiren bir beceri olduğunu gösteren pek çok çalışma mevcuttur (Smith

ve Kosslyn, 2014, s. 427; Goldstein, 2013, s. 579; Plotnik, 2009, s. 309). Çelik (2016) olayı bir adım öteye taşımış ve analojik akıl yürütmeyi matematiksel düşünmenin temeli olarak açıklamıştır. Bu anlamda ilgili becerinin alan yazınla desteklendiği söylenebilir.

Bu kategoride sadece ilk önermede tespit edilen üst bilişsel beceri "kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar" ve sadece ikinci önermede tespit edilen üst bilişsel beceri "önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütür" becerileridir. Bu beceriler soyutlama, tahmin gibi üst düzey akıl yürütme gerektirdiğinden üst bilişsel olarak ele alınmıştır. Analojik akıl yürütme becerilerinin üst bilişsel olduğuna yönelik alan yazında pek çok çalışma mevcuttur (Smith ve Kosslyn, 2014, s. 427; Goldstein, 2013, s. 579; Plotnik, 2009, s. 309).

5.2. Sonuçlar

Matematik öğretmeni ve öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecinde sergilediği becerileri bilişsel ve üst bilişsel açıdan karakterize etmeye yönelik yapılan bu çalışmada, nicel veri toplama aracı olarak ispat yapma becerisi teşhis testi geliştirilmiştir. Geliştirilen test hem çalışmanın nicel veri toplama aracı olarak kullanılmış hem de nitel çalışmanın katılımcılarını belirlemek amacıyla kullanılmıştır. Çalışmanın nitel bölümünün yürütülmesinde de katılımcılara etkinlik kartları verilerek sesli düşünme protokolü yürütülmüştür. Çalışmanın amacına yönelik ispat yapma becerisi teşhis testinden, sesli düşünme protokolünden, etkinlik kartlarından ve gözlem formlarından elde edilen veriler yorumlanarak ulaşılan sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

5.2.1. Bilişsel beceriler temasında elde edilen sonuçlar

Matematik öğretmeni ve öğretmeni adayları ispat yaparken sergilemiş olduğu bilişsel becerilerden ispat önermesini okuma, şekil çizme, önermenin altını çizme, doğruluğunu değerlendirme, işlem süreci, strateji belirleme ve sezgisel kestirme yolları kategorilerine ulaşılmıştır.

İspat önermesini okuma kategorisinde sergilendiği belirlenen bilişsel beceriler ve hangi alanlarda sergilendiği aşağıdaki gibidir:

- İspat önermesini ilk kez okur (Geometri/Cebir)
- İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler (Geometri/Cebir)

- Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür (Geometri/ Cebir)
- İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler (Geometri/Cebir)
- Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder (Geometri)
- Önermeyi sembolik olarak yazar (Cebir)
- Önerme ifadesini tutarsız forma dönüştürür (Cebir)
- Önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle ifade eder (Cebir)
- Önermenin doğruluğunu sezgisel olarak hisseder (Cebir)
- İspatın anahtar kavramlarını belirler (Cebir)
- İspatın hipotez ve hükmünü belirlemek için önermenin altını çizer (Cebir)

Matematik öğretmenlerinin bazılarının geometrinin birinci önermesinde soruyu bütün bir şekilde okuduğu diğerlerinin ise soruyu adım adım okuyarak ilerlediği belirlenmiştir. Öğretmenler önermeyi anlamadığında önermeyi tekrar okumuş ve verilenler üzerinde düşünmüşlerdir. Ayrıca ispat önermesini sonuca ulaştıramadıklarında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerini kontrol ettikleri belirlenmiştir. Benzer şekilde öğretmenlerin çoğunun önermeyi okurken ispatın hipotez ve hükmünü belirlediği saptanmıştır. Son sınıf öğretmen adaylarının çoğunun ispat önermesini bütün bir şekilde okuduğu birinin ise önermeyi adım adım okuduğu saptanmıştır. Aynı zamanda son sınıf öğretmen adaylarının bazılarının önermeyi anlamadığında birkaç kez okuduğu ve verilenler üzerinde düşündükleri belirlenmiştir. Son sınıf öğretmen adaylarının bir kısmının soruyu okurken ispat için hipotez ve hükmü belirlediği tespit edilmiştir. Bu önermede 1. sınıf öğretmen adayları önermeyi bütün şekilde okumuştur. Yine 1. sınıf öğretmen adayları önermeyi anlayamadıklarında önermeyi tekrar okumuşlar ve ispatı tamamlayamadıklarında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerin doğruluğunu kontrol etmişlerdir. Ayrıca birinci sınıf öğretmen adaylarından bazılarının da önermeyi okurken ispatın hipotez ve hükmünü belirlediği saptanmıştır.

Matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının tamamı geometrinin ikinci önermesinde soruyu bütün bir şekilde okumuştur. Ayrıca bir öğretmen önermeyi anlamadığında tekrar okuyarak verilenler üzerine düşünmüştür.

Cebir önermelerinin ilkinde matematik öğretmenlerinin ve son sınıf öğretmen adaylarının bazılarının soruyu bütün bir şekilde okuduğu diğerlerinin ise adım adım okuyarak ilerlediği saptanmıştır. Öğretmenlerin ve son sınıf öğretmen adaylarının birçoğunun önermeyi okurken sembolik olarak da yazdıkları belirlenmiştir. Katılımcı öğretmenlerden birisi önermeyi tutarsız forma dönüştürerek önermeyi anlamlandırmaya çalışmıştır. Ayrıca öğretmenlerin ve son sınıf öğretmen adaylarının önermeyi anlamadığında tekrar okuduğu ve verilenler üzerine düşündüğü tespit edilmiştir. Ayrıca bir öğretmenin önemli gördüğü yerlerin ve hipotez-hükmü belirleyeceği bölümün altını çizdiği bulunmuştur. Son sınıf öğretmen adaylarının önermeyi anlamak için kendi cümleleriyle yazdıkları ve ispatın hipotez ve hükmünü belirledikleri saptanmıştır. Yine son sınıf öğretmen adaylarının birinin sezgisel olarak önermenin doğruluğunu hissettiği belirlenmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının ise bu soruda sadece önermeyi ilk kez okur becerisini sergiledikleri belirlenmiştir.

Cebir önermelerinin ikincisinde öğretmenlerin ve son sınıf öğretmen adaylarının bazılarının önermeyi bütün bir şekilde okuduğu bazılarının ise adım adım okuyarak ilerlediği bulunmuştur. Aynı zamanda öğretmenlerin ve son sınıf öğretmen adaylarının önermeyi anlamak için sembolik olarak yazdıkları, anlamadıklarında tekrar okuyarak üzerine düşündükleri ve ispatın anahtar kavramını belirledikleri anlaşılmıştır. Öğretmenler ve son sınıf öğretmen adayları ispatın hipotez ve hükmünü belirlemişlerdir. Öğretmenler hipotez ve hükmü belirlerken önermede hipotez ve hükmün altını çizmişlerdir.

Önermenin altını çizme kategorisinde sergilendiği belirlenen bilişsel beceriler ve sergilendiği alan aşağıdaki gibidir:

- Önermeye bağlı hata yaptığında hata yaptığı bölümün altını çizer (Geometri)
- Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer (Geometri)
- Önermede önemli gördüğü yerlerin altını çizer (Geometri)

Matematik öğretmenlerinin ve son sınıf öğretmen adaylarının geometrinin her iki önermesinde de önermede önemli gördükleri yerlerin altını çizdikleri belirlenmiştir. Ayrıca matematik öğretmenleri önermeye bağlı hata yaptıklarında hata yaptıkları bölümün altını çizerek hata yaptığı bölümü belirlemişlerdir. 1. sınıf öğretmen adayları da şekil çizerken kendileri için önermede gerekli olan bölümlerin altını çizmişlerdir.

Şekil çizme kategorisinde sergilendiği belirlenen bilişsel beceriler ve sergilendikleri alan aşağıdaki gibidir:

- Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer (Geometri)
- Geometri ispatında şekil çizmeyi gereklilik olarak görür (Geometri)
- Somutlaştırma amacıyla şekil çizer (Geometri)
- Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer (Geometri)
- İspat sürecinin aşaması olarak şekil çizer (Geometri)

Geometrinin birinci sorusunda matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları önermeyi anlamak için ve somutlaştırmak için şekil çizmişler, ayrıca şekil çizmeyi gereklilik olarak görmüşlerdir. Matematik öğretmen adaylarının bir kısmı önermede verilen şekli değil ezberlerinde var olan şekli çizmişlerdir.

Geometrinin ikinci sorusunda da birinci soruda olduğu gibi öğretmenler ve öğretmen adayları önermeyi anlamak için şekil çizmişlerdir. Bunun dışında öğretmenler ve öğretmen adaylarından bazıları somutlaştırma amacıyla şekil çizerken, 1. sınıf öğretmen adayları ispat sürecinin aşaması olarak şekil çizmişlerdir.

Doğruluğunu değerlendirme kategorisinde sergilendiği belirlenen bilişsel beceriler ve hangi alanlarda sergilendiği aşağıdaki gibidir:

- Ritüel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir (Geometri/Cebir)
- Dönüşümsel ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir (Geometri/Cebir)
- Tümevarımsal ispat şemasına göre ispatın doğruluğunu değerlendirir (Geometri/ Cebir)
- Otoriter ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir (Geometri/Cebir)
- İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorar (Geometri/Cebir)
- İspatı tamamladıktan sonra en başa dönerek doğruluğunu kontrol eder (Geometri)
- Ezberindeki bilgiye dayanarak önermenin doğruluğunu kontrol eder (Geometri)

- İşlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirir (Cebir)
- İşlemlerin tamamını tekrar yaparak ispatın doğruluğunu değerlendirir (Cebir)
- Sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir (Cebir)
- Sezgisel olarak doğruluğunu hisseder ancak sembolik olarak ispatlayamaz (Cebir)

Matematik öğretmenlerinin bazılarının geometrinin birinci önermesinin doğruluğunu değerlendirirken ritüel ispat şemasına göre gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Bazı öğretmenler ispat süresince yaptıkları işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sormuşlardır. Öğretmenlerin bazıları da ispatı tamamladıktan sonra en başa dönerek ispatlarını kontrol etmişlerdir. Katılımcı son sınıf matematik öğretmen adayları ispatın doğruluğunu değerlendirirken bilişsel olarak ritüel ve dönüşümsel ispat şemalarına göre gerekçelendirme yapmışlardır. 1. sınıf öğretmen adayları ise ispatın doğruluğunun değerlendirilmesinde dönüşümsel ve otoriter ispat şemasına göre gerekçelendirme yapmışlardır. Öğretmen adaylarının bazıları ispat sürecinde işlemlerinin doğruluğunu araştırmacıya sorarken bazıları da ezberindeki bilgiye dayandırarak önermenin doğruluğunu değerlendirmişlerdir.

Geometrinin ikinci önermesinde ise matematik öğretmenlerinin bazıları ispat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sorarken önermenin doğruluğunu ezberindeki bilgiye dayandırarak kontrol etmişlerdir. Son sınıf matematik öğretmen adaylarının bazıları ispatlarının doğruluğunu değerlendirirken ritüel ve tümevarımsal ispat şemasına göre gerekçelendirme yapmışlardır. Bununla birlikte bazı son sınıf öğretmen adayları işlemlerinin doğruluğunu araştırmacıya sorarak ispat sürecini yürütmüşlerdir. Bu önerme için 1. sınıf öğretmen adaylarında belirlenen tek beceri tümevarımsal ispat şemasına göre gerekçelendirme yapmalarıdır.

Cebir önermelerinin ilkinde matematik öğretmenlerinin dönüşümsel ve otoriter ispat şemasına göre gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Matematik öğretmenlerinin bazıları ispat sürecinde işlemlerinin doğruluğunu araştırmacıya sormuşlar bazıları da işlemlerini kontrol ederek doğruluğunu değerlendirmişlerdir. Son sınıf öğretmen adaylarının bazıları dönüşümsel ispat şemasına göre gerekçelendirme yapmışlardır. Bazı son sınıf öğretmen adayları ispatın tamamını bitirdikten sonra işlemlerinin tamamını tekrar yaparak doğruluğunu değerlendirmişler bazıları ise

işlemlerinin doğruluğunu araştırmacıya sormuşlardır. Son sınıf öğretmen adaylarının bazıları ispatın doğruluğunu sezgisel olarak hissetmiş ancak tam olarak ispat yaparak doğruluğunu gösterememişlerdir. 1. sınıf öğretmen adayları ise ritüel, dönüşümsel ve tümevarımsal ispat şemalarına göre ispatlarının doğruluğunu değerlendirmişlerdir.

Cebirin ikinci önermesinde matematik öğretmenleri ve son sınıf öğretmen adayları ritüel ve dönüşümsel ispat şemasına göre gerekçelendirme yapmışlardır. Aynı zamanda öğretmenler ve son sınıf öğretmen adayları sezgisel olarak önermenin doğruluğunu hissetmiş ancak sembolik olarak tam olarak ispatlayamamışlardır. Yine öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının bazıları ispat sürecinde yaptığı işlemlerin doğruluğunu araştırmacıya sormuşlardır. Son sınıf öğretmen adaylarından farklı olarak matematik öğretmenleri sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirmiştir. 1. sınıf öğretmen adayları ise dönüşümsel ispat şemasına göre ispatını gerekçelendirmiş ve sezgisel olarak önermenin doğruluğunu değerlendirmişlerdir.

Strateji belirleme kategorisinde sergilendiği belirlenen bilişsel beceriler ve hangi alanlarda sergilendiği aşağıdaki gibidir:

- Ezberlediği yolla ispat yapar (Geometri/Cebir)
- Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder (Geometri/Cebir)
- İspat yöntemlerini gözden geçirir (Geometri)
- Deneme-yanılma yoluyla ispat yapar (Geometri)
- İspatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünmektedir (Cebir)
- İspat stratejisini uygulamada düşük öz-yeterliğe sahiptir (Cebir)

Geometri önermelerinin ilkinde matematik öğretmenlerinin deneme-yanılma ya da ezbere yolla ispat yaptığı saptanmıştır. Ayrıca öğretmenlerin ispat yöntemini belirlerken ispat yöntemlerini gözden geçirdiği tespit edilmiştir. Son sınıf matematik öğretmen adaylarının bilişsel becerilerde sözel olarak önermenin ispatını ifade ettiği, ezberlediği yolla ispat yaptığı ve deneme-yanılma stratejisini kullandığı belirlenmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının da ispatı deneme-yanılma yoluyla ya da ezberleyerek yaptığı belirlenmiştir.

Geometrinin ikinci önermesinde matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmeni adaylarının bazılarının ezberlediği yolla ispat yaptığı belirlenmiştir. Son sınıf

öğretmen adaylarından birinin ise önermenin ispatını sözel olarak ifade ettiği belirlenmiştir.

Cebir önermelerinin ilkinde matematik öğretmenlerinin bazılarının ezberlediği yolla ispat yaptığı belirlenmiştir. Son sınıf öğretmen adaylarının bazıları ispatı ezberlemek zorunda olduğunu düşünürken, bazıları da ezberlediği yolla ispat yapmıştır. 1. sınıf öğretmen adaylarından bazıları sözel olarak önermenin ispatını ifade ederken, bazıları da ezberlediği yolla ispat yapmıştır.

Cebir önermelerinin ikincisinde matematik öğretmenlerinin birinin sözel olarak ispatı ifade ettiği, son sınıf öğretmen adaylarının bazılarının ise ezberlediği yolla ispat yaptığı belirlenmiştir. Son sınıf öğretmen adaylarından birisinin ispat yapmak için düşük öz-yeterliğe sahip olduğu bulunmuştur. Ayrıca 1. sınıf öğretmen adaylarının bazılarının ezberlediği yolla ispat yaptığı anlaşılmıştır.

İşlem süreci kategorisinde sergilendiği belirlenen bilişsel beceriler ve hangi alanlarda sergilendiği aşağıdaki gibidir:

- Planına uygun ispat yapar (Geometri/Cebir)
- Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir (Geometri/Cebir)
- Kullandığı ispat yöntemi amaca ulaşmada yeterlidir (Geometri/Cebir)
- İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür (Geometri)
- İspat sürecinde lemmalarında ispatlanması gerektiğini düşünür (Cebir)
- Örüntü genelleme yapar (Cebir)
- Olmadığına örnek vererek önermeyi reddeder (Cebir)

Geometri önermelerinde matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının seçtiği ispat türüne uygun ispat yaptığı, ispatı planına uygun şekilde yürüttüğü ve ispat yönteminin amaca ulaşmada yeterli olduğu belirlenmiştir. Bunun yanı sıra 1. Sınıf öğretmen adayları ispat yaparken cebirsel işlemler yapmayı zorunluluk olarak gördükleri belirlenmiştir.

Cebir alanında ise öğretmenlerin ispat sürecinde lemmaların da ispatlanması gerektiğini düşündükleri belirlenmiştir. Bir diğer bulguda ise son sınıf öğretmen adaylarının ispat sürecinde örüntü genelleme yaptığı tespit edilmiştir. Bu kategorideki

son bulguda ise 1. sınıf öğretmen adaylarının olmayana örnek vererek önermeyi reddettikleri saptanmıştır.

Sadece cebir alanında sergilenen sezgisel kestirme yolları kategorisinde tespit edilen bilişsel beceriler aşağıdaki gibidir:

- Araç-amaç analizi yapar (Cebir)
- Tepe tırmanışı yapar (Cebir)
- Rasgele arama yapar (Cebir)
- Her zaman amaca doğru ilerler (Cebir)

Sezgisel kestirme yolları kategorisinde birinci cebir önermesinde öğretmenlerin araç-amaç analizi yaptığı ve rasgele arama yolunu kullandığı, son sınıf öğretmen adaylarının araç-amaç analizi yaptığı ve 1. sınıf öğretmen adaylarının tepe tırmanışı yolunu kullandığı belirlenmiştir. İkinci cebir önermesinde ise öğretmenler ve son sınıf öğretmen adaylarının sezgisel kestirme yollarından her zaman amaca doğru ilerleme, tepe tırmanışı yapma ve rasgele arama yapma yollarını kullandıkları belirlenmiştir. Bu önermede araç-amaç analizini sadece son sınıf öğretmen adaylarının yaptığı bulunmuştur. Bu kategoride 1. sınıf öğretmen adaylarına yönelik beceriler olmadığı bulunmuştur.

5.2.2. Üst bilişsel beceriler temasında elde edilen sonuçlar

Matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde sergilemiş olduğu üst bilişsel beceriler; işlemleri kolaylaştırma, sorgulama, farkındalık, planlama, strateji belirleme, kontrol etme, ilişkilendirme ve analojik akıl yürütme kategorilerinde toplanmıştır.

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ispat sürecinde işlemleri kolaylaştırmak için bazı beceriler sergilemişlerdir. Üst bilişsel olarak değerlendirilen bu beceriler aşağıdaki gibidir:

- İşlem kolaylığı için kesirli ifadelerden kaçınır (Geometri/Cebir)
- Değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlar (Geometri/Cebir)
- İspatın anahtar kavramını belirler (Geometri/Cebir)
- Şekil çizmenin ispatı kolaylaştırdığını düşünür (Geometri)

- İspatı kolaylaştırmak için sezgisel kestirme yollarını kullanır (Geometri)
- Bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdığını düşünür (Geometri)

Geometrinin birinci önermesinde matematik öğretmenlerinin ispatı kolaylaştırmak için genellikle ispatın anahtar kavramını belirledikleri bulunmuştur. Bunun yanı sıra işlemleri kolaylaştırmak için kesirli ifadelerden kaçınan ve sezgisel kestirme yollarını kullanan matematik öğretmenleri de olmuştur. Aynı önermede son sınıf öğretmen adayları ise işlemleri kolaylaştırmak için ispatın anahtar kavramların belirlemişler, kesirli ifadelerden kaçınmaya çalışmışlar, değişken sayısını azaltarak işlem yapmışlar ve sezgisel kestirme yolların kullanmışlardır. 1. sınıf öğretmen adayları ise sadece şekil çizerek ispatı kolaylaştırdıklarını düşünmüşlerdir.

Geometrinin ikinci önermesinde ise matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının yine yoğun bir şekilde ispatın anahtar kavramını belirleyerek işlemleri kolaylaştırmaya çalıştıkları bulunmuştur. Bununla birlikte bazı matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları şekil çizerek ve bilginin temsilini kullanarak ispatı kolaylaştırdıklarını düşünmüşlerdir. Matematik öğretmenleri bu önermede de sezgisel kestirme yollarını kullanmış ve değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamaya çalışmıştır. 1. Sınıf öğretmen adayları ise ispatın anahtar kavramlarını belirlemiş, değişken sayısını azaltarak, bilginin temsilini kullanarak ve şekil çizerek ispatı kolaylaştırmaya çalışmıştır.

Cebir önermesinin ilkinde matematik öğretmenleri ve son sınıf öğretmen adayları değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamaya çalışmışlardır. Bunun dışında işlemleri kolaylaştırma kategorisinde üst bilişsel beceri elde edilememiştir.

Cebir önermelerinin ikincisinde matematik öğretmenlerinin ispatın anahtar kavramını belirlediği ve değişken sayısını azaltarak işlem kolaylığı sağlamaya çalıştıkları bulunmuştur. Aynı beceriler son sınıf öğretmen adaylarında da sergilenmiş olup, bunlara ilave olarak işlem kolaylığı için kesirli ifadelerden de kaçınmışlardır. 1. sınıf öğretmen adaylarına yönelik herhangi bir üst bilişsel beceriye ulaşılamamıştır.

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ispat sürecinde sorgulama becerilerini kullanmışlardır. Bu beceride ulaşılan üst bilişsel beceriler aşağıdaki gibidir:

- İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar (Geometri/Cebir)

- İspat sürecinde yazdığı işlemlerin doğruluğunu kendisine sorar (Geometri/Cebir)
- Yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklar (Geometri/Cebir)
- Kendine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürür (Geometri/Cebir)
- İspatın doğrulamasını yaparken tüm durumları düşünüp düşünmediğini sorgular (Geometri)
- Nerede hata yaptığı kendine sorar (Geometri)
- İşlem hatası olup olmadığını kendine sorar (Cebir)
- Önermeyi anlamak için sorular sorar (Cebir)
- İşlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendine sorular sorar (Cebir)

Geometrinin ilk önermesinde matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ispat adımlarını sürdürürken kendilerine sorular sormuş ve ispatın nasıl başlayıp sonuca ulaştığını kendilerine sormuşlardır. Bunun yanı sıra matematik öğretmenleri ispat yaparken işlemlerinin doğruluğunu kendine sormuş ve yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklamıştır.

Geometrinin ikinci önermesinde matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları kendilerine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürmüşlerdir. Bu önermede matematik öğretmenleri ispatın nasıl başlayıp sonuçlandığını kendilerine sormuşlar ve ispat için gerekli tüm durumları düşünüp düşünmedikleri sorgulamışlardır. Son sınıf öğretmen adaylarının da ispatın nasıl başlayıp sonuca ulaştığını kendilerine sordukları belirlenmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının ise nerede hata yaptıklarını kendilerine sordukları tespit edilmiştir.

Cebir önermelerinin ilkinde matematik öğretmenlerinin önermeyi anlamak ve hedeflerini belirlemek için sorular sorduğu, işlem hatası olup olmadığını kendine sorduğu, kendine sorular sorarak ispatını sürdürdüğü ve yaptığı işlemleri nedenleriyle açıkladığı belirlenmiştir. Son sınıf öğretmen adaylarının bazılarının da kendilerine sorular sorarak ispat adımlarını sürdürdüğü bulunmuştur. 1. sınıf öğretmen adaylarının sorgulamaya yönelik üst bilişsel beceri sergilemediği belirlenmiştir.

Cebir önermelerinin ikincisinde matematik öğretmenleri ve son sınıf öğretmen adayları yaptığı işlemleri nedenleriyle açıklamışlar ve kendilerine sorular sorarak

ispatlarını sürdürmüşlerdir. Bunun yanı sıra matematik öğretmenlerinin bazıları işlemlerin doğruluğunu kontrol etmek için kendilerine sorular sormuşlardır.

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ispat sürecinde farkındalığa yönelik beceriler sergilemişlerdir. Bu kategoride ulaşılan üst bilişsel beceriler aşağıdaki gibidir:

- İspat yapmada kullandığı stratejinin farkındadır (Geometri/Cebir)
- Hata yaptığında hangi adımda hata yaptığını fark eder (Geometri/Cebir)
- İspatın süreç olduğunun farkındadır (Geometri/Cebir)
- İspatı anlayarak yapar (Geometri/Cebir)
- Özdüşünüm becerisi sergiler (Geometri/Cebir)
- İspatı öğretici cümleler kurar (Geometri)
- Genelleme yaparken neden doğru olduğuna yönelik, onu doğru yapan durumları nedenleriyle sorgular (Geometri)
- Önermede yer alan tüm verilerin ispatta kullanılacağının farkındadır (Cebir)

Geometrinin birinci önermesinde matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının kullandığı stratejinin farkında olduğu ve hata yaptıklarında hangi adımda hata yaptıklarını fark ettiği bulunmuştur. Matematik öğretmenlerinin ve 1. sınıf öğretmen adaylarının ispatı anlayarak yaptığı ayrıca 1. sınıf öğretmen adaylarının ispatın süreç olduğunun farkında olduğu belirlenmiştir.

İkinci geometri önermesinde matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının ispatı öğretici cümleler kurduğu ve genellemeleri doğru yapan durumların farkında oldukları tespit edilmiştir. Buna ek olarak öğretmen adaylarının özdüşünüm becerisi sergilediği de bulunmuştur. Son sınıf öğretmen adaylarından bazı katılımcıların ispat yapmada kullandıkları stratejinin de farkında oldukları belirlenmiştir.

Cebir önermelerinin ilkinde katılımcıların farkındalık yönünde beceri sergilemediği bulunmuştur. Cebirin ikinci önermesinde ise sadece öğretmenler tarafından beceriler sergilendiği tespit edilmiştir. Öğretmenlerin bazılarının soru sorarak hedef belirledikleri, ispata başlamadan ispatı nasıl yapacağına karar verdiği ve ispatı önce zihninde yapıp sonra kağıda döktüğü belirlenmiştir.

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ispat sürecinde planlamaya yönelik beceriler sergilemişlerdir. Bu kategoride ulaşılan üst bilişsel beceriler aşağıdaki gibidir:

- Sonuca yönelik tahminde bulunur (Geometri/Cebir)
- İspata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verir (Geometri/Cebir)
- İspatı nasıl yapacağına yönelik belli bir plan yapar (Geometri/Cebir)
- Bir sonraki adıma geçmeden o adımda ne yapacağını düşünür (Geometri)
- Analojik akıl yürütme yapar (Geometri)
- Planlama için kendine soru sorar (Cebir)
- Algısal set oluşturur (Cebir)
- İspatı önce zihninde yapıp sonra kağıda döker (Cebir)

Birinci geometri önermesinde matematik öğretmenlerinin sonuca yönelik tahminde bulunduğu, ispata başlamadan önce neyi ispatlayacağına karar verdiği, şekil üzerinde ispatın hipotez ve hükmünü belirlediği ve analojik akıl yürütme yaptıkları saptanmıştır. Son sınıf matematik öğretmen adaylarının sonuca yönelik tahminde bulunup, neyi ispatlayacağına karar verdikleri belirlenmiştir. 1. sınıf öğretmen adaylarının bazılarının ise ispatı nasıl yapacaklarını planladıkları, neyi ispatlayacaklarına karar verdikleri ve analojik akıl yürütme yaptıkları tespit edilmiştir.

Geometri önermelerinin ikincisinde matematik öğretmenlerinin ve son sınıf öğretmen adaylarının sonuca yönelik tahminde bulundukları, neyi ispatlayacaklarına karar verdikleri, ispat adımlarında bir sonraki adımda ne yapacaklarını düşündükleri ve analojik akıl yürütme yaptıkları bulunmuştur. Ayrıca matematik öğretmenlerinden birisi ispatı nasıl yapacağını da tasarlamıştır. 1. sınıf öğretmen adayları ise, sonuca yönelik tahminde bulunmuşlar ve analojik akıl yürütme yapmışlardır.

Cebir önermelerinin ilkinde matematik öğretmenlerinin bazılarının planlama için kendilerine sorular sordukları ve algısal set oluşturdukları saptanmıştır. Matematik öğretmen adayları ise sonuca yönelik tahminde bulunmuşlar ve planlama için kendilerine sorular sormuşlardır. 1. sınıf öğretmen adaylarının ise bu soruda planlama için üst bilişsel beceriler sergilemedikleri belirlenmiştir.

İkinci cebir önermesinde sadece matematik öğretmenlerinin üst bilişsel beceriler sergiledikleri bulunmuştur. Öğretmenlerden bazıları ispatı önce yapıp sonra kağıda

aktarmışlar, bazıları soru sorarak hedefini belirlemişler, bazıları da ispata başlamadan önce neyi ispatlayacaklarına karar vermişlerdir.

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ispat sürecinde strateji belirlemeye yönelik beceriler sergilemişlerdir. Bu kategoride ulaşılan üst bilişsel beceriler aşağıdaki gibidir:

- İspat türünü doğru olarak seçebilir (Geometri/Cebir)
- Iraksak düşünme yeteneğini kullanır (Geometri/Cebir)
- Yakınsak düşünme yeteneğini kullanır (Geometri/Cebir)
- Tümdengelimli akıl yürütür (Geometri)
- Yazılı çözümden önce zihninde çözüm yapar (Geometri)
- Soruyu okurken zihninde şeklini çizer (Geometri)
- İspat stratejisinin doğru olup olmadığını zihinsel olarak kontrol eder (Geometri)
- Önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemini belirler (Geometri)
- Ardışık tarama yoluyla hipotezini test eder (Cebir)

Geometri önermelerinin ilkinde matematik öğretmenleri strateji belirleme sürecinde ispat türünü doğru olarak seçebilmiş, zihninde sorunun şeklini çizmiş, yakınsak ve ıraksak düşünme yeteneklerini kullanmışlardır. Son sınıf öğretmen adayları ispat türünü doğru olarak seçmiş ve zihninde sorunun şeklini çizmişlerdir. 1. sınıf öğretmen adayları ise ispat türünü doğru olarak seçmiş ve yakınsak düşünme becerilerini kullanmışlardır.

Geometri önermelerinin ikincisinde matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları yakınsak düşünme yeteneklerini kullanmışlar, yazılı çözümden önce zihinlerinde çözüm yapmışlar ve ispat stratejilerinin doğru olup olmadığını zihinlerinde kontrol etmişlerdir. Bununla birlikte matematik öğretmenleri tümdengelimli akıl yürütmede bulunmuşlar ve önermede kullanılan sembollerden hareketle ispat yöntemi belirlemişlerdir. 1. sınıf öğretmen adaylarından birisi ise ıraksak düşünme yeteneğini kullanmıştır.

Cebir önermelerinin ilkinde matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının yakınsak ve ıraksak düşünme yeteneklerini kullandıkları, ardışık tarama yoluyla

hipotezlerini test ettikleri bulunmuştur. Bu önermede 1. sınıf öğretmen adaylarının üst bilişsel beceri sergilemediği saptanmıştır. Cebirin ikinci sorusunda ise bu kategorideki becerilerin sergilenmediği belirlenmiştir.

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ispat sürecinde üst bilişsel kontrol etmeye yönelik beceriler sergilemişlerdir. Bu kategoride ulaşılan üst bilişsel beceriler aşağıdaki gibidir:

- Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol eder (Geometri/Cebir)
- Aksiyomatik ispat şemasına göre ispatının doğruluğunu değerlendirir (Geometri/Cebir)
- Bazı örneklerle hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol eder (Geometri/Cebir)
- Hata yaptığında işlem adımlarını tek tek kontrol eder ve son olarak önermenin doğruluğunu değerlendirir (Geometri/Cebir)
- Yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapar (Geometri/Cebir)
- İspatlama sürecinde işlemlerin doğruluğunu adım adım kontrol eder (Geometri)
- Hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder (Cebir)

Geometri önermelerinin birincisinde matematik öğretmenlerinden ve öğretmen adaylarından hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol edenler ve aksiyomatik ispat şemasına göre gerekçelendirme yapanlar olmuştur. Matematik öğretmenleri işlemlerini tek tek kontrol ederek önermenin doğruluğunu değerlendirmeye kadar gitmişler ve yanlış bir işlem yaptıklarında sorunun en başına dönerek çözüm yapmışlardır. Son sınıf öğretmen adayları ise hipotez ve hükmün doğruluğunu kontrol etmişlerdir.

İkinci geometri önermesinde matematik öğretmenleri ve son sınıf öğretmen adaylarının bazıları hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol etmişler, işlem adımlarını tek tek kontrol ederek önermenin doğruluğunu değerlendirmişler ve aksiyomatik ispat şemasına göre gerekçelendirme yapmışlardır. Bunun yanı sıra matematik öğretmenleri ispat yaparken adımların doğruluğunu tek tek kontrol etmişlerdir. Birinci sınıf öğretmen adaylarının da bazıları ispat yaparken doğruluğunu

adım adım kontrol etmişler, hata yaptıklarında işlem adımlarını tek tek kontrol etmişler ve aksiyomatik ispat şemasına göre gerekçelendirme yapmışlardır.

Cebir önermelerinin ilkinde matematik öğretmenleri ve son sınıf öğretmen adayları aksiyomatik ispat şemasına göre gerekçelendirmede bulunmuşlardır. Ayrıca son sınıf öğretmen adaylarından birisi hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol etmişlerdir. 1. sınıf öğretmen adaylarının ise bu kategoride üst bilişsel beceri sergilemediği belirlenmiştir.

İkinci cebir önermesinde sadece matematik öğretmenlerinin kontrol etmeye yönelik üst bilişsel beceriler sergiledikleri bulunmuştur. Öğretmenlerin sergilediği beceriler; hata yaptığında ispat stratejisini kontrol eder, aksiyomatik ispat şemasına göre gerekçelendirme yapar ve yanlış bir işlem yaptığında sorunun en başına dönerek tekrar çözüm yapardır.

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ispat sürecinde ilişkilendirme becerileri sergilemişlerdir. Bu kategoride ulaşılan üst bilişsel beceriler aşağıdaki gibidir:

- İspat sürecinde şekiller ve semboller arasındaki ilişkiyi kurar (Geometri/Cebir)
- İspat sürecinde adımlar arasında ilişkilendirme yapar (Geometri/Cebir)
- Sorular sorarak ilişkilendirme yapar (Cebir)
- İlişkilendirme yapmak için düşünür (Cebir)

Birinci geometri önermesinde matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının bazıları şekiller-semboller arasında ve adımlar arasında ilişkilendirme yapmışlardır. Benzer şekilde ikinci önermede de aynı üst bilişsel beceriler sergilenmiştir.

Cebir önermelerinin ilkinde matematik öğretmenlerinin bazıları sorular sorarak ilişkilendirme yapmış ve ispat adımları arası ilişki kurmuşlardır. Son sınıf öğretmen adayları ise sadece sorular sorarak ilişkilendirmede bulunmuşlardır. İkincisinde ise matematik öğretmenleri ispat adımları arasında ilişkilendirme yapmış, sorular sorarak ilişkilendirme yapmış ve ilişkilendirme yapmak için düşünmüşlerdir. Son sınıf öğretmen adayları ise sorular sorarak ilişkilendirme yapmış ve ispatta adımlar arası ilişkilendirme yapmışlardır.

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları ispat sürecinde analojik akıl yürütme yapmışlardır. Bu kategoride ulaşılan üst bilişsel beceriler aşağıdaki gibidir:

- Daha önce kullanmış olduğu stratejiyi değiştirerek analojik akıl yürütme yapar (Cebir)
- Kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapar (Cebir)
- Önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütür (Cebir)

Bu kategori sadece cebir alanında belirlenmiştir. Önermelerin ilkinde matematik öğretmenleri kümenin tümleyeninden yararlanarak ve daha önce kullandığı stratejiden yararlanarak analojik akıl yürütme yaptıkları bulunmuştur. Son sınıf öğretmen adayları sadece daha önce kullandığı stratejiden yararlanarak akıl yürütme yaparken; 1. sınıf öğretmen adayları sadece kümenin tümleyeninden yararlanarak analojik akıl yürütme yapmışlardır. İkinci önermede ise matematik öğretmenleri önermenin tersinden yararlanarak analojik akıl yürütme yaparken son sınıf matematik öğretmen adayları ise sadece daha önce kullanmış olduğu stratejiden yararlanarak analojik akıl yürütme yapmışlardır.

5.2.3. Öğretmenlerin ispat becerileri öğretmen adaylarından yüksektir

Çalışmada elde edilen nitel bulgular incelendiğinde bilişsel beceriler bağlamında matematik öğretmenleri ile matematik öğretmenleri arasında belirgin farklılık olmadığı bulunmuştur. Sadece matematik öğretmenlerinin 1. sınıf öğretmen adaylarından daha fazla beceri sergiledikleri belirlenmiştir. Bu farklılık geometri önermelerinden değil cebir önermelerinden kaynaklıdır. Üst bilişsel beceriler bağlamında ele alındığında ise matematik öğretmenleri ve son sınıf öğretmen adaylarının, 1. sınıf öğretmen adaylarından daha fazla üst bilişsel beceri sergilediği bulunmuştur. Bu durum hem geometri hem de cebir önermelerinde bu şekildedir. 1. sınıf öğretmen adaylarının son sınıf matematik öğretmen adayları ve matematik öğretmenlerinden daha az beceri sergilemeleri 1. sınıf öğretmen adaylarının henüz Sayılar Teorisi Dersini almamış olmalarından kaynaklanıyor olabilir. Genel olarak katılımcılar geometri ispatlarında cebir ispatlarından daha fazla bilişsel beceri sergilemişlerdir. Geometri ispatları da kendi içinde değerlendirildiğinde bilişsel becerilerin birinci önermede daha yoğun olduğu görülmektedir. Bu durum geometrinin birinci önermesinin sentetik geometri

ispatlarıyla (üçgende açılar konusundan yararlanılarak) kolayca yapılabileceğinden kaynaklanıyor olabilir. Çünkü sentetik ispatlara öğretim programının her aşamasında daha fazla yer verilmektedir.

5.3. Öneriler

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının ispat yaparken sergiledikleri bilişsel süreçleri incelemeyi amaçlayan bu çalışmanın sonucunda, katılımcıların ispat yaparken bilişsel ve üst bilişsel beceriler sergiledikleri ancak daha çok bilişsel beceri sergilerken, üst bilişsel becerileri daha az sergiledikleri bulunmuştur. Sergilenen üst bilişsel beceri sayısının 1. sınıf öğretmen adaylarından öğretmenlere doğru giderek arttığı belirlenmiştir. Ulaşılan sonuçlar doğrultusunda ispatlama sürecindeki bilişsel süreçlere ve benzer araştırma yürütmeyi planlayan araştırmacılara yönelik olmak üzere iki başlık altında öneriler sunulmuştur.

5.3.1. İspatlama sürecindeki bilişsel becerilere yönelik öneriler

Matematiksel bilgi üretmenin yolu olan ispat, matematiği anlamlandırmanın da yoludur. Buna rağmen yapılan çalışmalar ispatın anlaşılamadığını, ezberleyerek yapıldığını göstermiştir. Bu durum ispatın anlaşılmasının güç olmasıyla bağdaştırılmıştır. Problem çözme gibi ispat yapmanın da stratejileri vardır. Buna rağmen problem çözme anlaşılabilirken ispat yapma yeterince anlaşılamamaktadır. Bu durum ispat yapmada ki bilişsel süreçlerin ortaya konulmasını gerekli kılmaktadır. Çünkü ispat yaparken ki bilişsel süreçlerin ortaya konulması bireyin ispatı neden anlayamadığı ve yapamadığı sonucunu aydınlatacaktır. Yapılan bu çalışma hem geometri hem de cebir ispatlarında matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının daha çok bilişsel beceri kullandıklarını ortaya çıkarmıştır. Üst bilişsel beceriler daha az kullanılmıştır. Buradan katılımcıların ispat yaparken farkında olarak yapmadıkları, yeterince sorgulamadıkları ve değerlendirmedikleri anlaşılmaktadır. Bu nedenle ispat öğretiminin yapıldığı dersleri yürüten öğretim elemanlarının ispat sürecini anlamaya yönelik sorular sorması, yaptığı işlemleri neden yaptığına yönelik açıklamalar yaparak farkındalığı sağlaması ve ispatı tamamladıktan sonra değerlendirme yaparak ispat yapma sürecindeki farkındalığı sağlaması gerekir. Öğretmenlere yönelik hizmet içi

eğitim seminerleri düzenlenerek bu farkındalık geliştirilebilir. Çünkü üst bilişsel beceriler öğretilebilirdir ve bu becerilerin öğrenilmesi kişinin ispatı anlamasına yardımcı olur, öğrenmesini hızlandırır.

Geometri ve cebir bazında değerlendirildiğinde geometri alanında daha fazla sayıda bilişsel ve üst bilişsel beceri sergilendiği anlaşılmıştır. Geometri önermelerinin birkaç farklı yöntemle ispatlanabilmesi (analitik, sentetik, vektörel), bu yöntemlerin kullanılacağı derslerin ayrı ayrı verilmesi (Lineer Cebir, Düzlem Geometri, Analitik Geometri) ve geometri ispatlarının cebir ispatlarından daha informal görülmesi bu durumun nedeni olabilir. Bu bağlamda ispat öğreticilerinin cebir alanında da ispatları farklı yollardan yaparak öğretmen adayları için daha geniş bir bakış açısı sağlamaları ispatın öğrenilmesini, ilerleyen dönemlerde aynı ispatlarla karşılaşıldığında yapılabilmesini kolaylaştıracak ve ilk kez karşılaştığı ispatlar hakkında görüş oluşturmasına yardımcı olacaktır.

Çalışmada ulaşılan bir başka sonuçta, katılımcıların lemma kullanılması gereken aşamada lemmayı bilmediklerinden ispatı yapamayarak, sezgisel kestirme yollarına başvurmalarıdır. Bu durum öğretim programlarında sadece ispat yapılan derslerin değil ispat öğretiminin yapıldığı derslerinde yer alması gerektiğini göstermektedir. Şu an ki müfredat içerisinde soyut matematik dersinde yer verilen ispat öğretimi için bu süre yeterli değildir. Bu nedenle soyut matematik dersinin üzerine gerekli çalışmalar yapılıp, etkinlikler geliştirilerek ispat öğretimine yönelik bir ders konulmalıdır. Çalışmanın katılımcılarının matematiksel sembol ve notasyonları kullanmakta güçlük yaşamaları ve çok azının aksiyomatik ispat şemasına göre ispatını gerekçelendirmesi de bu dersi zorunluluk haline getirmektedir.

Çalışmada tespit edilen bir durum; katılımcıların özellikle cebir ispatlarının strateji seçimlerinde üst bilişsel becerilere başvurmadıkları, yoğun olarak bilişsel beceri sergiledikleridir. Bu durum bireylerin zor bir görevle karşılaştıklarında onu tamamlamaya odaklanarak süreci sorgulama, farkındalık gibi becerileri göz ardı etmelerinden kaynaklanıyor olabilir. Katılımcıların cebir ispatlarında daha başarısız olmalarının nedeni bu durum olabilir. Bu anlamda öğretmenlere ve öğretmen adaylarına yönelik üst bilişsel becerilerini (farkındalık, sorgulama yapma, planlama, izleme,

değerlendirme gibi) geliştirebilecekleri hizmet içi ve hizmet öncesi programlarla etkinlikler düzenlenebilir.

5.3.2. Benzer araştırma yürütmeyi planlayan araştırmacılara yönelik öneriler

Matematik eğitiminde ispat son yıllarda önemini arttırmış olmasına rağmen matematik öğretmenleri ve matematik öğretmen adayları için hem geometri hem de cebir alanlarını içeren geçerliği ve güvenirliği sağlanmış yeterli sayıda ispat yapma başarısı ile ilgili test geliştirilmemiştir. Bu çalışmada öğretmenler ve öğretmen adaylarının ispatlama becerilerini teşhis etmeye yönelik açık uçlu 6 sorudan oluşan ispat yapma becerisi teşhis testi ve bu teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilerek uygulanmıştır. Öğretmenlerin veya öğretmen adaylarının ispat başarılarını içeren çalışmalar yapmayı planlayan araştırmacılar bu testten yararlanabilirler. Geliştirilen bu test yardımıyla betimsel, tarama ve ilişkisel araştırmalar yürütülerek ispat başarısını etkileyen değişkenler belirlenebilir veya ispat yapma ile ilişkili değişkenler incelenebilir.

Bu çalışmada ispat yapma başarısının üst bilişsel beceri sergileme sıklığı ile paralellik gösterdiği belirlenmiştir. Ancak üst bilişsel becerilerin gelişmesi mi ispat başarısını arttırmaktadır, yoksa ispat başarısının artması mı üst bilişsel beceri sayısını arttırmaktadır sorusu araştırma kapsamı dışında tutulmuştur. Araştırmacılar bu probleme yönelik nedensel karşılaştırma veya deneysel çalışmalar yaparak çözüm arayabilirler.

Çalışmada ispatlama sürecindeki bilişsel süreçler üzerinde durulmuş ve bu süreçler biliş ve üst biliş bağlamında değerlendirilmiştir. Özellikle üst biliş kavramı, geniş bir kavram olup içerisinde planlama, izleme ve değerlendirme gibi bileşenleri de barındırmaktadır. Bu alanda gelecekte yapılacak araştırmalarda sadece üst bilişsel planlama, izleme ve değerlendirme üzerine yoğunlaşarak daha detaylı çalışmalar yapılabilir. Ayrıca bu çalışmada elde edilen "İspat önermesini okuma", "Strateji belirleme", "Analojik akıl yürütme" gibi kategorilere odaklanılarak bu kategoriler daha detaylı nitel çalışmalar yürütülüp sergilenen beceriler değerlendirilebilir.

Bu çalışmanın verileri Türk katılımcılardan toplanmış olup çalışma bu katılımcılarla sınırlandırılmıştır. Bunun yerine öğretim programları farklılık gösteren ülkelerden katılımcılar alınarak kültürler arası ve programlar arası karşılaştırmaya yer verilen çalışmalar yapılabilir.

Son yıllarda tıbbi anlamda gelişen görüntüleme cihazlarıyla (PET, fMRI gibi) birlikte üst biliş ve problem çözme üzerine yapılan çalışmalar fizyoloji ve psikoloji alanında da yoğunlaşmıştır. Bu nedenle söz konusu cihazlarda kullanılarak ispat yapma süreci zihinsel açıdan incelenebilir. Aynı zamanda bireyin ispatın hangi aşamasında zihinsel yapısında nasıl değişme olduğu ve ispatlama sürecinde üst bilişsel beceri sergilediğinde zihinsel yapıdaki değişim incelenebilir.

KAYNAKLAR

Adebule, S. O., Onijigin, E. O., Balogun, E. A. and Adebule, H. T. (2016). An evaluation of low and high achievements in mathematics in Ekıtı State secondary schools. *Journal of Educational Policy and Entrepreneurial Research, 3*(6), 9-21.

Akın, A. (2013). *Güncel psikolojik kavramlar 1: Pozitif psikoloji.* Sakaya: Sakarya Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Akın, A. ve Abacı, R. (2011). *Biliş ötesi.* Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.

Akkan, Y. (2009). *İlköğretim öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi.* Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi.

Akkan, Y. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması. *Eğitim ve Bilim, 37*(165), 104-120.

Alaylıoğlu, R. A. ve Oğuzkan, A. F. (1976). *Ansiklopedik eğitim sözlüğü*. İstanbul: İnkılap ve Aka.

Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. F. Hitt, D. Holtonve P. W. Thompson içinde, *Research in collegiate mathematics education VII* (s. 63-91). Washington: American Mathematical Society.

Alcock, L. and Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(2), 125–134.

Aler, R., Borrajo, D. and Isasi, P. (2001). Learning to solve planning problems efficiently by means of genetic programming. *Evolutionary Computation, 9*(4), 387-420.

Aljaberi, N. M. (2014). Pre-service elementary school teachers' level of mathematical thinking and their attitudes toward mathematics. *Journal of Education and Human Development, 3*(3), 181-195.

Allon, M., Gutkin, T. B. and Bruning, R. (1994). The relationship between metacognition and intelligence in normal adolescents: Some tentative but surprising findings. *Psychology in the Schools, 31*(2), 93–97. doi:10.1002/1520-6807

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869-890. doi:10.1080/00207390050203360

Altun, M. (2015). *Eğitim Fakülteleri ve Lise Matematik Öğretmenleri için Liselerde Matematik Öğretimi* (7. baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi Bas. Yay. Dağ. Ltd. Şti.

Altun, M. ve Arslan, Ç. (2006). İlköğretim öğrencilerinin problem çözme stratejilerini öğrenmeleri üzerine bir çalışma. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19*(1), 1-21.

Annevirta, T. and Vauras, M. A. (2001). Metacognitive knowledge in primary grades: A longitudinal study. *European Journal of Psychology of Education, 16*(2), 257-282.

Antonietti, A., Ignazi, S. and Perego, P. (2000). Metacognitive knowledge about problem-solving methods. *British Journal of Educational Psychology, 70*(1), 1-16. doi:10.1348/000709900157921

Arani, H. K. and Mobarakeh, S. D. (2012). Metacognitive strategies and logical/ mathematical intelligence in EFL context: Investigating possible reltionships. *Theory and Practice in Language Studies, 2*(2), 304-313.

Arıkan, A. ve Halıcıoğlu, S. (2016). *Soyut matematik*. (3. baskı), Ankara: Palme Yayıncılık

Arslan, M. ve Senemoğlu, N. (1998). Altı çizili materyalle çalışma ve tam öğrenme yönteminin öğrenme düzeyine, hatırlamaya ve ve akademik benlik kavramına etkisi. *Eğitim ve Bilim, 22*(108), 22-29.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim, 35*(156), 17-31.

Artz, A. F. and Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction, 9*(2), 137-175. doi:10.1207/s1532690xci0902_3

Ashline, G. and Quinn, R. (2009). Using mathematically rich tasks to deepen the pedagogical content knowledge of primary teachers. In B. Clarke, B. Grevholm and R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 197-214). New York, NY: Springer Science+Business Media, LLC.

Aydemir, H. and Kubanç, Y. (2014). Investigation of the cognitive behavioral problem solving process. *Turkish Studies, 9*(2), 203-219.

Aydın, U. and Ubuz, B. (2010). Turkish version of the junior metacognitive awareness inventory: The validation study. *Education and Science, 35*(157), 30-45.

Aydoğdu-İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.) içinde, *Matematik eğitiminde teoriler* (s. 65-84). Ankara: Pegem Akademi.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–235). London: Hodder & Stoughton.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. and Movshovitz-Hadar. (2002). The Teaching of Proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the international congress of mathematicians (Vol:III)* (s. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Barnard, T. and Tall, D. (1997). *Cognitive units, connections and mathematical proof.* Proceedings of PME 21, 41-48

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde Matematik Öğretimi (6-8. Sınıflar)* (1. baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Baykul, Y. (2015). *Eğitimde ve psikolojide ölçme: Klâsik test teorisi ve uygulaması* (3. baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1-2), 23-40.

Berggren, J. L. (1990). Proof, pedagogy, and the practice of mathematics in medieval Islam. *Interchange, 21*(1), 36-48.

Bloch, E. D. (2011). *Proofs and fundamentals: A first course in abstract mathematics* (Second edition). New York, NY: Springer Science+Business Media

Bondy, E. (1984). Encouraging children's use of metacognitive processes: Thinking about thinking. *Childhood Education, 60*(4), 234-238. doi:10.1080/00094056.1984.10520655

Brown, A. L. (1987). Metacognition, executive control, self-reguation, and other even more mysterious mechanisms. In F. E. Weinert and R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation and understanding* (pp. 64-116). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bruning, R. H., Schraw, G. J. and Norby, M. M. (2014). *Bilişsel psikoloji ve öğretim* (5. baskı). (Çev. Z. N. Ersözlü ve R. Ülker) Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.

Burton, D. M. (2006). *The History of Mathematics: An Introduction* (6. ed.). New York, NY: The McGraw−Hill Companies, Inc.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (13. baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Čadež, T. H. and Kolar, V. M. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 283–306. doi:10.1007/s10649-015-9598-y

Cajori, F. (1930). *A history of elementary mathematics.* London: Macmillan & Co., Ltd.

Carciofo, R., Song, N., Du, F., Wang, M. M. ve Zhang, K. (2017). Metacognitive beliefs mediate the relationship between mind wandering and negative affect. *Personality and Individual Differences, 107*, 78-87. doi:10.1016/j.paid.2016.11.033

Cevizci, A. (2005). *Paradigma Felsefe Sözlüğü* (6. baskı). İstanbul: Paradigma Yayıncılık.

Ceylan, T. (2012). *Geogebra Yazılımı Ortamında İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Geometrik İspat Biçimlerinin İncelenmesi.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Ed.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 15-38). AH Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cho, J. and Trent, A. (2006). Validity in qualitative research revisited. *Qualitative Research, 6*(3), 319–340.

Cozza, B. and Oreshkina, M. (2013). Cross-cultural study of cognitive and metacognitive processes during math problem solving. *School Science and Mathematics*, *113*(6), 275-284.

Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri: Beş yaklaşıma göe nitel araştırma ve araştırma deseni.* (Çev. M. Bütün ve S. B. Demir) Ankara: Siyasal Yayın Dağıtım.

Creswell, J. W. (2017). *Karma yöntem araştırmalarına giriş.* (Çev. M. Sözbilir) Ankara: Pegem Akademi.

Creswell, J. W. and Plano-Clark, V. L. (2014). *Karma yöntem araştırmaları: Tasarımı ve yürütülmesi.* (Çev. Y. Dede ve S. B. Demir) Ankara: Anı Yayıncılık.

Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.) içinde, *Matematik eğitiminde teoriler* (s. 35-42). Ankara: Pegem Akademi.

Çokluk, Ö., Şekercioğlu, G. ve Büyüköztürk, Ş. (2014). *Sosyal bilimler için çok değişkenli istatistik SPSS ve LISREL uygulamaları* (3. baskı). Ankara: Pegem Akademi.

de Bruin, A. B. H., Kok, E. M., Lobbestael, J. and de Grip, A. (2017). The impact of an online tool for monitoring and regulating learning at university: overconfidence, learning strategy, and personality. *Metacognition and Learning*, *12*(1), 21-43. doi:10.1007/s11409-016-9159-5

Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: Önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.) içinde, *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s. 15-35). Ankara: Pegem Akademi.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(2), 47-71. doi:10.17984/adyuebd.52880

Demir, Ö. (2013). Öğretmen adaylarının ders çalışma sırasında bilişsel farkındalık becerilerini kullanma düzeylerinin incelenmesi: Nitel bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 44*, 133-148.

Demiray, E. and Işıksal Bostan, M. (2017). Pre-service middle school mathematics teachers' evaluations of discussions: the case of proof by contradiction. *Mathematics Education Research Journal,* 29(1), 1-23.

Demircioğlu, H., Argün, Z. and Bulut, S. (2010). A case study: Assessment of preservice secondary mathematics teachers' metacognitive behaviour in the problem-solving process. *ZDM Mathematics Education, 42*(5), 493-502. doi:10.1007/s11858-010-0263-8

Desoete, A., Roeyers, H. ve Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disabilities, 34*(5), 435-447.

Dindyal, J. (2003). *Algebraic thinking in geometry at high school level.* Unpublished PhD Thesis. Illinois State University, Illinois.

Doğan, M. (2013). Nokta, doğru, doğru parçası, ışın, düzlem ve uzay kavramları. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.) içinde, *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (s. 198-221). Ankara: Pegem Akademi.

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 315-328.

Durmuş, B., Yurtkoru, E. S. ve Çinko, M. (2013). *Sosyal bilimlerde SPSS'le veri analizi* (5. baskı). İstanbul: Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hittve and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Erdem, A. R. (2005). Öğrenmede etkili yollar: öğrenme stratejileri ve öğretimi. *İlköğretim-Online, 4*(1), 1-6.

Erkuş, A. (2012). *Psikolojide ölçme ve ölçek geliştirme-I: Temel kavramlar ve işlemler* (1. baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Eysenck, M. W. and Keane, M. (2005). *Cognitive psychology a student's handbook.* New York, NY: Psychology Press Ltd.

Fang, Z. and Cox, B. E. (1999). Emergent metacognition: A study of preschoolers' literate behavior. *Journal of Research in Childhood Education, 13*(2), 175-187. doi:10.1080/02568549909594738

Fersahoğlu, Y. (2015). *Kur'ân'da zihin eğitimi*. İstanbul: Marifet Yayınları.

Field, A. (2009). *Discovering statistics using SPSS* (3. ed.). London: Sage Publication.

Filloy, E. and Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning o.f Mathematics, 9*(2), 19-26.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Fitzgerald, J. F. (1996). Proof in mathematics education. *The Journal of Education, 178*(1), 35-45.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231-236). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Forrest-Pressley, D. L. and Gillies, L. A. (1983). Children's flexible use of strategies during reading. In M. Pressley and J. R. Levin (Eds.), *Cognitive strategy research: Educational applications* (pp. 133-156). New York, NY: Springer-Verlag New York Inc.

Fukawa-Connelly, T. P. (2012). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics, 81*(3), 325–345. doi:10.1007/s10649-012-9407-9

Furinghetti, F. and Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond: Hows and whys in the teaching of proof. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 43*(4), 587-599. doi:10.1007/s11858-011-0316-7

Garofalo, J. and Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(3), 163-176.

Genç, A., Barut, Y., Aydın, C. and Başol, G. (2016). Validity and reliability of the Turkish adaptation of the Dream eflective awareness questionnaire (Draq). *Arch Neuropsychiatry, 53*(4), 296-302.

Gerstein, L. J. (2012). *Introduction to mathematical structures and proofs*. (Second edition). New York, NY: Springer Science+Business Media

Gerşil, M. ve Alkaya, A. (2011). Gezgin satıcı problemi için sezgisel metotların performans analizi. S. Birgün, S. Onursal ve N. Tunçbilek (Ed.) içinde, *XI. Üretim Araştırmaları Sempozyumu : "Toplumsal Kalkınmada Üretimin Artan Rolü"* (s. 405-412). İstanbul: İstanbul Ticaret Üniversitesi.

Gibson, W. J. and Brown, A. (2009). *Working with qualitative data.* Thousand Oaks, California: SAGE Publications Inc.

Goldstein, E. B. (2013). *Bilişsel Psikoloji.* (Çev. O. Gündüz) İstanbul: Kaknüs Yayınları.

Griffin, T. D., Wiley, J. and Salas, C. R. (2013). Supporting effective self-regulated learning:The critical role of monitoring. In R. Azevedo and V. Aleven (Eds.), *International handbook of metacognition and learning technologies* (pp. 19-34). New York, NY: Springer Science+Business Media.

Güler, A., Halıcıoğlu, M. B. ve Taşğın, S. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Güler, G. (2013). *Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebir Öğrenme Alanındaki İspat Süreçlerinin İncelenmesi.* Yayınlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Güler, G. and Dikici, R. (2014). Examining Prospective Mathematics Teachers' Proof Processes for Algebraic Concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(4), 475-497. doi:10.1080/0020739X.2013.837528

Güler, G. ve Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 11*(1), 59-83.

Gürsakal, N. (2013). *Çıkarımsal istatistik* (5. baskı). Bursa: Dora Basın Yayın Ltd. Şti.

Güven, B. (2006). *Öğretmen adaylarının küresel geometri anlama düzeylerinin karakterize edilmesi.* Yayınlanmamış doktora tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 30, 35-45.

Hamilton, E., Kelly, A. E. and Sloane, F. (2002). Funding mathematics education research: Three challenges, one continuum, and a metaphor. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 507-524). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from Exploratory Studies.In J. Kaput, A. H. Schoenfeld and E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III (Cbms Issues in Mathematics Education)* (pp. 234-283). Washington: American Mathematical Society.

Harel, G. and Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

Herbst, P. G. (2002). Engaging Students in Proving: A Double Bind on the Teacher. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 176-203. doi:10.2307/749724

Hesse-Biber, S. (2010). Qualitative Approaches to Mixed Methods Practice. *Qualitative Inquiry, 16*(6), 455-468. doi:DOI: 10.1177/1077800410364611

Hızarcı, S., Kaplan, A., İpek, A. S., Işık, C. ve Elmas, S. (2009). *Düzlem Geometri.* Ankara: Palme Yayıncılık.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18.

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Hacettepe Üniveristesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Jiang, Y., Ma, L. and Gao, L. (2016). Assessing teachers' metacognition in teaching: The Teacher Metacognition Inventory. *Teaching and Teacher Education, 59*, 403–413. doi:10.1016/j.tate.2016.07.014

Johnson, R. A. (1960). *Advanced Euclidean Geometry.* New York, NY: Dover Publications, Inc.

Kanadlı, S. ve Sağlam, Y. (2013). Üstbilişsel davranışlar problem çözmede faydalı mıdır? *İlköğretim Online, 12*(4), 1074-1085.

Kaplan, A. ve Duran, M. (2015). Ortaokul öğrencilerinin matematik dersine çalışma sürecinde üstbilişsel farkındalık düzeylerinin karşılaştırılması. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 417-445.

Kaplan, A. ve Öztürk, M. (2014). 2-8. Sınıf öğrencilerinin simetri kavramını anlamaya yönelik düşünme yaklaşımlarının incelenmesi. *İlköğretim Online, 13*(4), 1502-1515.

Kaplan, C. A. and Simon, H. A. (1990). In search of insight. *Cognitive Psychology, 22*(3), 374-419.

Karagöz, M. ve Çakır, M. (2011). Genetikte problem çözme: Kavramsal ve süreçsel zorluklar. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 11*(3), 1651-1674.

Karpuz, Y., Koparan, T. ve Güven, B. (2014). Geometride öğrencilerin şekil ve kavram bilgisi kullanımı. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 5*(2), 108-118.

Katz, B. P. and Starbird, M. (2013). *Distilling ideas: An introduction to mathematical thinking.* Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Kieran, C. (2017). Cognitive neuroscience and algebra: Challenging some traditional beliefs. In S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 157-172). Switzerland: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-45053-7_9

Kitsantas, A. and Zimmerman, B. J. (2006). Enhancing self-regulation of practice: the influence of graphing and self-evaluative standards. *Metacognition and Learning, 1*, 201-212.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal, 20*(4), 282-300.

Kleitman, S. and Stankov, L. (2007). Self-confidence and metacognitive processes. *Learning and Individual Differences, 17*(2), 161-173.

Knowlton, T. (2015). *A phenomenological study on teacher induction and satisfaction through its influence on teacher attitudes and perceptions.* Beaumont, Texas: Lamar University.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Komatsu, K. (2016). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics,* 1-16. doi:10.1007/s10649-016-9731-6

Krueger, F., Spampinato, M. V., Pardini, M., Pajevic, S., Wood, J. N., Weiss, G. H. vd. (2008). Integral calculus problem solving: An fMRI investigation. *Neuroreport, 19*(11), 1095–1099. doi:10.1097/WNR.0b013e328303fd85

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University Of Chicago Press.

Kubiszyn, T. and Borich, G. D. (2013). *Educational Testing and Measurement: Classroom Application and Practice* (Tenth ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Lawshe, C. H. (1975). A quantitative approach to content validity. *Personnel Psychology*(28), 563–575.

Lesh, R. and Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Lesseig, K. (2016). Conjecturing, generalizing and justifying: Building theory around teacher knowledge of proving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 17*(3), 1-31.

Liu, Y. and Manouchehri, A. (2013). Middle school children's mathematical reasoning and proving schemes. *Investigations in Mathematics Learning, 6*(1), 18-40.

MacDonald, T. H. (1973). The role of heuristic proof in mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 4*(2), 103-107. doi:10.1080/0020739730040203

Marca, A. L. (2014). The development of a questionnaire on metacognition for students in secondary school. In *6th International Conference on Education and New Learning Technologies* (pp. 676-691). Barcelona: IATED.

Martin, W. G. and Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

McKeown, M. G. and Beck, I. L. (2009). The role of metacognition in understanding and supporting reading comprehension. D. J. Hacker, J. Dunloskyve A. C. Graesser içinde, *Handbook of metacognition education* (s. 7-25). New York, NY: Taylor & Francis.

Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için rehber.* (Çev. S. Turan) Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.

Merzbach, U. C. and Boyer, C. B. (2011). *A history of mathematics* (3. ed.). New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Miles, M. B. and Huberman, A. M. (2015). *Genişletilmiş bir kaynak: Nitel veri analizi.* (Çev. A. Ersoy ve S. Akbaba Altun) Ankara: Pegem Akademi.

Mokhtari, K. and Reichard, C. A. (2002). Assessing students' metacognitive awareness of reading strategies. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), 249-259. doi:10.1037//0022-0663.94.2.249

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 14*(1), 147-160.

Mursell, J. (1919). The function of intuition in Descartes' philosophy of science. *The Philosophical Review*, 28, 391–401.

Newman, S. D., Carpenter, P. A., Varma, S and Just, M. A. (2003). Frontal and parietal participation in problem solving in the Tower of London: fMRI and

computational modeling of planning and high-level perception. *Neuropsychologia, 41*(12), 1668–1682. doi:10.1016/S0028-3932(03)00091-5

Nool, N. R. (2012). Exploring the metacognitive processes of prospective mathematics teachers during problem solving. *International Proceedings of Economics Development and Research, 30*, 302-306.

Okçu, V. ve Kahyaoğlu, M. (2007). İlköğretim öğretmenlerinin biliş ötesi öğrenme stratejilerinin belirlenmesi. *Süleyman Demirel Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 6*(2), 129-146.

Ormrod, J. E. (2015). *Human learning.* (Çev. E. G. Türk) Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Özdemir, E. Y. ve Sarı, S. (2016). Matematik öğrenme ve problem çözmede üstbilişin rolü. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.) içinde, *Matematik eğitiminde teoriler* (s. 655-676). Ankara: Pegem Akademi.

Özkaya, M. ve İşleyen, T. (2012). Fonksiyonlarla ilgili bazı kavram yanılgıları. *Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 3*(1), 1-32.

Özsoy, G. (2008). Üstbiliş. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, 6*(4), 713-740.

Özsoy, G. ve Günindi, Y. (2011). Okulöncesi öğretmen adaylarının üst bilişsel farkındalık düzeyleri. *İlköğretim Online, 10*(2), 430-440.

Öztürk, M., Akkan, Y. ve Kaplan, A. (2014). *Üstün yetenekli öğrencilerin problem çözerken sergiledikleri üst bilişsel becerilerin incelenmesi: Gümüşhane ili örneği*. 11. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi (s. 341). Adana: Çukurova Üniversitesi.

Öztürk, M., Akkan, Y., Kaleli-Yılmaz, G. ve Kaplan, A. (2015). Ortaokul öğrencileri ve öğretmenleriyle yapılan matematiksel ispat araştırmaları: Nitel meta-sentez çalışması. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu-2* (s. 62). Adıyaman: Adıyaman Üniversitesi. http://www.bilmat.org/ adresinden alındı

Paris, S. G. ve Winograd, P. (1998). T*he role of self-regulated learning in contextual teaching: principles and practices for teacher preparation*. Columbus, OH.: ERIC Clearinghouse on Adult, Career, and Vocational Education.

Pativisan, S. (2006). *Mathematical problem solving processes of Thai gıfted students.* Unpublished PhD thesis. Oregon State university, Oregon.

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri.* (Çev. M. Bütün ve S. B. Demir) Ankara: Pegem Akademi.

Pintrich, P. R. and Groot, E. V. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology, 82*(1), 33-40.

Pintrich, P. R., Smith, D. A., Garcia, T. and McKeachie, W. J. (1991). *A manual for the use of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ).* Ann Arbor, Michigan: The Regents of The University of Michigan.

Plotnik, R. (2009). *Psikoloji'ye giriş.* (Çev. T. Geniş) İstanbul: Kaknüs Yayınları.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 83-96.

Raman, M. (2003). Key Ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 319-325.

Rice, L. A. (2014). *Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Thinking in Proof and Argumentation.* Unpublished PhD thesis. University of Wyoming, Wyoming.

Sağlam, Y., Altun, A. ve Aşkar, P. (2009). Bilgisayar cebiri sistemleri ortamlarında öğretmen adaylarının problem çözme stratejilerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 42*(1), 351-376.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A. and Molina, Ó. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 35-50. doi:10.1007/s10649-016-9683-x

Sart, G. (2015). Nitel veri toplama teknikleri. F. N. Seggie ve Y. Bayyurt (Ed.) içinde, *Nitel araştırma: Yöntem, teknik, analiz ve yaklaşımları* (s. 219-230). Ankara: Anı Yayıncılık Eğitim ve Danışmanlık San. Tic. Ltd. Şti.

Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science, 26*(1-2), 113-125.

Schraw, G. and Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology, 19*(4), 460-475.

Seçer, İ. (2013). *SPSS ve LISREL ile pratik veri analizi: Analiz ve raporlaştırma* (1. baskı). Ankara: Anı yayıncılık.

Selçioğlu-Demirsöz, E. (2014). Bilişüstü farkındalık ve geliştirilmesi. *Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 4*(2), 112-123.

Selden, A. and Selden, J. (2015). A theoretical perspective for proof construction. *9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 9)* . Prague: Charles University.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher,* 78, 448-456.

Sertöz, S. (2013). *Matematiğin aydınlık dünyası* (31. baskı). Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları.

Shigematsu, K. and Sowder, L. (1994). Drawings for story problems: Practices in Japan and the United States. *Arithmetic Teachers, 41*(9), 544-547.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Smith, E. E. and Kosslyn, S. M. (2014). *Bilişsel psikoloji: Zihin ve beyin.* (Çev. M. Şahin) Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.

Smyth, O. and McCabe, C. (2016). Think and think again! Clinical decision making by advanced nurse practitioners in the Emergency Department. *International Emergency Nursing*. doi:10.1016/j.ienj.2016.08.001

Solow, D. (2014). *How to Read and Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes* (Sixth Edition). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Solso, R. L., Maclin, M. K. and Maclin, O. H. (2014). *Bilişsel Psikoloji.* (Çev. A. Ayçiçeği-Dinn) İstanbul: Kitabevi.

Somuncuoğlu, Y. ve Yıldırım, A. (1998). Öğrenme stratejileri: Teorik boyutları, araştırma bulguları ve uygulama için ortaya koyduğu sonuçlar. *Eğitim ve Bilim, 22*(110), 31-39.

Sowder, L. and Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Sternberg, R. J. (2000). *Handbook of human intelligence*. New York: Cambridge University Press.

Stylianides, A. J. and Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 237–253. doi:10.1007/s10649-009-9191-3

Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 11*(2), 365-378.

Tabak, J. (2004). *Algebra : sets, symbols, and the language of thought.* New York, NY: Facts On File, Inc.

Talebinezhad, M. and Negari, G. (2007). The effect of explicit teaching of concept mapping in expository writing on EFL students' self-regulation. *The Linguistics Journal, 2*(1), 69-90.

Tanışlı, D. ve Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları strateiler. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 9*(3), 1453-1497.

TC Milli Eğitim Bakanlığı. (2011). *Ortaöğretim matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar-haftalık 4 saat) dersi öğretim programı & ortaöğretim matematik (10, 11 ve 12. sınıflar-haftalık 2 saat) dersi öğretim programı.* Ankara: TC Milli Eğitim Bakanlığı.

The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Topçu, A. (2005). *The effect of the asynchronous web based course on the pre-service teachers' achievement, metacognition, and attitudes towards computer, www*

and web based course. Unpublished PhD thesis. Middle East Technical University, Ankara.

Topçu, N. (1968). *Bergson* (1. baskı). İstanbul: Hareket Yayınları,

Tschentscher, N. and Hauk, O. (2016). Frontal and parietal cortices show different spatiotemporal dynamics across problem-solving stages. *Journal of Cognitive Neuroscience, 28*(8), 1098-1110. doi:10.1162/jocn_a_00960

Tschentscher, N. and Hauk, O. (2017). Frontal cortex supports the early structuring of multiple solution steps in symbolic problem-solving. *Journal of Cognitive Neuroscience, 29*(1), 114-124. doi:10.1162/jocn_a_01027

Türnüklü, E., Gündoğdu-Alaylı, F. ve Akkaş, E. N. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dörtgenlere ilişkin algıları ve imgelerinin incelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 13*(2), 1213-1232.

Tüysüz, C., Karakuyu, Y. ve Bilgin, İ. (2008). Öğretmen adaylarının üst biliş düzeylerinin belirlenmesi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 17*(2), 147-158.

Uğurel, I., Moralı, S., Koyunkaya, M. Y. and Karahan, Ö. (2016). Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Behaviors in the Proving Process. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(2), 203-231. doi:10.12973/eurasia.2016.1523a

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. and Bay-Williams, J. M. (2013). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim* (7. Baskı). (Çev. S. Durmuş ve İ. Ö. Zembat) Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.

Van der Stel, M., Veenman, M. V. J., Deelen, K. and Haenen, J. (2010) The increasing role of metacognitive skills in math: a cross-sectional study from a developmental perspective. *ZDM Mathematics Education 4*2(2), 219–229.

Van Garderen, D. (2006). Teaching visual representation for mathematics problem solving. In M. Montague and A. K. Jitendra (Eds.), *Teaching mathematics to middle school students with learning difficulties* (s. 72-88). New York, London: The Guilford Press.

Vandevelde, S., Keer, H. V., Schellings, G. and Hout-Wolters, B. V. (2015). Using think-aloud protocol analysis to gain in-depth insights into upper primary school children's self-regulated learning. *Learning and Individual Differences, 43*(October), 11-30.

Varghese, T. (2011). Considerations concerning Balacheff's 1988 Taxonomy of mathematical proofs. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 7*(3), 181-192.

Veenman, M. V., Hout-Wolters, B. H. and Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: conceptual and methodological considerations. *Metacognition and Learning, 1*(1), 3-14.

Veenman, M. V., Wilhelm, P. and Beishuizen, J. J. (2004). The relation between intellectual and metacognitive skills from a developmental perspective. *Learning and Instruction, 14*(1), 89-109.

Velzen, J. H. (2016). Eleventh-grade high school students' accounts of mathematical metacognitive knowledge: Explicitness and systematicity. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(2), 319-333. doi:10.1007/s10763-015-9689-3

Weinert, F. (1987). Metacognition and motivation as determinants of effective learning and understanding. In F. Weinert and R. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding* (pp. 1-15). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Wolfe, H. E. (1945). *Introduction to Non-Euclidean Geometry.* New York: The Dryden Press, Inc.

Woolfolk-Hoy, A. (2015). *Eğitim psikolojisi.* (Çev. D. Özen) İstanbul: Kaknüs Yayınları.

Yang, K.-L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 307-326.

Yang, K.-L. and Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 59–76.

Yestness, N. R. (2012). *A Study of Undergraduate Students' Use of Diagrams in Understanding and Constructing Proofs about Groups, Subgroups, and Isomorphisms.* Unpublished PhD thesis. University of Northern Colorado, State of Colorado.

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme* (3. baskı). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yildiz, A., Baltaci, S. and Güven, B. (2011). Metacognitive behaviours of the eight grade gifted students in problem solving process. *The New Educational Review, 26*(4), 248-260.

Yimer, A. and Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: an emerging model. In *Conference Proceedings from MERGA 29* (pp. 575-582). Wahroonga, New South Wales: Mathematics Education Research Group of Australia.

Yüksel, G. (2004). Bilişsel- toplumsal yaklaşım. A. Ataman (Ed.) içinde, *Gelişim ve öğrenme* (s. 317-339). Ankara: Gündüz Eğitim ve Yayıncılık.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik İspat Süreci ve Eğilimleri.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

Zazkis, D., Weber, K. and Mejía-Ramos, J. P. (2015). Two proving strategies of highly successful mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior, 39*, 11-27.

Zazkis, D., Weber, K. and Mejía-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics, 93*(2), 155–173. doi:10.1007/s10649-016-9698-3

EKLER

EK 1. İzin Belgeleri

T.C.
BAYBURT VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 67155047-821-E.11043191
Konu: Doktora Çalışması İzni

MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : **a)** Milli Eğitim Bakanlığına Bağlı Okul ve Kurumlarda Yapılacak Araştırma ve Araştırma Desteğine Yönelik İzin ve Uygulama Yönergesi.
b) Atatürk Üniversitesi Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı'nın 09/10/2015 tarih ve 88179374-302.08.01-E.1500079437 sayılı yazısı.

Atatürk Üniversitesi Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı tarafından Müdürlüğümüze gönderilmiş olan yazı ekinde, doktora öğrencisi Mesut ÖZTÜRK "Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin Üstbilişsel Beceriler ve İspat Şemaları Açısından İncelenmesi" konulu doktora çalışmasını Müdürlüğümüze bağlı ilköğretim ve ortaöğretim okullarında görev yapan matematik öğretmenleri ile uygulanmasını ilgi (b) dilekçe ile talep etmektedir.

Uygulanmak istenen tez çalışmasına ilişkin ölçme araçları ilgi (a) Yönetmeliğinin 5. Maddesinin (b) bendi çerçevesine göre Müdürlüğümüz Araştırma Değerlendirme Komisyonunca incelenmiş olup, söz konusu doktora çalışmasının uygulanmasında bir sakınca olmadığı belirtilmiştir.

Bu bağlamda; 2015-2016 eğitim-öğretim yılı güz ve bahar döneminde doktora çalışmasının ilimiz genelindeki Matematik Öğretmenlerine eğitim-öğretimi aksatmadan uygulanmasında Müdürlüğümüzce bir sakınca bulunmamaktadır.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

Metin BİLGİN
Milli Eğitim Müdür Yardımcısı

EK : Tutanak (1 sayfa)

Güvenli Elektronik İmzalı
Aslı İle Aynıdır
09/11/2015

OLUR
<...>

Seydi DOĞAN
Vali a.
Milli Eğitim Müdürü

Cumhuriyet Caddesi 69000/BAYBURT
Elektronik Ağ: www.meb.gov.tr
e-posta: temelegitim69@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Z.ARSLAN VHKİ
Tel: (0 458) 211 2181
Faks: (0 458) 211 6077

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. https://evrakdogrulama.meb.gov.tr adresinden 8e29-e123-30d5-a506-6b2c kodu ile teyit edilebilir.

T.C.
BAYBURT VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 67155047-821-E.11065079 02.11.2015
Konu: Doktora Çalışması Oluru

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı)
ERZURUM

İlgi : Üniversiteniz 09/10/2015 tarih ve 88179374-302.08.01-E.1500079437 sayılı yazısı.

İlgi yazınızla talep edilen, doktora öğrenciniz Mesut ÖZTÜRK'ün "Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin Üstbilişsel Beceriler ve İspat Şemaları Açısından İncelenmesi" konulu doktora çalışmasını Müdürlüğümüze bağlı ilköğretim ve ortaöğretim okullarında görev yapan matematik öğretmenleri ile uygulamalarının yapılabilmesi için 30/10/2015 tarih ve 67155047-821-E.11043191 sayılı Müdürlüğümüz onayı ekte sunulmuştur.

Bilgilerinize arz ederim.

Seydi DOĞAN
Milli Eğitim Müdürü

Güvenli Elektronik İmzalı
Aslı İle Aynıdır
02/11/2015
Zeliha ARSLAN
VHK

EK: Olur (1 adet)

Cumhuriyet cad. BAYBURT
Elektronik Ağ: http://bayburt.meb.gov.tr
e-posta: egitim_ogretim69@meb.gov.tr

Ayrıntılı Bilgi İçin Z.ARSLAN VHKİ
Tel: (0 458) 211 21 81
Faks:(0 458) 211 60 77

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. http://evraksorgu.e-icisleri.gov.tr adresinden [illegible] kodu ile teyit edilebilir.

T.C.
MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü

Sayı : 81576613/605/11033001 28.10.2015
Konu: Araştırma İzni

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
(Öğrenci İşleri Daire Başkanlığına) Erzurum

İlgi: a) 19/10/2015 tarih ve 88179374-302.08.01-E.1500085719 sayılı yazınız
b) Millî Eğitim Bakanlığının 07/03/2012 tarih ve 2012/13 sayılı genelgesi

İlgi (a) yazı ile Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü doktora öğrencisi Mesut ÖZTÜRK'ün "Matematik Öğretmenleri ve Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin Üstbilişsel Beceriler ve İspat Şemaları Açısından İncelenmesi" isimli doktora tezi kapsamında hazırlamış olduğu veri toplama araçlarının Bayburt, Gümüşhane ve Erzurum illerinde bulunan ilkokul, ortaokul ve liselerde görev yapan matematik öğretmenlerine uygulanmasına yönelik izin talebi Genel Müdürlüğümüzce incelenmiştir.

Denetimi il, ilçe millî eğitim müdürlükleri ve okul/kurum idaresinde olmak üzere eğitim öğretim faaliyetlerini aksatmadan gönüllülük esasına dayalı olarak; onaylı bir örneği Bakanlığımızda muhafaza edilen, uygulama sırasında da mühürlü ve imzalı örnekten çoğaltılan veri toplama araçlarının 2015-2016 öğretim yılı içinde Bayburt, Gümüşhane ve Erzurum illerinde bulunan ilkokul, ortaokul ve liselerde görev yapan matematik öğretmenlerine ilgi (b) Genelge doğrultusunda uygulanması hususunda;

Gereğini ve bilgilerinizi rica ederim.

Dinçer ATEŞ
Bakan a.
Genel Müdür

Ek: Veri Toplama Araçları (sekiz sayfa)

Güvenli Elektronik İmzalıdır
Asıl ile Aynıdır
02.11.2015

Konya Yolu No:21/ANKARA
Elektronik Ağ: www.meb.gov.tr
atillademirbas@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Atilla DEMİRBAŞ
Seyda KARABULUT
Telefon:0-312-2969400/9582

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. http://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 2fc4a1be3be7-a76c-73c6 kodu ile teyit edilebilir.

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı

Sayı : 88179374-302.08.01-E.1500102177 10.11.2015
Konu : Uygulama İzni Mesut ÖZTÜRK

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 06.10.2015 tarihli ve 56785782-300-E.1500075797 sayılı belge.

Enstitünüz Doktora Programı Mesut ÖZTÜRK'ün "Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin Üstbilişsel Beceriler ve İspat Şemaları Açısından İncelenmesi" konulu doktora çalışmasın uygulama izni ile ilgili Milli Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü ve Bayburt İl Milli Eğitim Müdürlüğünden alınan yazılar ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Ömer İrfan KÜFREVİOĞLU
Rektör Yardımcısı

Ek :
1 - 2.11.2015 tarihli 67155047-821-E.11065079 Sayılı belge
2 - 28.10.2015 tarihli 81576613/605/11033001 Sayılı belge

Atatürk Üniversitesi Merkez Yerleşkesi 25240 Erzurum
Tel: +90 442 2311601
Elektronik Ağ: http://www.atauni.edu.tr/birim=ogrenci-isleri-daire-baskanligi

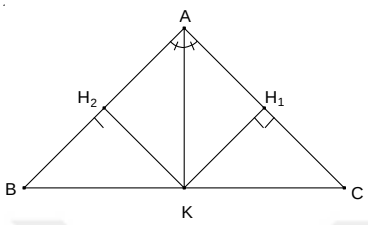
Bilgi: Aliye ÖREN
Faks: +90 442 2361026
E-Posta: odaire@atauni.edu.tr

Bu belge, 5070 sayılı Elektronik İmza Kanununun 5. maddesi gereğince güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
www.atauni.edu.tr adresinden doğrulama yapılabilir. Doğrulama [illegible]

EK 2. İnformal Görüşme Formları

Form_1

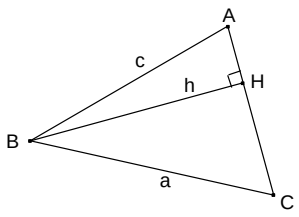
1. "Bir üçgende iki iç açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü üçüncü açının ölçüsünün yarısının 90° fazlasıdır." önermesinin doğruluğunu gösteriniz?

2. 

Yandaki ABC üçgeninde AK açıortaydır. $\frac{|KC|}{|KB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ olduğunu gösteriniz.

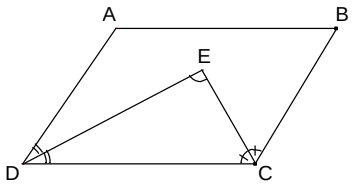
3. "Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz? (Pisagor Teoremi)

4. "Kenar uzunlukları a, b, c olan bir üçgenin a kenarına ait kenarortayın uzunluğu $2{V_a}^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ dir." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz?

5. 

Şekildeki gibi bir ABC üçgeninde $|AB| = c, |BC| = a$ ve $|AC| = b$ ve $|BH| \perp |AC|$ dir. O halde $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$ olduğunu gösteriniz? (Kosinüs Teoremi)

6. "Dışbükey bir dörtgende komşu iki açının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsü, diğer iki iç açının ölçüleri toplamının yarısına eşittir." ifadesinin doğruluğunu gösteriniz?

7. 

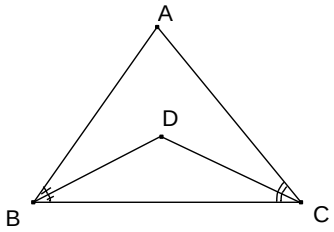
$ABCD$ paralelkenar [DE] ve [CE] ilgili açıların açıortaylarıdır. $s(\widehat{CDE}) = 90°$ olduğunu gösteriniz?

8. $\forall n \in N\ için\ 2 + 4 + 6 + \cdots + 2.(n-1) + 2n = n.(n+1)$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz?

9. $\forall x \in R\ için\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ olduğunu ispatlayınız?

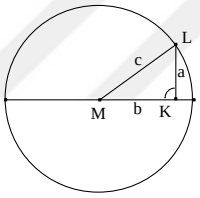
10. *"Tamsayılar kümesi üzerinde* 3 *ve* 4 *ile bölünebilen her sayı* 12 *ile bölünebilir."* ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

Form_2

1. 

Yandaki $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde B ve C köşelerinin açıortaylarının kesim noktası D'dir.
$m(D) = 90 + \frac{m(\hat{A})}{2}$ olduğunu gösteriniz?

2. "Bir üçgende bir iç açının açıortayının bu açının karşısındaki kenarı kestiği noktanın, diğer iki köşeye uzaklıkları oranı açının o köşeleri tarafındaki kenar uzunluklarının oranına eşittir." Önermesinin doğruluğunu gösteriniz?

3. 

Şekildeki M merkezli çemberde L noktası çemberin üzerindeki bir nokta ve $|MK| \perp |LK|$ olduğuna göre, $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu gösteriniz? (Pisagor Teoremi)

4. Bir ABC üçgeninde iç açıortayın uzunluğu $|AN|$ olsun. O halde $|AN| = \sqrt{|AB|.|AC| - |BN|.|NC|}$ olduğunu gösteriniz?

5. Bir ABC üçgeninde $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2.|AC|.|AB|.\cos(\hat{A})$ olduğunu gösteriniz?

6. Bir dörtgende komşu iki köşeden çizilen açıortayların kesin noktasında oluşan açının; diğer iki köşedeki açıların toplamının yarısı kadar olduğunu gösteriniz?

7. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2.n$ ifadesini en sade şekliyle yazınız?

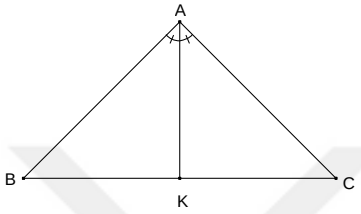
8. $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ olduğunu gösteriniz?

9. "$İki\ tek\ sayının\ çarpımı\ yine\ bir\ tek\ sayıdır$" önermesinin doğruluğunu gösteriniz?

10. "$a \in Z^+\ ve\ b \in Z^+$ olmak üzere $a|c\ ve\ b|c$ ise $a.b|c$ dir." Önermesinin doğruluğunu gösteriniz?

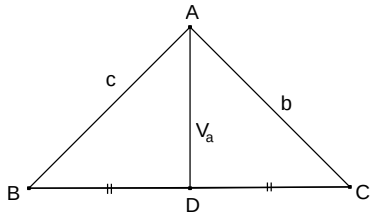
Form_3

1. "Bir üçgende bir iç açıortay ile bir dış açıortayın oluşturduğu açının ölçüsü üçgenin diğer açısının ölçüsünün yarısına eşittir" ifadesinin doğruluğunu gösteriniz?

2. 

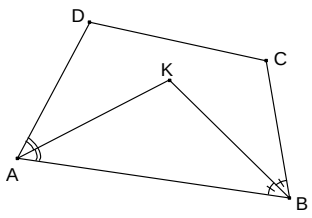
Yandaki ABC üçgeninde AK açıortaydır.
$\frac{|KC|}{|KB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ olduğunu gösteriniz.

3. Pisagor teoremini ispatlayınız?

4. 

ABC bir üçgen, $|AD|$ kenarortay V_a, kenarortayın uzunluğu $|AC| = b, |AB| = c$ ve $|BC| = a$ olduğuna göre
$2{V_a}^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ olduğunu gösteriniz?

5. Bir ABC üçgeninde $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2.|AC|.|AB|.\cos(\hat{A})$ olduğunu gösteriniz? (Kosinüs Teoremi)

6. 

$ABCD$ dörtgeninde $[AK]$ ve $[BK]$ açıortaydır.
$m(\widehat{AKB}) = \frac{m(\hat{D})+m(\hat{C})}{2}$ olduğunu gösteriniz?

7. Çift sayıların toplamı formülünü oluşturunuz?

8. "İ$ki\ sayının\ çarpımı\ bir\ çift\ sayı\ ise, bu\ sayılardan\ birisi\ mutlaka\ çift\ sayıdır$" önermesinin doğruluğunu gösteriniz?

9. $\forall x \in R\ ve\ x \neq 0$ olmak üzere $\forall z \in R$ için $\frac{z}{x} = y$ olacak şekilde bir tek $y \in R$ olduğunu gösteriniz?

10. $\forall n \in N\ için\ 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ eşitliğini sadeleştiriniz?

EK 3. Etkinlik Kartı Örneği

Katılımcı için

SORU: *"Bir üçgende iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü, bu dış açılara komşu olmayan iç açının ölçüsünün yarısının* 90° *den çıkarılmasıyla elde edilir."* İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

SORU: Bir ABC üçgeninde "$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2.|AC|.|AB|.\cos(\hat{A})$" olduğunu gösteriniz?

SORU: Birden başlayarak n'ye kadar olan $(n - tek\ sayı)$ ardışık tek sayıların toplamını veren formülü bulunuz.

SORU: "$a, b \in Z^+$ $ve\ a\ ile\ b\ arasında\ asal$ olmak üzere $a|c$ ve $b|c$ ise $a.b|c$ dir." önermesinin doğruluğunu gösteriniz?

Uygulayıcı için

SORU: *"Bir üçgende iki dış açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü, bu dış açılara komşu olmayan iç açının ölçüsünün yarısının* 90° *den çıkarılmasıyla elde edilir."* İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.

- Önerme doğru mudur, neden? (Gerekçelendirme yapması beklenmektedir).
- Yapmış olduğunuz ispat geçerli midir? Neden, nasıl karar verdiniz?
- Yaptığınız işlemleri neden yaptınız? (Yapılan her işlem için uygun şekilde sorulur).
- **Ek soru:** *"Bir iç açıortay ile bir dış açıortay arasındaki açı üçüncü açının ölçüsünün yarısı kadardır"* ifadesinin doğruluğunu gösteriniz?
- Soruyu neden geometrik olarak çözdünüz? Cebirsel olarak aynı soru çözülebilir mi?

SORU: Bir ABC üçgeninde "$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2.|AC|.|AB|.\cos(\hat{A})$" olduğunu gösteriniz?

- Önerme doğru mudur, neden? (Gerekçelendirme yapması beklenmektedir).
- Yapmış olduğunuz ispat geçerli midir? Neden, nasıl karar verdiniz?
- Yaptığınız işlemleri neden yaptınız? (Yapılan her işlem için uygun şekilde sorulur).
- Neden sentetik/analitik/geometrik ispat yaptınız? Başka bir ispat türüyle yapabilir misiniz? Nasıl?

SORU: Birden başlayarak n'ye kadar olan $(n - tek\ sayı)$ ardışık tek sayıların toplamını veren formülü bulunuz.

- Önerme doğru mudur, neden? (Gerekçelendirme yapması beklenmektedir).
- Yapmış olduğunuz ispat geçerli midir? Neden, nasıl karar verdiniz?
- Yaptığınız işlemleri neden yaptınız? (Yapılan her işlem için uygun şekilde sorulur).
- **Ek soru:** *"İkiden başlayarak* n'ye kadar olan $(n - çift\ sayı)$ *ardışık çift sayıların toplamını veren formülü bulunuz"* ifadesinin doğruluğunu gösteriniz?
- **Ek Soru:** $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz?
- Soruyu farklı bir ispat yöntemiyle çözebilir misiniz, nasıl?

SORU: "$a, b \in Z^+$ *ve a ile b arasında asal* olmak üzere $a|c$ *ve* $b|c$ ise $a.b|c$ dir." önermesinin doğruluğunu gösteriniz?

- Önerme doğru mudur, neden? (Gerekçelendirme yapması beklenmektedir).
- Yapmış olduğunuz ispat geçerli midir? Neden, nasıl karar verdiniz?
- Yaptığınız işlemleri neden yaptınız? (Yapılan her işlem için uygun şekilde sorulur).
- Sezgisel olarak ifade ettiğiniz doğruluğu sembolik olarak nasıl gösterebilirsiniz? İspat yapmada sezgisel olarak doğruluğunu göstermek yeterli olur mu?

EK 4. Gözlem Formu

Gözlenen Türü: ☐ İlköğretim Matematik Öğrencisi ☐ Ortaöğretim Matematik Öğrencisi ☐ Ortaokul Matematik Öğretmeni ☐ Ortaöğretim Matematik Öğretmeni

Gözlem Tarihi: **Gözlem Başlama-Bitiş Zamanı:**

	Davranışlar	**Gözlem Durumu**				**Açıklamalar**
Doğrulama	İspatın anahtar kavramlarını belirler	⓪	①	②	③	
	Verilen önermeyi ispatlamadan önce, önermenin doğruluğunu kontrol eder, değerlendirir	⓪	①	②	③	
	Önermeyi okuduktan sonra nasıl ispatlayacağını düşünür	⓪	①	②	③	
	Önermeyi birkaç kez okur	⓪	①	②	③	
	Önermeyi okuduktan sonra, sonuca yönelik şekil çizer ve tahminde bulunur	⓪	①	②	③	
	İspat için önemli olan adımları belirler	⓪	①	②	③	
	Anlamadığı önerme üzerine düşünür	⓪	①	②	③	
Açıklama	İspat türünü doğru olarak seçebilir	⓪	①	②	③	
	Seçtiği ispat türüne uygun ispat yazabilir	⓪	①	②	③	
	İspat sürecinde adımlar arasındaki ilişkiyi düşünür	⓪	①	②	③	
	Anlamasını gözden geçirmek için, önceki adımlara bakar	⓪	①	②	③	
	İspat adımlarının nasıl ilerlediğini görmek için, okuduklarını aklında tutmaya çalışır	⓪	①	②	③	
	İspatın nasıl başladığını ve sonuca ulaştığını kendine sorar	⓪	①	②	③	
	İspat süreci şekiller ve semboller arasındaki ilişkiyi kendine sorar	⓪	①	②	③	
Genelleme/soyutlama	*Sembollere dayalı olarak ispatını gerekçelendirir	⓪	①	②	③	
	Sözel ifadelere dayalı olarak ispatını gerekçelendirir	⓪	①	②	③	
	Genellemeye ulaşmak için birkaç örnek durumu kullanıyor	⓪	①	②	③	
	Birkaç örnekle genellemeye ulaşıyor; ancak birkaç örnek olduğu için genelleme olmadığının farkındadır	⓪	①	②	③	
	Hedeflediği sonuca ulaşıp ulaşamadığını kontrol ediyor	⓪	①	②	③	
	Bulduğu sonuçtan emin (sonucun doğruluğunda kendine güveniyor)	⓪	①	②	③	
	Yazdığı ispatın doğruluğunu değerlendirir	⓪	①	②	③	
	Genelleme yaparken neden doğru olduğuna yönelik, onu doğru yapan durumları nedenleriyle sorgular	⓪	①	②	③	

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Gümüşhane ilinin Torul ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Torul'da lise öğrenimini Trabzon'da tamamladı. Lisans öğrenimini ise Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde tamamlayarak, 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında askerliğini tamamladıktan sonra Bingöl, Ağrı ve Gümüşhane illerinde toplam 5 yıl süreyle öğretmenlik yaptı. 2011 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim dalında yüksek lisansını tamamladı. 2014 yılı Aralık ayında Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde araştırma görevlisi oldu. Halen burada görev yapmaktadır.